MÉCHANIQUE

DE L'ABBÉ

JANTET

ITARD
123

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

20

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE MÉCHANIQUE,

PAR M. L'ABBÉ JANTET,

Professeur de Philosophie au Collége royal de Dole.

SCD L. Mathématiques

A DOLE,

Chez JOLY, Imprimeur-Libraire, rue de Besançon;

Et se trouve à PARIS,

Chez BARBOU, Imprimeur-Lib., rue des Mathurins.

M. DCC. LXXXV.

AVEC APPROBATION & PRIVILEGE DU ROI

SCD LYON 1

SCD LYON 1

PRÉFACE.

ON convient aujourd'hui que la Méchanique des Corps Solides n'eſt fondée, tout au plus, que ſur trois principes ou faits avoués de tout le monde & bien conſtatés par l'expérience. Après avoir développé les raiſons métaphyſiques de ces principes, je donne les éléments de Statique : je déduis d'abord d'une ſeule propoſition les loix générales de l'équilibre : j'expoſe enſuite les propriétés du centre de gravité, & ce qu'il y a de plus ſimple ſur l'équilibre des machines. Les loix du mouvement uniforme, les principales découvertes de *Galilée* ſur le mouvement des corps ſoumis à l'action de la peſanteur, la théorie élémentaire des forces centrales, & l'application de cette théorie au mouvement dans les Sections coniques, le mouvement du centre de gravité, le choc des corps, & les obſtacles que peuvent éprouver les corps en mouvement, ſont les objets que j'ai cru devoir traiter dans la Dynamique.

Le principe d'*égalité de preſſion* prouvé par toutes les expériences faites ſur les fluides, ſans qu'il ſoit peut-être poſſible de le démontrer par le raiſonnement, eſt une vérité dont l'Hydroſtatique entière eſt la conſéquence. Je déduis de ce principe les loix de l'équilibre des fluides incompreſſibles ou élaſ-

SCD LYON 1

tiques soumis à l'action libre de leur pesanteur, & celles de l'équilibre des fluides avec les corps solides qui y sont plongés. Enfin je finis par donner une légère idée de l'Hydraulique, en exposant ce qu'il y a de plus facile à comprendre sur le mouvement des fluides qui s'écoulent ou qui jaillissent par de petits ajutages, sur la percussion des fluides & sur la réfraction des corps qui passent d'un milieu dans un autre.

J'avoue avec reconnoissance avoir profité, pour composer ces Leçons, des meilleurs Ouvrages qu'on ait publiés jusqu'à présent sur la Méchanique. Les Cours de MM. *Bossut* & *Bezout* en particulier, & les différents Traités de M. *d'Alembert*, m'ont été d'une grande utilité. Je n'ai cependant pas prétendu donner un simple extrait. En choisissant dans les Ouvrages de ces grands Géomètres, ce qui pouvoit convenir à mon objet, j'ai tâché de le disposer suivant l'ordre qui m'a paru le plus avantageux à mes Elèves, & de le présenter, généralement parlant, sous une forme nouvelle. J'ai même donné un assez grand nombre de démonstrations, que je n'ai rencontrées dans aucun Livre élémentaire, & dont j'ai fait usage pour mettre plus à la portée des Commençants différentes propositions très-essentielles pour l'intelligence de la Physique.

SCD LYON 1

TABLE
DES TITRES
Contenus en cet Ouvrage.

DÉFINITIONS & NOTIONS GÉNÉRALES
Page 1ere

PREMIÈRE PARTIE.
De la Méchanique des Corps Solides.

CHAPITRE I. *Des Principes qui servent de fondement à la Méchanique*, 10

CHAPITRE II. *Eléments de Statique*, 29
ARTICLE I. *Des loix générales de l'Equilibre*, ibid.
ARTICLE II. *Du Centre de gravité des Corps*, 74
ARTICLE III. *De l'Equilibre des Machines*, 93
Section I. *De la Machine Funiculaire*, ibid.
Section II. *Du Levier*, 105
Section III. *De la Poulie*, 120
Section IV. *Du Tour*, 126
Section V. *Du Plan incliné*, 134
Section VI. *De la Vis*, 140
Section VII. *Du Coin*, 148

SCD LYON 1

CHAPITRE III. *Eléments de Dynamique*, 153
ARTICLE I. *Des Loix du Mouvement*, ibid.
Section I. *Du Mouvement uniforme*, 154
Section II. *Du Mouvement accéléré ou retardé*, 157
Du Mouvement uniformément accéléré ou retardé, en général, 158
Du Mouvement des Corps pesants qui tombent suivant des lignes verticales, 170
Du Mouvement des Corps pesants le long des plans inclinés, 176
Du mouvement des Corps pesants le long des surfaces courbes, 181
Du Mouvement des Projectiles, 186
Du Mouvement des Pendules, 194
Section III. *Du Mouvement des Corps sollicités par des forces centrales*, 210
Du Mouvement dans des Trajectoires quelconques, 213
Du Mouvement dans les Sections coniques, 232
Section IV. *Du Mouvement des Centres de gravité*, 272
Section V. *Du Choc des Corps*, 297
Du Choc des Corps parfaitement durs & de celui des corps parfaitement mous, 298
Du Choc des Corps élastiques, 308
Section VI. *De la Réflexion des Corps*, 328

SCD LYON 1

ARTICLE II. *Des obſtacles qu'un Corps en mouvement peut éprouver*, 330
Section I. *De l'Inertie des Corps*, 331
Section II. *Du Frottement*, 334
Section III. *De la Roideur des Cordes*, 352

SECONDE PARTIE.

De la Méchanique des Fluides.

NOTIONS générales, 355
CHAPITRE I. *De l'Hydroſtatique*, 364
ARTICLE I. *De l'Equilibre des Fluides incompreſſibles* 365
ARTICLE II. *De l'Equilibre des Fluides élaſtiques*, 386
ARTICLE III. *De l'Equilibre des Fluides avec les Solides qui y ſont plongés*, 395

CHAPITRE II. *De l'Hydraulique*, 411
ARTICLE I. *De l'Ecoulement des Fluides qui ſortent de leurs réſervoirs par des orifices*, 412
ARTICLE II. *Du Mouvement des Eaux jailliſſantes*, 431
ARTICLE III. *De la Percuſſion & de la Réſiſtance des Fluides*, 442
ARTICLE IV. *De la Réfraction des Corps*, 445

Fin de la Table.

SCD LYON 1

ERRATA.

Pag.	*Lig.*	*Fautes.*	*Corrections.*
28	12	*dune force*, lisez,	*d'une force.*
29	6	coprs, *lisez*,	corps.
58	13	digonale, *lisez*,	diagonale.
109	9	une puissance *S*, *lisez*,	une puissance S'.
132	8	ou qui étant, *lisez*,	& qui étant.
161	4	l'équation *S*, *lisez*,	l'équation *s*.
267	6	ordonné, *lisez*,	ordonnée.
283	22	proportions, *lisez*,	propositions.

Nota. Ces deux dernières fautes ne se sont glissées que dans quelques exemplaires.

295	5	seroit, *lisez*,	seroient.
345	17	davavantage, *lisez*,	davantage.
422	12	expimée, *lisez*,	exprimée.

SCD LYON 1

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE MÉCHANIQUE.

DÉFINITIONS ET NOTIONS GÉNÉRALES.

I.

LA MÉCHANIQUE, prise dans le sens le plus étendu, est une science qui a pour objet les loix de l'équilibre & du mouvement des corps.

II.

LE *mouvement* est le passage d'un corps d'un lieu en un autre, d'une partie de l'étendue ou de l'espace en une autre partie. Le mouvement peut être absolu ou relatif. Un corps a un mouvement absolu, lorsqu'il répond successivement à différentes parties contiguës de l'espace infini, pénétrable &

SCD LYON 1

immobile, que nous nous représentons comme le lieu des corps. Il a un mouvement relatif, lorsqu'il vient à changer de position par rapport à d'autres corps. Supposons un homme assis dans un bateau qui soit emporté dans l'espace infini d'orient en occident : cet homme aura un mouvement absolu, mais il n'aura aucun mouvement relatif, puisqu'il sera toujours dans la même position par rapport aux différentes parties du bateau. Que l'homme dont nous parlons se promène dans le bateau en avançant vers l'occident, il aura un mouvement absolu dans l'espace, & un mouvement relatif par rapport au bateau. Enfin, que le même homme avance vers l'orient, d'une quantité égale à celle dont le bateau est emporté vers l'occident : il aura un mouvement relatif, sans avoir de mouvement absolu.

III.

L'ESPACE qu'un corps en mouvement parcourt dans un tems donné, est ce qu'on appelle la *vîtesse* de ce corps. Si deux corps en mouvement parcourent des espaces égaux dans un tems déterminé, dans une seconde, par exemple, ils ont la même vîtesse. Si dans le même tems ils parcourent des espaces inégaux, les vîtesses ne sont pas les mêmes. Celui qui parcourt un plus grand espace, a plus de vîtesse ; & celui qui parcourt un moindre espace, en a moins. La vîtesse d'un corps n'est donc grande

SCD LYON 1

ou petite, que relativement à la vîteſſe d'un autre corps.

On voit de plus, que pour juger de la vîteſſe d'un corps, il faut connoître & l'eſpace parcouru & le tems employé à parcourir cet eſpace. On m'annonce qu'un homme a fait dix lieues. Cet expoſé ne ſuffit pas pour me faire connoître ſa vîteſſe; il faut encore accuſer pendant combien d'heures il a marché. De même ſi je ſavois qu'un homme a marché pendant trois heures, je ne pourrois rien décider ſur ſa vîteſſe, à moins que je ne connuſſe en même tems le chemin qu'il a fait.

IV.

LES vîteſſes de deux corps en mouvement, comparées l'une à l'autre, ſont toujours entr'elles, comme *les eſpaces parcourus diviſés par les tems employés à les parcourir.* Pour le démontrer, ſoit un mobile A dont on ſuppoſe la vîteſſe V, & qui parcoure l'eſpace S pendant un tems T. V ſera donc l'eſpace parcouru dans un tems donné, dans une ſeconde, par exemple, & S ſera l'eſpace total parcouru pendant le nombre de ſecondes contenues dans le tems T. Or ſi l'on répète l'eſpace V autant de fois qu'il y a de ſecondes dans le tems T, c'eſt-à-dire, ſi l'on multiplie V par T, il eſt évident qu'on aura l'eſpace entier S parcouru pendant ce tems. Donc $V \times T = S$; & en diviſant par T, on aura $V = \frac{S}{T}$.

SCD LYON 1

Maintenant si l'on suppose un autre mobile B dont la vîtesse soit v, & qui parcoure l'espace s pendant un nombre de secondes t, on trouvera de même $v = \frac{s}{t}$.

Donc $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$. Cette proportion est évidente, puisque les deux antécédents sont égaux par l'équation $V = \frac{S}{T}$, & que les conséquents sont aussi égaux par l'équation $v = \frac{s}{t}$.

V.

L'équation $VT = S$ nous apprend évidemment que l'on a l'espace parcouru, en multipliant la vîtesse par le tems. L'équation $V = \frac{S}{T}$ nous apprend de même, que l'on a la vîtesse d'un corps, en divisant l'espace par le tems. Si dans cette dernière équation on multiplie l'un & l'autre membre par la fraction $\frac{T}{V}$; on aura $T = \frac{S}{V}$. Donc on a le tems pendant lequel a duré le mouvement, en divisant l'espace parcouru par la vîtesse.

Dans la proportion $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, que nous venons de démontrer ci-dessus, on peut multiplier les deux antécédents par T, & les deux conséquens

SCD LYON 1

par t, sans détruire la proportion ; & l'on aura $VT : vt :: S : s$. Ce qui fait voir que *les espaces parcourus par deux mobiles, sont en raison composée des tems & des vîtesses.*

Dans la même proportion $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, on peut multiplier les deux antécédents par la fraction $\frac{T}{V}$, & les conséquents par la fraction $\frac{t}{v}$. Alors on aura $T : t :: \frac{S}{V} : \frac{s}{v}$. Donc *les tems pendant lesquels dure le mouvement, sont en raison directe des espaces & en raison inverse des vîtesses.* Car les fractions $\frac{S}{V}$, $\frac{s}{v}$ sont en raison directe de leurs numérateurs, & en raison réciproque de leurs dénominateurs.

VI.

Il est évident que l'espace ne peut contenir une quantité de nature différente, telle que le tems. Ainsi quand nous disons que *les vîtesses sont comme les espaces divisés par les tems*, cela signifie que les vîtesses sont comme les nombres concrets ou abstraits qui expriment les mesures des espaces, divisés par les nombres abstraits qui expriment les mesures des tems. Que le globe A parcoure 20 toises en 4 secondes, & le globe B 16 toises en 2 secondes ; la vîtesse du premier sera à la vîtesse du

SCD LYON 1

ſecond, comme 5 toiſes ſont à 8 toiſes, ou ſimplement comme 5 à 8.

Au reſte, pour avoir le rapport des vîteſſes, les eſpaces doivent être évalués en meſures de même eſpèce, comme en toiſes, pieds, pouces, &c; & ſemblablement, il faut réduire les tems en meſures de même genre, comme en heures, minutes, ſecondes, &c.

VII.

ON diſtingue dans un corps la *maſſe*, le *volume* & la *denſité*. La *maſſe* eſt la ſomme des parties matérielles dont le corps eſt compoſé. Le *volume* eſt l'eſpace apparent qu'il occupe, ou, ce qui revient au même, c'eſt le nombre de pieds, de pouces cubiques, &c. qu'il paroît occuper. La *denſité* eſt la quantité de matière qu'il contient ſous un volume donné, par exemple, ſous un pied ou pouce cubique.

D'après ces définitions, il eſt aiſé de conclure que *les denſités de deux corps ſont comme les maſſes diviſées par les volumes.* Car ſoient deux corps *A* & *B* dont les maſſes, volumes & denſités ſoient reſpectivement $M, V, D ; m, v, d$. Puiſque D n'eſt autre choſe que la quantité de matière contenue ſous l'unité de volume, ſous un pouce cubique, par exemple, il eſt évident qu'en répétant cette quantité de matière autant de fois qu'il y a de pouces cubiques dans le corps, on aura la maſſe totale.

SCD LYON 1

Donc cette masse M est égale à la densité D multipliée par le volume V, qui marque le nombre de pouces cubiques occupés par le corps. Ainsi on a l'équation $DV = M$. On trouve de même pour le corps B, $dv = m$; ce qui donne la proportion $DV : dv :: M : m$; & divisant les antécédents par V & les conséquents par v, on a la proportion qu'il falloit démontrer, $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$.

VIII.

On voit donc que *les densités de deux corps sont en raison directe des masses & en raison inverse des volumes.* La proportion $DV : dv :: M : m$, fait voir de plus, que *les masses de deux corps sont en raison composée des densités & des volumes.* Si on divise dans cette proportion les antécédents par D & les conséquents par d, on aura $V : v :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$; ce qui nous apprend encore, que *les volumes de deux corps sont en raison directe des masses & en raison réciproque des densités.* Enfin de ces trois choses, la masse, le volume & la densité d'un corps, deux étant connues, on a toujours la troisième par l'équation $DV = M$.

On comprend assez que dans la comparaison qu'on fait des densités de deux corps, les volumes doivent être exprimés en mesures de même espèce.

SCD LYON 1

IX.

ON appelle *force* ou *puiſſance* en méchanique, tout ce qui peut changer l'état d'un corps, ſoit pour le faire paſſer du repos au mouvement, ou réciproquement du mouvement au repos, ſoit enfin pour faire varier ce mouvement d'une manière quelconque

X.

ON entend par *ſyſtême de corps*, l'aſſemblage de pluſieurs corps liés enſemble par des fils, par des verges ou de toute autre manière, & aſſujettis par là à ne former qu'un même tout, dont aucune partie ne peut éprouver d'action ſans que les autres n'en éprouvent auſſi. Et ſemblablement on appelle *ſyſtême de forces*, l'aſſemblage de pluſieurs forces qui agiſſent à la fois ſur un corps ou ſur un ſyſtême de corps, ſoit en s'aidant, ſoit en ſe combattant.

XI.

L'équilibre eſt l'état d'un corps ou d'un ſyſtême de corps ſollicité au mouvement par des forces qui ſe détruiſent mutuellement, ou dont l'effet eſt détruit par des obſtacles inſurmontables. L'état d'équilibre ſuppoſe donc des puiſſances qui agiſſent ſur un corps, & dont les efforts ſoient anéantis.

SCD LYON 1

XII.

Le *repos* eſt l'état d'un corps ou d'un ſyſtême de corps, dont toutes les parties demeurent dans la même place, ſans qu'aucune ſoit ſollicitée au mouvement.

Les corps dont on conſidère le mouvement & l'équilibre étant ou *ſolides* ou *fluides*, on peut diviſer aſſez naturellement la Méchanique en deux parties, dont l'une ait pour objet les ſolides & l'autre les fluides.

SCD LYON 1

PREMIÈRE PARTIE.

DE LA MÉCHANIQUE DES SOLIDES.

LA Méchanique des ſolides comprend la *Statique*, dont l'équilibre eſt l'objet; & la *Dynamique*, dont l'objet ſont les propriétés du mouvement. Ces parties ſont fondées l'une & l'autre ſur trois faits, qu'on a nommés les principes de la force d'inertie, de l'équilibre, & du mouvement compoſé. Nous commencerons par expoſer ces principes; nous traiterons enſuite de la *Statique* & de la *Dynamique*.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes qui ſervent de fondement à la Méchanique.

XIII.

PREMIER PRINCIPE FONDAMENTAL. *Tout corps perſiſtera dans ſon état, ſoit de repos, ſoit de*

SCD LYON 1

mouvement, à moins qu'une cauſe étrangère ne l'en faſſe changer.

1° Il eſt évident que ſi un corps eſt en repos, il y perſiſtera, à moins qu'une cauſe étrangère ne l'en tire. Car un corps ne peut ſe déterminer de lui-même au mouvement, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pour qu'il ſe meuve d'un côté plutôt que d'un autre.

De-là il s'enſuit que ſi un corps reçoit du mouvement par quelque cauſe que ce puiſſe être, il ne pourra de lui-même accélérer ou retarder ce mouvement.

2° Un corps mis une fois en mouvement par une cauſe quelconque, doit y perſiſter toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cauſe différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas ſur lui; c'eſt-à-dire, qu'à moins qu'une cauſe étrangère & différente de la cauſe motrice n'agiſſe ſur ce corps, il ſe mouvra perpétuellement en ligne droite & parcourra en tems égaux des eſpaces égaux.

Car ou l'action indiviſible & inſtantanée de la cauſe motrice au commencement du mouvement, ſuffit pour faire parcourir au corps un certain eſpace, ou le corps a beſoin pour ſe mouvoir, de l'action continuée de la cauſe motrice.

Dans le premier cas, il eſt viſible que l'eſpace parcouru ne peut être qu'une ligne droite décrite

SCD LYON 1

uniformément par le corps mu. Car par la supposition, passé le premier instant, l'action de la cause motrice n'existe plus, & le mouvement néanmoins subsiste encore: il sera donc nécessairement uniforme, puisqu'un corps ne peut accélérer ni retarder son mouvement de lui-même. De plus, il n'y a pas de raison pour que le corps s'écarte a droite plutôt qu'à gauche; donc dans ce premier cas, où l'on suppose qu'il soit capable de se mouvoir de lui-même pendant un certain tems indépendamment de la cause motrice, il se mouvra de lui-même uniformément & en ligne droite.

Or un corps qui peut se mouvoir de lui-même uniformément & en ligne droite pendant un certain tems, doit continuer perpétuellement à se mouvoir de la même manière, si rien ne l'en empêche. Car supposons que ce corps ait parcouru uniformément un certain espace, par exemple, trois pouces; à la fin du troisième pouce il se trouve précisément dans le même état, qu'à la fin du second, si ce n'est qu'il se trouve dans un autre lieu: donc il doit arriver au corps la même chose que quand il étoit à la fin du second pouce. Or à la fin du second pouce il lui est arrivé de parcourir de lui-même & uniformément le troisième: donc à la fin du troisième il devra parcourir uniformément le quatrième, & ainsi de suite.

Donc si l'action première & instantanée de la

SCD LYON 1

cause motrice est capable de mouvoir le corps, il sera mu uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause ne l'en empêchera pas.

Dans le second cas, puisqu'on suppose qu'aucune cause étrangère & différente de la cause motrice n'agit sur le corps, rien ne détermine donc la cause motrice à augmenter ni à diminuer; d'où il s'ensuit que son action continuée sera uniforme & constante, & qu'ainsi pendant le tems qu'elle agira, le corps se mouvra en ligne droite & uniformément. Or la même raison qui a fait agir la cause motrice constamment & uniformément pendant un certain tems, subsistant toujours tant que rien ne s'oppose à son action, il est clair que cette action doit demeurer continuellement la même, & produire constamment le même effet.

Donc en général un corps mis en mouvement par quelque cause que ce soit, y persistera toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'aucune cause nouvelle n'agira pas sur lui.

Le principe de la force d'inertie est d'ailleurs un fait qui peut se prouver par l'expérience. Nous voyons 1° *que les corps en repos y demeurent tant que rien ne les en tire;* & si quelquefois il arrive qu'un corps soit mu sans que nous connoissions la cause qui le meut, nous sommes en droit de juger & par l'analogie & par l'uniformité des loix de la nature, que cette cause, quoique non

SCD LYON 1

apparente, n'en eſt pas moins réelle. 2° Quoiqu'il n'y ait point de corps qui conſerve éternellement ſon mouvement, parce qu'il y a toujours des cauſes qui le ralentiſſent peu à peu, comme le frottement & la réſiſtance de l'air; cependant nous voyons qu'un corps en mouvement y perſiſte d'autant plus long-tems, que les cauſes qui retardent ce mouvement ſont moindres: d'où nous pouvons conclure que *le mouvement ne finiroit point, ſi les cauſes rétardatrices étoient nulles.*

La ligne droite qu'un corps décrit ou tend à décrire eſt nommée *ſa direction.*

XIV.

SECOND PRINCIPE FONDAMENTAL. *Si deux forces* P & Q (Fig. 1.) *dont les directions ſont un angle droit, agiſſent à la fois ſur un corps ou point* A; *que la force* P *ſoit telle que par ſon action ſur le mobile, elle puiſſe ſeule lui faire parcourir uniformément* A B *dans un tems déterminé, comme d'une ſeconde, & la force* Q *telle qu'elle puiſſe ſeule lui faire parcourir* AC; *je dis que par l'action compoſée de ces deux forces, le mobile décrira uniformément & dans le même tems la diagonale* AD *du parallélogramme qui a pour côtés ces mêmes lignes* AB, AC.

1° Il eſt évident que la ligne que décrira le mobile, ſera dans le plan des lignes *AB*, *AC*,

SCD LYON 1

puiſqu'il n'y a pas de raiſon pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre.

2° Si la puiſſance Q agiſſoit ſeule ſur le mobile A, ſon action l'éloigneroit de la ligne AB, d'une quantité AC, pendant une ſeconde; c'eſt ce qu'on ſuppoſe. Or l'action ſimultanée de la puiſſance P ne peut pas empêcher que le mobile en vertu de la force Q ne s'éloigne de AB d'une quantité AC. Car la direction de la puiſſance P étant perpendiculaire ſur EAC, direction de la puiſſance Q; elle ne penche ni vers C ni vers E, & il n'y a point de raiſon pourquoi elle porte le mobile vers l'un ou l'autre de ces points. Donc ſi par le point C on tire CD, parallèle à la ligne AB, le mobile à la fin de la ſeconde ſera néceſſairement ſur quelque point de cette ligne CD, qui dans toute ſon étendue eſt éloignée de AB d'une quantité égale à AC.

On démontrera par un raiſonnement ſemblable, que l'action de la puiſſance Q ne peut empêcher le mobile de s'écarter de AC d'une quantité AB, en vertu de la puiſſance P; donc ſi par le point B on tire BD parallèle à la ligne AC, le mobile au bout d'une ſeconde ſe trouvera ſur quelque point de BD. Mais il n'y a que le point D, qui ſoit tout à la fois ſur CD & ſur BD; donc le mobile au bout d'une ſeconde, ſera en D.

3° Le mobile ſe mouvant de A en D ne s'écar-

SCD LYON 1

tera pas de la diagonale AD, & son mouvement sera uniforme. Car si nous appelons T une seconde, t le tems qu'il employeroit à venir de A en c en vertu de la seule force Q, ou de A en b en vertu de la seule force P, & que nous achevions le parallélogramme $Abdc$, il est évident par ce que nous venons de démontrer, que le mobile doit, à la fin du tems t, se trouver à l'extrémité d de la diagonale Ad. Or puisque les forces Q & P, séparément prises, font mouvoir le mobile uniformément, les espaces parcourus en conséquence de leurs actions pendant un tems double, triple, quadruple, &c., seront doubles, triples, quadruples, &c., c'est-à-dire, que ces espaces seront comme les tems employés à les parcourir. Nous aurons donc la suite des raisons égales, $T : t :: AC : Ac :: AB : Ab$, ou $T : t :: AC : Ac :: CD : cd$, parce que les côtés opposés de parallélogramme sont égaux. Mais on démontre en géométrie qu'on ne peut pas avoir la proportion $AC : Ac :: CD : cd$, à moins que le point d ne soit sur la ligne droite qui joint les points A & D. Donc le mobile ne peut pas s'écarter de la diagonale.

De plus les triangles semblables ACD, Acd, donnent $AD : Ad :: AC : Ac :: T : t$; donc les espaces que le mobile décrit en suivant la diagonale, sont comme les tems employés à les décrire; donc il se meut uniformément.

XV.

SCD LYON 1

XV.

COROLLAIRE I. Puiſque les deux forces P & Q agiſſant conjointement ſur le mobile, n'ont d'autre effet que de lui faire parcourir la diagonale AD, il s'enſuit qu'à deux forces dont les directions font un angle droit, on peut toujours en ſubſtituer une ſeule, pourvu que celle-ci puiſſe faire parcourir au mobile la diagonale d'un parallélogramme rectangle, dont les côtés ſeroient décrits dans le même tems, chacun ſéparément, par l'action de la force dont il eſt la direction. Et l'on pourra pareillement conſidérer une force unique capable de faire parcourir une ligne AD, comme le réſultat de deux autres forces P & Q dont les directions ſeroient entr'elles un angle droit, & qui ſeroient capables de faire parcourir ſéparément les côtés AB, AC d'un parallélogramme dont AD eſt la diagonale. Par conſéquent on pourra toujours à la force capable de faire décrire AD, en ſubſtituer deux autres qui ſoient capables, l'une de faire décrire AB & l'autre AC.

Souvent pour abréger l'expreſſion, on appelle les forces par les noms des lignes qu'elles ſont capables de faire parcourir. On dira donc *la force* AB, *la force* AC, &c., pour exprimer les forces capables de faire décrire dans un certain tems les lignes AB, AC, &c.

SCD LYON 1

Observons encore qu'on appelle force *résultante* ou *composée*, celle qui est capable de produire seule dans un corps le même effet, que produiroient plusieurs autres forces agissantes conjointement sur le même corps ; & l'on donne à celles-ci le nom de forces *composantes*. Ainsi la force AD, capable de faire parcourir la diagonale du parallélogramme rectangle $ABDC$, est la résultante ou la force composée des puissances AB, AC; & ces puissances sont les forces composantes de la puissance AD.

XVI.

COROLLAIRE II. *Si un mobile* A (Fig. 2.) *est sollicité en même tems par deux forces suivant la même direction, & qu'elles soient capables de lui faire parcourir séparément l'une la ligne* AI, *l'autre la ligne* AL, *ce mobile, en vertu de leur action composée, décrira la ligne* AD, *égale à la somme de* AI *&* AL.

En effet, on ne peut pas avoir $AD = AI + AL$, qu'on ne suppose $AL = ID$. Par les points I, L, menons les lignes IB, LC, perpendiculaires à la diagonale, & moyennes proportionnelles entre AL & LD, & joignons les points A, C, D, B, par des lignes qui formeront un parallélogramme rectangle, dont AD sera diagonale. Achevons de plus les parallélogrammes rectangles $AIBH$, $ALCG$,

SCD LYON 1

en tirant les lignes BH, CG, parallèles, & la ligne HAG, perpendiculaire à la diagonale.

Cela posé, le mobile sollicité par les deux forces AI, AL, est dans le même cas que s'il étoit sollicité par les quatre forces AI, AL, AH, AG; puisque les deux dernières de ces forces étant égales & diamétralement opposées, ne peuvent avoir aucun effet. Or le mobile sollicité par les quatre forces AI, AL, AH, AG, est dans le même cas que s'il n'étoit soumis qu'à l'action de deux forces AB, AC; puisque AB (*Num.* XV.) est la résultante des forces AI, AH, & que AC est la résultante des forces AL, AG. Donc le mobile en vertu des forces AI, AL, sera mu de la même manière qu'en vertu des forces AB, AC; donc il décrira exactement la diagonale $AD = AI + AL$.

On voit donc que la résultante de deux forces qui agissent à la fois suivant la même ligne & dans le même sens, est égale à la *somme* de ces forces. Comparant cette résultante avec une troisième force semblablement dirigée, on trouvera de même, que l'espace parcouru en vertu de l'action composée, sera la *somme* des espaces que feroient parcourir les forces séparément prises, & l'on démontrera la même chose pour tant de puissances qu'on voudra.

XVII.

COROLLAIRE III. *Un mobile* A (Fig. 3.)

SCD LYON 1

ſollicité par deux forces diamétralement oppoſées, & capables de lui faire parcourir ſéparément, dans un tems donné, les eſpaces AD, AL, *ne parcourra dans le même tems, en vertu de leur action compoſée, que l'eſpace* AI = AD — AL.

Car la force capable de faire parcourir *AD*, produit le même effet que deux forces dont l'une feroit parcourir *AI*, & l'autre *ID* = *AL*. Or la force capable de faire parcourir *ID*, eſt détruite par la force capable de faire parcourir *AL*, puiſqu'on ſuppoſe ces forces égales & diamétralement oppoſées : donc le mobile eſt dans le même état, que s'il n'étoit ſollicité que par une force capable de lui faire parcourir *AI*, dans le tems donné.

XVIII.

COROLLAIRE IV. *Soit que les directions des deux forces* P & Q *qui agiſſent en même tems ſur un mobile* A, *faſſent un angle aigu* (Fig. 4.), *ou un angle obtus* (Fig. 5.), *ce mobile décrira la diagonale du parallélogramme* ABDC, *dont les côtés marquent ſur les directions de ces forces les effets dont elles ſont capables ſéparément : & il décrira cette diagonale dans le même tems que, par l'action de l'une quelconque de ces deux forces, il eût décrit le côté qui repréſente cette dernière force.*

En effet, concevons que par le point *A* on mène

SCD LYON 1

la ligne *HAG* perpendiculaire à la diagonale *AD*, & que par les points *C* & *B* on mène les lignes *CG*, *BH* parallèles, & les lignes *CL*, *BI* perpendiculaires à la même diagonale. Au lieu de la force *P*, repréſentée par *AB* diagonale du parallélogramme rectangle *AHBI*, on peut (*Num.* XV.) prendre les deux forces *AH* & *AI*. Par la même raiſon, au lieu de la puiſſance *Q* repréſentée par la diagonale *AC* du parallélogramme rectangle *AGCL*, on peut prendre les deux forces *AG*, *AL*. On peut donc aux deux forces *P* & *Q*, ſubſtituer les quatre forces *AH*, *AI*, *AG*, *AL*; & celles-ci ne peuvent manquer d'avoir la même réſultante que ces deux-là. Or de ces quatre forces, les deux *AH*, *AG* ne contribuent en rien à la réſultante, puiſqu'elles agiſſent ſuivant des directions oppoſées, & qu'elles ſont égales. Pour reconnoître leur égalité, conſidérons les triangles *BDI*, *CAL*: le côté *BD* de l'un eſt égal au côté *AC* de l'autre, parce qu'ils ſont des côtés oppoſés de parallélogramme: les angles en *I* & en *L* ſont droits, & les angles *CAL*, *BDI* ſont égaux, parce qu'ils ſont alternes-internes (*Fig.* 4.) & alternes-externes (*Fig.* 5.); donc les troiſièmes angles *ACL*, *DBI*, ſont néceſſairement égaux, ainſi que les côtés homologues des deux triangles. Nous avons donc $AL=DI$, & $CL=BI$. Donc auſſi $AG=AH$.

SCD LYON 1

Quant aux deux forces AI, AL, comme elles sont dirigées suivant une même ligne, l'effet qui en résulte doit être la somme $AI+AL$ des deux effets (*Fig.* 4.), parce que ces forces agissent dans le même sens; & doit être la différence $AI-AL$ (*Fig.* 5.), parce qu'elles agissent en sens contraires. Or dans la *Fig.* 4., $AI+AL=AI+DI=AD$, puisque nous venons de démontrer que $AL=DI$; & par la même raison (*Fig.* 5.) $AI-AL=AI-DI=AD$. Donc les deux forces P & Q, capables de faire parcourir les côtés d'un parallélogramme, ont dans tous les cas pour résultante, la force AD, qui feroit parcourir la diagonale.

XIX.

COROLLAIRE V. *Deux puissances composantes & leur résultante, sont entr'elles chacune comme le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.*

Soient, par exemple, (*Fig.* 6.), les deux puissances composantes P, Q, & leur résultante R. Je dis qu'on aura $P : \text{sin. } QAR :: Q : \text{sin. } PAR :: R : \text{sin. } QAP$.

Car, (*Num.* XVIII.), $P : AB :: Q : AC :: R : AD$; ou parce que $AC=BD$, on a $P : AB :: Q : BD :: R : AD$. Or dans le triangle ABD, les côtés AB, BD, AD sont proportionnels aux sinus des angles opposés ADB,

SCD LYON 1

BAD, ABD: ainſi dans la ſuite précédente de raiſons égales, on peut ſubſtituer les ſinus de ces angles à la place de leurs côtés oppoſés; & l'on aura P : ſin. ADB :: Q : ſin. BAD :: R : ſin. ABD. Mais ſin. ADB = ſin. QAR, puiſque ces angles ſont alternes-internes entre parallèles: de même ſin. ABD = ſin. QAP, puiſque les ſinus des angles qui ſont ſupplément l'un de l'autre, ſont égaux. Donc on a P : ſin. QAR :: Q : ſin. PAR :: R : ſin. QAP.

XX.

TROISIÈME PRINCIPE FONDAMENTAL. *Si deux corps dont les vîteſſes ſont en raiſon inverſe de leurs maſſes, ont des directions oppoſées, de telle manière que l'un ne puiſſe ſe mouvoir ſans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux corps.*

1° Si les deux corps ſont égaux & leurs vîteſſes égales, il eſt évident qu'ils reſteront tous deux en repos. Car alors tout étant égal de part & d'autre, il n'y a point de raiſon pourquoi l'un de ces corps l'emporte ſur l'autre.

2° Si la maſſe du premier eſt double, triple, quadruple, &c., de la maſſe du ſecond, & que la vîteſſe de celui-ci ſoit double, triple, quadruple, &c., de la vîteſſe du premier, il y aura pareillement équilibre entr'eux. Que la maſſe du premier ſoit, par exemple, 5 m & ſa vîteſſe v, tandis que la

SCD LYON 1

masse du second sera m & sa vîtesse $5v$. Il est évident qu'on peut regarder la masse $5m$ du premier comme composée de 5 masses m, qui auroient chacune la vîtesse v, & qu'en nommant F la force employée pour mouvoir chacune de ces masses avec la vîtesse v, la force nécessaire pour mouvoir la masse entière avec la même vîtesse, sera $5F$. Pareillement, F étant la force qui donneroit la vîtesse v à la seconde masse m, il faudroit (*Num.* XVI.) une force exprimée par $5F$, pour lui donner une vîtesse $5v$. Donc les deux mobiles dans le cas proposé seront animés de forces égales, qui ayant des directions opposées, se détruiront.

On voit qu'on peut employer un semblable raisonnement, pour démontrer qu'il y aura équilibre dans tout autre cas où la masse du premier corps sera multiple de celle du second, les vîtesses étant réciproquement proportionnelles aux masses.

Au reste, pour que la démonstration ne souffre aucune difficulté, on peut supposer que les deux corps sont des parallélipipèdes rectangles, de bases égales & semblables, & de différente longueur, (*Fig.* 7.), qui se choquent par leurs bases. Nous verrons ailleurs que le principe est généralement vrai, quelle que soit la figure des corps.

3° Si l'une des masses n'est pas multiple de l'autre, mais que ces masses soient entr'elles dans le rapport de tels nombres qu'on voudra, il y aura toujours

SCD LYON 1

équilibre, pourvu qu'elles soient en raison inverse des vîtesses. On peut le démontrer pour tous les cas, comme nous allons le démontrer pour le suivant. Supposons que la masse du premier corps soit $3m$ & sa vîtesse $8v$; que la masse du second soit $4m$ & sa vîtesse $6v$. Il est clair que la force qui anime l'un & l'autre de ces corps, est égale à celle qui animeroit un autre corps dont la masse seroit m & la vîtesse $24v$. Car la masse $3m$ étant triple de la masse m, la vîtesse $24v$ est triple de la vîtesse $8v$; & de même la masse $4m$ étant quadruple de m, $24v$ est aussi quadruple de $6v$. Donc les forces qui animent les deux corps proposés, seront égales à une troisième force, & par conséquent égales entr'elles; & puisqu'elles sont diamétralement opposées, elles se détruiront. Donc les deux corps seront en équilibre.

XXI.

COROLLAIRE I. On appelle *quantité de mouvement* d'un corps, le produit de sa masse par sa vîtesse. Or les vîtesses de deux corps ne peuvent pas être en raison inverse des masses, que les produits des masses par les vîtesses ne soient égaux, & qu'il n'y ait par conséquent égalité entre les quantités de mouvement des deux corps. *Donc il y a équilibre, lorsque deux corps agissent en sens contraires & qu'ils ont des quantités égales de mouvement.*

SCD LYON 1

XXII.

COROLLAIRE II. Nous ne pouvons juger des forces qui agiſſent ſur les corps, que par les effets qu'elles produiſent: & dans le fond, pour déterminer les loix de l'équilibre & du mouvement, il ſuffit d'eſtimer les raports des forces par ceux de leurs effets, comme on le verra dans la ſuite de cet ouvrage. Or le troiſième principe fondamental que nous venons de démontrer, nous donne le moyen de repréſenter ainſi les forces par leurs effets, & d'en avoir une juſte meſure. Car ou les corps dont on veut comparer les forces, ont la méme vîteſſe, ou leurs vîteſſes ſont différentes.

Dans le premier cas, il eſt évident que l'effet produit dans l'un & l'autre corps, n'eſt autre choſe que la vîteſſe communiquée à tous les points de la maſſe, ou répétée autant de fois qu'il y a de points dans la maſſe; ou, ce qui eſt encore la même choſe, le produit de la vîteſſe par la maſſe, produit qui conſtitue la quantité de mouvement. En meſurant donc par leurs effets les forces de deux corps mus avec la même vîteſſe, nous aurons la proportion ſuivante: *la force du premier corps eſt à la force du ſecond, comme la quantité de mouvement du premier eſt à la quantité de mouvement du ſecond.*

Dans le ſecond cas, où l'on ſuppoſe que les

vîteſſes des deux mobiles ſont différentes, on trouvera encore que *les effets qui repréſentent les forces, ſont comme les quantités de mouvement.* En effet, ſoient M & V la maſſe & la vîteſſe du premier corps A; m & v la maſſe & la vîteſſe du du ſecond B. Si nous ſuppoſions un troiſième corps C dont la vîteſſe fût V & dont la maſſe fût $\frac{mv}{V}$, ſa force ſeroit égale à celle du corps B, puiſque les maſſes de B & de C ſeroient en raiſon inverſe des vîteſſes. Or la force du corps A & celle du corps C, ſeroient entr'elles comme les quantités de mouvement dont ces corps ſont animés, puiſqu'ils auroient l'un & l'autre même vîteſſe; c'eſt-à-dire, que la force de A ſeroit à la force de C, comme MV eſt à $\frac{mv}{V} \times V$, ou comme MV eſt à mv. Donc auſſi la force de A ſeroit à la force de B, comme MV eſt à mv, ou *comme la quantité de mouvement du premier eſt à la quantité de mouvement du ſecond.*

XXIII.

REMARQUE. On diſtingue deux ſortes de forces, ſavoir *les forces vives* ou *motrices*, qui produiſent un mouvement réel & actuel; & *les forces mortes* ou *de preſſion*, qui tendent ſeulement à imprimer du mouvement, & qui n'en produiſent

SCD LYON 1

pas, parce que leur effet est détruit par la résistance de quelque obstacle, ou par d'autres forces opposées. Les vîtesses qui résultent des premières, s'appellent vîtesses *réelles*; les vîtesses que les secondes tendent à produire, s'appellent vîtesses *virtuelles*. Un boulet sortant de la bouche du canon, est animé d'une force vive : l'effort qu'exerce à chaque instant un globe soutenu par une table qui l'empêche de descendre, est une force morte. On voit (*Num.* XXII.) qu'*on peut avoir l'expression d'une force vive, en multipliant la masse du corps par sa vîtesse réelle, & l'expression dune force morte, en multipliant pareillement la masse du corps par sa vîtesse virtuelle.*

CHAPITRE II.

ÉLÉMENS DE STATIQUE.

LA Statique a pour objet l'équilibre des corps. Nous déterminerons d'abord qu'elle doit être la valeur, la position & direction de plusieurs puissances qui agissent sur un coprs, pour que leurs efforts se détruisent. Cette partie comprendra les loix générales de l'équilibre. Nous déduirons ensuite de ces loix les propriétés du centre de gravité des corps, & les conditions d'équilibre dans les différentes machines dont on fait usage en Méchanique.

ARTICLE PREMIER.

Des Loix générales de l'Équilibre.

NOUS avons déjà vu que *si un corps est sollicité en sens diamétralement opposés par des forces égales, il sera nécessairement en équilibre.* C'est de ce principe très-simple & très-évident que nous allons déduire les loix de l'équilibre.

XXIV.

ON appelle *moment* d'une puissance, le produit de cette puissance par la distance de sa direction à

SCD LYON 1

un *point*, à une *ligne*, à un *plan*. Ainsi dans la *Fig.* 6, en supposant que EF marque la distance du point E à la direction AB, le produit $P \times EF$ sera le moment de la puissance P relativement au point E. Les points, lignes, plans par rapport auxquels on considère les moments, s'appellent *centres de moments*, *axes de moments*, *plans de moments*.

XXV.

THÉORÈME. *Le moment de la résultante de deux puissances par rapport à un point pris dans le plan de ces puissances, est égal à la somme ou à la différence de leurs moments, suivant qu'elles tendent à faire tourner autour de ce point dans le même sens ou dans des sens opposés.*

Soient deux puissances composantes P & Q (*Fig.* 8, 9, 10.) représentées par les lignes AB, AC, dont la résultante R soit exprimée par la diagonale AD. On peut supposer le centre E des moments ou dans l'angle formé par les directions de ces puissances (*Fig.* 9.), ou dans l'angle formé par leurs directions prolongées (*Fig.* 10.), ou enfin supposer que le centre des moments soit pris hors de ces angles (*Fig.* 8.). On voit que dans les deux premiers cas, les puissances tendent à faire tourner autour du point E en sens opposés, & que dans le dernier elles tendent l'une & l'autre à faire tourner dans le même sens.

Pour démontrer le théorème, menons du point E les lignes EA, EB, ED aux sommets des angles A, B, D, & les lignes EF, EH, EG, perpendiculaires sur les directions AB, AC, AD des puissances composantes & de la résultante. La ligne IH perpendiculaire comprise entre les côtés AC & BD du parallélogramme, marquera la hauteur du triangle ADC, en prenant AC pour base de ce triangle: car elle sera égale à la ligne DL abaissée perpendiculairement du sommet D sur AC: & puisque la surface d'un triangle est égale au demi-produit de la base par la hauteur, nous aurons dans les trois figures, $EAD = \frac{AD \times EG}{2}$, $EAB = \frac{AB \times EF}{2}$, $ABD = ACD = \frac{AC \times IH}{2}$, $EBD = \frac{BD \times EI}{2} = \frac{AC \times EI}{2}$, parce que $AC = BD$ par la nature du parallélogramme.

Cela posé, nous aurons 1° (*Fig.* 8), $EAD = EAB + EBD + ABD$, c'est-à-dire, $\frac{AD \times EG}{2} = \frac{AB \times EF}{2} + \frac{AC \times EI}{2} + \frac{AC \times IH}{2}$. Doublant tous les termes, & observant que $AC \times EI + AC \times IH = AC \times EH$, l'équation deviendra $AD \times EG = AB \times EF + AC \times EH$. Enfin substituant les puissances R, P, Q, au lieu des lignes AD, AB, AC, qui les représentent,

SCD LYON 1

on aura $R \times EG = P \times EF + Q \times EH$. Donc si le centre des moments n'est pas compris dans l'angle formé par les directions des puissances, ni dans son opposé au sommet, le moment de la résultante est égal à la somme des moments des puissances composantes.

2° Nous aurons dans la *Fig.* 9, $EAD = ABD - EBD - EAB$; c'est-à-dire, $\frac{AD \times EG}{2} = \frac{AC \times IH}{2} - \frac{AC \times EI}{2} - \frac{AB \times EF}{2}$. Multipliant par 2 l'un & l'autre membre, & observant que $AC \times IH - AC \times EI = AC \times EH$, on voit que l'équation devient $AD \times EG = AC \times EH - AB \times EF$, ou $R \times EG = Q \times EH - P \times EF$; en mettant au lieu des lignes AD, AB, AC, les forces qu'elles représentent.

3° On peut faire un semblable raisonnement pour la *Fig.* 10. Car dans cette figure, $EAD = EBD - ABD - EAB$; c'est-à-dire, $\frac{AD \times EG}{2} = \frac{AC \times EI}{2} - \frac{AC \times IH}{2} - \frac{AB \times EF}{2}$. Donc puisque $AC \times EI - AC \times IH = AC \times EH$, nous aurons $AD \times EG = AC \times EH - AB \times EF$, ou $R \times EG = Q \times EH - P \times EF$.

On voit donc en général, que si les deux puissances composantes tendent à faire tourner dans le même

SCD LYON 1

même ſens autour du point E, le moment de leur réſultante eſt égal à la ſomme des moments de ces puiſſances; & que ſi les deux puiſſances compoſantes tendent à faire tourner en ſens contraires, le moment de la réſultante vaut la différence des moments de ces puiſſances.

Nous venons de trouver qu'en prenant le centre E des moments entre les directions de la réſultante & de la puiſſance P, le moment de la réſultante étoit égal au moment de la puiſſance Q, moins le moment de la puiſſance P. Si l'on prenoit le point E entre les directions de la réſultante & de la puiſſance Q, on trouveroit pareillement que le moment de la réſultante vaudroit le moment de la puiſſance P, moins le moment de la puiſſance Q.

XXVI.

COROLLAIRE I. *Les moments de la réſultante & de l'une des puiſſances compoſantes, conſidérés par rapport à un point pris ſur la direction de l'autre puiſſance compoſante, ſont égaux.*

Car la perpendiculaire EF (*Fig.* 8.) eſt d'autant moindre, qu'on ſuppoſe le point E plus près de la direction AB; & cette perpendiculaire devient zéro, quand on ſuppoſe le point E ſur cette direction (*Fig.* 11.). Donc alors dans l'équation $R \times EG = P \times EF + Q \times EH$, la quantité $P \times EF$ devient nulle, & l'on a $R \times EG = Q \times EH$.

SCD LYON 1

On tire de cette équation l'analogie $R : Q :: EH : EG$, qui fait voir que *la résultante & l'une des puissances composantes, sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d'un point pris sur la direction de l'autre puissance composante.*

XXVII.

COROLLAIRE II. *Les moments des deux puissances composantes, par rapport à un point pris sur la direction de leur résultante, sont égaux.*

Car plus on suppose le point E (*Fig.* 9) près de la direction AD, moindre est la perpendiculaire EG; & cette perpendiculaire devient zéro, si on prend le point E sur la ligne AD (*Fig.* 12). Donc alors le moment de la résultante est zéro; & comme il est égal à la différence des moments des puissances composantes, cette différence est nulle. Donc ces moments sont égaux, & l'on a $P \times EF = Q \times EH$.

Cette équation donne l'analogie $P : Q :: EH : EF$; ce qui démontre que *les deux puissances composantes sont en raison inverse des perpendiculaires menées sur leurs directions, d'un point pris dans la direction de la résultante.*

XXVIII.

COROLLAIRE III. Concevons que les directions des deux puissances composantes P, Q (*Fig.* 13

& 14) passent constamment par deux points M, N, & que leur point de concours A s'éloigne de plus en plus, suivant la direction prolongée AK de la résultante.

1° Il est évident que plus le point A s'éloignera, plus les directions des puissances composantes approcheront du parallélisme, de manière que si le point A s'éloignoit jusqu'à l'infini, ces directions deviendroient parallèles. Les forces P & Q (*Fig.* 13.) deviendroient donc des forces parallèles dirigées dans le même sens, comme on les voit dans la *Fig.* 15; & les forces P & Q (*Fig.* 14.) deviendroient des forces parallèles, dirigées en sens opposés, comme elles sont représentées dans la *Fig.* 16.

2° Le théorème & les corollaires précédents pourront s'appliquer à ces forces, quel que soit l'éloignement où l'on suppose le point A. Donc si l'on suppose ce point infiniment éloigné, & les forces P, Q, R, parallèles (*Fig.* 15 & 16), après avoir tiré des points E, E', E'', E''', des perpendiculaires sur leurs directions, on aura les équations suivantes :

$$R \times E'G' = P \times E'F' + Q \times E'H';$$
$$R \times E''G'' = Q \times E''H'' - P \times E''F'';$$
$$R \times E'''G''' = P \times E'''F''' - Q \times E'''H''';$$
$$P \times EG = Q \times GH;$$
$$P \times EH = R \times GH;$$
$$R \times EG = Q \times EH.$$

SCD LYON 1

Les trois dernières de ces équations donnent les proportions suivantes :

$$P : GH :: Q : EG;$$
$$P : GH :: R : EH;$$
$$R : EH :: Q : EG.$$

D'où l'on tire la suite de raisons égales $P : GH :: Q : EG :: R : EH$; ce qui nous apprend que *deux puissances parallèles & leur résultante, sont proportionnelles chacune à la partie de la perpendiculaire comprise entre les directions des deux autres.*

Et puisque les parties IL, IK, KL, d'une oblique quelconque, interceptées entre les mêmes directions, sont entr'elles comme les parties EH, EG, GH, de la perpendiculaire, on pourra dire aussi que *deux forces parallèles & leur résultante sont entr'elles chacune comme la partie d'une oblique, interceptée entre les directions des deux autres forces.*

XXIX.

COROLLAIRE IV. *La résultante de deux forces parallèles est égale à leur somme, si elles agissent dans le même sens, ou à leur différence, si elles agissent en sens contraires.*

Pour le démontrer, supposons d'abord que les forces P & Q agissent dans le même sens (*Fig.* 15.). Dans la suite des raisons égales $P : GH :: Q : EG$

SCD LYON 1

$:: R : EH$, la somme des deux premiers antécédents est à la somme de leurs conséquents, comme le troisième antécédent est à son conséquent; c'est-à-dire, $P + Q : GH + EG :: R : EH$. Mais dans cette proportion les deux conséquents sont égaux; donc il y a égalité entre les deux antécédents. Donc $R = P + Q$.

Supposons ensuite que les forces P & Q (*Fig.* 16.) agissent en sens opposés. Dans la suite de raisons égales $P : GH :: Q : EG :: R : EH$, la différence des deux premiers antécédents sera à la différence des deux premiers conséquents, comme le troisième antécédent est à son conséquent. Donc $P - Q : GH - EG :: R : EH$. Or il est évident que $EH = GH - EG$. Donc $R = P - Q$.

On peut remarquer ici que lorsque deux puissances parallèles agissent en sens contraires, la plus grande se trouve entre les directions de la résultante & de la plus petite. En effet, la puissance P (*Fig* 16.) est proportionnelle à la ligne HG, tandis que les puissances Q, R, ne sont respectivement proportionnelles qu'aux parties EG, HE de cette ligne.

XXX.

COROLLAIRE V. On trouvera donc toujours la position de la résultante de deux forces parallèles, en employant la proportion suivante, que nous avons démontrée *Num.* XXVIII. *La résultante*

SCD LYON 1

est à la distance compriſe entre les directions des forces compoſantes, comme l'une de ces forces est à la distance compriſe entre les directions de l'autre & de la réſultante.

Car il eſt évident que la valeur & la poſition des forces compoſantes étant données, les trois premiers termes de cette proportion ſont connus, & font connoître le quatrième, qui eſt la diſtance de la réſultante à la direction de l'une des forces compoſantes. Donc la poſition de la réſultante eſt déterminée.

XXXI.

COROLLAIRE VI. *La réſultante de tant de puiſſances parallèles qu'on voudra, eſt égale à la ſomme de celles qui ſont dirigées en un ſens, moins la ſomme de celles qui ſont dirigées en ſens oppoſé.*

Pour le démontrer, ſuppoſons trois puiſſances P, Q, T, qui agiſſent dans un ſens, & dont la réſultante ſoit R. Suppoſons pareillement trois puiſſances S, V, Z, qui ſoient dirigées en ſens oppoſé, & dont la réſultante ſoit R'. Si l'on nomme r la réſultante des deux puiſſances P, Q, on aura $r = P + Q$, parce que (*Num.* XXIX.) la réſultante de deux puiſſances parallèles, dirigées dans le même ſens, eſt égale à leur ſomme. Par la même raiſon, la réſultante de la puiſſance r & de la puiſſance T ſera $r + T = P + Q + T$: or la réſul-

SCD LYON 1

tante de la puiſſance r & de la puiſſance T eſt la réſultante des trois puiſſances P, Q, T, parce que r repréſente P & Q dont elle eſt la réſultante; donc $R=P+Q+T$.

On démontrera par un ſemblable raiſonnement, que $R'=S+V+Z$. Cela poſé, on peut regarder les deux réſultantes R, R', comme deux puiſſances parallèles qui agiſſent en ſens contraire: donc (*Num.* XXIX) leur réſultante que j'appelle R'', ſera égale à leur différence; & ſi nous ſuppoſons que R ſoit plus grande que R', nous aurons $R''=R-R'=P+Q+T-S-V-Z$; c'eſt-à-dire, que la réſultante totale des forces parallèles eſt égale à la ſomme de celles qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent en ſens oppoſé.

Si l'on avoit ſuppoſé R' plus grande que R, on auroit eu $R''=R'-R=S+V+Z-P-Q-T$; d'où l'on auroit tiré la même conſéquence.

Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit appliquer un raiſonnement ſemblable, quel que fût le nombre des forces parallèles.

XXXII.

COROLLAIRE VII. *Si on trouve la réſultante de pluſieurs forces compoſantes, & qu'on lui ſubſtitue une force égale dirigée ſur la même ligne, mais en un ſens diamétralement oppoſé, cette*

SCD LYON 1

nouvelle force fera équilibre à toutes les compoſantes.

Cela eſt évident : car la force qu'on ſubſtitueroit comme on vient de le propoſer, étant égale & diamétralement oppoſée à la réſultante de toutes les puiſſances compoſantes, feroit équilibre à cette réſultante. Elle feroit donc équilibre à toutes les forces compoſantes, qui ne peuvent avoir que l'effet de leur réſultante.

XXXIII.

COROLLAIRE VIII. *Quelque nombre de forces que l'on ait ; quelques grandeurs & quelques directions qu'elles aient, pourvu qu'elles ſoient toutes dans un même plan ; le moment de la réſultante de toutes ces forces, par rapport à tel point qu'on voudra, pris dans ce plan, ſera toujours égal à la ſomme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un ſens autour de ce point, moins la ſomme des moments de celles qui tendent à faire tourner dans un ſens contraire.*

Soient (*Fig.* 17.) les puiſſances quelconques P, Q, T, V, dont on ſuppoſe R la réſultante. Prenons à volonté le point E pour centre des moments, & de ce point menons ſur les directions des puiſſances les perpendiculaires EF, EH, EL, EI, EG. Suppoſons de plus, que r ſoit la réſultante des deux puiſſances P, Q ; & nommons m

ſon moment ; que r' ſoit la réſultante de r & de la puiſſance T, & nommons m' le moment de r'. R ſera la réſultante de r' & de la puiſſance V. Cela poſé, nous aurons par le théorème (*Num.* XXV.),

1° $m = P \times EF + Q \times EH$;
2° $m' = m - T \times EL$;
3° $R \times EG = m' - V \times EI$.

Dans ces équations, la ſomme des premiers membres égale la ſomme des ſeconds ; c'eſt-à-dire, que $m + m' + R \times EG = P \times EF + Q \times EH + m - T \times EL + m' - V \times EI$. Retranchant de part & d'autre $m + m'$, il reſte l'équation qu'il falloit démontrer $R \times EG = P \times EF + Q \times EH - T \times EL - V \times EI$.

XXXIV.

COROLLAIRE IX. Soient tant de puiſſances parallèles qu'on voudra, Z, V, P, T, Q (*Fig.* 18.), qui aient pour réſultante une force R parallèle. Suppoſons de plus, que parmi les puiſſances compoſantes, il y en ait quelques-unes, par exemple, V & T, qui agiſſent en un ſens, tandis que les autres ſont dirigées en ſens oppoſé.

Nous aurons 1° $R = Z + P + Q - V - T$, parce que (*Num.* XXXI) la réſultante de pluſieurs forces parallèles eſt égale à la ſomme de

SCD LYON 1

celles qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent en ſens contraire.

Nous aurons 2° $R \times EG = P \times EF + Q \times EH - T \times EL + V \times EI - Z \times ED$, parce que le moment de la réſultante de pluſieurs forces vaut les moments de celles qui tendent à faire tourner dans un ſens autour du centre E, moins les moments de celles qui tendent à faire tourner en ſens contraire.

XXXV.

COROLLAIRE X. Si l'on diviſe par R la ſeconde équation du corollaire précédent, on aura

$$EG = \frac{P \times EF + Q \times EH - T \times EL + V \times EI - Z \times ED}{R}$$

$$\text{ou } EG = \frac{P \times EF + Q \times EH - T \times EL + V \times EI - Z \times ED.}{Z + P + Q - V - T}$$

Ainſi connoiſſant la valeur & la poſition de tant de puiſſances parallèles qu'on voudra, il eſt facile de trouver la valeur de leur réſultante & la poſition de la ligne ſuivant laquelle elle agit. Car dans l'équation précédente, on connoît toutes les quantités qui forment le ſecond membre. Donc on connoît la ligne EG, qui eſt la diſtance du centre des moments à la réſultante.

XXXVI.

COROLLAIRE XI. Veut-on ſavoir 1° quelle ſeroit la valeur de la diſtance EG du centre des

SCD LYON 1

moments à la direction de la résultante, dans le cas où toutes les puissances agiroient dans le même sens? Qu'on fasse $V=o$, $T=o$, dans les équations du *Corollaire* X, & l'on trouvera

$$EG=\frac{P\times EF+Q\times EH-Z\times ED}{Z+P+Q};$$

ce qui nous apprend que *la distance du centre des moments à la direction de la résultante, est égale à la différence des moments, divisée par la somme des forces.*

2° Veut-on savoir quelle seroit la distance EG du centre des moments à la direction de la résultante, dans le cas où toutes les forces parallèles agiroient dans le même sens & seroient du même côté du centre des moments? Qu'on fasse $V=o$, $T=o$, $Z=o$, dans les équations du *Corollaire* X, & l'on aura

$$EG=\frac{P\times EF+Q\times EH}{P+Q};$$

ce qui nous apprend que *la distance du centre des moments à la direction de la résultante, seroit égale à la somme des moments des forces, divisée par la somme de ces forces.*

XXXVII.

COROLLAIRE XII. Supposons à présent plusieurs puissances parallèles P, Q, T, V (*Fig.* 19.) qui agissent dans différents plans; & que l'une d'en-

SCD LYON 1

tr'elles, par exemple T, agiſſe dans un ſens contraire à celui dans lequel les autres ſont dirigées.

1° Leur réſultante ſera $P+Q-T+V$, comme nous l'avons démontré *Num.* XXXI.

2° Que l'on conçoive deux plans $ABCD$, $ADEF$, parallèles aux directions des puiſſances & dont l'un ſoit perpendiculaire à l'autre : que l'on conçoive de plus un troiſième plan $BAFG$, perpendiculaire aux deux premiers. Je dis que *la réſultante* R *de toutes les puiſſances ſera autant éloignée du plan* ABCD, *qu'elle en ſeroit éloignée ſi toutes les forces compoſantes agiſſoient dans l'interſection* AF *des deux autres plans, aux extrémités* p', q', t', v' *des lignes* pp', qq', tt', vv', *parallèles à l'interſection* AB. (On ſuppoſe que p, q, t, v, ſont les points où les directions des forces parallèles rencontrent le plan $BAFG$.)

En effet, ſi les puiſſances P & Q agiſſoient aux points p', q', leur réſultante (*Num.* XXVIII.) paſſeroit par un point m', tel qu'on auroit la proportion $P : Q :: q'm' : p'm'$. Mais puiſqu'on ſuppoſe que ces puiſſances agiſſent aux points p, q, leur réſultante doit paſſer par un point m, tel qu'on ait la proportion $P : Q :: qm : pm$. Dans ces deux proportions la première raiſon eſt la même : donc les ſecondes raiſons ſont égales & donnent $q'm' : p'm' :: qm : pm$. Donc les lignes pq, $p'q'$ ſont coupées proportionnellement aux points m & m'. Donc ſi

SCD LYON 1

l'on mène la ligne mm', elle ſera parallèle aux lignes pp', qq', AB, & par conſéquent la direction de la réſultante qui paſſe par le point m ſera autant éloignée du plan $ABCD$, que ſi les deux puiſſances P & Q étoient appliquées aux points p' & q'.

Pareillement la réſultante de la puiſſance T appliquée au point t', & de la puiſſance $P+Q$ appliquée au point m', paſſeroit par un point n', tel qu'on auroit la proportion $P+Q : T :: t'n' : m'n'$. Mais puiſqu'on ſuppoſe que ces puiſſances agiſſent aux points t, m, leur réſultante paſſe par un point n tellement placé, qu'on ait la proportion $P+Q : T :: tn : mn$. Donc $t'n' : m'n' :: tn : mn$. Ainſi les lignes tn, $t'n'$ ſont coupées proportionnellement aux points m, m', & par conſéquent la ligne nn' eſt parallèle aux lignes mm', tt', AB. Donc la direction de la réſultante des trois puiſſances, qui paſſe par le point n, ſera autant éloignée du plan $ABCD$, que ſi les puiſſances T, P, Q étoient appliquées aux points t', p', q'.

On démontreroit par un ſemblable raiſonnement, que la réſultante R des quatre puiſſances P, Q, T, V, paſſe par quelque point r autant éloigné du plan $ABCD$, qu'en ſeroit éloigné le point r' par où elle paſſeroit, ſi les quatre puiſſances étoient appliquées aux points p', q', t', v'; & il eſt évident que la démonſtration ſeroit applicable quel que fût le nombre des puiſſances parallèles.

SCD LYON 1

XXXVIII.

COROLLAIRE XIII. Supposons comme dans le corollaire précédent, tant de puissances parallèles qu'on voudra, & qui agissent, si l'on veut, dans différents plans. *Le moment de la résultante de ces puissances par rapport à un plan parallèle à leurs directions, est égal aux moments de celles qui tendent à faire tourner dans un sens autour de l'intersection de ce plan & d'un plan perpendiculaire aux directions des puissances, moins les moments de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire autour de la même intersection.*

Pour le démontrer, supposons (*Fig.* 19.) toutes choses comme dans le corollaire précédent, & menons des points p, q, t, v, r, les lignes pp'', qq'', tt'', vv'', rr'' perpendiculaires au plan des moments $ABCD$. Je dis qu'on aura l'équation,

$$R \times rr'' = P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''.$$

Car si les puissances P, Q, T, V agissoient aux points p', q', t', v', & qu'on regardât le point A comme le centre des moments, on auroit (*Num.* XXIV.)

$$R \times Ar' = P \times Ap' + Q \times Aq' - T \times At' - V \times Av'.$$

Or dans cette équation, au lieu des lignes Ar', Ap', Aq', At', Av', on peut mettre les lignes rr'', pp'', qq'', tt'', vv'', qui leur sont égales, & l'on aura l'équation qu'il falloit démontrer,

SCD LYON 1

$R \times rr'' = P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''$.

Dans cette équation, les deux derniers termes du second membre ont le signe négatif, parce que les puissances P & Q tendent à faire tourner dans un sens autour de AB, tandis que les puissances T & V tendent à faire tourner en sens opposé.

L'équation précédente divisée par R, donne

$$rr'' = \frac{P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''}{R};$$

ou $$rr'' = \frac{P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''}{P + Q - T + V},$$

parce que $R = P + Q - T + V$.

Donc si l'on connoît la valeur des puissances parallèles & leur position, ainsi que celle du plan des moments, on déterminera facilement la distance rr'' de la résultante à ce plan, puisque le second membre de l'équation précédente ne contiendra que des quantités connues.

On trouveroit de même que la distance rr' de la résultante au plan $ADEF$, est exprimée par l'équation

$$rr' = \frac{P \times pp' + Q \times qq' - T \times tt' + V \times vv'}{P + Q - T + V}.$$

XXXIX.

PROBLÈME I. *Un mobile étant sollicité par une force ou par plusieurs qui agissent suivant la même ligne, déterminer une nouvelle force qui le mette en équilibre.*

SCD LYON 1

SOLUTION. Si le mobile A (*Fig.* 20.) n'eſt ſollicité que par une force P ſuivant la ligne AB, il eſt évident qu'on le mettra en équilibre, en lui appliquant une force S égale à la force P, mais dirigée en ſens diamétralement oppoſé.

Si pluſieurs forces P, P', P'', &c. (*Fig.* 21.) ſollicitent le mobile A ſuivant la même ligne & dans le même ſens, on pourra le mettre en équilibre, en lui appliquant en ſens contraire une puiſſance $S = P + P' + P''$, &c.

Enfin ſi pluſieurs forces P, P', P'', &c., agiſſent ſur le mobile dans le même ſens & ſuivant la même ligne (*Fig.* 22.), tandis que d'autres puiſſances plus foibles Q, Q', Q'', &c., le ſollicitent en ſens oppoſé; on le mettra en équilibre, en ajoutant à ces dernières puiſſances une force conſpirante $S = P + P' + P''$ &c. $- Q - Q' - Q''$ &c.

XL.

PROBLÈME II. *Déterminer la valeur & la direction d'une force* S (Fig. 6.), *qui faſſe équilibre à deux autres forces* P & Q, *dont les directions ſe rencontrent au centre du mobile A ſoumis à leur action.*

SOLUTION. Si les puiſſances P & Q ſont reſpectivement exprimées par les lignes AB, AC, & & qu'on achève le parallélogramme $ABDC$, la réſultante ſera repréſentée par la diagonale AD.

Cela

Cela posé, qu'on prolonge cette diagonale au-delà du point A, & qu'on applique au mobile, suivant cette direction prolongée, une puissance S représentée par la ligne AK de même longueur que la diagonale: le corps sera en équilibre. En effet, le corps sollicité par les forces AK, AD, qu'on suppose égales & diamétralement opposées, ne pourroit manquer d'être en équilibre: or les puissances AB, AC produisent le même effet que leur résultante AD. Donc le corps sollicité par les trois forces AB, AC, AK, sera nécessairement en équilibre.

XLI.

Remarque. Des six choses (angles & côtés) qui composent le triangle ABD, trois étant données, on peut, par les principes de la trigonométrie, trouver arithmétiquement les autres, lorsque des trois données, l'une au moins est un côté. Or les trois côtés AB, BD, AD, représentent les deux puissances composantes & la résultante; l'angle BAD est l'angle compris entre les directions de la résultante & de la puissance P; l'angle ADB est égal à l'angle CAD compris entre les directions de la résultante & de la puissance Q; & l'angle ABD est le supplément de l'angle BAC compris entre les directions des deux puissances composantes. Donc de ces six choses, les deux puissances composantes, la résultante, les

SCD LYON 1

deux angles formés par les directions de la réſultante & des puiſſances compoſantes, le ſupplément de l'angle compris entre les directions des puiſſances compoſantes, trois étant données, on déterminera arithmétiquement les trois autres, pourvu qu'on ait parmi les trois choſes données, l'une des puiſſances *P*, *Q*, *R*.

Il ne reſteroit quelque choſe d'indéterminé, que dans le cas où l'on donneroit deux des puiſſances & un angle aigu oppoſé à la plus petite de ces puiſſances.

XLII.

PROBLÈME III. *Déterminer la réſultante de tant de puiſſances qu'on voudra*, P, Q, T, V (Fig. 23.), *qui concourent au même point* A, *& dont les valeurs ſont repréſentées par les parties* AB, AC, AE, AG, *de leurs directions.*

SOLUTION. Pour trouver cette réſultante, j'achève le parallélogramme *ABDC*, & la ligne *AD* repréſente la réſultante des puiſſances *AB*, *AC*. Je prends donc, au lieu des forces *P* & *Q*, une puiſſance repréſentée par *AD*; & ſur les lignes *AD*, *AE*, comme côtés contigus, je fais le parallélogramme *ADFE*. Menant la diagonale *AF*, elle repréſente la réſultante des puiſſances *AE*, *AD*, & par conſéquent la réſultante des trois forces *AE*, *AC*, *AB*. Enſuite ſur les lignes *AF*, *AG*,

SCD LYON 1

comme côtés contigus du même angle, je fais le parallélogramme $AFHG$, & je mène la diagonale AH, qui repréſente la réſultante R des puiſſances AG, AF, ou des quatre puiſſances AG, AE, AC, AB. On trouveroit de même la réſultante d'un nombre quelconque de puiſſances.

On pourra donc aiſément trouver une puiſſance qui faſſe équilibre à tant de forces qu'on voudra, dont les directions concourent toutes au même point. Il ſuffira de trouver, comme on vient de le faire, la réſultante R des puiſſances données P, Q, T, V, &c., & d'appliquer au mobile, ſuivant la direction de cette réſultante prolongée au-delà du point A, une force $S=R$, qui agiſſe de A en K. Car (*Num.* XXXII.), ſi après avoir trouvé la réſultante de pluſieurs puiſſances propoſées, on lui ſubſtitue une force égale & dirigée en ſens contraire, elle ſera néceſſairement équilibre à ces puiſſances. Cette remarque peut s'appliquer aux problèmes ſuivants.

XLIII.

PROBLÈME IV. *Déterminer la réſultante de deux puiſſances parallèles* P & Q (Fig. 15 & 16.).

SOLUTION. 1° Si les deux puiſſances parallèles P, Q, ſont dirigées dans le même ſens (*Fig.* 15.), leur réſultante R ſera égale à leur ſomme $P+Q$; & ſi les deux puiſſances ſont dirigées en ſens oppoſé (*Fig.* 16.), leur réſultante R vaudra leur dif-

SCD LYON 1

férence $P-Q$, comme il a été démontré (*Num.* XXIX.). Donc on connoîtra toujours facilement la valeur de la réſultante.

2° Pour trouver la poſition de cette réſultante, on fera la proportion ſuivante : *la réſultante connue eſt à la diſtance compriſe entre les directions des deux puiſſances compoſantes, comme l'une de ces puiſſances compoſantes eſt à la diſtance compriſe entre les directions de l'autre, & de la réſultante.* Nous avons démontré cette proportion (*Num.* XXVIII.).

Si l'on tiroit une oblique IKL (*Fig.* 15.), ou LIK (*Fig.* 16.), qui coupât les directions des deux puiſſances compoſantes, on pourroit déterminer ſur cette oblique le point K, où paſſe la direction de la réſultante R, en faiſant la proportion $R : IL :: P : KL$.

On voit par cette ſolution, que ſi les deux puiſſances P, Q étoient appliquées à deux points I, L, d'une verge inflexible ſans peſanteur, & qu'après avoir déterminé le point K, où paſſe la direction de la réſultante, on appliquât à ce point une puiſſance S, égale & diamétralement oppoſée à la réſultante, 1° cette réſultante feroit équilibre aux deux puiſſances P & Q, puiſqu'elle détruiroit leur réſultante ; 2° on trouveroit toujours le point K, auquel on doit appliquer la puiſſance S, en faiſant la proportion $S = R : IL :: P : LK$.

SCD LYON 1

XLIV.

PROBLÈME V. *Déterminer la réſultante de pluſieurs puiſſances parallèles appliquées à différents points d'un ſyſtème de corps, & dirigées dans le même ſens.*

SOLUTION. Suppoſons (*Fig.* 24.) un ſyſtème de pluſieurs corps A, B, C, D, liés par des verges infléxibles, ſans peſanteur, & ſollicités par les forces parallèles P, Q, T, V.

1° La réſultante X des puiſſances P, Q, ſera $P+Q$; & l'on déterminera le point E de la ligne AB, par lequel paſſe ſa direction, en faiſant $P+Q : P :: AB : BE$. Cela ſuit de ce qu'on vient de dire (*Num.* XLIII.).

2° La réſultante Y des puiſſances X & T, ſera $X+T$, ou $P+Q+T$; & l'on déterminera dans la ligne EC le point F, par lequel paſſe cette réſultante, en faiſant $P+Q+T : EC :: P+Q : FC$.

3° La réſultante Z des puiſſances Y & V, ſera $Y+V$, ou $P+Q+T+V$; & l'on déterminera dans la ligne FD le point G, par lequel paſſe cette réſultante, en faiſant la proportion $P+Q+T+V : FD :: P+Q+T : GD$.

La puiſſance $Z=P+Q+T+V$ eſt la réſultante de toutes les puiſſances parallèles, dans la ſuppoſition que nous avons faite; & l'on voit aiſément qu'il n'y auroit pas plus de difficulté à réſoudre

SCD LYON 1

le problême, dans le cas où l'on supposeroit un plus grand nombre de forces parallèles.

On pourroit aussi trouver la résultante Z par la méthode que nous employerons dans un moment pour résoudre le *Problème* VI; mais nous n'avons pas cru devoir omettre la solution précédente, parce qu'elle nous donne lieu de faire ici deux remarques importantes.

XLV.

REMARQUE I. Si les puissances P, Q, T, V, n'avoient pas agi sur le système de corps suivant les directions AP, BQ, CT, DV, mais suivant d'autres directions quelconques parallèles Ap, Bq, Ct, Dv, la résultante des puissances P, Q, auroit toujours passé par le point E, & eût été dirigée suivant la ligne Ex, parallèle aux directions des puissances. De même la résultante des trois puissances P, Q, T, auroit toujours passé par le point F, & sa direction auroit été Fy. Pareillement la résultante des quatre puissances P, Q, T, V, auroit passé par le point G, & sa direction auroit été Gz. Donc *dans tout système de corps sollicité par des forces parallèles, il y a un point* G *par où passera toujours la résultante de toutes les puissances parallèles, tant que le rapport de leurs valeurs ne changera pas, quelle que soit d'ailleurs leur direction.* Donc ce point G se trouvera toujours dans

la direction de la force qu'on employera pour faire équilibre à toutes les forces parallèles qui agiſſent ſur le ſyſtème de corps. Ce point remarquable peut s'appeler *le centre des forces parallèles.*

XLVI.

REMARQUE II. Lorſqu'un corps ſe meut, ou tend à ſe mouvoir ſuivant une direction quelconque, on peut imaginer ce corps comme compoſé d'une infinité de parallélipipèdes rectangles égaux, & dont les côtés ſoient parallèles à la direction du corps. Ces parallélipipèdes ſe mouvront ou tendront à ſe mouvoir ſuivant leur longueur, avec une vîteſſe égale à celle du corps, & l'on pourra les conſidérer comme ſollicités par des forces parallèles égales. Chacune de ces forces étant le produit du parallélipipède élémentaire auquel elle eſt appliquée, par la vîteſſe commune, la réſultante de toutes ces forces ſera la ſomme de tous les parallélipipèdes, ou la maſſe totale multipliée par la vîteſſe du corps: ainſi cette réſultante ſera exprimée par la quantité de mouvement du corps. Mais il eſt évident, d'après la remarque précédente (*Num.* XLV.), que cette réſultante peut toujours être cenſée agir dans le ſeul parallélipipède placé au centre des forces parallèles. Donc on voit aiſément par-là, comment l'équilibre de deux corps ſe réduit à celui de deux parallélipipèdes à baſes égales,

SCD LYON 1

& par conséquent comment le troisième principe fondamental, démontré *Num.* XX., s'applique à des corps de figure quelconque.

XLVII.

PROBLÈME VI. *Déterminer la résultante de plusieurs puissances parallèles, soit qu'elles agissent toutes dans le même sens, soit qu'il y en ait qui agissent dans un sens contraire à celui des autres.*

SOLUTION. Soient (*Fig.* 19.) les puissances parallèles P, Q, T, V, & supposons que la puissance T n'agisse pas dans le même sens que les autres. Concevons les trois plans $ABCD$, $ADEF$, $ABGF$, tels que nous les avons supposés *Num.* XXXVII.

1° On aura évidemment la résultante $R = P + Q + V - T$.

2° La distance du plan $ABCD$ à la direction de la résultante, sera

$$rr'' = \frac{P \times pp'' + Q \times qq'' - T \times tt'' - V \times vv''}{P + Q + V - T}.$$

3° La distance du plan $ADEF$ à la direction de la résultante, sera

$$rr' = \frac{P \times pp' + Q \times qq' + V \times vv' - T \times tt'}{P + Q + V - T}.$$

Ainsi on connoîtra les valeurs des lignes rr'', rr'. Tout cela est clair par ce que nous avons démontré *Num.* XXXVIII.

SCD LYON 1

4° Qu'on prenne sur la ligne AF la partie $Ar' = rr''$, & qu'on mène la ligne $r'r$ parallèle à la ligne AB. Qu'on prenne de même sur AB, la partie $Ar'' = rr'$, & qu'on mène la ligne $r''r$ parallèlement à la ligne AF. Les deux lignes $r''r$, $r'r$ se rencontreront en un point r par où devra passer la direction de la résultante.

Je ne m'arrête pas au cas où toutes les puissances parallèles agiroient dans le même plan. Le problème se résoudroit alors sans difficulté, par ce que nous avons dit *Num.* XXXV.

XLVIII.

PROBLÈME VII. *Déterminer la résultante de plusieurs puissances qui agissent dans un même plan, suivant des directions quelconques.*

SOLUTION. Soient les trois puissances P, Q, T, (*Fig.* 25.), représentées par les lignes AB, CD, EF, suivant les directions desquelles elles agissent.

1° Qu'on prolonge les directions des puissances P & Q jusqu'à leur point de concours d. Pour représenter la puissance P, on pourra prendre $ad = AB$. Car l'action d'une puissance est la même en quelque point de sa direction qu'on la suppose appliquée. De même, pour représenter la puissance Q, on pourra prendre $cd = CD$. Or il est évident que la résultante des puissances représentées par

SCD LYON 1

ad & par *cd*, sera exprimée par la diagonale *Gd* du parallélogramme *adcG* : donc la valeur & la direction de cette diagonale *Gd* donneront la valeur & la direction de la résultante des deux puissances *P* & *Q*.

2° Qu'on prolonge les directions de la puissance *T* & de la résultante *Gd* jusqu'au point *H* où elles se rencontrent. Pour représenter la puissance *T*, on pourra prendre $eH = EF$. De même, pour représenter la puissance exprimée par *Gd*, on pourra prendre $gH = Gd$. Or il est encore évident que la résultante des puissances exprimées par *eH* & par *gH*, est représentée par la digonale *HR* du parallélogramme *HeRg* : donc la valeur & la direction de la résultante *HR* seront la valeur & la direction de la résultante des trois puissances *P*, *Q*, *T*.

On voit par là comment on pourroit s'y prendre pour déterminer la résultante d'un plus grand nombre de puissances.

XLIX.

PROBLÈME VIII. *Décomposer une puissance donnée en deux autres, qui soient parallèles à deux lignes tirées dans un plan dans lequel agit cette puissance.*

SOLUTION. Soit *P* (*Fig.* 26.) une puissance qu'on propose de décomposer en deux autres, dont l'une soit parallèle à la ligne *OM* & l'autre à la

ligne ON. Supposons que la valeur & la direction de la puissance P soient AD, & menons par le point A deux lignes AB, AC, parallèles aux lignes données. Menons de même par le point D les deux lignes DB, DC, parallèles à ces lignes données : on aura le parallélogramme $ABDC$, & l'on pourra prendre, au lieu de la puissance P représentée par la diagonale AD, les deux puissances AB, AC, parallèles aux deux lignes données OM, ON. On aura donc la décomposition qu'on demandoit.

L.

PROBLÈME IX. *Décomposer une force donnée en trois autres perpendiculaires à trois plans, dont chacun est perpendiculaire aux deux autres.*

SOLUTION. Soient (*Fig.* 27.) les trois plans $EFGH$, $GHIK$, $FGKL$, dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres. Supposons que la puissance P qu'il s'agit de décomposer, soit représentée par la partie AD de sa direction, & qu'elle soit appliquée au point A du plan $GHIK$.

1° Menons par le point A la ligne indéfinie AB, perpendiculaire au plan $GHIK$; & du point D abaissons sur le même plan la perpendiculaire DC. Si l'on joint les points A, C, par la ligne AC, & qu'on tire ensuite du point D la ligne DB, parallèle à CA, on aura un parallélogramme $ABDC$. Donc au lieu de la puissance P, on pourra prendre

SCD LYON 1

deux forces exprimées par AB & par AC, dont la première est perpendiculaire au plan $GHIK$, tandis que l'autre agit dans ce plan.

2° Que l'on décompose à présent la force AC en deux autres Aa, Ab, parallèles aux lignes HG, HI, ainsi que nous avons vu (*Num.* XLIX.) qu'on pouvoit le faire ; & au lieu de la puissance P, on pourra évidemment en prendre trois autres AB, Aa, Ab, dont la première est perpendiculaire au plan $GHIK$, la seconde au plan $FGKL$, & la troisième au plan $EFGH$.

L I.

PROBLÈME X. *Décomposer une force donnée en deux forces parallèles, qui agissent dans le même plan qu'elle, & dont les directions passent par deux points donnés.*

SOLUTION. Soit P (*Fig.* 28, 29.) la puissance à décomposer, BP sa direction, A & C les points par lesquels doivent passer les directions des deux puissances Q & T dans lesquelles on veut décomposer P. Il s'agit de déterminer ce que doivent valoir Q & T, pour que P soit leur résultante. Or ayant mené une ligne ABC (*Fig.* 28.), ou ACB (*Fig.* 29.) qui coupe les directions des puissances P, Q, T, il est clair (*Num.* XXVIII.) que ces puissances doivent être proportionnelles chacune à la partie de cette sécante comprise entre les

SCD LYON 1

directions des deux autres. On aura donc les deux proportions suivantes :

$$AC : P :: BC : Q.$$
$$AC : P :: AB : T.$$

Dans ces proportions les trois premiers termes étant supposés connus, on aura la valeur des puissances composantes Q & T; on aura, dis-je, $Q = \frac{P \times BC}{AC}$, & $T = \frac{P \times AB}{AC}$.

LII.

PROBLÈME XI. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent toutes dans un plan qu'elles sollicitent au mouvement.*

SOLUTION. Soit un plan MN (*Fig.* 30.) sollicité par quatre puissances P, Q, T, V, représentées par les parties AP, CQ, DT, BV de leurs directions. Il est évident que pour l'équilibre, il faut & il suffit, que l'une des puissances, par exemple V, soit égale & diamétralement opposée suivant la même ligne, à la résultante des autres puissances P, Q, T. Cela posé, concevons que chacune des puissances données soit décomposée en deux autres parallèles aux deux lignes OM, ON, qui font entr'elles un angle droit : que P, par exemple, soit décomposée en p, p' exprimées par Ap, Ap'; Q en q, q' exprimées par Cq, Cq',

SCD LYON 1

& ainſi des autres. Pour qu'il y ait équilibre, les conditions ſuivantes ſont néceſſaires & ſuffiſent.

1° *Chaque réſultante des puiſſances parallèles doit être zéro.*

2° *Si l'on prend dans le plan un point quelconque* E, *les moments des puiſſances qui tendent à faire tourner le plan dans un ſens autour de ce point, moins les moments de celles qui tendent à faire tourner en ſens oppoſé, doivent être zéro.*

La première condition eſt évidemment requiſe pour l'équilibre. En effet, ſi les deux réſultantes des puiſſances parallèles n'étoient pas zéro ſéparément, la réſultante totale ne ſeroit pas zéro elle-même, puiſque deux réſultantes partielles qui ont quelque valeur, & dont les directions ſont un angle droit, donnent néceſſairement une réſultante totale exprimé par la diagonale du parallélogramme conſtruit ſur leurs directions. Donc pour l'équilibre du plan, il faut que chaque réſultante des puiſſances parallèles ſoit zéro.

La ſeconde condition n'eſt pas moins requiſe pour l'équilibre. Car (*Num.* XXXIII.) la différence des moments dont il s'agit, doit être égale au moment de la réſultante générale de toutes les puiſſances qui agiſſent dans le plan. Or, dans le cas de l'équilibre, cette réſultante eſt nulle, & l'on peut ſuppoſer qu'elle ſoit dirigée ſuivant la ligne *VG*, comme nous l'avons obſervé ci-deſſus; donc

SCD LYON 1

en menant du point E la perpendiculaire EG sur la direction de la puissance V, le moment de la résultante totale sera $o \times EG = o$: donc aussi la différence des moments des puissances qui tendent à faire tourner autour du point E, doit être zéro dans le cas de l'équilibre.

Enfin, si les deux conditions ont lieu, il y aura nécessairement équilibre dans le plan. Car il suffit pour l'équilibre, que la résultante de toutes les puissances qui sollicitent le plan, soit nulle par l'effet d'une destruction de forces faite dans la même ligne. Or si l'on suppose que la première condition ait lieu, la résultante est nulle, puisque les deux résultantes partielles des puissances parallèles ne peuvent être zéro, que leur résultante totale ne soit nulle : & si l'on suppose de plus que la seconde condition ait lieu, la résultante totale sera nulle par l'effet d'une destruction de forces faite dans la même ligne, & non par la suite d'une opposition de forces dans deux lignes parallèles.

En effet, quand la résultante totale devient nulle par l'opposition de deux forces composantes parallèles, égales & dirigées en sens contraire, jamais la différence des moments dont il s'agit dans la seconde condition, n'est zéro. Supposons pour le démontrer, que la résultante des puissances P, Q, T, soit une force Z, égale & parallèle à la force V, mais qui agisse suivant la ligne FZ, en sens opposé

SCD LYON 1

à l'action de la force V. Si on prend le centre des moments en E'' entre les directions des forces V & Z, les deux forces tendront à faire tourner dans le même sens autour de ce point, & leurs moments ne se détruiront pas. Si on prend le centre des moments en E' sur la direction de l'une des forces Z, le moment de cette force deviendra nul, & rien ne détruira le moment $V \times E'G$ de l'autre. Enfin, si on prend le centre des moments en E hors des directions des deux puissances, la différence des moments sera $V \times EG - Z \times EE'$, qui évidemment n'est pas zéro, puisque V étant égal à Z, & EG plus grand que EE', le moment positif est plus grand que le négatif. Donc si la résultante Z des puissances P, Q, T, n'est pas opposée à la dernière force V suivant la même ligne, jamais la différence des moments de Z & de V, ou ce qui est la même chose, de P, Q, T, V, par rapport à un point pris dans le plan MN, ne sera zéro.

LIII.

REMARQUE. S'il y avoit dans le plan sollicité par les puissances, un point fixe E, de manière que le plan ne pût recevoir qu'un mouvement de rotation autour de ce point, il suffiroit pour l'équilibre, que les moments des puissances qui tendent à faire tourner autour de ce point dans un sens, moins les moments de celles qui tendent à faire tourner

tourner en ſens contraire, fuſſent zéro. Car cette condition ayant lieu, on aura zéro pour le moment de la réſultante, qui (*Num.* XXXIII.) eſt toujours égal à la différence des moments des puiſſances compoſantes. Donc il faudra que la réſultante totale ſoit elle-même zéro, à cauſe d'une éliſion faite dans la même ligne, ou qu'elle paſſe par le point fixe *E*. Dans le premier cas, il y a évidemment équilibre. Dans le ſecond, la réſultante agira contre le point immobile, & ſera détruite par ſa réſiſtance: donc elle ne pourra produire aucun mouvement dans le plan.

LIV.

PROBLÈME XII. *Etant données tant de puiſſances qu'on voudra, qui agiſſent dans différents plans, ſuivant des directions quelconques, décompoſer ces puiſſances en d'autres équivalentes qui n'agiſſent que dans trois plans, dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres.*

SOLUTION. Soient les trois plans *HI*, *KL*, *MN* (*Fig.* 31.), dont chacun eſt perpendiculaire aux deux autres, & dans leſquels doivent agir les puiſſances qu'on veut ſubſtituer aux puiſſances données.

1° Je décompoſe par le problème IX (*Num.* L.) chaque puiſſance donnée en trois autres perpendiculaires aux trois plans.

2° Soit *P* l'une des puiſſances qui, après cette

SCD LYON 1

première décompoſition, ſeront perpendiculaires au plan MN. Par le point V, où la direction de cette puiſſance rencontre ce plan, je tire la ligne SVT juſqu'aux interſections de MN avec les deux autres plans. Je peux (*Num.* II.) décompoſer la puiſſance P en deux autres Q, R, qui paſſent par les points S, T, & qui ſeront dans les plans HI & KL. J'aurai $Q=\frac{P\times VT}{ST}$ & $R=\frac{P\times VS}{ST}$.

On pourra traiter toutes les puiſſances perpendiculaires au plan MN comme la puiſſance P. On pourra décompoſer pareillement les puiſſances perpendiculaires aux plans HI, KL. Donc il eſt toujours poſſible de décompoſer par cette méthode, un nombre quelconque de puiſſances dirigées comme on voudra, en d'autres équivalentes, & qui n'agiſſent que dans trois plans, dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres.

Pour comprendre le dernier problème, qui eſt le plus général de tous, il faut s'arrêter un moment aux remarques ſuivantes.

L V.

REMARQUE I. Il eſt évident que la puiſſance Q qui agit dans le plan KL, tend à le mouvoir, & qu'elle le feroit tourner autour du point C, ſi ce point étoit immobile. De même, la puiſſance R, tend à mouvoir le plan HI, dans lequel

SCD LYON 1

elle agit, & si le point C étoit fixe, elle feroit tourner le plan autour de ce point. Donc puisque la puissance P équivaut aux deux puissances Q, R, dont elle est résultante, il est visible que cette puissance P, tend à imprimer un mouvement de rotation aux deux plans KL, HI, qui lui sont parallèles. On peut dire la même chóse d'une autre puissance quelconque par rapport aux plans parallèles.

LVI.

REMARQUE II. Soit P une puissance décomposée comme dans le problême précédent, en deux autres Q & R, qui agissent dans les plans parallèles KL, HI. La puissance Q qui se trouve dans le plan KL, aura, par rapport à l'intersection C des trois plans, un moment égal à celui de la puissance décomposée P, relativement à l'intersection DE des deux autres plans MN, HI.

En effet, la puissance P étant la résultante des forces Q, R, son moment, par rapport au plan HI, ou par rapport à l'axe DE, vaut la somme des moments de Q & de R. Mais la puissance R se trouvant dans le plan HI, son moment, par rapport à DE, est zéro. Donc le moment de P, par rapport à DE, est égal au moment de la puissance Q; c'est-à-dire, qu'en abaissant du point V la perpendiculaire VY sur DE, on aura $P \times VY = Q \times CS$.

SCD LYON 1

En prenant la puissance R qui se trouve dans le plan HI, on prouveroit de même, que son moment, par rapport au point C, est égal au moment de la puissance P, par rapport à l'intersection AB des deux autres plans. Donc, en abaissant du point V la perpendiculaire VZ sur AB, on auroit $P \times VZ = R \times CT$.

LVII.

PROBLÈME XIII. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent sur un système de corps suivant des directions quelconques.*

SOLUTION. Concevons (*Fig.* 31.) trois plans dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres, & supposons qu'on ait décomposé toutes les puissances de manière que chacune agisse dans l'un de ces trois plans, & soit perpendiculaire à un autre de ces plans. Nous avons enseigné (*Problème* XII.) la manière de faire cette décomposition des puissances. Cela posé, voici les deux conditions qui sont nécessaires & qui suffisent pour l'équilibre.

1° Que *la résultante des puissances perpendiculaires au même plan soit zéro.*

2° Que *les moments des puissances qui se trouvent dans le même plan, & qui tendent à le faire tourner dans un sens autour de l'intersection des deux autres plans, moins les moments de celles*

SCD LYON 1

qui tendent à le faire tourner en ſens contraire autour de la même interſection, ſoient zéro.

La première condition eſt néceſſaire, parce que ſi la réſultante de toutes les puiſſances perpendiculaires au même plan n'étoit pas zéro, cette réſultante donneroit néceſſairement du mouvement au ſyſtème de corps, puiſque cette réſultante ne pourroit pas être détruite par les autres puiſſances qui ſont avec elle un angle droit. Donc ſi la première condition n'avoit pas lieu, il n'y auroit pas équilibre dans le ſyſtème de corps.

La ſeconde condition eſt requiſe, parce qu'il ne peut y avoir équilibre dans l'un des plans, dans *KL*, par exemple, à moins que la réſultante de toutes les forces qui agiſſent dans ce plan ne ſoit nulle, à cauſe d'une deſtruction de ces forces faite dans la même ligne, ou que cette réſultante ayant quelque valeur, ne ſoit détruite par les puiſſances qui agiſſent dans les autres plans *MN*, *HI*.

Dans le premier cas, le moment de la réſultante ſera zéro, & les moments dont il s'agit dans la ſeconde condition, ſeront pareillement zéro, puiſque (*Num.* XXXIII.) ils ſont toujours égaux à celui de la réſultante.

Dans le ſecond cas, la réſultante des puiſſances qui agiſſent dans le plan *KL*, & qui devra être détruite par les puiſſances qui agiſſent dans les autres plans, paſſera néceſſairement par le point *C*

SCD LYON 1

où se coupent les trois plans. En effet, pour que la résultante des puissances qui agissent dans le plan *KL*, soit détruite par la résultante des puissances qui se trouvent dans les autres plans, il faut que celle-ci se trouve dans le plan *KL*, afin qu'elle puisse être diamétralement opposée à la première. De plus, cette résultante des puissances qui sont dans les deux autres plans, passe nécessairement par un point de leur commune intersection *DE*. Donc puisque le point *C* est le seul point qui appartienne au plan *KL*, cette résultante passera par ce point, & ne pourra détruire la résultante des puissances qu'on suppose dans *KL*, à moins que la direction de cette dernière ne passe par le même point *C*, ce qui rendra son moment nul par rapport à ce point. Donc la différence des moments des puissances du plan *KL*, qui est toujours égale au moment de leur résultante, sera zéro par rapport au point *C*.

On pourra appliquer aux puissances qui agissent dans les plans *MN*, *HI*, ce que nous avons dit de celles qui agissent dans le plan *KL*. Donc il faut que les deux conditions assignées aient lieu, pour que le système de corps soit en équilibre.

Il est visible de plus, que ces deux conditions suffisent pour l'équilibre. Car si la première a lieu, il n'y aura dans le système de corps aucun mouvement pour s'éloigner ni du plan *MN*, ni du plan *KL*, ni du plan *HI*, puisque les résultantes des

SCD LYON 1

puiſſances perpendiculaires à ces trois plans ſeront zéro. Si la ſeconde condition a lieu en même tems, les trois réſultantes des forces qu'on ſuppoſe agir dans les trois plans, ſeront chacune zéro, par une deſtruction de forces faite dans chaque plan, ſuivant la même ligne (*Num.* LII.); ou celles de ces trois réſultantes qui conſerveront quelque valeur, paſſeront par le point *C*, & dans ce cas, elles ſe détruiront mutuellement au point de concours *C*; autrement leur réſultante totale donneroit un mouvement de tranſlation au ſyſtème de corps, & la première condition n'auroit pas lieu, ce qui eſt contre l'hypothèſe. Donc les deux conditions ayant lieu à la fois, la réſultante des puiſſances qui agiſſent dans chaque plan, ſera zéro, par une deſtruction de forces faite dans la même ligne; ce qui produira dans le ſyſtème de corps un équilibre abſolu.

LVIII.

REMARQUE I. Si dans un ſyſtème de corps ſollicité par différentes puiſſances, il ſe trouvoit un point fixe *C* autour duquel le ſyſtème pût tourner en tous ſens, la ſeconde des conditions que nous avons aſſignées, ſuffiroit pour l'équilibre: *il ſuffiroit*, dis-je, *qu'en prenant les puiſſances qui agiſſent dans le même plan, la différence de leurs moments, par rapport au point fixe, fût zéro.*

Car alors (*Num.* LIII.) les puiſſances qui agiront

SCD LYON 1

dans chacun des plans, seront en équilibre. Donc il y aura aussi équilibre dans le système de corps qui n'est sollicité que par ces puissances.

LIX.

REMARQUE II. Nous avons supposé, pour démontrer les conditions de l'équilibre des puissances qui agissent sur un système de corps, que ces puissances fussent réduites à d'autres, dont l'action se fit dans les trois plans *KL*, *HI*, *MN*, ce qui demande les deux décompositions qui sont l'objet des problèmes IX & XII. Mais on peut voir aisément, 1° que la somme des puissances qui, après la décomposition du problème IX, sont perpendiculaires à l'un des plans, est la même que celle des puissances perpendiculaires au même plan, après la décomposition du problème XII, puisqu'une puissance quelconque *P*, vaut les deux puissances *Q*, *R*, qu'on lui substitue: 2° qu'après la décomposition du problème IX, les moments des puissances pour faire tourner autour d'une intersection des plans, sont les mêmes que ceux des puissances qui, après la décomposition du problème XII, font tourner autour du point *C*. Car (*Num.* LVI.), le moment de la puissance *P*, par rapport à l'intersection *DE*, est égal au moment de la puissance *Q* par rapport au point *C*; & le moment de la même puissance *P*, par rapport à l'intersection

SCD LYON 1

AB, est égal au moment de la puissance *R* par rapport au même point *C*.

On peut donc énoncer de la manière suivante, les conditions de l'équilibre d'un système de corps soumis à l'action de tant de puissances qu'on voudra: *Ayant décomposé chaque force en d'autres perpendiculaires à trois plans qu'on imagine & qu'on suppose se couper à angles droits, il faut* 1° *que la résultante de toutes les forces perpendiculaires au même plan, soit zéro. Il faut* 2° *que les puissances perpendiculaires à deux quelconques des trois plans, soient tellement disposées, que la différence de leurs moments, par rapport à l'intersection de ces deux plans, soit zéro.*

L X.

Remarque III. Etant données tant de forces qu'on voudra, chacune peut (*Num.* L.) se décomposer en trois autres perpendiculaires à trois plans qui se coupent à angles droits. Après cette décomposition, toutes les forces perpendiculaires au même plan, se trouvant parallèles, pourront (*Num.* XLVII) se réduire à une seule Donc *quel que soit le nombre des forces qui agissent sur un système de corps, on peut toujours les réduire à trois.*

On pourroit même les réduire à deux. Car imaginant un plan qui fût rencontré par les directions

SCD LYON 1

de ces forces, & les concevant appliquées à ce plan, on pourroit décomposer chacune en deux autres, dont l'une seroit dans le plan, tandis que l'autre lui seroit perpendiculaire. C'est ainsi que nous avons décomposé (*Num.* L.) la puissance *P* (*Fig.* 27.) en deux autres *AC*, *AB*. Ensuite toutes les forces perpendiculaires au plan, seroient réductibles à une seule, par la méthode expliquée (*Num.* XLVII.); & les puissances qui agiroient dans le plan, se réduiroient à une seule par la méthode donnée (*Num.* XLVIII.).

On auroit ainsi, pour tant de puissances qu'on voudroit, deux résultantes générales, qu'on ne pourroit réduire à une seule force, que dans le cas où leurs directions concourroient au même point.

ARTICLE II.

Du Centre de Gravité des Corps.

LXI.

ON appelle *gravité* ou *pesanteur*, la force en vertu de laquelle les corps abandonnés à eux-mêmes, descendent ou tendent à descendre vers le centre de la terre. Cette force agit sur tous les corps & sur toutes les molécules matérielles dont ils sont composés; & quoiqu'à parler rigoureusement, sa grandeur soit différente à différentes distances de

SCD LYON 1

l'équateur & à différents éloignements du centre de la terre, les quantités dont elle diffère par ces causes, ne peuvent être sensibles dans les corps qui sont l'objet de la statique ordinaire. Ainsi nous considérerons ici la gravité, comme une force qui est la même dans toutes les parties des corps; c'est-à-dire, qui sollicite chaque molécule matérielle à descendre d'une même quantité dans un même tems.

On distingue la gravité *simple*, la gravité *absolue* & la gravité *relative*. La gravité *simple* est la force qui agit sur chaque molécule d'un corps. La gravité *absolue* est la résultante de toutes les gravités simples qui sollicitent les différentes molécules dont un corps est composé. Elle est la même chose que le poids de ce corps. La gravité *relative* est le poids d'un corps sous un volume donné. C'est, par exemple, ce que pèse un pouce cubique, un pied cubique, &c., d'un corps proposé.

LXII.

On appelle ligne *verticale*, celle suivant laquelle tombent les corps en vertu de leur gravité; ligne *horizontale*, celle qui est perpendiculaire à la verticale; plan *vertical*, celui qui est mené par une ligne verticale; & plan *horizontal* celui qui est perpendiculaire à une ligne verticale.

LXIII.

Théorème. *Un corps pesant quelconque peut*

SCD LYON 1

être considéré comme un système de corps sollicités par des forces parallèles.

En effet, puisqu'il n'est ici question que des corps solides, un corps pesant quelconque est composé d'un nombre infini, pour ainsi dire, d'éléments unis ensemble en vertu de la dureté ; & chacun de ces éléments est sollicité par sa gravité, qui est une force qui tend à le porter vers le centre de la terre Or les gravités auxquelles sont soumis les divers éléments du même corps, doivent être regardées comme des forces sensiblement parallèles. Car leurs directions prolongées ne se réuniroient qu'au centre du globe terrestre ; c'est-à-dire, qu'à une distance de près de 1500 lieues. On peut prouver aisément par le calcul, qu'en prenant sur la surface de la terre deux points éloignés de 16 toises, & menant de ces points deux lignes au centre du globe, leur inclinaison seroit à peine d'une seconde. Donc on peut regarder comme sensiblement parallèles, les directions de gravités qui sollicitent les parties élémentaires d'un même corps.

LXIV.

COROLLAIRE. *Donc on peut appliquer aux corps pesants tout ce qu'on a démontré dans l'article précédent touchant les forces parallèles.* Il suffira pour faire cette application, de considérer comme autant de forces parallèles les gravités

SCD LYON 1

particulières des molécules élémentaires dont les corps sont composés.

Ainsi en concevant que A, B, C, D, &c., (*Fig.* 24.) soient les éléments d'un corps, & que les puissances parallèles P, Q, T, V, &c., soient les gravités ou les poids de ces éléments, nous pourrons tirer les conclusions suivantes :

1° *Le poids total d'un corps est égal à la somme des poids élémentaires dont il est composé.* Car (*Num.* XLIV.) la résultante de toutes les forces P, Q, T, V, &c., est égale à la somme $P+Q+T+V$, &c.

2° *Quelle que soit la position d'un corps, son poids total sera toujours le même.* Car quelle que soit la position d'un corps, le poids de chaque molécule élémentaire est toujours le même. Donc la somme de tous les poids élémentaires, qui fait le poids total, est toujours le même.

3° *Dans un corps pesant, il y a toujours un point unique où se coupent les directions de la résultante de tous les poids élémentaires, quelque situation qu'on donne au système; c'est-à-dire, que l'inclinaison du corps, par rapport à la direction verticale, étant supposée telle qu'on voudra, il y aura toujours un point où se couperont les directions de la résultante de tous les poids élémentaires.* Car puisque tout corps pesant doit être regardé comme un système de corpuscules sollicités

SCD LYON 1

par des forces parallèles, il aura néceſſairement (*Num.* XLV.) un *centre* de ces forces parallèles, c'eſt-à-dire, un point où ſe couperont les directions de la réſultante de tous les poids élémentaires, quelle que ſoit la ſituation du corps par rapport à ces directions. Ce point eſt ce qu'on appelle *le centre de gravité.*

4° *Si l'on veut n'employer qu'une puiſſance pour mettre en équilibre & ſoutenir un corps peſant, de manière qu'il ne puiſſe prendre du mouvement en aucun ſens, il faudra que la direction de cette puiſſance ſoit verticale, & de plus qu'elle paſſe par le centre de gravité du corps.* Car, pour l'équilibre, il faut que la réſultante de tous les poids élémentaires dont le corps eſt compoſé, ſoit détruite par une force égale & qui agiſſe dans la même ligne que cette réſultante. Or cette réſultante agit néceſſairement ſuivant la ligne verticale menée par le centre de gravité. Donc la puiſſance propre à la détruire, agira en ſens oppoſé ſuivant la même ligne.

On voit par là que ſi un corps *A* (*Fig.* 32.) eſt ſoutenu en équilibre par une corde *ba*, la direction prolongée de cette corde paſſera évidemment par le centre de gravité *G*.

5° *On peut ſuppoſer que tout le poids d'un corps réſide à ſon centre de gravité; ou, ce qui eſt la même choſe, tous les poids élémentaires qui*

SCD LYON 1

forment le corps, ne produiſent pas d'autre effet, que celui que produiroit un ſeul poids égal à leur ſomme & placé au centre de gravité du corps. En effet, pluſieurs puiſſances parallèles qui agiſſent ſur un ſyſtème de corps, produiſent le même effet que produiroit leur réſultante : or les poids élémentaires ſont des puiſſances parallèles dont la réſultante vaut le poids total & paſſe toujours par le centre de gravité : donc ces poids élémentaires diſtribués dans toute l'étendue du corps, produiſent préciſément l'effet que produiroit le poids total placé au centre de gravité.

6° *Le centre commun de gravité de deux corps* A & B (*Fig.* 33.), *ſe trouve toujours placé dans la ligne droite qui joint leurs centres particuliers de gravité* a, b. En effet, on peut concevoir les poids de deux corps, comme deux forces parallèles appliquées à leurs centres de gravité *a*, *b*. Or le centre commun de deux forces parallèles appliquées conſtamment aux mêmes points d'un ſyſtème, ſe trouve dans la droite qui joint ces points d'application. Cela eſt évident par ce que nous avons dit (*Num.* XLV.). Donc le centre de gravité des corps *A* & *B* ſera dans quelque point *e* de la ligne *ab*.

7° On pourra trouver combien le centre commun de gravité eſt éloigné des centres particuliers des deux corps, en faiſant cette proportion : *La ſomme des deux poids* A, B *eſt à la diſtance* a b

SCD LYON 1

de leurs centres particuliers de gravité, comme l'un de ces poids est à la distance comprise entre le centre de l'autre & le centre commun. Car la résultante des poids A, B vaut la somme $A+B$ de ces poids, & passe par le point e, centre commun de gravité. Or, deux forces parallèles & leur résultante sont entr'elles, chacune comme la partie d'une ligne comprise entre les directions des deux autres (*Num.* XXVIII.). Donc $A+B : ab :: A : be :: B : ae$.

8° *Soient plusieurs corps pesants* A, B, C, D, (*Fig.* 34.), *dont les centres de gravité* a, b, c, d, *soient disposés dans une même ligne droite : leur centre commun de gravité* G *sera aussi dans la même ligne. De plus, la résultante de tous les poids sera* $A+B+C+D$, *& son moment, par rapport à un point quelconque* E, *pris dans la même ligne, sera égal à la différence des moments qu'ont les poids qui tendent à faire tourner en sens opposés.* On aura donc $(A+B+C+D)\times EG = C\times Ec + D\times Ed - A\times Ea - B\times Eb$; d'où l'on tire

$$EG = \frac{C\times Ec + D\times Ed - A\times Ea - B\times Eb.}{A+B+C+D}$$

9° *Si l'on a tant de corps qu'on voudra, dont les centres de gravité soient dans une même ligne droite, les moments des corps de part & d'autre du centre commun de gravité, pris par rapport à*

ce

SCD LYON 1

ce point, seront égaux entr'eux. Car supposons que le point E (*Fig.* 34.) coïncide avec le point G: dans l'équation que nous venons de trouver, nous aurons $EG=0$; & par conséquent $C\times Ec+D\times Ed-A\times Ea-B\times Eb=0$, ce qui donne $C\times Ec+D\times Ed=A\times Ea+B\times Eb$.

10° Soient plusieurs poids A, B, C, D (*Fig.* 35.), dont les centres de gravité a, b, c, d soient placés, si l'on veut, dans différents plans, & dont le centre commun de gravité soit le point G. *La résultante de tous ces poids qui passe par le point* G, *sera* $A+B+C+D$; *& son moment par rapport à un plan quelconque* EF, *sera égal à la différence des moments qu'ont les poids placés de part & d'autre du plan.* Car supposons que tout le système soit disposé de manière que le plan EF soit vertical & parallèle à la direction de la gravité qui sollicite les poids dont il s'agit, & menons sur ce plan les perpendiculaires aa', bb', cc', dd', Gg'; on aura évidemment (*Num.* XXXVIII.), $\overline{A+B+C+D}\times Gg'=A\times aa'+B\times bb'-C\times cc'-D\times dd'$.

Donc le centre de gravité G sera éloigné du plan EF d'une quantité

$$Gg'=\frac{A\times aa'+B\times bb'-C\times cc'-D\times dd'}{A+B+C+D}$$

11° *Si un plan passe par le centre commun de gravité de tant de corps qu'on voudra, les corps*

SCD LYON 1

placés de part & d'autre de ce plan, auront, par rapport à lui, des moments égaux. Car si l'on suppose que le plan EF passe par le point G, on aura dans l'équation précédente $Gg'=0$, ce qui donnera $A\times aa'+B\times bb'-C\times cc'-D\times dd'=0$; d'où l'on tire $A\times aa'+B\times bb'=C\times cc'+D\times dd'$. Il est évident que la démonstration seroit la même, quand on supposeroit un plus grand nombre de corps.

On voit par là que si un corps pesant est coupé par un plan qui passe par le centre de gravité, *les moments de tous les corpuscules élémentaires situés d'un côté du plan, seront égaux aux moments des corpuscules situés de l'autre côté.* Car ces corpuscules peuvent être considérés comme autant de poids qui font effort suivant des directions parallèles.

12° Si les quantités A, B, C, D, au lieu de désigner les poids de plusieurs corps, désignoient ceux de plusieurs surfaces dont les centres particuliers de gravité fussent a, b, c, d, & dont le centre commun de gravité fût G, on auroit encore les équations précédentes. Donc *la différence des moments de ces surfaces, par rapport à un plan* EF, *est égale au moment d'une surface* A+B+C+D, *dont le centre de gravité seroit aussi en* G.

LXV.

PROBLÈME I. *Déterminer par expérience le centre de gravité d'un corps.*

SCD LYON 1

SOLUTION. Suspendez ce corps par un cordon qui le soutienne successivement par deux points différents. Les directions prolongées du cordon passeront l'une & l'autre par le centre de gravité, (*Num.* LXIV.). Donc le centre de gravité se trouvera au point où se couperont ces directions prolongées.

Si le corps étoit trop considérable pour pouvoir être ainsi suspendu, on en feroit un autre semblable & plus petit. On détermineroit le centre de gravité dans celui-ci, comme nous venons de dire; ce qui feroit connoître proportionnellement la position du centre de gravité dans le grand corps.

On appelle ligne de *direction*, la verticale qui passe par le centre de gravité d'un corps.

LXVI.

REMARQUE. Le centre de gravité des corps n'est pas toujours le même que leur centre de *volume*. Il peut arriver que la densité soit différente dans les différentes parties d'un corps proposé. Qu'un globe, par exemple, soit composé de deux hémisphères, l'un d'or & l'autre d'argent. Alors le centre de gravité s'éloigne du centre de volume, en se portant vers la partie la plus dense; & l'on ne peut guères déterminer le centre de gravité, que par l'expérience. Mais quand la densité est la même dans toute l'étendue du corps, on peut

SCD LYON 1

souvent trouver ce centre fort simplement, à l'aide de la géométrie, comme on verra dans les problèmes suivants.

LXVII.

PROBLÈME II. *Déterminer le centre commun de gravité de plusieurs corps* A, B, C, D (*Fig.* 36.), *dont on suppose qu'on connoisse les centres de gravité particuliers* a, b, c, d.

SOLUTION. Imaginons trois plans *FEKL*, *LHIK*, *FLHZ*, dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres, & qui comprennent, si l'on veut, les corps proposés dans leur angle solide. Soit *G* le centre commun de gravité de ces corps. Puisque leur position est donnée, on connoît leur distance à chacun des trois plans. Or, pour trouver la distance du point *G* à l'un quelconque de ces plans, il suffit (*Num.* LXIV.) de diviser les moments des corps rapportés à ce plan, par la somme des corps. On connoîtra donc aisément la distance du point *G* à chacun des trois plans.

Cela posé, pour déterminer le point *G*, prenons sur l'intersection *LH* une partie *LM* égale à la distance de *G* au plan *FEKL*. Prenons de même sur l'intersection *LF* la partie *LN* égale à la distance de *G* au plan *LHIK*. Par les points *M*, *N*, menons les lignes *MO*, *NP* parallèlement aux intersections *LF*, *LH*; & par le point *G'* où elles se coupent, tirons perpendiculairement au plan

SCD LYON 1

FLHZ, une ligne *G'G* égale à la distance connue de ce plan au centre de gravité. Elle se terminera au point *G* qu'il s'agit de déterminer.

En effet, il est évident que le point *G* est éloigné du plan *FEKL*, d'une quantité égale à la ligne *NG'=LM*, & que le même point *G* est éloigné du plan *LHIK*, d'une quantité égale à la ligne *MG'=LN*.

LXVIII.

REMARQUE. On peut aussi résoudre le problème précédent de la manière suivante:

1° Menons la ligne *ab* (*Fig.* 37.), & prenons sur cette ligne la partie *af* déterminée par la proportion $A+B : ab :: B : af$: le point *f* (*Num.* LXIV.) sera le centre commun de gravité des poids *A* & *B*.

2° Au lieu des poids *A*, *B*, nous pouvons en prendre un seul égal à leur somme, & le supposer placé au point *f*. Menant ensuite la ligne *fc*, nous trouverons le point *h*, centre commun de gravité des trois premiers corps *A*, *B*, *C*, en faisant la proportion $A+B+C : fc :: C : fh$.

3° Supposant ces trois poids réunis au point *h*, & menant la ligne *hd*, on trouvera dans cette ligne le point *g*, centre commun des quatre corps *A*, *B*, *C*, *D*, en faisant la proportion $A+B+C+D : hd :: D : hg$.

On procéderoit de même pour trouver le centre

SCD LYON 1

commun de gravité d'un plus grand nombre de corps.

LXIX.

PROBLÈME III. *Trouver le centre de gravité d'une ligne droite.*

SOLUTION. Trouvez le milieu de cette ligne: ce ſera évidemment le centre de gravité. Car ſi l'on conçoit qu'une ligne droite AB (*Fig.* 38.), ſoit chargée dans toute ſa longueur de ponduſcules égaux & indéfiniment petits, deux ponduſcules quelconques a, b, pris de part & d'autre à égale diſtance du milieu C de la ligne, ſe feront équilibre. Donc la partie AC ſera équilibre à la partie BC, & la ligne ſuſpendue par le point C, ne prendra aucun mouvement.

LXX.

PROBLÈME IV. *Trouver le centre de gravité du périmètre d'un polygone.*

SOLUTION. Soit, par exemple, un pentagone $ABCDE$ (*Fig.* 39.). Le centre de gravité de chaque côté ſera dans le milieu de ce côté (*Num.* LXIX.). On pourra donc conſidérer les cinq côtés du pentagone, comme cinq poids proportionnels à leur longueur, & placés au milieu de chacun; & l'on trouvera leur centre commun de gravité par le problême II. (*Num.* LXVII & LXVIII.).

SCD LYON 1

LXXI.

PROBLÈME V. *Trouver le centre de gravité d'une ſurface triangulaire.*

SOLUTION. Soit le triangle *ABC* (*Fig.* 40.), dont on demande le centre de gravité. Des angles *A* & *B* menez les lignes *AD*, *BE*, qui coupent en parties égales les côtés oppoſés à ces angles. Le point *G* où ſe coupent ces lignes, ſera le centre de gravité du triangle.

En effet, ſi l'on conçoit le triangle comme compoſé d'une infinité d'éléments parallèles à la ligne *BC*, chacun de ces éléments aura ſon centre de gravité dans la ligne *AD*, & par conſéquent ſi l'on ſuſpend le triangle par le point *A*, de manière que la ligne *AD* ſoit verticale, il y aura équilibre. Donc le centre de gravité ſe trouve dans la ligne *AD*, De même, ſi l'on conçoit le triangle comme compoſé d'une infinité d'éléments parallèles à la ligne *AC*, ils auront chacun leur centre de gravité dans la ligne *BE*; & par conſéquent ſi on ſuſpend le triangle par le point *B*, de manière que la ligne *BE* ſoit verticale, il y aura encore équilibre. Donc le centre de gravité ſe trouve auſſi dans la ligne *BE*. Mais il ne peut pas être en même tems dans les lignes *AD* & *BE*, à moins qu'il ne ſoit dans leur interſection *G*. Donc, &c.

SCD LYON 1

Au reste, on peut observer que la partie $AG = \frac{2}{3} AD$. Car si l'on mène la ligne DE, elle sera parallèle à la ligne AB, puisqu'elle coupera en parties égales les côtés AC & BC. De plus, les triangles ABG, DEG, étant semblables, leurs côtés correspondants donneront la proportion $AB : DE :: AG : GD$; & puisque $AB = 2DE$, on aura $AG = 2DG$. Donc $AG = \frac{2}{3} AD$.

LXXII.

PROBLÈME VI. *Trouver le centre de gravité d'une surface polygonale quelconque.*

SOLUTION. Soit un pentagone $ABCDE$, (*Fig.* 39.). Divisez sa surface en triangles EAB, EBC, ECD, dont vous déterminerez les centres de gravité par le problème V. Considérez ensuite chaque triangle comme un poids placé à son centre de gravité & proportionnel à sa surface. Vous trouverez aisément le centre commun de gravité de tous les triangles qui composent le polygone, en employant les méthodes expliquées (*Num.* LXVII & LXVIII.).

LXXIII.

PROBLÈME VII. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.*

SOLUTION. Soit la pyramide triangulaire $ABCD$ (*Fig.* 41.). Des angles A & B menons

SCD LYON 1

les deux lignes AH & BH au milieu du côté CD. Le centre de gravité du triangle BCD sera le point E situé aux deux tiers de BH (*Nim.* LXXI.), & le centre de gravité du triangle ACD sera le point F, situé aux deux tiers de AH. Menons de l'angle A la ligne AE, & de l'angle B la ligne BF. Ces lignes étant dans un même plan, se couperont en un point G qui sera le centre de gravité de la pyramide.

En effet, on peut concevoir la pyramide comme composée d'une infinité d'éléments triangulaires qui auroient chacun une épaisseur infiniment petite, qui seroient tous parallèles au triangle BCD, & qui iroient en décroissant jusqu'au point A. Le centre de chacun de ces éléments se trouvera dans la ligne AE. Donc si l'on suppose la pyramide suspendue par le point A, de manière que la ligne AE soit verticale, chaque élément triangulaire de de la pyramide sera en équilibre, & par conséquent il y aura équilibre dans la pyramide entière. Donc le centre de gravité sera dans la ligne AE.

On démontrera de même, qu'il y aura équilibre, en supposant la pyramide suspendue par le point B, de manière que la ligne BF soit verticale. Donc le centre de gravité sera aussi dans la ligne BF. Or il ne peut pas être en même tems dans les lignes AE & BF, à moins qu'il ne soit précisément au point G, où elles se coupent.

SCD LYON 1

On peut voir aisément que $AG = \frac{3}{4} AE$. Car si l'on mène la ligne EF, elle coupera proportionnellement les deux lignes AH & BH. Donc elle sera parallèle à la ligne BA, & on aura les deux triangles semblables AGB, EGF, dont les côtés homologues donneront la proportion $AB : EF :: AG : EG$. Or il est évident que $AB = 3\,EF$; Donc $AG = 3\,EG$, & par conséquent $AG = \frac{3}{4} AE$.

LXXIV.

PROBLÈME VIII. *Trouver le centre de gravité d'un solide quelconque terminé par des surfaces planes.*

SOLUTION. Tout corps terminé par des surfaces planes, peut se décomposer en pyramides triangulaires. On peut trouver par le problême précédent, le centre de gravité de chacune de ces pyramides, & supposer son poids entier réuni dans ce centre. On aura donc plusieurs poids dont on connoîtra les centres de gravité en particulier, & l'on pourra trouver le centre commun. (*Num.* LXVII. & LXVIII.)

Je me borne à la solution des problèmes précédents. On peut voir dans d'autres ouvrages, en particulier dans les Cours de Messieurs *Bossut* & *Bezout*, une méthode très-générale & très-simple pour trouver les centres de gravité, par le moyen du calcul intégral.

SCD LYON 1

LXXV.

On peut conclure de ce que nous avons démontré jusqu'ici, qu'un corps ne descendra pas, si son centre de gravité est soutenu par une force qui l'empêche de descendre. Car alors la résultante de tous les poids élémentaires dont le corps est composé, sera détruite par une force contraire, & par conséquent le corps ne pourra prendre aucun mouvement.

C'est pour cela qu'un corps soutenu par un plan horizontal ne tombera point, si la ligne de direction passe par quelque point de la base; ou du moins si la résultante qui agit suivant cette ligne, peut se décomposer en d'autres forces parallèles, qui passent par des points où le corps & le plan se rencontrent.

Un mur, par exemple, peut être solidement bâti, quoiqu'il soit incliné, pourvu que les pierres étant bien liées, la ligne de direction du mur, ou du moins de tout l'édifice, ne sorte point hors de la base.

Les personnes qui ont un gros ventre, se penchent naturellement en arrière, parce que sans cette attitude, le centre de gravité trop peu soutenu, les mettroit en danger de tomber sur la face. Un crocheteur, au contraire, qui porte un gros fardeau sur le dos, se courbe en avant, parce

SCD LYON 1

que sa charge & lui ont un centre de gravité commun, qui le plus souvent se trouve placé hors du porteur, & qui ne seroit point soutenu, s'il marchoit droit. Il faut donc de nécessité qu'il se penche, jusqu'à ce que ce centre se trouve dans une ligne verticale qui passe entre ses deux pieds.

Lorsqu'un homme marche, il porte alternativement son corps sur le côté droit & sur le côté gauche. S'il veut se tenir debout sur une jambe, il est obligé de faire un mouvement de côté, pour mettre le corps perpendiculairement sur celui des deux pieds qui doit le soutenir; s'il veut se baisser en portant la tête en avant, il porte nécessairement en arrière la partie opposée, pour entretenir l'équilibre entre l'une & l'autre; & voilà pourquoi l'on ne peut se tenir sur un seul pied, ni rien ramasser devant soi en se baissant, lorsque l'on a immédiatement à côté & derrière soi un mur ou un arbre qui empêche les mouvements qu'il faut faire pour maintenir le centre de gravité dans la ligne de direction qui passe au point d'appui.

SCD LYON 1

ARTICLE III.

De l'Équilibre des Machines.

LXXVI.

ON donne le nom de *machine* à tous les inſtruments par le moyen deſquels ſe tranſmet l'action des forces. Les machines ſont *compoſées* ou *ſimples*, ſuivant qu'elles réſultent ou ne réſultent pas de la combinaiſon de pluſieurs autres. Il y a une infinité de machines compoſées, & le nombre s'en accroît tous les jours. Mais le nombre des machines ſimples eſt très-borné. Quelques auteurs en comptent ſept, d'autres ſix, d'autres cinq, d'autres trois. Il y en a même qui prétendent que toutes les machines peuvent ſe réduire au levier. Quoi qu'il en ſoit, nous traiterons ici en particulier de la *machine funiculaire*, du *levier*, de la *poulie*, du *tour*, du *plan incliné*, de la *vis* & du *coin*. Cela nous donnera lieu de parler auſſi de quelques autres machines, qui ne ſont que des combinaiſons très-ſimples des précédentes.

SECTION I.

De la Machine Funiculaire.

LXXVII.

ON appelle *machine funiculaire*, celle où l'on n'employe que des cordes pour ſoutenir un poids,

SCD LYON 1

ou pour contrebalancer des puiſſances. Je ferai préciſion du poids des cordes, juſqu'à ce que j'avertiſſe expreſſément que j'en tiens compte.

LXXVIII.

PROBLÈME I. *Déterminer les conditions de l'équilibre de trois puiſſances* P, Q, S (Fig. 42.), *qui agiſſent par le moyen de trois cordons qu'aſſemble un nœud fixe* A.

SOLUTION. Il eſt évident que ſi l'une des puiſſances, par exemple P, eſt égale & diamétralement oppoſée à la réſultante R des deux autres, il y aura équilibre. Prolongez donc la direction PA de la puiſſance P, & prenez ſur ſon prolongement une partie AD, égale à la ligne AE que je ſuppoſe exprimer la puiſſance P. Achevez enſuite le parallélogramme $ABDC$: il faudra, pour l'équilibre, que les puiſſances Q, S, ſoient repréſentées par les lignes AB, AC.

En effet, ſi la puiſſance Q eſt repréſentée par AB, & la puiſſance S par AC, leur réſultante ſera exprimée par la diagonale AD, & ſera par conſéquent égale & diamétralement oppoſée à la force P qu'on ſuppoſe repréſentée par AE. Il eſt évident que dans tout autre cas les puiſſances Q, S, n'auroient pas AD pour réſultante, & qu'il ne pourroit pas y avoir équilibre.

SCD LYON 1

LXXIX.

COROLLAIRE I. Si les deux cordons AQ, AS (*Fig.* 43.), au lieu d'être ſollicités par deux puiſſances, étoient attachés à deux points fixes Q, S, alors AB & AC repréſenteroient les efforts ſupportés par les points fixes, ou les tenſions produites dans les deux cordons en conſéquence de l'action de la force P.

LXXX.

COROLLAIRE II. *Les trois puiſſances* P, Q, S (Fig. 42.), *dans le cas d'équilibre, ſont proportionnelles chacune au ſinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

Pour le démontrer, ſuppoſons que R ſoit la réſultante des puiſſances Q, S. On a (*Num.* XIX.), la ſuite des raiſons égales, R : ſin. QAS :: Q : ſin. RAS :: S : ſin. QAR. Mais dans le cas d'équilibre $P = R$. D'ailleurs, ſin. RAS = ſin. PAS, & ſin. QAR = ſin. QAP, parce que le ſinus d'un angle vaut celui de ſon ſupplément. Donc on aura P : ſin. QAS :: Q : ſin. PAS :: S : ſin. QAP.

LXXXI.

COROLLAIRE III. *Qu'on ſuppoſe* (Fig. 44.) *la puiſſance* P *auſſi petite & les puiſſances* Q, S *auſſi grandes qu'on voudra, il y aura toujours un angle au point* A, *pourvu que les trois puiſſances ſoient finies.*

SCD LYON 1

Car nous venons de démontrer qu'on a toujours $Q : \text{fin. } PAS :: P : \text{fin. } QAS$. Dans cette proportion les trois premiers termes sont des quantités de valeur finie par la supposition. Donc le quatrième terme fin. QAS aura nécessairement une valeur finie. Or tout sinus dont la valeur est finie, est le sinus d'un angle dont la valeur est pareillement finie. Donc quelque petite qu'on suppose la puissance P, elle produira un coude au point A.

LXXXII.

COROLLAIRE IV. *Une puissance très-petite* P *pourra produire une tension considérable dans les cordons* AQ, AS, *si l'on suppose que l'angle* QAS *soit très-obtus.*

Car ces tensions Q, S, sont à la puissance P, comme les sinus des angles PAS, QAP sont au sinus de l'angle QAS. Or il est visible que lorsque l'angle QAS est très-obtus, les deux angles PAS, QAP peuvent différer peu de l'angle droit, & alors leurs sinus sont très-grands par rapport au sinus de QAS qu'on suppose très-obtus. Donc aussi les tensions ou forces Q, S sont très-grandes par rapport à la force P.

Ceci peut servir à rendre raison du phénomène suivant. Soient A, B, C, (*Fig.* 45.), des vessies qui communiquent ensemble par des petits bouts de tuyaux qui servent à les joindre. Soit D un poids de

de 30 livres qui repose sur le pied de la machine, quand les vessies sont vuides. Si l'on souffle de l'air dans ces vessies par le moyen du tuyau qu'on voit en *E*, elles s'enflent, & le poids s'élève de plusieurs pouces. On conçoit aisément que l'air qui s'introduit dans les vessies, exerce son action en tout sens : il agit donc contre les parois *bb*, *cc*, qu'on peut considérer comme un assemblage de fibres funiculaires ; & la tension qu'il produit dans ces parois, doit surpasser considérablement la force dont il est doué lui-même. Il n'est donc pas impossible que les parois se dilatent suffisamment pour soulever le poids *D*.

LXXXIII.

PROBLÈME II. *Déterminer les conditions de l'équilibre d'une machine funiculaire, dans laquelle chaque nœud fixe n'assemble que trois cordons sollicités par des puissances dont les directions sont dans le même plan.*

SOLUTION. Soit la machine funiculaire *PABCT* (*Fig.* 46.), dans laquelle chaque nœud n'assemble que trois cordons. Soient les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, appliquées à ces cordons. Soit enfin *a* la tension du cordon *AB*, & *b* la tension du cordon *BC*. On peut considérer ces tensions comme des puissances appliquées à ces cordons.

Cela posé, il faut & il suffit pour l'équilibre de la machine, 1° *que des trois puissances appliquées*

SCD LYON 1

aux cordons issus du même nœud fixe, l'une agisse hors de l'angle formé par les directions des deux autres, afin qu'elle puisse être opposée à leur résultante; 2° que ces trois puissances soient proportionnelles chacune au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres. Ces conditions sont une suite de ce qu'on a démontré (*Num.* LXXVIII. & LXXX.).

On aura donc pour l'équilibre des trois puissances P, Q, a, la suite des raisons égales $P : \text{sin. } QAB :: Q : \text{sin. } PAB :: a : \text{sin. } QAP$.

De même, l'équilibre des puissances a, b, R, donnera $a : \text{sin. } RBC :: R : \text{sin. } ABC :: B : \text{sin. } ABR$.

Et pour l'équilibre des puissances b, S, T, on aura $b : \text{sin. } SCT :: S : \text{sin. } BCT :: T : \text{sin. } BCS$.

Il est évident que les conditions de l'équilibre seroient les mêmes, si les cordons extrêmes, au lieu d'être sollicités par les puissances P & T, étoient attachés à des points fixes. Dans ce cas, les résistances des deux appuis tiendroient lieu des forces P, T, & seroient égales aux tensions des deux cordons AP, CT.

LXXXIV.

COROLLAIRE I. Puisqu'on suppose que les puissances P, Q, R, S, T, appliquées à la machine funiculaire, sont en équilibre, & que cette machine n'a d'elle-même aucune action, il faut que

la réſultante des puiſſances P, T, qui ſoutiennent les cordons extrêmes, ſoit égale & diamétralement oppoſée à la réſultante de toutes les autres puiſſances Q, R, S. Or la réſultante des puiſſances P & T paſſe néceſſairement par le point V où ſe coupent leurs directions : donc ſi l'on ſuppoſe que cette réſultante ſoit dirigée de V en Z, la réſultante des autres puiſſances ſera dirigée de Z en V, & paſſera par le point V.

LXXXV.

COROLLAIRE II. Suppoſons à préſent que les deux extrémités d'une machine funiculaire (*Fig.* 47.) étant attachées à des points fixes A, F, les directions de toutes les puiſſances P, Q, R, S, ſoient parallèles entr'elles.

1° *La réſultante des puiſſances* P, Q, R, S, *ſera égale à leur ſomme* P + Q + R + S, *& leur ſera parallèle.* Car la réſultante de pluſieurs forces parallèles qui agiſſent dans le même ſens, eſt toujours une force parallèle qui vaut leur ſomme.

2° *Cette réſultante ſera égale & diamétralement oppoſée à la réſultante des efforts que ſupportent les points fixes* A & F. Car ces efforts ou réſiſtances des points fixes produiſent le même effet que produiroient deux puiſſances appliquées aux points A & F, & capables de faire équilibre aux puiſſances P, Q, R, S : or ces deux puiſſances

Bibliothèque universitaire Lyon 1
SCD LYON 1

(*Num.* LXXXIV.) auroient une réſultante égale & diamétralement oppoſée à celles des puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S*.

3° *Les tenſions des cordons extrêmes* AB, FE, *que j'appelle* a, f, *étant équivalentes aux forces qui les produiſent, & qui ſont équilibre aux puiſſances* P, Q, R, S, *la réſultante de ces tenſions ſera diamétralement oppoſée à la réſultante de ces puiſſances, & vaudra leur ſomme.*

4° *La réſultante des tenſions* a, f, *des cordons extrêmes* AB, FE, *paſſera par le point* V, *où ces cordons prolongés concourent, & ſon effet ſe fera ſuivant la ligne* VZ, *parallèle à la direction des puiſſances* P, Q, R, S. Car la réſultante de deux puiſſances dont les directions vont ſe couper en un point, paſſe toujours par le point de concours; & de plus, la réſultante des tenſions des cordons extrêmes *AB*, *FE*, ne doit pas moins être parallèle aux puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S*, que la réſultante de ces puiſſances, puiſque ces deux réſultantes agiſſent néceſſairement dans la même ligne.

LXXXVI.

COROLLAIRE III. *Dans une machine funiculaire telle que nous venons de la ſuppoſer, la ſomme des puiſſances parallèles eſt à la tenſion d'un cordon extrême, comme le ſinus de l'angle formé par les cordons extrêmes prolongés, eſt au*

SCD LYON 1

sinus de l'angle formé par la direction des puissances & de l'autre cordon extrême.

En effet, les tensions a, f, & leur résultante, sont proportionnelles chacune au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres. Donc si nous appelons Z cette résultante, nous aurons $Z : a :: \text{sin. } AVF : \text{sin. } ZVF$; & $Z : f :: \text{sin. } AVF : \text{sin. } AVZ$. Or, par le corollaire précédent, $Z = P + Q + R + S$, & les angles AVZ, ZVF sont les angles que font les cordons extrêmes avec la direction des puissances parallèles.

LXXXVII.

COROLLAIRE IV. Si l'on attache les extrémités d'une corde parfaitement fléxible ACB (*Fig.* 48.), à deux points fixes A & B, pris dans deux lignes verticales différentes, cette corde prendra, en vertu de la pesanteur de ses parties, une courbure telle qu'on aura toujours la proportion suivante : *Le poids total de la corde est à la tension de l'une des extrémités* A, *comme le sinus de l'angle formé par les tangentes menées aux deux extrémités de la corde, est au sinus de l'angle que fait la verticale avec la tangente menée à l'autre extrémité* F.

Car les pesanteurs de tous les éléments dont la corde est composée, peuvent se considérer comme autant de puissances appliquées à la machine funiculaire. Leur résultante est évidemment le poids

SCD LYON 1

total de la corde, & cette réſultante agit ſuivant la ligne verticale ZV, menée par le point de concours des tangentes AV, BV, qui ſont les directions prolongées des éléments extrêmes de la courbe en A & en B. Donc (*Num.* LXXXVI.) on doit avoir la proportion ſuivante : *Le poids total de la corde eſt à la tenſion de l'élément extrême* A, *comme le ſinus de l'angle* AVB *eſt au ſinus de l'angle* BVZ, *formé par la tangente* BV *& la verticale* VZ.

Les Géomètres ont nommé *chaînette* la courbe ACB, ſuivant laquelle ſe plie une corde peſante, conſidérée comme parfaitement fléxible, & ſuſpendue librement à des points fixes pris dans des verticales différentes. Ce que nous venons de démontrer ſur la machine funiculaire, ſert à déterminer la nature de cette courbe: problème intéreſſant qui fut réſolu, pour la première fois, vers 1690, par MM. *Leibnitz* & *Bernoulli*.

LXXXVIII.

COROLLAIRE V. Suppoſons encore un polygone funiculaire & régulier $ABDEFG$ (*Fig.* 49.), aux angles duquel ſoient appliquées des puiſſances égales H, H, H, &c., qui agiſſent ſuivant les rayons obliques prolongés.

1° *Tous les côtés du polygone ſeront également tendus*. Car tout étant égal relativement à chacun

de ces côtés, il n'y a point de raison pourquoi l'un soit plus ou moins tendu que les autres.

2° *La tension de chaque côté sera à la somme des puissances qui agissent du centre à la circonférence, comme le rayon oblique est au périmètre du polygone.*

Car en appelant *a* la tension du côté *AG*, nous aurons (*Num.* LXXXIII.) $a : H :: \text{sin. } HAB : \text{sin. } GAB$. Mais au lieu de sin. *HAB*, nous pouvons mettre sin. *BAC*, puisque le sinus d'un angle est égal à celui de son supplément. Par la même raison, au lieu de sin. *GAB*, nous pouvons mettre sin. *ACB*, puisque dans un polygone régulier, l'angle au centre est toujours supplément de l'angle au périmètre. Notre proportion deviendra donc $a : H :: \text{sin. } BAC : \text{sin. } ACB$; ou parce que dans un triangle *BAC* les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés, $a : H :: CB : AB$. Multipliant les deux conséquents par le nombre *n* des puissances *H*, qui est le même que celui des côtés du polygone, nous aurons $a : n \times H :: CB : n \times AB$; c'est-à-dire, la tension *a* est à la somme des puissances *H*, comme le rayon oblique *CB* est à la somme des côtés, ou au périmètre du polygone.

LXXXIX.

COROLLAIRE VI. La circonférence d'un cercle

SCD LYON 1

n'étant que le contour d'un polygone régulier d'une infinité de côtés, dont les rayons obliques se confondent avec les rayons droits, si l'on suppose que tous les points de cette circonférence soient pressés perpendiculairement suivant les rayons prolongés, par des forces égales, on pourra conclure que *la tension produite dans chaque élément, sera à la somme de toutes les forces perpendiculaires, comme le rayon est à la circonférence.*

XC.

JE n'entrerai dans aucun détail sur l'équilibre de la machine funiculaire, lorsque les cordons issus du même nœud sont au nombre de plus de trois, dirigés dans un même ou dans différents plans. J'observerai seulement que, dans tous les cas possibles, ayant imaginé trois plans dont chacun soit perpendiculaire aux deux autres, & décomposé chacune des forces qui agissent sur un même nœud en trois autres perpendiculaires à ces trois plans, les conditions de l'équilibre seront toujours, que *la somme des forces perpendiculaires à chaque plan, soit zéro.* Il est évident que ces conditions ayant lieu, le nœud sollicité par les puissances, ne pourra s'éloigner d'aucun des trois plans. Il ne recevra donc aucun mouvement en vertu de ces puissances.

SCD LYON 1

SECTION II.

Du Levier.

XCI.

J'ENTENDS ici par *levier* (*Fig.* 50, 51, 52, 53, 54.), une verge inflexible, droite ou courbe, tellement fixée en l'un *E* de ſes points, qu'elle ne puiſſe prendre d'autre mouvement par l'action des forces qui lui ſeroient appliquées, qu'un mouvement de *rotation*, c'eſt-à-dire, un mouvement pour tourner en tous ſens autour du point *E*. Ce point fixe s'appelle le point *d'appui*.

XCII.

COMME l'uſage le plus ordinaire du levier eſt de ſoutenir un poids, à l'aide d'une puiſſance & d'un appui, les différentes poſitions que la puiſſance & le poids peuvent avoir par rapport à l'appui, ont fait diſtinguer trois ſortes de levier : celui de *la première eſpèce* (*Fig.* 50.), dans lequel le point d'appui eſt placé entre la puiſſance & le poids; celui de *la ſeconde eſpèce* (*Fig.* 51.), où le poids ſe trouve entre la puiſſance & le point d'appui; & celui de *la troiſième eſpèce* (*Fig.* 52.), où la puiſſance eſt appliquée entre le poids & l'appui.

XCIII.

THÉORÈME. *Pour que deux puiſſances appli-*

SCD LYON 1

quées à un levier se fassent équilibre, il est nécessaire & il suffit que la direction de leur résultante passe par le point d'appui.

1° Il est évident que cette condition est nécessaire pour l'équilibre. Car tous les points du levier étant mobiles, à l'exception du point d'appui, la résultante ne peut être détruite, à moins qu'elle ne passe par ce point.

2° Il n'est pas moins évident que la condition énoncée suffit pour l'équilibre. Car si la direction de la résultante des deux forces rencontre le point d'appui, cette résultante sera entièrement détruite par la résistance de ce point qu'on suppose immobile. Donc elle ne pourra produire aucun mouvement dans le levier, & par conséquent les deux forces composantes seront en équilibre.

XCIV.

COROLLAIRE I. *Le point d'appui & les directions de deux puissances qui se font équilibre par le moyen du levier, sont nécessairement dans le même plan.*

Car (*Num.* XIV.), les directions de deux puissances composantes & de leur résultante sont toujours dans le même plan. Or nous venons de démontrer que le point d'appui est nécessairement dans la direction de la résultante de deux puissances qui se font équilibre à l'aide du levier. Donc le point

SCD LYON 1

d'appui & les directions de ces puissances sont nécessairement dans le même plan.

XCV.

COROLLAIRE II. *Les deux puissances* P, S (Fig. 53 & 54.), *étant en équilibre à l'aide du levier, si l'on prolonge leurs directions jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point* O, *& qu'on tire ensuite la droite* OE *du point de concours au point d'appui, elle sera la direction de la résultante des deux puissances dont il s'agit.*

Car cette résultante devant passer par le point de concours des puissances & par le point d'appui, ne peut être que la droite menée du point *E* au point *O*.

XCVI.

COROLLAIRE III. *Puisqu'une résultante & ses deux puissances composantes sont proportionnelles chacune au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres, si nous appelons* R *la résultante de* P *&* S (Fig. 53 & 54.), *nous aurons* P : sin. EOS :: S : sin. EOP :: R : sin. POS.

La résultante *R* qui agit contre le point d'appui, exprime évidemment l'effort ou la pression que cet appui supporte.

XCVII.

COROLLAIRE IV. *Deux puissances en équilibre*

SCD LYON 1

à l'aide d'un levier, ont des moments égaux par rapport au point d'appui.

Car (*Num.* XXVII.), les moments de deux puiſſances compoſantes, par rapport à un point pris dans la direction de leur réſultante, ſont égaux. Or le point d'appui eſt un point qui ſe trouve toujours dans la direction de la réſultante des deux puiſſances en équilibre à l'aide du levier.

Donc ſi l'on mène du point d'appui (*Fig.* 53 & 54.), les perpendiculaires EF, EH, ſur les directions des puiſſances, on aura $P \times EF = S \times EH$, d'où ſuit la proportion $P : S :: EH : EF$, qui nous apprend que *deux puiſſances en équilibre à l'aide d'un levier, ſont en raiſon inverſe des perpendiculaires abaiſſées du point d'appui ſur leurs directions.*

XCVIII.

COROLLAIRE V. *Si les deux puiſſances* P, S (Fig. 55 & 56.), *en équilibre à l'aide d'un levier droit, ſont parallèles, elles ſeront entr'elles en raiſon inverſe des parties du levier compriſes entre le point d'appui & les points où elles ſont appliquées.*

Car ſi par le point d'appui on tire perpendiculairement aux directions des puiſſances la ligne FEH (*Fig.* 55.), ou EFH (*Fig.* 56.), on aura les triangles AEF, BEH, qui, à cauſe des parallèles, ſeront ſemblables. Donc $BH : EF$

SCD LYON 1

:: EB : EA : or EH : EF :: P : S, par le corollaire précédent; donc P : S :: EB : EA.

XCIX.

COROLLAIRE VI. *De toutes les puissances qu'on peut appliquer à un point* B *d'un levier droit* (Fig. 57 & 58.), *& qui sont capables chacune en particulier de faire équilibre à une puissance donnée* P, *la plus petite est la puissance* S *qui agit perpendiculairement au levier.*

Pour le démontrer, prenons une puissance S' qui agisse obliquement au levier, & menons du point d'appui sur sa direction, ainsi que sur celle de la puissance P, les perpendiculaires EH, EF. On voit (*Num.* XCVII.) que la puissance S étant en équilibre avec la puissance P, on doit avoir $S \times EB = P \times EF$. Par la même raison S' faisant équilibre à la puissance P, on doit avoir $S' \times EH = P \times EF$. Donc $S \times EB = S' \times EH$; d'où l'on tire la proportion S : S' :: EH : EB. Or la ligne EH est plus petite que EB, parce que la perpendiculaire est plus courte que l'oblique menée du même point sur la même ligne. Donc aussi la puissance S sera plus petite que S'.

C.

COROLLAIRE VII. *Quand deux puissances se font équilibre par le moyen d'un levier, le moment de leur résultante, par rapport à un point pris*

SCD LYON 1

dans la direction de l'une de ces puissances, est égal au moment de l'autre puissance relativement au même point.

Ce corollaire est évident par ce que nous avons dit (*Num.* XXVI.).

Donc si d'un point B (*Fig.* 59 & 60.) pris dans la direction de la puissance S, on abaisse les lignes BF, BG, perpendiculaires aux directions de l'autre puissance P & de la résultante R, on aura $R \times BG = P \times BF$. Ainsi $R : P :: BF : BG$; c'est-à-dire, *la résultante & l'une des puissances qui sont en équilibre par le moyen du levier, sont entr'elles en raison inverse des perpendiculaires menées sur leurs directions, d'un point pris dans la direction de l'autre puissance.*

CI.

COROLLAIRE VIII. *Le levier dont se sert une puissance pour mettre un poids en équilibre, favorise la puissance, ou est à son désavantage, selon que la direction de la puissance est plus ou moins éloignée du point d'appui que celle de la résistance.*

Car (*Num.* XCVII.), la puissance & le poids qui se font équilibre, sont en raison inverse des perpendiculaires tirées du point d'appui sur leurs directions: or ces perpendiculaires sont les distances du point d'appui aux directions de la puissance & du poids: donc la puissance & le poids sont en raison inverse des distances du point d'appui à leurs

SCD LYON 1

directions; & par conſéquent ſi la direction de la puiſſance eſt plus éloignée de l'appui que celle du poids, il faudra, pour l'équilibre, que la puiſſance ſoit moindre que le poids: ainſi le levier favoriſera la puiſſance. Au contraire, ſi la direction de la puiſſance eſt moins éloignée du point d'appui que celle du poids, il faudra, pour l'équilibre, que la puiſſance ſoit plus grande que le poids: ainſi la puiſſance aura du déſavantage. Le levier ne favoriſeroit ni la puiſſance, ni la réſiſtance, ſi l'appui étoit également éloigné de leurs directions.

Le levier de la première eſpèce peut donc favoriſer la puiſſance, ou être à ſon déſavantage; parce que dans ce levier l'appui peut être plus ou moins éloigné de la direction de la puiſſance que de celle de la réſiſtance. On voit de même, que dans le levier de la ſeconde eſpèce, la puiſſance a toujours de l'avantage, & qu'elle a un déſavantage réel dans le levier de la troiſième eſpèce. Ce dernier levier ſeroit donc mal employé dans le cas où il s'agit de mettre la force motrice en état de ſoutenir ou de ſurmonter une force plus grande qu'elle-même.

CII.

PROBLÈME I. *Deux puiſſances étant en équilibre à l'aide d'un levier quelconque, & trois de ces ſix choſes étant données, les deux puiſſances, la charge de l'appui & les angles formés par leurs*

SCD LYON 1

directions, trouver les trois autres ; pourvu qu'on ait parmi les choses données, une des puissances ou la charge de l'appui.

SOLUTION. La charge de l'appui n'étant que la résultante des deux puissances, il est évident que le problème se résout par la méthode expliquée (*Num.* XLI.).

CIII.

PROBLÈME II. *Dans un levier droit de la première espèce, de ces quatre choses, la longueur du levier, la distance du point d'appui à l'une des extrémités du levier, les deux poids attachés aux extrémités du levier qu'ils sollicitent suivant des directions parallèles, trois étant connues, trouver la quatrième.*

SOLUTION. Soient les deux poids P, S (*Fig.* 61.), qui se font équilibre par le moyen du levier AB. Soit AE la distance du point d'appui à l'extrémité A. On a (*Num.* XCVIII.), $P : S :: BE : AE$. Donc $P \times AE = S \times BE$, ou $P \times AE = S \times \overline{AB - AE}$, ou enfin $P \times AE = S \times AB - S \times AE$. Cette équation ne contient que les quatre quantités dont il est question dans le problème. Donc si l'on en connoît trois, on trouvera la quatrième en résolvant l'équation.

Supposons, par exemple, $P = 30$ £, $S = 20$ £, $AB = 5$ pieds; l'équation sera $30 \times AE = 20 \times 5 - 20 \times AE$.

SCD LYON 1

$= 20 \times AE$. Donc $50\,AE = 100$, & la ligne $AE = \frac{100}{50} = 2$ pieds.

CIV.

PROBLÈME III. *Dans un levier droit de la seconde ou de la troisième espèce, de ces quatre choses, la puissance, le poids, la distance du point d'appui à la puissance, la distance du même point d'appui au poids, trois étant données, trouver la quatrième, en supposant parallèles les directions du poids & de la puissance.*

SOLUTION. Soient (*Fig.* 51 & 52.), la puissance S & le poids P qui se fassent équilibre au moyen du levier. Nous avons (*Num.* XCVIII.), $P : S :: EB : EA$. Donc $P \times EA = S \times EB$. Cette équation ne contient que les quatre quantités dont il est question dans le problême proposé, & & par conséquent si l'on en connoît trois, on aura la quatrième en résolvant l'équation.

CV.

PROBLÈME IV. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent dans le même plan, par le moyen d'un levier auquel elles sont appliquées.*

SOLUTION. La seule condition nécessaire pour l'équilibre de ces puissances, est *que les moments de celles qui tendent à faire tourner dans un sens autour du point d'appui, moins les moments de*

SCD LYON 1

celles qui tendent à faire tourner en ſens oppoſé, ſoient zéro. Car on peut regarder le levier auquel les puiſſances ſont appliquées, comme un plan peu étendu en largeur & ſollicité par ces puiſſances. Or (*Num.* LIII.), quand pluſieurs puiſſances agiſſent dans un plan qui ne peut recevoir qu'un mouvement de rotation autour d'un point fixe, il ne faut, pour l'équilibre, que la condition que nous avons aſſignée.

CVI.

PROBLÈME V. *Déterminer les conditions de l'équilibre de tant de puiſſances qu'on voudra, appliquées à un levier d'une figure quelconque, ſuivant des directions quelconques.*

SOLUTION. Ayant imaginé trois plans dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres, & qui aient l'appui du levier pour point commun, que l'on décompoſe chaque puiſſance en trois autres, dont chacune agiſſe dans l'un de ces plans. Cela poſé, *il faut & il ſuffit pour l'équilibre, qu'en prenant les puiſſances qui agiſſent dans chacun des trois plans, la différence de leurs moments, par rapport au point d'appui, ſoit zéro.* Car on peut conſidérer le levier comme un ſyſtème de corps qui ne peut recevoir qu'un mouvement de rotation autour d'un point fixe, & qui eſt ſoumis à l'action de pluſieurs puiſſances dirigées comme on voudra. Or, nous avons démontré (*Num.* LVIII.), que la condition que

SCD LYON 1

nous assignons ici, étoit nécessaire & suffisoit pour l'équilibre d'un tel système.

CVII.

REMARQUE. Jusqu'à présent nous avons négligé le poids du levier: mais il est aisé d'y avoir égard au moyen des deux derniers problèmes. Il suffit pour cela de considérer ce poids comme une puissance appliquée au centre de gravité, & d'en prendre le moment par rapport au point d'appui, comme on prend celui des autres puissances.

CVIII.

PROBLÈME VI. *Dans un levier de la seconde espèce* (Fig. 62.), *de ces six choses, la puissance* S, *la résistance* P, *le poids du levier* R, *les distances* EB, EA, EC *de l'appui aux directions de ces forces, cinq étant données, trouver la sixième.*

SOLUTION. Nous aurons (*Num.* CV.), l'équation suivante: $P \times EA + R \times EC - S \times EB = 0$, qui ne contient que les six quantités désignées dans l'énoncé du problème. On suppose qu'on en connoît cinq. Il suffira donc de résoudre l'équation pour trouver la sixième.

Supposons, par exemple, $EB = 20$ pieds, $EC = 10$ pieds, $EA = 4$ pieds, la résistance $P = 40$ £, le poids du levier $R = 2$ £; & cherchons la puissance S, capable de mettre le système en équilibre. L'équation précédente deviendra $40 \times 4 + 2 \times 10$

$-20 \times S = 0$; donc on aura $180 = 20S$, ou $S = 9$ £. La puissance S devra donc être équivalente à un poids de 9 £.

Si l'on n'avoit pas eu égard au poids du levier, on auroit trouvé $S = 8$ £.

CIX.

PROBLÈME VII. *Trouver la longueur du même levier* EB (Fig. 62.), *quand on connoît sa gravité spécifique, la puissance verticale* S, *la résistance* P *& la distance* EA *du point d'appui à sa direction.* Je suppose le levier disposé horizontalement, d'une grosseur & d'une pesanteur uniforme dans toute sa longueur.

SOLUTION. Nommons x le nombre de pieds que le levier comprend dans sa longueur, g ce que pèse chaque pied; le poids total R sera gx, qu'on pourra considérer comme une puissance appliquée au milieu C du levier, à la distance $EC = \frac{1}{2}x$ du point d'appui. Cela posé, nous aurons (*Num.* CV.), $P \times EA + gx \times \frac{1}{2}x - S \times x = 0$, équation du second degré, qui donne

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 2Pg \times EA}}{g}.$$

Si l'on suppose, par exemple, $S = 10$ £, $g = 1$ £, $P = 21$ £, $EA = 2$ pieds, on trouvera $x = 10 \pm \sqrt{16}$; c'est-à-dire, que la puissance S sera équi-

SCD LYON 1

libre au poids *P*, en supposant la longueur du levier de 14 ou de 6 pieds.

CX.

REMARQUE I. La *balance ordinaire* (*Fig.* 63.), est une machine qui sert à mettre en équilibre deux quantités égales de matière, de sorte que si l'on connoît le poids de l'une, on sait, par ce moyen, ce que pèse l'autre. Cette machine est composée d'un levier droit *AB*, nommé *fléau* ou *traversin*, aux extrémités duquel sont suspendus deux bassins *F* & *G*, qui reçoivent les marchandises qu'on veut peser. Le fléau porte dans son milieu un axe *xy* qui lui est perpendiculaire, & dont les extrémités entrent & tournent librement dans des yeux pratiqués aux deux montants d'une châsse qui soutient la machine. Le même fléau porte une aiguille *fg*, qui est dans la châsse quand il y a équilibre & que le fléau est horizontal, & qui, en s'écartant à droite ou à gauche de la châsse par sa partie supérieure, fait connoître non seulement en quel sens le fléau s'est incliné, mais encore les plus petites inclinaisons dont il peut être affecté.

Pour qu'une balance ait la perfection qu'on peut désirer, elle doit avoir principalement trois qualités. 1° Elle doit être bien mobile autour de l'axe qui sert de point d'appui; autrement on pourroit mettre dans les bassins des poids inégaux, sans faire

SCD LYON 1

trébucher le traversin. 2° Il est essentiel que les deux bras de la balance soient égaux : car s'ils étoient inégaux, le plus long favoriseroit le poids placé de son côté. 3° Il faut que l'axe & les deux extrémités du fléau soient, autant qu'il est possible, dans une même ligne droite ; autrement les directions des poids que l'on veut contrepeser, ne seroient plus à égale distance de l'appui, pour peu que le fléau fût incliné à l'horizon.

CXI.

REMARQUE II. La *romaine* ou le *peson* (*Fig.* 64.), est encore un levier de la première espèce, qui sert à peser des marchandises de différentes pesanteurs, par le moyen d'un seul & même poids qu'on éloigne plus ou moins du point d'appui. Cette machine est composée d'un fléau *AB*, suspendu par une anse *EK* qui le divise en deux bras *EA*, *EB* fort inégaux. Le bras le plus court porte un bassin *F*, ou un crochet destiné à soutenir les marchandises qu'on veut peser ; & on fait couler, au moyen d'un anneau, le long du bras *EB*, le poids constant *P* qui doit leur faire équilibre. On voit (*Num.* XCVIII.), que le même poids *P* doit contrebalancer une charge d'autant plus considérable, qu'il sera plus éloigné du point d'appui. Quant à la manière dont on doit s'y prendre pour graduer convenablement le bras *EB* de la

SCD LYON 1

romaine, voyez la Méchanique de M. l'Abbé *Boſſut.*

CXII.

Les leviers ſont d'un uſage ſi commun, non ſeulement dans les arts, mais même dans la vie civile & dans le méchaniſme de la nature, qu'on les rencontre preſque par-tout, pour peu qu'on y faſſe attention. Les ciſeaux, les pinces, les pincettes, les tenailles, ne ſont que des leviers aſſemblés par paires. L'effort de la main ou des doigts qui mènent les deux branches, doit être conſidéré comme la puiſſance; le clou, ou ce qui en tient lieu, eſt un point d'appui commun aux deux leviers; & ce que l'on coupe, ou ce que l'on ſerre, devient la réſiſtance. Les rames des bateliers ſont des leviers de la ſeconde eſpèce, dont on appuie un bout contre l'eau, pendant que la puiſſance appliquée à l'autre bout porte ſon effort à l'endroit du bateau où la rame eſt attachée. Le couteau du Boulanger eſt encore un levier de la même eſpèce, lorſqu'arrêté par un bout ſur une table, & tournant autour d'un point fixe, il eſt porté par la main qui tient le manche, contre un pain qu'il entame. On peut remarquer des leviers de la troiſième eſpèce dans certains rouets à filer, dans la machine du Rémouleur ou Gagne-petit, dans les métiers à toiles, à draps & autres étoffes, dans les bras, les doigts, les jambes des animaux, &c.

SCD LYON 1

SECTION III.

De la Poulie.

CXIII.

LA *poulie* (*Fig.* 65 & 66.), n'eſt autre choſe qu'une roue creuſée extérieurement à ſa circonférence en forme de gorge, pour recevoir une corde tirée de part & d'autre par deux puiſſances. Elle eſt traverſée à ſon centre perpendiculairement par un axe dont les extrémités tournent dans les branches d'une *anſe* ou *chappe*. L'axe autour duquel tourne la poulie, s'appelle *goujon*, *tourillon*, *boulon*.

CXIV.

LA poulie peut être *fixe* ou *mobile*. La poulie fixe (*Fig.* 65.), eſt celle qui ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de ſon axe. La poulie mobile (*Fig.* 66.), eſt celle qui monte ou deſcend avec le poids que ſoutiennent les puiſſances. Dans celle-ci, le poids *R* eſt attaché à la chappe, comme on le voit dans la figure.

CXV.

THÉORÈME I. *Pour que deux puiſſances appliquées à une poulie fixe ſoient en équilibre, il eſt néceſſaire & il ſuffit que la direction de leur réſultante paſſe par le centre de la poulie.*

Car le centre de la poulie étant immobile, ſi

SCD LYON 1

la réſultante paſſe par ce point, elle ſera détruite, & par conſéquent il y aura équilibre. Mais ſi la réſultante ne paſſe pas par le centre, il eſt évident que ſon moment, par rapport à ce point, ne ſera pas zéro : donc la différence des moments des puiſſances *P*, *S* (*Fig.* 65.), ne ſera pas zéro par rapport au point fixe *E*; d'où il ſuit (*Num.* LIII.), qu'il n'y aura pas équilibre dans le plan de la poulie.

CXVI.

COROLLAIRE I. *Deux puiſſances* P, S, *qui ſe ſont équilibre par le moyen d'une poulie fixe, ſont néceſſairement égales.*

En effet, que l'on prolonge leurs directions juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en *O*. Il eſt évident que leur réſultante ſera dirigée de *O* en *E*. Donc on aura $P : S :: \text{ſin.}EOS : \text{ſin.}EOP$. Or $EOS = EOP$, à cauſe de l'égalité des triangles *EOH*, *EOF*, dans leſquels *OE* eſt côté commun; $EH = EF$, puiſque ces côtés ſont rayons du même cercle; & $OH = OF$, parce que ces côtés ſont des tangentes tirées au cercle, du même point. Donc les angles correſpondants *EOS*, *EOP* ſont égaux, ainſi que leurs ſinus; & les puiſſances *P*, *S* proportionnelles à ces ſinus ſont auſſi égales.

CXVII.

COROLLAIRE II. *Chacune des deux puiſſances*

SCD LYON 1

qui ſe font équilibre par le moyen d'une poulie fixe, eſt à la réſultante commune qui agit ſur le centre de la machine, comme le rayon eſt à la ſou-tendante de l'arc embraſſé par la corde.

Pour le faire voir, repréſentons la puiſſance *S* (*Fig.* 65.), par la partie *OC* de ſa direction, la puiſſance *P* par $OB = OC$, & achevons le paral-lélogramme *OBDC*. La réſultante que j'appelle *R*, ſera repréſentée par la diagonale *OD*, & l'on aura $S : R :: OC : OD$. Or ſi l'on mène la ſous-ten-dante *FH*, on aura $OC : OD :: EH : FH$. Car les triangles *EFH*, *ODC* ſont ſemblables, puiſque les trois côtés du premier ſont perpendiculaires aux trois côtés du ſecond. Donc $S : R :: EH : FH$.

CXVIII.

THÉORÈME II. *Dans une poulie mobile* (Fig. 66.), *pour que les deux puiſſances* P, S, *appli-quées à la corde qui embraſſe la poulie, ſoient en équilibre avec une puiſſance ou poids* R, *dont la direction paſſe par le centre de la machine, la ſeule condition requiſe eſt que la réſultante des deux premières puiſſances ſoit égale & diamétralement oppoſée à la troiſième.*

Car il eſt évident que la deſtruction des forces ne dépend que de cette condition.

CXIX.

COROLLAIRE II. *Dans la poulie mobile, les*

SCD LYON 1

deux puiſſances P & S *qui ſont équilibre au poids* R, *ſont égales.*

Car leurs directions prolongées ſe rencontreront à quelque point *O*, pris ſur la direction du poids *R*, puiſque leur réſultante doit être diamétralement oppoſée au poids. Donc cette réſultante ſera dirigée du point *O* au centre *E* de la poulie, & l'on aura la proportion *P* : *S* :: ſin. *EOS* : ſin. *EOP*. Or on démontrera que ſin. *EOS* = ſin. *EOP*, comme on l'a démontré pour la poulie fixe (*Num.* CXVI.).

Si l'on ſuppoſoit que le cordon *FP*, au lieu d'être ſoutenu par une puiſſance, fût attaché à un point fixe, il eſt viſible que ſa tenſion demeureroit toujours égale à celle du cordon *SH*.

CXX.

COROLLAIRE II. *Dans le cas d'équilibre, chacune des puiſſances* P, S, *eſt au poids* R, *comme le rayon de la poulie eſt à la ſous-tendante de l'arc embraſſé par la corde.*

La démonſtration eſt exactement la même pour la poulie mobile que pour la poulie fixe.

CXXI.

COROLLAIRE III. *Donc ſi les directions des puiſſances* P, S, *ſont parallèles à la direction du poids ou de la puiſſance* R, *chacune des puiſſances* S, P, *ne ſera que la moitié du poids* R. Car dans

SCD LYON 1

ce cas, la corde *FH* deviendra le diamètre de la poulie: donc *S* ou *P* sera à *R*, dans le rapport du rayon au diamètre, ou dans le rapport de 1 à 2.

CXXII.

COROLLAIRE IV. Déterminons encore le rapport de la puissance au poids, dans les poulies moufflées. Une *mouffle* n'est autre chose qu'une chappe qui porte plusieurs poulies; & l'on appelle *poulies moufflées*, *mouffles*, ou, en terme de marine, *palans*, *caliornes*, l'assemblage de deux mouffles, l'une fixe & l'autre mobile, dans lesquelles toutes les poulies sont embrassées par une même corde tirée par la puissance, tandis que le poids est suspendu à la chappe mobile. On peut voir différentes espèces de mouffles représentées par les figures 67, 68, 69.

Si les cordons qui embrassent les poulies, sont parallèles (Fig. 67, 68.), *la puissance est au poids, dans le cas d'équilibre, comme l'unité est au nombre des cordons aboutissants à la mouffle mobile.*

En effet, il est évident (*Num.* CXVI & CXIX), que la tension du cordon *SA* est égale à celle du cordon *BL*; que celle-ci est égale à celle du cordon *MD*, *&c.* & par conséquent la tension de chaque cordon aboutissant à la mouffle mobile, est équivalente à la puissance *S*. Or ces tensions doivent soutenir le même poids que soutiendroient six puis-

SCD LYON 1

ſances parallèles dont chacune vaudroit *S*, & qui ſeroient appliquées aux points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, des cordons; c'eſt-à-dire, qu'elles doivent ſoutenir un poids *R* égal à leur reſultante *6S*. Donc la puiſſance *S* ſera au poids *R*, comme 1 eſt à 6. La propoſition ſe démontreroit par un raiſonnement ſemblable, quel que fût le nombre des cordons qui ſoutiennent les poulies mobiles.

En général, *quelle que ſoit la direction des cordons, la puiſſance, dans le cas d'équilibre, eſt au poids comme le ſinus total eſt à la ſomme des ſinus des angles que font avec l'horizon les cordons aboutiſſans à la mouffle mobile.*

Car de quelque manière que ſoient dirigés ces cordons (*Fig.* 69.), la tenſion de chacun d'eux ſera toujours égale à la puiſſance *S*. Cela poſé, que l'on décompoſe chacune de ces tenſions en deux autres forces, l'une horizontale & l'autre verticale. Que l'on décompoſe, par exemple, la tenſion *S* du cordon *BL*, repréſentée par *ad*, en deux forces *ab*, *ac*, la première verticale, la ſeconde horizontale, en achevant le parallélogramme *abdc*; & qu'on faſſe la même choſe pour les tenſions de tous les autres cordons. 1° Il eſt évident que les forces horizontales ne concourront point à ſoutenir le poids, puiſqu'elles ſont perpendiculaires à ſa direction. Elles doivent donc ſe détruire mutuellement dans le cas d'équilibre. 2° Dans le triangle rec-

SCD LYON 1

tangle *abd*, on aura la proportion, sin. tot. : sin. *adb* :: $ad = S : ab$. Donc $ab = \frac{S \times \text{sin. } adb}{\text{sin. tot.}}$: ce qui nous apprend que *pour avoir la valeur de la force verticale résultante de la tension* S *d'un cordon, il faut multiplier cette tension par le sinus de l'angle que le cordon fait avec l'horizon, & diviser le produit par le sinus total.* Donc pour avoir la somme des forces verticales de tous les cordons, il faudra multiplier la tension S par tous les sinus des angles que font avec le plan horizontal les cordons aboutissants à la mouffle mobile, & diviser le produit par le sinus total. Donc en appelant T la somme des sinus dont il s'agit, & observant que la somme des forces verticales doit égaler le poids R, pour le mettre en équilibre, on aura $R = \frac{ST}{\text{sin. tot.}}$, d'où l'on tire la proportion qu'il falloit démontrer, $S : R :: \text{sin. tot.} : T$.

SECTION IV.

Du Tour.

CXXIII.

LE tour, en général, est une machine composée d'un cylindre & d'une roue qui ont le même axe, dont les extrémités sont supportées par deux appuis.

SCD LYON 1

Cette machine est représentée dans la figure 70. La corde qui porte le poids *P* qu'on veut mouvoir ou soutenir, s'enveloppe autour du cylindre; & la puissance *S* est appliquée à la circonférence de la roue. Il y a des occasions où l'on employe pour roue, un grand *tambour* creux, dans lequel des hommes en marchant font tourner la machine par leur poids. Souvent aussi, au lieu de se servir d'une roue, on se contente d'implanter perpendiculairement au cylindre, des barres, aux extrémités desquelles la puissance agit. Enfin, quelquefois on fait mouvoir la machine par le moyen d'une ou de deux manivelles. Mais il est évident que les effets de ces différentes espèces de tours reviennent, dans le fond, à celui du tour représenté par la figure 70. Si le cylindre est disposé horizontalement, la machine s'appelle *tour* ou *treuil*: si la position du cylindre est verticale, on donne à la machine le nom de *vindas* ou de *cabestan*.

CXXIV.

THÉORÈME. *La seule condition requise pour l'équilibre dans le tour, c'est que les moments de la puissance & du poids, par rapport à l'axe du cylindre, soient égaux.*

Pour le démontrer, imaginons (*Fig.* 71.) trois plans *HI*, *KL*, *MN*, qui passent par le centre *C* de la roue, & dont chacun soit perpendiculaire aux

deux autres, de manière que le plan HI soit parallèle à la direction Py du poids, & que KL se confonde avec le plan de la roue. L'axe tv sera évidemment la commune intersection des deux plans HI & MN. Tirons ensuite dans le plan MN une droite zyx, qui passe par les extrémités des deux rayons Cz, cy, & qui se termine à l'axe du cylindre en x.

1° On peut (*Num.* LI.), décomposer le poids P en deux forces ou poids parallèles p, p', dont les directions passent par les points z, x, de manière que l'action du premier s'exerce dans le plan KL, & celle du second dans le plan HI.

2° Le poids p' dont la direction passe par un point immobile x de l'axe du cylindre, ne peut produire aucun effet. Il ne reste donc que le poids p dont l'action n'est pas détruite, & il ne s'agit plus que de trouver les conditions requises pour qu'il fasse équilibre à la puissance S.

3° Quand deux puissances S, p, sollicitent un plan KL, dans lequel il se trouve un point fixe C, la seule condition requise pour l'équilibre, c'est que la différence de leurs moments, par rapport à ce point fixe, soit zéro. Donc il est nécessaire & il suffit pour l'équilibre, que l'on ait $S \times CO - p \times Cz = 0$. Or il suit de ce qu'on a démontré (*Num.* XXXVIII.), que le moment $p \times Cz$ du poids p par rapport au point C, est égal au moment $P \times cy$ du poids P par rapport

rapport au point *c*. Donc on aura, dans le cas de l'équilibre, $S \times CO - P \times cy = 0$, ce qui donne $S \times CO = P \times cy$.

CXXV.

COROLLAIRE I. *Dans le tour, la puiſſance eſt au poids qu'elle ſoutient en équilibre, comme le rayon du cylindre eſt au rayon de la roue.*

Car l'équation $S \times CO = P \times cy$ donne évidemment $S : P :: cy : CO$.

On voit par cette proportion, que ſi le rayon du cylindre eſt beaucoup moindre que celui de la roue, le poids ſera beaucoup plus grand que la puiſſance qui le ſoutient. Si, par exemple, le rayon de la roue eſt dix fois plus grand que celui du cylindre, une puiſſance équivalente à une livre, ſera équilibre à un poids de 10 £.

CXXVI.

REMARQUE. Si l'on taille le cylindre ou *rouleau* d'un tour ſuivant ſa longueur, de manière qu'il ait dans toute ſa circonférence pluſieurs dents ou parties ſaillantes égales & également diſtantes les unes des autres, ce rouleau prend le nom de *pignon*; & l'on appelle *roue à pignon*, celle d'un tour dont le cylindre eſt ainſi diviſé. On donne auſſi des dents aux roues du tour qui mènent les pignons, & la machine qu'on appelle *roues dentées* (*Fig.* 72.), n'eſt autre choſe qu'un aſſemblage de

SCD LYON 1

roues à pignon, dont l'une ne peut se mouvoir sans transmettre le mouvement à toutes les autres, parce qu'elles sont tellement disposées, que le pignon d'une roue engrène avec les dents d'une autre roue. Dans cette machine le poids *P* est suspendu à une corde qui s'enveloppe autour du rouleau de la dernière roue, & la puissance *S* agit à la circonférence de la première roue. Il est évident que chaque roue, avec son pignon, doit être considérée comme une espèce de tour. Car les dents de la roue *B*, par exemple, ne peuvent engrener avec celles du pignon *a*, sans les presser & sans produire, par leur pression, le même effet que produiroit un poids suspendu à la circonférence de ce pignon; & l'on doit dire la même chose de l'effort que supportent les dents des autres pignons.

CXXVII.

COROLLAIRE II. *Dans les roues dentées, la puissance* S *est au poids* P *qu'elle tient en équilibre, comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.*

En effet, soit les trois roues *A*, *B*, *C*, dont les rayons soient respectivement R'', R', R; & que les rayons de leurs pignons *a*, *b*, *c*, soient r'', r', r. Appelons P'' & P' les pressions que supportent les dents des pignons *a*, *b*; & *P* le poids qui agit à la circonférence du cylindre ou pignon *c*. Pour qu'il

SCD LYON 1

y ait équilibre, il faut que les dents de chaque pignon soient autant pressées que les dents de la roue avec lesquelles il engrène. P'' est donc la force qui agit à la circonférence de la roue B, & P' la force qui agit à la circonférence de la roue C.

Considérant à présent chaque roue & son pignon comme la roue & le cylindre du tour représenté (*Fig.* 70.), & observant que dans le tour la puissance est au poids, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue, nous aurons les proportions suivantes :

$$S : P'' :: r'' : R''.$$
$$P'' : P' :: r' : R'.$$
$$P' : P :: r : R.$$

Multipliant ces proportions par ordre, & divisant ensuite les deux termes de la première raison par $P'' \times P'$, nous aurons

$$S : P :: r'' \times r' \times r : R'' \times R' \times R.$$

Donc la puissance S est au poids P, comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.

Supposons, par exemple, que les rayons des roues soient égaux entr'eux, ainsi que ceux des pignons, & que les rayons des roues soient dix fois plus grands que ceux des pignons : la proportion que nous venons de trouver, deviendra $S : P :: 1 \times 1 \times 1 : 10 \times 10 \times 10$, ou $S : P :: 1 : 1000$;

SCD LYON 1

ce qui nous apprend que la puiſſance *S*, équivalente à une livre, feroit équilibre à un poids de 1000 livres.

Au lieu de pignons, on ſe ſert quelquefois de lanternes. Ce ſont des cylindres creux, qui ont pour baſes deux plateaux parallèles entr'eux, qui tiennent l'un à l'autre par le moyen de bâtons ou fuſeaux qui les traverſent, et qui étant à égales diſtances les uns des autres, forment le contour du cylindre. Alors les dents de la roue engrènent avec les fuſeaux de la lanterne, comme elles feroient avec les ailes d'un pignon; & le méchaniſme revient abſolument au même dans les deux cas.

CXXVIII.

COROLLAIRE III. Le *cric ſimple* (*Fig.* 73.), eſt une machine compoſée d'une barre *AB*, garnie à l'une de ſes faces de dents de fer, & mobile ſuivant le ſens de ſa longueur dans une caiſſe *DE*. Les dents de la barre engrènent avec celles d'un pignon *C*, qu'on fait tourner autour de ſon axe par le moyen d'une manivelle *MN*. Il eſt évident que le cric doit être conſidéré comme un tour dans lequel la puiſſance agit à la circonférence décrite par l'extrémité de la manivelle, tandis que la réſiſtance agit à la circonférence du pignon, dont les dents ſont preſſées par celles de la barre. Donc *la puiſſance ſera au poids, comme le rayon du pignon eſt au rayon*

SCD LYON 1

de la manivelle. On voit par là, qu'en faisant le rayon du pignon très-petit par rapport à celui de la manivelle, on peut, avec une force médiocre, élever un poids très-considérable.

Quelquefois pour soulever un plus grand poids avec la même force appliquée à la manivelle, on substitue au pignon *C* plusieurs roues dentées, telles que celles dont nous avons expliqué l'effet plus haut.

CXXIX.

COROLLAIRE IV. On peut, au moyen du tour, rendre uniforme l'action d'une force qui diminue continuellement. Il suffit pour cet effet, d'appliquer successivement la puissance à différentes circonférences qui croissent comme la puissance diminue. Alors cette puissance aura toujours le même moment par rapport à l'axe du cylindre; & par conséquent elle sera toujours capable de faire équilibre au même poids. Donc son action sera constamment la même.

C'est ainsi qu'on est parvenu à rendre uniforme le mouvement dans les horloges à ressort & dans les montres ordinaires; quoique l'action du ressort qui est le principe moteur dans ces machines, diminue continuellement, à mesure qu'il se déploie. Une chaîne attachée par un bout au barillet qui renferme le ressort, & par l'autre bout à une fusée dont la figure est à peu près celle d'un cône tron-

SCD LYON 1

qué, à baſes parallèles, tire cette même fuſée, qui, obligée de tourner ſur elle-même, communique le mouvement à tout le rouage dont la montre eſt compoſée. A meſure que le reſſort ſe déploie, & que par conſéquent ſa force élaſtique diminue, la chaîne eſt appliquée à de plus grandes circonférences; ce qui fait que le moment de la force motrice, par rapport à l'axe de cette fuſée, eſt toujours le même, du moins ſenſiblement. *Voyez la figure* 74.

SECTION V.

Du Plan incliné.

CXXX.

ON appelle en général *plan incliné*, celui qui fait un angle avec l'horizon. Cet angle peut être ou infiniment petit, ou droit, ou avoir une valeur finie compriſe entre zéro & 90 degrés. Dans le premier cas, le plan eſt *horizontal*; dans le ſecond, il eſt *vertical*; dans le troiſième, il eſt proprement le *plan incliné*, que l'on compte parmi les machines méchaniques, & dont nous allons traiter à préſent.

CXXXI.

THÉORÈME. *Pour qu'un corps placé ſur un plan incliné, & ſoumis à l'action de tant de forces qu'on voudra, ſoit en équilibre, il eſt néceſſaire &*

SCD LYON 1

il ſuffit, 1° *que la réſultante de toutes les puiſſances ſoit perpendiculaire au plan*; 2° *que cette réſultante paſſe par quelque point où le plan touche le corps, ou du moins, qu'elle puiſſe être décompoſée en d'autres forces qui paſſent par des points où le corps eſt appuyé ſur le plan.*

La première de ces conditions eſt néceſſaire, parce que ſi la réſultante étoit oblique au plan, on pourroit la décompoſer en deux forces, l'une perpendiculaire au plan, qui ſeroit détruite; & l'autre parallèle à ce plan, qui n'éprouveroit aucune réſiſtance de ſa part, & qui par conſéquent ne pourroit manquer de communiquer du mouvement au corps.

La ſeconde condition n'eſt pas moins eſſentielle pour l'équilibre. En effet, le plan n'eſt preſſé & ne réſiſte que dans les points où il touche le mobile; donc afin que la réſultante des puiſſances qui agiſſent ſur le corps ſoit détruite, il faut qu'elle paſſe par quelque point d'appui; ou qu'on puiſſe la décompoſer en d'autres puiſſances dirigées perpendiculairement au plan incliné, dans différents points de contact, où elles ſoient anéanties.

Il eſt viſible auſſi que ces deux conditions ayant lieu, la réſultante de toutes les puiſſances qui ſollicitent le corps, ſera détruite, & que le corps ne pourra prendre aucun mouvement. Donc ces conditions ſuffiſent pour l'équilibre.

SCD LYON 1

CXXXII.

COROLLAIRE I. *Donc si un corps pesant* P (Fig. 75.), *est soutenu en équilibre par une puissance* S, *& que du point* O *où la direction de la puissance rencontre la verticale* OI, *menée par le centre de gravité* G *du poids, on abaisse sur le plan la perpendiculaire* OE, *elle sera la direction de la résultante du poids* P *& de la puissance* S.

Car on doit regarder le poids du corps comme une force *P* appliquée au centre de gravité *G*; & dont la direction verticale concourt en un point O avec celle de la puissance *S*. Or la résultante de ces deux forces doit passer par le point où concourent leurs directions; & dans le cas d'équilibre, elle doit être perpendiculaire au plan incliné (*Num.* CXXXI.). Donc elle doit être dirigée suivant la perpendiculaire *OE*.

CXXXIII.

REMARQUE. Il est évident 1° que les trois directions *OI*, *OS*, *OE*, des deux puissances composantes & de leur résultante, sont dans le même plan *EOI* (*Num.* XIV.); 2° que ce plan est perpendiculaire au plan horizontal *MZ* & au plan incliné *MN*, puisqu'il passe par les lignes *OI*, *OE*, respectivement perpendiculaires à ces plans: d'où il suit que les lignes *AB*, *AC*, où le plan vertical, dans lequel agissent les puissances,

SCD LYON 1

rencontre *MN* & *MZ*, ſont perpendiculaires en *A* ſur la commune interſection de ces deux derniers plans, & que par conſéquent l'angle *BAC* meſure l'inclinaiſon de *MN* ſur *MZ*.

Donc ſi du point *B* on abaiſſe la verticale *BC*, on pourra conſidérer toutes les forces comme agiſſantes dans le plan du triangle rectangle *BAC*, & faire préciſion des autres parties du plan incliné. La *longueur* du plan incliné eſt exprimée par l'hypothénuſe *AB*, la *hauteur* par le côté vertical *BC*, & la *baſe* par le côté horizontal *AC*.

CXXXIV.

COROLLAIRE II. *Si une puiſſance* S (Fig. 76.), *tient en équilibre un corps peſant* P *ſur le plan incliné* AB, *la puiſſance, le poids du corps & la preſſion du plan ſeront entr'elles reſpectivement, comme le ſinus de l'inclinaiſon du plan, le coſinus de l'angle que fait la direction de la puiſſance avec la longueur du plan, & le coſinus de l'angle que fait la direction de la puiſſance avec la baſe du même plan.*

Car le poids *P* du corps étant regardé comme une ſeule puiſſance dirigée ſuivant la ligne verticale *OF*, qui paſſe par le centre de gravité *G* de ce corps, & qui rencontre en *O* la direction de la puiſſance *S*, la réſultante du poids & de la puiſſance, dans le cas d'équilibre, ſera dirigée ſuivant la perpendi-

SCD LYON 1

culaire *OE* (*Num.* CXXXII.), & représentera la pression du plan que j'appelle *R*.

Cela posé, nous aurons (*Num.* XIX.), *S* : sin. *FOE* :: *P* : sin. *EOH* :: *R* : sin. *FOH*. Or 1° l'angle *FOE* est égal à l'angle *BAC*, qui mesure l'inclinaison du plan. Car dans les deux triangles *AIF*, *OIE*, on remarque deux angles droits en *F* & en *E*, & deux angles opposés au sommet en *I*: donc le troisième angle *BAC* du premier triangle est égal au troisième angle *FOE* du second. 2° Dans le triangle rectangle *OEH*, l'angle *EOH* est le complément de l'angle *OHE* que fait la direction de la puissance avec la longueur du plan incliné : donc sin. *EOH* = cos. *OHE*. 3° Dans le triangle rectangle *OFD*, l'angle *FOD* est le complément de l'angle *FDO*, & par conséquent sin. *FOH* = cos. *FDO*.

Mettons donc à la place des trois sinus énoncés dans notre proportion, les quantités que nous venons de démontrer leur être égales, & nous aurons *S* : sin. *BAC* :: *P* : cos. *OHE* :: *R* : cos. *FDO*.

CXXXV.

COROLLAIRE III. *Si la direction de la puissance S* (Fig. 77.) *qui fait équilibre au poids* P, *est parallèle à la longueur du plan incliné, la puissance sera au poids, comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

SCD LYON 1

En effet, quand la direction de la puissance & la longueur du plan incliné sont parallèles, l'angle *OHE* qu'elles forment, devient zéro. Or le cosinus d'un angle = o est le sinus total : donc la proportion que nous venons de trouver (*Num.* CXXXIV.), deviendra *S* : sin. *BAC* :: *P* : sin. tot. ; ou *S* : *P* :: sin. *BAC* : sin. tot. : mais sin. *BAC* : sin. tot. :: *BC* : *AC*, parce que dans le triangle *BAC* les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés : donc *S* : *P* :: *BC* : *BA*.

CXXXVI.

COROLLAIRE IV. *Une puissance donnée* S *tiendra en équilibre sur le plan, le plus grand poids possible, quand sa direction sera parallèle à la longueur du plan.*

En effet, nous avons vu (*Num.* CXXXIV.), qu'on avoit en général (*Fig.* 76.), *S* : sin. *BAC* :: *P* : cos. *OHE*; ou *S* : *P* :: sin. *BAC* : cos. *OHE*. Or le cosinus de l'angle *OHE* est le plus grand possible par rapport au sinus de l'angle *BAC*, quand l'angle *OHE* = o ; c'est-à-dire, quand la direction de la puissance & la longueur du plan sont parallèles. Car alors le cosinus de l'angle *OHE* est égal au sinus total, & dans toute autre hypothèse il est moindre que le sinus total. Donc aussi le poids *P* est le plus grand possible par rapport à la puissance *S*, quand la direction de cette puissance est parallèle à la longueur du plan.

SCD LYON 1

CXXXVII.

COROLLAIRE V. *Si la direction de la puissance est parallèle à la base du plan incliné, la puissance sera au poids, comme la hauteur du plan est à sa base.*

Car dans la figure 78, on aura $S : P :: \text{sin. } BAC : \text{cos. } OHE$: or $\text{cos. } OHE = \text{cos. } BAC$; puisque dans le cas présent les angles OHE, BAC, sont alternes internes entre parallèles; & l'on voit que $\text{cos. } BAC = \text{sin. } ABC$, parce que l'angle ABC est le complément de l'angle BAC. Donc on a $S : P :: \text{sin. } BAC : \text{sin. } ABC :: BC : AC$.

SECTION VI.

De la Vis.

CXXXVIII.

LA *vis* (*Fig.* 79.), est une machine composée de deux cylindres de même diamètre, l'un solide & revêtu d'un relief spiral, par-tout également incliné aux lignes droites qu'on peut mener de ses différents points parallèlement à l'axe; l'autre creux que traverse le premier, & dans lequel on a fillonné un trait spiral correspondant & égal au relief qu'il doit recevoir. On donne aussi le nom de *vis* à chacune de ces parties prises séparément. Le cylindre solide qui entre dans l'autre, est la vis *intérieure*,

SCD LYON 1

ou simplement la *vis*. La pièce où se trouve la cavité cylindrique, est la vis *extérieure* ou *l'écrou*. Ordinairement aussi on entend par le cylindre de la vis, celui qui est solide & qui peut tourner dans l'autre.

Le relief spiral qui revêt extérieurement le cylindre, s'appelle *filet de la vis*: on donne le nom de *spire* à la partie de ce filet qui correspond à un tour sur le cylindre. Enfin on appelle *hauteur du pas de vis*, ou simplement *pas de vis*, la distance *ac* qu'il y a parallèlement à l'axe du cylindre entre deux spires correspondantes. Puisque le filet spiral a par-tout la même inclinaison sur le cylindre, il est évident que tous les pas de vis doivent être égaux.

CXXXIX.

Les spires qui enveloppent le cylindre, peuvent être considérées comme une espèce de plan incliné. En effet, si l'on replioit autour du cylindre (*Fig.* 80.) les triangles rectangles *CKI*, *ILM*, *MNO*, *OPR*, *&c.*, dont je suppose les bases égales à la circonférence de ce cylindre, & les hauteurs égales aux pas de vis, les hypothénuses *CK*, *IL*, *MN*, *OP*, *&c.*, en s'enveloppant, formeroient des spires parfaitement semblables à celles de la vis. Donc les spires de la vis sont des plans inclinés parfaitement égaux entr'eux, & qui ont pour longueur la longueur même d'une spire, pour hauteur la

SCD LYON 1

hauteur du pas vis, & pour baſe la circonférence du cylindre.

CXL.

ON emploie la vis & ſon écrou pour comprimer les corps, quelquefois auſſi pour élever des poids. L'effet revient au même dans les deux cas. La puiſſance *F* (*Fig.* 79.) qui meut la machine, eſt appliquée ordinairement à une barre qui traverſe le cylindre ou l'écrou; & l'une de ces pièces eſt mobile, tandis que l'autre eſt immobile. Mais ſoit que l'on faſſe mouvoir l'écrou ſur la vis ou la vis dans l'écrou, ce ſont toujours deux plans inclinés, dont l'un gliſſe ſur l'autre, & l'effort de la puiſſance doit être le même pour ſoutenir un poids donné. Il ne s'agit donc que de trouver pour l'un de ces deux cas, le rapport de la puiſſance au poids qui lui fait équilibre. Nous ſuppoſerons que le poids, ou en général la réſiſtance, agiſſe dans le ſens de l'axe du cylindre, & que la puiſſance ſoit dirigée dans un plan perpendiculaire à cet axe.

CXLI.

THÉORÈME. *Dans la vis, la puiſſance eſt au poids qui lui fait équilibre, comme la hauteur du pas de vis eſt à la circonférence d'un cercle qui a pour rayon la diſtance de l'axe au point où la puiſſance eſt appliquée.*

Suppoſons, pour le démontrer, que la vis inté-

SCD LYON 1

rieure soit fixe (*Fig.* 79.), & que le poids soit suspendu à l'écrou mobile. Il est évident que le filet spiral du cylindre sera pressé par l'écrou que le poids tend à faire descendre; & chaque point de l'écrou appuyé sur le point correspondant de la spire convexe, sera comme un poids posé sur un plan incliné; d'où l'on voit que l'écrou prendra nécessairement du mouvement, si rien ne s'y oppose, de la même manière qu'un corps placé sur un plan incliné descend nécessairement, à moins qu'il ne soit retenu par quelque puissance. Concevons donc que le poids suspendu à l'écrou est décomposé en une infinité de ponduscules p, p, p, *&c.*, qui presseroient le relief spiral, & cherchons quelle seroit la force nécessaire pour soutenir ces poids élémentaires, en les empêchant de glisser sur la spire.

1° Si l'on appliquoit à chacun de ces poids p, une puissance s dirigée parallèlement à la base du plan incliné que forme la spire, chaque puissance s seroit au poids p correspondant, comme le pas de vis, qui est la hauteur du plan incliné, est à la circonférence du cylindre qui est la base de ce plan, (*Num.* CXXXVII.). Donc la somme de toutes les puissances particulières s, s, s, *&c.*, ou, ce qui revient au même, la puissance totale est au poids total qui vaut la somme de tous les poids élémentaires, comme la hauteur du pas de vis est à la circonférence du cylindre; ou, en appelant la puissance

totale S, le poids total P, la hauteur du pas de vis h, & la circonférence du cylindre c, on aura la proportion

$$S : P :: h : c.$$

La propoſition eſt donc démontrée pour le cas où la puiſſance eſt appliquée au filet ſpiral, & ſe trouve éloignée de l'axe d'une quantité égale au rayon du cylindre.

2° Suppoſons à préſent que la puiſſance agiſſe à l'extrémité d'une barre en F. On voit aiſément qu'il faudroit la même puiſſance pour faire équilibre au poids P, que pour faire équilibre à la force S, capable de le ſoutenir. Or la puiſſance F appliquée à l'extrémité de la barre, & la puiſſance S appliquée au filet ſpiral, ſont dans le même cas que deux puiſſances qui agiroient par le moyen d'un tour: donc (*Num.* CXXV.) la puiſſance F eſt à la puiſſance S, comme le rayon du cylindre eſt à la longueur de la barre ou du levier, que l'on peut conſidérer comme le rayon de la circonférence que la puiſſance F tend à faire décrire; & puiſque les rayons des cercles ſont entr'eux comme leurs circonférences, on pourra dire que la puiſſance F eſt à la puiſſance S, comme la circonférence c du cylindre eſt à la circonférence que j'appelle C, & qui auroit pour rayon la longueur de la barre. Donc on aura la proportion

$$F : S :: c : C.$$

Si

Si on la multiplie par la proportion $S : P :: h : c$ que nous avons trouvée plus haut, & qu'enſuite on diviſe par S les deux termes de la première raiſon, & par c les deux termes de la ſeconde, on trouvera enfin $F : P :: h : C$; c'eſt-à-dire, la puiſſance qui agit à l'extrémité de la barre eſt au poids que ſoutient l'écrou, comme la hauteur du pas de vis eſt à la circonférence qui a pour rayon la diſtance de la puiſſance à l'axe du cylindre.

Il eſt facile à préſent de voir les raiſons qui ont porté pluſieurs auteurs à ne point compter la vis parmi les machines ſimples, mais à la rapporter au plan incliné, ou à la regarder comme compoſée du plan incliné & du tour.

On peut remarquer encore que dans la démonſtration que nous venons de donner, nous faiſons préciſion du frottement, qui peut être très-conſidérable dans la vis.

CXLII.

REMARQUE I. On a donné le nom de *vis ſans fin* (*Fig.* 81.), à une machine compoſée d'une vis ſimple dont le filet engrène avec les dents d'une roue, qui porte à ſon centre un rouleau cylindrique. Le poids eſt ſuſpendu à une corde qui s'enveloppe autour de ce rouleau, & la puiſſance F communique ou tend à communiquer le mouvement à la vis au moyen de la manivelle à laquelle elle eſt appliquée.

SCD LYON 1

Cette machine étant composée de la vis & du tour, on peut conclure d'après ce qui a été démontré (*Num.* CXXV & CXLI.), que dans le cas d'équilibre *la puissance est au poids, comme le rayon du cylindre multiplié par la hauteur du pas de vis, est au rayon de la roue multiplié par la circonférence que décriroit la puissance, si le mouvement avoit lieu.*

En effet, soit *F* la puissance qui tend à faire tourner la vis, *P* le poids suspendu à la circonférence du rouleau cylindrique, *d* la dent de la roue qui engrène avec le filet de la vis, *S* l'effort que cette dent exerce contre la spire *a*. Enfin soient *h* la hauteur du pas de vis, *R* le rayon de la roue, *r* le rayon de son cylindre, & *C* la circonférence que la puissance décriroit, si le mouvement avoit lieu.

Puisque dans la vis la puissance est à la pression qui s'exerce parallèlement à l'axe contre le filet spiral, comme la hauteur du pas de vis est à la circonférence que la puissance tend à décrire, nous aurons la proportion

$$F : S :: h : C.$$

Et puisque la spire *a*, dans le cas d'équilibre, presse autant la dent *d* qu'elle en est pressée, la roue sera sollicitée à sa circonférence par une force égale à *S*. Or dans le tour que forme la roue avec son cylindre, la puissance *S* est au poids *P*, comme le

rayon du cylindre est au rayon de la roue. Donc nous aurons la seconde proportion

$$S : P :: r : R$$

Si on la multiplie par la première, & qu'ensuite on divise par S les deux termes de la première raison du produit, on trouvera la proportion qu'il falloit démontrer

$$F : P :: hr :: CR.$$

CXLIII.

REMARQUE II. La vis d'*Archimède*, ainsi nommée, parce qu'Archimède en est l'inventeur, est un tube ou un canal creux, qui tourne autour d'un cylindre AH (*Fig.* 82.), de même que le filet spiral dans la vis ordinaire. Le cylindre est incliné à l'horizon sous un angle d'environ 45 degrés, & se meut sur deux pivots. Ayant placé une balle de plomb, ou quelqu'autre corps grave à l'embouchure B du canal, si l'on fait tourner la vis, le point B s'élèvera au dessus du point C, qui descendra lui-même d'une certaine quantité, & la balle obéissant à sa pesanteur passera de B en C. Par la même raison, si l'on continue à faire tourner le cylindre, elle passera successivement de C en D, de D en E, *&c.*, & on lui fera parcourir ainsi de bas en haut toute la longueur de la vis. Si la partie inférieure du cylindre est plongée dans l'eau, on conçoit facilement que le canal doit s'emplir à mesure qu'il tourne,

SCD LYON 1

& produire un écoulement par l'orifice supérieur. Cette machine ingénieuse peut donc s'employer utilement pour vuider des lacs & des étangs.

Si dans la vis ordinaire on faisoit tourner l'écrou dans un seul & même plan autour de son axe, le cordon de la vis intérieure, abstraction faite de tout frottement, seroit éxactement dans le même cas que le fluide, qui, dans la vis d'Archimède, remplit le canal spiral. On peut donc rapporter la vis d'Archimède à la vis ordinaire, en considérant le canal creux dans la première comme l'écrou dans la seconde, & le relief spiral de celle-ci comme le fluide contenu dans le canal de la première.

SECTION VII.

Du Coin.

CXLIV.

LE *coin* est un prisme triangulaire *ABCDEF* (*Fig.* 83.), que l'on introduit dans une fente pour écarter ou séparer les deux parties d'un corps. Quelquefois aussi on l'emploie pour comprimer des corps ou pour soulever des poids. Le parallélogramme *ABCD* qui reçoit immédiatement l'action de la puissance, est la *base* ou la *tête* du coin. Ses côtés sont les deux faces parallélogrammiques *ABFE*, *DCFE*, qui agissent sur les parties du corps qu'on

SCD LYON 1

veut séparer. Enfin on appelle *pointe* ou *tranchant* du coin, l'angle solide que ces deux faces forment en *EF*.

CXLV.

Pour qu'une puissance imprimée perpendiculairement à la tête du coin fasse, équilibre aux résistances des deux parties du corps qu'on veut écarter, il faut évidemment que cette puissance & ces résistances soient dirigées dans un même plan. De plus, les parties entre lesquelles on introduit le coin, résistent en pressant perpendiculairement ses côtés dans les points de contact; & par conséquent il faut que le plan dans lequel sont dirigées les trois forces dont il s'agit, soit perpendiculaire non seulement à la base du coin, mais encore à ses côtés. Donc ce plan sera un triangle égal & parallèle au profil *ADE* du coin; & puisque les efforts de la puissance & des résistances se réunissent dans ce plan, on peut supposer tout le coin réduit à un seul triangle tel que *AED*.

CXLVI.

THÉORÈME *Dans le cas d'équilibre, la puissance imprimée perpendiculairement à la tête du coin, est à la somme des résistances que les parties qu'on veut séparer opposent perpendiculairement à ses côtés, comme la tête du coin est à la somme de ses côtés.*

SCD LYON 1

Pour le démontrer, supposons le coin AED (*Fig.* 84.) introduit entre deux parties M, N d'un corps. Soient S la puissance imprimée perpendiculairement à la base AD; R & R' les résistances qu'opposent en M & en N les parties que l'on veut séparer. Les directions de ces résistances seront des lignes MG, NH perpendiculaires aux côtés du coin, & elles se rencontreront en quelque point C. Si l'on représente R & R' par les parties CG, CH de leurs directions, & qu'on achève le parallélogramme $CGIH$, il faudra pour l'équilibre que la puissance S soit égale & diamétralement opposée à la résultante CI des deux résistances. Les trois forces S, R, R' seront donc proportionnelles aux trois lignes CI, CG, CH; ou puisque $CH = GI$, aux trois lignes CI, CG, GI. Or ces trois dernières lignes sont elles-mêmes proportionnelles aux lignes AD, DE, AE: car les deux triangles ADE, CGI sont semblables, puisque les trois côtés du premier sont perpendiculaires sur les trois côtés du second. Donc on aura la suite de raisons égales

$$S : AD :: R : DE :: R' : AE;$$

d'où l'on tire la proportion qu'il falloit démontrer,

$$S : R + R' :: AD : DE + AE.$$

CXLVII.

COROLLAIRE. On voit par là que plus la tête du coin est petite par rapport à ses côtés, moins

il faut que la puiſſance faſſe d'effort pour ſoutenir ou pour ſurmonter les réſiſtances des parties qu'on veut ſéparer.

CXLVIII.

REMARQUE I. On peut en général rapporter au coin tous les inſtruments tranchants ou pénétrants, la coignée ou la ſerpe du Bûcheron, le ciſeau & la gouge du Sculpteur & du Menuiſier, la lancette & le ſcalpel du Chirurgien, le couteau & le raſoir qui ſont entre les mains de tout le monde, les clous, les épingles, &c.

CXLIX.

REMARQUE II. Nous finirons cet article ſur l'équilibre des machines, par les deux obſervations ſuivantes:

1° *Toutes les fois qu'une machine eſt en équilibre, la puiſſance eſt au poids, comme l'eſpace dont il s'élèveroit, ſi le mouvement avoit lieu, eſt à l'eſpace que décriroit la puiſſance dans le même temps.* Dans un levier droit, par exemple, un poids de 10 ℔ ſera contrebalancé par une puiſſance d'une livre, pourvu qu'il ſoit dix fois plus près qu'elle de l'appui. Mais il eſt viſible que ſi le levier prenoit du mouvement, l'arc décrit par la puiſſance ſeroit à l'arc décrit par le poids, comme 10 eſt à 1. Pareillement dans les mouffles repréſentées (*Fig* 67 & 68.), la puiſſance *S* eſt ſix fois moindre que le

SCD LYON 1

poids *P* qu'elle soutient en équilibre: mais si le mouvement avoit lieu, l'espace qu'elle parcourroit, seroit six fois plus grand que celui dont elle feroit monter le poids; & l'on peut vérifier aisément la même chose dans toutes les autres machines.

2° Si les différentes parties des machines glissoient sans difficulté les unes sur les autres, & que les cordages dont on se sert fussent parfaitement fléxibles, on feroit naître le mouvement, pour peu qu'on augmentât la puissance ou le poids qui se font équilibre. Mais il n'existe dans la nature ni corps dont les surfaces soient parfaitement polies, ni cordes qui n'aient plus ou moins de roideur. De-là, dans l'usage des machines, deux espèces de résistances, qui ont pour cause, l'une le *frottement* des surfaces, l'autre le *défaut de fléxibilité* dans les cordages. Ces résistances s'opposent à la génération du mouvement, & demandent, pour être surmontées, une certaine force que l'on ne peut déterminer que par approximation.

SCD LYON 1

CHAPITRE III.

ÉLÉMENS DE DYNAMIQUE.

LA Dynamique a pour objet le mouvement des corps. Nous traiterons des loix du mouvement & des differents obſtacles que les corps en mouvement peuvent éprouver.

ARTICLE PREMIER.

Des Loix du Mouvement.

CL.

ON appelle *loix du mouvement* certaines règles ſuivant leſquelles tous les corps ſe meuvent généralement & conſtamment, lorſqu'ils obéiſſent à quelque cauſe motrice. Ces loix ſont ou *générales* ou *particulières*. On entend par loix générales, celles qui ſont comme les axiomes d'où les autres ſont déduites. Il paroît qu'on peut les rapporter aux trois principes fondamentaux que nous avons démontrés au commencement de cet ouvrage. Les loix particulières ne ſont que des applications de ces principes aux différentes eſpèces de mouvement. Nous traiterons en particulier du mouvement uniforme,

SCD LYON 1

du mouvement accéléré ou retardé, du mouvement des corps sollicités par des forces centrales, du mouvement des centres de gravité, du choc & de la réflexion des corps.

SECTION I.

Du Mouvement uniforme.

CLI.

LE mouvement *uniforme* est celui d'un corps dont la vîtesse est toujours la même, ou, ce qui revient au même, c'est celui d'un corps qui parcourt des espaces égaux en temps égaux. On a démontré (*Num.* IV.), que le mouvement de deux corps étant uniforme, leurs vîtesses sont entr'elles comme les espaces parcourus divisés par les temps employés à les parcourir. On a vu aussi (*Num.* XXII.) que les forces de deux corps étoient entr'elles comme leurs quantités de mouvement. Toutes les loix du mouvement uniforme ne sont que des conséquences de ces deux propositions.

CLII.

THÉORÈME I. *Si les vîtesses de deux corps mus uniformément sont égales, les espaces parcourus seront comme les tems employés à les parcourir.*

Car en appelant respectivement V & v les vîtesses des deux mobiles, S & s les espaces qu'ils font sup-

SCD LYON 1

posés parcourir, T & t les tems employés à parcourir ces espaces, on aura (*Num.* IV.), $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$. Donc puisque $V = v$, on aura $\frac{S}{T} = \frac{s}{t}$, d'où l'on tire $S : s :: T : t$.

CLIII.

THÉORÈME II. *Si les espaces parcourus par deux corps mus uniformément, sont égaux, les vîtesses seront en raison inverse des tems.*

Car si les espaces sont égaux, les numérateurs seront les mêmes dans les deux fractions $\frac{S}{T}, \frac{s}{t}$; & par conséquent ces fractions seront en raison inverse des dénominateurs. Or les vîtesses V & v des deux mobiles sont entr'elles comme ces fractions : elles seront donc en raison inverse des dénominateurs T, t. Donc on aura $V : v :: t : T$.

CLIV.

THÉORÈME III. *Les forces de deux corps mus uniformément, sont en raison composée de leurs masses & de leurs vîtesses.*

Car en nommant respectivement F & f les forces de ces deux corps, M & m leurs masses, V & v leurs vîtesses, on aura (*Num.* XXII.), $F : f :: MV : mv$. Or la raison $MV : mv$ est évidemment composée des deux raisons simples $M : m$,

SCD LYON 1

$V : v$. Donc les forces sont en raison composée des masses & des vîtesses.

CLV.

COROLLAIRE. *Si les masses de deux corps mus uniformément sont égales, les forces seront comme les vîtesses.* Car alors dans la proportion $F : f :: MV : mv$, on pourra diviser les deux termes de la dernière raison par la quantité M que l'on suppose égale à la quantité m, & l'on aura $F : f :: V : v$.

Pareillement *si les vîtesses* V & v *des deux corps étoient égales, les forces seroient comme les masses.* Car dans la même proportion $F : f :: MV : mv$, on pourroit diviser les deux termes de la seconde raison par $V = v$, & l'on auroit $F : f :: M : m$.

CLVI.

THÉORÈME IV. *Si les masses des corps mus uniformément sont en raison réciproque des espaces parcourus, les forces seront en raison réciproque des tems employés à les parcourir.*

En effet, dans la proportion $F : f :: MV : mv$, on peut substituer $\frac{S}{T}$ au lieu de V, & $\frac{s}{t}$ au lieu de v, parce que la vîtesse égale l'espace divisé par le tems; & l'on aura $F : f :: \frac{MS}{T} : \frac{ms}{t}$. Or par l'hypothèse, $M : m :: s : S$, d'où l'on tire $MS = ms$.

SCD LYON 1

Donc les fractions $\frac{MS}{T}$, $\frac{ms}{t}$, qui ont pour numérateurs des quantités égales, ſont en raiſon inverſe de leurs dénominateurs; & par conſéquent les forces qui ſont entr'elles comme ces fractions, ſont auſſi en raiſon inverſe des mêmes dénominateurs; ce qui donne $F : f :: t : T$.

SECTION II.

Du Mouvement accéléré ou retardé.

CLVII.

UN corps qui n'a reçu qu'une impulſion, perſévère dans ſon mouvement avec la même vîteſſe & dans la même direction qu'il a eue au premier inſtant (*Num.* XIII.). Mais s'il vient à recevoir une nouvelle impulſion dans le même ſens ou en ſens contraire à la première, il ſe meut alors avec une vîteſſe égale à la ſomme ou à la différence des deux vîteſſes qu'il a reçues ſucceſſivement (*Num.* XVI. & XVII.). Donc ſi l'on conçoit qu'à des intervalles de tems déterminés, le corps reçoive de nouvelles impulſions dans le même ſens, ou en ſens contraire de la première, il ſera mu d'un mouvement *varié* ou *inégal;* ſa vîteſſe ſera différente au commencement de chaque intervalle de tems. Cette vîteſſe pourtant, au bout d'un tems quelconque, pourra toujours s'eſtimer, en déterminant l'eſpace qu'il décri-

SCD LYON 1

roit si elle devenoit uniforme, & en divisant cet espace par le tems pendant lequel il seroit décrit.

CLVIII.

On appelle en général *force accélératrice*, toute force qui par son action tend à faire varier le mouvement d'un corps. Lorsqu'à des intervalles de tems égaux elle agit également, on l'appelle *force accélératrice constante*, ou *force retardatrice constante*, suivant qu'elle tend à augmenter ou à diminuer la vîtesse du mobile; & le mouvement qui résulte de l'action d'une telle force, est appelé *mouvement uniformément accéléré*, ou *mouvement uniformément retardé*.

Après avoir démontré les loix de ce mouvement considéré en général, nous en ferons l'application au mouvement des corps pesants qui tombent suivant des lignes verticales, ou le long des plans inclinés, ou le long des surfaces courbes, & nous finirons par considérer le mouvement des projectiles & des pendules.

Du Mouvement uniformément accéléré ou retardé en général.

CLIX.

Théorème I. *L'espace parcouru par un mobile en vertu d'impulsions égales, reçues au commencement de plusieurs intervalles de tems égaux,*

SCD LYON 1

vaut le demi-produit de la première & de la dernière vîteſſe multipliées par le tems total.

En effet, ſoit le mobile A (*Fig.* 85.) qui reçoive une impulſion capable de lui faire parcourir pendant le premier intervalle de tems, un eſpace AB avec la vîteſſe g. Si le mobile arrivé au point B, reçoit une nouvelle impulſion égale à la première & dans le même ſens, il parcourra, pendant le ſecond intervalle de tems, l'eſpace BC avec une vîteſſe $2g$: & ſi l'on ſuppoſe qu'il reçoive au commencement de tous les intervalles ſuivants une impulſion toujours égale à la première, il eſt viſible qu'il décrira pendant ces intervalles de tems égaux, les eſpaces CD, DE, EF, *&c.*, avec les vîteſſes $3g$, $4g$, $5g$, *&c.*

Cela poſé, ſoit t le tems total, s l'eſpace décrit par le mobile pendant ce tems, n le nombre des intervalles au commencement deſquels le corps reçoit de nouvelles impulſions. Chacun de ces intervalles, pendant leſquels le mouvement eſt uniforme, vaudra $\frac{t}{n}$; & par conſéquent en multipliant par $\frac{t}{n}$ les vîteſſes g, $2g$, $3g$, $4g$, *&c.*, on aura $\frac{gt}{n}$, $\frac{2gt}{n}$, $\frac{3gt}{n}$, $\frac{4gt}{n}$, *&c.*, pour les valeurs des différents eſpaces parcourus pendant les intervalles particuliers dont le tems total eſt compoſé. Appe-

SCD LYON 1

lant donc en général v la vîteſſe finale, on aura l'eſpace total $s = \frac{gt}{n} + \frac{2gt}{n} + \frac{3gt}{n} + \frac{4gt}{n}$ &c. $+ \frac{vt}{n}$. Or les termes qui forment le ſecond membre de cette équation, étant en progreſſion arithmétique, leur ſomme vaut la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes; & l'on voit aiſément que le nombre des termes eſt n, puiſqu'il y a dans l'eſpace total autant d'eſpaces particuliers, qu'il y a d'intervalles dans le tems total. Donc l'équation précédente devient

$$s = \left(\frac{gt}{n} + \frac{vt}{n}\right)\frac{n}{2} = \frac{gt}{2} + \frac{vt}{2} = \frac{(g+v)t}{2};$$

& par conſéquent l'eſpace parcouru vaut le demi-produit de la première & de la dernière vîteſſe multipliées par le tems total.

CLX.

COROLLAIRE I. *La vîteſſe d'un mobile qui reçoit ainſi des impulſions égales au commencement des intervalles égaux du tems, croît évidemment comme le nombre de ces intervalles.*

Car ſi pendant le premier intervalle elle eſt g, elle ſera $2g$ pendant le ſecond, $3g$ pendant le troiſième, &c.

CLXI.

COROLLAIRE II. *Si la force accélératrice conſtante donne à chaque inſtant des impulſions égales, mais*

SCD LYON 1

mais infiniment petites, l'eſpace total décrit par le mobile, ſera égal au demi-produit de la vîteſſe finale par le tems.

Car alors dans l'équation $s = \frac{(g+v)t}{2}$ que nous avons trouvée (*Num.* CLIX.), la quantité infiniment petite g doit doit être négligée par rapport à la vîteſſe finale v: Donc on aura $s = \frac{vt}{2}$.

CLXII.

COROLLAIRE III. *Un mobile ſollicité par une force accélératrice conſtante, ne décrira dans un tems déterminé que la moitié de l'eſpace qu'il auroit parcouru, ſi, pendant ce tems, il avoit toujours eu ſa vîteſſe finale.*

Car en donnant toujours à l'eſpace, au tems & à la vîteſſe finale les mêmes dénominations que plus haut, on aura dans le mouvement accéléré $s = \frac{vt}{2}$. Or ſi le mobile avoit eu conſtamment la vîteſſe finale, l'eſpace parcouru pendant le tems t eût été vt double de $\frac{vt}{2}$.

On ſuppoſe dans ce corollaire, ainſi que dans les ſuivants, que la force accélératrice ne donne à chaque inſtant que des impulſions infiniment petites.

SCD LYON 1

CLXIII.

COROLLAIRE IV. *Les espaces parcourus dès le commencement du mouvement, en vertu d'une force accélératrice constante, sont comme les quarrés des tems employés à les parcourir.*

Pour le démontrer, nommons p la vîtesse acquise par le mobile à la fin de la première seconde. Les vîtesses étant proportionnelles aux tems (*Num.* CLX.), on pourra déterminer la vîtesse v du mobile après un tems quelconque t, en disant: une seconde est au nombre de secondes t, comme la vîtesse acquise à la fin d'une seconde, est à la vîtesse acquise à la fin du tems t; c'est-à-dire, $1 : t :: p : v$; d'où l'on tirera $v = pt$. Or l'espace parcouru au bout du tems t est $s = \frac{vt}{2}$: donc en mettant à la place de v sa valeur pt, on aura $s = \frac{pt^2}{2}$.

Si l'on suppose à présent un autre tems quelconque T pendant lequel le mobile décrive un espace S, on trouvera de même $S = \frac{pT^2}{2}$. Donc $S : s :: \frac{pT^2}{2} : \frac{pt^2}{2}$. Doublant les deux termes de la seconde raison, & les divisant ensuite par p, il restera $S : s :: T^2 : t^2$, proportion qu'il falloit démontrer.

Donc $T : t :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$; c'est-à-dire, que

dans le mouvement uniformément accéléré, les tems sont comme les racines quarrées des espaces.

CLXIV.

REMARQUE. Les deux équations $v = pt$; $s = \frac{pt^2}{2}$, trouvées dans la démonstration précédente, nous apprennent que *dans le mouvement uniformément accéléré, on a la vîtesse après un tems donné* t, *en multipliant par ce tems la vîtesse acquise au bout d'une seconde; & qu'on a l'espace décrit dans un tems* t, *en multipliant la vîtesse acquise au bout d'une seconde par le quarré de ce tems, & prenant la moitié du produit.*

CLXV.

COROLLAIRE V. *Les espaces parcourus dès le commencement du mouvement accéléré, sont comme les quarrés des vîtesses acquises en les parcourant.*

Car les espaces sont comme les quarrés des tems: or les quarrés des tems sont comme les quarrés des vîtesses, puisque les vîtesses sont proportionnelles aux tems (*Num.* CLX.).

En supposant donc que V & v soient les vîtesses acquises au bout des tems T, t, & que les espaces parcourus dès le commencement du mouvement soient S & s, on aura $S : s :: V^2 : v^2$.

D'où il suit que $V : v :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$; c'est-à-dire;

SCD LYON 1

que *les vîteſſes acquiſes ſont comme les racines quarrées des eſpaces parcourus.*

CLXVI.

COROLLAIRE VI. *Dans le mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus pendant des tems égaux & finis qui ſe ſuivent, ſont entr'eux comme les nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, &c.

En effet, nommons p la vîteſſe acquiſe à la fin d'une ſeconde, & t chacun des tems égaux qui ſe ſuivent. L'eſpace parcouru pendant le premier de ces tems, ſera $\frac{pt^2}{2}$ (*Num.* CLXIV.). Par la même raiſon l'eſpace parcouru pendant les deux premiers tems qui, pris enſemble, valent $2t$, ſera $\frac{4pt^2}{2}$. Retranchant de cet eſpace celui qui a été parcouru pendant le premier tems, il reſtera $\frac{3pt^2}{2}$ pour l'eſpace parcouru pendant le ſecond tems pris ſéparément. De même l'eſpace total parcouru pendant les trois premiers tems qui valent $3t$, ſera $\frac{9pt^2}{2}$; & retranchant de cette quantité l'eſpace $\frac{4pt^2}{2}$ parcouru pendant les deux premiers tems, il reſtera $\frac{5pt^2}{2}$ pour l'eſpace parcouru pendant le troiſième. On trouveroit de même que les eſpaces parcourus

SCD LYON 1

pendant les tems suivants, seroient $\frac{7pt^2}{2}$, $\frac{9pt^2}{2}$, $\frac{11pt^2}{2}$, &c. Or il est évident que les quantités $\frac{pt^2}{2}$, $\frac{3pt^2}{2}$, $\frac{5pt^2}{2}$, $\frac{7pt^2}{2}$, &c., croissent comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c.

CLXVII.

COROLLAIRE VII. *Les vîtesses acquises & les espaces parcourus dans le même tems en vertu de deux forces accélératrices constantes, sont comme ces forces.*

Pour démontrer la première partie de ce corollaire, nommons g & g' les vîtesses que produisent à chaque instant les deux forces accélératrices. Les vîtesses des deux mobiles sollicités par ces forces, seront g & g' à la fin du premier instant; $2g$, $2g'$ à la fin du second; $3g$, $3g'$ à la fin du troisième; & en général après un nombre quelconque n d'instants, elles seront ng, ng'. Or $ng : ng' :: g : g'$. Donc les vîtesses acquises au bout du même tems, sont proportionnelles aux vîtesses que donnent à chaque instant les forces accélératrices, & par conséquent aux forces accélératrices elles-mêmes.

Pour démontrer ensuite la seconde partie, appelons v & v' les vîtesses acquises, s & s' les espaces parcourus par les deux mobiles, dans le même tems t.

SCD LYON 1

On aura (*Num.* CLXI.) $s = \frac{vt}{2}$, $s' = \frac{v't}{2}$; d'où l'on conclura $s : s' :: \frac{vt}{2} : \frac{v't}{2} :: v : v'$. Or on vient de voir que les vîteſſes v, v' étoient proportionnelles aux forces accélératrices: donc les eſpaces s & s ſont auſſi entr'eux comme ces forces.

CLXVIII.

LEMME. *Soit une ſuite de tant de quantités qu'on voudra*, a, a′, a″, &c; b, b′, b″, &c.; c, c′, c″, &c.; d, d′, d″, &c. *Si les ſommes priſes depuis la première juſqu'à celles qu'on voudra des ſuivantes, ſont toujours proportionnelles aux quarrés des nombres des quantités qui entrent dans ces ſommes, je dis que toutes ces quantités ſeront en progreſſion arithmétique.*

Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir qu'il y a la même différence entre tous les termes de la ſuite propoſée; que par exemple, $b'' - b' = c'' - c'$. Appelons donc s & n la ſomme & le nombre de toutes les quantités depuis la première juſqu'à b inclusivement. La ſomme juſqu'à b' inclusivement ſera $s + b'$, & le nombre des termes ſera $n + 1$. La ſomme juſqu'à b'' ſera $s + b' + b''$, & le nombre des termes ſera $n + 2$.

Donc puiſque par l'hypothèſe, une ſomme eſt à une autre ſomme quelconque, comme le quarré du

SCD LYON 1

du nombre des termes qui entrent dans la première, eſt au quarré du nombre des termes qui entrent dans la ſeconde, nous aurons les deux proportions

$$s : s + b' :: n^2 : n^2 + 2n + 1,$$
$$s : s + b' + b'' :: n^2 : n^2 + 4n + 4;$$

qui donnent les deux équations

$$n^2 s + 2ns + s = n^2 s + b' n^2,$$
$$n^2 s + 4ns + 4s = n^2 s + b' n^2 + b'' n^2.$$

Supprimons $n^2 s$, & après avoir doublé la première, retranchons-la de la ſeconde : il reſtera $2s = b'' n^2 - b' n^2$; d'où l'on tire $b'' - b' = \frac{2s}{n^2}$.

En appelant s' & n' la ſomme & le nombre de toutes les quantités juſqu'à c incluſivement, on trouveroit de même $c'' - c' = \frac{2s'}{n'^2}$.

Or par l'hypothèſe, $s : n^2 :: s' : n'^2$. Donc $\frac{s}{n^2} = \frac{s'}{n'^2}$, & $\frac{2s}{n^2} = \frac{2s'}{n'^2}$. Donc $b'' - b' = c'' - c'$.

CLXIX.

THÉORÈME II. *Suppoſons que dans un tems déterminé & diviſé en pluſieurs intervalles égaux, un mobile décrive un eſpace total, en recevant au commencement de chaque intervalle une impulſion de la force accélératrice. Si les eſpaces particuliers parcourus dès le premier inſtant juſqu'à la fin des*

SCD LYON 1

différents intervalles, sont toujours proportionnels aux quarrés des nombres d'intervalles employés à les parcourir, toutes les impulsions de la force accélératrice seront égales entr'elles.

En effet, soient a, a', a'', &c.; b, b', b'', &c.; c, c', c'', &c.; d, d', d'', &c., différents espaces dont chacun soit parcouru pendant un intervalle de tems, de manière que a soit parcouru pendant le premier intervalle, a' pendant le second, a'' pendant le troisième, & ainsi des autres. Il est évident que si que si l'on prend la somme s de toutes les quantités jusqu'à b inclusivement, on aura l'espace total parcouru pendant autant d'intervalles de tems que l'on aura pris de quantités. Car puisqu'il répond un intervalle de tems à chaque quantité, le nombre des intervalles de tems est nécessairement le même que celui des quantités que l'on aura prises. On pourra dire la même chose d'une autre somme quelconque s', qui comprendroit toutes les quantités jusqu'à c. Donc si l'on appelle n & n' les nombres des quantités depuis la première jusqu'à deux autres quelconques b & c; n & n' exprimeront aussi les tems employés à parcourir ces quantités.

Maintenant, par l'hypothèse, on a la proportion $s : s' :: n^2 : n'^2$. Or nous venons de démontrer dans le lemme précédent, que lorsqu'on a une série dans laquelle les sommes sont proportionnelles aux quarrés des nombres des termes ajoutés pour les

SCD LYON 1

faire, tous ces termes sont en progression arithmétique: donc les espaces $a, a', a'', \&c.; b, b', b'', \&c.; c, c', c'', \&c.$, formeront une progression arithmétique. Si l'on divise chacun de ces espaces par l'intervalle de tems employé à le parcourir, les quotients donneront encore une progression de même espèce, & marqueront les vîtesses qu'aura le mobile en parcourant ces espaces. Or les vîtesses ne peuvent pas être en progression arithmétique, à moins que le mobile ne reçoive à chaque intervalle de tems, un incrément égal de vîtesse, & que par conséquent toutes les impulsions de la force accélératrice ne soient égales.

CLXX.

COROLLAIRE. *Si un mobile sollicité par une force accélératrice reçoit à chaque instant des impulsions infiniment petites, & que les espaces parcourus dès le commencement du mouvement soient comme les quarrés des tems employés à les parcourir, la force accélératrice sera constante.*

Car le théorème que nous venons de démontrer est vrai, quelque petits qu'on suppose les intervalles dans lesquels sont parcourus les espaces $a, a', a'', \&c.; b, b', b'', \&c.$ Donc il sera encore vrai, si l'on suppose que ces intervalles ne soient que des instants ou tems infiniment petits, & dans ce cas particulier la force accélératrice donnera au

SCD LYON 1

mobile à chaque instant des impulsions égales. Donc elle fera une force accélératrice constante.

CLXXI.

THÉORÈME III. *Si un corps, après s'être mu d'un mouvement accéléré, est repoussé en sens contraire avec une vîtesse initiale, égale à celle qu'il a au dernier instant du premier mouvement, & qu'il éprouve l'action d'une force retardatrice égale à celle qui l'accéléroit pendant ce même mouvement; il retournera, pendant ce même tems, au point d'où il étoit parti, & alors il aura perdu toute sa vîtesse.*

Cela est évident par soi-même; puisque dans le second mouvement la force retardatrice doit enlever successivement au corps les mêmes degrés de vîtesse qui lui avoient été communiqués par la force accélératrice, dans le premier mouvement.

Du Mouvement des Corps pesants qui tombent suivant des lignes verticales.

CLXXII.

DES expériences faites avec beaucoup d'exactitude par les PP. *Riccioli* & *Grimaldi* *, nous

* Comme la chute verticale est très-rapide, je ne dois pas dissimuler que ces expériences sont bien délicates. Pour donner plus de tems à l'observation, Galilée fit rouler des corps sphériques sur des plans inclinés, & trouva que les

apprennent que si l'on abandonne à eux-mêmes des corps pesants, & qu'on les laisse tomber suivant la ligne verticale, ils parcourront des espaces très-sensiblement proportionnels aux quarrés des tems écoulés dès le commencement des chutes. Donc (*Num.* CLXX.) on peut considérer la gravité comme une force accélératrice constante, & appliquer au mouvement libre des corps pesants, tout ce qu'on vient de démontrer sur le mouvement uniformément accéléré ou retardé en général.

1° On peut conclure que les vîtesses acquises sont comme les tems écoulés dès le commencement du mouvement (*Num.* CLX.).

2° Elles sont comme les racines quarrées des espaces parcourus (*Num.* CLXV.).

3°. L'espace parcouru par un corps qui tombe librement, est égal au demi-produit de la vîtesse finale par le tems (*Num.* CLXI.).

4° L'espace que décrit un corps pesant pendant un tems déterminé, n'est que la moitié de celui

---

espaces parcourus, pris dès le commencement de la chute, étoient toujours comme les quarrés des tems écoulés: d'où il suit que la force qui fait descendre un corps sur un plan incliné, est une force accélératrice constante. Or nous démontrerons (*Num.* CLXXVII.) que cette force est à la pesanteur, comme la hauteur du plan est à sa longueur. Donc aussi la pesanteur doit être considérée comme une force accélératrice constante.

SCD LYON 1

qu'il décriroit, si pendant ce tems il avoit constamment la vîtesse finale (*Num.* CLXII.).

5° Les espaces parcourus dès le commencement de la chute, en des tems différents, sont comme les quarrés des vîtesses finales (*Num.* CLXV.).

6° Les espaces parcourus dans des tems égaux & finis qui se suivent, sont entr'eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. (*Num.* CLXVI.).

7° Les tems comptés depuis le commencement de la chute, sont comme les racines quarrées des espaces parcourus, (*Num.* CLXIII.).

8° Un corps pesant remontera à la hauteur d'où il est tombé, s'il est repoussé en haut verticalement par une force qui lui communique une vîtesse égale à celle qu'il avoit acquise en descendant, (*Num.* CLXXI.).

9° Si la vîtesse acquise au bout d'une seconde est p, la vîtesse acquise au bout d'un tems quelconque t, sera $v = pt$, (*Num.* CLXIV.); & l'espace parcouru à la fin de ce tems sera $s = \frac{pt^2}{2}$, le tems t étant exprimé en secondes.

Pour déterminer la valeur de p, on observera qu'un corps qui tombe librement, parcourt 15,1 pieds pendant la première seconde. Or si, pendant cette seconde, il avoit eu constamment la vîtesse finale p, il auroit parcouru un espace double, c'est-à-dire, 30,2 pieds, (*Num.* CLXII.): Donc p est

une vîteſſe en vertu de laquelle le corps parcourroit 30,2 pieds par ſeconde.

Si l'on prend la valeur de t dans l'équation $v=pt$, & qu'on la ſubſtitue dans l'équation $s=\frac{pt^2}{2}$, on trouvera $s=\frac{v^2}{2p}$; & au moyen des trois équations $v=pt$, $s=\frac{pt^2}{2}$, $s=\frac{v^2}{2p}$, connoiſſant l'une de ces trois quantités, la vîteſſe acquiſe par un corps peſant, la hauteur d'où il eſt tombé, le tems pendant lequel il eſt tombé, on trouvera facilement les deux autres. Connoiſſant le tems, on trouvera la vîteſſe par l'équation $v=pt$, & l'eſpace par l'équation $s=\frac{pt^2}{2}$. Connoiſſant l'eſpace, on trouvera la vîteſſe par l'équation $s=\frac{v^2}{2p}$, & le tems par l'équation $s=\frac{pt^2}{2}$. Enfin, connoiſſant la vîteſſe, on trouvera le tems par l'équation $v=pt$, & l'eſpace par l'équation $s=\frac{v^2}{2p}$. Appliquons ces formules générales à quelques problèmes particuliers.

CLXXIII.

PROBLÈME I. *Un mobile* A *eſt tombé librement pendant 6 ſecondes : trouver la vîteſſe acquiſe & la hauteur d'où il eſt tombé.*

SCD LYON 1

SOLUTION. Ce problème se résout par les formules $v = pt$, $s = \frac{pt^2}{2}$. La première donne $v = 30{,}2 \times 6 = 181{,}2$. La seconde donne $s = \frac{30{,}2 \times 36}{2} = 543{,}6$. Le corps a donc acquis une vîtesse en vertu de laquelle il parcourroit 181,2 pieds par seconde, & il est tombé d'une hauteur de 543,6 pieds.

CLXXIV.

PROBLÈME II. *Un mobile* A *tombant librement, a acquis une vîtesse en vertu de laquelle il parcourroit* 120,8 *pieds par seconde. On demande la hauteur d'où il est tombé, & le tems employé à la parcourir.*

SOLUTION. Pour trouver la hauteur demandée, j'emploie la formule $s = \frac{v^2}{2p}$, qui devient $s = \frac{120{,}8^2}{60{,}4} = 241{,}6$. Pour trouver le tems, j'emploie la formule $v = pt$, qui devient $120{,}8 = 30{,}2t$; d'où je tire $t = 4$. Le corps est donc tombé d'une hauteur de 241,6 pieds, & il a mis 4 secondes à tomber de cette hauteur.

CLXXV.

PROBLÈME III. *Un mobile est tombé librement d'une hauteur de* 60,4 *pieds : on demande la*

SCD LYON 1

vîteſſe qu'il a acquiſe, & le tems qu'il a employé à tomber de cette hauteur.

Solution. La vîteſſe acquiſe ſe trouvera par la formule $s = \frac{v^2}{2p}$, qui devient ici $60,4 = \frac{v^2}{60,4}$, & qui donne $v = 60,4$ pieds. Le tems pendant lequel le corps eſt tombé ſe trouvera par la formule $s = \frac{pt^2}{2}$, qui devient $60,4 = \frac{30,2 \times t^2}{2}$, d'où l'on tire $t = 2$ ſecondes. La vîteſſe finale eſt donc de 60,4 pieds, & le mobile eſt tombé pendant 2 ſecondes.

CLXXVI.

Problème IV. *Quelle vîteſſe faudroit-il donner au mobile* A, *pour le faire monter verticalement à la hauteur de* 1223,1 *pieds?*

Solution. Pour trouver cette vîteſſe, il faut chercher par l'équation $s = \frac{v^2}{2p}$, celle que le mobile eût acquiſe en tombant de la hauteur propoſée. On aura $1223,1 = \frac{v^2}{60,4}$, d'où l'on tirera $v = 271,8$ pieds. Il eſt évident (*Num.* CLXXI.), qu'en donnant cette vîteſſe au mobile, il s'élèvera juſqu'à la hauteur de 1223,1 pieds; puiſque ſon mouvement doit être retardé en montant, comme il ſeroit accéléré en deſcendant.

SCD LYON 1

Du Mouvement des Corps pesants le long des plans inclinés.

CLXXVII.

THÉORÈME. *Un corps qui descend sur un plan incliné, est sollicité dans son mouvement par une force accélératrice constante, qui est à la gravité, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

Pour le démontrer, soit (*Fig.* 86.) le mobile *M* qui descend le long du plan incliné *AB*. Que la gravité soit représentée par la ligne verticale *CG*, & que l'on achève le parallélogramme *CEGF*, en menant des points *C* & *G* les lignes *CF*, *GE* parallèles au plan incliné, & les lignes *CE*, *GF* perpendiculaires au même plan. Il est évident que la force *CG* pourra se décomposer en deux autres *CE* & *CF*, dont la première perpendiculaire au plan sera détruite par sa résistance, tandis que la seconde *CF* subsistera toute entière, & fera descendre le mobile. Comparant à présent les deux triangles *CFG*, *ADB*, on voit qu'ils sont rectangles, & que de plus les angles *DAB*, *GCF* compris entre des côtés parallèles, sont égaux. Donc ils sont semblables; & leurs côtés homologues donnent la proportion, $CF : CG :: AD : AB$; c'est-à-dire, la force qui accélère le mouvement du corps le long du plan incliné, est à la gravité, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

Les

SCD LYON 1

Les trois derniers termes de cette proportion étant toujours les mêmes, en quelque point du plan incliné qu'on suppose le mobile, il s'ensuit que le premier terme a toujours même valeur, & que par conséquent la force accélératrice le long du plan est constante.

CLXXVIII.

COROLLAIRE I. *Donc on peut appliquer à la descente des corps le long des plans inclinés, tout ce qu'on a démontré plus haut sur le mouvement uniformément accéléré.* On peut conclure, dis-je, que dans le mouvement sur les plans inclinés, les vîtesses acquises sont comme les tems; les espaces parcourus comme les quarrés des tems; &c.

CLXXIX.

COROLLAIRE II. *Si d'un point* L (Fig. 86.), *pris dans la hauteur du plan incliné, on abaisse sur sa longueur une perpendiculaire* LH, *le mobile qui descend le long du plan incliné, arrivera au point* H, *dans le même tems qu'il arriveroit au point* L *en tombant verticalement.*

Car appelons *t* le tems que le mobile employeroit à parcourir *AL*, & soit *s* l'espace qu'il parcourroit dans le même tems en descendant le long du plan incliné. L'espace *AL* sera à l'espace *s*, comme la gravité est à la force accélératrice le long du

SCD LYON 1

plan incliné (*Num.* CLXVII.) ; c'eſt-à-dire, comme la longueur du plan incliné eſt à ſa hauteur (*Num.* CLXXVII.). Donc on aura $AL : s :: AB : AD$. Or $AB : AD :: AL : AH$, à cauſe de la ſimilitude des triangles rectangles ADB, AHL, qui ont un angle commun en A. Donc $AL : s :: AL : AH$. Les deux antécédents étant égaux dans cette proportion, il faut que l'on ait $s = AH$; & par conſéquent l'eſpace parcouru ſur le plan incliné pendant le tems t, eſt préciſément la partie compriſe entre le point A & le point H où tombe la perpendiculaire LH.

CLXXX.

COROLLAIRE III. *Dans un cercle, toutes les cordes tirées de l'une des extrémités d'un diamètre vertical, ſont parcourues dans le même tems que ce diamètre.*

Pour le démontrer, prenons une corde quelconque AI (*Fig.* 87.), tirée de l'extrémité ſupérieure A du diamètre vertical. Si de l'extrémité inférieure L du même diamètre, on mène la ligne LI, elle ſera évidemment perpendiculaire ſur la la corde, puiſque l'angle AIL appuyé ſur le diamètre eſt droit. Donc (*Num.* CLXXIX.) un mobile employeroit le même tems à décrire le plan incliné AI, qu'à parcourir la ligne verticale AL.

Il ſuit de là, que toutes les cordes tirées de l'ex-

SCD LYON 1

trémité ſupérieure du diamètre vertical, ſeroient parcourues dans le même tems.

Il eſt aiſé de démontrer la même choſe pour les cordes telles que GL, que l'on tireroit de l'extrémité inférieure du même diamètre. Car ayant mené par le point A la corde AH, parallèle à GL, ces deux cordes qui feront des angles égaux avec le diamètre AL, ſeront égales & également inclinées à l'horizon. Donc GL ſera parcourue dans le même tems que AH, & par conſéquent dans le même tems que le diamètre AL.

CLXXXI.

COROLLAIRE IV. *La hauteur & la longueur d'un plan incliné ſont entr'elles comme les tems employés à les parcourir.*

Car ayant abaiſſé du point B (*Fig.* 86.), perpendiculairement à la longueur, la ligne BL' juſqu'à la rencontre de la hauteur prolongée; nommons t le tems employé à parcourir la hauteur AD, t' le tems employé à parcourir la longueur AB, & par conſéquent (*Num.* CLXXIX.), celui qui ſeroit néceſſaire pour parcourir verticalement AL'. Les eſpaces AD, AL, ſont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir (*Num.* CLXIII.). Donc $t^2 : t'^2 :: AD : AL'$. Or $AL' = \frac{\overline{AB}^2}{AD}$: car dans le triangle rectangle ABL', $\overline{AB}$

$= AD \times AL'$. Donc $t^2 : t'^2 :: AD : \frac{\overline{AB}^2}{AD} :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$. Donc $t : t' :: AD : AB$.

CLXXXII.

COROLLAIRE V. *La vîteſſe acquiſe par un corps peſant qui parcourt la hauteur d'un plan incliné, eſt égale à celle qu'il acquerroit en parcourant la longueur du même plan.*

En effet, nommons v la vîteſſe acquiſe en parcourant la hauteur AD (*Fig.* 86.), v' la vîteſſe acquiſe en parcourant la longueur AB, & enfin v'' la vîteſſe qu'un mobile acquerroit en parcourant la ligne AL'. On aura d'abord $v' : v'' :: AD : AB$; parce que les lignes AB & AL étant parcourues dans le même tems, les vîteſſes acquiſes en les parcourant ſont comme les forces accélératrices, qui ſont elles-mêmes dans le cas préſent, comme AD eſt à AB (*Num.* CLXXVII.). Mais les eſpaces AD, AL' ſont comme les quarrés des vîteſſes acquiſes en les parcourant (*Num.* CLXV.). Donc $v^2 : v''^2 :: AD : AL' :: AD : \frac{\overline{AB}^2}{AD} :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$.

Donc auſſi $v : v'' :: AD : AB$; & par conſéquent $v : v'' :: v' : v''$. Donc enfin $v = v'$.

On voit par là, que ſi l'on avoit pluſieurs plans de même hauteur, mais différemment inclinés, les

SCD LYON 1

vîteſſes acquiſes en parcourant leurs longueurs, ſeroient égales entr'elles. Car chacune de ces vîteſſes ſeroit égale à celle d'un corps, qui auroit parcouru la hauteur commune.

CLXXXIII.

COROLLAIRE VI. *Les longueurs de deux plans également inclinés, ſont comme les quarrés des tems employés à les parcourir.*

Car ſi les plans ſont également inclinés, la force accélératrice le long du premier, eſt égale à la force accélératrice le long du ſecond; & par conſéquent les mobiles qui parcourent leurs longueurs ſont dans le même cas, que s'ils deſcendoient ſur un ſeul & même plan. Donc (*Num.* CLXXVIII.) les eſpaces parcourus, ou les longueurs des deux plans, ſont comme les quarrés des tems.

Du mouvement des corps peſants le long des ſurfaces courbes.

CLXXXIV.

LEMME. *Si un mobile ſans peſanteur ſe meut dans un plan vertical le long du périmètre d'un polygone, il perdra en paſſant d'un côté au ſuivant, une partie de ſa vîteſſe, qui ſera à la vîteſſe qu'il avoit, comme le ſinus verſe de l'angle formé par l'un de ces côtés & par le prolongement de l'autre, eſt au ſinus total.*

SCD LYON 1

En effet, soit un polygone $ABCX$ (*Fig.* 88.), dont les côtés soient disposés dans un plan vertical. Sur le prolongement du côté AB, prenons BF pour représenter la vîtesse qu'avoit le mobile en allant de A en B. On peut décomposer cette vîtesse en deux autres, l'une BE perpendiculaire au côté BC, l'autre BD suivant la direction de ce côté; & le mobile à la rencontre de BC ne pouvant obéir à la première de ces vîtesses, il est évident que la seconde BD sera la seule qui subsistera. Cela posé, si du point B pris pour centre, on décrit avec un rayon BF l'arc FI; la ligne DI représentera la différence des vîtesses BF & BD, ou ce que le mobile a perdu de vîtesse à la rencontre du côté BC: ainsi la vîtesse perdue est à la vîtesse primitive, comme DI est à BF. Or DI est à BF, comme le sinus verse de l'angle CBF que forme le second côté avec le prolongement du premier, est au sinus total. Donc la vîtesse perdue est à celle qu'avoit le mobile avant de rencontrer le côté BC, comme le sinus verse de l'angle que forme ce côté avec le précédent prolongé, est au sinus total.

CLXXXV.

COROLLAIRE I. *Donc si un corps sans pesanteur se meut le long d'une ligne courbe dont tous les points soient dans le même plan vertical, la vîtesse qu'il perdra à la rencontre de chaque élé-*

SCD LYON 1

ment de la courbe, ne ſera qu'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, par rapport à la vîteſſe primitive.

Car on peut conſidérer une courbe quelconque, comme un polygone d'une infinité de côtés dont chacun eſt infiniment petit, & fait un angle infiniment petit avec le prolongement du côté contigu: donc à la rencontre de chacun de ces côtés, la vîteſſe perdue ſera à la vîteſſe qu'avoit le mobile, comme le ſinus verſe d'un angle infiniment petit eſt au ſinus total. Or le ſinus verſe d'un angle infiniment petit, eſt une quantité infiniment petite du ſecond ordre, par rapport au ſinus total: donc auſſi ce qu'un mobile perd de ſa vîteſſe à la rencontre de chaque élément de la courbe, n'eſt qu'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, par rapport à la vîteſſe entière.

Pour démontrer que le ſinus verſe d'un angle infiniment aigu, eſt une quantité infiniment petite du ſecond ordre, par rapport au ſinus total, prenons dans le cercle des tables ADB (*Fig.* 89.) un arc infiniment petit AD, qui ſoit la meſure de l'angle infiniment aigu ACD; & du point D menons la la perpendiculaire DI ſur le diamètre BA. Cette perpendiculaire ſera infiniment petite, ainſi que l'arc AD; & l'on aura $BI : DI :: DI : AI$. Donc puiſque la ligne DI eſt contenue une infinité de fois dans BI, le ſinus verſe AI ſera contenu une

SCD LYON 1

infinité de fois dans la ligne infiniment petite du premier ordre DI, & par conséquent il sera une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport à une ligne finie, telle que le rayon ou sinus total.

CLXXXVI.

COROLLAIRE II. *Si un corps sans pesanteur se meut sur une ligne courbe, il conservera la même vîtesse dans tous les points de cette ligne.*

Car un arc fini AB de cette courbe (*Fig.* 90.) est composé d'une infinité de côtés, & la vîtesse que perd le mobile à la rencontre de chacun de ces côtés, n'est qu'une vîtesse infiniment petite du second ordre. Donc la vîtesse perdue en parcourant l'arc AB, ne peut être qu'une quantité infiniment petite du second ordre, répétée une infinité de fois; ce qui ne donne qu'une quantité infiniment petite du premier ordre. Donc la vîtesse que perd le mobile en venant de A en B, est moindre que toute vîtesse finie, quelque petite qu'on voulût la supposer; & par conséquent on doit considérer le mobile comme ayant constamment la même vîtesse dans tous les points de la courbe.

CLXXXVII.

THÉORÈME. *Si un corps pesant descend dans un plan vertical sur une surface courbe, il aura, en quelque point que ce soit, la même vîtesse, que s'il étoit tombé librement de la même hauteur.*

SCD LYON 1

En effet, que le mobile décrive sur la surface courbe une ligne ANX, (*Fig.* 91.), dont tous les points soient dans un même plan vertical. Que AB, BC, CD, *&c.*, soient les premiers côtés infiniment petits de la courbe, & qu'on prolonge BC, CD jusqu'aux points E, F, du plan horizontal HI, mené par l'extrémité A du premier côté.

1° Le mobile, en décrivant le plan incliné infiniment petit AB, acquerra la même vîtesse, qu'en tombant verticalement de la hauteur de ce plan (*Num.* CLXXXII.).

2° La vîtesse du mobile en B, est égale à celle qu'il auroit acquise en parcourant le plan incliné EB de même hauteur que AB, & cette vîtesse n'est point altérée à la rencontre du côté BC (*Num.* CLXXXVI.). Donc puisque la gravité continue à agir sur le mobile, tandis qu'il décrit BC, sa vîtesse s'accélérera & sera la même au point C, que s'il étoit tombé le long du plan incliné EC, ou que s'il avoit décrit librement la hauteur de ce plan. Donc en arrivant au point C, il aura une vîtesse égale à celle qu'il eût acquise en tombant verticalement dès le plan horizontal HI jusqu'en C.

3° On peut faire un raisonnement semblable pour tous les éléments suivants de la courbe. Donc en un point quelconque N, le mobile aura la même vîtesse, que s'il étoit tombé verticalement dès le plan horizontal HI jusqu'en N.

SCD LYON 1

CLXXXVIII.

REMARQUE. La nature de la courbe que décrit le mobile étant donnée, on emploie ordinairement le calcul infinitésimal, pour déterminer le tems de la chute par un arc quelconque. On se sert du même calcul pour résoudre les différents problèmes où il s'agit de trouver la nature de la courbe, d'après quelque condition donnée; comme si l'on proposoit de trouver entre deux points donnés, la courbe parcourue dans le moindre tems possible, par un corps soumis à l'action de la pesanteur, ou celle dans laquelle un corps pesant arrive toujours au point le plus bas dans le même tems, quel que soit le point de la courbe d'où il ait commencé à descendre, &c. Ces problèmes sont trop sublimes pour entrer dans un ouvrage aussi élémentaire que l'est celui-ci.

Du Mouvement des Projectiles.

CLXXXIX.

ON appelle *mouvement des projectiles*, celui que prennent les corps qui, ayant été lancés avec une force quelconque, sont ensuite abandonnés à l'action de leur pesanteur, & à la résistance du fluide qui remplit l'espace ou le milieu dans lequel ils se meuvent, lorsque ce milieu est occupé par un fluide. Tel est le mouvement d'une pierre jetée avec la main ou avec une fronde, d'une flèche qui part

SCD LYON 1

d'un arc, d'un boulet qui ſort d'un canon, &c. Nous avons déjà déterminé les loix ſuivant leſquelles ſe meuvent ces projectiles, lorſqu'ils ſont lancés verticalement. Il nous reſte à examiner ici les circonſtances de leur mouvement, dans le cas où ils ſont lancés ſuivant une direction qui n'eſt pas verticale. Nous ferons encore préciſion de la réſiſtance des milieux.

Il eſt d'abord évident qu'un corps ainſi projeté doit décrire une ligne courbe. Car en ſuppoſant que dans un inſtant il ait décrit la ligne infiniment petite ab (*Fig.* 92.), il décriroit dans l'inſtant ſuivant la ligne $bc = ab$, ſans changer de direction, ſi au point b il ne recevoit aucune nouvelle impulſion; mais en b la gravité lui donne néceſſairement une impulſion be qui le porte vers le centre de la terre, & qui fait un angle avec la ligne bc. Donc ſi l'on achève le parallélogramme $bcde$, le mobile en décrira la diagonale bd, & s'écartera ainſi de la direction qu'il avoit dans l'inſtant précédent. Il décrira donc une ligne courbe, dont il s'agit de déterminer la nature.

CXC.

THÉORÈME. *Un projectile lancé ſuivant une direction qui n'eſt pas verticale, décrit dans l'eſpace une ligne parabolique.*

En effet, qu'un mobile ſoit lancé du point A

SCD LYON 1

(*Fig.* 93.) ſuivant la direction *AZ*, & que la force de projection ſoit repréſentée par la ligne *Al*, ou, ce qui revient au même, que la force de projection demeurant la même, ſoit capable de faire parcourir au corps l'eſpace *Al* pendant l'unité de tems, par exemple, pendant une ſeconde. On peut décompoſer cette force *Al* en deux autres, l'une verticale *Ah*, l'autre horizontale *Ag*, & concevoir le mobile comme animé de ces deux forces & de ſa peſanteur. Or la direction verticale de la peſanteur & de la force *Ah* étant perpendiculaire à la direction de la force horizontale *Ag*, la vîteſſe produite par cette dernière force ne peut être augmentée ni diminuée par les deux premières (*Num.* XIV.). Donc la vîteſſe dans le ſens horizontal, ſera uniforme, & les eſpaces parcourus horizontalement ſeront comme les tems employés à les parcourir. Pareillement la force verticale *Ah*, qui fait monter le corps, ne ſera point altérée par la force horizontale *Ag*, qui lui eſt perpendiculaire; mais elle le ſera continuellement par les impulſions contraires de la peſanteur, & le mouvement vertical ſera uniformément retardé; de manière que le corps, au lieu d'arriver au bout d'un tems donné à quelque point *L*, ne s'élèvera que juſqu'à un point plus bas *M*, & que bientôt la force *Ah* étant totalement détruite, il ſera forcé de deſcendre en vertu de ſa peſanteur. Il décrira par conſéquent une ligne

SCD LYON 1

courbe ASB, dans laquelle on pourra prendre pour axe des abciſſes la ligne verticale SC, qui paſſe par le point le plus élevé S; & pour ordonnées les lignes horizontales EN, DM, &c., menées des différents points de cet axe, juſqu'à la rencontre de la courbe.

Suppoſons à préſent que le mobile doive employer le tems t pour aller de M en S le long de la courbe qu'il décrit, & le tems t' pour aller de N en S. Les eſpaces dont il montera pendant ces deux tems, ſeront reſpectivement DS & ES; & les eſpaces parcourus dans le ſens horizontal pendant les mêmes tems, ſeront MD, NE. Or les eſpaces DS, ES ſont les mêmes que ceux que décriroit le corps en deſcendant verticalement pendant les tems t, t' (*Num.* CLXXI.): donc ils ſont comme les quarrés de ces tems, & par conſéquent on a $DS : ES :: t^2 : t'^2$. Mais puiſque les eſpaces décrits horizontalement ſont comme les tems, on a $MD : NE :: t : t'$, ou $\overline{MD}^2 : \overline{NE}^2 :: t^2 : t'^2$. Donc $DS : ES :: \overline{MD}^2 : \overline{NE}^2$; ce qui fait voir que dans la courbe décrite par le mobile, les abciſſes DS, ES ſont proportionnelles aux quarrés des ordonnées correſpondantes MD, NE; propriété qui ne convient qu'à la parabole.

Cette démonſtration fait voir que le mobile, en montant juſqu'en S, décrit une demi-parabole;

SCD LYON 1

& l'on peut reconnoître aiſément qu'en deſcendant de S en B, il doit décrire une autre demi-parabole parfaitement égale à la première. Car ſi ce mobile eſt monté d'un eſpace DS pendant le tems t, il deſcendra du même eſpace pendant un ſecond tems égal, & les eſpaces MD, Dm parcourus horizontalement pendant ces deux tems, ſeront égaux. Donc à la même abciſſe SD répondront de part & d'autre deux ordonnées perpendiculaires égales; ce qui ſuppoſe une égalité parfaite entre les deux parties AS, BS de la courbe.

CXCI.

PROBLÈME. *Trouver une équation qui exprime la relation entre la vîteſſe de projection, la tangente de l'angle de projection, & les eſpaces parcourus, ſoit verticalement, ſoit horizontalement, par un projectile.*

SOLUTION. Que le mobile lancé en A (*Fig.* 94.) ſuivant la direction AZ, décrive la parabole ASB, & qu'il arrive à un point quelconque M au bout du tems t, pendant lequel il eût parcouru AL, ſi ſon mouvement n'eût point été altéré par la peſanteur. Appelons N la tangente de l'angle de projection ZAB, x l'eſpace AP parcouru horizontalement par le mobile, y l'eſpace PM décrit verticalement pendant le même tems, v la vîteſſe de projection au point A ſuivant AZ. Cette vîteſſe

exprime l'eſpace que le mobile décriroit pendant chaque ſeconde, ſi ſon mouvement demeuroit uniforme. Donc l'eſpace AL qui ſeroit parcouru pendant le tems t, vaut vt. Mais par la ſuppoſition, le mobile au bout du tems t arrive en M, de manière qu'en vertu de ſa peſanteur, il eſt retiré vers le centre de la terre de tout l'eſpace $LM = \frac{pt^2}{2}$, p déſignant la vîteſſe que la peſanteur fait acquérir pendant une ſeconde, c'eſt-à-dire 30,2 pieds (*Num.* CLXXII.).

En ſuppoſant à préſent le ſinus total $= 1$, le triangle rectangle LAP donnera la proportion $1 : N :: AP : PL :: x : PL = Nx$; donc puiſque $PL - LM = PM$, & que $\overline{AL}^2 = \overline{PL}^2 + \overline{AP}^2$, on aura les deux équations $Nx - \frac{pt^2}{2} = y$, $v^2 t^2 = N^2 x^2 + x^2$. Prenant la valeur de t^2 dans celle-ci, & la ſubſtituant dans la première, on trouvera l'équation cherchée.

$$Nx - \frac{pN^2 x^2 - px^2}{2v^2} = y.$$

CXCII.

COROLLAIRE. L'équation qu'on vient de trouver, réſout immédiatement ce problème général : *De ces quatre quantités, l'angle de projection, la vîteſſe de projection, la diſtance horizontale du but*

SCD LYON 1

ou point qu'on veut frapper, son élévation au-dessus de l'horizon, trois étant connues, trouver la quatrième.

En effet, soit C (*Fig.* 94.) le but auquel on veut frapper. En nommant, comme dans le problème précédent, y son élévation CE, x sa distance horizontale AE, v la vîtesse que donne la force de projection, N la tangente de l'angle de projection; le rapport entre les quatre quantités x, y, v, N, sera exprimée par l'équation

$$Nx - \frac{pN^2x^2 - px^2}{2v^2} = y,$$

dans laquelle p marque la vîtesse acquise à la fin d'une seconde par un corps qui tombe verticalement. Donc si des quatre quantités x, y, v, N, trois sont connues, il suffira de résoudre l'équation, pour trouver la quatrième.

Que l'on se propose, par exemple, de faire tomber une bombe au point C, dont la distance horizontale x & l'élévation verticale y soient données: que l'on connoisse aussi la vîtesse v, que la force de la poudre est capable de communiquer à la bombe. Pour trouver la tangente N de l'angle sous lequel on doit diriger le mortier, il ne s'agira que de résoudre une équation du second degré, qui donnera $N = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - p^2x^2 - 2pv^2y}}{px}$. La

tangente

tangente N étant ainsi déterminée, on cherchera dans les tables des sinus & des tangentes l'angle qui lui répond. Ce sera l'angle de projection.

On peut observer que la quantité N a deux valeurs, à cause du signe $\pm$ qui se trouve avant le radical du second membre: d'où il suit que l'on peut frapper le but, en dirigeant le projectile sous deux angles différents.

On peut observer encore au sujet de ces valeurs de N, qu'elles seront imaginaires, si la quantité comprise sous le signe radical est négative; ce qui arrivera lorsque la vîtesse v sera trop petite par rapport aux quantités x, y. Donc alors il ne sera pas possible d'atteindre le but, sous quelqu'angle qu'on dirige le projectile.

CXCIII.

Remarque. On peut déduire très-simplement de l'équation $Nx - p(N^2+1)x^2 = y$, toute la balistique ordinaire, où l'on suppose les projectiles lancés dans un milieu non résistant. Les Géomètres ont aussi fait des recherches intéressantes pour déterminer les loix du mouvement des projectiles, en ayant égard à la résistance des milieux: mais il faut avouer que la pratique n'a pas jusqu'ici retiré de ces sublimes spéculations tout l'avantage qu'on en peut espérer.

SCD LYON 1

Du Mouvement des Pendules.

CXCIV.

UN *pendule* eſt un fil ou une verge infléxible, qui tient un ou pluſieurs poids ſuſpendus ou attachés à un point fixe, autour duquel ils peuvent tourner librement. Le pendule eſt *compoſé*, ſi le fil infléxible ſoutient pluſieurs poids fixés de manière à conſerver la même diſtance tant les uns des autres, que du centre de ſuſpenſion : il eſt *ſimple*, ſi l'on conſidère le fil comme n'ayant aucune peſanteur, & qu'il ne ſoutienne qu'un ſeul corps conſidéré comme un point peſant. On voit par là, qu'à proprement parler, il n'exiſte aucun pendule ſimple dans la nature, puiſqu'il n'exiſte ni fil ſans peſanteur, ni corps ſans étendue; & que par conſéquent un poids quelconque ſuſpendu au fil d'un pendule, eſt compoſé d'une infinité, pour ainſi dire, de corpuſcules qui ne ſont pas tous également éloignés du point fixe. On ne laiſſe pourtant pas de conſidérer d'abord le pendule comme abſolument ſimple, 1° parce que les loix de ſon mouvement étant déterminées, il eſt aiſé d'en conclure celles du mouvement dans le pendule compoſé; 2° parce qu'un pendule dans lequel un fil très-mince & très-léger ſoutient un poids qui a beaucoup de maſſe ſous un volume peu conſidérable, ſe meut à très-peu près de la même manière qu'un pendule abſolument ſimple.

SCD LYON 1

CXCV.

THÉORÈME I. *Dans un pendule ſimple* CP (Fig. 95.), *qui fait un angle avec la verticale* CA, *le poids* P *doit deſcendre d'un mouvement accéléré juſqu'à cette verticale; & la force accélératrice à chaque inſtant eſt à la gravité, comme le ſinus de l'angle formé par la verticale & par la direction du pendule eſt au ſinus total.*

En effet, ſoit repréſentée la gravité par la petite ligne verticale *Pg:* on pourra décompoſer cette force en deux autres, l'une *Ph* ſuivant le fil du pendule prolongé, l'autre *Pf* perpendiculaire à la direction du pendule, & ſuivant la direction de l'arc au point *P*. La première ſera détruite par la réſiſtance du fil *PC*, la ſeconde accélérera le mouvement du poids. Or deux puiſſances compoſantes & leur réſultante étant entr'elles chacune comme le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres (*Num.* XIX.), on aura *Pf* : *Pg* :: ſin. *hPg* : ſin. *hPf* :: ſin. *PCA* : ſin. tot. Donc la force qui accélère le mouvement du poids, eſt à la gravité, comme le ſinus de l'angle que fait la verticale avec la direction du pendule eſt au ſinus total.

On peut remarquer que le poids *P* du pendule ſe meut exactement comme s'il deſcendoit naturellement le long de l'arc *PA*, qui a pour rayon la

SCD LYON 1

longueur CP du pendule. Car dans dans ce dernier cas, la gravité Pg pourroit se décomposer aussi en deux forces, l'une Ph perpendiculaire à l'arc, & détruite par sa résistance ; l'autre Pf suivant la direction de l'arc au point P, qui feroit tomber le corps, & qui seroit la même que celle qui accélère son mouvement dans le pendule.

CXCVI.

COROLLAIRE. La vîtesse du poids sera donc accélérée jusqu'au point A; & comme étant arrivé à ce point, il ne pourra continuer son mouvement qu'en montant le long de l'arc AP', il est visible que sa vîtesse sera retardée de la même manière dont elle avoit été accélérée de P en A. C'est pourquoi non seulement il décrira l'arc $AP' = AP$, en s'élevant à la même hauteur dont il étoit descendu, mais de plus ces deux arcs seront décrits dans des tems égaux ; & lorsqu'il sera arrivé en P', il aura perdu toute sa vîtesse. Donc il redescendra le long de l'arc $P'A$ pour remonter jusqu'en P, & ainsi de suite à l'infini.

Il faut pourtant observer que dans l'état physique, la résistance de l'air & le frottement autour du point C, détruiront une partie de la force acquise en tombant : ainsi le pendule ne remontera pas précisément au même point d'où il étoit descendu. Il décrira des arcs qui diminueront de plus en plus,

SCD LYON 1

& finira par demeurer en repos dans la direction verticale, qui est sa direction naturelle.

Chaque allée du pendule, depuis un point quelconque P jusqu'au point P', où il cesse de monter pour redescendre, s'appelle une *oscillation* ou une *vibration*. On donne aussi le même nom au retour depuis le point P' jusqu'au point P.

CXCVII.

THÉORÈME II. *Les oscillations d'un pendule simple qui décrit de très-petits arcs de cercle, sont sensiblement isochrones, c'est-à-dire, de même durée.*

Pour le démontrer, soient PA, XA les arcs très-petits que le pendule décrit dans deux demi-oscillations différentes; & concevons que le premier de ces arcs soit divisé en autant de parties égales & infiniment petites que le second. Il est évident que les demi-oscillations seront isochrones, si chaque partie du premier arc est parcourue dans le même tems que la partie correspondante du second. Or c'est ce qui doit arriver très-sensiblement quand les arcs sont très-petits. En effet, une partie quelconque du premier arc PA sera décrite dans le même tems que la partie correspondante du second, si les vîtesses dont le poids est animé en les décrivant, sont toujours proportionnelles à ces parties: car il est évident qu'une ligne double, triple, quadruple, &c.

SCD LYON 1

d'une autre, sera parcourue dans le même tems que celle-ci, pourvu que la première soit parcourue avec une vîtesse double, triple, quadruple, &c. Or les vîtesses dont le poids est animé en parcourant deux parties correspondantes dans les deux arcs circulaires dont il s'agit, sont toujours proportionnelles à ces parties.

Pour le faire voir, nommons p la vîtesse que donne une impulsion de la pesanteur, g la vîtesse que donne la force accélératrice au point P d'où le corps part pour décrire le premier arc, g' la vîtesse que donne la force accélératrice au point X, d'où il commence à décrire le second. Suivant le théorème I. (*Num.* CXCV.), nous aurons $g : p :: \text{sin. } PCA : \text{sin. tot.}$; $p : g' :: \text{sin. tot.} : \text{sin. } XCA$. Multipliant par ordre ces deux proportions, & divisant par p les deux termes de la première raison du produit, & par *sin. tot.* les deux termes de la seconde, il vient $g : g' :: \text{sin. } PCA : \text{sin. } XCA$, ou $g : g' :: PA : XA$; parce que dans les petits angles les sinus sont sensiblement proportionnels aux arcs qui mesurent ces angles. Donc les vîtesses g, g' sont comme les arcs PA, XA, ou comme la première partie du premier est à la première partie du second. Au commencement des secondes parties, les forces accélératrices ajouteront à g, g' de nouvelles vîtesses qui feront entr'elles comme les restes des arcs à parcourir, & par conséquent

SCD LYON 1

comme une partie du premier arc eſt à une partie du ſecond. Donc les vîteſſes totales dont le poids ſera animé en décrivant les ſecondes parties des deux arcs, ſeront encore proportionnelles à ces parties. On démontreroit la même choſe de toutes les autres parties correſpondantes des deux arcs. Donc le premier PA ſera parcouru dans le même tems que le ſecond. Ainſi les demi-oſcillations, & par conſéquent les oſcillations entières, ſeront iſochrones.

CXCVIII.

THÉORÈME III. *Les durées des oſcillations de deux pendules ſimples différents, ſont comme les racines quarrées de leurs longueurs.*

Pour démontrer ce théorème, ſuppoſons d'abord que les deux pendules décrivent deux arcs ſemblables PA, pa (*Fig.* 96.), & concevons ces arcs diviſés l'un & l'autre en un même nombre infini d'éléments égaux, plus grands dans le plus grand arc, & moindres dans le plus petit. Prenons enſuite deux éléments correſpondants BD, bd, qui ſeront également inclinés à l'horizon, & prolongeons-les juſqu'aux points L & l des horizontales HO, ho, menées par les points P & p, d'où les poids commencent à deſcendre. Il eſt évident que ces deux éléments ſeront parcourus de la même manière que ſi les poids étoient tombés le long des plans

SCD Lyon 1 Mathématiques
SCD LYON 1

inclinés LB, lb. De plus, puisque les lignes semblablement tirées dans les figures semblables, sont proportionnelles, nous aurons $LB : lb :: LD : ld :: BD : bd :: PA : pa$. Et puisque les plans également inclinés sont parcourus dans des tems proportionnels aux quarrés de leurs longueurs (*Num.* CLXXXIII.), si nous appelons T' & t' les tems employés à parcourir LD & ld; T'' & t'' les tems employés à parcourir LB & lb, nous aurons $T' : t' :: \sqrt{LD} : \sqrt{ld}$; $T'' : t'' :: \sqrt{LB} : \sqrt{lb}$. Et dans ces proportions les deux secondes raisons étant égales à celle de $\sqrt{PA}$ à $\sqrt{pa}$, nous aurons $T' : t' :: T'' : t'' :: \sqrt{PA} : \sqrt{pa}$; d'où l'on tire $T' - T'' : t' - t'' :: \sqrt{PA} : \sqrt{pa}$. Or $T' - T''$ est le tems employé à parcourir l'élément BD; $t' - t''$ est le tems employé à parcourir l'élément bd. Donc les tems employés à parcourir des éléments correspondants, sont comme les racines quarrées des arcs semblables PA, pa, où comme les racines quarrées des longueurs CP, cp, qui sont les rayons de ces arcs semblables, & qui par conséquent leurs sont proportionnelles. Or, si tous les éléments correspondants sont parcourus dans des tems proportionnels aux racines quarrées des longueurs des deux pendules, les arcs entiers PA, pa, seront parcourus dans des tems qui seront

SCD LYON 1

dans le même rapport. Donc les durées des demi-oscillations, & par conséquent les durées des oscillations entières de deux pendules différents, seront comme les racines quarrées des longueurs de ces pendules. Ainsi en appelant T & t les durées des oscillations PP', pp', on aura $T : t :: \sqrt{CP} : \sqrt{cp}$.

Maintenant quand le second pendule décriroit un arc xx' qui ne seroit pas semblable à l'arc PP' décrit par le premier, on voit par le théorème précédent (*Num.* CXCVII.), que cet arc xx' seroit toujours décrit dans le tems t, comme l'arc pp' : donc en ce cas on pourroit encore dire que le tems employé par le pendule CP à décrire un arc très-petit, est au tems employé par le pendule cp à décrire aussi un arc très-petit, comme la racine quarrée de la longueur du premier pendule est à la racine quarrée de la longueur du second.

On peut conclure de ce théorème, que *les longueurs des pendules sont comme les quarrés des tems qu'ils emploient à faire leurs oscillations.*

CXCIX.

THÉORÈME IV. *Les nombres des oscillations que deux pendules simples font dans le même tems, sont réciproquement comme les racines quarrées de leurs longueurs.*

Car moins ces pendules mettent de tems à faire chacune de leurs oscillations, plus ils en font pen-

SCD LYON 1

dant un tems déterminé, par exemple, pendant une minute. Donc en appelant respectivement N & n les nombres des oscillations que les deux pendules CP, cp font dans le même tems, T & t les durées de ces oscillations, on aura $N : n :: t : T$. Or on vient de voir (*Num.* CXCVIII.), que $t : T :: \sqrt{cp} : \sqrt{CP}$. Donc $N : n :: \sqrt{cp} : \sqrt{CP}$.

Il suit de ce théorème, que *les longueurs de deux pendules sont réciproquement comme les quarrés des nombres d'oscillations qu'ils font dans le même tems.*

CC.

PROBLÈME I. *Déterminer la longueur d'un pendule qui fasse une oscillation par seconde.*

SOLUTION. Prenez un corps qui renferme beaucoup de matière sous un petit volume, par exemple, une balle de plomb, de cuivre, ou d'or. Suspendez-le à un fil de métal très-délié, dont la longueur exactement mesurée soit de trois ou quatre pieds. Faites osciller ce pendule en l'écartant peu de la verticale, & comptez le nombre d'oscillations qu'il fera pendant un tems déterminé & bien constaté, par exemple, pendant une heure. Comme le pendule à secondes doit faire 3600 oscillations dans une heure, puisqu'il y a dans une heure 3600 secondes, on pourra trouver sa longueur en faisant la proportion suivante (*Num.* CXCIX.): *le quarré du nombre observé d'oscillations est au quarré du*

SCD LYON 1

nombre 3600, *comme la longueur cherchée du pendule à ſecondes eſt à la longueur du pendule dont on a compté les oſcillations.* Le premier, le ſecond & le quatrième terme ſont connus dans cette proportion. Donc on trouvera le troiſième, qui eſt la longueur cherchée, en diviſant le produit des extrêmes par le moyen connu.

C'eſt ainſi qu'on a trouvé par des expériences faites avec un très-grand ſoin, que le pendule ſimple qui fait à Paris une oſcillation par ſeconde, doit avoir 3 pieds 8,57 lignes, ou à très-peu près 881 demi-lignes de longueur.

CCI.

PROBLÈME II. *De ces trois choſes, la longueur d'un pendule ſimple, la durée de chacune de ſes oſcillations, le nombre des oſcillations qu'il fait dans un tems donné, une étant connue, trouver les deux autres.*

SOLUTION. Si l'on exprime en ſecondes la durée des oſcillations, ainſi que le tems que le pendule met à en faire un certain nombre, on réſoudra le problème par les proportions ſuivantes, démontrées (*Num.* CXCVIII & CXCIX.).

Le quarré d'une ſeconde eſt au quarré de la durée d'une oſcillation dans le pendule propoſé, comme la longueur du pendule à ſecondes eſt à la longueur du pendule propoſé.

SCD LYON 1

La longueur du pendule à secondes est à la longueur du pendule proposé, comme le quarré du nombre d'oscillations que celui-ci fait dans un tems donné, est au quarré du nombre d'oscillations que le premier fait dans le même tems.

Une seconde est à la durée d'une oscillation dans le pendule proposé, comme le nombre d'oscillations que ce pendule fait dans un tems donné, est au nombre d'oscillations que le pendule à secondes fait dans le même tems.

Si l'on connoît la longueur d'un pendule, on trouvera le quarré de la durée, & par conséquent la durée même de ses oscillations, par la première de ces proportions : ensuite le nombre d'oscillations qu'il fait dans un tems donné, se trouvera par la troisième.

Si l'on connoît le nombre d'oscillations que le pendule fait dans un tems donné, on trouvera sa longueur par la seconde proportion, & la durée de chacune de ses oscillations par la troisième.

Enfin, si l'on connoît la durée des oscillations d'un pendule, on trouvera sa longueur en employant la première proportion, & le nombre des oscillations qu'il fait dans un tems donné, en employant la troisième.

CCII.

REMARQUE. Avant de passer aux pendules composés, nous allons exposer & démontrer le prin-

SCD LYON 1

cipe général de la communication du mouvement dans les corps qui agissent les uns sur les autres. Voici ce fameux principe dont on est redevable à M. *d'Alembert*. *De quelque manière que plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, viennent à changer leurs mouvements actuels; si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'instant suivant, s'il devenoit libre, soit décomposé en deux autres, dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement; le second doit être tel que si chacun des corps n'eût eu d'autre mouvement que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre.*

Supposons, par exemple, un nombre quelconque de corps, a, b, c, d, e (*Fig.* 97.), qui agissent, comme on voudra, les uns sur les autres; de manière que s'ils étoient libres, ils dussent décrire dans un instant les espaces aa', bb', cc', dd', ee', mais qu'en conséquence de leur action mutuelle ils décrivent réellement les espaces aa'', bb'', cc'', dd'', ee'': je dis que si l'on décompose les mouvements qui feroient décrire les premiers espaces que nous venons de nommer, en deux, dont les uns feroient décrire aa'', bb'', cc'', dd'', ee'', & dont les autres feroient décrire des espaces aa''', bb''', cc''', dd''', ee'''; ceux-ci seront tels que les corps animés d'eux seuls, se feroient équilibre.

En effet, si les mouvements capables de faire

SCD LYON 1

décrire aa''', bb''', cc''', dd''' ee''', n'étoient pas tels qu'il en réſultât l'équilibre dans le ſyſtème, ils altéreroient néceſſairement les mouvements qui font décrire aa'', bb'', cc'', dd'', ee''; & par conſéquent ces derniers n'auroient pas lieu; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

CCIII.

PROBLÈME III. *Trouver la longueur d'un pendule ſimple qui faſſe ſes oſcillations dans le même tems qu'un pendule compoſé, chargé de tant de poids qu'on voudra.*

SOLUTION. Soit le pendule compoſé CP (*Fig.* 98.) chargé de trois poids P, Q, R, & faiſant avec la verticale un angle quelconque CPA. Il eſt évident que les trois poids devant deſcendre au premier inſtant par des arcs également inclinés, prendroient tous la même vîteſſe, s'ils ne ſe génoient pas dans leurs mouvements; & qu'en nommant V cette vîteſſe, leurs forces ou mouvements ſeroient PV, QV, RV. Mais dans le pendule compoſé, les poids étant aſſujettis à un fil infléxible, il eſt impoſſible qu'ils aient une vîteſſe égale au premier inſtant; car ceux qui ſont plus près du centre de ſuſpenſion, doivent évidemment parcourir un plus petit eſpace; & ceux qui en ſont plus éloignés, doivent parcourir de plus grandes lignes. Il faut donc néceſſairement que par l'infléxibilité du fil, la vîteſſe avec laquelle chaque poids tendoit

SCD LYON 1

à se mouvoir, soit altérée, & qu'au lieu d'être la même dans tous, elle augmente dans les poids inférieurs & diminue dans les supérieurs. Supposons dans le cas présent, qu'en conséquence de l'action mutuelle, le poids P prenne une vîtesse v plus grande que V, & que les poids Q, R, prennent respectivement les vîtesses v', v'' moindres que V. On pourra décomposer la force PV en deux forces diamétralement opposées, savoir Pv suivant Pp', & $Pv-PV$ en sens contraire. De même, on pourra décomposer QV en Qv' & $QV-Qv'$, l'une & l'autre suivant Qq. Enfin la force RV pourra aussi se décomposer en Rv'' & $RV-Rv''$, toutes deux suivant Rr: ce qui donnera six forces, au lieu de celles que les poids auroient eues naturellement. Or de ces six forces, les trois Pv, Qv', Rv'' sont les seules qui doivent avoir lieu: donc, suivant le principe de M. *d'Alembert*, les trois autres $Pv-PV$, $QV-Qv'$, $RV-Rv''$, doivent être telles qu'elles se fassent équilibre; & pour que cela arrive, il faut que le moment de la première soit égal à la somme des moments des deux autres, par rapport au point fixe C. Donc on doit avoir l'équation

$$(Pv-PV)\times CP=(QV-Qv')\times CQ+(RV-Rv'')\times CR$$

Observons à présent que les mobiles devant décrire des arcs semblables Pp', Qq, Rr, en vertu des vîtesses v, v', v'', il faut que ces vîtesses soient comme ces arcs, & par conséquent comme les rayons

CP, CQ, CR. Donc $v : v' :: CP : CQ$, & $v : v'' :: CP : CR$, d'où l'on tire $v' = \frac{v \times CQ}{CP}$, $v'' = \frac{v \times CR}{CP}$. Substituant ces valeurs dans notre équation, elle deviendra $(Pv - PV) \times CP = (QV - \frac{Qv \times CQ}{CP}) \times CQ + (RV - \frac{Rv \times CR}{CP}) \times CR$; qui donne

$$v = \frac{V(P \times CP + Q \times CQ + R \times CR) \times CP}{P \times \overline{CP}^2 + Q \times \overline{CQ}^2 + R \times \overline{CR}^2}.$$

Or en supposant que le centre de gravité des poids P, Q, R, soit en G, on a (*Num.* LXIV.), $P \times CP + Q \times CQ + R \times CR = (P + Q + R) CG$.

Donc $v = \frac{V \times (P + Q + R) \times CG \times CP}{P \times \overline{CP}^2 + Q \times \overline{CQ}^2 + R \times \overline{CR}^2}$.

Cela posé, rien n'est plus facile que de déterminer la longueur du pendule simple cp, qui feroit ses oscillations dans le même tems que le pendule composé que nous examinons. Car en supposant qu'il fasse avec la verticale un angle $pca = PCA$, il recevra de la force accélératrice une vîtesse V, par l'hypothèse. Or si la vîtesse v est à la vîtesse V, comme la longueur du pendule composé est à la longueur du pendule simple, la première de ces vîtesses sera à la seconde, comme un arc décrit par le poids P est à un arc semblable décrit par le poids

poids p; & par conséquent les poids P & p décriront à chaque instant des arcs semblables en s'approchant de la verticale. Donc ils y arriveront en même tems, & leurs oscillations seront isochrones, si l'on a $v : V :: CP : cp$; ou

$$\frac{V(P+Q+R)\times CG\times CP}{P\times\overline{CP}^2+Q\times\overline{CQ}^2+R\times\overline{CR}^2} : V :: CP : cp;$$

proportion d'où l'on tirera

$$cp=\frac{P\times\overline{CP}^2+Q\times\overline{CQ}^2+R\times\overline{CR}^2}{(P+Q+R)CG}.$$

Ainsi, *pour avoir l'expression de la longueur du pendule simple* cp, *qui fait ses oscillations dans le même tems que le pendule composé, il faut ajouter ensemble tous les produits de chaque corps par le quarré de sa distance au point de suspension* C, *& diviser la somme de ces produits par la somme de tous les corps, multipliée par la distance du centre de gravité du système au même point de suspension.*

CCIV.

Remarque. Si l'on porte la longueur cp sur CP, de C en f, le point f sera ce qu'on appelle *le centre d'oscillation du pendule composé.* Ce point peut être regardé comme chargé de tous les poids que la verge CP porte réellement : il fait ses oscillations de la même manière & dans le même tems que le pendule simple dont Cf ou cp est la longueur.

SCD LYON 1

On doit remarquer que le point f est différent du centre de gravité G, & que la ligne Cf est plus grande que CG.

SECTION III.

Du Mouvement des corps sollicités par des forces centrales.

CCV.

SUPPOSONS un mobile M (*Fig.* 99.), lancé suivant une direction quelconque MT, & soumis en même tems à l'action d'une force constamment dirigée vers un même point O. Il est évident que si cette force lui donne à chaque instant des impulsions infiniment petites, il changera infiniment peu sa direction dans les points consécutifs par lesquels il passera, & qu'en conséquence il sera forcé de décrire une ligne courbe, dont la nature ou l'espèce dépendra de la vîtesse de projection & de la loi suivant laquelle agira la force dirigée vers le point O.

CCVI.

ON appelle *centre des forces* ou *centre du mouvement*, le point vers lequel est porté le mobile par la force qui lui fait décrire une courbe ; & toutes les lignes droites, telles que OM, tirées de ce centre aux différents points de la courbe décrite, sont nommées *rayons vecteurs*. On entend en général

SCD LYON 1

par force *centrale*, celle qui agit suivant la direction de ces rayons; & une force centrale est appelée plus particulièrement force *centripète* ou force *centrifuge*, suivant qu'elle tend à rapprocher ou à éloigner le mobile du centre de mouvement.

CCVII.

On appelle *trajectoire* la ligne que parcourt un mobile suivant des loix ou conditions déterminées. Quand il est question de trajectoires décrites en vertu de forces centrales, il peut arriver que connoissant la nature de la courbe à décrire, on cherche la loi que la force centrale suit dans son action; ou que cette loi étant connue, on demande la nature de la courbe que le mobile doit décrire. Le plan de notre ouvrage ne nous permettant pas de traiter dans toute son étendue une matière aussi vaste que l'est celle-ci, nous nous contenterons de déterminer en général le rapport des forces centripètes dans des trajectoires quelconques, & d'exposer ensuite les loix principales du mouvement dans les Sections coniques.

Mais avant d'aller plus loin, rappelons-nous que l'on regarde en Géométrie la nature d'une courbe dont tous les points sont dans le même plan, comme déterminée, quand on peut exprimer par une équation le rapport qui se trouve entre les distances de chacun de ses points à deux droites menées dans ce

SCD LYON 1

plan, & dont l'une est perpendiculaire à l'autre. Soit, par exemple, la courbe *MAF* (*Fig. 99.*), dans le plan de laquelle on mène les deux lignes *AX*, *AY* dont l'une est perpendiculaire à l'autre, & que des différents points *N*, *M*, *B*, *F*, *&c.* de de la courbe, on abaisse sur *AX* les perpendiculaires *NQ*, *MP*, *BD*, *FG*, *&c.*: ces perpendiculaires qu'on nomme *ordonnées* ou *appliquées*, feront les distances de ces points à la droite *AX*, & les parties *AQ*, *AP*, *AD*, *AG*, *&c.* comprises entre l'intersection *A* & la rencontre des ordonnées, marqueront les distances des mêmes points à la droite *AY*, & feront ce qu'on appelle les *abscisses* de la courbe. On nomme aussi *coordonnées* une abscisse quelconque & l'ordonnée qui lui répond; par exemple, l'abscisse *AP*, & l'ordonnée *PM*. Si l'on a une équation au moyen de laquelle, connoissant l'une des coordonnées, on puisse déterminer l'autre, la nature de la courbe est exprimée par cette équation. Les deux lignes *AX*, *AY*, auxquelles on rapporte les points de la courbe, sont les *axes* de cette courbe. On appelle *axe des abscisses* ou simplement *axe*, la ligne *AX* sur laquelle on abaisse les ordonnées des différents points; & l'on donne le nom *d'axe des ordonnées* à la ligne *AY* qui leur est parallèle.

La *tangente* à un point *M* de la courbe est une droite *MT*, menée de manière qu'il ne soit pas

SCD LYON 1

possible de tirer de ce point, entr'elle & la courbe, aucune autre ligne droite. On appelle *normale* une ligne *MH* menée perpendiculairement à la courbe jusqu'à la rencontre de l'axe. On appelle *sous-tangente*, la partie *PT* de l'axe comprise entre les points où il est rencontré par l'ordonnée & la tangente; & l'on entend par *sous-normale*, la partie *PH* du même axe comprise entre l'ordonnée & la normale. Si l'on conçoit un cercle qui passe par trois points contigus *m*, *M*, *m'* de la courbe, il aura dans ces points la même courbure & la même tangente qu'elle; & son centre sera dans quelque point *C* de la perpendiculaire menée au point *M*. Le rayon *MC* d'un cercle qui se confond ainsi avec la courbe dans trois points consécutifs, est ce qu'on appelle *rayon de courbure* ou *rayon du cercle osculateur* de la courbe en ces points.

Après avoir défini ces différentes lignes, revenons aux forces centrales.

Du Mouvement dans des Trajectoires quelconques.

CCVIII.

THÉORÈME I. *La surface comprise entre un arc quelconque d'une trajectoire & les deux rayons vecteurs tirés du centre des forces aux extrémités de cet arc, est toujours comme le tems employé à parcourir cet arc.*

En effet, un mobile qui pendant un instant vient

SCD LYON 1

de parcourir la ligne PQ (*Fig.* 100.), décriroit dans l'instant suivant la ligne $QF = PQ$ suivant la même direction, s'il n'éprouvoit aucun changement dans son mouvement. Mais s'il éprouve au point Q l'action d'une force constamment dirigée vers le point central O, & capable de lui faire parcourir pendant l'instant dont il s'agit, un petit espace QG vers le centre, alors il suivra la diagonale du parallélogramme formé sur la direction des deux puissances dont il est animé, & il arrivera en p, comme il est évident par le principe du mouvement composé. Or les parties triangulaires OPQ, OQp décrites par les rayons vecteurs en des instants égaux, sont égales entr'elles, puisqu'elles sont égales l'une & l'autre au triangle OQF; la première, parce que les deux bases PQ, QF, égales par la supposition, sont sur la même ligne, & que le sommet des deux triangles est au même point O; la seconde, parce que OQ est une base qui lui est commune avec le triangle OQF, & que les deux triangles OQp, OQF sont compris entre les mêmes parallèles OQ, Fp.

On voit par là, que les aires parcourues par les rayons vecteurs en des instants égaux, sont égales entr'elles, & que par conséquent l'aire totale comprise entre deux rayons vecteurs quelconques, croît comme le tems employé à la parcourir. Donc si l'on prend deux tems tels qu'on voudra, ils seront

SCD LYON 1

entr'eux, comme les espaces parcourus par les rayons vecteurs pendant ces tems.

Dans cette démonstration, nous avons supposé les instants égaux: mais la proposition se démontreroit aussi aisément quand on voudroit les supposer inégaux. Que le premier, par exemple, soit au second comme 1 est à m; on aura $PQ : QF :: 1 : m$: donc $OPQ : OQF :: 1 : m$; & parce que OQF vaut toujours OQp, on aura $OPQ : OQp :: 1 : m$; c'est-à-dire, que le premier & le second des espaces triangulaires décrits par les rayons vecteurs, seront comme le premier & le second des instants pendant lesquels il sont décrits.

Cette proposition, qui est la première loi de *Képler*, sera toujours vraie, pourvu qu'il n'y ait qu'un centre des forces, & qu'aucune cause étrangère n'altère le mouvement du mobile dans une direction différente de celle du rayon vecteur.

CCIX.

Corollaire I. Il ne faut pas conclure de cette proposition, que quand deux mobiles décrivent des courbes différentes, les espaces parcourus par les rayons vecteurs dans l'une & dans l'autre, soient entr'eux comme les tems employés à les parcourir. *Si l'on prend deux points quelconques dans les deux courbes dont nous parlons, les espaces décrits par les rayons vecteurs, seront en raison composée*

SCD LYON 1

des vîtesses qu'ont les mobiles dans ces points, des rayons vecteurs menés à ces points, des sinus des angles que font ces rayons vecteurs avec les courbes, & des tems pendant lesquels on considère les mouvements.

Soit le mobile M (*Fig.* 101.) qui pendant un instant T parcoure avec une vîtesse g l'arc infiniment petit Mm, qui égalera gT, parce que l'espace parcouru est égal à la vîtesse multipliée par le tems. Soit un autre mobile M', qui dans l'instant T' décrive avec une vîtesse g' l'arc $M'm'$, dont la valeur sera $g'T'$. Des centres des forces O, O', soient menés les rayons vecteurs OM, $O'M'$, que j'appelle respectivement r, r', qui fassent avec les courbes des angles hMm, $h'M'm'$, dont les sinus soient supposés respectivement s, s'. Si l'on tire les autres rayons vecteurs infiniment proches Om, $O'm'$ avec lesquels des points O & O' comme centres, on décrive les arcs mh, $m'h'$ qui tomberont perpendiculairement sur OM & $O'M'$, & que l'on pourra considérer comme des lignes droites, parce qu'ils seront infiniment petits; je dis que l'espace OMm parcouru par des rayons vecteurs dans la première courbe, sera à l'espace $O'M'm'$ parcouru par les rayons vecteurs dans la seconde, comme $grsT$ est à $g'r's'T'$.

En effet, dans le triangle Mmh on a, le sinus de l'angle droit est au côté opposé Mm, comme le

SCD LYON 1

sinus de l'angle mMh est au côté mh; ou en supposant le sinus total $= 1$, on a, $1 : gT :: s : mh = gsT$. On trouve par la même raison $m'h' = g's'T'$. Or les surfaces des triangles étant comme les produits des bases par les hauteurs, le triangle OMm est au triangle $O'M'm'$, comme $OM \times mh$ est à $O'M' \times m'h'$, c'est-à-dire, comme $grsT$ est à $g'r's'T'$.

Mais si au lieu de considérer le corps M en mouvement pendant un instant, on le considère pendant 2, 3, 4, &c. instants, le second antécédent $grsT$ de cette proportion deviendra double, triple, quadruple, &c.; & par le théorème précédent (*Num.* CCVIII.), l'espace parcouru par les rayons vecteurs, deviendra aussi double, triple, quadruple, &c. Donc le premier antécédent croissant comme le second, la proportion aura toujours lieu. On peut raisonner de même par rapport au mobile M', & conclure que si deux mobiles décrivent des courbes différentes, les espaces parcourus par les rayons vecteurs sont en raison composée des vîtesses qu'ont les mobiles dans deux points déterminés de ces courbes, des rayons vecteurs menés à ces points, des sinus des angles que font ces rayons vecteurs avec les courbes, & des tems pendant lesquels on considère les mouvements.

CCX.

COROLLAIRE I. Si l'on appelle E l'espace par-

SCD LYON 1

couru par les rayons vecteurs dans la première courbe, & E' l'espace parcouru par les rayons vecteurs dans la seconde, le corollaire précédent sera exprimé par la proportion $E : E' :: grsT : g'r's'T'$; de laquelle ou tire $T : T' :: \frac{E}{grsT} : \frac{E'}{g'r's'T'}$, en divisant les antécédents par grs & les conséquents par $g'r's'$.

CCXI.

THÉORÈME II. *Dans toute trajectoire les espaces parcourus pendant des tems très-petits, en vertu de la force centripète, sont comme les quarrés de ces tems.*

Car la force centripète agissant continuellement, & son action ne variant qu'infiniment peu pendant un tems infiniment petit, on doit la regarder pendant ce tems comme une force accélératrice constante. Donc elle fera parcourir au mobile, des espaces proportionnels aux quarrés des tems.

On peut aussi démontrer cette proposition d'une autre manière, en considérant la trajectoire ZMX parcourue par le mobile M (*Fig.* 102.). Par les trois points consécutifs M, n, m, de cette trajectoire, imaginons le cercle osculateur MVB, dont le diamètre est MB. Du centre des forces O, menons les rayons vecteurs OM, On, Om, & prolongeons ces deux derniers jusqu'à la rencontre de la tangente MT en r & R. Il est évident que nr,

SCD LYON 1

mR, seront les espaces parcourus en vertu de la force centripète, pendant les tems infiniment petits que le mobile emploie à parcourir les arcs Mn, Mm. Or en appelant ces tems respectivement t & T, je dis qu'on aura $nr : mR :: t^2 : T^2$. Car si des points n & m on abaisse sur le diamètre les perpendiculaires na, mb, & sur la tangente les perpendiculaires ns, mS, on aura deux triangles nsr, mSR, rectangles en s & S, & dont les angles en r & R seront égaux, puisque les lignes Or, OR qui passent par des points contigus n, m, doivent former avec la tangente des angles dont la différence soit infiniment petite. Donc les côtés nr, mR sont entr'eux comme les perpendiculaires ns, mS, ou comme les parties Ma, Mb du diamètre qui sont égales à ces perpendiculaires. Or on démontre en Géométrie, que les parties Ma, Mb, sont entr'elles comme les quarrés des cordes qu'on mèneroit de M aux points n & m, & par conséquent comme les quarrés des arcs Mn, Mm, qui se confondent ici avec ces cordes. Donc les espaces nr, mR sont comme les quarrés des arcs Mn, Mm. De plus, la vîtesse du mobile ne changeant qu'infiniment peu, de M en m, les arcs Mn, Mm sont comme les tems t & T employés à les parcourir. Donc $\overline{Mn}^2 : \overline{Mm}^2 :: t^2 : T^2$; d'où il suit que $nr : mR :: t^2 : T^2$.

CCXII.

COROLLAIRE I. *Que le mobile* M (Fig. 103.) *parcourant la trajectoire* ZMX, *ait en* M *une force centripète* F, *dont on considère l'action pendant l'instant* T. *Que le mobile* M′ *parcourant la courbe* Z′M′X′, *ait en* M′ *une force centripète* F′, *dont on considère aussi l'action pendant un instant* T′. *Les espaces* mR, m′R′ *parcourus vers les centres de mouvement* O & O′, *en vertu de ces forces centripètes, seront entr'eux en raison composée de ces forces & des quarrés des tems; c'est-à-dire, qu'on aura la proportion* $mR : m'R' :: FT^2 : F'T'^2$.

En effet, nous venons de voir dans le théorème II, que les espaces mR, $m'R'$, sont, toutes choses d'ailleurs égales, comme les quarrés des tems pendant lesquels on considère l'action des forces centripètes F & F'. Ils sont aussi proportionnels à ces forces : car, en supposant que tout soit d'ailleurs égal, plus une force centripète sera grande, plus elle retirera le mobile vers le point central. Donc les espaces mR, $m'R'$, sont proportionnels & aux forces centripètes & aux quarrés des tems pendant lesquels on considère leur action; ce qui donne $mR : m'R' :: FT^2 : F'T'^2$, ou $FT^2 : F'T'^2 :: mR : m'R'$.

CCXIII.

COROLLAIRE II. On ne détruira pas cette pro-

SCD LYON 1

portion, en divisant les deux antécédents par T^2, & les deux conséquents par T'^2; ce qui donnera $F : F' :: \frac{mR}{T^2} : \frac{m'R'}{T'^2}$.

CCXV.

COROLLAIRE III. On a vu (*Num.* CCX.) que $T : T' :: \frac{E}{grs} : \frac{E'}{g'r's'}$, & dans cette proportion E & E' expriment les espaces parcourus par les rayons vecteurs dans les deux courbes que l'on considère (*Fig.* 103.). Ayant mené des rayons vecteurs aux points contigus M, m, M', m', si l'on abaisse les petits arcs perpendiculaires mh, $m'h'$, on aura $E : E' :: \frac{OM \times mh}{2} : \frac{O'M' \times m'h'}{2}$ $:: OM \times mh : O'M' \times m'h'$; ou en prenant au lieu des triangles OMm, $O'M'm'$, les deux triangles ORM, $O'R'M'$ qui ne diffèrent des premiers que des espaces infiniment plus petits MmR, $M'm'R'$ qu'on doit négliger, on aura $E : E' :: RM \times OP : R'M' \times O'P'$. (Les lignes OP, $O'P'$ sont des lignes que je suppose tirées du centre des forces perpendiculairement sur les tangentes). Donc en mettant au lieu du rapport de E à E' un des précédents qui lui sont égaux, on aura

$$T : T' :: \frac{OM \times mh}{grs} : \frac{O'M' \times m'h'}{g'r's'}$$

SCD LYON 1

& $T : T' :: \frac{RM \times OP}{grs} . \frac{R'M' \times O'P'}{g'r's'}$.

Donc $T^2 : T'^2 :: \frac{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2}{g^2r^2s^2} . \frac{\overline{O'M'}^2 \times \overline{m'h'}^2}{g'^2r'^2s'^2}$

$:: \frac{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2}{g^2r^2s^2} . \frac{\overline{R'M'}^2 \times \overline{O'P'}^2}{g'^2r'^2s'^2}$.

Que l'on mette à préſent dans la proportion du corollaire précédent, au lieu du rapport de T^2 à T'^2, ces deux dernières raiſons qui lui ſont égales, on aura les deux analogies ſuivantes,

$$F : F' :: \frac{g^2r^2s^2 \times mR}{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2} . \frac{g'^2r'^2s'^2 \times m'R'}{\overline{O'M'}^2 \times \overline{m'h'}^2};$$

$$F : F' :: \frac{g^2r^2s^2 \times mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} . \frac{g'^2r'^2s'^2 \times m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{O'P'}^2}.$$

CCXV.

COROLLAIRE IV. Soit G le point où le rayon vecteur, mené au point m, rencontre le cercle oſculateur. On démontre en Géométrie, que la tangente MR eſt moyenne proportionnelle entre la ſécante RG, & ſa partie extérieure mR. Donc $mR : RM :: RM : RG$, & par conſéquent $mR = \frac{\overline{RM}^2}{RG}$. Au lieu du diviſeur RG, on peut mettre mG, qui n'en diffère que de la quantité infiniment petite mR, & le quotient ou la valeur de mR ne chan-

SCD LYON 1

gera pas d'une quantité à laquelle on doive avoir égard. Par la même raiſon, au lieu de diviſer par mG, on peut ſe ſervir de MV, parce que des cordes terminées à des points contigus ne diffèrent pas d'une quantité finie. (Le point V eſt l'interſection du cercle oſculateur & du rayon vecteur mené en M). Donc $mR = \frac{\overline{RM}^2}{MV}$. En prenant dans la ſeconde courbe les points G' & V' où le cercle oſculateur eſt rencontré par les rayons vecteurs tirés aux points m' & M', on trouvera de même $m'R' = \frac{\overline{R'M'}^2}{M'V'}$; & ſubſtituant ces valeurs de mR, $m'R'$ dans la dernière proportion du corollaire précédent, elle deviendra

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 s^2}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{g'^2 r'^2 s'^2}{\overline{O'P'}^2 \times M'V'}.$$

CCXVI.

COROLLAIRE V. Si du point V on mène la corde VB à l'extrémité du diamètre de courbure MB, les deux triangles MVB, MOP ſeront ſemblables. Car l'angle MVB appuyé ſur le diamètre eſt droit, ainſi que OPM, & les angles VMB, MOP ſont alternes internes. Donc $OM : OP :: MB : MV = \frac{OP \times MB}{OM} = \frac{OP \times 2MC}{OM}$. On

SCD LYON 1

trouvera de même que $M'V' = \frac{O'P' \times 2M'C'}{O'M'}$; & ſubſtituant ces valeurs au lieu de MV & de $M'V'$ dans la proportion du corollaire précédent, on aura

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 s^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times 2MC} : \frac{g'^2 r'^2 s'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times 2M'C'}.$$

Ou plus ſimplement,

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 s^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{g'^2 r'^2 s'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'}.$$

CCXVII.

COROLLAIRE VI. Si les rayons vecteurs, que nous avons appelés r, r' ſont perpendiculaires l'un & l'autre à la courbe, les ſinus s & s' ſeront égaux, & l'on pourra les ſupprimer dans les ſecondes raiſons des proportions que nous avons trouvées juſqu'à préſent. Ces proportions ſe réduiront ainſi aux ſuivantes:

$$E : E' :: grT : g'r'T'.$$

$$T : T' :: \frac{E}{gr} : \frac{E'}{g'r'}.$$

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times mR}{\overline{OM}^2 \times mh} : \frac{g'^2 r'^2 \times m'R'}{\overline{O'M'}^2 \times m'h'}.$$

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} : \frac{g'^2 r'^2 \times m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{O'P'}^2}.$$

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'P'}^2 \times M'V'}.$$

F : F'

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{g'^2 r'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'}.$$

CCXVIII.

COROLLAIRE VII. Comme toutes les proportions des corollaires précédents ont lieu en quelque point que l'on ſuppoſe le centre des forces pour chaque courbe, elles ſubſiſteront également, ſi l'on ſuppoſe que les points O & O' ſoient placés l'un ſur l'autre, de manière que les mobiles qui parcourent les deux trajectoires, aient un centre commun de mouvement.

CCXIX.

COROLLAIRE VIII. Comme les proportions dont il s'agit, ſubſiſtent quelles que ſoient les trajectoires, & quelque poſition qu'on leur donne, elles auront encore lieu, ſi l'on ſuppoſe que les deux trajectoires qui ont le même centre des forces, ſoient égales & placées l'une ſur l'autre, en ſorte qu'elles n'en faſſent qu'une. On peut donc dire que le rapport des forces centripètes de deux mobiles qui décriroient la même trajectoire, ſeroit exprimé par les proportions des numéros CCXIII, CCXIV, CCXV, CCXVI. Comme on peut alors ſuppoſer $r = r'$, $s = s'$, on aura $r^2 s^2 = r'^2 s'^2$; & l'on pourra diviſer les deux termes des ſecondes raiſons par $r^2 s^2$. Si l'on ſuppoſe de plus, que les forces cen-

SCD LYON 1

tripètes des deux mobiles soient égales dans les mêmes points de la courbe, on aura $g = g'$, parce qu'il est évident que si les forces centripètes F & F' étoient les mêmes à l'extrémité du rayon déterminé r, & qu'en même tems les vîtesses g, g' fussent inégales, il ne seroit pas possible que les mobiles décrivissent la même courbe. On voit donc, qu'en supposant $g = g'$, on pourra aussi diviser les termes des secondes raisons par g, ce qui donnera (*Fig.* 104.),

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2} : \frac{m'R'}{\overline{OM'}^2 \times \overline{m'h'}^2},$$

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} : \frac{m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{OP'}^2},$$

$$F : F' :: \frac{1}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{1}{\overline{OP'}^2 \times M'V'},$$

$$F : F' :: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times M'C'}.$$

Ces proportions donnent aussi le rapport des forces centripètes d'un seul mobile considéré dans deux points quelconques de la trajectoire qu'il décrit. Car il est évident que ce mobile passant aux deux points M, M' est exactement soumis aux mêmes forces qui solliciteroient deux mobiles mus dans la même trajectoire, & qui seroient l'un en M, l'autre en M', dans la supposition qu'on ait $grs = g'r's'$.

SCD LYON 1

CCXX.

REMARQUE I. On peut auſſi démontrer directement, que les proportions du corollaire précédent expriment le rapport des forces centripètes F, F', auxquelles eſt ſoumis un mobile dans deux points quelconques, M, M' de ſa trajectoire (*Fig.* 104), en s'y prenant de la manière ſuivante.

Ayant pris les arcs infiniment petits $Mm, M'm'$ décrits pendant les inſtants T, T', menons du centre des forces O les rayons vecteurs OM, OM', Om, Om' dont les directions coupent les cercles oſculateurs aux points V, V', G, G'. Des points m & m' abaiſſons ſur OM & OM' les perpendiculaires $mh, m'h'$. Prolongeons Om, Om' juſqu'aux points R, R' des tangentes menées aux points M, M', & tirons ſur ces tangentes les perpendiculaires OP, OP'. Enfin ſoient C & C' les centres des cercles oſculateurs pour les points M & M', MB & $M'B'$ les diamètres de courbure, VB & $V'B'$ les cordes menées des points V & V' aux extrémités de ces diamètres.

1° On aura (*Num.* CCXII.), $mR : m'R' :: FT^2 : F'T'^2$: d'où l'on tirera

$$F : F' :: \frac{mR}{T^2} : \frac{m'R'}{T'^2}.$$

2° Dans la trajectoire dont il s'agit, les eſpaces parcourus par les rayons vecteurs ſont comme les tems employés à les parcourir (*Num.* CCVIII):

donc $T : T' :: \frac{OM \times mh}{2} : \frac{OM' \times m'h'}{2}$

$:: \frac{RM \times OP}{2} : \frac{R'M' \times OP'}{2}$; d'où l'on tirera

$T^2 : T'^2 :: \overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2 : \overline{OM'}^2 \times \overline{m'h'}^2$

$:: \overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2 : \overline{R'M'}^2 \times \overline{OP'}^2$. Substituant l'une de ces deux dernières raisons, au lieu de celle de T^2 à T'^2, dans la proportion $F : F' :: \frac{mR}{T^2} : \frac{m'R'}{T'^2}$, on aura

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{OM}^2 \times \overline{mh}^2} : \frac{m'R'}{\overline{OM'}^2 \times \overline{m'h'}^2},$$

$$F : F' :: \frac{mR}{\overline{RM}^2 \times \overline{OP}^2} : \frac{m'R'}{\overline{R'M'}^2 \times \overline{OP'}^2},$$

3° Dans la dernière de ces proportions, au lieu de mR & de $m'R'$, on pourra mettre $\overline{RM}^2, \overline{R'M'}^2$, & l'on aura

$$F : F' :: \frac{1}{\overline{OP}^2 \times MV} : \frac{1}{\overline{OP'}^2 \times M'V'},$$

4° Enfin, au lieu de MV & de $M'V'$, on pourra substituer $\frac{OP \times 2MC}{OM}$, $\frac{OP' \times 2M'C'}{OM'}$, & l'on aura $F : F' :: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times 2MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times 2M'C}$

$:: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times M'C}$.

SCD LYON 1

CCXXI.

REMARQUE II. Il eſt eſſentiel d'obſerver qu'en comparant juſqu'ici les forces F & F', nous avons déſigné par ces quantités les forces centripètes qui ſollicitent chaque molécule élémentaire des corps M & M', priſe en particulier. Afin d'éviter toute confuſion, on pourra nommer ces forces F & F' *les forces centripètes ſimples* des mobiles, & donner le nom de *force centripète totale* ou *abſolue* à la réſultante des forces centripètes ſimples, qui agiſſent ſur tous les éléments dont un corps eſt compoſé. Pour déterminer généralement cette réſultante, il faut avoir recours au calcul intégral, quoiqu'on puiſſe la trouver plus ſimplement dans certains cas particuliers. Si, par exemple, on ſuppoſe que les forces centripètes ſimples du mobile M ſoient toutes égales & ſenſiblement parallèles, il eſt évident qu'on aura, à très-peu près, leur réſultante ou la force centripète totale, en répétant F autant de fois qu'il y a de molécules dans la maſſe entière M, c'eſt-à-dire, en multipliant F par M.

On aura de même la force centripète totale du mobile M' en multipliant F' par M'; & le rapport de ces forces centripètes totales, ſera exprimé par la proportion, $F \times M : F' \times M'$ :: $\frac{g^2 r^2 \times OM \times M}{\overline{OP}^3 \times MC}$: $\frac{g'^2 r'^2 \times O'M' \times M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'}$.

SCD LYON 1

Car la proportion trouvée (*Num.* CCXVI.) subsiste, si l'on multiplie les deux antécédents par M & les deux conséquents par M'.

CCXXII.

THÉORÈME III. *Les vîtesses d'un mobile dans différents points de sa trajectoire, sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées du centre des forces sur les tangentes des points où l'on suppose ce mobile.*

Pour le démontrer, prenons deux arcs infiniment petits Mm, $M'm'$ dans la trajectoire décrite par le mobile (*Fig.* 105.), & supposons que ces arcs soient parcourus dans le même tems. Ayant mené du centre des forces O des rayons vecteurs aux extrémités de ces arcs, & abaissé les perpendiculaires OP & OP' sur leurs tangentes, nous aurons le triangle OMm égal au triangle $OM'm'$, c'est-à-dire, $\frac{Mm \times OP}{2} = \frac{M'm' \times OP'}{2}$, & nous tirerons de cette égalité $Mm : M'm' :: OP' : OP$. Or les vîtesses du mobile aux points M & M', sont comme les espaces Mm, $M'm'$ parcourus dans le même tems. Donc, en nommant ces vîtesses V & V', nous aurons $V : V' :: OP' : OP$, ou $V : V' :: \frac{1}{OP} : \frac{1}{OP'}$.

CCXXIII.

THÉORÈME IV. *Les vîtesses de deux mobiles*

SCD LYON 1

qui décrivent des trajectoires différentes, sont toujours en raison directe des vîtesses qu'ils ont dans deux points déterminés de ces trajectoires, des rayons vecteurs menés à ces points, des sinus des angles que font ces rayons avec les courbes, & en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur les tangentes des points où l'on suppose les mobiles.

En effet, que les mobiles M & M' (*Fig.* 103.) décrivent pendant le même tems les arcs infiniment petits Mm, $M'm'$ de leurs courbes. Des centres des forces O & O', ayant mené des rayons vecteurs aux extrémités de ces arcs, & abaissé sur les tangentes des mêmes arcs les perpendiculaires OP & $O'P'$, nous aurons (*Num.* CCIX.) $OMm : O'M'm' :: grsT : g'r's'T' :: grs : g'r's'$, parce qu'on suppose $T = T'$. Or les triangles OMm, $O'M'm'$ sont comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. Donc $Mm \times OP : M'm' \times O'P' :: grs : g'r's'$; ou divisant les deux antécédents par OP & les deux conséquents par $O'P'$, $Mm : M'm' :: \frac{grs}{OP} : \frac{g'r's'}{O'P'}$. Au lieu du rapport de Mm à $M'm'$ on peut mettre celui des vîtesses qui lui est égal. Donc en appelant respectivement V & V' ces vîtesses, nous aurons la proportion qu'il falloit démontrer, $V : V' :: \frac{grs}{OP} : \frac{g'r's'}{O'P'}$.

Si $s = s'$, il est évident qu'on aura $V : V' :: \frac{gr}{OP} : \frac{g'r'}{O'P'}$.

Du Mouvement dans les Sections coniques.

LES courbes que l'on désigne par le nom de *Sections coniques*, sont *la parabole*, *l'ellipse* & *l'hyperbole*. On les appelle Sections coniques, parce que ce sont les courbes que l'on peut former sur la surface d'un cône en le coupant par des plans.

La parabole est une courbe ZAN (*Fig.* 106.) dont chaque point M est également éloigné d'un point fixe O qu'on appelle *foyer*, & d'une ligne droite LG aussi fixe, qu'on appelle la *directrice*. La ligne AX qui passe par le foyer, & qui prolongée tomberoit perpendiculairement sur la directrice, est l'axe de la parabole.

L'ellipse (*Fig.* 107.) est une courbe telle que la somme des deux distances MO, Mo, de chacun de ses points à deux points fixes O, o qu'on appelle *foyers*, est toujours égale à une même ligne. La droite AB qui passe par les deux foyers, & qui aboutit à deux points opposés de la courbe, est le *grand axe* ou *l'axe principal*. Le point X pris dans cette ligne à égale distance des deux foyers, est le centre de l'ellipse. Le *petit axe* est une droite DE tirée par le centre perpendiculairement au

SCD LYON 1

grand axe, & prolongée jusqu'aux points opposés de l'ellipse.

L'hyperbole (*Fig* 108.) est une courbe *ZAN*, telle que la différence des lignes *Mo*, *MO* tirées de chacun de ses points *M* aux points fixes *o* & *O*, qu'on appelle aussi *foyers*, soit toujours égale à la même ligne *AB*, qu'on nomme le *grand axe*. La ligne *AX* qui passe par l'un des foyers *O*, & qui prolongée passeroit par l'autre *o*, est ce que nous appellerons l'*axe de l'hyperbole*.

Dans toute Section conique, on appelle *paramètre* la droite *NS* menée par le foyer perpendiculairement à l'axe, & prolongée de part & d'autre jusqu'à la rencontre de la courbe.

On voit par la définition de l'ellipse, & par celle que nous venons de donner du paramètre, que si les foyers *O* & *o* (*Fig.* 107.) se rapprochoient de plus en plus jusqu'à se confondre en un seul point, l'ellipse deviendroit un cercle; de manière que le cercle n'est dans le fond qu'une ellipse dont les foyers tombent l'un sur l'autre, & dans laquelle le paramètre se confond avec le diamètre.

Le point *A* où l'axe rencontre la parabole & l'hyperbole (*Fig.* 106 & 108.), s'appelle *l'origine* ou *le sommet* de la courbe. Dans l'ellipse, nous supposerons aussi l'origine à l'une des extrémités du grand axe. Quand un mobile décrit une ellipse, & que le centre des forces est placé à l'un des foyers *O*,

SCD LYON 1

on donne le nom d'*apside inférieure*, à l'extrémité *A* de l'axe, qui est la plus proche de ce foyer; & l'on appelle *apside supérieure*, l'autre extrémité *B* de cet axe, qui est la plus éloignée du même foyer. Enfin on dit que le mobile est à sa plus petite, ou à sa plus grande, ou à sa moyenne distance, suivant qu'il se trouve à l'apside inférieure, ou à l'apside supérieure, ou à l'une des extrémités du petit axe.

Quand il s'agit du mouvement des Planètes & des Comètes, qui décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des foyers, l'apside supérieure s'appelle aussi l'*aphélie*, & l'apside inférieure le *périhélie*.

CCXXV.

POUR comprendre la théorie que nous allons exposer, on peut partir des propositions suivantes, comme d'autant de vérités démontrées dans les ouvrages de Géométrie, où l'on traite des Sections coniques.

1° *Dans l'ellipse, les rayons vecteurs croissent continuellement dès l'apside inférieure* A (Fig. 107.) *jusqu'à l'apside supérieure* B. *De même ces rayons croissent de plus en plus dans la parabole & dans l'hyperbole* (Fig. 106 & 108.), *à mesure que l'arc* A M *décrit par le mobile, devient plus grand.*

2° *Dans les trois sections coniques, l'axe est perpendiculaire à l'origine de la courbe.*

SCD LYON 1

3° *Dans toute section conique, si du point* H *où la normale rencontre l'axe, on abaisse une perpendiculaire* HR *sur le rayon vecteur* OM, *le segment* MR *est toujours égal au demi-paramètre.*

4° *Le rayon de courbure dans un point quelconque d'une section conique, est toujours égal à quatre fois le cube de la normale divisé par le quarré du paramètre.*

5° *Le foyer & trois points d'une section conique étant donnés, sa position est déterminée.*

6° *Dans la parabole, la distance du foyer à l'origine* A *est égale au quart du paramètre : dans l'ellipse, cette distance vaut plus que le quart, & dans l'hyperbole, moins que le quart du paramètre.*

7° *Dans l'ellipse, la somme des distances d'un point quelconque* M *aux deux foyers, est égale au grand axe : d'où il suit que la distance du foyer à l'une des extrémités du petit axe, est toujours égale à la moitié du grand axe.*

8° *Dans une ellipse, les tangentes menées par les extrémités du petit axe, sont parallèles à l'axe principal.*

9° *Dans l'ellipse, le paramètre est une troisième proportionnelle au grand & au petit axe : ainsi il est égal au quarré du petit axe, divisé par l'axe principal.*

10° *Si l'on compare les surfaces de deux ellipses,*

SCD LYON 1

on aura toujours cette proportion : La surface de la première est à la surface de la seconde, comme le produit des deux axes de la première est au produit des deux axes de la seconde.

11° *En nommant* p *le paramètre d'une section conique,* x *une abcisse quelconque comptée dès l'origine de la courbe,* y *l'ordonnée correspondante,* 2a *le grand axe, s'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole ; la nature de la parabole sera exprimée par l'équation* $y^2 = px$, *celle de l'ellipse par l'équation* $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, *& celle de l'hyperbole par* $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$.

12° *Les mêmes lignes étant désignées par les mêmes lettres, la sous-normale vaudra* $\frac{1}{2}p$ *dans la parabole,* $\frac{1}{2}p - \frac{px}{2a}$ *dans l'ellipse, &* $\frac{1}{2}p + \frac{px}{2a}$ *dans l'hyperbole. Ainsi dans la parabole, elle sera égale au demi-paramètre, dans l'ellipse elle sera moindre, & dans l'hyperbole plus grande que le demi-paramètre.*

CCXXVI.

THÉORÈME I. *Si un mobile décrit une section conique, dans laquelle on suppose que le foyer soit le centre du mouvement, les forces centripètes dans les différents points de la courbe, seront en raison inverse des quarrés des rayons vecteurs.*

SCD LYON 1

En effet, soit une section conique MAM' (*Fig.* 109.) dont le foyer soit O. Menons les rayons vecteurs OM, OM' à deux points quelconques où l'on suppose les mobiles; & abaissons les perpendiculaires OP, OP' sur les tangentes tirées à ces points. Soient MC, $M'C'$ les rayons de courbure; MH, $M'H'$ les normales; HR, $H'R'$ les perpendiculaires menées des points H & H' sur les rayons vecteurs. En nommant p le paramètre, nous aurons $\frac{1}{2}p = MR = M'R'$, $MC = \frac{4\overline{MH}^3}{p^2}$, $M'C' = \frac{4\overline{M'H'}^3}{p^2}$.

Cela posé, les triangles OMP, MHR sont semblables, parce qu'ils ont des angles droits en P & en R, & que de plus les angles POM, OMH sont alternes internes. Donc $OM : MH :: OP : MR = \frac{1}{2}p$; d'où l'on tire $OP = \frac{OM \times p}{2MH}$, & $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{OM}^3 \times p^2}{8\overline{MH}^3}$. On trouve de même $\overline{OP'}^3 = \frac{\overline{OM'}^3 \times p^3}{8\overline{M'H'}^3}$. Or nous avons vu (*Num.* CCXX.), que le rapport des forces centripètes F & F' qui sollicitent le mobile en deux points M & M' d'une même courbe, est exprimé par la proportion

SCD LYON 1

$F : F' :: \frac{OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{OM'}{\overline{OP'}^3 \times M'C'}$, dans laquelle nous pouvons substituer les valeurs de $\overline{OP}^3$ & de $\overline{OP'}^3$ que nous venons de trouver, & nous aurons

$F : F' :: \frac{OM \times 8\overline{MH}^3}{\overline{OM}^3 \times MC \times p^3} : \frac{OM' \times 8\overline{M'H'}^3}{\overline{OM'}^3 \times M'C' \times p^3}$,

ou $F : F' :: \frac{\overline{MH}^3}{\overline{OM}^2 \times MC} : \frac{\overline{M'H'}^3}{\overline{OM'}^2 \times M'C'}$. Substituant encore dans celle-ci $\frac{4\overline{MH}^3}{p^2}$ au lieu de MC, & $\frac{4\overline{M'H'}^3}{p^2}$ au lieu de $M'C'$, elle deviendra

$F : F' :: \frac{\overline{MH}^3 \times p^2}{\overline{OM}^2 \times 4\overline{MH}^3} : \frac{\overline{M'H'}^3 \times p^2}{\overline{OM'}^2 \times 4\overline{M'H'}^3}$, d'où l'on tire $F : F' :: \frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{OM'}^2}$. Or les fractions $\frac{1}{\overline{OM}^2}$, $\frac{1}{\overline{OM'}^2}$, qui ont le même numérateur, sont en raison inverse de leurs dénominateurs; donc les forces F & F' qui sont proportionnelles à ces fractions, sont aussi en raison inverse de leurs dénominateurs $\overline{OM}^2$, $\overline{OM'}^2$; c'est-à-dire, que ces

SCD LYON 1

forces ſont en raiſon inverſe des quarrés des rayons vecteurs.

CCXXVII.

THÉORÈME II. *Réciproquement, ſi les forces centripètes ſont en raiſon inverſe des quarrés des rayons vecteurs, la courbe décrite par le mobile ſera une ſection conique.*

Pour le démontrer, ſuppoſons que le point O (*Fig.* 110.) ſoit le centre des forces, & concevons la courbe que le mobile décrira, comme diviſée en une infinité d'éléments parcourus dans des tems égaux & infiniment petits. Prenons deux de ces éléments IL, LM qui ſoient contigus, & par les trois points I, L, M, faiſons paſſer une ſection conique MAM' dont le foyer ſoit O: je dis qu'elle ſera néceſſairement la courbe décrite.

En effet, ſoit prolongé l'élément LM juſqu'en t, de manière qu'on ait $Mt = LM$. Que F ſoit la force centripète en L, & F' la force centripète en M. Dans le cas où le mobile décriroit la ſection conique MAM', le troiſième élément Mm ſeroit décrit en vertu d'une force de projection repréſentée par Mt, & de la force centripète F'. Or, quelle que puiſſe être la nature de la courbe que le mobile décrira, il eſt viſible que le troiſième élément ſera pareillement décrit en vertu des mêmes forces Mt & F', pourvu que les forces centripètes

SCD LYON 1

soient en raison inverse des quarrés des rayons vecteurs. Donc ce troisième élément ne pourra être autre chose que l'élément de la section conique. On démontrera de même, que tous les éléments suivants de la courbe décrite par le mobile, doivent se confondre avec ceux de la section conique MAM'. Donc il décrira cette section conique, si les forces centripètes sont en raison inverse des quarrés des distances.

J'ai dit que la force centripète F' au point M étoit la même dans le cas où l'on suppose que le mobile décrive une section conique, & dans celui où l'on suppose seulement que les forces centripètes soient en raison inverse des quarrés des rayons vecteurs. Cela est évident, puisque dans l'un & l'autre cas on a $F : F' :: \frac{1}{OL^2} : \frac{1}{OM^2}$; proportion dont le premier, le troisième & le quatrième terme sont les mêmes, soit que le mobile décrive une section conique, soit qu'on suppose seulement les forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des rayons vecteurs. Donc F' sera la même force dans l'un & l'autre cas.

CCXXVIII.

THÉORÈME III. *Quand deux mobiles parcourent des sections coniques différentes, dont ils ont les foyers pour centres de mouvement, les forces centripètes*

SCD LYON 1

centripètes qui les portent vers ces foyers, ſont en raiſon directe des quarrés des rayons vecteurs menés aux ſommets des courbes, des quarrés des vîteſſes qu'ont les mobiles en paſſant par ces ſommets, & en raiſon inverſe des paramètres multipliés par les quarrés des rayons vecteurs menés aux points où l'on conſidère les deux mobiles.

Pour démontrer cette propoſition, ſoient MAZ, $M'A'Z'$ (*Fig.* 111.) les deux ſections coniques décrites par les mobiles; O & O' leurs foyers; p & p' leurs paramètres; OM & $O'M'$ des rayons vecteurs menés aux deux points quelconques M & M', où l'on ſuppoſe les mobiles; OP & $O'P'$ des perpendiculaires abaiſſées des foyers ſur les tangentes de ces points; MH & $M'H'$ les normales; MC & $M'C'$ les rayons de courbure pour les mêmes points. Nous aurons $MC = \frac{4\overline{MH}^3}{p^2}$, $M'C' = \frac{4\overline{M'H'}^3}{p'^2}$, & menant des points H & H' les perpendiculaires HR & $H'R'$ ſur les rayons vecteurs, les deux ſegments MR & $M'R'$ vaudront $\frac{1}{2}p$ & $\frac{1}{2}p'$. Cela poſé, on démontrera, comme dans le théorème I. (*Num.* CCXXVI.), que l'on a $\overline{OP}^3 = \frac{\overline{OM}^3 \times p^3}{8\overline{MH}^3}$, $\overline{O'P'}^3 = \frac{\overline{O'M'}^3 \times p'^3}{8\overline{M'H'}^3}$.

SCD LYON 1

Ensuite on employera la proportion démontrée (*Num.* CCXVII.),

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{g'^2 r'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'},$$

dans laquelle on voit que r & r' peuvent exprimer les rayons vecteurs menés aux sommets des courbes, g & g' désignant les vîtesses des mobiles passant par ces sommets. Si l'on substitue dans cette proportion les valeurs des quantités MC, $M'C'$, $\overline{OP}^3$, $\overline{O'P'}^3$, au lieu de ces quantités, on trouvera $F : F'$ $:: \frac{8 g^2 r^2 \times OM \times \overline{MH}^3 \times p^2}{4 \overline{OM}^3 \times \overline{MH}^3 \times p^3} : \frac{8 g'^2 r'^2 \times O'M' \times \overline{M'H'}^3 \times p'^2}{4 \overline{O'M'}^3 \times \overline{M'H'}^3 \times p'^3}$

Enfin effectuant les divisions indiquées, autant qu'il est possible de les effectuer, & divisant par 2, les termes de la seconde raison, on aura

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}.$$

Or les fractions sont en raison directe des numérateurs & en raison inverse des dénominateurs: donc les forces centripètes F & F' ont entr'elles le rapport énoncé dans le théorème.

CCXXIX.

COROLLAIRE I. *Si les forces centripètes* F & F' *qui portent les mobiles vers les foyers* O & O' (Fig. 111.), *sont en raison inverse des quarrés des*

SCD LYON 1

rayons vecteurs OM, O'M', *les produits des rayons vecteurs menés aux sommets des sections coniques par les vîtesses qu'ont les mobiles en passant par ces sommets, sont entr'eux comme les racines quarrées des paramètres; c'est-à-dire, qu'on aura* $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

En effet, si les forces centripètes des deux mobiles sont en raison inverse des quarrés de leurs rayons vecteurs, on aura $F : F' :: \frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{O'M'}^2}$. Or par le théorème que nous venons de démontrer, on a toujours $F : F' :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}$; donc les deux secondes raisons de ces proportions étant égales à celle de F à F', on doit avoir $\frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{O'M'}^2} :: \frac{g^2 r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2 r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}$; proportion qui, en multipliant les deux antécédents par $\overline{OM}^2$ & les deux conséquents par $\overline{O'M'}^2$, deviendra $1 : 1 :: \frac{g^2 r^2}{p} : \frac{g'^2 r'^2}{p'}$; & ici les deux termes de la première raison étant égaux, il faut que les deux termes de la seconde le soient pareillement, & que l'on ait $\frac{g^2 r^2}{p} = \frac{g'^2 r'^2}{p'}$, d'où l'on tire $g^2 r^2 : g'^2 r'^2 :: p : p'$; donc $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

SCD LYON 1

CCXXX.

COROLLAIRE II. *En supposant toujours que les forces centripètes des deux mobiles soient en raison inverse des quarrés de leurs rayons vecteurs, les espaces parcourus par ces rayons vecteurs dans le même tems, seront entr'eux comme les racines quarrées des paramètres.*

Car en appelant E l'espace parcouru par les rayons vecteurs dans la première section conique, & E' l'espace parcouru par les rayons vecteurs dans la seconde, on aura (*Num.* CCX.), $E : E' :: grsT : g'r's'T'$; & comme ici $T = T'$ & $s = s'$, on pourra diviser les deux termes de la seconde raison par ces quantités; ce qui donnera $E : E' :: gr : g'r'$. Or par le corollaire précédent $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$; donc $E : E' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

CCXXXI.

COROLLAIRE III. *Si les sections coniques décrites par les mobiles sont des ellipses, & que les forces centripètes de ces mobiles soient encore en raison inverse des quarrés de leurs rayons vecteurs, les tems des révolutions périodiques seront entr'eux comme les surfaces des ellipses divisées par les racines quarrées des paramètres.*

Soient, par exemple, les mobiles M & M' (*Fig.* 112.) qui parcourent les ellipses MAB, $M'A'B'$. Que le paramètre de la première soit p,

SCD LYON 1

& sa surface S; que le paramètre de la seconde soit p' & sa surface S'. Soit T le tems que M emploie à faire sa révolution; T' celui que M' emploie à faire la sienne: je dis que $T : T' :: \frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}}$.

En effet, nommons E l'espace que parcourent les rayons vecteurs du mobile M pendant un tems quelconque x, & E' l'espace parcouru par les rayons vecteurs du mobile M' pendant le même tems. Par la première loi de *Képler* (*Num.* CCVIII.), nous aurons les deux proportions suivantes,

$$T : x :: S : E,$$
$$x : T' :: E' : S'.$$

Je les multiplie l'une par l'autre, & j'ai $Tx : T'x :: SE' : SE$. Je divise les deux termes de la première raison par x, & les deux termes de la seconde par $E \times E'$, ce qui donne $T : T' :: \frac{S}{E} : \frac{S'}{E'}$. Or par le corollaire précédent $E : E' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$. Donc en mettant le rapport de $\sqrt{p}$ à $\sqrt{p'}$, au lieu de celui de E à E' qui lui est égal, (ce qu'on peut faire sans détruire la proportion), on aura $T : T' :: \frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}}$.

CCXXXII.

COROLLAIRE IV. *Les mobiles décrivant leurs ellipses suivant les mêmes conditions que dans le*

SCD LYON 1

corollaire précédent, les quarrés des tems périodiques sont proportionnels aux cubes des grands axes des ellipses, & par conséquent les mobiles se meuvent suivant la seconde loi de Képler.

Car soient AB & $A'B'$ (*Fig.* 112) les grands axes des ellipses décrites par les mobiles M & M'. Soient CD & $C'D'$ les petits axes des mêmes ellipses. Que S & S' signifient leurs surfaces, comme dans la proportion $T : T' :: \frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}}$, que nous venons de trouver (*Num.* CCXXXI.). Au lieu du rapport de S à S', on pourra mettre celui de $AB \times CD$ à $A'B' \times C'D'$, qui lui est égal, parce que les surfaces des ellipses sont entr'elles comme les produits de leurs axes. Donc on aura $T : T' :: \frac{AB \times CD}{\sqrt{p}} : \frac{A'B' \times C'D'}{\sqrt{p'}}$; & en élevant tous les termes au quarré, $T^2 : T'^2 :: \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{CD}^2}{p} : \frac{\overline{A'B'}^2 \times \overline{C'D'}^2}{p'}$. Il ne faut plus à présent que mettre au lieu de p sa valeur $\frac{\overline{CD}^2}{\overline{AB}^2}$, & au lieu de p' sa valeur $\frac{\overline{C'D'}^2}{\overline{A'B'}^2}$, & l'on aura enfin $T^2 : T'^2 :: \overline{AB}^3 : \overline{A'B'}^3$; c'est-à-dire, le quarré du tems périodique du mobile M est au quarré du tems périodique du mobile M', comme le cube du grand

SCD LYON 1

axe de l'ellipſe parcourue par le premier, eſt au cube du grand axe de l'ellipſe parcourue par le ſecond.

CCXXXIII.

COROLLAIRE V. *Réciproquement, ſi deux mobiles font leurs révolutions dans deux ellipſes, de manière que les quarrés des tems périodiques ſoient proportionnels aux cubes des grands axes; les forces centripètes qui les portent vers les foyers, ſont en raiſon inverſe des quarrés des diſtances à ces foyers, ou des quarrés des rayons vecteurs.*

Pour le démontrer, ſoient AB & $A'B'$ (*Fig.* 112.) les grands axes des ellipſes parcourues, CD & $C'D'$ les petits axes, O & O' les foyers, p & p' les paramètres, S & S' les ſurfaces des ellipſes, E & E' les eſpaces décrits par les rayons vecteurs dans le même tems x, F & F' les forces centripètes des mobiles M & M', enfin T & T' les tems périodiques. On aura les proportions ſuivantes:

1ere $T^2 : T'^2 :: \overline{AB}^2 \times AB : \overline{A'B'}^2 \times A'B'$.

2e $T^2 : T'^2 :: \dfrac{\overline{AB}^2 \times \overline{CD}^2}{p} : \dfrac{\overline{A'B'}^2 \times \overline{C'D'}^2}{p'}$,

3e $T : T' :: \dfrac{AB \times CD}{\sqrt{p}} : \dfrac{A'B' \times C'D'}{\sqrt{p'}}$,

4e $T : T' :: \dfrac{S}{\sqrt{p}} : \dfrac{S'}{\sqrt{p'}}$,

5e $T : x :: S : E$, d'où l'on tire $T = \dfrac{Sx}{E}$,

SCD LYON 1

6° $T' : x :: S' : E'$, d'où l'on tire $T' = \frac{S'x}{E'}$,

7° $T : T' :: \frac{Sx}{E} : \frac{S'x}{E'} :: \frac{S}{E} : \frac{S'}{E'}$,

8° $T : T' :: \frac{S}{gr} : \frac{S'}{g'r'}$,

9° $\frac{S}{\sqrt{p}} : \frac{S'}{\sqrt{p'}} :: \frac{S}{gr} : \frac{S'}{g'r'}$,

10° $\frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{p'}} :: \frac{1}{gr} : \frac{1}{g'r'}$,

11° $\frac{1}{p} : \frac{1}{p'} :: \frac{1}{g^2r^2} : \frac{1}{g'^2r'^2}$,

12° $1 : 1 :: \frac{p}{g^2r^2} : \frac{p}{g'^2r'^2}$

13° $F : F' :: \frac{g^2r^2}{\overline{OM}^2 \times p} : \frac{g'^2r'^2}{\overline{O'M'}^2 \times p'}$

14° $F : F :: \frac{1}{\overline{OM}^2} : \frac{1}{\overline{O'M'}^2}$

On a la première proportion, par l'hypothèse.

On a la seconde, parce que le grand axe étant au petit comme celui-ci est au paramètre, le grand axe est égal au quarré du petit divisé par le paramètre.

On a la troisième, parce que si quatre grandeurs sont proportionnelles, leurs racines quarrées le sont aussi.

On a la quatrième, parce que les surfaces des ellipses sont entr'elles, comme les produits des

SCD LYON 1

grands axes multipliés par les petits. On peut donc ſubſtituer le rapport des ſurfaces à celui des produits des axes.

On a la cinquième, parce que ſuivant la première loi de Képler, le tems périodique T eſt au tems x, comme la ſurface totale S parcourue par les rayons vecteurs dans le tems T, eſt à la ſurface E parcourue par les mêmes rayons vecteurs dans le tems x.

On a la ſixième, par la même raiſon.

On a la ſeptième, parce que les deux antécédents ſont égaux par la cinquième, & que les conſéquents le ſont par la ſixième.

On a la huitième, parce que les eſpaces E & E' décrits dans le même tems x par les rayons vecteurs, ſont proportionnels aux quantités gr & $g'r'$, comme on l'a démontré (*Num.* CCX & CCXXX.). On peut donc ſubſtituer le rapport de ces quantités gr & $g'r'$, au lieu de celui des quantités E & E'.

On a la neuvième, parce que ſes deux raiſons ſont égales à celles de T à T', & par conſéquent égales entr'elles.

On a la dixième, parce que l'on peut diviſer les deux antécédents de la neuvième par S, & les deux conſéquents par S', ſans détruire la proportion.

On a l'onzième, parce que les quarrés des quantités proportionnelles ſont en proportion.

SCD LYON 1

On a la douzième, parce que si l'on multiplie les antécédents de la onzième par p, & les conséquents par p', on ne détruira pas la proportion.

La treizième a été démontrée (*Num.* CCXXVIII).

Enfin on a la quatorzième, parce que le produit de la douzième par la treizième doit donner une proportion.

CCXXXIV.

REMARQUE I. Le théorème III & les corollaires que nous en avons déduits jusqu'à présent, sont vrais, quelle que soit la position des foyers O & O' des sections coniques parcourues par les mobiles. Donc ils sont vrais dans le cas où ces foyers coïncideroient en un seul & même point, comme dans la figure 113. Suivant les observations astronomiques, les planètes principales & les comètes décrivent dans le ciel des ellipses dont le Soleil occupe sensiblement le foyer; & les quarrés de leurs tems périodiques sont proportionnels aux cubes des grands axes de ces ellipses. Donc les forces centripètes qui les portent vers le Soleil, ou, comme s'expriment les Newtoniens, les attractions que le Soleil exerce sur elles, sont en raison inverse des quarrés des distances. Les petites inégalités que l'on remarque dans les mouvements de ces astres, s'expliquent dans l'Astronomie, en supposant qu'ils ne sont pas uniquement portés vers le Soleil, mais

SCD LYON 1

qu'ils s'attirent auſſi les uns les autres, & que leurs attractions mutuelles ſont en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & en raiſon directe des maſſes attirantes. On explique de même les inégalités beaucoup plus ſenſibles des planètes ſecondaires, en ſuppoſant qu'elles ſont attirées ſuivant la même loi, par leur planète principale & par les autres corps céleſtes.

CCXXXV.

REMARQUE II. Le cercle n'étant qu'une ellipſe dont les foyers ſe confondent, on peut appliquer au mouvement circulaire tout ce que nous avons démontré du mouvement dans l'ellipſe. On peut conclure en particulier, que ſi deux mobiles ſollicités par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des diſtances, décrivent des cercles différents, les quarrés des tems périodiques ſeront comme les cubes des diamètres, ou comme les cubes des rayons, puiſque les rayons ſont proportionnels aux diamètres; & réciproquement, que ſi deux mobiles mus circulairement emploient à faire leurs révolutions, des tems dont les quarrés ſoient proportionnels aux cubes des diamètres, les forces centripètes ſeront en raiſon inverſe des quarrés des diſtances ou rayons des cercles parcourus. Mais il eſt à propos de développer ici davantage les loix du mouvement circulaire.

1.° *Tout corps tendant à ſe mouvoir en ligne*

SCD LYON 1

droite, il eſt évident qu'un mobile mu circulairement, ſuivroit la tangente, s'il n'étoit retiré vers le centre par la force qui lui fait décrire la circonférence. L'effort que fait un mobile mu circulairement pour s'écarter de la circonference en ſuivant la tangente, eſt ce qu'on entend par *force centrifuge.*

2° *Dans le mouvement circulaire, la force centripète eſt conſtamment égale à la force centrifuge;* puiſque ſi la force centrifuge l'emportoit ſur la force centripète, le mobile s'éloigneroit du centre; & qu'au contraire il s'en approcheroit, ſi la force centrifuge étoit moindre que la force centripète.

3° *Suppoſant toujours la force centripète dirigée au centre du cercle, la vîteſſe d'un corps mu circulairement eſt la même dans tous les points de la circonférence.* Car la force centripète étant conſtamment perpendiculaire à la vîteſſe de projection, ne doit ni l'augmenter, ni la diminuer.

4° *Quelles que ſoient les circonférences décrites par deux mobiles* M & M', *les forces centripètes ſimples ſont comme les quarrés des vîteſſes diviſés par les rayons.*

Car quelles que ſoient les courbes décrites, on a toujours la proportion,

$$F : F' :: \frac{g^2 r^2 \times OM}{\overline{OP}^3 \times MC} : \frac{g'^2 r'^2 \times O'M'}{\overline{O'P'}^3 \times M'C'}.$$

SCD LYON 1

(*Fig.* 103.). Or, quand les courbes décrites ſont des circonférences de cercles, le rayon $r = OM = OP = MC$, & le rayon $r' = O'M' = O'P' = M'C'$; ainſi la proportion générale devient $F : F' :: \frac{g^2 r^3}{r^4} : \frac{g'^2 r'^3}{r'^4} :: \frac{g^2}{r} : \frac{g'^2}{r'}$. Donc puiſque g & g' marquent les vîteſſes de projection, les forces centripètes ſimples des deux mobiles, ſont comme les quarrés des vîteſſes de projection diviſés par les rayons des circonférences décrites.

Pour avoir les forces centripètes abſolues, il faut multiplier chaque force centripète ſimple par la maſſe correſpondante (*Num.* CCXXI.), & l'on aura $F \times M : F' \times M' :: \frac{Mg^2}{r} : \frac{M'g'^2}{r'}$. Donc *les forces centripètes abſolues de deux mobiles mus circulairement, ſont en raiſon directe des produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes, & en raiſon inverſe des rayons.* Ce que nous diſons des forces centripètes doit s'entendre auſſi des forces centrifuges, qui leur ſont égales.

5° *Les forces centripètes ou centrifuges ſimples de deux mobiles mus circulairement, ſont comme les rayons diviſés par les quarrés des tems périodiques.*

Car ſoient C & C' les circonférences décrites, T & T' les tems employés à les décrire. Puiſque les vîteſſes g & g' ſont uniformes, elles ſont égales

aux espaces parcourus divisés par les tems : on aura donc $g = \frac{C}{T}$ & $g' = \frac{C'}{T'}$. Substituant ces valeurs dans la proportion $F : F' :: \frac{g^2}{r} : \frac{g'^2}{r'}$, elle deviendra $F : F' :: \frac{C^2}{T^2 r} : \frac{C'^2}{T'^2 r'}$. Or les circonférences C & C' sont comme leurs rayons r & r'. On peut donc substituer le rapport de ces rayons à celui des circonférences, & l'on aura

$$F : F' :: \frac{r^2}{T^2 r} : \frac{r'^2}{T'^2 r'} :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}.$$

Si l'on multiplie les deux antécédents de cette proportion par M, & les deux conséquents par M', on trouvera $F \times M : F' \times M' :: \frac{Mr}{T^2} : \frac{M'r'}{T'^2}$.

Donc *les forces centripètes ou centrifuges absolues sont en raison directe des masses multipliées par les rayons, & en raison inverse des quarrés des tems périodiques.*

A présent, pour trouver la valeur de la force centripète ou centrifuge dans le cercle, on peut faire usage du théorème suivant.

CCXXXVI.

THÉORÈME IV. *Pour qu'un mobile* M (Fig. 114.) *décrive la circonférence d'un cercle, il faut qu'il soit lancé perpendiculairement au rayon, & que la force centripète soit à la gravité, comme*

SCD LYON 1

la hauteur due à la vîteſſe de projection eſt au demi-rayon du cercle.

En effet, ſoit M le diamètre & C le centre du cercle.

1° La force centripète qui fait décrire une courbe, n'écarte à chaque inſtant le mobile qu'infiniment peu de ſa direction : donc ſi le mobile étoit lancé obliquement au rayon, la force centripète, au premier inſtant, ne l'écarteroit qu'infiniment peu de la direction oblique ; & par conſéquent il ne pourroit pas ſe mouvoir dans la circonférence, qui au point M eſt perpendiculaire au rayon.

2° Le mobile lancé perpendiculairement au rayon, s'éloigneroit de la circonférence en ſuivant la tangente MB, s'il n'étoit retiré vers le centre par l'action de la force centripète. Le mobile décrit donc la circonférence, parce qu'il eſt animé de deux forces, l'une de projection capable de lui faire parcourir dans un inſtant la ligne MB ſuivant la tangente, & de l'éloigner du centre d'une quantité Bb ; l'autre centripète, capable de lui faire parcourir dans le même inſtant le petit eſpace $MD = Bb$. Ces deux forces lui font décrire la diagonale Mb du parallélogramme $MBbD$, de manière qu'à la fin du premier inſtant, il ſe trouve à la même diſtance du centre, qu'au commencement.

3° Par la propriété du cercle, on a $DE : Db :: Db : DM$, ou $ME : MB :: MB : DM$,

parce qu'ici la différence des lignes DE, ME, ainsi que des lignes Db, MB, est une quantité infiniment petite du second ordre, par rapport à ces lignes. Donc $\overline{MB}^2 = ME \times DM = 2CM \times DM$.

4° Appelons g la vîtesse de projection suivant la tangente, & t l'instant que le mobile employeroit à parcourir MB : nous aurons $MB = gt$, & $\overline{MB}^2 = g^2t^2$; donc $2CM \times DM = g^2t^2$.

5° Appelons g' la vîtesse que la force centripète produiroit dans le mobile, en agissant sur lui pendant une seconde : l'espace DM parcouru en vertu de cette force pendant l'instant t, sera $\frac{g't^2}{2}$, comme nous l'avons démontré (*Num.* CLXIII.). Donc $\frac{2CM \times g't^2}{2} = g^2t^2$, & par conséquent $CM \times g' = g^2$.

6° Nommons h la hauteur due à la vîtesse de projection g, & p la vîtesse que la gravité fait acquérir pendant une seconde : nous aurons $g^2 = 2ph$, (*Num.* CLXXII.). Donc $CM \times g' = 2ph$; d'où l'on tire $g' : p :: 2h : CM :: h : \frac{1}{2}CM$. Or la force centripète & la gravité sont entr'elles comme les vîtesses g' & p qu'elles produiroient dans le même tems (*Num.* CLXVII.). Donc la force centripète F est à la gravité que j'appellerai G, comme la hauteur due à la vîtesse de projection est au demi-rayon du cercle à décrire.

CCXXXVII.

SCD LYON 1

CCXXXVII.

COROLLAIRE I. *L'espace* DM *que la force centripète fait parcourir à chaque instant au mobile qui décrit une circonférence de cercle, est égal au quarré de l'espace qui seroit parcouru dans cet instant, en vertu de la vîtesse de projection, diviſé par le diamètre du cercle.*

Car l'équation $\overline{MB}^2 = 2CM \times DM$, donne $DM = \frac{\overline{MB}^2}{2CM}$.

CCXXXVIII.

COROLLAIRE II. *La vîtesse* g′ *que produiroit la force centripète pendant une seconde, est égale au quarré de la vîtesse de projection, diviſé par le rayon.*

Car l'équation $CM \times g' = g^2$ donne $g' = \frac{g^2}{CM}$.

CCXXXIX.

COROLLAIRE III. *Dans un corps mu circulairement, la vîtesse de projection* g *est égale à la racine quarrée du produit de la vîtesse que la force centripète feroit naître pendant une seconde, multipliée par le rayon.*

Car la même équation $CM \times g' = g^2$ donne $g = \sqrt{CM \times g'}$.

SCD LYON 1

CCXL.

COROLLAIRE IV. *Pour que la force centrifuge des corps placés sur l'équateur terrestre fût égale à la gravité, il faudroit que la Terre tournât sur son axe environ dix-sept fois plus vîte qu'elle ne tourne réellement.*

En effet, pour que la force centrifuge soit égale à la gravité, il faut que dans la proportion $F : G :: h : \frac{1}{2} CM$, que nous avons trouvée (*Num.* CCXXXVI.), les deux termes de la seconde raison soient égaux, puisqu'on suppose qu'il y a égalité entre les deux termes de la première. Donc la hauteur due à la vîtesse de projection seroit $h = \frac{1}{2} CM$, & par conséquent la vîtesse de projection des corps placés sur l'équateur, devroit être égale à celle qu'acquerroit un corps pesant en parcourant librement le demi-rayon de l'équateur. Or on sait par les observations faites pour déterminer la figure de la Terre, que le demi-rayon sous l'équateur est à peu près de 9840324 pieds, & la vîtesse qu'acquerroit un corps pesant en parcourant cet espace, seroit $g = \sqrt{60,4 \times 9840324} = 24379$ pieds (*Num.* CLXXII.). Il faudroit donc, pour que la force centrifuge fût égale à la gravité, que les corps placés sur l'équateur parcourussent 24379 pieds; quantité dix-sept fois plus grande, à peu près, que celle qu'ils parcourent réellement. Car ils ne

SCD LYON 1

parcourent par seconde qu'environ 1431 pieds, comme l'on peut s'en convaincre en cherchant la circonférence de l'équateur, & en la divisant par le nombre de secondes contenues dans 24 heures.

CCXLI.

COROLLAIRE V. *Donc la force centrifuge sous l'équateur est à la gravité à peu près comme* 1 *est à* 289.

Car supposons deux corps égaux placés sous l'équateur, dont l'un fasse sa révolution dans 24 heures avec une vîtesse g, tandis que l'autre feroit la sienne dans un tems dix-sept fois plus court, & par conséquent avec une vîtesse g' dix-sept fois plus grande que celle du premier. La force centrifuge du second de ces corps seroit égale à la gravité, comme nous venons de le voir. Si l'on appelle F & F' les forces centrifuges de ces deux mobiles, on aura (*Num.* CCXXXV.), $F : F' :: \frac{g^2}{r} : \frac{g'^2}{r'}$; ou simplement $F : F' :: g^2 : g'^2$, parce que dans le cas présent $r = r'$. Or $g : g' :: 1 : 17$, & $g^2 : g'^2 :: 1 : \overline{17}^2$ $:: 1 : 289$. Donc $F : F' :: 1 : 289$; c'est-à-dire, que la force centrifuge sous l'équateur est à la force centrifuge qui feroit égale à la gravité, comme 1 est à 289.

CCXLII.

COROLLAIRE VI. En supposant avec Newton

que les attractions des corps céleſtes ſoient en raiſon inverſe des quarrés des diſtances & en raiſon directe des maſſes attirantes, on pourra aiſément déterminer le rapport des maſſes du Soleil & des planètes qui ont des ſatellites. Pour cela, obſervons que les orbites parcourues par ces planètes, ſont à peu près circulaires, & nommons F la force attractive du Soleil ſur chaque molécule d'une planète dont le tems périodique ſoit T, & la diſtance au Soleil r. Soit pareillement F' la force attractive d'une planète, par exemple, de Jupiter, ſur chaque molécule de l'un de ſes ſatellites, dont la diſtance à Jupiter ſoit r' & le tems périodique T'. Enfin imaginons un autre ſatellite qui tourne autour de Jupiter à la diſtance r, & appelons f la force attractive que Jupiter exerceroit ſur lui, à cette diſtance. nous aurons $F : F' :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$, comme nous l'avons démontré (*Num.* CCXXXV.); & puiſqu'on ſuppoſe que les forces attractives de Jupiter ſur ſes ſatellites ſont en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, on aura $F' : f :: r^2 : r'^2$. Multipliant par ordre ces deux proportions, & diviſant par F' les deux termes de la première raiſon du produit, on aura $F : f :: \frac{r^3}{T^2} : \frac{r'^3}{T'^2}$. Or F & f ſont les forces attractives du Soleil & de Jupiter ſur une molécule matérielle placée à égale diſtance de l'un & de l'autre,

SCD LYON 1

& ces forces attractives sont évidemment comme les masses du Soleil & de Jupiter. Donc le rapport de ces masses sera exprimé par la seconde raison $\frac{r^3}{T^2} : \frac{r'^3}{T'^2}$, dans laquelle tout est supposé connu.

Au lieu de Jupiter, on peut mettre la Terre ou Saturne, qui ont aussi des satellites, & déterminer par la même méthode le rapport de la masse du Soleil à celles de ces planètes.

CCXLIII.

THÉORÈME V. *Si l'on suppose que deux mobiles mus dans des sections coniques quelconques, soient portés vers leurs foyers par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances, leurs vîtesses seront toujours en raison directe des racines quarrées des paramètres, & en raison inverse des perpendiculaires menées des foyers sur les tangentes des points, où l'on suppose les mobiles.*

En effet, soient MAZ, $M'A'Z'$ (*Fig.* III.) les sections coniques parcourues par les mobiles, p & p' leurs paramètres, r & r' les rayons vecteurs menés aux sommets des courbes, g & g' les vîtesses des mobiles dans ces sommets, V & V' les vîtesses dans les points quelconques M & M' où l'on suppose les mobiles, OP & $O'P'$ les perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes des courbes

SCD LYON 1

en ces points. Nous aurons (*Num.* CCXXIII.), $V : V' :: \frac{gr}{OP} : \frac{g'r'}{O'P'}$. Or $gr : g'r' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$, (*Num.* CCXXIX.). Donc $V : V' :: \frac{\sqrt{p}}{OP} : \frac{\sqrt{p'}}{O'P'}$.

CCXLIV.

COROLLAIRE I. Supposons que du même point A (*Fig.* 115.) soient lancés perpendiculairement au rayon vecteur différents mobiles, dont le premier décrive une circonférence de cercle AZ, le second une ellipse AZ', le troisième une parabole AZ'', le quatrième une hyperbole AZ''', & qu'ils soient portés vers le même foyer O par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances: *la vîtesse de projection du corps mu circulairement, sera par rapport à celle du mobile qui décrit la parabole, comme* 1 *est à* $\sqrt{2}$; *par rapport à celle du mobile qui décrit l'ellipse, comme* 1 *est à une quantité moindre que* $\sqrt{2}$; *& par rapport à celle du mobile qui décrit l'hyperbole, comme* 1 *est à une quantité plus grande que* $\sqrt{2}$.

Car en nommant V la vîtesse de projection du corps qui décrit la circonférence du cercle, V' celle du corps qui décrit l'ellipse, V'' celle du corps qui décrit la parabole, V''' celle du corps qui décrit l'hyperbole; nommant aussi respectivement p, p', p'', p''' les paramètres de ces courbes, & menant le

SCD LYON 1

rayon vecteur OA perpendiculaire sur la tangente commune AT, nous aurons (*Num.* CCXLIII.), $V : V' :: \frac{\sqrt{p}}{OA} : \frac{\sqrt{p'}}{OA}$; $V : V'' :: \frac{\sqrt{p}}{OA} : \frac{\sqrt{p''}}{OA}$; $V : V''' :: \frac{\sqrt{p}}{OA} : \frac{\sqrt{p'''}}{OA}$. Et supprimant dans les secondes raisons le dénominateur commun OA, on voit que les vîtesses de projection dans les courbes dont nous parlons, sont comme les racines quarrées de leurs paramètres. Or les paramètres du cercle, de l'ellipse, de la parabole & de l'hyperbole, sont ici respectivement $2OA$, une ligne moindre que $4OA$, $4OA$, une ligne plus grande que $4OA$ (*Num.* CCXXV.); quantités qui sont entr'elles dans le rapport de 1, d'un nombre moindre que 2, de 2, & d'un nombre plus grand que 2. Donc les vîtesses des mobiles qui décrivent la circonférence du cercle, l'ellipse, la parabole & l'hyperbole, seront entr'elles comme les racines quarrées de ces nombres.

Ainsi la vîtesse V du corps mu circulairement, sera, par rapport à la vîtesse V'' de celui qui décrit la parabole, comme $\sqrt{1}$ est à $\sqrt{2}$, ou comme 1 est à $\sqrt{2}$; par rapport à la vîtesse V' de celui qui décrit l'ellipse, comme 1 est à une quantité moindre que $\sqrt{2}$, & par rapport à la vîtesse de celui qui décrit l'hyperbole, comme 1 est à une quantité plus grande que $\sqrt{2}$.

SCD LYON 1

Si la vîteſſe du corps mu circulairement eſt moindre que celle du corps qui décrit l'ellipſe, le point *A* ſera l'apſide inférieure; puiſqu'alors le paramètre de l'ellipſe étant plus grand que celui du cercle, les rayons vecteurs iront en croiſſant dès le point *A*. Au contraire, ſi la vîteſſe du corps mu circulairement eſt plus grande que celle du corps qui ſe meut dans l'ellipſe, le paramètre de l'ellipſe ſera moindre que celui du cercle, & les rayons vecteurs iront en décroiſſant dès le point *A*. Donc ce point ſera l'apſide ſupérieure.

On voit par ce corollaire, qu'en ſuppoſant un mobile lancé perpendiculairement au rayon vecteur avec une vîteſſe donnée, & retiré vers le centre du mouvement par une force centripète auſſi donnée, qui ſoit dans les différents points de la trajectoire réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance, on pourra connoître aiſément s'il doit décrire une ellipſe, une parabole ou une hyperbole, & même déterminer le paramètre de la courbe qu'il décrira. Il ſuffira de chercher par le théorème IV. la vîteſſe de projection que le mobile devroit avoir pour décrire la circonférence d'un cercle autour du foyer, & de la comparer avec la vîteſſe de projection qu'il a réellement. Le quarré de la première de ces vîteſſes ſera au quarré de la ſeconde, comme le diamètre du cercle eſt au paramètre de la courbe décrite.

SCD LYON 1

Si cette courbe est une parabole, sa nature sera exprimée par l'équation $y^2 = px$. Si le mobile doit décrire une ellipse, la nature de la courbe sera exprimée par $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$; & l'on déterminera le grand axe $2a$, en observant qu'à l'abscisse donnée OA répond une ordonnée connue qui vaut $\frac{1}{2}p$. mettant donc dans l'équation générale $\frac{1}{2}p$ au lieu de y, & OA au lieu de x, il ne restera d'inconnu que a, que l'on trouvera en résolvant l'équation. Il en sera de même si le mobile décrit une hyperbole. La nature de la courbe sera exprimée par l'équation $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$; & l'on trouvera le grand axe $2a$, en mettant dans cette équation $\frac{1}{2}p$ au lieu de y & OA au lieu de x.

CCXLV.

Corollaire II. Un mobile sollicité par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances, étant lancé suivant la tangente MT (*Fig.* 116.), qui fait avec le rayon vecteur donné OM un angle connu PMO, la vîtesse de projection & la force centripète en M étant aussi connues, il est facile de déterminer l'espèce & la nature de la section conique MAZ qu'il doit décrire.

En effet, ayant abaissé du foyer la perpendicu-

SCD LYON 1

laire OP sur la tangente menée au point M, on connoîtra dans le triangle rectangle OPM l'hypothénuse OM & les trois angles : on trouvera par conséquent les deux côtés OP & PM. Imaginant ensuite un mobile soumis à la force centripète qui a lieu en M, & qui décrive autour du foyer une circonférence dont le rayon soit OM, on trouvera la vîtesse du mobile par le théorème IV. Nommons V cette vîtesse & V' celle du corps qui décrit la courbe MAZ, p le paramètre connu du cercle, & p' celui de la même courbe MAZ : nous aurons (*Num.* CCXLIII.) $V : V' :: \frac{V\sqrt{p}}{OM} : \frac{V\sqrt{p'}}{OP}$, proportion dans laquelle tout est connu, excepté le paramètre p'. Donc on trouvera sa valeur.

Cela posé, soit MH la normale de la courbe au point M, & du point H où elle rencontre l'axe, abaissons sur le rayon vecteur la perpendiculaire HR, nous aurons le segment $MR = \frac{1}{2}p'$; & les deux triangles semblables POM, RMH donneront $PO : OM :: RM : MH$, proportion dont les trois premiers termes sont connus : donc on connoîtra la normale MH.

Enfin tirant du foyer la ligne OL perpendiculaire à la normale, on aura $OL = PM$, & LH vaudra la différence de MH & de PO. Donc on trouvera aussi la valeur de l'hypothénuse OH, partie de l'axe comprise entre la normale & le foyer. Menant

SCD LYON 1

du point M l'ordonnée MG de la courbe, les triangles OLH, MGH, qui ont un angle commun en H & qui ſont rectangles l'un & l'autre, donneront les proportions $OH : LH :: MH : GH$; $OH : OL :: MH : MG$. Donc on trouvera la valeur de la ſous-normale GH, & de l'ordonnée MG.

Or la courbe décrite ſera une parabole, une ellipſe ou une hyperbole, ſuivant que l'on aura $GH = \frac{1}{2}p'$, ou $GH < \frac{1}{2}p'$, ou $GH > \frac{1}{2}p'$. Donc par cette méthode on déterminera l'eſpèce de la ſection conique parcourue par le mobile.

Quant à la nature de la courbe, il eſt évident 1° que ſi cette courbe eſt une parabole, ſa nature ſera exprimée par l'équation $y^2 = p'x$. 2° Si la courbe décrite eſt une ellipſe, ſa nature ſera exprimée par l'équation $y^2 = p'x - \frac{p'x^2}{2a}$, en nommant $2a$ le grand axe. Pour trouver la valeur de a, on obſervera qu'au point M, cette équation devient $\overline{GM}^2 = p'x - \frac{p'x^2}{2a}$, & que pour le même point on a toujours $GH = \frac{1}{2}p' - \frac{p'x}{2a}$. Ces deux équations feront connoître les valeurs du grand axe $2a$ & de l'abſciſſe AG correſpondante au point M. On procédera de la même manière, ſi le mobile décrit une hyperbole. Alors l'équation de la courbe ſera $y^2 = p'x + \frac{p'x^2}{2a}$, & l'on déterminera le grand axe

SCD LYON 1

$2a$, en observant qu'au point M cette équation devient $\overline{GM}^2 = p'x + \frac{p'x^2}{2a}$, & que pour le même point on a $GH = \frac{1}{2}p' + \frac{p'x}{2a}$, équations qui donneront les valeurs de x & de a.

CCXLVI.

COROLLAIRE III. *Si deux mobiles décrivent des ellipses*, ADBE, A'D'B'E' (Fig. 117.), *vers les foyers desquelles ils soient portés par des forces centripètes réciproquement proportionnelles aux quarrés des rayons vecteurs, leurs vîtesses dans les distances moyennes seront en raison inverse des racines quarrées de ces distances.*

Car soient C & C' les centres des ellipses, O & O' les foyers, p & p' les paramètres, AB & $A'B'$ les grands axes, ED & $E'D'$ les petits, OP & $O'P'$ les perpendiculaires menées sur les tangentes qui passent aux extrémités des petits axes, enfin V & V' les vîtesses des mobiles à ces extrémités D & D', où ils se trouvent dans leurs distances moyennes des foyers. Nous aurons $V : V' :: \frac{\sqrt{p}}{OP} : \frac{\sqrt{p'}}{O'P'}$; d'où l'on tire $V^2 : V'^2 :: \frac{p}{\overline{OP}^2} : \frac{p'}{\overline{O'P'}^2}$. Or $p = \frac{\overline{ED}^2}{AB} = \frac{4\overline{CD}^2}{2OD}$, & $OP = CD$, puisque ces

SCD LYON 1

lignes ſont des parallèles compriſes entre paral-

lèles (*Num.* CCXXV.). De même $p' = \frac{4\overline{C'D'}^2}{2O'D'}$, & $O'P' = C'D'$. Subſtituant donc ces valeurs dans la proportion précédente, on aura $V^2 : V'^2 :: \frac{4\overline{CD}^2}{2OD \times \overline{CD}^2} : \frac{4\overline{C'D'}^2}{2O'D' \times \overline{C'D'}^2} :: \frac{1}{OD} : \frac{1}{O'D'}$.

Donc $V : V' :: \frac{1}{\sqrt{OD}} : \frac{1}{\sqrt{O'D'}}$.

CCXLVII.

COROLLAIRE IV. Si l'on ſuppoſe que les deux foyers O & O' tombent l'un ſur l'autre, & que $A'D'B'E'$ ſoit une circonférence dont le rayon $O'D' = OD$, alors dans la proportion $V : V' :: \frac{1}{\sqrt{OD}} : \frac{1}{\sqrt{O'D'}}$, les termes de la ſeconde raiſon ſeront égaux : donc on aura $V = V'$; c'eſt-à-dire, *qu'un mobile qui décrit une ellipſe* ADBE, *a, dans ſa diſtance moyenne, la même vîteſſe qu'auroit un autre mobile qui décriroit une circonférence de cercle, dont le rayon ſeroit cette diſtance moyenne;* en ſuppoſant toujours que les forces centripètes des deux mobiles ſoient en raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

CCXLVIII.

REMARQUE. Nous avons obſervé (*Num.*

CCXXXV.) que dans le mouvement d'un corps qui décrit une circonférence de cercle, la force centrifuge eſt égale à la force centripète. Quand un mobile décrit d'autres courbes, on peut conſidérer la force centrifuge ou par rapport au centre du cercle oſculateur, ou par rapport au centre du mouvement. Dans le premier cas, il eſt évident qu'*elle ſera dans chaque point proportionnelle au quarré de la vîteſſe, diviſé par le rayon de courbure correſpondant à ce point.* Car un arc infiniment petit de la courbe ſe confond avec un arc égal du cercle oſculateur. Donc on peut conſidérer le mobile à chaque inſtant comme décrivant des arcs de cercle infiniment petits, mais dont les rayons changent continuellement. Or dans tous les mouvements circulaires les forces centrifuges ſont comme les quarrés des vîteſſes diviſés par les rayons. Mais il faut bien remarquer que les forces centrifuges dont le rapport eſt ainſi évalué, ſont les efforts que le mobile fait dans les différents points de la trajectoire, pour s'éloigner du centre de courbure, & non les efforts qu'il fait pour s'éloigner du point fixe vers lequel les forces centripètes ſont dirigées.

Si l'on conſidère les forces centrifuges par rapport à ce point fixe que nous avons appelé le centre du mouvement, on peut dire qu'*elles ſont en raiſon inverſe des rayons vecteurs multipliés par les*

SCD LYON 1

quarrés des perpendiculaires, que l'on peut abaiſſer du centre des forces ſur les tangentes des points, où l'on ſuppoſe les mobiles.

Car ſuppoſons qu'un mobile décrive la courbe *MAZ* (*Fig.* 118.), que ſes vîteſſes aux points *M* & *M'* ſoient *V* & *V'*. Ayant mené les rayons vecteurs *OM*, *OM'*, & les perpendiculaires *OP*, *OP'* ſur les tangentes des points *M* & *M'*, nommons *F* & *F'* les forces centrifuges dans ces points. Il eſt évident que ſi le mobile étoit lancé perpendiculairement aux rayons vecteurs, il feroit, pour s'éloigner du point *O*, des efforts équivalents aux forces centripètes requiſes pour lui faire décrire des circonférences de cercle. Or ces forces centripètes ſeroient comme les quarrés des vîteſſes diviſés par les rayons *OM* & *OM'* des cercles décrits: donc les forces centrifuges ſont dans le même rapport, & l'on a $F : F' :: \frac{V^2}{OM} : \frac{V'^2}{OM'}$. Or $V : V' :: \frac{1}{OP} : \frac{1}{OP'}$ (*Num.* CCXXII.). Donc en ſubſtituant le ſecond rapport au lieu du premier; on aura $F : F' :: \frac{1}{OM \times \overline{OP}^2} : \frac{1}{OM' \times \overline{OP'}^2}$.

On peut conclure de là, que *les forces centrifuges dans les apſides* A & B (*Fig.* 117.) *d'une ellipſe, ſont en raiſon inverſe des cubes des rayons vecteurs menés à ces apſides.* Car ces rayons vecteurs ſont égaux aux perpendiculaires abaiſſées du foyer ſur

les tangentes de ces apsides. Donc en appelant F la force centrifuge en A, & F' la force centrifuge en B, on aura $F : F' :: \frac{1}{OA^3} : \frac{1}{OB^3}$; ce qui fait voir que les forces centrifuges d'un corps qui décrit une ellipse, croissent de l'apside supérieure à l'apside inférieure, dans un plus grand rapport que les forces centripètes ; puisque celles-ci croissent comme les quarrés des distances diminuent, tandis que les premières croissent comme diminuent les cubes des distances.

Du reste, pour lever toute équivoque au sujet du rapport que nous établissons entre les forces centrifuges, il est à propos d'observer que par ces forces nous entendons (& la démonstration précédente le suppose), non pas les efforts que fait actuellement le mobile dirigé obliquement au rayon vecteur, pour s'éloigner du centre du mouvement, mais les efforts qu'il est capable de faire & qu'il feroit réellement pour s'éloigner de ce centre, si sa direction étoit perpendiculaire au rayon vecteur.

SECTION IV.

Du Mouvement des Centres de gravité.

CCXLIX.

LEMME. *Quand il se trouve un facteur commun dans deux produits égaux, on peut lui substituer un*

SCD LYON 1

un autre facteur quelconque, sans détruire l'égalité.

Cela est évident : car si $ag+bg+cg$, &c. $=pg+qg+rg$, &c., on aura $a+b+c$ &c. $=p+q+r$ &c.; & multipliant les deux membres de l'équation par une quantité quelconque m, elle deviendra $am+bm+cm$ &c. $=pm+qm+rm$ &c.

CCL.

THÉORÈME I. *Si toutes les parties d'un corps se meuvent dans l'espace avec des vîtesses égales & suivant des directions parallèles, la résultante de leurs mouvements particuliers passera par le centre de gravité.*

Pour le démontrer, soit le corps M (*Fig.* 119.) dont tous les éléments se meuvent avec la même vîtesse suivant des directions parallèles, & soit AB la direction du centre de gravité. Concevons deux plans KL, HI qui se coupent dans cette ligne AB. Les moments des poids élémentaires placés d'un côté du plan KL, seront égaux aux moments des poids élémentaires placés de l'autre côté du même plan (*Num.* LXIV.) : ainsi en nommant D, D', D'', &c. les distances de ce plan aux molécules qui se trouvent d'un côté, d, d', d'', &c. ses distances aux molécules qui se trouvent de l'autre, & g le poids de chaque molécule, nous aurons $Dg+D'g+D''g$ &c. $=dg+d'g+d''g$ &c. Or au lieu du facteur commun g, nous pouvons, sans détruire

SCD LYON 1

l'égalité, mettre un autre facteur m qui exprime le mouvement de chaque molécule du corps M, & nous aurons l'équation $Dm + D'm + D''m$ &c. $= dm + d'm + d''m$ &c. Donc les mouvements ou forces des molécules placées de part & d'autre du plan KL, ont des moments égaux par rapport à ce plan, & par conséquent leur résultante doit se trouver dans ce plan.

On démontrera de même, que cette résultante doit se trouver dans le plan HI. Or elle ne peut pas être en même tems dans les deux plans KL, HI, à moins qu'elle ne soit dirigée, suivant leur commune intersection AB, & qu'elle ne passe ainsi par leur centre de gravité.

Si l'on nomme V la vîtesse avec laquelle chaque élément est transporté, pour avoir la résultante de tous les mouvements particuliers, qui passe par le centre de gravité, il faudra multiplier V par la somme des éléments, c'est-à-dire, par la masse M du corps, ce qui donnera MV pour la valeur de cette résultante.

CCLI.

COROLLAIRE I. *Toute force dirigée par le centre de gravité d'un corps, doit communiquer la même vîtesse à tous ses éléments.*

Car cette force pourra se représenter par la masse M du corps, multiplié par une vîtesse V. Donc elle seroit la résultante des mouvements

qu'auroient les molécules du corps, chacune étant transportée avec la vîteſſe V ſuivant des directions parallèles. Or l'effet d'une réſultante quelconque doit être le même que celui des mouvements compoſants. Donc la force MV dirigée par le centre de gravité du corps, communiquera la même vîteſſe V à tous ſes éléments.

On peut auſſi démontrer la même propoſition de la manière ſuivante. Le corps étant en repos, ſe trouve dans le même état que ſi chacun de ſes éléments avoit reçu, ſuivant des directions parallèles, deux vîteſſes V & $-V$. Or la force MV imprimée par le centre de gravité, détruit les vîteſſes $-V$, puiſqu'elle détruit la réſultante des mouvements qui naîtroient de ces vîteſſes. Donc après l'action de cette force, chaque élément doit avoir la vîteſſe V.

On voit par là, que toute force dirigée par le centre de gravité, communiquera au corps un ſimple mouvement de tranſlation, ſans le faire tourner en aucun ſens.

CCLII.

COROLLAIRE II. *Toute force imprimée à un corps, ſuivant une direction qui paſſe hors du centre de gravité, ne peut communiquer la même vîteſſe à tous ſes éléments.*

Car ſi tous les éléments prenoient la même vîteſſe, leurs mouvements auroient pour réſultante une force dirigée par le centre de gravité,

SCD LYON 1

& différente par conséquent de la force imprimée.

De là on doit conclure, qu'*une force transmise à un corps suivant une direction qui passe hors du centre de gravité, communiquera nécessairement à ce corps un mouvement de rotation.* Car un corps dont tous les éléments n'ont pas la même vitesse, tourne sur lui-même.

CCLIII.

THÉORÈME II. *Si deux corps décrivent des droites parallèles, leur centre commun de gravité décrira une ligne parallèle à leurs directions.*

Pour le démontrer, soient deux mobiles A & B (*Fig.* 120.) mus suivant les lignes parallèles AM, BN, & dont le centre de gravité soit le point G. Je dis que la route de ce centre de gravité sera la ligne GH parallèle aux directions AM, BN. Car supposons les deux mobiles parvenus aux points a & b de ces directions. Ayant joint ces points par la droite ab, le centre de gravité sera dans quelque point g de cette ligne, tel que l'on ait la proportion $A+B : A :: ab : bg$. Or si l'on mène sur BN les perpendiculaires ap, gr, les triangles semblables apg, grb donneront $ab : bg :: ap : gr$; donc $A+B : A :: ap : gr$; d'où l'on tire $gr = \frac{A \times ap.}{A+B}$

Les mobiles étant parvenus à deux autres points quelconques a', b' de leurs directions, on trouvera de même que leur centre de gravité g' sera éloigné de

SCD LYON 1

la ligne BN d'une quantité $g'r' = \frac{A \times a'p'}{A+B} = \frac{A \times ap}{A+B}$, en supposant que $a'p'$ & $g'r'$ soient abaissées perpendiculairement des points a' & g' sur la ligne BN. Donc le centre de gravité des deux mobiles est toujours également éloigné de la ligne BN, & par conséquent sa route est parallèle à cette ligne.

CCLIV.

COROLLAIRE. *Si plusieurs corps* A, B, C, D, &c., *en tel nombre qu'on voudra, décrivent des droites parallèles, la route de leur centre commun de gravité sera une ligne parallèle à leurs directions.*

Car en regardant les deux corps A & B comme réunis au centre de gravité de leur système, & ne formant qu'un seul & même corps qui décrit une ligne parallèle à leurs directions; si l'on combine ce corps avec un autre C, on verra par la démonstration précédente, que le centre de gravité du nouveau système décrira une ligne parallèle aux directions des corps dont le système est composé. La même chose se démontrera, en allant de proche en proche, pour un système composé de quatre corps, de cinq corps, & en général d'un nombre quelconque de corps.

CCLV.

THÉORÈME III. *La vîtesse du centre de gravité de deux corps mus uniformément, suivant des lignes parallèles, est uniforme.*

SCD LYON 1

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que le centre de gravité décrit des espaces égaux en tems égaux. Supposons donc que dans un tems déterminé, par exemple, dans une seconde, les mobiles A & B (*Fig.* 120.) aient décrit les espaces Aa, Bb : dans la seconde suivante ils décriront aa', bb', & l'on aura $aa' = Aa$, $bb' = Bb$. Si l'on tire à présent la parallèle GH que le centre de gravité doit parcourir, & les droites AB, ab, $a'b'$ qui la rencontrent aux points G, g, g' ; on voit que le centre de gravité parcourra dans la première seconde Gg, & dans la seconde suivante gg'. Or dans le trapèze $ABb'a'$, les bases Aa', Bb', & par conséquent toutes les lignes menées parallèlement à ces bases, seront divisées en parties égales par la droite AB. Donc on aura $Gg = gg'$; c'est-à-dire, qu'en tems égaux le centre de gravité décrit des espaces égaux.

Si les deux mobiles A & B (*Fig.* 121.) se meuvent uniformément en sens opposés, dans des lignes parallèles, & que dans deux secondes consécutives le premier parcoure les espaces égaux Aa, aa', le second les espaces égaux Bb, bb' ; on voit en menant les lignes AB, ab, $a'b'$, qui coupent la direction du centre de gravité aux points G, g, g', qu'il décrira dans ces deux secondes, les lignes Gg, gg'. Or il est évident que $Gg = gg'$; puisqu'en nommant E le point d'intersection des lignes AB, $a'b'$, on a deux triangles semblables AEa', BEb', dont les

SCD LYON 1

bases Aa', Bb', ne peuvent être divisées en parties égales par la droite ab, à moins qu'elle ne passe par le milieu de tous les éléments parallèles à ces bases, & conséquemment par le milieu de Gg'.

CCLVI.

COROLLAIRE. *Si plusieurs corps, en tel nombre qu'on voudra, décrivent uniformément des lignes parallèles, la vîtesse de leur centre commun de gravité sera uniforme.*

Car en regardant les deux premiers corps comme réunis au centre de gravité de leur système, & ne formant qu'un seul & même corps, qui se meut uniformément, on pourra le combiner avec le troisième des corps proposés; & l'on verra par la démonstration précédente, que le centre de gravité du nouveau système doit prendre une vîtesse uniforme. La même chose se démontrera en allant de proche en proche, pour un système de quatre mobiles, de cinq mobiles, & généralement d'un nombre quelconque de mobiles.

CCLVII.

THÉORÈME IV. *La vîtesse du centre de gravité de tant de corps que l'on voudra, qui se meuvent uniformément dans des lignes parallèles, est égale à la différence de leurs mouvements divisée par la somme des masses; c'est-à-dire, que pour avoir la vîtesse du centre de gravité, il faut prendre les*

SCD LYON 1

mouvements de tous les corps qui vont en un ſens, en ſouſtraire les mouvements de ceux qui vont en ſens contraire, & diviſer la différence par la ſomme des maſſes.

Suppoſons en effet, les quatre mobiles A, B, C, D (*Fig.* 122.), qui dans le même tems t parcourent ſuivant leurs lignes parallèles, les eſpaces Aa, Bb, Cc, Dd, avec les vîteſſes V, V', V'', V'''; tandis que le centre de gravité G décrira dans la parallèle GH l'eſpace Gg, avec une vîteſſe x qu'il s'agit de déterminer. Nous aurons $Aa = Vt$, $Bb = V't$, $Cc = V''t$, $Dd = V'''t$, $Gg = xt$.

Imaginons à préſent un plan $MNHRS$ perpendiculaire aux directions des mobiles. Selon ce qui a été dit (*Num.* LXIV.), le moment de tous les corps réunis au point G, pris par rapport à ce plan, eſt égal à la ſomme des moments de ces corps placés aux points A, B, C, D; ce qui donne l'équation $\overline{A+B+C+D} \times HG = A \times AM + B \times BN + C \times CR + D \times DS$. De même le moment de tous les corps réunis au point g, eſt égal à la ſomme des moments de ces corps placés aux points a, b, c, d; ce qui donne cette autre équation $\overline{A+B+C+D} \times Hg = A \times aM + B \times bN + C \times cR + D \times dS$. Retranchant de cette ſeconde équation la première, nous aurons

$$\overline{A+B+C+D} \times \overline{Hg-HG} = A \times \overline{aM-AM}$$

SCD LYON 1

$+B\times\overline{bN-BN}+C\times\overline{cR-CR}+D\times\overline{dS-DS}$;

c'eſt-à-dire, $\overline{A+B+C+D}\times Gg=A\times Aa-B\times Bb+C\times Cc-D\times Dd$; ou mettant au lieu des lignes Aa, Bb, Cc, Dd, Gg, leurs valeurs,

$\overline{A+B+C+D}\times xt=A\times Vt-B\times V't+C\times V''t-D\times V'''t$; d'où l'on tire

$$x=\frac{AV-BV'+CV''-DV'''}{\overline{A+B+C+D}}.$$

Donc la vîteſſe du centre de gravité des quatre corps propoſés, eſt égale à la différence de leurs mouvements diviſée par la ſomme des maſſes. Il eſt évident que la démonſtration ſeroit la même, quel que fût le nombre des corps mus parallèlement.

CCLVIII.

COROLLAIRE I. Si tous les mobiles qui décrivent uniformément des lignes parallèles, étoient réunis au centre commun de gravité, en un ſeul corps animé de tous les mouvements qu'ils ont en particulier, la force ou le mouvement de celui-ci vaudroit la différence des mouvements oppoſés; & pour avoir ſa vîteſſe, il faudroit diviſer cette différence par la maſſe du corps, c'eſt-à-dire, par la ſomme des maſſes de tous les mobiles. Donc *le centre de gravité ſe meut ou tend à ſe mouvoir de la même manière, que ſi tous les corps étoient réunis à ce centre, & que les forces des différents corps lui fuſſent immédiatement appliquées.*

SCD LYON 1

CCLIX.

COROLLAIRE II. *Quelles que ſoient les directions de pluſieurs corps qui décrivent uniformément des lignes droites, le centre de gravité ſe meut toujours ou tend à ſe mouvoir de la même manière que ſi tous les corps étoient réunis à ce centre, & qu'ils ne formaſſent qu'un ſeul mobile ſollicité par les forces dont ils ſont animés.*

Car ayant imaginé trois plans que je nomme X, Y, Z, dont chacun ſoit perpendiculaire aux deux autres, on peut décompoſer le mouvement ou la force de chaque corps, en trois autres perpendiculaires à ces plans (*Num.* L.). Cela poſé, la réſultante de tous les mouvements perpendiculaires au plan X, communiqueroit ou tendroit à communiquer au centre de gravité une vîteſſe uniforme, perpendiculaire à ce plan, & égale à la différence de ces mouvements diviſée par la ſomme des maſſes. On peut dire la même choſe de chaque réſultante des mouvements perpendiculaires aux deux plans Y & Z. Or en ſuppoſant tous les corps réunis au centre de gravité, de manière qu'ils ne formaſſent qu'un ſeul mobile ſollicité par toutes les forces dont ils ſont réellement animés, il eſt viſible que l'on pourroit décompoſer chacune de ces forces en trois autres perpendiculaires aux plans X, Y, Z, & que les trois réſultantes des forces perpendiculaires à ces plans, ſeroient les mêmes que dans le premier

SCD LYON 1

cas, où les mobiles ſuivoient leurs directions ſans être concentrés en un ſeul & même point. Donc le mouvement du centre de gravité doit être le même dans l'un & l'autre cas.

CCLX.

REMARQUE. Juſqu'à préſent nous avons ſuppoſé que les mobiles ſuiviſſent librement leurs directions ſans agir les uns ſur les autres, & ſans ſe gêner dans leurs mouvements. Mais comme il eſt eſſentiel auſſi de conſidérer le mouvement du centre de gravité dans le cas où les corps qui compoſent un même ſyſtème, agiſſent les uns ſur les autres, & dérangent par leur action les mouvements primitifs qu'ils avoient reçus; nous obſerverons d'abord, que les corps n'agiſſent les uns ſur les autres que de trois manières différentes qui nous ſoient connues : ou par impulſion immédiate, comme dans le choc ordinaire; ou par le moyen de quelque corps interpoſé entr'eux, & auquel ils ſont attachés; ou enfin par une vertu d'attraction réciproque, comme font dans le ſyſtème Newtonien le Soleil & les planètes. Cela poſé, nous nous arrêterons un moment aux propoſitions ſuivantes, qui ſont d'un fréquent uſage en Méchanique.

CCLXI.

THÉORÈME V. *L'état de mouvement ou de repos du centre de gravité de pluſieurs corps qui*

SCD LYON 1

agiſſent les uns ſur les autres par impulſion immédiate, ou par le moyen de quelque corps interpoſé auquel ils ſont attachés, ne change point par l'action mutuelle de ces corps, pourvu que le ſyſtème entier ſoit libre; c'eſt-à-dire, qu'il ne ſoit point aſſujetti à tourner autour d'un point fixe.

En effet, quels que ſoient les mouvements que prendront les différents corps qui ſont partie du ſyſtème, on peut toujours concevoir les mouvements primitifs comme compoſés de ceux-là, & d'autres qui n'auront pas lieu (*Num.* CCII.). Donc en vertu des mouvements imprimés, le centre de gravité doit être dans le même état qu'en vertu des mouvements que les différents corps prendront, & des ſeconds mouvements qui n'auront pas lieu. Or par le principe de M. *d'Alembert*, en vertu de ces ſeconds mouvements, le ſyſtème entier doit être en équilibre, & par conſéquent il ne doit ſurvenir aucun changement dans l'état du centre de gravité: donc ſon état en vertu des mouvements imprimés, doit être celui qu'il aura en vertu des mouvements que les différents corps ſeront forcés de prendre par leur action mutuelle.

Ainſi, dans un ſyſtème de pluſieurs corps qui ne changent leurs directions & leurs vîteſſes qu'en ſe choquant les uns les autres, ou qu'en ſe tirant par des fils, par des verges inflexibles, ou en général par des liens quelconques, le centre de gravité ſe

SCD LYON 1

meut ou tend à se mouvoir, comme si les corps obéissant librement aux impulsions primitives, ne se gênoient point dans leurs mouvements ; c'est-à-dire, comme si toutes les impulsions primitives étoient immédiatement appliquées à ce centre. (*Num.* CCLIX.).

CCLXII.

COROLLAIRE. Un corps de figure quelconque, n'est qu'un système de molécules unies qui s'entraînent dans leurs mouvements par leur adhésion mutuelle. Donc *si une force représentée par* FA (*Fig.* 123.) *& dirigée comme on voudra, se transmet toute entière à un corps* P, *le centre de gravité prendra le même mouvement que si la force lui étoit immédiatement appliquée* : il décrira uniformément une ligne *LH* parallèle à la direction de la force imprimée, avec une vîtesse égale à cette force divisée par la masse du corps (*Num.* CCLVII.). Et si plusieurs forces agissent en même tems sur différents points de ce corps, le centre de gravité sera mu, comme si toutes les forces lui étoient immédiatement appliquées.

CCLXIII.

REMARQUE. Nous avons démontré (*Num.* CCL.) que si tous les éléments d'un corps sont mus parallèlement avec la même vîtesse, la résultante de leurs mouvements est toujours une force parallèle

SCD LYON 1

dirigée par le centre de gravité : d'où il suit que si toutes les forces appliquées aux différents points d'un corps ne sont pas réductibles à une seule dirigée par ce centre, il est impossible que toutes les parties du corps prennent la même vîtesse. Il faudra donc que le mobile pirouette sur lui-même, & tourne autour du centre de gravité, qui décrira une ligne droite, avec une vîtesse uniforme. M. *d'Alembert*, & après lui plusieurs Géomètres, ont donné des méthodes pour déterminer généralement tous les mouvements de rotation que doit prendre un mobile de figure quelconque, sollicité par tant de puissances qu'on voudra, suivant des directions quelconques. Ces méthodes, dont on a fait les applications les plus heureuses, ne pouvant être insérées dans cet ouvrage, nous nous contenterons de démontrer, que *si le corps ne reçoit l'impulsion que d'une seule force, & que le plan mené par le centre de gravité & par la direction de cette force, divise le corps en deux parties égales & semblables, le corps doit tourner autour du centre de gravité, de la même manière que si ce centre étoit fixe.*

Soit donc *FK* (*Fig.* 123.) la direction d'une force transmise au corps *P*, & représentée par *FA*. Du point *F* menons par le centre de gravité *G* la droite *FV*. Par le point *G* tirons les deux lignes *IK*, *HL*, la première perpendiculaire, la seconde parallèle à la direction de la force *FA*, & supposons

SCD LYON 1

que le plan *FKG* prolongé coupe le corps en deux moitiés parfaitement ſemblables. Nous pourrons décompoſer la force *FA* en deux autres *FM*, *FN*, la première dirigée au centre de gravité, la ſeconde perpendiculaire à *FK*, en formant le parallélogramme *AMFN*. Au lieu de la force *FM*, nous pourrons en prendre une autre égale *GV*, ſur la même direction, & appliquée au centre même de gravité. Enfin celle-ci pourra ſe décompoſer en deux nouvelles forces *GH*, *GI*, la première parallèle, & la ſeconde perpendiculaire à *FK*. Il ſuffira pour cette décompoſition, de former le parallélogramme *GHVI*.

Cela poſé, on voit que le mobile ſollicité par la force *FA*, ſe trouve dans le même état que s'il étoit ſoumis aux trois forces *FN*, *GH*, *GI*. Or, à cauſe des triangles égaux *FAM*, *GHV*, on a $GH = FA$, $AM = HV$, ou $FN = GI$. Le centre de gravité ſera donc mu en vertu de la ſeule force $GH = FA$, & les deux forces *FN*, *GI*, qui ſont égales, parallèles & oppoſées, ne pourront lui donner aucun mouvement de tranſlation. Mais comme elles ne ſont pas oppoſées ſuivant la même ligne, elles ne ſe feront pas équilibre, & par conſéquent elles communiqueront au corps un mouvement de rotation, qui au ſurplus ne dépendra que de la force *FN*, puiſque la force *GI* eſt appliquée au centre de gravité.

SCD LYON 1

Tout se réduit donc à faire voir, que la force FN doit faire tourner le corps autour du centre de gravité, comme la force FA le feroit tourner, si ce centre étoit immobile. Or 1° soit que le centre de gravité soit fixe, soit qu'il se meuve suivant GH, toutes les parties du corps doivent tourner parallèlement au plan FKG; puisque le corps étant coupé par ce plan en deux moitiés parfaitement semblables, il ne peut y avoir de raison pour qu'il vacille d'un côté du plan plutôt que de l'autre. 2° Si le centre G étoit fixe, le moment de la puissance FA qui feroit tourner le corps, seroit $FA \times GK$; & dans le cas où le centre de gravité se meut, si l'on prolonge la direction de la puissance FN jusqu'au point L, où elle rencontre la perpendiculaire GL, le moment de FN sera $FN \times GL$. Or les triangles semblables FAM, FKG donnent la proportion $FA : AM :: FK : GK$, ou mettant pour AM & FK les lignes FN, GL, qui leur sont égales, $FA : FN :: GL : GK$; d'où l'on tire $FA \times GK = FN \times GL$. Donc les moments des forces FA & FN sont égaux, & par conséquent ces forces doivent produire le même mouvement de rotation autour du centre de gravité.

CCLXIV.

THÉORÈME VI. *Si deux mobiles* M & M' (Fig. 124.) *lancés suivant des directions quelconques*

MA

MA, M'A', *s'attirent par des forces qui soient en raison directe des masses attirantes, & en raison inverse des quarrés des distances, leur centre de gravité G se meut ou tend à se mouvoir, comme si les corps ne s'attiroient pas.*

Car soient *MA*, *M'A'* les espaces que décriroient dans un tems infiniment petit, les deux mobiles, s'ils étoient libres; *MB* & *M'B'* les espaces qu'ils décriroient, dans le même tems, en vertu de leurs attractions mutuelles: il est évident qu'en achevant les parallélogrammes *MADB*, *M'A'D'B'*, ils décriront les diagonales infiniment petites *MD*, *M'D'*. Il est évident aussi que le centre de gravité sera dans le même état, en vertu des mouvements suivant ces diagonales, qu'en vertu des mouvements primitifs & des mouvements produits par les attractions des corps; puisque c'est de ces deux mouvements que résultent les mouvements suivant les diagonales. Or, en vertu des mouvements produits par les forces attractives, le centre de gravité doit demeurer en repos: donc son état, en vertu des mouvements que les corps prendront, suivant les diagonales *MD*, *M'D'*, est le même qu'il auroit en vertu de leurs mouvements primitifs suivant les directions *MA* & *M'A'*.

Voici comment on peut démontrer, qu'en vertu des mouvements produits par les forces attractives, le centre de gravité doit demeurer en repos. Les

SCD LYON 1

espaces MB & $M'B'$ étant proportionnels aux forces attractives, & ces forces elles-mêmes étant comme les masses attirantes divisées par le quarré de la distance, nous aurons $MB : M'B' :: \frac{M'}{\overline{MM'}^2} : \frac{M}{\overline{MM'}^2} :: M' : M$. Or, par la propriété du centre de gravité, $M' : M :: GM : GM'$; donc $GM : GM' :: MB : M'B'$; d'où l'on tire $GM : GM' :: GM - MB : GM' - M'B' :: GB : GB'$. Donc $GB : GB' :: M' : M$, & par conséquent les corps M & M' parvenus aux points B & B' par l'action des forces attractives, auroient encore leur centre de gravité au même point G.

On démontrera de même, que *si les attractions des mobiles sont proportionnelles aux masses attirantes divisées ou multipliées par une puissance quelconque des distances, le centre de gravité se meut ou tend à se mouvoir, comme si les mobiles ne s'attiroient pas.* Seulement dans la proportion $MB : M'B' :: \frac{M'}{\overline{MM'}^2} : \frac{M}{\overline{MM'}^2}$, au lieu de diviser M' & M par $\overline{MM'}^2$, il faudra les diviser ou les multiplier par la puissance des distances marquée par la loi des attractions *.

* Quel que soit le nombre des corps qui s'attirent mutuellement en raison directe des masses, multipliées ou divisées par une puissance quelconque des distances, l'état du centre

CCLXV.

REMARQUE. Si deux mobiles lancés comme on voudra dans un même plan, & qui exercent l'un sur l'autre des forces attractives proportionnelles aux masses divisées ou multipliées par une puissance quelconque des distances, reçoivent en même tems de nouvelles vîtesses égales, parallèles & dans le même sens, ils auront à chaque instant les mêmes positions relatives, que s'ils n'avoient pas reçu ces vîtesses.

En effet, supposons que les mobiles (*Fig.* 125.) lancés aux points M & M' suivant les directions MX, $M'X'$, doivent décrire dans le premier instant les lignes MA, $M'A'$, en vertu de leurs attractions mutuelles & des impulsions primitives. Leur position respective à la fin de cet instant, sera déterminée par la longueur & par la direction de

commun de gravité ne sera point altéré par les attractions. Pour le démontrer, j'imagine trois plans qui se coupent perpendiculairement au centre commun de gravité: je décompose les mouvements produits dans chaque corps par les attractions des autres, en deux nouveaux, l'un perpendiculaire & l'autre parallèle au premier de ces plans. Je trouve que la résultante de tous les mouvements perpendiculaires, est zéro; d'où je conclus que le centre de gravité ne doit prendre aucun mouvement, qui le fasse sortir du premier plan. Je trouve de même, qu'il ne sortira pas des deux autres plans. Donc l'attraction mutuelle des corps ne change en rien l'état du centre commun de gravité.

SCD LYON 1

la ligne AA'. Si les mobiles reçevoient de plus aux points M & M' des impulsions dans le même sens, capables de leur faire décrire les lignes MB, $M'B'$ égales & parallèles, on voit en faisant les parallélogrammes $MAaB$, $M'A'a'B'$, qu'à la fin du premier instant, ils arriveroient aux points a, a'; & leur position respective seroit déterminée par la longueur & par la direction de la ligne aa'. Or les lignes AA', aa' menées aux extrémités des droites Aa, $A'a'$ égales & parallèles, sont elles-mêmes égales & parallèles. Donc à la fin du premier instant, les mobiles auront la même position respective, que s'ils n'avoient point reçu les vîtesses égales suivant les lignes parallèles MB, $M'B'$.

Ayant prolongé les lignes MA, $M'A'$, Ba, $B'a'$, Aa, $A'a'$, jusqu'aux points Z, Z', z, z', b, b', de manière que les prolongements soient égaux aux lignes mêmes; on voit 1° que les mobiles parvenus aux points A & A' seroient soumis à leurs attractions mutuelles & à des forces capables de leur faire décrire dans le second instant égal au premier, les lignes AZ, $A'Z'$. On voit 2° que les mobiles parvenus aux points a & a' seroient soumis de même à leurs attractions & à des forces capables de leur faire décrire les lignes az, ab, $a'z'$, $a'b'$. Cela posé, les mobiles soumis à ces dernières forces, prendroient la même position relative, que s'ils n'étoient sollicités que par leurs attractions & par les forces

SCD LYON 1

capables de faire parcourir les lignes az, $a'z'$, comme nous venons de le démontrer : or il eſt évident que s'ils n'étoient ſollicités que par leurs attractions & par les forces capables de leur faire parcourir les lignes az, $a'z'$, leur poſition relative ſeroit la même que celle qu'il prendroit en vertu des attractions & des forces capables de faire parcourir les lignes AZ, $A'Z'$, auxquelles ils ſont ſoumis aux points A & A' ; puiſque les lignes AZ & $A'Z'$ ſont reſpectivement égales & parallèles aux lignes az, $a'z'$, & que les attractions des mobiles aux points A & A' ſont auſſi des forces égales & parallèles à leurs attractions, aux points a & a'.

La même démonſtration auroit lieu pour le troiſième inſtant, pour le quatrième inſtant, & en général pour un inſtant quelconque.

Du reſte, on peut généraliſer la propoſition qui fait l'objet de la préſente remarque, & reconnoître que ſi pluſieurs corps, lancés comme on voudra dans l'eſpace, viennent à recevoir de nouvelles vîteſſes égales & parallèles dans le même ſens, leur poſition reſpective ſera la même à chaque inſtant, que s'ils ne les avoient pas reçues.

On conçoit en effet, que ſi les mobiles n'avoient que ces vîteſſes égales & parallèles, ils conſerveroient conſtamment la même poſition reſpective. Donc ces vîteſſes n'influent en rien dans le changement de cette poſition.

SCD LYON 1

CCLXVI.

COROLLAIRE I. *Si deux mobiles* M & M′ (Fig. 126.) *lancés dans le même plan, avec des vîtesses & ſuivant des directions quelconques, s'attirent mutuellement avec des forces proportionnelles aux maſſes attirantes diviſées par les quarrés des diſtances, chacun de ces mobiles ſera toujours porté vers le centre de gravité, par des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés de ſes diſtances à ce point.*

Car ſuppoſons que les mobiles placés en M & en M' aient leur centre de gravité en G, & que parvenus en m & m', ils aient ce centre en g: on aura $M + M' : M' :: MM' : GM :: mm' : gm$, d'où l'on tire $MM' : mm' :: GM : gm$. Or, en nommant F & f les forces attractives auxquelles le mobile M eſt ſoumis dans les points M & m de ſa trajectoire, on a, par l'hypothèſe, $F : f :: \frac{M'}{MM'^2} : \frac{M'}{mm'^2}$. Donc en ſubſtituant, au lieu du rapport de MM' à mm', celui de GM à gm, on aura $F : f :: \frac{M'}{GM^2} : \frac{M'}{gm^2}$; ce qui fait voir que les forces qui portent le mobile M vers le centre de gravité, ſont toujours en raiſon inverſe des quarrés de ſes diſtances à ce point. On démontreroit la même choſe du mobile M' en faiſant un ſemblable raiſonnement.

SCD LYON 1

En général, *si les attractions des mobiles étoient proportionnelles aux masses attirantes, divisées ou multipliées par une puissance quelconque des distances, les forces qui porteroient l'un des mobiles vers le centre de gravité, seroit comme la masse de l'autre mobile, divisée ou multipliée par la puissances des distances à ce centre, énoncée dans la loi des attractions.* Pour le démontrer, il faudroit seulement dans la proportion $F : f :: \frac{M'}{MM'^2} : \frac{M'}{mm'^2}$, diviser ou multiplier M' par la puissance donnée des distances MM', mm', au lieu de le diviser comme nous avons fait, par le quarré de ces lignes.

CCLXVII.

COROLLAIRE II. *En supposant toujours les attractions en raison directe des masses attirantes & en raison inverse des quarrés des distances, si les deux mobiles* M & M' (Fig. 127.) *sont lancés dans le même plan, de manière que leur centre de gravité* G *demeure en repos, ils décriront des sections coniques semblables* Mm, M'm', *qui auront pour foyer commun ce centre de gravité.*

Car 1° on a démontré (*Num.* CCXXVII.) que la trajectoire décrite par un mobile porté constamment vers un même point par des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances à ce point, étoit toujours une section conique. 2° Si par

SCD LYON 1

le centre de gravité on tire les lignes MM', mm' jusqu'à la rencontre des deux trajectoires, quand le mobile M sera en m, le mobile M' sera en m', & l'on aura $M : M' :: GM' : GM :: Gm' : Gm$. Donc les points correspondants quelconques m & m' seront semblablement placés par rapport aux lignes GM & GM'; ce qui ne peut arriver, à moins que les courbes ne soient semblables.

Si le centre de gravité G (Fig. 128.) *se meut uniformément avec une vîtesse* V, *les mobiles décriront aussi des sections coniques semblables, dont tous les points seroient transportés parallèlement à la direction du centre de gravité, avec la même vîtesse* V.

Car supposons que les mobiles lancés aux points M & M' arrivent après un tems quelconque T, aux points m & m' de leurs trajectoires, & que le centre de gravité décrive pendant le même tems l'espace Gg. La position relative des deux mobiles sera déterminée par la ligne mm', & l'on aura $M + M' : M' :: mm' : gm$. Si l'on avoit donné en M & en M' à chacun des mobiles une vîtesse V égale, mais opposée à celle du centre de gravité, ce centre seroit resté en repos, & les mobiles décrivant des sections coniques semblables, seroient arrivés après le tems T à quelques points n, n', de ces courbes. La ligne nn' qui détermineroit leur position respective, seroit égale & parallèle à la

SCD LYON 1

ligne mm' (*Num.* CCLXV.), & l'on auroit $M+M' : M' :: nn' : Gn$. Les trois premiers termes de cette proportion étant égaux aux trois premiers termes de la précédente, on peut conclure que $Gn = gm$: donc auſſi $mn = Gg = m'n'$. Or il eſt évident que ſi tous les points des ſections coniques MX, $M'X'$ avançoient parallèlement à la direction du centre de gravité avec la vîteſſe V, les points n & n' arriveroient après le tems T aux points m & m'. Donc ces points m & m' où arrivent les mobiles après un tems quelconque T, ne ſont autre choſe que des points de ſections coniques mobiles, & dont toutes les parties avancent parallèlement à Gg avec la même vîteſſe que le centre de gravité.

SECTION V.

Du Choc des Corps.

CCLXVIII.

Le *choc* eſt l'action par laquelle un corps en mouvement en rencontre un autre & tend à le pouſſer. Le choc peut être *direct* ou *oblique*. Il eſt direct, lorſque l'impulſion ſe fait ſuivant une ligne perpendiculaire à l'endroit du contact, & qui de plus paſſe par le centre de gravité des deux corps qui ſe rencontrent. Le choc eſt oblique, lorſque l'impulſion ſe fait ſuivant une ligne oblique à l'endroit du con-

SCD LYON 1

tact, ou suivant une ligne perpendiculaire à cet endroit, mais qui ne passe pas par le centre de gravité des deux corps.

CCLXIX.

TOUS les solides que nous connoissons, s'applatissent plus ou moins dans le choc; & dès que la force qui les avoit comprimés, cesse d'agir, ils reprennent leur première figure d'une manière plus ou moins parfaite. C'est la force avec laquelle ils se rétablissent, qu'on nomme *élasticité* ou *ressort* des corps. Quoiqu'il n'y ait dans la nature ni corps solides *parfaitement durs*, c'est-à-dire, absolument incompressibles; ni corps *parfaitement moux*, qui après avoir été comprimés dans le choc, restent dans l'état d'applatissement où la compression les a réduits, sans faire effort pour reprendre leur première figure; ni corps *parfaitement élastiques* ou à *ressort parfait*, qui se rétablissent entièrement après la compression, par les mêmes degrés par lesquels ils avoient été applatis; nous commencerons cependant par les considérer comme s'ils avoient une dureté, ou une mollesse, ou une élasticité parfaite. Nous déterminerons ensuite plus aisément les loix du choc des corps à ressort imparfait.

CCLXX.

QUAND deux corps se rencontrent, il peut arriver qu'ils aillent avant le choc dans le même sens,

SCD LYON 1

ou qu'ils ſe meuvent en ſens contraire. Dans le premier cas, on nomme corps *choquant* celui qui pourſuivant l'autre a le plus de vîteſſe, & corps *choqué* celui qui fuit avec une moindre vîteſſe. Dans le ſecond cas, on nomme corps choquant celui qui a le plus de force, & corps choqué celui qui en a le moins. On appelle viteſſes *primitives* celles qu'ont les corps avant le choc.

Du Choc des Corps parfaitement durs, & de celui des Corps parfaitement moux.

CCLXXI.

PROBLÈME I. *Connoiſſant les maſſes & les vîteſſes primitives de deux corps parfaitement durs, dont l'un va frapper l'autre qui fuit directement devant lui, trouver leur vîteſſe après le choc.*

SOLUTION. Soient reſpectivement M & m les maſſes du corps choquant & du corps choqué, V & v leurs vîteſſes primitives. 1° Il eſt évident qu'après le choc les deux corps doivent ſe mouvoir avec la même vîteſſe & aller de compagnie. Car ſi l'on vouloit ſuppoſer que le corps choqué eût moins de vîteſſe que le corps choquant, celui-ci continueroit d'agir ſur lui, ce qui eſt contre l'hypothèſe : mais dès qu'on ſuppoſera qu'ils ont la même vîteſſe, il n'y aura plus d'action de l'un ſur l'autre.

2° Il eſt évident que ces deux corps allant de

SCD Lyon1 Mathématiques

SCD LYON 1

compagnie après le choc, auront la même vîteſſe que leur centre commun de gravité. Or la vîteſſe du centre de gravité avant le choc eſt $x = \frac{MV+mv}{M+m}$ (*Num.* CCLVII.), & cette vîteſſe ne change point par le choc des corps (*Num.* CCLXI.). Donc la vîteſſe commune des deux corps après le choc ſera auſſi $x = \frac{MV+mv}{M+m}$.

CCLXXII.

COROLLAIRE I. *La vîteſſe que le corps choquant perd dans la colliſion, eſt égale à la différence des vîteſſes primitives multipliée par la maſſe du corps choqué, & diviſée par la ſomme des maſſes. La vîteſſe que le corps choqué gagne dans la colliſion, eſt égale à la différence des vîteſſes primitives multipliée par la maſſe du corps choquant, & diviſée par la ſomme des maſſes.*

Car en admettant toutes les dénominations données dans le problème précédent, la vîteſſe que le corps choquant perd dans la colliſion eſt égale à la vîteſſe V qu'il avoit avant le choc, moins la vîteſſe x qu'il conſerve après le choc: or $V-x = V-\frac{MV-mv}{M+m} = \frac{mV-mv}{M+m} = \frac{m(V-v)}{M+m}$.

De même la vîteſſe que gagne le corps choqué eſt égale à la vîteſſe x qu'il a après la percuſſion, moins la vîteſſe v qu'il avoit déjà. Or $x-v$

SCD LYON 1

$$= \frac{MV + mv}{M+m} - v = \frac{MV - Mv}{M+m} = \frac{M(V-v)}{M+m}.$$

CCLXXIII.

COROLLAIRE II. *La quantité de mouvement perdue par le corps choquant dans la colliſion, eſt égale à la quantité de mouvement gagnée par le corps choqué.*

Car pour avoir la quantité de mouvement perdue par le corps choquant, il faut multiplier la vîteſſe qu'il perd, par ſa maſſe, & l'on aura $\frac{M \times m(V-v)}{M+m}$. De même pour avoir la quantité de mouvement gagnée par le corps choqué, il faut multiplier la viteſſe qu'il gagne, par ſa maſſe, & l'on trouvera $\frac{m \times M(V-v)}{M+m}$. Or $\frac{M \times m(V-v)}{M+m} = \frac{m \times M(V-v)}{M+m}$. Donc le mouvement perdu par le corps choquant eſt égal au mouvement gagné par le corps choqué.

On voit par là, que le choc détruit autant de mouvement dans le corps choquant, qu'il en fait naître dans le corps choqué. C'eſt ce que les Phyſiciens expriment d'une autre manière, en diſant, que dans le choc, *la réaction eſt égale à l'action.* Mais il faut obſerver qu'ils emploient quelquefois cette dernière propoſition dans un ſens très-différent, pour ſignifier que dans le choc des corps parfaitement élaſtiques, la force qui fait reprendre à

SCD LYON 1

ces corps leur première figure, après la compression, est égale à celle qui l'avoit changée.

CCLXXIV.

COROLLAIRE III. *Les quantités de mouvement que les deux corps, choquant & choqué, ont après la collision, sont proportionnelles à leurs masses.*

Car en appelant toujours M & m leurs masses, & x la vîtesse commune après le choc, les quantités de mouvement qu'ils auront après le choc seront Mx, mx: or il est évident que $Mx : mx :: M : m$.

CCLXXV.

COROLLAIRE IV. Quand la vîtesse v du corps choqué est zéro, c'est-à-dire, quand ce corps est en repos, le terme mv devient zéro dans la formule $x = \frac{MV + mv}{M + m}$, & cette formule se réduit à $x = \frac{MV}{M+m}$. Donc en ce cas *la vîtesse commune après le choc, est égale à la quantité primitive de mouvement du corps choquant, divisée par la somme des masses.*

CCLXXVI.

PROBLÈME II. *Supposons à présent que les deux corps parfaitement durs qui doivent se choquer directement, viennent à la rencontre l'un de l'autre: on demande leur vîtesse après le choc.*

SOLUTION. Que les masses du corps choquant

SCD LYON 1

& du corps choqué soient toujours respectivement M & m : que leurs vîtesses primitives soient V & v.

1° Si l'on supposoit qu'après le choc, la vîtesse du corps choqué fût moindre que celle du corps choquant, celui-ci continueroit d'agir sur le premier, ce qui est contre la supposition. Mais si l'on suppose qu'ils aient l'un & l'autre la même vîtesse, il n'y aura plus d'action de l'un sur l'autre. Donc après le choc ils iront de compagnie, & par conséquent ils auront la même vîtesse que leur centre commun de gravité.

2° La vîtesse du centre commun de gravité est la même avant qu'après le choc (*Num.* CCLXI.). Or, pour avoir cette vîtesse avant le choc, il faut (*Num.* CCLVII.) diviser la différence des mouvements par la somme des masses; c'est-à-dire, qu'en nommant x cette vîtesse, on a $x = \frac{MV - mv}{M + m}$. Donc la vîtesse du centre de gravité après le choc, ou la vîtesse commune des deux corps, sera aussi $x = \frac{MV - mv}{M + m}$

CCLXXVII.

Remarque. Lorsque les deux corps qui doivent se choquer, vont dans le même sens, leurs vîtesses primitives V & v sont regardées l'une & l'autre comme *positives* : mais lorsqu'avant le choc ils se meuvent en sens contraires, on regarde

comme *positive* la vîtesse V du corps choquant, & par conséquent on doit traiter comme *négative* la vîtesse opposée du corps choqué, & supposer qu'elle est $-v$.

CCLXXVIII.

COROLLAIRE I. *Quand deux corps durs, mus en sens contraires, se choquent directement,* 1° *la vîtesse perdue par le corps choquant est égale à la différence des vîtesses primitives multipliée par la masse du corps choqué, & divisée par la somme des masses. La vîtesse gagnée par le corps choqué, est aussi égale à la différence des vîtesses primitives multipliée par la masse du corps choquant & divisée par la somme des masses.*

Car la vîtesse que perd le corps choquant est

$$V-x=V-\frac{MV+mv}{M+m}=\frac{mV+mv}{M+m}=\frac{m(V+v)}{M+m}.$$

Or $V+v$ est la différence des vîtesses primitives $V,-v$; & m est la masse du corps choqué.

De même, la vîtesse que le corps choqué gagne suivant la direction du corps choquant, est $v+x$. Car il acquiert d'abord la vîtesse v qui détruit la vîtesse $-v$ qu'il avoit avant le choc: il acquiert de plus la vîtesse x, avec laquelle il se meut après le choc suivant la direction du corps choquant. Donc après le choc, la vîtesse qu'il a gagnée suivant la direction du corps choquant, est $v+x$

$=v$

SCD LYON 1

$$= v + \frac{MV - mv}{M+m} = \frac{MV + Mv}{M+m} = \frac{M(V+v)}{M+m}.$$

2° *La quantité de mouvement que perd le corps choquant, eſt égale à celle que le corps choqué gagne ſuivant la direction du choquant.*

En effet, pour avoir la quantité de mouvement perdue par le corps choquant, il faut multiplier la vîteſſe qu'il perd dans la colliſion, par ſa maſſe, & l'on trouvera $\frac{M \times m(V+v)}{M+m}$. De même, pour avoir la quantité de mouvement gagnée par le corps choqué ſuivant la direction du corps choquant, il faut multiplier la vîteſſe qu'il gagne en ce ſens, par ſa maſſe, & l'on aura $\frac{m \times M(V+v)}{M+m}$. Or il eſt évident que $\frac{M \times m(V+v)}{M+m} = \frac{m \times M(V+v)}{M+m}$.

On peut donc dire que dans le choc des corps durs, mus en ſens contraires, comme dans celui des corps qui vont dans le même ſens, *la réaction eſt toujours égale à l'action.*

CCLXXIX.

COROLLAIRE. II. La ſolution des deux problèmes précédents (*Num.* CCLXXI & CCLXXVI.) nous fournit la règle ſuivante pour déterminer, dans tous les cas la vîteſſe commune des corps incompreſſibles après le choc. *Si les mobiles vont dans le même ſens avant de ſe choquer, ajoutez*

SCD LYON 1

ensemble leurs quantités de mouvement, & divisez la somme par la somme des masses, le quotient donnera la vîtesse commune. Si les mobiles se meuvent en sens contraires avant le choc, prenez séparément la quantité de mouvement de l'un & de l'autre; ôtez la plus petite de la plus grande, & divisez le reste par la somme des masses: vous aurez pour quotient la vîtesse commune.

Par exemple, si un mobile dont la masse est de 3 onces & la vîtesse de 9 pieds par seconde, en rencontre un autre dont la masse est de 6 onces, & qui fuit devant lui avec une vîtesse de 2 pieds par seconde; ajoutez ensemble les quantités de mouvement 27 & 12: divisez ensuite la somme 39 par la somme des masses $3 + 6$ ou 9: le quotient $\frac{39}{9} = 4 + \frac{1}{3}$ exprimera la vîtesse commune après le choc.

Si les deux mêmes corps viennent se choquer en sens contraire, avec les mêmes vîtesses primitives, vous trouverez la vîtesse commune en retranchant la quantité de mouvement 12 du second, de la quantité de mouvement 27 du premier, & en divisant le reste 15 par 9, ce qui donnera pour quotient $1 + \frac{2}{3}$.

Enfin, si le corps qui a 6 onces de masse est en repos, divisez le mouvement de l'autre, qui est 27, par la somme des masses qui est 9. Le quotient 3 donnera la vîtesse commune après le choc.

SCD LYON 1

CCLXXX.

REMARQUE I. Si les corps qui ſe choquent, étoient parfaitement mous, l'action de l'un ſur l'autre ne ceſſeroit qu'au moment qu'ils auroient la même vîteſſe : donc après le choc ils iroient de compagnie, avec une vîteſſe égale à celle de leur centre commun de gravité ; & puiſque la colliſion ne change rien à la vîteſſe du centre de gravité, leur vîteſſe après le choc ſeroit égale à la ſomme ou à la différence des mouvements primitifs (ſelon que les corps iroient d'un même ou de différents ſens) diviſée par la ſomme des maſſes

On voit par là, que les corps parfaitement mous ſuivent, dans le choc, les mêmes loix que les corps incompreſſibles. Il faut ſeulement obſerver que, dans le choc des corps durs, le mouvement eſt cenſé ſe communiquer dans un inſtant indiviſible ; au lieu que dans le choc des corps mous, la communication du mouvement ſe fait dans un tems fini plus ou moins long, ſuivant que les corps ont plus ou moins de compreſſibilité.

CCLXXXI.

REMARQUE. II. Un corps ne pouvant de lui-même changer ſon état, il faut néceſſairement l'action d'une force étrangère, pour augmenter ou pour diminuer ſon mouvement. Il ſuit même des principes fondamentaux de la Méchanique, & des

SCD LYON 1

théories démontrées jusqu'à présent, que pour enlever à un corps une certaine quantité de mouvement, il faut employer autant de force, que pour donner la même quantité de mouvement à un autre corps. Donc, puisque la collision fait perdre au corps choquant autant de mouvement qu'elle en fait gagner au corps choqué, des forces égales sont employées à changer les états primitifs de ces corps, & à les applatir s'ils sont compressibles.

Du Choc des Corps élastiques.

CCLXXXII.

THÉOREME. *Dans le choc des corps à ressort parfait, le corps choquant perd toujours une vîtesse double de celle qu'il perdroit, & le corps choqué gagne toujours une vîtesse double de celle qu'il gagneroit, s'ils étoient sans ressort.*

Pour le démontrer, il faut considérer les circonstances du choc des corps à ressort parfait. Quand deux corps élastiques se rencontrent, ils se compriment de plus en plus, jusqu'au moment où les deux centres & le point de contact ont une égale vîtesse pour avancer dans le même sens. Ils s'applatissent ainsi par degrés, non seulement dans l'endroit où ils se touchent, mais aussi dans la partie opposée; parce que les parties les plus éloignées du contact s'avançant plus promptement dans l'un & plus lentement dans l'autre, jusqu'à ce que la compression soit finie,

SCD LYON 1

refoulent d'autant les parties intermédiaires. Mais la compreſſion une fois achevée, les parties des deux corps voiſines du contact, s'appuient les unes contre les autres pendant que le contact eſt tranſporté, & alors tout le débandement du reſſort s'exerce vers les côtés oppoſés au point de contact, enſorte que les centres ſont entraînés en ſens contraires avec tout l'effort, avec lequel la reſtitution tend à ſe faire. Or, puiſqu'on ſuppoſe les corps parfaitement élaſtiques, ils doivent ſe rétablir dans leur première figure avec une force égale à celle qui les a comprimés: cette force repouſſera donc en arrière le corps choquant, en lui communiquant une vîteſſe égale à celle qu'il a perdue par la compreſſion, & en même tems elle imprimera au corps choqué autant de vîteſſe que la compreſſion lui en a déjà communiqué. Donc le choquant perdra & le choqué gagnera la moitié plus de vîteſſe, que le premier n'en perdroit & que le ſecond n'en gagneroit, s'ils étoient ſans reſſort.

CCLXXXIII.

REMARQUE. Dans le choc des corps élaſtiques, non ſeulement le rétabliſſement de figure ſuit la compreſſion, mais ce rétabliſſement eſt lui-même ſuivi d'un nouveau changement de figure tout contraire au premier. A celui-ci, il en ſuccède un autre qui ramène à la figure qu'ils avoient lors de

SCD LYON 1

la compreſſion, & ainſi de ſuite. Enſorte que les parties de chaque corps ont à l'égard de leur centre de gravité, un mouvement de vibration ou d'allée & de retour; parce que les parties tendent à revenir à leur première figure par un mouvement qui va en s'accélérant, & qui les fait paſſer au-delà. Ces changements alternatifs de figure ſont ſenſibles dans pluſieurs corps élaſtiques, lorſqu'on les frappe; principalement dans les corps ſonores. Mais quoique deux corps qui ſe choquent, ne s'arrêtent pas à leur première figure, dès qu'ils y ſont arrivés en ſe rétabliſſant, néanmoins ils doivent ſe quitter à ce terme, & par conſéquent ils n'ont plus d'action l'un ſur l'autre.

En effet, pour que les corps comprimés reviennent à leur première figure, il faut un tems fini, que l'on peut regarder comme compoſé d'une infinité d'inſtans égaux & infiniment petits. Les corps ſe dilatent moins au premier de ces inſtants qu'au ſecond, moins au ſecond qu'au troiſième, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier; de manière que l'inſtant où ils arrivent à leur première figure, eſt celui où la dilatation eſt la plus grande. Elle diminue enſuite de plus en plus, quand les corps ſouffrent un changement de figure contraire à celui qu'ils avoient reçu de la compreſſion. Or ces circonſtances ne peuvent pas avoir lieu, à moins que les deux mobiles ne ſe ſéparent l'un de l'autre, au moment où

SCD LYON 1

ils arrivent à leur première figure en se rétablissant. Car si pendant l'instant qui a précédé ce retour à la figure primitive, les parties comprises entre le contact & les centres du choquant & du choqué, se sont dilatées respectivement des quantités d & d', les centres se feront éloignés, pendant cet instant, d'une quantité $d+d'$. Ces centres s'éloigneront donc encore l'un de l'autre, d'une quantité $d+d'$, pendant l'instant suivant; & même il est évident qu'ils s'éloigneroient davantage, s'ils continuoient à se presser au point de contact. Donc les corps ne demeureront point contigus, à moins qu'ils ne se dilatent l'un vers l'autre d'une quantité $d+d'$. Or c'est ce qu'on ne peut pas supposer, puisqu'ils doivent se moins dilater dans cet instant que dans le précédent. Ils se quitteront donc & n'agiront plus l'un sur l'autre.

On peut ajouter que les vibrations qui auront encore lieu dans chacun des deux corps, après leur séparation, ne peuvent influer en rien sur les vîtesses de leurs centres de gravité. Car ces vibrations ne continuant plus que par l'action des parties d'un même corps les unes sur les autres, cette action ne peut produire aucun changement dans l'état du centre de gravité de ce corps (*Num.* CCLXI.).

CCLXXXIV.

COROLLAIRE. *Il suit du théorème précédent;*

SCD LYON 1

que deux corps à reſſort qui ſe rencontrent, n'ont jamais la même vîteſſe après le choc.

Car ces corps iroient de compagnie, s'ils ne reprenoient pas leur première figure après avoir été comprimés. Mais la réaction doit néceſſairement augmenter la vîteſſe du corps choqué & diminuer celle du corps choquant. Il n'eſt donc pas poſſible que les deux corps aient la même vîteſſe après le choc.

CCLXXXV.

PROBLÈME I. *Connoiſſant les vîteſſes primitives de deux corps à reſſort parfait, qui ſe choquent directement, trouver les vîteſſes qu'ils auront l'un & l'autre après le choc.*

SOLUTION. Pour réſoudre ce problème, cherchez la vîteſſe commune qu'auroient les corps après le choc, s'ils étoient ſans reſſort; alors ſi du double de cette vîteſſe, vous ôtez la vîteſſe primitive de chacun, vous aurez les vîteſſes de chacun après le choc. Sur quoi il faut obſerver, que ſi les corps vont en ſens contraires avant le choc, on doit donner le ſigne — à la vîteſſe primitive du corps choqué, & la conſidérer comme négative par rapport à celle du corps choquant.

Cette règle ſe déduit très-ſimplement du théorème démontré (*Num.* CCLXXXII.). Car ſoient V & v les vîteſſes primitives du corps choquant & du corps choqué: en nommant auſſi x la vîteſſe

SCD LYON 1

commune qu'ils auroient après le choc, s'ils étoient ſans reſſort, le corps choquant perdroit dans la compreſſion, la vîteſſe $V-x$, & ne conſerveroit que la vîteſſe x. Donc, puiſqu'il doit perdre autant de vîteſſe par la réaction qu'il en a perdu par la compreſſion, il faudra encore ôter $V-x$ de la vîteſſe x, qui lui reſte après la compreſſion, & la différence $2x-V$ donnera ſa vîteſſe après le choc. Donc la vîteſſe du corps choquant ſe trouve en ôtant ſa vîteſſe primitive, du double de celle qu'il auroit, ſi les corps étoient ſans reſſort.

Quant au corps choqué, il peut arriver qu'il ſe meuve, avant le choc, ſuivant la direction du corps choquant, ou qu'il vienne en ſens oppoſé.

Dans le premier cas, il acquiert en vertu de la compreſſion, la vîteſſe $x-v$, & s'il n'y avoit point d'élaſticité, ſa vîteſſe après le choc ſeroit x.

Mais il doit encore gagner par la réaction autant de vîteſſe qu'il en a gagné par la compreſſion. Donc pour avoir ſa vîteſſe, il faut ajouter $x-v$ à x, ce qui donnera $2x-v$. Ainſi, pour avoir ſa vîteſſe après le choc, il faut ôter ſa vîteſſe primitive, du double de celle qu'il auroit, ſi les corps étoient ſans reſſort.

Dans le ſecond cas, le corps choqué gagne dans la compreſſion la vîteſſe $x+v$, & ſi les corps n'étoient pas élaſtiques, ſa vîteſſe après le choc ſeroit x, par la ſuppoſition. Mais la réaction devant lui

SCD LYON 1

donner encore autant de vîteſſe qu'il en a déjà gagné par la compreſſion, il faut ajouter à x une vîteſſe $x+v$, ce qui donnera $2x+v$ pour la vîteſſe qu'il aura réellement après le choc. Il faut donc ôter ſa vîteſſe primitive $-v$, de $2x$, double de la vîteſſe qu'il auroit, ſi les corps n'étoient pas élaſtiques.

Appliquons à quelques exemples la règle que nous venons de démontrer, & ſuppoſons d'abord que les deux corps aillent dans le même ſens. L'un a 6 onces de maſſe & une vîteſſe de 10 pieds par ſeconde; l'autre qui doit être choqué, a 2 onces de maſſe & 2 pieds de vîteſſe par ſeconde. La vîteſſe qu'ils auroient après le choc, s'ils étoient ſans reſſort, ſeroit 8; c'eſt-à-dire, qu'ils iroient de compagnie en parcourant chacun 8 pieds par ſeconde, s'ils n'étoient pas élaſtiques. Si de 16, double de cette vîteſſe, j'ôte les vîteſſes primitives 10 & 2, j'aurai 6 & 14 pour les vîteſſes du choquant & du choqué, après la colliſion.

Si les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre, avec les mêmes maſſes & les mêmes vîteſſes que dans ce premier exemple; alors leur vîteſſe comme corps durs, après le choc, ſera 7. Si du double de cette quantité, c'eſt-à-dire, de 14, on retranche la vîteſſe 10, que le choquant avoit avant la colliſion, on aura 4 pour ſa vîteſſe après le choc. De même, ſi de 14 on ſouſtrait la vîteſſe primitive

SCD LYON 1

—2 du corps choqué, on trouvera 16 pour sa vîtesse après le choc.

Supposons encore qu'un corps dont la masse est de 1 once & la vîtesse de 8 pieds par seconde, en choque un autre dont la masse soit de 5 onces, & qui fuie devant lui avec une vîtesse de 2 pieds par seconde. Si ces corps n'étoient pas élastiques, la vîtesse commune après la collision seroit 3. De 6, double de cette vîtesse, ôtons les vîtesses primitives: nous trouverons 4 pour la vîtesse du corps choqué, après la collision, & —2 pour la vîtesse du corps choquant: ce qui nous apprend que celui-ci, après le choc, reviendra en arrière, avec une vîtesse de 2 pieds par seconde. Cela ne doit point surprendre: car il perd une vîtesse = 5 dans la compression, & ne conserve qu'une vîtesse = 3, pour aller en avant. La réaction lui communiquant ensuite une vîtesse = 5 pour revenir en arrière, il est évident qu'il doit reculer avec une vîtesse = 2.

On déterminera de même les vîtesses du corps choquant & du corps choqué, après la collision, dans tout autre cas particulier.

Du reste, on peut trouver aisément des formules, où ces vîtesses ne soient exprimées que par les vîtesses primitives & par les masses des corps. Pour cela, nommons y & z les vîtesses que doivent avoir respectivement le corps choquant & le corps choqué, après le choc.

SCD LYON 1

1° S'ils vont dans le même sens avant de se rencontrer, nous aurons, $y = 2x - V$, & $z = 2x - v$. Or dans ce cas (*Num.* CCLXXI.), $x = \frac{MV + mv}{M + m}$. Donc on aura

$$y = \frac{2MV + 2mv}{M + m} - V = \frac{MV - mV + 2mv}{M + m};$$

$$\& z = \frac{2MV + 2mv}{M + m} - v = \frac{2MV + mv - Mv}{M + m}.$$

2° Si les deux corps vont en sens opposés, avant de se rencontrer, on aura $y = 2x - V$, & $z = 2x + v$. Or, comme nous l'avons démontré ci-dessus (*Num.* CCLXXVI.), on aura $x = \frac{MV - mv}{M + m}$. Substituant cette valeur, on trouvera

$$y = \frac{2MV - 2mv}{M + m} - V = \frac{MV - mV - 2mv}{M + m},$$

$$\& z = \frac{2MV - 2mv}{M + m} + v = \frac{2MV + Mv - mv}{M + m}.$$

CCLXXXVI.

COROLLAIRE. *Dans le choc des corps parfaitement élastiques, la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses, est la même avant qu'après le choc.*

En effet, soient M & V la masse & la vîtesse primitive du corps choquant, m & v la masse & la vîtesse primitive du corps choqué, v se prenant négativement si les corps se choquent en sens con-

SCD LYON 1

traires. La somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses, avant le choc, sera MV^2+mv^2. Nous allons démontrer qu'on trouvera la même quantité, en multipliant les masses par les quarrés des vîtesses particulières qui auront lieu après le choc.

1° Si les deux mobiles en vertu des vîtesses primitives vont dans le même sens, & que l'on appelle x la vîtesse commune qu'ils prendroient en se choquant, comme corps durs, les produits des masses par les quarrés des vîtesses, après la réaction, seroient $M(2x-V)^2+m(2x-v)^2=4Mx^2-4MVx+MV^2+4mx^2-4mvx+mv^2=MV^2+mv^2+4x(Mx+mx-MV-mv)$. Or cette quantité vaut MV^2+mv^2, puisque le facteur $Mx+mx-MV-mv$, ou $(M+m)x-MV-mv=0$, comme on le reconnoît en substituant à la place de x sa valeur $\frac{MV+mv}{M+m}$, ce qui donne $\frac{(M+m)(MV+mv)}{M+m}-MV-mv$, quantité qui est évidemment zéro.

2° Si les deux mobiles viennent à la rencontre l'un de l'autre, les produits des masses par les quarrés des vîtesses, après le choc, seront $M(2x-V)^2+m(2x+v)^2=4Mx^2-4MVx+MV^2+4mx^2+4mvx+mv^2=MV^2+mv^2+4x(Mx+mx-MV+mv)$. Or cette quantité se réduit à MV^2+mv^2. Car le facteur $Mx+mx$

$-MV+mv$, ou $(M+m)x-MV+mv=0$, comme on le voit aisément en mettant au lieu de x sa valeur $\frac{MV-mv}{M+m}$, ce qui donne

$$\frac{(M+m)(MV-mv)}{M+m}-MV+mv=0.$$

CCLXXXVII.

PROBLÈME II. *Connoissant le ressort & les vîtesses primitives de deux corps imparfaitement élastiques, trouver leurs vîtesses après le choc.*

SOLUTION. Quand les corps sont imparfaitement élastiques, la force avec laquelle ils se rétablissent après la compression, n'est qu'une partie de celle avec laquelle ils se rétabliroient, s'ils étoient à ressort parfait. Nous supposerons que la première de ces forces soit à la seconde, comme p est à 1; p étant une quantité connue, moindre que l'unité, & qui peut varier à l'infini, suivant que les corps ont plus ou moins de ressort.

Cela posé, on déterminera la vîtesse que le corps choquant perdroit & celle que le choqué gagneroit par la réaction, s'ils étoient parfaitement élastiques. Ensuite on fera les deux proportions suivantes.

1 *est à* p, *comme la vîtesse que le choquant perdroit par la réaction, s'il étoit parfaitement élastique, est à celle qu'il doit perdre réellement.*

1 *est à* p, *comme la vîtesse que le choqué ga-*

gneroit par la réaction, s'il étoit parfaitement élaſtique, eſt à celle qu'il gagnera réellement.

On trouvera ainſi la vîteſſe que le choquant doit perdre & celle que le choqué doit gagner par la réaction. On retranchera la première, de la vîteſſe commune que les corps auroient, après le choc, s'ils étoient ſans reſſort; on ajoutera la ſeconde à cette vîteſſe commune. On aura pour différence la vîteſſe du corps choquant, & pour ſomme la vîteſſe du corps choqué, après la réaction.

Suppoſons, par exemple, deux corps mus dans le même ſens avant le choc, & dont le reſſort ſoit $p = \frac{3}{4}$. Que le choquant ait une maſſe de 3 onces & une vîteſſe de 8 pieds par ſeconde: que la maſſe du choqué ſoit de deux onces, & ſa vîteſſe de 3 pieds par ſeconde. Je vois que s'ils étoient ſans reſſort, la vîteſſe commune après le choc, ſeroit de 6 pieds par ſeconde, & que par conſéquent le choquant perdroit 2 de vîteſſe, tandis que le choqué en gagneroit 3, dans la compreſſion. Si leur reſſort étoit parfait, le premier perdroit encore 2 de vîteſſe, par la réaction, tandis que le ſecond en gagneroit 3: mais comme ils ſont à reſſort imparfait, je dis, 1 eſt à $\frac{3}{4}$, comme 2 eſt à la vîteſſe que le choquant doit perdre par la réaction. Je trouve que cette vîteſſe eſt $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$, que je retranche de 6. Le reſte $6 - \frac{3}{2}$ ou $4\frac{1}{2}$ ſera la vîteſſe du choquant, après la colliſion. Je fais de même la proportion,

1 est à $\frac{3}{4}$, comme 3 est à la vîtesse que le choqué doit gagner par la réaction. Cette vîtesse est $\frac{2}{4}$ que j'ajoute à la vîtesse 6. La somme $8\frac{1}{4}$ marque la vîtesse du corps choqué, après le choc.

CCLXXXVIII.

REMARQUE I. Si la vîtesse que la réaction donne au corps choqué, est la moitié, les deux tiers ou les trois quarts, &c. de celle que la compression lui imprime suivant la direction du corps choquant, c'est une preuve que la force élastique de ce corps n'est que la moitié, les deux tiers ou les trois quarts, &c. de ce qu'elle seroit, si le ressort étoit parfait; puisqu'en supposant les corps parfaitement élastiques, le choqué recevroit autant de vîtesse par la réaction que par la compression (*Num.* CCLXXXII.). Donc en représentant, comme dans le problème précédent, le ressort parfait par l'unité, & le ressort imparfait du corps par un nombre p moindre que l'unité, on aura la proportion suivante: 1 *est à* p, *comme la vîtesse que la compression donne au corps choqué suivant la direction du choquant, est à celle que la réaction lui communique.* On peut donc trouver la valeur de p, ou le degré d'élasticité d'un corps, par une expérience immédiate, en le faisant choquer par un autre corps de même espèce, & divisant la vîtesse qu'il recevra dans la réaction, par celle que la compression lui aura communiquée.

Qu'un

SCD LYON 1

Qu'un corps en repos, par exemple, soit choqué par un corps égal & de même espèce, qui ait une vîtesse de 8 pieds par seconde. Je vois que le choqué doit recevoir dans la compression une vîtesse de 4 pieds. S'il a une vîtesse de 6 pieds après le choc, j'en conclurai qu'il a reçu 2 de vîtesse par la réaction, & qu'on a $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Telle est la méthode qu'on peut employer pour déterminer le ressort de chaque espèce de corps en particulier. Elle suppose évidemment que dans chaque corps, la réaction soit en raison constante avec la compression, quelle que soit la force du choc; c'est-à-dire, que si la réaction donne au corps choqué une vîtesse de 2 pieds, pendant que la compression lui communique une vîtesse de 4 pieds, la réaction donnera aussi au même corps des vîtesses de 3, 4, 10 pieds, &c., pendant que la compression lui communiquera des vîtesses de 6, 8, 20 pieds, &c.; ce qui n'est peut-être pas exactement vrai.

Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur les loix du choc direct des corps: mais en finissant cette section, nous dirons un mot du choc oblique & du centre de percussion, dans les remarques suivantes.

CCLXXXIX.

REMARQUE II. Supposons deux globes *M* & *m* (*Fig.* 129.), qui partant des points *M* & *m*

SCD LYON 1

se meuvent dans le même plan, suivant les lignes *MA*, *mA*, & doivent se choquer obliquement. Que la vîtesse *V* du premier soit capable de lui faire parcourir la ligne *MC*, pendant que la vîtesse *v* du second lui fera parcourir la ligne *mA*. Il s'agit de trouver l'endroit où ces globes se rencontreront, & de déterminer ensuite leurs vîtesses & leurs directions après le choc.

1° J'achève le parallélogramme *MmAB*, en menant *MB* parallèle à *mA*, & *AB* parallèle à *Mm*. Je joins les points *B* & *C* par la ligne *BC*. Ensuite du point *A* pris pour centre, avec un rayon *AD* égal à la somme des rayons des globes proposés, je décris l'arc *ED*, qui coupe la ligne *CB* aux deux points *E* & *D*. Par le dernier de ces points, qui est le moins éloigné de *B*, je mène la ligne *DF* parallèle à *MB*. Du point *F* où elle coupe *MA*, je tire *FG* parallèle à *AD*. Je dis que les deux globes arriveront en même tems aux points *F* & *G* de leurs directions, & qu'alors ils se rencontreront.

En effet, les triangles semblables *MCB*, *FCD*, donnent la proportion $MC : MB :: FC : FD$, ou $MC : mA :: FC : GA$; puisqu'on a $MB = mA$, & $FD = GA$. Or, *MC* & *mA* devant être parcourues dans le même tems, il en sera de même des lignes *FC* & *GA*, & par conséquent des lignes *MF* & *mG*. Donc les deux globes arriveront en même tems aux points *F* & *G*; & comme la ligne

SCD LYON 1

FG est égale à la somme de leurs rayons, il est évident qu'alors ils se toucheront en un point *H*, & qu'ils commenceront à agir l'un sur l'autre.

2° Dans le triangle *MCB* on connoît par l'hypothèse, les deux côtés *MC*, *MB*, & l'angle qu'ils comprennent. Donc on trouvera le côté *CB* & les deux angles adjacents. Alors dans le triangle *ACD* on connoîtra non seulement les deux côtés *AC*, *AD*, mais aussi l'angle *ACD*, supplément de *MCB*; & l'on saura de plus, que l'angle *ADC* est aigu. Ainsi on trouvera la valeur de l'angle *DAC* ou de son alterne-interne *AFG*. Enfin, dans le triangle *AFG*, on connoîtra les angles en *F* & en *A*: donc on trouvera le troisième angle *FGA*.

Cela posé, la force du premier corps suivant la direction *FA*, étant *MV*, on la décomposera en deux autres *MV'*, *MV''*, la première suivant *FG*, & la seconde perpendiculaire à *FG*. De même, la force du second corps suivant *GA* étant *mv*, on la décomposera en deux autres *mv'*, *mv''*, la première suivant *FG*, & la seconde perpendiculaire à la même ligne *FG*. Nous avons enseigné ailleurs (*Num.* XLIX.) la manière de faire ces décompositions. Les deux forces *MV''*, *mv''* étant parallèles entr'elles & à la tangente *IH* menée aux points de contingence, il est évident que les corps n'agissent point l'un sur l'autre en vertu de ces forces, & qu'ils se choquent seulement en vertu des forces *MV'*, *mv'*.

SCD LYON 1

Or, celles-ci étant dirigées par les centres de gravité des deux globes, & perpendiculairement au contact, le mouvement se communiquera suivant les loix du choc direct, que nous avons exposées jusqu'à présent. On déterminera donc les mouvements que prendroient les deux corps, s'ils se choquoient directement suivant la ligne FG avec les forces MV', mv'; & nommant MV''' & mv''' ces mouvements qui viennent de la collision, il ne sera plus question que de trouver la résultante des mouvements MV'', MV''', & celle des mouvements mv'', mv''', pour avoir les directions & les vîtesses des corps M & m après le choc.

Si les directions des deux mobiles M & m qui doivent se choquer obliquement, n'étoient pas dans le même plan, ou si ces mobiles n'étoient pas sphériques, ou si l'un de ces mobiles en devoit choquer plusieurs autres mus suivant des directions & avec des vîtesses quelconques, ou si les mobiles tournoient sur eux-mêmes avant de se rencontrer, &c., il y auroit beaucoup plus de difficulté à déterminer l'endroit du contact & les mouvements résultants du choc.

CCXC.

REMARQUE III. Imaginons que du centre de gravité G d'un corps (*Fig.* 130.), on abaisse une perpendiculaire Gf sur la direction fh de la résultante de tous les mouvements, dont les élé-

SCD LYON 1

mens du corps ſont animés : l'interſection *f* de ces deux lignes ſera ce qu'on appelle *centre de percuſſion*. C'eſt un point où l'on peut ſuppoſer que toute la force du corps eſt ramaſſée. On voit par notre définition, que ſi tous les points d'un corps avancent parallélement avec des vîteſſes égales, le centre de gravité ſera le centre de percuſſion. Car alors la réſultante de tous les mouvements dont les différents points du corps ſont animés, paſſe par le centre de gravité (*Num.* CCL.). On voit de plus, que ſi les éléments du corps ont des mouvements qui ne ſoient pas réductibles à une ſeule force réſultante (*Num.* LX.), le corps n'aura aucun centre de percuſſion.

Les Géomètres ont donné des méthodes générales pour déterminer le centre de percuſſion, dans les corps où il exiſte réellement. On trouvera dans pluſieurs ouvrages connus, tout ce qu'on peut déſirer ſur ce ſujet. Mais on peut entrevoir, que la théorie du centre de percuſſion, priſe dans ſa généralité, demanderoit une étendue que ne comporte pas un ouvrage, où l'on ſe propoſe de ne traiter que ce que la Méchanique a de plus ſimple. Je me bornerai donc à déterminer le centre de percuſſion d'un ſyſtème de pluſieurs corps *P*, *Q*, *R* (*Fig.* 131), dont ſeroit chargée une verge *CP*, qui auroit une maſſe inſenſible & un mouvement de rotation autour du point fixe *C*. Je conſidérerai de plus chacun

SCD LYON 1

des corps enfilés par cette verge, comme concentré en un seul point.

1° La verge inflexible passant dans un instant de la position CP à la position Cp, les corps décriront en même tems les arcs semblables & parallèles Pp, Qq, Rr. Soit v la vîtesse du corps P, v' celle du corps Q, v'' celle du corps R. Les forces parallèles de ces corps feront Pv, Qv', Rv'', & leur résultante vaudra $Pv+Qv'+Rv''$. Or il est évident que les vîtesses v, v', v'', sont entr'elles comme les arcs semblables Pp, Qq, Rr, décrits dans le même tems, ou comme les rayons CP, CQ, CR de ces arcs; c'est-à-dire, qu'on a les deux proportions, $v : v' :: CP : CQ$; $v : v'' :: CP : CR$; d'où l'on tire $v'=\frac{v\times CQ}{CP}$, & $v''=\frac{v\times CR}{CP}$. Donc en substituant ces valeurs de v' & de v'', la résultante des forces des trois corps sera $Pv+\frac{Qv\times CQ}{CP}$ $+\frac{Rv\times CR}{CP}=\frac{v(P\times CP+Q\times CQ+R\times CR)}{CP}$ $=\frac{v(P+Q+R)CG}{CP}$, en supposant que G soit le centre de gravité des corps. Car le moment de la somme des poids réunis au centre de gravité, doit égaler la somme des moments de ces poids, (*Num.* LXIV.).

2° En supposant que le centre de percussion soit f,

SCD LYON 1

& que l'on prenne le point C pour centre des moments, nous aurons le moment de la réſultante des forces égal à la ſomme des moments des forces compoſantes. Donc $\frac{v(P+Q+R)CG \times Cf}{CP}$ $= Pv \times CP + \frac{Qv \times \overline{CQ}^2}{CP} + \frac{Rv \times \overline{CR}^2}{CP}$; d'où l'on tirera $Cf = \frac{P \times \overline{CP}^2 + Q \times \overline{CQ}^2 + R \times \overline{CR}^2}{(P+Q+R)CG}$.

Cette valeur de Cf eſt la même que nous avons trouvée (*Num.* CCIII.) pour déterminer la diſtance du point de ſuſpenſion C (*Fig.* 98.) au centre d'oſcillation d'un pendule compoſé, chargé de trois poids P, Q, R, comme la verge CP de la fig. 131. Donc le centre d'oſcillation d'un pendule compoſé, coïncide avec le centre de percuſſion des poids dont il eſt chargé.

Cela prouve ce que nous avons avancé ſans démonſtration (*Num.* CCIV.), que la ligne Cf eſt plus longue que CG. Car ſi les corps P, Q, R, avoient des vîteſſes égales, le point f ſe confondroit avec le centre de gravité G. Mais ceux de ces corps qui ſont plus éloignés du point de ſuſpenſion C, ayant plus de vîteſſe que les autres, il eſt évident que la réſultante de tous les mouvements doit ſe porter vers ces corps & paſſer par un point f plus éloigné du point C, que le centre de gravité G.

SCD LYON 1

SECTION VI.

De la Réflexion des Corps.

CCXCI.

DANS le choc des corps à reſſort, on appelle en général *mouvement de réflexion*, celui dont le corps choquant eſt animé après la réaction. On conſidère en particulier ce mouvement, dans le cas où un corps M (*Fig.* 132.), mu ſuivant une direction quelconque AB, vient frapper un plan fixe & impénétrable GH. Arrêtons-nous un moment ſur la réflexion de ce corps.

1° La ligne AB ſuivant laquelle un tel corps eſt dirigé avant le choc, s'appelle *ligne d'incidence*; la ligne BC qu'il ſuit après avoir frappé le plan, eſt *la ligne de réflexion*; l'angle ABG que le plan forme avec la ligne AB, eſt *l'angle d'incidence*; l'angle CBH que le même plan forme avec la ligne BC, eſt *l'angle de réflexion*.

2° Suppoſons d'abord que le plan GH ſoit parfaitement dur & que le mobile M ſoit parfaitement élaſtique : je dis *que l'angle de réflexion* CBH *ſera égal à l'angle d'incidence* ABG. En effet, ſi l'on repréſente la force du corps par la ligne d'incidence AB, on pourra la décompoſer en deux autres, l'une AG perpendiculaire, & l'autre AP parallèle au plan. Or comme cette dernière force

SCD LYON 1

demeure entière & que le plan ne réſiſte qu'à la force AG, le reſſort ſe comprimera de plus en plus au point B, dans un ſens perpendiculaire au plan, juſqu'à ce que cette force ſoit détruite. Enſuite la réaction rétablira le corps dans ſon premier état, en lui communiquant ſuivant BP, une force égale & parallèle à la force perpendiculaire AG, perdue dans la compreſſion. Par conſéquent le corps après la réaction ſera ſollicité par une force $BP = AG$, perpendiculaire au plan, & par une force $BH = AP$, parallèle au même plan. Donc ſi l'on achève le parallélogramme $APCH$, le corps décrira la diagonale BC, ce qui ne peut arriver, à moins que l'angle de réflexion CBH ne ſoit égal à l'angle d'incidence ABG. Car dans les triangles ABG, CBH, rectangles en G & en H, on aura $AG = CH$, $GB = BH$. Donc les angles ABG & CBH ſeront égaux.

Il eſt viſible que ſi le corps venoit choquer le plan ſuivant une ligne perpendiculaire PB, il ſe réfléchiroit ſuivant la même ligne, puiſqu'il n'y auroit pas de raiſon pour qu'il s'en écartât en un ſens plutôt qu'en tout autre. Donc en ce cas, les angles d'incidence & de réflexion ſeroient égaux.

3° On démontrera de même, que l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence, ſi le corps parfaitement dur vient frapper un plan parfaitement élaſtique, ou ſi le corps & le plan ont l'un & l'autre un reſſort parfait.

SCD LYON 1

4° Mais, par un raisonnement semblable, on fera voir que *si le corps & le plan sont imparfaitement élastiques, l'angle de réflexion sera nécessairement plus petit que l'angle d'incidence.*

Car alors la force parallèle *AP* demeurera entière, & sera représentée après le choc, par $BH = AP$. Mais la force perpendiculaire *AG* se changera par la réaction, en une force *AD* moindre que *AG* ou que *AP*. Donc si l'on fait le parallélogramme *BDEH*, le corps suivra la diagonale *BE*, & l'angle de réflexion *EBH* sera moindre que l'angle d'incidence *ABG*.

ARTICLE II.

Des obstacles qu'un Corps en mouvement peut éprouver.

CCXCII.

ON appelle *obstacle au mouvement*, toute cause qui l'empêche de naître ou qui le détruit dans un corps. Les principaux obstacles au mouvement sont l'action des forces retardatrices, l'inertie des corps choqués, la résistance des milieux, le frottement des surfaces & la roideur des cordes qu'on emploie dans l'usage des machines. Nous avons exposé ailleurs avec assez d'étendue, les circonstances du mouvement retardé par l'action de la pesanteur &

SCD LYON 1

des forces centrales : nous traiterons de la réſiſtance des milieux dans la ſeconde partie de cet ouvrage. Il ne nous reſte donc à parler ici que de l'inertie des corps, du frottement des ſurfaces & de la roideur des cordes.

SECTION I.

De l'Inertie des Corps.

CCXCIII.

Un corps qui en rencontre un autre, perd autant de ſon mouvement, que celui-ci en reçoit (*Num.* CCLXXIII.). C'eſt donc une propriété commune à tous les corps qui ſont choqués, non ſeulement de paſſer à un nouvel état, mais auſſi de produire ou d'occaſionner un changement dans l'état des corps qui les choquent.

CCXCIV.

Qu'un corps dont la maſſe eſt M, ſoit choqué par un corps m, qui augmente ſa vîteſſe d'une quantité Z. Qu'un autre corps dont la maſſe eſt M', ſoit auſſi choqué par un corps m', qui augmente ſa vîteſſe d'un quantité Z'. Les changements produits dans les mouvements primitifs des corps choqués M & M', ſeront MZ, $M'Z'$. Donc MZ & $M'Z'$ ſeront auſſi les changements produits dans les mouvements des corps choquants m & m' : ce qui fait voir que *les changements ſurvenus dans l'état des corps*

SCD LYON 1

choquants, à la rencontre des choqués, ſont toujours en raiſon compoſée des maſſes M & M′ *de ceux-ci, & des vîteſſes* Z, Z′, *qu'ils reçoivent dans le choc.*

Par conſéquent, *ſi* Z = Z′, *les changements ſurvenus dans l'état des corps choquants* m & m′, *ſeront comme les maſſes* M & M′ *des choqués.*

CCXCV.

TOUT le monde eſt d'accord ſur ces principes, qui ſont, je crois, la ſeule choſe eſſentielle à conſidérer ſur ce ſujet. Mais les Phyſiciens ſe ſont partagés ſur la nature de cette propriété que l'on obſerve dans tous les corps, de produire ou d'occaſionner un changement dans l'état de ceux qui les choquent. La plûpart l'ont conſidérée comme une force répandue dans toute la matière, & l'ont appelée *force d'inertie*. Cette force eſt, ſuivant eux, proportionnelle à la maſſe des corps; c'eſt-à-dire, que pluſieurs corps dont les maſſes ſont comme les nombres quelconques 1, 2, 5, &c., exerceront contre les corps choquants, des forces comme 1, 2, 5, &c., dans le cas où la percuſſion altérera leur vîteſſe de la même quantité. D'autres ont prétendu que les corps choqués, en repos, ou mus ſuivant la direction des corps choquants, n'oppoſoient à ceux-ci ni forces, ni réſiſtances, mais que les choquants perdoient une partie de leur mouve-

SCD LYON 1

ment, parce qu'ils agiſſent, & qu'il réſulte du choc un effet ou changement, ſoit dans leur état, ſoit dans celui des corps choqués. Enfin, d'autres ſoutiennent que les corps, dans le choc, n'agiſſent point l'un ſur l'autre, & que toute l'action procède uniquement du Créateur.

Il faut bien que les différents auteurs dont nous parlons, n'attachent pas les mêmes idées à ces mots, *force*, *action*, *réſiſtance*. Il paroît en effet, que les uns conſidèrent la force & l'action dans la cauſe étrangère qui donne aux corps leur mouvement; au lieu que les autres n'entendent par les mots *force* & *action*, qu'un effet produit dans les corps par cette cauſe étrangère. C'eſt ainſi que l'on appelle communément *force motrice* d'un corps, le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe, quelle que ſoit la cauſe qui donne cette vîteſſe; & qu'on nomme *action* le mouvement produit dans le corps choqué, quelle que ſoit la cauſe phyſique de ce mouvement. Pourquoi ne pourroit-on pas de même donner le nom de *force* à l'inertie des corps, en la conſidérant comme un effet qui occaſionne un changement dans les corps choquants, quelle que ſoit la cauſe phyſique de ce changement?

Mais la force d'inertie, priſe en ce ſens, ſera bien différente des forces motrices des corps, & des forces de preſſion. 1° Celles-ci ſuppoſent du mouvement ou une tendance au mouvement; au lieu

SCD LYON 1

que la force d'inertie existe dans les corps même qui sont en repos & qui ne tendent point à se mouvoir. 2° Les forces des corps qui se choquent en sens opposés, se détruisent entièrement ou en partie, suivant qu'elles sont égales ou inégales; de manière qu'il y a moins de mouvement après qu'avant la collision : au lieu que la force d'inertie détruit, à la vérité, du mouvement dans le choquant, mais ce mouvement passe entiérement dans le choqué.

Observons encore que l'inertie d'un corps ne doit point être confondue avec sa pesanteur : elle en est tout-à-fait indépendante. En effet, si pendant qu'un corps tombe librement, on le suit de la main, avec une vîtesse plus grande que celle avec laquelle il tombe, on éprouvera en le rencontrant, un choc, une impression, qu'on ne peut évidemment attribuer à la pesanteur, qui n'agit que de haut en bas.

SECTION II.

Du Frottement.

CCXCVI.

LA surface des corps, même les plus polis, est hérissée d'un très-grand nombre d'éminences ou aspérités, & criblée de plusieurs cavités qu'on ap-

SCD LYON 1

pelle *pores*. Lorſqu'un corps repoſe ſur un autre, les parties ſaillantes de l'un pénètrent dans les pores ou parties rentrantes de l'autre, & pour les dégager on éprouve une certaine réſiſtance qu'on nomme *le frottement*. On entend donc par frottement, la réſiſtance qu'apporte au mouvement de deux corps l'un ſur l'autre, l'inégalité de leur ſurface.

Or, on peut faire mouvoir deux ſurfaces l'une ſur l'autre, ou de manière que les mêmes parties de l'une ſoient ſucceſſivement appliquées à différentes parties de l'autre, comme lorſqu'on fait gliſſer un livre ſur une table; ou de manière que les différentes parties de l'une touchent ſucceſſivement les différentes parties de l'autre, comme il arrive lorſqu'on fait rouler une boule ſur un billard. On appelle *frottement de la première eſpèce*, celui des corps qui ne font ſimplement que gliſſer les uns ſur les autres; & *frottement de la ſeconde eſpèce*, celui des corps qui ont un mouvement de rotation. Il peut même exiſter un frottement *mixte*, qui participe des deux précédents; comme dans le mouvement d'un cercle ſur un plan (*Fig.* 133.), ſi l'on ſuppoſoit que le centre C décrivît dans une ſeconde la ligne CL, tandis que l'arc AB, moindre ou plus grand que CL, ſeroit ſucceſſivement appliqué à la ligne $AD = CL$. Il eſt évident qu'en ce cas le cercle rouleroit & gliſſeroit en même tems ſur le plan.

SCD LYON 1

CCXCVII.

Il paroît très-difficile, pour ne pas dire impoſſible, d'établir des règles générales ſuffiſamment exactes, pour déterminer le frottement. En effet, on conçoit aiſément que cette réſiſtance doit varier ſelon la manière dont un corps ſe meut ſur un autre, ſelon le tiſſu & la nature des ſurfaces, objets ſuſceptibles d'autant de variétés, qu'il y a de matières différentes: elle doit varier ſelon le degré de dureté ou de fléxibilité des ſurfaces frottantes; ſelon que les parties ſaillantes ſeront d'une figure & de dimenſions plus ou moins propres à pénétrer dans les pores; ſelon que la preſſion qui applique les ſurfaces l'une à l'autre, ſera plus ou moins grande; ſelon que cette preſſion aura agi plus ou moins longtems: car les parties des ſurfaces ayant toujours une certaine fléxibilité, les parties ſaillantes s'engageront plus profondément, ſi par un plus long ſéjour, elles ont plus le tems d'écarter ou élargir les pores dans leſquels elles tendent à pénétrer.

Mais comment chacune de ces cauſes doit-elle influer ſur la grandeur du frottement? C'eſt ce qu'on ne peut déterminer *à priori*, puiſqu'on ne connoît point la nature ni la forme des inégalités qui couvrent les ſurfaces des corps. Les Phyſiciens ont donc été forcés de prendre une autre route, & de conſulter l'expérience qui ſeule peut ſervir de flambeau dans des cas ſemblables.

CCXCVIII.

SCD LYON 1

CCXCVIII.

POUR faire des expériences sur cette matière, on peut placer le corps frottant P (*Fig.* 134) sur un plan horizontal AB, & le faire tirer par un poids R, au moyen d'un cordon bien fléxible CDR, qu'on fait passer sur une poulie D très-mobile autour de son axe. La résistance du frottement est à peu près égale au poids R nécessaire pour mettre en mouvement le corps P. Cette méthode ne peut servir que pour évaluer le frottement de la première espèce. Il est même à remarquer que la plûpart des Auteurs qui l'ont employée, ont négligé non seulement la résistance produite par la roideur du cordon, mais aussi l'effet des frottements du cordon sur la poulie & de la poulie sur les supports de son axe, objets dont il semble qu'on doit tenir compte, au moins dans certaines expériences.

Un autre moyen bien simple que l'on peut employer pour déterminer & comparer les frottements des corps, consiste à les poser sur des plans d'abord très-peu inclinés à l'horizon, à augmenter ensuite par degrés l'inclinaison, jusqu'à ce que les frottements & les pesanteurs des corps se fassent équilibre.

Supposons en effet le corps P (*Fig.* 135.) prêt à se mouvoir sur le plan incliné AB, qui a pour hauteur AC & pour base BC. On pourra regarder le frottement comme égal à la force qui tend à faire

SCD LYON 1

descendre le corps le long du plan. Or, G étant le centre de gravité de ce corps, si l'on représente son poids par la verticale GR, on pourra le décomposer en deux forces, l'une GH perpendiculaire au plan, & qui marquera la pression qu'il supporte; l'autre GL parallèle au plan, & qui fera équilibre à la résistance du frottement. Cette décomposition se fera en achevant le parallélogramme $GHRL$, dont le côté GH est perpendiculaire au plan, tandis que le côté GL lui est parallèle. Observant ensuite que les triangles GLR, ABC sont semblables, on en conclura les deux proportions suivantes $GL : GR :: AC : AB$; $GL : LR = GH :: AC : BC$. La première donnera $GL = \frac{GR \times AC}{AB}$, & la seconde $GL = \frac{GH \times AC}{BC}$. Donc 1° *la résistance du frottement sera égale au poids du corps multiplié par le rapport de la hauteur à la longueur de ce plan*; 2° *la même résistance sera aussi égale au produit de la pression perpendiculaire au plan, multipliée par le rapport de la hauteur à la base de ce plan.*

Si l'on suppose à présent un autre corps quelconque p sur un second plan incliné ab, qui ait pour hauteur ac & pour base bc, & que l'on décompose son poids gr en deux forces gh & gl, la première perpendiculaire, la seconde parallèle au

SCD LYON 1

plan, on aura de même $gl = \frac{gr \times ac}{ab} = \frac{gh \times ac}{bc}$; ce qui donnera la suite de raisons égales $GL : gl :: \frac{GR \times AC}{AB} : \frac{gr \times ac}{ab} :: \frac{GH \times AC}{BC} : \frac{gh \times ac}{bc}$.

Or GL & gl désignent des quantités égales aux frottements, lorsque les plans sont inclinés de manière que les corps soient sur le point de se mouvoir. Donc connoissant alors les hauteurs, bases & longueurs des plans, ainsi que les poids ou pressions des deux corps, on pourra déterminer le rapport de leurs frottements.

Sur quoi il faut encore observer que connoissant l'inclinaison du plan & le poids du corps, on trouve aisément la pression GH. Car les triangles semblables GRH, BAC donnent la proportion $AB : BC :: GR : GH$, dans laquelle étant donnés les trois premiers termes, on a le quatrième.

Il seroit trop long d'exposer ici les autres méthodes que l'on a employées pour faire des expériences sur le frottement en général, & en particulier sur le frottement des corps qui tournent sur un axe, ou de ceux qui se meuvent circulairement autour d'un point fixe. On peut voir la description de différents *tribomètres* ou instruments propres à ces expériences, dans les ouvrages de MM. *Desaguliers*, *Muschembroek* & *Nollet*.

SCD LYON 1

CCXCIX.

VOICI maintenant les principaux réſultats des expériences que l'on a faites ſur le frottement.

1° Celui de la première eſpèce eſt beaucoup plus ſenſible que celui de la ſeconde. On conçoit en effet, que pour dégager les aſpérités d'un corps qui gliſſe ſur un autre, il faut ou les briſer, ou les plier comme autant de reſſorts, en ſoulevant un peu la maſſe; au lieu que dans le frottement de la ſeconde eſpèce, les parties engagées ſe relèvent preſque ſans effort, en tournant autour des ſuivantes, qui commencent à appuyer ſur la ſurface inférieure.

2° Plus les ſurfaces des corps ſont inégales & raboteuſes, plus la réſiſtance du frottement eſt conſidérable. On peut donc diminuer cette réſiſtance en préparant & poliſſant les ſurfaces, ou en bouchant, autant qu'on le peut, leurs pores avec de l'huile, du ſavon, de la graiſſe, &c.; en un mot, avec quelque matière qui, en s'inſinuant dans les pores, ne faſſe pas contracter une nouvelle adhérence aux ſurfaces. On a de plus obſervé que les matières onctueuſes, en rendant le mouvement plus aiſé, font que les corps s'uſent beaucoup moins que s'ils frottoient à ſec; elles empêchent auſſi qu'ils ne s'échauffent, ce qui n'eſt pas un moindre avantage dans bien des circonſtances.

3° C'eſt de la preſſion que dépend principalement la réſiſtance du frottement; & les expériences de

SCD LYON 1

M. *Amontons*, (Mémoires de l'Académie, 1699.), mènent à conclure que, toutes choſes d'ailleurs égales, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant le même poli, la même grandeur & la même vîteſſe dans les ſurfaces, leurs frottements ſont ſenſiblement proportionnels aux preſſions qui les appliquent les unes contre les autres. Cette concluſion n'eſt pourtant admiſſible, que lorſque les poids des corps ne diffèrent pas conſidérablement: car ſi les frottements GL, gl (*Fig.* 135.) croiſſoient généralement comme les preſſions GH, gh, il faudroit que dans la proportion $GL : gl :: \frac{GH \times AC}{BC} : \frac{gh \times ac}{bc}$, démontrée ci-deſſus, on eût toujours $\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}$; ou, ce qui revient au même, il faudroit des plans également inclinés pour faire gliſſer deux corps P & p, quelles que fuſſent leurs peſanteurs. Or, on ſait que le plan ou chantier ſur lequel on conſtruit les vaiſſeaux, n'a qu'une pente de 10 à 12 lignes par pied, & que cette pente eſt ſuffiſante pour les faire aller à l'eau; tandis qu'une maſſe médiocre ne gliſſe point ſur un plan, à moins qu'il n'ait une inclinaiſon de 15 à 18 degrés. Donc, s'il y a une grande différence entre les preſſions de deux corps, on ne pourra pas les ſuppoſer proportionnelles aux frottements.

Pour ſuppoſer les frottements à peu près propor-

SCD LYON 1

tionnels aux preſſions, il faut encore que les corps frottants ſoient de même eſpèce. En effet, l'expérience apprend que dans le cas où la preſſion, le poli, la viteſſe & la grandeur des ſurfaces frottantes, ſont les mêmes, le frottement eſt pour certaines matières le tiers de la preſſion, tandis que pour d'autres il n'en eſt que la ſixième ou la ſeptième partie. En général, lorſque les ſurfaces qui doivent gliſſer l'une ſur l'autre ſont de même matière, la réſiſtance du frottement, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt plus grande que lorſqu'elles ſont de matières différentes. Ainſi, deux bois de différente eſpèce auront moins de difficulté à ſe mouvoir l'un ſur l'autre, que deux bois de même eſpèce: le fer frottera moins ſur le cuivre, que le fer ſur le fer, ou le cuivre ſur le cuivre. Cet effet s'explique en conſidérant que dans les matières de même eſpèce, les ſurfaces étant ſemblablement hériſſées d'éminences & de cavités, le contact eſt plus immédiat; les parties ſaillantes s'engagent plus avant dans les cavités, que cela n'arrive lorſque les matières ſont de différente eſpèce.

Enfin, ſuppoſé que les frottements ſuivent les rapports des preſſions, un corps poſé ſur un plan ſucceſſivement par deux faces, l'une plus grande & l'autre plus petite, frottera de la même quantité dans les deux cas; puiſque la preſſion & par conſéquent le frottement de chacun des points de la

SCD LYON 1

ſurface appliquée au plan, ſera d'autant moindre que cette ſurface ſera plus grande, ou que les points frottants ſeront plus nombreux. Or M. l'Abbé *Boſſut* nous apprend qu'ayant placé ſur une table horizontale un parallélipipède de bois, peſant environ 51 livres, & qu'il chargeoit encore de différents poids, il a fallu employer à peu près la même force pour le faire gliſſer par deux de ſes faces, dont l'une étoit environ cinq fois plus grande que l'autre, ce qui s'accorde avec les expériences de M. *Deſaguliers*. Il eſt donc naturel de penſer que dans de ſemblables expériences, faites en grand, le frottement ne dépend guères que de la preſſion.

Il paroît au contraire, que dans les expériences faites en petit, le frottement ne ſe trouve plus ſimplement proportionnel aux preſſions, mais que pour l'évaluer il faut avoir égard à la grandeur des ſurfaces. En effet, M. *Muſchembroek* rapporte qu'ayant mis en mouvement ſur des planches de ſapin, deux petites planches auſſi de ſapin, longues chacune de 13 pouces, & larges l'une d'un pouce & l'autre de deux pouces onze lignes, & chargées toutes les deux d'un même poids, y compris le poids de la planche, la plus large a toujours eu plus de frottement. M. l'Abbé *Nollet* a auſſi trouvé par des expériences réitérées, faites ſur des maſſes peu conſidérables, qu'en augmentant la ſurface frottante, ſans rien changer à la preſſion, on éprouvoit preſque toujours

SCD LYON 1

plus de réſiſtance. Si l'on ajoute à cela que tous les Artiſtes qui ont beſoin pour la perfection de leur ouvrage de diminuer le frottement, ſont dans l'uſage conſtant de diminuer le contact & s'en trouvent bien, il ſera difficile de ne pas pencher à croire que la grandeur des ſurfaces ne ſoit de quelque influence, pour le frottement, au moins quand il eſt peu conſidérable.

Remarquons néanmoins que ſi on diminue la ſurface frottante juſqu'à la rendre tranchante ou pointue, on trouvera le frottement beaucoup augmenté, parce que les pointes & les tranchants ſillonnent ou labourent le plan, & que pour mouvoir le corps il faut briſer un bien plus grand nombre d'aſpérités que dans le frottement ordinaire.

4° Le temps pendant lequel un corps eſt appliqué ſur un plan, ſoit par ſa peſanteur, ſoit par toute autre force, contribue beaucoup à faire varier la réſiſtance du frottement; mais l'expérience n'a pas encore déterminé comment cette réſiſtance augmente eu égard au tems; d'ailleurs on ſent aſſez que l'augmentation due à cette cauſe, doit avoir des limites, & que ces limites varieront ſuivant la nature des ſurfaces frottantes.

5° Il n'eſt peut-être pas encore bien décidé, ſi la vîteſſe des corps qui gliſſent les uns ſur les autres, doit influer ſur la quantité du frottement. D'un côté, il ſemble qu'un corps qui ſe meut plus vîte,

SCD LYON 1

rencontre dans le même tems un plus grand nombre d'aſpérités dans le plan ſur lequel il ſe meut, les choque auſſi plus rudement ou les plie plus vîte, & par toutes ces conſidérations doit éprouver beaucoup plus de réſiſtance à ſon mouvement. On conçoit d'un autre côté, qu'une plus grande vîteſſe peut ne pas donner aux parties ſaillantes des corps, le tems de s'engager auſſi profondément; qu'il eſt d'ailleurs poſſible que ces parties entraînées avec force, s'élèvent au-deſſus du plan, & paſſent pluſieurs cavités avant de retomber; enfin, qu'en ſuppoſant même qu'elles retombent toujours dans les cavités qui ſuivent immédiatement celles qu'elles ont quittées, le corps ne doit éprouver de réſiſtance, que comme par intervalle; au lieu qu'un corps en repos qu'on veut mouvoir, en éprouve une continuelle, qui paroît devoir s'oppoſer bien davavantage au mouvement.

Cette dernière raiſon a fait penſer à M. *Euler*, qu'en général, le mouvement une fois commencé, le frottement devoit diminuer. Ce grand Géomètre a cru trouver dans l'expérience une autre preuve de ſon ſentiment. En mettant un corps ſur un plan dont il augmentoit l'inclinaiſon par degrés, il lui a paru que ce corps venant à gliſſer, parcouroit la longueur du plan beaucoup plus vîte qu'on ne devroit s'y attendre, ſi le frottement croiſſoit avec la vîteſſe.

SCD LYON 1

M. *Muſchembroek*, au contraire, aſſure avoir trouvé par pluſieurs expériences, dont il ne donne aucun détail, que le frottement croît, à peu de choſe près, dans le même rapport que la vîteſſe, excepté lorſque la vîteſſe eſt très-conſidérable. Car dans ce cas, il lui a paru que le frottement augmentoit dans un plus grand rapport. « J'avoue ce-» pendant (ajoute cet Auteur) que quelque ſoin » que j'aie pris pour faire ces expériences, je ne » ſuis pas encore bien ſatisfait ſur cette matière. » Dans le tems que je les ai faites, on ne connoiſ-» ſoit pas encore bien la méchanique du mouve-» ment, &c. ».

M. *Hennert* rapporte avoir éprouvé fort ſouvent, qu'un corps mis en mouvement ſur un plan horizontal, par le moyen d'un poids, s'arrête après un certain tems; phénomène qui paroît inexplicable, ſi l'on n'admet que le frottement croît avec la vîteſſe, ou du moins qu'il croît alors par des raiſons qui ne nous ſont pas encore connues. Il peut arriver que le corps s'arrête en certain cas, ou parce que les aſpérités briſées s'accumulent en plus grand nombre entre les ſurfaces frottantes, ou parce que le corps ſupérieur un peu ſoulevé, entame le plan & le ſillonne en retombant dans les cavités par quelque angle ſolide, ou parce que le plan n'a pas un tiſſu homogène dans toute ſon étendue, &c. Quoi qu'il en ſoit, il paroît plus ſage d'attendre de

SCD LYON 1

nouvelles expériences, pour décider si & comment la vîtesse doit entrer dans l'évaluation du frottement.

Ce seroit ici le lieu d'exposer les règles que les Géomètres ont données pour calculer, au moins par approximation, le frottement dans les machines. Mais, quelque intéressante que soit cette partie de la Méchanique, elle est nécessairement un peu compliquée, & je ne pourrois m'y arrêter sans passer les bornes que je me suis prescrites. On la trouvera traitée avec beaucoup d'élégance & de clarté, dans les Cours de MM. *Bossut* & *Bezout*.

CCC.

Quelques Auteurs ont avancé qu'un corps placé sur un plan incliné & abandonné à lui-même, doit culbuter & tomber en roulant, toutes les fois que la verticale menée par le centre de gravité rencontre le plan hors de la base du corps. Mais cette règle n'est juste, qu'en supposant qu'on ait égard au frottement. Car soit un globe *P* (*Fig.* 136) abandonné à lui-même sur un plan incliné *EF*. Il est évident que la verticale menée par son centre de gravité *C* ne passe point par la base du corps. Cependant, s'il n'y avoit point de frottement, le corps descendroit simplement en glissant. Supposant en effet que sa pesanteur, que je représente par *CG*, soit décomposée en deux forces, l'une *CH* perpen-

SCD LYON 1

diculaire & l'autre *CL* parallèle au plan incliné; la première passera par le point de contact & sera détruite. Le corps descendra donc uniquement en vertu de la seconde *CL*, qui étant dirigée par le centre de gravité, doit communiquer la même vîtesse à tous les éléments du corps. Ainsi il n'y auroit aucun mouvement de rotation, si les parties correspondantes au contact n'éprouvoient un frottement qui diminue leur vîtesse.

En raisonnant de la même manière, on reconnoîtra qu'*un corps quelconque, précision faite du frottement, doit glisser sur un plan incliné, si la ligne menée de son centre de gravité perpendiculairement au plan, tombe sur un point de contact, ou si elle ne laisse pas du même côté tous les points où le corps & le plan se rencontrent.* Car alors décomposant la pesanteur du corps en deux forces, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle au plan, la première sera détruite immédiatement par la résistance du contact, ou du moins elle pourra se réduire à plusieurs autres forces dirigées perpendiculairement au plan dans les points où il est rencontré par le corps, & dans ce cas chacune de ces forces sera évidemment détruite. Il ne subsistera donc que la force parallèle au plan, qui étant dirigée par le centre de gravité du corps, ne peut lui donner aucun mouvement de rotation.

Si au contraire la perpendiculaire menée du centre

SCD LYON 1

de gravité sur le plan, ne tombe sur aucun point ou le corps & le plan se touchent, & qu'en même tems elle laisse du même côté tous les points de contact, le corps roulera en descendant le long du plan. Car alors la résistance ou réaction du plan qui est toujours dirigée dans un sens perpendiculaire au contact, agira suivant une direction qui ne passera point par le centre de gravité. Or cette résistance produit le même effet qu'une impulsion capable de soutenir le corps dans les différents points de contact, comme il est soutenu par le plan, impulsion qui n'étant pas dirigée par le centre de gravité, doit faire tourner le corps (*Num.* CCLII.). Donc la résistance du plan, qui est équivalente à cette impulsion, fera nécessairement descendre le corps en roulant.

CCCI.

PARMI les effets sans nombre que le frottement peut occasionner, il ne sera pas inutile de remarquer ici les suivants.

1° Quand deux globes homogènes se rencontrent obliquement, on peut (*Num.* CCLXXXIX.) décomposer la force de chacun en deux autres, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle au plan de contingence. Si le frottement étoit nul, & que l'un de ces globes fût en repos avant le choc, il est visible que l'autre n'agiroit sur lui qu'en vertu de sa force perpendiculaire, qui étant dirigée

par les centres des deux corps, ne communiqueroit aucun mouvement de rotation. Mais il n'en eſt pas de même dans le cas du frottement. La force parallèle au plan de contingence ſe tranſmet à l'aide des aſpérités de la ſurface, en partie d'autant plus grande, que la ſurface eſt plus ſuſceptible de frottement, & doit de plus faire tourner ſur lui-même le globe choqué, puiſque ſa direction ne paſſe point par le centre de ce globe. On voit aſſez par là, que le frottement doit auſſi influer ſur le mouvement des autres corps qui ſe choquent obliquement.

2° En ſuppoſant les corps incompreſſibles & le frottement nul, un globe qui tomberoit verticalement ſur un plan horizontal, & qui auroit reçu par une cauſe quelconque un mouvement de rotation ſur lui-même, ne conſerveroit que ce mouvement après la colliſion. Mais le frottement lui fait éprouver une réſiſtance dans un ſens parallèle à la ſurface du plan, & cette réſiſtance produit le même effet qu'une force qui agiroit contre les aſpérités du globe au point de contingence. Or une telle force imprimeroit évidemment au globe entier un mouvement de tranſlation. Donc auſſi, en vertu du frottement, le globe doit rouler le long du plan.

C'eſt par cette raiſon qu'on explique pourquoi un boulet qui, en tombant, ſemble avoir perdu toute ſa force, ſe ranime cependant ſouvent avec violence. Lorſqu'il eſt chaſſé par la force de la

SCD LYON 1

poudre, il acquiert en frottant sur la paroi inférieure de l'ame de la pièce, un mouvement de rotation qui ne s'altère que peu en l'air, & qui peut subsister presqu'en entier, lorsque le mouvement progressif a été détruit par la rencontre de quelque obstacle. Or le boulet tournant ainsi sur lui-même, il est évident que la résistance du frottement qu'il éprouve, peut lui imprimer un nouveau mouvement de transport.

3° C'est au frottement qu'on doit la facilité de rendre les parties de certaines machines tantôt fixes, tantôt mobiles. C'est par le frottement que les ciseaux & autres instruments tranchants de cette nature, les pinces, tenailles, limes, &c., font leur effet. Si les lames de ciseaux, par exemple, n'étoient point des scies armées de très-petites dents qui s'engagent dans les petites cavités des corps que l'on doit couper, ces corps glisseroient entre les deux tranchants. C'est aussi au frottement que l'on doit l'avantage de pouvoir diminuer ce qu'il a de nuisible, puisque ce n'est que par le frotement qu'on parvient à user & à polir les surfaces des corps. Enfin, car il est inutile de pousser ce détail plus loin; sans le frottement, sur la moindre inclinaison sur laquelle nous marcherions, nous ne pourrions nous empêcher de tomber. On voit donc que si le frottement est nuisible dans beaucoup d'occasions, il est encore plus souvent utile.

SCD LYON 1

SECTION III.

De la Roideur des Cordes.

CCCII.

LA roideur des cordes, ou la difficulté qu'on éprouve à les faire plier ſuivant une courbure donnée, eſt encore une des cauſes qui diminue l'effet des forces appliquées aux machines.

Pour ſe former une idée de la manière dont cette roideur préjudicie aux effets des forces, ſuppoſons une poulie *BCA* (*Fig.* 137.) qui tourne librement ſur les appuis de ſon eſſieu *E*, & ſur laquelle paſſe une corde *PBCAR* dont les extrémités portent deux poids égaux *P* & *R*. Si cette corde étoit parfaitement fléxible, ſans peſanteur, & que le frottement fût nul, pour peu qu'on augmentât l'un des poids, par exemple *P*, il deſcendroit & feroit monter l'autre en l'entraînant verticalement, de manière que le moment de *P*, par rapport au centre *E*, ſeroit conſtamment plus grand que celui de *R*. Mais ſi la corde éprouve de la difficulté à ſe plier, elle prendra dans ſon mouvement une courbure *P'B'CA'R'*, qui rendra le centre *E* moins éloigné de la direction *P'F* du poids *P*, que de la direction *R'G* de l'autre poids; & par conſéquent, en prenant pour centre des moments l'appui *E*, le moment du poids *P* deviendra plus petit par rapport à celui du poids

SCD LYON 1

du poids R, qu'il n'étoit à l'inſtant où ils ont commencé à ſe mouvoir. Donc il faudra que le poids P, quoique plus conſidérable que R, s'arrête, ou du moins qu'il deſcende avec moins de vîteſſe que dans le cas où l'on ſuppoſoit la corde parfaitement fléxible. On voit par là que la roideur des cordes doit toujours diminuer plus ou moins le mouvement produit par les puiſſances.

CCCIII.

Il eſt conſtant par l'expérience qu'une corde qu'on veut plier, réſiſte d'autant plus, 1° qu'elle eſt tendue avec plus de force, ou qu'elle eſt chargée d'un plus grand poids; 2° qu'elle eſt plus groſſe; 3° qu'elle s'enveloppe autour d'un plus petit rouleau. Mais on ne connoît pas bien préciſément la loi ſuivant laquelle ces trois éléments influent dans la réſiſtance que la corde oppoſe. La plûpart des Auteurs qui ont écrit ſur cette matière, ſuppoſent d'aprés les expériences de M. *Deſaguliers*, que *les roideurs des cordes ſont comme les rayons de ces cordes multipliés par les poids qui les tendent, & diviſés par les rayons des rouleaux autour deſquels elles s'enveloppent*; c'eſt-à-dire, qu'en nommant F & F' les roideurs de deux cordes, r & r' leurs rayons, P & P' les poids dont elles ſont chargées, R & R' les rayons des rouleaux ſur leſ-

SCD LYON 1

quels on les fait passer, on a $F : F' :: \frac{Pr}{R} . \frac{P'r'}{R'}$.

Comme l'action des cordes s'exerce suivant la direction de leur axe, il faut, dans la proportion précédente, prendre pour R & R' les rayons à nu des poulies, ajoutés aux rayons des cordes; & supposant d'après une expérience de M. l'Abbé *Bossut*, sur l'exactitude de laquelle on peut compter, qu'une corde de 9 lignes de diamètre, sous une pression de 208 livres, en se pliant autour d'une poulie de 11 pouces $3\frac{1}{2}$ lignes, donne une roideur équivalente à un poids de 4 livres, on déterminera par approximation la roideur des autres cordes.

SCD LYON 1

SECONDE PARTIE.

DE LA MÉCHANIQUE DES FLUIDES.

NOTIONS GÉNÉRALES.

CCCIV.

ON appelle *Méchanique des fluides*, ou *Hydrodynamique*, la ſcience qui a pour objet l'équilibre & le mouvement des fluides. La partie de cette ſcience qui conſidère l'équilibre des fluides, ſe nomme *Hydroſtatique* : celle qui conſidère leur mouvement, ſe nomme *Hydraulique*.

CCCV.

SI l'on connoiſſoit la nature des fluides, c'eſt-à-dire, le nombre, la figure & la poſition des molécules élémentaires dont une maſſe fluide eſt compoſée, il ne faudroit point d'autres principes que ceux de la Méchanique ordinaire, pour déterminer les loix de leur équilibre & de leur mouvement. Car c'eſt toujours un problême déterminé, que de trouver l'action mutuelle de pluſieurs corps unis entr'eux, dont on connoît la figure & l'arrangement reſpectif. Cependant plus le nombre des corpuſcules

SCD LYON 1

seroit grand, plus le problème deviendroit compliqué ; & cette méthode par conséquent ne seroit guères praticable dans les recherches hydrodynamiques. Mais nous sommes même bien éloignés d'avoir toutes les données nécessaires pour être à portée de pouvoir faire usage d'une telle méthode. En effet, quoique nous puissions considérer un fluide comme un assemblage de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres & très-parfaitement mobiles entr'elles, nous ignorons la forme précise, la grandeur, le nombre & la disposition de ces molécules. Il n'est donc pas possible d'évaluer leurs forces particulières, ni les résultats de leurs actions mutuelles, en n'employant que les trois principes qui servent de fondement à la Méchanique des corps solides. Il faut que l'expérience nous fournisse ici quelque nouveau principe, en nous découvrant dans les fluides quelque propriété générale, dont on puisse déduire les loix de l'Hydrodynamique.

CCCVI.

LES fluides sont ou *incompressibles* ou *élastiques*. On nomme fluides incompressibles ceux dont les parties sont ou peuvent être regardées comme absolument dures, de manière que, prises en masse, elles ne peuvent être réduites à occuper un volume plus petit que celui qu'elles occupent dans leur état naturel; telle est l'eau & telles sont la plûpart des liqueurs.

SCD LYON 1

On entend par fluides élaſtiques, ceux qui ſont compoſés de parties capables d'occuper un eſpace plus petit lorſqu'on les comprime, & de reprendre leur premier état, lorſque la cauſe qui les réduiſoit à un plus petit volume, ceſſe d'agir. Tel eſt l'air, le feu, la vapeur de l'eau, &c.

CCCVII.

Le poids d'un fluide & même d'un corps quelconque, conſidéré en lui-même ſans s'embarraſſer du volume ſous lequel il eſt contenu, eſt ce qu'on appelle *la gravité*, ou *peſanteur abſolue*, ou même *le poids abſolu du corps*. Le poids compris ſous l'unité de volume eſt ce qu'on entend par *la peſanteur ſpécifique* ou *relative d'un corps*. C'eſt ce que pèſe ce corps par pied cubique, ou par pouce cubique, &c., ſelon que l'on prend le pied cubique ou le pouce cubique, &c., pour unité de volume.

Il ſuit de ces définitions, que *le poids abſolu d'un corps eſt égal au produit de la peſanteur ſpécifique par ſon volume*. Car ſi nous prenons le pied cubique pour unité de volume, il eſt évident que pour avoir le poids abſolu du corps entier, il faudra répéter ce que pèſe un pied cubique autant de fois qu'il y aura de pieds cubiques dans le volume du corps. Donc pour avoir le poids abſolu, il faut multiplier la peſanteur ſpécifique par le volume.

Donc auſſi *la peſanteur ſpécifique eſt égale au*

SCD LYON 1

poids absolu divisé par le volume. Ainsi en nommant P & p les poids absolus de deux fluides, V & v leurs volumes, G & g leurs pesanteurs spécifiques, nous aurons $G = \frac{P}{V}$, $g = \frac{p}{v}$; d'où nous tirerons la proportion suivante, $G : g :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, qui nous apprend que *les pesanteurs spécifiques de deux fluides sont entr'elles comme leurs poids absolus divisés par les volumes.*

Les masses des deux mêmes fluides sont entr'elles comme les poids absolus P & p (*Num.* LXIV.). C'est pourquoi en nommant M & m ces masses, on pourra substituer leur rapport au lieu de celui de P à p dans la proportion précédente, & l'on aura $G : g :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$. Donc *les pesanteurs spécifiques sont comme les masses divisées par les volumes.*

Et comme les densités des mêmes fluides sont aussi comme les masses divisées par les volumes (*Num.* VII.), il s'ensuit que *les pesanteurs spécifiques de ces fluides sont proportionnelles à leurs densités.*

Nous supposons évidemment que chacun des fluides comparés, a la même densité dans toute son étendue.

Comme nous n'avons point parlé dans la Statique des propositions suivantes, dont nous ferons cependant usage, nous allons les démontrer avant d'aller plus loin.

SCD LYON 1

CCCVIII.

Si deux côtés EA, AB (Fig. 138.) *d'un triangle* EAB *ſont preſſés perpendiculairement dans leurs milieux par deux forces* P & Q, *qui leur ſoient proportionnelles & qui ſoient dirigées l'une & l'autre du dehors au dedans ou du dedans au dehors dans le plan du triangle, elles auront pour réſultante une troiſième force proportionnelle au troiſième côté* BE *& dirigée perpendiculairement par le milieu de ce côté.*

En effet, prolongeant les directions des forces au-delà du point *b* où elles ſe coupent, & repréſentant *P* par la ligne *bc*, *Q* par la ligne *ba*, il eſt évident que leur réſultante ſera exprimée par la diagonale *be* du parallélogramme *baec*, formé ſur ces deux lignes, & à cauſe de $bc = ae$, les valeurs des forces *P*, *Q*, & de leur réſultante, ſeront repréſentées par les côtés *ae*, *ba*, *be* du triangle *bae*, dans lequel on aura les deux côtés *ba*, *ae* proportionnels aux côtés *BA*, *AE* du triangle *BAE*. De plus, l'angle *a* eſt égal à l'angle *A*, puiſque les côtés qui forment le premier ſont perpendiculaires à ceux qui forment le ſecond; & les triangles *bae*, *BAE* ſont ſemblables. Donc les forces *P* & *Q* ont une réſultante *be* perpendiculaire & proportionnelle au côté *BE*. Or cette réſultante eſt néceſſairement dirigée par le milieu de ce côté; car

SCD LYON 1

il est évident que le point *b* est le centre du cercle circonscrit au triangle *BAE*.

CCCIX.

Si sur les milieux des côtés EA, AB, BC; CD, DE (Fig. 139.) *d'un polygone inflexible* EABCD *sont appliquées perpendiculairement les puissances* P, Q, R, S, T, *proportionnelles chacune à chacun des mêmes côtés, & toutes dirigées du dehors au dedans, ou du dedans au dehors, dans le plan du polygone; ces puissances seront en équilibre.*

Car ayant mené du point *B* les diagonales *BE*, *BD*, la résultante des forces *P* & *Q* sera une force que je nomme *X*, proportionnelle à *BE* & perpendiculaire sur le milieu de cette ligne; la résultante des forces *X* & *T* sera une force que je nomme *Y*, proportionnelle à *BD* & perpendiculaire sur le milieu de cette ligne; enfin la résultante des forces *Y* & *S* sera une force que je nomme *Z*, proportionnelle à *BC*, perpendiculaire sur le milieu de cette ligne, & par conséquent détruite par la force égale *R* qui lui sera directement opposée.

La démonstration est la même, quel que soit le nombre des côtés du polygone. Elle a donc également lieu, lorsque le nombre des côtés du polygone devient infini. Or on peut regarder une courbe rentrante quelconque, comme un polygone d'une

SCD LYON 1

infinité de côtés. Donc si l'on conçoit une courbe rentrante quelconque, infléxible, partagée en une infinité d'éléments, & qu'au milieu de ces éléments on applique perpendiculairement des puissances qui leur soient proportionnelles, ces puissances seront en équilibre.

CCCX.

DANS un triangle rectangle BAC (Fig. 140.), *dont le côté* AC *est vertical & le côté* CB *horizontal, si tous les points de l'hypothénuse* AB *sont pressés perpendiculairement par des forces telles que* Pf, *qui agissent toutes du dehors au dedans, ou du dedans au dehors, dans le plan du triangle, & qu'on décompose chacune de ces forces en deux autres, l'une verticale* Pg, *& l'autre horizontale* Ph; *je dis que la force perpendiculaire à l'hypothénuse, la force verticale & la force horizontale, seront respectivement comme l'hypothénuse* AB, *la base* BC *& la hauteur* AC *du triangle.*

Car ayant fait le parallélogramme *Pgfh*, les valeurs des trois forces seront représentées par les lignes *Pf*, *Pg*, *Ph*, ou *Pf*, *hf*, *Ph*. Or les trois côtés du triangle *Pfh* étant perpendiculaires sur les côtés du triangle *BAC*, on a *Pf* : *BA* :: *fh* : *BC* :: *Ph* : *AC*.

CCCXI.

SI l'hypothénuse BA *du même triangle est per-*

pendiculaire aux côtés opposés & horizontaux HI, LM *d'un rectangle incliné* HL, *qui soit pressé dans tous ses points par des forces perpendiculaires, dont chacune soit décomposée en deux autres, l'une verticale & l'autre horizontale; je dis que chaque force perpendiculaire au rectangle sera à la force verticale & à la force horizontale qui la composent, comme l'hypothénuse* AB *est à la base* BC *& à la hauteur* AC *du triangle* BAC.

Car en imaginant que le rectangle *HL* soit une face d'un prisme triangulaire *HMNOLI*, dont la seconde face *MNOL* soit un rectangle vertical, & dont la troisième face *IHNO* soit un rectangle horizontal, on pourra concevoir ce prisme comme composé d'une infinité d'éléments triangulaires, égaux & parallèles à *BAC*, & chaque force perpendiculaire au rectangle incliné, agira dans le plan de l'un de ces éléments perpendiculairement à l'hypothénuse. Donc cette force sera à la force verticale & à la force horizontale, comme l'hypothénuse de l'élément triangulaire est à sa base & à sa hauteur; c'est-à-dire que ces trois forces seront dans le rapport des lignes *BA*, *BC*, *AC*.

On démontreroit par un semblable raisonnement, que la résultante de toutes les forces perpendiculaires au rectangle incliné *HL* est à la force verticale & à la force horizontale qui la composent, comme *BA* est aux lignes *BC* & *AC*.

SCD LYON 1

CCCXII.

DONC *la réſultante des forces perpendiculaires au rectangle incliné, & les deux forces, l'une verticale, l'autre horizontale qui la compoſent, ſont reſpectivement comme les rectangles* HL, HO & OM. En effet, il eſt évident que les ſurfaces de ces rectangles ſont comme les lignes *AB*, *BC*, *AC*.

CCÇXIII.

SI les côtés égaux *LM*, *NO*, différoient du côté *HI* d'une quantité infiniment petite par rapport à leur longueur, on pourroit négliger cette différence, & dire encore que la réſultante des forces perpendiculaires au trapèze *HL*, & les deux forces, l'une verticale, l'autre horizontale, auxquelles elle eſt réductible, ſont comme les trapèzes *HL*, *HO* & le rectangle vertical *OM*.

On peut obſerver que le trapèze *NO* eſt la projection du trapèze incliné ſur un plan horizontal. Donc on peut dire que la force perpendiculaire au trapèze incliné eſt à la force verticale qu'on obtient par la décompoſition dont il s'agit ici, comme le trapèze incliné eſt à ſa projection ſur un plan horizontal.

Il faut même ajouter que ſi l'on prend ſur le rectangle ou trapèze incliné *HL*, une partie quelconque *mnp* preſſée perpendiculairement dans tous ſes points, & que l'on décompoſe la preſſion totale

SCD LYON 1

en deux forces, l'une dans le sens vertical & l'autre dans le sens horizontal, la pression perpendiculaire sera toujours à la force verticale, comme la surface *mnp* est à sa projection *m'n'p'* sur un plan horizontal. Car on peut concevoir la pression perpendiculaire comme agissante dans le plan d'un triangle égal & parallèle à *BAC* perpendiculairement à l'hypothénuse. Or nous venons de voir que si l'on décompose une semblable pression en deux forces, l'une verticale & l'autre horizontale, la pression perpendiculaire est toujours à la force verticale, comme *AB* est à *BC*; & l'on démontre en Géométrie, que la surface inclinée *mnp* est aussi à sa projection *m'n'p'* sur un plan horizontal, comme *AB* est à *BC*: Donc &c.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'HYDROSTATIQUE.

POUR plus de clarté, nous traiterons séparément de l'équilibre des fluides incompressibles, de celui des fluides élastiques, & de celui des fluides avec les corps solides qui y sont plongés.

SCD LYON 1

ARTICLE PREMIER.

De l'Équilibre des Fluides incompressibles.

CCCXIV.

PRINCIPE FONDAMENTAL. *Une liqueur étant en équilibre dans un vase* AMNE (Fig. 141), *si on la presse perpendiculairement en un point quelconque, la pression se transmettra toute entière à tous les autres points du fluide, suivant des directions quelconques; de manière que les parois du vase seront pressées perpendiculairement dans chacun de leurs points, plus qu'elles ne l'étoient auparavant, avec une force égale à la nouvelle pression.*

En effet, que l'on fasse dans les parois du vase plusieurs ouvertures pp', qq', rr', ss', tt', auxquelles on applique des pistons mobiles soutenus par des forces P, Q, R, S, T, capables d'empêcher l'écoulement du fluide. L'expérience apprend, que si l'on vient à augmenter l'une de ces forces, par exemple P, il faudra, pour empêcher l'écoulement, augmenter chacune des autres forces Q, R, S, T, proportionnellement à la grandeur des orifices fermés par les pistons qu'elles soutiennent. Si l'on augmente d'une livre la puissance P, on ne pourra empêcher le fluide de s'échapper, qu'en augmentant d'une livre une puissance appliquée à un orifice égal à pp', de deux livres une puissance appliquée à un

SCD LYON 1

orifice double de pp', de trois livres une puissance appliquée à un orifice triple de pp', &c. Et comme on peut supposer l'ouverture pp' aussi petite qu'on voudra, il s'en suit qu'en lui donnant pour diamètre celui d'une molécule fluide, on ne pourra presser cette molécule, sans que la pression ne se transmette toute entière & suivant des directions quelconques, à toutes les autres molécules qui composent le fluide.

CCCXV.

THÉORÈME I. *Une liqueur contenue dans un vase* AMNE (Fig. 142), *& abandonnée à l'action libre de la pesanteur, sera en équilibre, si sa surface supérieure* ae *est horizontale.*

Pour le démontrer, imaginons cette liqueur divisée en tranches horizontales $aefb$, $bfgc$, &c., chacune infiniment mince; & supposons d'abord qu'il n'y ait que la première tranche $aefb$ qui soit pesante. Il est évident (*Num.* CCCXIV.), que la pesanteur du filet vertical pq, pris dans cette tranche, doit produire dans toute la masse $bfNM$ une pression qui agira contre chaque point des parois, avec une force égale au poids de pq, & qu'un point quelconque i de la surface bf sera soulevé verticalement avec une force égale au poids du même filet. Or chaque point i de la surface bf est en même tems poussé de haut en bas par la pesanteur d'un filet vertical $hi = pq$. Donc il est im-

SCD LYON 1

poſſible qu'aucun point de la ſurface bf s'élève ou s'abaiſſe, & par conſéquent l'équilibre ſubſiſtera.

Suppoſons à préſent que la ſeconde tranche $bfgc$ ſoit peſante, ainſi que la première. Chaque point de la ſurface $cgNM$ qui comprend le reſte de la maſſe fluide, ſera preſſé perpendiculairement par une force égale aux poids des deux filets verticaux pq, qr: donc chaque point l de cg ſera ſoulevé verticalement par une force égale au poids de ces deux filets; & comme ce point eſt en même tems pouſſé de haut en bas par le poids des deux filets correſpondants hi, il, égaux aux premiers pq, qr, il y aura encore équilibre.

On démontrera de même qu'il y aura équilibre, en ſuppoſant que toutes les tranches inférieures ſoient peſantes comme les deux premières.

CCCXVI.

REMARQUE. On peut employer une ſemblable démonſtration, pour prouver qu'une liqueur abandonnée à l'action libre de ſa peſanteur dans un ſyphon $AMNE$ (*Fig.* 143.), ſera en équilibre, ſi ſes ſurfaces ſupérieures ae, $a'e'$ ſont horizontales & de niveau.

Car imaginant la liqueur diviſée en tranches horizontales par une infinité de plans ae', bf', cg', &c., ſuppoſons d'abord qu'il n'y ait de peſanteur que dans les deux tranches ſupérieures $aefb$, $a'e'f'b'$ qui ſe

répondent dans les deux branches. Il est évident que la pesanteur du filet vertical pq produira dans tous les points du fluide $fbMNf'b'$, une pression égale au poids de ce filet, & qu'ainsi tous les points des surfaces bf, $b'f'$ seront soulevés verticalement par des forces équivalentes au poids du filet pq. Donc tous ces points étant poussés de haut en bas par les poids des filets supérieurs qui leur répondent verticalement & dont chacun est égal à pq, le fluide ne pourra prendre aucun mouvement, & par conséquent il demeurera en équilibre.

Si l'on supposoit ensuite que les deux secondes tranches $bfgc$, $b'f'c'g'$, devînssent pesantes comme les premières, la pesanteur des deux filets verticaux pq, qr, produiroit dans tous les points du fluide $gcMNg'c'$ une pression égale au poids de ces deux filets; & par conséquent tous les points des surfaces cg, $c'g'$ seroient soulevés verticalement par des forces égales au poids de pq, qr. Or ces mêmes points seroient repoussés de haut en bas, chacun par le poids de deux filets verticaux, équivalents à pq, qr. Donc il y auroit toujours équilibre.

Et comme on peut appliquer le même raisonnement à toutes les tranches suivantes, comprises entre les mêmes plans horizontaux, il est évident que la masse fluide entière sera en équilibre, si les surfaces supérieures ae, $a'e'$ sont de niveau dans les deux branches du syphon.

CCCXVII.

SCD LYON 1

CCCXVII.

COROLLAIRE I. Quand la liqueur contenue dans le vaſe *AMNE* (*Fig.* 142.) eſt peſante, tous les points des parois en ſont preſſés perpendiculairement. Donc elle s'échapperoit néceſſairement par une ouverture faite en un point quelconque des parois. Et comme la vérité de cette propoſition ne dépend aucunement de la figure du vaſe, on peut dire que tous les points des parois ſeroient preſſés perpendiculairement, ſi la ſurface ſupérieure *AE* ſe réduiſoit à un ſeul point, & que le vaſe eût la forme *ABMNDE* (*Fig.* 144.). Par conſéquent, ſi l'on ſupprimoit la partie *ABCDE* des parois, le fluide correſpondant ne pourroit conſerver ſa poſition. Donc *un fluide peſant, contenu dans un vaſe, ne peut être en équilibre, à moins que ſa ſurface ſupérieure ne ſoit horizontale.*

CCCXVIII.

COROLLAIRE II. *On démontrera avec la même facilité, qu'une liqueur contenue dans un ſyphon renverſé* AMNE (Fig. 145.), *ne peut être en équilibre, à moins que ſes ſurfaces ſupérieures* ae, a'e' *ne ſoient horizontales & de niveau.*

Car ſuppoſons ces ſurfaces de niveau, & imaginons que le fluide ſoit fermé en *a'e'*. Il eſt évident qu'on ne pourroit ajouter ſur *ae* une tranche horizontale *amne*, ſans que la peſanteur d'un filet

SCD LYON 1

vertical pq, pris dans cette tranche, ne produisît dans toute la masse $eaMNe'a'$ une pression équivalente au poids de pq; & l'on ne pourroit placer sur mn de nouvelles tranches horizontales, sans augmenter de plus en plus cette pression. Donc le fluide s'échapperoit par un orifice quelconque pratiqué dans le couvercle $a'e'$, & par conséquent la liqueur s'élèveroit dans la branche NE du syphon, si elle n'étoit pas fermée en sa partie supérieure.

CCCXIX.

THÉOREME II. *La pression perpendiculaire qu'une liqueur en équilibre dans un vase* AMNE (Fig. 142.) *exerce contre un point quelconque* m *des parois, est égale au poids d'un filet fluide qui auroit* m *pour base, & la distance de ce point au niveau pour hauteur.*

En effet, concevant toujours la liqueur divisée par une infinité de plans horizontaux, chacune des tranches plus élevées que le point m lui communiquera, perpendiculairement aux parois, une pression égale au poids d'un filet vertical pris dans cette tranche. Donc pour avoir la pression totale supportée par le point m, il faut ajouter ensemble le poids d'un filet vertical de la première tranche, celui d'un filet vertical de la seconde, celui d'un filet vertical de la troisième, &c., en descendant jusqu'en m. Or la somme de ces filets est évidemment égale à un

SCD LYON 1

seul filet, qui iroit verticalement du point *m* jusqu'au niveau.

CCCXX.

COROLLAIRE I. *Donc la pression que supporte le fond horizontal* MN *d'un vase* AMNE (Fig. 146, 147, 148.), *est égale au poids absolu d'un prisme fluide, qui auroit ce fond pour base, & la distance de ce fond au niveau pour hauteur.*

Car un point quelconque *m* du fond *MN* est pressé, comme on vient de le dire, par le poids du filet vertical *om*, qui a pour hauteur la distance du fond au niveau. Donc puisque tous les points du fond sont également éloignés du niveau, on aura la pression entière que le fluide exerce sur ce fond, en répétant le poids du filet *om* autant de fois qu'il y a de points dans *MN*. Or il est visible que le poids de *om* répété autant de fois qu'il y a de points dans le fond *MN*, équivaut au poids d'un prisme fluide qui auroit pour base la surface *MN*, & pour hauteur la distance de *MN* au niveau.

CCCXXI.

COROLLAIRE II. *Donc pour avoir la pression soutenue par le fond* MN (Fig. 146, 147, 148.), *il faut multiplier la pesanteur spécifique du fluide par sa hauteur & par la surface du fond* MN.

Car en multipliant *MN* par la hauteur *om* du fluide, on a le volume d'un prisme dont la base est

SCD LYON 1

le fond du vaſe, & dont la hauteur eſt la diſtance de ce fond au niveau. En multipliant enſuite ce volume par la peſanteur ſpécifique du fluide, on trouve le poids abſolu du même priſme, & par conſéquent la preſſion que ſupporte *M N* (*Num.* CCCXX.).

On voit par là, que la diſtance du fond horizontal *MN* au niveau demeurant la même, ce fond eſt toujours également preſſé par le fluide, ſoit que le vaſe ait le même diamètre dans toute ſa hauteur (*Fig.* 146.), ſoit qu'il aille en s'élargiſſant de bas en haut (*Fig.* 147.), ſoit qu'il aille en ſe rétréciſſant (*Fig.* 148.).

CCCXXII.

COROLLAIRE III. *La preſſion perpendiculaire qu'une liqueur contenue dans un vaſe* AMNE (Fig. 149.) *de figure quelconque, exerce contre une partie de dimenſions infiniment petites* a a' b' b *des parois, eſt égale au produit qui a pour facteurs cette partie élémentaire, ſa diſtance au niveau, & la peſanteur ſpécifique du fluide.*

Car la preſſion perpendiculaire que ſupporte chaque point de la petite ſurface *a a'b'b*, qu'on peut regarder comme plane, eſt égale au poids d'un filet vertical, qui iroit de ce point juſqu'au niveau du fluide. Donc pour avoir la preſſion totale, il faut ajouter enſemble autant de filets verticaux, qu'il y a de points dans *a a'b'b*. Or tous ces filets ne dif-

SCD LYON 1

férant en longueur qu'infiniment peu, leur ſomme eſt équivalente à un priſme droit qui auroit pour baſe la ſurface élémentaire *a a'b'b*, & pour hauteur la diſtance de cette ſurface au niveau; priſme dont le poids eſt évidemment exprimé par un produit qui a pour facteurs la ſurface *a a'b'b*, ſa diſtance au niveau & la peſanteur ſpécifique du fluide.

CCCXXIII.

COROLLAIRE IV. *Donc pour avoir la preſſion perpendiculaire que ſupporte un élément* a a'b'b, *il ſuffit de prendre ſon moment par rapport au plan de niveau, & de le multiplier par la peſanteur ſpécifique du fluide.*

En effet, le moment de la petite ſurface *aa'b'b* par rapport au plan de niveau, eſt égal au produit de *aa'b'b* par ſa diſtance à ce plan.

CCCXXIV.

COROLLAIRE V. *La ſomme des preſſions perpendiculaires qu'un fluide contenu dans un vaſe* AMNE (Fig. 149.) *exerce contre une partie quelconque* a c d e *des parois, eſt égale au poids d'un priſme droit du fluide, qui auroit pour baſe la ſurface* a c d e, *& pour hauteur la diſtance* O G *du niveau au centre de gravité* G *de cette ſurface.*

En effet, ſuppoſons que la ſurface de niveau *AE* ſoit le plan des moments, & concevons la ſurface

SCD LYON 1

acde divisée en parties élémentaires de dimensions infiniment petites, telles que *aa'b'b*. En prenant d'un côté la somme des moments de toutes ces parties par rapport au plan *AE*, & de l'autre le moment d'une surface plane de même étendue que *acde*, & dirigée par le point *G* parallèlement au même plan *AE*; nous aurons deux quantités égales (*Num.* LXIV.), & qui donneront des produits égaux, si on les multiplie l'une & l'autre par la pesanteur spécifique du fluide. Or le premier de ces produits exprimera la somme des pressions perpendiculaires que le fluide exerce contre la partie *acde* des parois, & le second exprimera le poids absolu d'un prisme droit de fluide qui auroit pour base une surface plane de même étendue que *acde*, & pour hauteur la distance du centre de gravité *G* au niveau. Donc, &c.

Pour faire ici une application bien simple de la proposition que nous venons de démontrer, soit *ABCD* (*Fig.* 150.) une vanne rectangulaire & verticale d'écluse, soutenant la pression de la masse d'eaux dormantes *ADX*, dont l'étendue *DX* est aussi grande ou aussi petite qu'on voudra, (car cela est absolument indifférent quant à l'effet de la pression). Soit *G* le milieu ou le centre de gravité de la vanne, *OG* la distance du niveau à ce point, & *p* la pesanteur spécifique de l'eau. Pour avoir la pression entière que supporte la vanne, il faudra

SCD LYON 1

chercher le poids absolu d'un prisme d'eau, qui auroit la surface de la vanne pour base, & la ligne OG pour hauteur. Il faudra donc multiplier la surface de la vanne qui est $AD \times AB$, par OG qui vaut $\frac{AB}{2}$, & par la pesanteur spécifique p du fluide, ce qui donnera $p \times AD \times \frac{\overline{AB}^2}{2}$.

Supposons, par exemple, $AD = 3$ pieds, $AB = 10$ pieds: on aura $AD \times \frac{\overline{AB}^2}{2} = 150$ pieds cubes; & comme le pied cube d'eau douce pèse environ 70 livres, il s'ensuit que la pression exprimée par $p \times AD \times \frac{\overline{AB}^2}{2} = 10500$ livres.

On détermineroit aussi facilement la pression, si la vanne n'étoit pas verticale, & qu'elle eût même toute autre figure que la figure rectangulaire.

CCCXXV.

COROLLAIRE VI. *Si l'on décompose la pression perpendiculaire que supporte une partie infiniment petite des parois d'un vase en deux forces, l'une verticale & l'autre horizontale, la force verticale sera toujours équivalente au poids absolu d'un prisme fluide, qui auroit pour hauteur la distance du niveau à cette partie élémentaire, & pour base*

SCD LYON 1

la projection de la même partie sur le plan du niveau.

Pour le démontrer, nommons S la surface infiniment petite $abb'a'$ (*Fig.* 151.), prise dans les parois, h sa distance au plan de niveau, s sa projection $uxyz$ sur ce plan, F la pression perpendiculaire qu'elle supporte, f la force verticale que cette pression donne par sa décomposition, & enfin p la pesanteur spécifique du fluide. Nous aurons (*Num.* CCCXIII.), $F : f :: S : s$; ou multipliant les deux termes de la seconde raison par ph, $F : f :: phS : phs$. Or $F = phS$ (*Num.* CCCXXII.): donc aussi $f = phs$, & par conséquent la force verticale f est égale au poids d'un prisme fluide, qui auroit s pour base & h pour hauteur.

CCCXXVI.

COROLLAIRE VII. *Si l'on décompose en forces verticales & horizontales toutes les pressions perpendiculaires que supportent les parois d'un vase dans leurs différents points, la résultante des forces verticales sera égale au poids absolu du fluide contenu dans le vase.*

Car supposant qu'on applique une enveloppe à la surface supérieure AE du fluide, on pourra concevoir tout ce fluide comme composé de prismes tronqués & verticaux d'une grosseur infiniment petite, & dont chacun, tel que $abb'a'c'd'dc$ sera

SCD LYON 1

terminé par des éléments $abb'a'$, $cdd'c'$ des parois. On voit de plus, que ces éléments qui serviront de bases au même prisme vertical, auront la même projection $uxyz$ sur le plan de niveau XZ.

Cela posé, si nous nommons respectivement h & h' les distances du niveau aux éléments $abb'a'$, $cdd'c'$; s la surface de leur projection $uxyz$, p la pesanteur spécifique du fluide; nous aurons phs & $ph's$ pour les forces verticales correspondantes aux éléments dont il s'agit; & comme la première de ces forces est dirigée de bas en haut, tandis que la seconde est dirigée de haut en bas, leur résultante sera évidemment égale à leur différence $ph's - phs$, ou $ps(h' - h)$. Or cette dernière quantité exprime le poids absolu d'un prisme droit de fluide, qui auroit pour base la projection s; & pour hauteur la distance $h' - h$ des deux éléments $abb'a'$, $cdd'c'$; prisme qu'on doit considérer comme égal au prisme tronqué $abb'a'c'd'dc$, puisqu'il n'en diffère jamais qu'infiniment peu.

On peut appliquer le même raisonnement à chacun des autres prismes tronqués dont le fluide est composé. Donc la somme ou la résultante des forces verticales, qui agissent contre les différents points des parois, est égale au poids absolu du fluide contenu dans le vase.

CCCXXVII.

COROLLAIRE VIII. *Toutes les pressions perpen-*

SCD LYON 1

diculaires aux parois d'un vaſe étant décompoſées comme dans les corollaires précédents, les forces horizontales ſe détruiront mutuellement.

Pour le démontrer, imaginons le vaſe *AMNE* (*Fig.* 152.) coupé par une infinité de plans horizontaux infiniment peu éloignés les uns des autres, tels que *abcd*, *a'b'c'd'*. Les contours de ces ſections différeront infiniment peu, & l'on pourra concevoir la partie des parois compriſe entre deux ſections conſécutives, comme compoſée d'une infinité de petits trapèzes *abb'a'*, *mnn'm'*, *&c.*, dans chacun deſquels la différence entre les côtés horizontaux ſera infiniment plus petite que ces côtés. Or ſi nous nommons reſpectivement *F* & *F'* les preſſions perpendiculaires que la liqueur exerce ſur deux de ces trapèzes *abb'a'*, *mnn'm'*; *S* & *S'* les ſurfaces de ces trapèzes, *s* & *s'* les ſurfaces des deux rectangles conſtruits ſur les côtés *ab*, *mn*, & qui auroient pour hauteur la diſtance des deux ſections conſécutives *abcd*, *a'b'c'd'*; enfin *f* & *f'* les forces horizontales que donnent les preſſions perpendiculaires *F* & *F'* décompoſées en ſens vertical & en ſens horizontal; nous aurons (*Num.* CCCXXII & CCCXIII.) les trois proportions ſuivantes,

$$F : F' :: S : S';$$
$$f : F :: s : S;$$
$$F' : f' :: S' : s'.$$

Multipliant par ordre ces proportions, & diviſant

SCD LYON 1

par FF' les deux termes de la première raison du produit, & par SS' les deux termes de la seconde raison, il nous restera $f : f' :: s : s'$. Or les surfaces rectangulaires s & s' ayant même hauteur, sont comme les côtés ab, mn. Donc les forces horizontales correspondantes à deux trapèzes élémentaires quelconques, pris à la même distance du niveau, sont comme les côtés horizontaux de ces trapèzes. On peut aussi les concevoir appliquées à ces côtés, à cause de l'épaisseur infiniment petite de chaque tranche comprise entre deux sections consécutives. Donc (*Num.* CCCIX.) les forces horizontales appliquées à tous les trapèzes élémentaires d'une même tranche, doivent se faire équilibre & se détruire mutuellement; & par conséquent la résultante des forces horizontales correspondantes à tous les points des parois, doit être zéro.

CCCXXVIII.

COROLLAIRE IX. Donc pour soutenir un vase rempli de fluide, il ne faut employer qu'une force égale aux poids du vase & à la somme des forces verticales qui résultent de l'action du fluide contre les parois; ou, ce qui revient au même, il ne faut qu'une force égale au poids du vase & à celui du fluide pris ensemble. On voit que cette force peut être fort différente de la pression que le fluide exerce sur le fond du vase. Dans la figure 148, par exemple,

SCD LYON 1

le fond horizontal *MN* est pressé par une force égale au poids d'un prisme fluide qui auroit ce fond pour base & sa distance au niveau pour hauteur, (*Num.* CCCXX.); & cependant pour soutenir le vase, il ne faudroit qu'un effort égal à son propre poids & à celui du fluide *AMNE*.

CCCXXIX.

COROLLAIRE X. On peut faire une infinité d'applications des propositions que nous avons exposées jusqu'à présent. Nous nous contenterons d'en tirer ici une méthode pour déterminer l'épaisseur qu'on doit donner aux parois des tuyaux cylindriques, afin qu'ils puissent résister à la pression des liqueurs dont ils sont remplis.

Soient donc deux tuyaux cylindriques, verticaux & droits *AMNE*, *A'M'N'E'* (*Fig.* 153), dont on considère les anneaux élémentaires *abcd*, *a'b'c'd'*, comme composés d'une infinité de filets circulaires joints ensemble, & qui forment des espèces de machines funiculaires, dont tous les points soient pressés perpendiculairement par les fluides contenus dans ces tuyaux.

Il est évident 1° que tous les points du même anneau seront pressés par des forces égales, puisque la pression d'un point quelconque est égale au poids d'un filet vertical qui auroit ce point pour base, & la distance au niveau pour hauteur (*Num.* CCCXIX.).

SCD LYON 1

2° Que la ſomme des preſſions perpendiculaires que ſupporte l'un de ces anneaux, ſera toujours égale au produit qui auroit pour facteurs le contour intérieur de cet anneau, ſa diſtance au plan de niveau, & la peſanteur ſpécifique du fluide.

3° Que les preſſions du fluide doivent produire une égale tenſion dans tous les points du même anneau, puiſqu'il n'y a point de raiſon pour que cette tenſion ſoit plus conſidérable dans une partie que dans l'autre.

4° Il ſuit de la propoſition démontrée (*Num.* LXXXIX.), que la tenſion produite dans chaque point du même anneau, eſt à la ſomme des preſſions perpendiculaires qu'il ſupporte, comme le rayon d'un cercle eſt à ſa circonférence. Donc les tenſions dans l'un & l'autre anneau ſont proportionnelles aux preſſions perpendiculaires qu'ils ſupportent; & par conſéquent en nommant C & C' les contours intérieurs des deux anneaux, H & H' leurs diſtances aux plans de niveau, p & p' les peſanteurs ſpécifiques des fluides contenus dans les deux cylindres, F & F' les tenſions produites dans les deux anneaux, on aura la proportion $F : F' :: pHC : p'H'C'$. Et comme les diamètres des cylindres, que nous nommerons D & D', ſont comme les contours C & C' (car nous conſidérons les contours intérieurs comme des circonférences de cercles, ou du moins nous leur ſuppoſons la même hauteur infiniment

SCD LYON 1

petite), on pourra substituer dans la proportion précédente le rapport de D à D', au lieu de celui de C à C'; ce qui donnera $F : F' :: pHD : p'H'D'$.

5° Les anneaux pressés par les fluides résistent d'autant plus à leur rupture, qu'ils ont plus d'épaisseur & que la matière dont ils sont composés a plus de ténacité. Car plus les parois du vase ont d'épaisseur, plus il y a de filets à séparer dans chaque anneau, & lorsque la matière dont le cylindre est fait, a plus de ténacité, les filets se rompent plus difficilement. Ainsi en nommant R & R' les plus grandes résistances que les deux anneaux puissent opposer à leur rupture, E & E' les épaisseurs des parois, T & T' les ténacités des matières dont elles sont composées, nous aurons $R : R' :: ET : E'T'$.

6° Lorsque les anneaux sont sur le point de céder à l'action du fluide ou de se rompre, les tensions F & F' sont égales aux résistances R & R' qu'ils opposent à leur rupture. Donc alors $ET : E'T' :: pHD : p'H'D'$. Divisant les deux antécédents de cette proportion par T, & les deux conséquents par T', on trouve $E : E' :: \frac{pHD}{T} : \frac{p'H'D'}{T'}$.

Considérant donc les anneaux qui touchent les bases des deux cylindres, & qui doivent crever les premiers, parce qu'ils éprouvent plus de pression de la part des fluides, nous pourrons conclure que *les épaisseurs des parois, au moment qu'elles sont sur*

SCD LYON 1

le point de céder dans leur partie inférieure, ſont en raiſon compoſée de la directe des peſanteurs ſpécifiques des liqueurs, de leurs hauteurs, des diamètres des cylindres, & de l'inverſe des ténacités des matières dont les tuyaux ſont faits.

Lorſque les liqueurs ſont de même eſpèce, auſſi bien que les matières dont les tuyaux ſont compoſés, la proportion ſe ſimplifie & devient

$$E : E' :: HD : H'D'.$$

7° Enfin ſuivant une expérience de M. *Parent*, les parois d'un tuyau de plomb de 12 pouces de diamètre, & de 60 pieds de hauteur, doivent avoir 6 lignes d'épaiſſeur, pour ſoutenir verticalement, ſans crever, l'effort de l'eau. Nommons E l'épaiſſeur des parois de ce tuyau, D ſon diamètre, H ſa hauteur, T la ténacité du plomb, p la peſanteur ſpécifique de l'eau. Il eſt évident que connoiſſant le diamètre D' d'un autre tuyau quelconque, H' ſa hauteur, T' la ténacité de la matière dont il eſt fait, p' la gravité ſpécifique du fluide qui le remplit, on trouvera toujours par une ſimple proportion l'épaiſſeur E' que doivent avoir ſes parois pour réſiſter à la preſſion de ce fluide.

Qu'on propoſe, par exemple, de déterminer l'épaiſſeur que doit avoir un tuyau de plomb de 6 pouces de diamètre, & qui doit ſoutenir l'effort d'une colonne d'eau de 100 pieds de hauteur. La proportion $E : E' :: HD : H'D'$, deviendra

$6^{li} : E' :: 60 \times 12 : 100 \times 6$, d'où l'on tirera $E' = 5$ lignes.

Qu'on demande encore l'épaisseur que doit avoir un tuyau de cuivre de 24 pouces de diamètre, pour soutenir l'effort d'une colonne de mercure de 30 pieds de hauteur. La ténacité du plomb étant à celle du cuivre, comme 1 est à 28 environ, & la pesanteur spécifique de l'eau à celle du mercure, comme 1 à 14 environ, nous pourrons supposer $T = 1$, $T' = 28$, $p = 1$, $p' = 14$, & la proportion $E : E' :: \frac{pHD}{T} . \frac{p'H'D'}{T'}$, deviendra

$$6^{li} : E' :: \frac{1 \times 60 \times 12}{1} . \frac{14 \times 30 \times 24}{28};$$

d'où l'on tirera $E' = 3$ lignes.

CCCXXX.

THÉORÈME III. *Deux liqueurs de pesanteurs spécifiques différentes sont en équilibre dans les deux branches d'un syphon, quand le plan qui les sépare est horizontal & que leurs hauteurs au-dessus de ce plan sont réciproquement proportionnelles à leurs pesanteurs spécifiques*

En effet, que la branche ADB du syphon $ADBC$ (*Fig.* 154.) contienne une liqueur dont la pesanteur spécifique soit p, tandis que l'autre branche BC contient une liqueur d'espèce différente, & dont la pesanteur spécifique est p'. Supposons que les hauteurs

hauteurs de ces liqueurs au-dessus du plan horizontal BE qui les sépare, soient respectivement h & h'. Pour que les deux liqueurs soient en équilibre, il suffit qu'un point quelconque m pris dans le plan BE soit également pressé par l'une & par l'autre : or c'est ce qui arrive quand les pesanteurs spécifiques sont en raison inverse des hauteurs hh'. Car la pression de la liqueur contenue dans la partie ADB du syphon est $p\,m\,h$ (*Num.* CCCXIX.), & celle de la liqueur contenue dans la partie $B\,C$ est $p'\,m\,h'$. Mais puisqu'on suppose $p : p' :: h' : h$, on a $ph = p'\,h'$, & par conséquent $p\,m\,h = p'\,m\,h'$.

CCCXXXI.

Remarque. Un point m pris entre les deux liqueurs qui se touchent, ne peut en être également pressé, à moins que l'on n'ait $p\,m\,h = p'\,m\,h'$, ou $ph = p'h'$; c'est-à-dire, à moins que les pesanteurs spécifiques des liqueurs ne soient en raison inverse de leurs hauteurs au-dessus de ce point. De là on peut conclure que *si les deux liqueurs se font équilibre, la surface qui les sépare, sera nécessairement horizontale.* Car si l'on vouloit supposer qu'un point n de cette surface fût plus bas que le point m, d'une quantité d, sa distance aux niveaux des deux liqueurs seroit $h + d$, $h' + d$; & par conséquent, pour que les points m & n pris séparément fussent également pressés par l'une & par l'autre liqueur, il faudroit

SCD LYON 1

que l'on eût $p : p' :: h' : h :: h' + d : h + d$. Donc on auroit $h(h' + d) = h'(h + d)$, ou $h = h'$ & $p = p'$. Ainsi les liqueurs ne seroient pas de pesanteurs spécifiques différentes, comme on le suppose.

Donc il est impossible que deux liqueurs différentes, contenues dans les deux branches d'un syphon, se fassent équilibre, à moins qu'elles ne se touchent dans un plan horizontal, & que leurs hauteurs au-dessus de ce plan, ne soient en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques.

ARTICLE II.

De l'Équilibre des Fluides élastiques.

CCCXXXII.

SOIT un fluide élastique *BMNC* (*Fig.* 155.) contenu dans un vase *AMNE*, & abandonné à l'action libre de sa pesanteur. Il est évident que ce fluide ne peut être en équilibre, à moins que la force élastique d'une molécule quelconque ne soit équivalente à la pression que cette molécule éprouve en tous sens. Car la force élastique d'une molécule & la pression qu'elle supporte, sont des forces contraires, qui ne peuvent se détruire, si elles sont inégales. Et comme un corps compressible se réduit à un moindre volume, quand il est plus comprimé, il s'ensuit que

SCD LYON 1

la denſité du fluide élaſtique ſera plus grande par-tout où ſes molécules, que nous ſuppoſons de même eſpèce, auront une preſſion plus conſidérable à ſoutenir. Nous ne traiterons ici que des fluides ſoumis à la ſeule action de la peſanteur naturelle.

CCCXXXIII.

THÉORÈME. *Si la ſurface* BC (Fig. 155.) *d'un fluide élaſtique eſt de niveau, chacune des tranches horizontales, infiniment minces, dont on le peut concevoir compoſé, aura la même denſité dans toute ſon étendue.*

Car 1° la première tranche *BCcb* étant compoſée de molécules, qu'on ſuppoſe homogènes & également compreſſibles, il eſt évident que la peſanteur agit ſur toutes également, & que l'une ne doit pas être plus comprimée que l'autre. Donc cette tranche aura par-tout la même denſité.

2° Chaque point de la ſeconde tranche ſera preſſé par le poids d'un filet vertical de la première, & par conſéquent la ſeconde tranche ſupportera la même preſſion dans toute ſon étendue. Donc auſſi ſa denſité ſera par-tout la même.

3° On conclura la même choſe pour l'une quelconque des tranches ſuivantes, en obſervant qu'elle doit toujours être également preſſée dans tous ſes points par une force égale au poids d'un filet vertical, qui iroit de cette tranche juſqu'au niveau.

SCD LYON 1

CCCXXXIV.

COROLLAIRE I. *Un fluide élastique* BMNC (Fig. 155.) *contenu dans un vase, & abandonné à l'action libre de sa pesanteur, est en équilibre, si sa surface supérieure est horizontale, & que la force élastique de chaque molécule soit égale à la pression qu'elle supporte.*

Il est visible, en effet, que chaque tranche horizontale ayant la même densité dans toute son étendue (*Num.* CCCXXXIII.), on peut appliquer aux fluides élastiques la démonstration donnée pour les fluides incompressibles (*Num.* CCCXV.).

CCCXXXV.

COROLLAIRE II. *Réciproquement un fluide élastique ne peut être en équilibre, à moins que sa surface ne soit de niveau.*

La démonstration est la même que pour les fluides incompressibles (*Num.* CCCXVII.).

CCCXXXVI.

COROLLAIRE III. On démontrera encore pour les fluides élastiques, comme on a démontré pour ceux qui ne le sont pas, qu'un point quelconque des parois du vase, est pressé par le poids d'un filet vertical qui iroit de ce point au niveau; qu'un élément de dimensions infiniment petites, pris dans les parois, est pressé par le poids absolu d'un prisme fluide

SCD LYON 1

qui auroit cet élément pour baſe & ſa diſtance au niveau pour hauteur; que par conſéquent la ſomme des preſſions perpendiculaires ſupportées par une partie quelconque des parois, eſt égale à la ſomme des poids d'une infinité de priſmes fluides, dont chacun auroit pour baſe l'un de ces éléments, & pour hauteur la diſtance de cet élément au plan de niveau; enfin que ſi l'on décompoſe chacune des preſſions perpendiculaires aux parois du vaſe, en deux forces, l'une dans le ſens vertical, l'autre dans le ſens horizontal, les forces verticales auront une réſultante égale au poids du fluide, & que les forces horizontales ſe détruiront mutuellement.

Dans les fluides incompreſſibles, on trouve aiſément le poids d'un priſme quelconque, en multipliant ſon volume par la peſanteur ſpécifique. Mais il eſt plus difficile de déterminer le poids d'un priſme dans les fluides élaſtiques, parce que leur denſité augmente avec la diſtance au niveau. Si l'on pouvoit aſſigner la denſité en un point quelconque du priſme fluide, ou, ce qui revient au même, ſi l'on connoiſſoit la loi ſuivant laquelle cette denſité varie, on pourroit, à l'aide de la Géométrie & du Calcul, trouver & ſommer les poids de toutes les tranches horizontales infiniment minces, qu'on peut imaginer dans le priſme, ce qui donneroit ſon poids abſolu; & même, ce qui ne ſeroit pas moins important, on pourroit déterminer la hauteur du fluide élaſtique,

SCD LYON 1

d'après la preſſion qu'il exerce. (Voyez le *Traité des Fluides* de M. d'Alembert, & *l'Hydrodynamique* de M. l'Abbé Boſſut.). Mais on n'a pu repréſenter juſqu'ici la loi des denſités dans les différentes tranchés du fluide, que par des hypothèſes ſouvent précaires & toujours un peu incertaines. C'eſt pourquoi les théories fondées ſur ces hypothèſes peuvent rarement être appliquées à la pratique.

Au reſte, ſi l'on n'a pour objet que de trouver la preſſion d'un fluide élaſtique, on peut recourir immédiatement à l'expérience. Ayant trouvé par cette voie la preſſion qu'il exerce ſur une ſurface horizontale donnée, on conclura, par une ſimple proportion, celle qu'il exercera contre toute autre ſurface horizontale, ou même verticale, ou inclinée, en ſuppoſant que ſa denſité demeure la même ou ſenſiblement la même dans tous les cas. Ainſi, connoiſſant par l'expérience que proche la ſurface de la terre, la preſſion de l'air ſur un plan d'un pied quarré eſt équivalente à peu près au poids de 32 pieds cubes d'eau, ou à 2240 livres, on trouvera que ſa preſſion ſur une ſurface de 12 pieds quarrés ſera environ de 26880 livres.

CCCXXXVII.

COROLLAIRE IV. *Le fond horizontal* MN *d'un vaſe priſmatique* (Fig. 156.) *eſt preſſé par le poids abſolu du fluide élaſtique* BMNC *que ce vaſe contient.*

SCD LYON 1

Car chaque point du fond eſt preſſé par le poids d'un filet vertical qui iroit de ce point au niveau. Or il eſt viſible que les poids des filets correſpondants à tous les points du fond, donnent le poids abſolu du fluide élaſtique. Donc, &c.

Ainſi dans un vaſe priſmatique, le fond horizontal eſt autant preſſé par le fluide élaſtique, qu'il le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort. Car ſi le fluide eût été incompreſſible, ſa denſité eût été par-tout la même que dans ſa tranche ſupérieure, & par conſéquent il ſe ſeroit élevé à une plus grande hauteur dans le vaſe, mais ſans changer de poids abſolu. Or le fond horizontal des vaſes priſmatiques eſt preſſé par le poids abſolu des fluides qu'ils contiennent (*Num.* CCCXX.): donc le fluide élaſtique exerce la même preſſion, que s'il étoit ſans reſſort.

CCCXXXVIII.

COROLLAIRE V. *Le fond horizontal* MN (Fig. 157.) *d'un vaſe qui va en diminuant de largeur de haut en bas, eſt plus preſſé par le fluide élaſtique* BMNC, *qu'il ne le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort.*

Pour le démontrer, j'imagine un vaſe priſmatique (*Fig.* 158.) dont le fond ſoit égal à celui du vaſe propoſé (*Fig.* 157.), & je ſuppoſe que les deux vaſes contiennent des fluides élaſtiques *BMNC* de même eſpèce & de même hauteur. Les fonds *MN*

SCD LYON 1

seront également pressés. Je prends, à distances égales des plans de niveau BC, deux tranches $FGZX$, $fgzx$ de même épaisseur infiniment petite hi. Leur pesanteur spécifique p sera la même. J'observe encore que si les fluides n'eussent pas été compressibles, ils auroient conservé dans toute leur étendue la même densité qu'ils ont dans la tranche supérieure $BCcb$. Ils se seroient donc élevés dans les deux vases au-dessus de BC, jusqu'à des plans AE, par exemple; & les deux tranches $FGZX$, $fgzx$ placées au-dessus de l'endroit qu'elles occupent, auroient pu former des tranches $F'G'Z'X'$, $f'g'z'x'$, dont la pesanteur spécifique p' seroit celle des fluides supposés sans ressort, & dont les épaisseurs infiniment petites seroient $H'I'$, $h'i'$.

Cela posé, nous aurions évidemment $p \times FG \times hi = p' \times F'G' \times H'I'$, & $p \times fg \times hi = p' \times f'g' \times h'i'$. La première de ces équations donne $p : p' :: F'G' \times H'I' : FG \times hi$; la seconde donne pareillement $p : p' :: f'g' \times h'i' : fg \times hi$. Dans ces proportions, la première raison est la même; donc on aura $F'G' \times H'I' : f'g' \times h'i' :: FG \times hi : fg \times hi$. Divisant les deux antécédents par $F'G'$, les deux conséquents par $f'g'$, & les deux termes de la seconde raison par hi, il restera $H'I' : h'i' :: \frac{FG}{F'G'} : \frac{fg}{f'g'}$, ou plus simplement $H'I' : h'i' :: 1 : \frac{fg}{f'g'}$, à cause de

$FG = F'G'$. Or il eſt évident que le conſéquent de la ſeconde raiſon eſt plus petit que ſon antécédent, puiſque $fg < f'g'$. Donc auſſi $h'i'$ eſt moindre que $H'I'$; d'où il ſuit que le fluide ſuppoſé ſans reſſort dans le vaſe qui va en ſe rétréciſſant de haut en bas, auroit une moindre hauteur que le fluide ſuppoſé ſans reſſort dans le vaſe priſmatique. (Car on peut appliquer à toutes les tranches correſpondantes le même raiſonnement qu'aux tranches $FGZX$, $fgzx$). Donc le fond ſeroit moins preſſé dans le premier de ces vaſes que dans le ſecond: or dans celui-ci il eſt preſſé par le fluide ſuppoſé ſans reſſort, comme l'un ou l'autre fond étoient preſſés par le fluide élaſtique. Donc enfin le fond du vaſe qui va en ſe rétréciſſant de haut en bas, eſt plus preſſé par le fluide élaſtique, qu'il ne le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort.

CCCXXXIX.

COROLLAIRE VI. *Le fond* MN (Fig. 159.) *d'un vaſe qui va en augmentant de largeur de haut en bas, eſt moins preſſé par le fluide élaſtique* BMNC, *qu'il ne le ſeroit par le même fluide ſuppoſé ſans reſſort.*

Pour le démontrer, il ſuffit toujours de comparer le vaſe dont il s'agit, avec un vaſe priſmatique de même baſe (*Fig.* 158.), qui contiendroit un fluide élaſtique de même eſpèce & de même hauteur. Prenant alors les tranches correſpondantes $FGZX$,

SCD LYON 1

$fgzx$, qui, par la dilatation des fluides, deviennent $F'G'Z'X'$, $f'g'z'x'$; & faisant les mêmes raisonnements que dans le corollaire précédent, nous trouverons encore $H'I' : h'i' :: 1 : \frac{fg}{f'g'}$, ou $H'I' : h'i' :: f'g' : fg$. Or $f'g'$ est ici moindre que fg, & par conséquent l'épaisseur $H'I'$ des tranches supposées sans ressort dans le vase prismatique, est moindre que l'épaisseur $h'i'$ des tranches correspondantes supposées sans ressort dans l'autre vase. Donc le fluide supposé sans ressort dans le vase prismatique auroit moins de hauteur, & presseroit le fond horizontal avec moins de force, que le fluide supposé sans ressort dans le vase qui va en s'élargissant de haut en bas. Or, que le fluide contenu dans le premier de ces vases soit élastique, ou qu'il soit sans ressort, sa pression demeure la même (*Num.* CCCXXXVII.). Elle est toujours égale à celle que le fluide élastique exerce sur le fond de l'autre vase. Donc le fond de celui-ci est moins pressé par le fluide élastique $BMNC$, qu'il ne le seroit par le même fluide supposé sans ressort.

CCCXL.

REMARQUE. Si le vase prismatique $AMNE$ (*Fig.* 156.), rempli d'un fluide à ressort parfait, avoit dans sa partie supérieure un fond mobile AE, qu'une force quelconque fît descendre jusqu'en BC, il est évident 1° que cette force se distribueroit

SCD LYON 1

également à toutes les colonnes du fluide; 2° que le fluide réagiroit contre le fond mobile, & qu'il le repouſſeroit, la preſſion extérieure étant ſupprimée, avec la même force qui l'avoit amené de *AE* en *BC*.

ARTICLE III.

De l'Équilibre des Fluides avec les Solides qui y ſont plongés.

CCCXLI.

SUPPOSONS que *AMNE* (*Fig.* 151.), au lieu d'être un vaſe rempli de liqueur, ſoit un corps quelconque plongé dans un fluide incompreſſible. Il eſt évident que chaque élément de ſa ſurface ſera preſſé perpendiculairement par une force égale au poids d'un priſme fluide, qui auroit cet élément pour baſe & ſa diſtance au niveau pour hauteur. Ces preſſions agiſſent du dehors au dedans du corps, & peuvent ſe décompoſer chacune en deux forces, l'une verticale & l'autre horizontale. On nomme *pouſſée du fluide*, l'effort réſultant de toutes les preſſions que ſupporte le corps.

CCCXLII.

THÉORÈME. *La pouſſée d'un fluide eſt toujours une force verticale équivalente au poids du volume de fluide que le corps plongé déplace, & dirigée de bas en haut par le centre de gravité de ce volume.*

SCD LYON 1

Supposons en effet, que toutes les pressions perpendiculaires soient décomposées en forces verticales & horizontales.

1° Les forces horizontales se détruiront mutuellement, comme dans les pressions contre les parois des vases. La démonstration est exactement la même dans les deux cas (*Num.* CCCXXVII.).

2° Concevons le volume du corps *AMNE* (*Fig.* 151) comme décomposé en prismes tronqués & verticaux, de grosseur infiniment petite, tels que $abb'a'c'd'dc$, dont les bases $abb'a'$, $cdd'c'$ soient des éléments de la surface de ce corps. Ces deux bases auront la même projection $uxyz$ sur le plan de niveau XZ. Nommons s cette projection, h sa distance à l'élément $abb'a'$, h' sa distance à l'élément $cdd'c'$, & p la pesanteur spécifique du fluide. Le premier de ces éléments sera poussé en bas par une force verticale psh (*Num.* CCCXXV.); le second sera poussé en haut par une force verticale psh'; & la résultante de ces deux forces dirigées de bas en haut sera $psh' - psh = ps(h' - h)$. Or cette dernière quantité est le poids absolu d'un prisme fluide qui auroit pour base la projection s, & pour hauteur la distance $h' - h$, qui se trouve entre les deux éléments $abb'a'$, $cdd'c'$; prisme dont le volume ne différeroit qu'infiniment peu de $abb'a'c'd'dc$. Donc, en raisonnant de même sur tous les prismes verticaux dont le volume du corps

SCD LYON 1

est composé, on trouvera que les forces qui le poussent verticalement de bas en haut, sont représentées par les poids d'une infinité de prismes fluides, qui pris ensemble auroient précisément le même volume que le fluide déplacé. Donc la résultante de ces forces, ou la poussée du fluide, est égale au poids du volume de fluide, dont le corps plongé tient la place.

Il nous reste à démontrer que cette résultante passe toujours par le centre de gravité du même volume de fluide déplacé. Or cela est évident. Car si le corps *AMNE* avoit dans toute son étendue la même densité que le fluide, la résultante des poids de tous les prismes verticaux dont il est composé, passeroit évidemment par le centre de gravité de ce corps. Donc, puisque les forces verticales que donnent les pressions du fluide, sont égales & diamétralement opposées aux poids qu'auroient ces prismes verticaux, leur résultante ou la poussée du fluide sera toujours dirigée par le centre de gravité du volume *AMNE* que le corps occupe.

Si le corps *AMNE* (*Fig.* 160) n'étoit plongé qu'en partie, on démontreroit de même, que la poussée du fluide seroit égale au poids du volume *AMN* du fluide déplacé, & qu'elle passeroit par le centre de gravité *g* de ce volume.

CCCXLIII.

COROLLAIRE I. *Pour qu'un corps plongé librement dans un fluide y soit en équilibre, il faut*

SCD LYON 1

1° que son poids soit égal à celui du volume de fluide qu'il déplace; 2° que son centre de gravité & celui du volume de fluide déplacé, soient situés dans une même ligne verticale.

Car, si la première de ces conditions n'avoit pas lieu, le poids du corps n'égaleroit pas & par conséquent ne pourroit pas contrebalancer la poussée du fluide. Si la seconde condition n'avoit pas lieu, la poussée du fluide ne seroit pas directement opposée au poids du corps. Donc elles sont nécessaires l'une & l'autre pour l'équilibre.

La détermination des différents mouvements que le corps prendroit, si ces conditions n'avoient pas lieu, est un des problèmes les plus importants & les plus difficiles qu'on puisse traiter dans l'Hydrodynamique. Les solutions qu'en ont données les Géomètres de notre siècle, sont d'un ordre bien supérieur à la partie élémentaire de cette science. C'est pourquoi, me proposant uniquement d'exposer ce qu'il y a de plus facile dans les loix de l'équilibre des fluides, je supposerai toujours, dans les corollaires suivants, que le poids du corps & l'effort du fluide agissent dans la même ligne verticale.

CCCXLIV.

COROLLAIRE II. En nommant V le volume du corps plongé dans le fluide, p sa pesanteur spécifique, V' le volume du fluide déplacé, p' sa pe-

SCD LYON 1

ſanteur ſpécifique, le poids du corps ſera toujours exprimée par pV, & la pouſſée du fluide par $p'V'$ (*Num.* CCCVII.). Pour que le corps ſoit en équilibre, il faudra donc ſeulement que l'on ait $pV = p'V'$.

Donc 1° *un corps quelconque entièrement plongé dans un endroit quelconque d'un fluide, ſera en équilibre, s'il a une peſanteur ſpécifique uniforme, égale à celle du fluide.* Car alors on aura $p = p'$ & $V = V'$. Donc on aura $pV = p'V'$.

Donc 2° *un corps abandonné à lui-même & ſpécifiquement moins peſant que le fluide, ne peut être en équilibre, à moins qu'il ne ſurnage en partie.* Car alors p étant plus petit que p', on ne peut avoir l'équation $pV = p'V'$, à moins que V ne ſoit plus grand que V', c'eſt-à-dire, à moins que le volume du corps ne ſoit plus grand que celui du fluide qu'il déplace. Par conſéquent un corps de cette eſpèce enfoncé entièrement dans le fluide, ne pourroit manquer de s'élever; puiſque la pouſſée $p'V'$ du fluide ſeroit plus grande que le poids du corps.

Donc 3° *un corps ſolide abandonné à lui-même & ſpécifiquement plus peſant que le fluide dans lequel il eſt plongé, ne peut jamais être en équilibre.* Car p étant plus grand que p', on ne pourroit avoir l'équation $pV = 'Vp'$, qu'en ſuppoſant V plus petit que V'. Or c'eſt ce qu'on ne peut pas

Lyon 1 Mathématiques
SCD LYON 1

supposer, puisqu'un corps ne peut jamais déplacer dans le fluide un plus grand volume que le sien. Il arrivera donc nécessairement que le poids pV du corps sera plus grand que la poussée $p'V'$ du fluide; & par conséquent le corps descendra jusqu'au fond du vase, à moins qu'il ne soit soutenu par quelque force étrangère.

CCCXLV.

COROLLAIRE III. *Un corps plongé dans un fluide, y perd une partie de son poids, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.*

Car le poids du corps étant pV, & la poussée du fluide $p'V'$, il est visible qu'après l'immersion le corps n'est sollicité à descendre que par une force $pV-p'V'$. Donc il perd une partie $p'V'$, qui est précisément le poids du fluide déplacé.

Si le corps est entièrement enfoncé dans le fluide, ou aura $V=V'$. Donc le corps solide perdra une partie $p'V$ de son poids, qui sera ce que pèse une masse fluide de même volume que le corps.

CCCXLVI.

COROLLAIRE IV. *La pesanteur spécifique d'un corps qui s'enfonce entièrement dans un fluide, est à la pesanteur spécifique de ce fluide, comme le poids absolu de ce corps est à la partie qu'il en perd dans le fluide.*

Car $p : p' :: pV : p'V$.

Si

Si l'on fait changer de place aux moyens, on aura $p : pV :: p' : p'V$.

CCCXLVII.

COROLLAIRE V. *Les pesanteurs spécifiques de deux corps fluides sont entr'elles, comme les parties qu'un corps solide plongé successivement dans l'un & dans l'autre, y perd de son poids.*

Car en nommant toujours V le volume du corps solide, p sa pesanteur spécifique, p' celle du premier fluide, p'' celle du second, on aura comme dans le corollaire précédent $p : pV :: p' : p'V$, & $p : pV :: p'' : p''V$. Donc $p' : p'V :: p'' : p''V$, ou $p' : p'' :: p'V : p''V$. Or $p'V$ est ce que le corps solide perd de son poids dans le premier fluide; $p''V$ est ce qu'il en perd dans le second. Donc, &c.

CCCXLVIII.

COROLLAIRE VI. *Les pesanteurs spécifiques de deux corps solides qui ont le même poids absolu l'un & l'autre, sont réciproquement proportionnelles aux parties qu'ils perdent de leurs poids, quand on les plonge dans le même fluide.*

Car en nommant V le volume du premier corps, p sa pesanteur spécifique, v le volume du second, P sa pesanteur spécifique, p' celle du fluide, nous aurons $p : pV :: p' : p'V$, & $P : Pv :: p' : p'v$. Or les poids pV & Pv des deux corps étant égaux par l'hypothèse, les moyens de ces deux proportions

SCD LYON 1

ſeront les mêmes; donc les produits des extrêmes ſeront égaux; c'eſt-à-dire qu'on aura $p' \times p'V = P \times p'v$, équation d'où l'on tire $p : P :: p'v : p'V$. Donc la peſanteur ſpécifique p du premier corps eſt à la peſanteur ſpécifique P du ſecond, comme $p'v$, poids que perd le ſecond, eſt à $p'V$, poids que perd le premier.

CCCXLIX.

COROLLAIRE VII. Suppoſons à préſent un corps dont la peſanteur ſpécifique p ſoit moindre que la peſanteur ſpécifique p' du fluide ſur lequel il ſurnage librement. Soit V le volume du corps ſolide, V' celui du fluide déplacé ou de la partie du corps plongée dans le fluide. Nous aurons $pV = p'V'$ (*Num.* CCCXLIV.), équation qui donne $p : p' :: V' : V$. *Donc la peſanteur ſpécifique du corps ſera à celle du fluide, comme la partie du corps plongée dans le fluide eſt au volume total du même corps.*

Donc 1°, des quatre quantités p, p', V, V', trois étant connues, on trouve aiſément la quatrième.

Donc 2°, connoiſſant la peſanteur ſpécifique p' du fluide & le poids pV du corps, on trouvera toujours le volume V' de la partie enfoncée: & réciproquement connoiſſant le volume V' de la partie du corps enfoncée, & la peſanteur ſpécifique p' du fluide, on connoît le poids total pV du corps.

SCD LYON 1

CCCL.

COROLLAIRE VIII. *Si l'on attache* (Fig. 161.) *à un corps* B *ſpécifiquement plus léger que le fluide* AMNE, *un autre corps* C *ſpécifiquement plus peſant que le même fluide, & que la ſomme des poids des deux corps ſoit plus grande que la ſomme des poids des fluides qu'ils peuvent déplacer, le ſyſtème deſcendra juſqu'à ce que le plus peſant de ces corps touche le fond du vaſe, à moins que ce ſyſtème ne ſoit ſoutenu par une force étrangère.*

Car en nommant V le volume du corps B, p ſa peſanteur ſpécifique, v le volume du corps C, P ſa peſanteur ſpécifique, p' celle du fluide; les poids des deux corps ſeront pV, Pv, & les efforts oppoſés du fluide ſeront $p'V$, $p'v$, quantités qui expriment les poids des volumes de fluide déplacés. Donc ſi la ſomme $pV+Pv$ eſt plus grande que la ſomme $p'V+p'v$, le ſyſtème ſera tiré vers le fond du vaſe par une force $pV+Pv-p'V-p'v$. Donc le corps deſcendra, à moins qu'il ne ſoit ſoutenu par une force $F=pV+Pv-p'V-p'v$.

On tire de cette équation $p'V=pV+Pv-p'v-F$.

CCCLI.

COROLLAIRE IX. *Un ſyſtème de deux corps* B *& C l'un plus léger & l'autre plus peſant que le fluide, étant entièrement enfoncé & ſoutenu en équilibre au moyen d'une force* F, *la peſanteur ſpéci-*

SCD LYON 1

fique p *du corps le plus léger* B *eſt à celle du fluide, comme le poids de ce corps* B *eſt à la ſomme des poids des deux corps plongés dans le fluide, moins le poids que perd le plus peſant & la force qui ſoutient le ſyſtème.*

En effet, concevant toutes les dénominations données dans le corollaire précédent, il eſt viſible que $p : p' :: pV : p'V$. Or $p'V = pV + Pv - p'v - F$ (*Num.* CCCL.). Donc $p : p' :: pV : pV + Pv - p'v - F$.

CCCLII.

COROLLAIRE X. *Les peſanteurs ſpécifiques de deux corps ſolides, ſont en raiſon directe des nombres qui expriment le rapport de la peſanteur ſpécifique du premier à celle d'un fluide quelconque, & en raiſon inverſe des nombres qui expriment le rapport de la peſanteur ſpécifique du ſecond à celle du même fluide.*

Car, ſoit p la peſanteur ſpécifique du premier corps ſolide, P celle du ſecond, p' celle du fluide; & ſuppoſons que p & p' ſoient comme les nombres a, b, & que P & p' ſoient comme les nombres m & n. Nous aurons $p = \frac{p'a}{b}$, & $P = \frac{p'm}{n}$. Donc $p : P :: \frac{p'a}{b} . \frac{p'm}{n} :: \frac{a}{m} . \frac{b}{n}$. Or les fractions qui forment la dernière raiſon, ſont directement comme les numérateurs, & réciproquement comme les dénominateurs.

SCD LYON 1

Appliquons la théorie précédente à la solution de quelques problèmes.

CCCLIII.

PROBLÈME I. *Déterminer dans quel rapport sont entr'elles les pesanteurs spécifiques de différents corps solides ou fluides.*

SOLUTION. Pour résoudre ce problème, on fait usage de la balance hydrostatique, c'est-à-dire, d'une balance dont chaque bassin porte un petit crochet tournant, auquel on peut attacher un corps solide, au moyen d'un crin, d'un cheveu, ou d'un fil très-délié.

1° Si vous voulez comparer ensemble les pesanteurs spécifiques de deux fluides, prenez un corps solide spécifiquement plus dense que ces fluides, & suspendez-le à l'un des bassins de la balance, pour en connoître le poids absolu. Plongez-le ensuite dans les fluides, & voyez ce que l'immersion dans l'un & l'autre, lui fait perdre de son poids. La pesanteur spécifique du premier fluide sera à celle du second, comme le poids perdu dans le premier est au poids perdu dans le second (*Num.* CCCXLVII).

2° S'agit-il de trouver comment sont entr'elles les pesanteurs spécifiques d'un corps solide & d'un fluide? Si le corps est spécifiquement plus pesant que le fluide, voyez, au moyen de la balance hydrostatique, ce qu'il perd de son poids, quand il est

SCD LYON 1

plongé dans le fluide. Sa pesanteur spécifique sera à celle du fluide, comme son poids absolu est au poids qu'il perd dans le fluide (*Num.* CCCXLVI.).

Si le corps est spécifiquement plus léger que le fluide, on pourra, afin qu'il s'enfonce entièrement, lui attacher un autre corps plus dense, qu'on aura pesé auparavant & plongé dans le fluide, pour connoître ce qu'il y perd de son poids. Plongeant de nouveau le système des deux corps, on déterminera la force nécessaire pour le soutenir en équilibre. Alors la pesanteur spécifique du corps le plus léger sera à celle du fluide, comme le poids absolu du même corps est au poids absolu du système des deux corps, moins la somme de ce que perd le plus pesant par son immersion & de la force nécessaire pour soutenir les deux corps plongés dans le fluide (*Num.* CCCLI.).

3° Pour trouver le rapport des pesanteurs spécifiques de deux corps solides, cherchez par la méthode que nous venons de donner, comment les pesanteurs spécifiques de l'un & de l'autre sont à celles d'un même fluide. Alors la pesanteur spécifique du premier corps, sera à celle du second, en raison directe des nombres qui expriment le rapport de la pesanteur spécifique du premier corps à celle du fluide, & en raison inverse des nombres qui expriment le rapport de la pesanteur spécifique du second corps à celle du même fluide (*N.* CCCLII.).

SCD LYON 1

Si les corps étoient l'un & l'autre plus denſes que le fluide, on pourroit prendre dans ces corps deux maſſes de même poids & les plonger dans le fluide. Leurs peſanteurs ſpécifiques ſeroient réciproquement proportionnelles à ce qu'elles perdroient de leurs poids (*Num.* CCCXLVIII.).

CCCLIV.

REMARQUE. Les corps qu'on pèſe dans l'air, paroiſſent quelquefois un peu plus légers & quelquefois un peu moins légers qu'ils ne ſont réellement, parce que l'air, comme fluide peſant, diminue un peu le poids des corps qui y ſont plongés, & qu'il le diminue plus ou moins, ſuivant que le volume de ces corps eſt plus ou moins conſidérable. Mais cette diminution eſt très-légère, & peut ordinairement ſe négliger ſans crainte d'erreur ſenſible. Du reſte, ſi l'on veut pouſſer la préciſion auſſi loin qu'il eſt poſſible, on fera l'opération ſous le récipient de la machine pneumatique, ou bien on évaluera le poids du volume d'air, dont chaque corps qui y eſt plongé occupe la place, & on ajoutera ce poids à celui du même corps.

CCCLV.

PROBLÈME II. *Le Roi Hiéron avoit fait remettre à un Orfèvre une certaine quantité d'or pour en faire une couronne; mais l'artiſte infidèle retint une partie de cet or, & lui ſubſtitua un égal*

SCD LYON 1

poids d'argent. On ſoupçonna la fraude, & comme on ne vouloit pas gâter un ouvrage qui étoit d'ailleurs d'un travail exquis, Archimède *fut conſulté ſur le moyen de découvrir la quantité d'argent, ſubſtituée à l'or. On ſait qu'il réuſſit à réſoudre le problème, mais on ne connoît pas préciſément la méthode qu'il ſuivit. On demande comment il pouvoit le réſoudre par les principes de l'Hydroſtatique.*

SOLUTION. Il eſt évident que ſi l'on prend deux morceaux d'une même matière, par exemple, deux lingots d'or ou d'argent, & qu'on les plonge dans un même fluide, il perdront des parties de leurs poids proportionnelles à ces poids. Car ils perdront des parties équivalentes aux pouſſées du fluide, & les pouſſées du fluide ſont proportionnelles aux volumes des corps qu'on y plonge. Or quand deux corps ſont de même eſpèce, leurs volumes ſont comme leurs poids (*Num.* CCCVII.). Donc les poids que les deux corps perdront par l'immerſion ſeront proportionnels aux poids abſolus.

Cela poſé, ſoient reſpectivement a, b, c les poids d'un lingot d'or, d'un lingot d'argent & de la couronne propoſée; a', b', c' ce que ces corps perdent de leurs poids, quand on les plonge dans le fluide; x le poids de la quantité d'or qui entre dans la couronne, y le poids de l'argent qu'on a allié avec cet or. Nous aurons d'abord l'équation $x+y=c$.

SCD LYON 1

Enſuite le poids a du lingot d'or eſt à la quantité d'or x qui entre dans le mélange, comme le poids a' que le lingot perd dans le fluide eſt à ce que la quantité x peut y perdre. Cette quantité perdra donc une partie de ſon poids exprimée par $\frac{a'x}{a}$. De même le poids b du lingot d'argent eſt à la quantité d'argent y qui entre dans l'alliage, comme le poids b' que le lingot d'argent perd dans le fluide eſt au poids que la quantité y doit y perdre. Cette quantité y perdra donc une partie de ſon poids exprimée par $\frac{b'y}{b}$. Or, ſi l'on ajoute enſemble ce que l'or & l'argent qui entrent dans le mélange doivent perdre de leurs poids, on aura ce que la couronne perd du ſien, c'eſt-à-dire, $\frac{a'x}{a}+\frac{b'y}{b}=c'$; équation qui comparée avec $x+y=c$, fera trouver les valeurs de x & de y.

Avant de paſſer à l'Hydraulique, je ferai encore ici les deux remarques ſuivantes.

CCCLVI.

REMARQUE I. D'après ce que nous avons dit ſur l'Hydroſtatique, on peut conclure que dans un fluide en équilibre, une molécule quelconque eſt preſſée ſuivant toutes les directions par des forces égales. Cette propriété générale des fluides eſt ce qu'on appelle *le principe de l'égalité de preſſion en*

SCD LYON 1

tous sens. Elle est le fondement des plus savantes théories que les Géomètres aient données sur les fluides. On peut voir dans l'*Essai sur la résistance des Fluides*, par M. *d'Alembert*, page 13 & suiv., comment on déduit de l'égalité de pression en tous sens, quelques autres principes dont on a fait aussi beaucoup d'applications.

CCCLVII.

REMARQUE II. J'ai considéré les fluides comme doués d'une parfaite fluidité. Cependant, physiquement parlant, il n'y a point de fluides dont les parties ne soient adhérentes les unes aux autres, avec une certaine force qui n'est pas la même dans tous, & qui peut varier dans un même fluide par le chaud, par le froid, ou par d'autres causes physiques. Nous avons sans cesse sous les yeux des preuves de cette adhérence. Si l'on jette de l'eau sur un plancher, les molécules en s'éparpillant, ont de la peine à se séparer : lorsqu'on laisse tomber un fluide goutte à goutte, on voit que les parties forment une espèce de filet plus ou moins sensible : plusieurs globules de mercure qui viennent à se toucher, s'unissent ensemble, & paroissent ne plus former qu'un même tout, &c. Quelle que soit la cause de cette adhérence, on conçoit qu'elle peut, dans certains cas, contribuer à entretenir l'équilibre dans les fluides, malgré l'inégalité de pression, pourvu que cette inégalité soit peu considérable.

SCD LYON 1

CHAPITRE II.

DE L'HYDRAULIQUE.

Les écoulements des liqueurs par des ouvertures proposées, le mouvement des eaux dans des canaux creusés par l'art ou par la nature, les forces que les fluides exercent par leur poids ou par leur choc, la meilleure manière d'employer l'action de ces fluides pour mouvoir les machines, &c., sont des objets dont la connoissance peut s'appliquer très-fréquemment aux besoins de la société. Mais autant l'Hydraulique est utile, autant elle est difficile à traiter. Ce n'est presque jamais qu'en employant le calcul infinitésimal, que l'on parvient dans cette partie à démontrer rigoureusement les propositions même qu'on regarde comme les plus simples; & les plus grands Géomètres de notre siècle, qui semblent avoir épuisé toutes les ressources de l'analyse pour se diriger dans leurs recherches, ont trouvé des résultats si composés par la nature de la chose, que l'on ne peut guères les considérer que comme des vérités géométriques, très-précieuses en elles-mêmes, & non comme des symboles propres à peindre l'image sensible du mouvement actuel & physique d'un fluide. Heureusement qu'on peut tirer, dans la pratique,

SCD LYON 1

à peu près les mêmes avantages des méthodes approchées, que de celles qui seroient absolument exactes. En multipliant donc les expériences, en les analysant avec attention, en les ramenant autant qu'il est possible à des loix générales, on a composé une espèce de théorie dépourvue, à la vérité, de la rigueur géométrique, mais simple, lumineuse & usuelle. Je vais en donner une idée, en exposant ce qu'il y a de plus facile à comprendre sur l'écoulement des fluides qui sortent de leurs réservoirs par de petits orifices, sur le mouvement des eaux jaillissantes, sur la percussion & la résistance des fluides, & sur la réfraction des corps solides qui passent d'un milieu dans un autre.

ARTICLE PREMIER.

De l'Écoulement des Fluides qui sortent de leurs réservoirs par des orifices. *

CCCLVIII.

SOIT un vase cylindrique de verre *ABCD* (*Fig.* 162.) de $5\frac{1}{2}$ pouces de diamètre, rempli d'eau à la hauteur de 16 pouces au-dessus du fond. Que l'on permette l'écoulement par un ajutage horizontal *M*

* Cet article sur l'écoulement des fluides, & le suivant sur les jets d'eau, ne sont presque qu'un extrait de l'excellent *Traité d'Hydrodynamique* de M. l'Abbé *Bossut*.

SCD LYON 1

de quatre lignes de diamètre, & qu'en même tems on entretienne le vaſe conſtamment plein à la hauteur propoſée, en y verſant auſſi légérement qu'il eſt poſſible, de l'eau avec une cruche. On obſervera que des corpuſcules étrangers, comme de la limaille, des morceaux d'ardoiſe pilée, &c, mêlés dans l'eau, ſe dirigent vers l'orifice. Ils deſcendent d'abord ſuivant des directions verticales. Mais lorſqu'ils ſont parvenus à la diſtance de trois ou quatre pouces du fond, ils ſe détournent viſiblement de cette direction, & viennent de tous côtés, ſuivant des mouvements plus ou moins obliques, gagner l'orifice.

La même expérience répétée avec d'autres ajutages, donne les mêmes réſultats à peu près.

Il en eſt de même, lorſque l'eau ſort par une ouverture latérale *N* (*Fig.* 163.). Toutes les particules ont auſſi une tendance vers l'orifice.

Cette tendance univerſelle des particules fluides vers l'orifice, eſt une ſuite néceſſaire de leur parfaite mobilité. Car il eſt évident qu'elles doivent ſe diriger vers le point qui réſiſte le moins aux forces dont elles ſont preſſées, ſous une profondeur déterminée. Or l'endroit de l'orifice eſt ce point de la moindre réſiſtance. Donc, &c.

CCCLIX.

Si après avoir rempli le vaſe *ADCB* (*Fig.* 162.) à la hauteur de 16 pouces, on permet l'écoulement

SCD LYON 1

par un orifice de 4 lignes de diamètre, sans fournir de nouvelle eau, la surface du fluide en s'abaissant demeure horizontale jusqu'à la distance d'environ 6 lignes de l'orifice. A cette hauteur, il se forme à la surface une espèce de petit *entonnoir* creux, dont la pointe répond au centre de l'orifice. La cavité de cet entonnoir s'agrandit de plus en plus; & vers la fin de l'écoulement l'eau glisse sur l'arête de l'ouverture en forme de *nappe*.

La même expérience répétée avec un ajutage de 8 lignes, donne les mêmes résultats. Seulement il paroît que l'entonnoir commence à se former à un peu moins de 6 lignes de distance à l'orifice.

Lorsque le vase se vuide par une ouverture verticale *N* (*Fig.* 163), la surface de l'eau demeure sensiblement horizontale, tant qu'elle a une certaine hauteur au-dessus de l'orifice. Mais quand elle est prête d'en toucher le bord supérieur, on la voit s'incliner un peu de ce côté. Il se forme en longueur un petit enfoncement dans la direction de l'orifice. Cette espèce de demi-entonnoir n'est pourtant pas, à beaucoup près, si sensible que dans les écoulements par des orifices horizontaux.

Tandis que l'eau a une certaine profondeur, sa surface demeure sensiblement horizontale, parce que les particules inférieures pressées par les supérieures, sont portées rapidement dans la direction de l'écoulement, entraînent de proche en proche

SCD LYON 1

les particules contiguës, en vertu de leur ténacité réciproque, & remplacent ainsi le fluide qui sort. Le paralléliſme de la ſurface eſt donc alors à peu près le même que ſi le fluide étoit en repos. Mais à meſure que la ſurface de l'eau s'abaiſſe, les particules inférieures ſont moins preſſées, ſe ſuccèdent les unes aux autres avec moins de promptitude, & l'entonnoir devient ſenſible. Dans les écoulements par des orifices horizontaux, la preſſion de l'air tend à l'agrandiſſement de l'entonnoir. En effet, l'atmoſphère preſſe par ſon poids la ſurface de l'eau. La colonne verticale d'air qui répond à l'orifice, s'inſinue dans le petit creux ou entonnoir qui ſe forme dans le même endroit. Cette colonne ſeroit contrebalancée par l'effort contraire de la colonne d'air placée au-deſſous de l'orifice, ſi celle-ci déployoit librement toute ſon action Mais comme l'eau en tombant repouſſe l'air & détruit une petite partie de ſa réaction, la première colonne doit l'emporter un peu ſur la ſeconde. D'où l'on voit que ſi les particules qui accourent de tous côtés vers l'orifice pour fournir à l'écoulement, n'ont pas aſſez de vîteſſe pour empêcher l'effet de cette inégalité de preſſion des deux colonnes dont on vient de parler, l'entonnoir s'agrandira; & qu'il s'agrandira d'autant plus, que la ſurface de l'eau s'abaiſſera davantage, & que par conſéquent les vîteſſes des particules diminueront.

SCD LYON 1

L'enfoncement ou le demi-entonnoir est moins sensible dans les écoulements par des orifices verticaux, parce que l'action de l'air est appliquée différemment, & que les molécules inférieures qui tendent à l'orifice en se portant de bas en haut, soulèvent un peu la surface dans l'endroit où elle s'abaisse.

CCCLX.

THÉOREME I. *Dans un réservoir* ABCD (Fig. 164.), *la vîtesse du fluide au sortir de l'orifice, est à la vîtesse d'une tranche horizontale* TVvt, *comme l'une des bases de cette tranche est à l'aire de l'orifice.*

En effet, supposons qu'il sorte par l'orifice un prisme fluide $rsli$, dans l'instant que la tranche $TVvt$ descend de p en q: il est évident que le prisme $rsli$ sera égal en solidité à la tranche $TVvt$, ou, si l'on aime mieux, à un prisme qui auroit TV pour base & pq pour hauteur. Donc, en nommant a l'aire rs de l'orifice, A la base TV, nous aurons $a \times sl = A \times pq$; d'où l'on tirera $sl : pq :: A : a$. Or sl & pq sont comme les vîtesses du fluide à l'orifice & dans la tranche $TVvt$. Donc la vîtesse du fluide qui sort par l'orifice, est à la vîtesse d'une tranche horizontale, comme l'une des bases de cette tranche est à l'aire de l'orifice.

Dans cette démonstration, l'on suppose la tranche $TVvt$ infiniment mince.

CCCLXI.

SCD LYON 1

CCCLXI.

THÉORÈME II. *Les volumes fluides qui ſortent dans le même tems de deux réſervoirs, dans chacun deſquels le fluide eſt conſtamment entretenu à la même hauteur, ſont en raiſon compoſée des aires des orifices & des vîteſſes des veines fluides.*

Car il eſt évident que les volumes dont il s'agit, ſont d'autant plus conſidérables, que les orifices ſont plus grands & que les fluides ſortent avec plus de vîteſſe.

CCCLXII.

THÉORÈME. III. *La vîteſſe d'un fluide qui ſort d'un vaſe par un orifice infiniment petit, eſt égale à celle que doit acquérir un corps peſant, en deſcendant librement de la hauteur du fluide au-deſſus de l'orifice.*

En effet, quand l'orifice eſt infiniment petit, les différentes tranches horizontales qu'on peut imaginer dans le réſervoir, ont une vîteſſe infiniment moindre que celle de la veine fluide qui ſort par l'orifice. Par conſéquent, on peut regarder comme nulle la vîteſſe des particules fluides contenues dans le réſervoir, & la veine fluide comme chargée & preſſée par tout le poids d'une colonne qui iroit de l'orifice à la ſurface ſupérieure du fluide.

Soient donc *rs* (*Fig.* 165) l'orifice infiniment petit par où ſort le fluide, *rsli* le petit priſme qui s'écoule pendant un tems *t* infiniment petit, *hfsr*

SCD LYON 1

la colonne verticale dont le poids chasse la veine fluide. En nommant p la pesanteur spécifique du fluide, V sa vîtesse au sortir de l'orifice, on aura $p \times fs \times rs$ pour l'expression du poids de $hfsr$ ou de la force motrice, & $rsli \times V$ pour le mouvement produit par cette force.

Supposons à présent un prisme infiniment petit $rsnm$, qui, en vertu de son poids, doive descendre précisément de sa hauteur pendant le tems t, & acquérir une vîtesse v. La force motrice ou le poids de ce prisme sera $p \times sn \times rs$, & le mouvement produit sera $rsnm \times v$. Or les forces motrices étant comme les mouvements produits, nous aurons $p \times fs \times rs : p \times sn \times rs :: rsli \times V : rsnm \times v$.

On peut diviser les deux termes de la première raison par $p \times rs$, & substituer dans la seconde, au lieu du rapport de $rsli$ à $rsnm$, celui de V à v. Car les prismes $rsli$, $rsnm$ ayant même base, sont comme les hauteurs sl, sn; & ces hauteurs qui sont les espaces parcourus en même tems, sont comme les vîtesses V & v. Donc la proportion précédente se réduit à $fs : sn :: V^2 : v^2$.

Comparant enfin le prisme $rsnm$ avec un corps pesant qui tomberoit librement de la hauteur fs, nommant V' la vîtesse que ce corps acquerroit, nous aurions $fs : sn :: V'^2 : v^2$ (*Num.* CLXV.). Donc $V^2 : v^2 :: V'^2 : v^2$, & par conséquent $V = V'$. Donc la vîtesse du fluide, au sortir de l'orifice, est

SCD LYON 1

égale à celle d'un corps pesant qui seroit tombé librement de la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice.

CCCLXIII.

COROLLAIRE I. *Les vîtesses des fluides qui sortent par des orifices infiniment petits de deux vases dans lesquels ils ont des hauteurs différentes, sont comme les racines quarrées de ces hauteurs.*

Car ces vîtesses sont égales à celles de deux corps pesants qui seroient tombés librement des hauteurs des deux fluides au-dessus des orifices. Or les vîtesses de ces deux corps seroient entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs dont il s'agit, (*Num.* CLXV.). Donc, &c.

CCCLXIV.

COROLLAIRE II. *Pendant qu'un corps pesant tomberoit de toute la hauteur* fs (Fig. 165.), *la veine fluide conservant toujours la vîtesse qu'elle reçoit à l'orifice, parcourroit un espace double de cette hauteur.*

En effet, le corps pesant, constamment animé de sa vîtesse finale, parcourroit un espace double de *fs* (*Num.* 162.), dans le même tems qu'il a employé à parcourir cette ligne. Or le fluide sort du vase avec une vîtesse égale à la vîtesse finale du corps pesant qui seroit tombé de la hauteur *fs* du fluide. Donc, &c.

SCD LYON 1

CCCLXV.

REMARQUE I. La démonstration du théorème III suppose que le fluide au sortir de l'orifice, soit pressé par le poids entier de la colonne supérieure; ce qui arrive effectivement, quand cet orifice est infiniment petit, puisqu'alors la colonne correspondante est entièrement soutenue & perd toute sa vîtesse. Mais si l'orifice est de grandeur finie, la colonne supérieure n'a plus une vîtesse infiniment petite par rapport à celle du fluide qui sort, & par conséquent on ne peut pas conclure que l'écoulement se fasse avec une vîtesse due à la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice. Cette proposition, prise généralement, seroit même évidemment fausse. Car si l'on a, par exemple, un vase cylindrique vertical rempli d'eau, & qu'on imagine que tout d'un coup le fond soit anéanti, la tranche du fond ne souffrira aucune action des tranches supérieures, & elles descendront toutes avec la même vîtesse, suivant les loix de la chute des corps pesants.

Il est cependant essentiel de remarquer, que si un orifice horizontal, quoique fini, est petit en comparaison de la largeur du réservoir; que, par exemple, le rapport de la première surface à la seconde n'excède guères celui de 1 à 20, la vîtesse du fluide à la sortie de l'orifice, est sensiblement la même que si cet orifice étoit infiniment petit. Mais alors cette vîtesse n'est pas produite toute entière par la pression

SCD LYON 1

de la colonne supérieure. Chaque particule obéit à la fois à sa pesanteur propre & à l'action des particules contiguës; action qui est sans cesse favorisée ou contredite par leur adhérence réciproque. La veine fluide reçoit ainsi sa vîtesse & de la colonne verticale & des colonnes latérales, qui tendent toutes vers l'orifice. Or on conçoit, sans qu'il soit peut-être possible de le démontrer en rigueur, que toutes ces forces peuvent tellement se combiner entr'elles, que la vîtesse de la liqueur au sortir de l'orifice, soit la même, que si elle étoit produite par le poids de la colonne supérieure. La chose est du moins indubitable par l'expérience. Car on observe que dans les jets d'eau, le fluide s'élève presqu'à la hauteur des réservoirs, quoiqu'il soit retardé par différentes causes, telles que la résistance de l'air, le frottement contre le contour de l'ajutage, le poids des molécules supérieures qui retombent sur les suivantes, &c.; ce qui prouve que la vîtesse de la veine fluide est sensiblement la même, que celle d'un corps qui tomberoit de la hauteur des réservoirs. Seulement l'expérience apprend que si l'orifice est un peu considérable, la vîtesse n'acquiert sa plénitude uniforme & permanente qu'au bout d'un certain tems; car on trouve alors que la quantité de liqueur qui sort pendant les 3 ou 4 premières secondes de l'écoulement, est un peu moindre que celle qui sort pendant 3 ou 4 autres secondes de la suite du tems,

SCD LYON 1

& plus l'orifice eſt grand, plus cette inégalité ſe fait appercevoir.

CCCLXVI.

REMARQUE II. Si la veine fluide ſortoit ſous la forme d'une colonne parfaitement cylindrique ou priſmatique, on pourroit conclure que la quantité de liqueur écoulée pendant un tems quelconque T ſeroit équivalente à un priſme qui auroit pour baſe l'aire a de l'orifice, & pour hauteur l'eſpace VT qu'un corps animé de la vîteſſe V du fluide, au ſortir de l'orifice, parcourroit uniformément pendant le tems T; c'eſt-à-dire, que la dépenſe du réſervoir ſeroit expimée par le produit aVT. C'eſt cette quantité qu'on a appelée la dépenſe naturelle du réſervoir.

Mais on obſerve que la veine fluide en ſortant ſe reſſerre depuis la face intérieure du fond juſqu'à une diſtance à peu près égale au rayon de l'orifice, & qu'enſuite elle augmente de groſſeur & va en ſe dilatant de plus en plus. Si l'on meſure la ſection de la veine fluide à l'endroit où la contraction eſt la plus grande, on trouve qu'elle eſt toujours à l'aire de l'orifice, à peu près comme 2 eſt à 3. Le fluide ſe contracte ſenſiblement de la même manière, quand il ſort par un orifice vertical pratiqué dans les parois du vaſe.

Cette contraction eſt une ſuite néceſſaire de la tendance univerſelle des molécules fluides vers l'orifice.

SCD LYON 1

En effet les colonnes latérales, qui ne répondent pas verticalement à l'orifice, ne peuvent y arriver qu'en ſuivant des directions obliques. Ainſi une partie de leur mouvement doit s'employer à preſſer & à reſſerrer la veine fluide. Quand enſuite cette veine eſt parvenue au point de la plus grande contraction, la réſiſtance de l'air doit néceſſairement la dilater & lui donner plus de volume.

Les molécules fluides employant, comme nous venons de le dire, une partie de leur mouvement à ſe comprimer en paſſant par l'orifice, l'effet de la contraction eſt de diminuer la dépenſe des réſervoirs. M. l'Abbé *Boſſut* a trouvé par des expériences faites avec le plus grand ſoin, que la quantité de fluide qui ſort réellement d'un réſervoir, eſt à celle qui s'écouleroit ſi la contraction de la veine fluide n'avoit pas lieu, à peu près comme 5 eſt à 8, ou plus exactement encore comme 100 eſt à 161,57.

CCCLXVII.

REMARQUE III. Si l'on adapte aux orifices, des bouts de tuyaux cylindriques aſſez longs pour que l'eau en ſuive les parois & ſorte à gueule bée, la dépenſe eſt plus grande que ſi l'écoulement ſe faiſoit par de ſimples orifices. Le Savant que nous venons de citer, a trouvé que la dépenſe par des tuyaux additionnels, étoit à la dépenſe naturelle, à peu près comme 13 à 16. Il faut donc que les tuyaux

SCD LYON 1

additionnels diminuent en partie la contraction de la veine fluide ; & l'on peut rendre raison de cet effet, en observant que la veine fluide se dilatant, après être parvenue au point où elle est le plus resserrée, rencontre bientôt les parois du tuyau ; ce qui doit occasionner un frottement qui diminue la vîtesse du fluide. Or cette vîtesse devenant moindre, la veine fluide doit grossir un peu dans l'endroit où elle avoit été le plus resserrée, & l'obliquité des colonne qui entrent dans le tuyau doit un peu diminuer. Donc les mouvements de ces colonnes deviendront moins opposés, & par conséquent le fluide s'écoulera plus librement.

On voit pourtant que les tuyaux additionnels n'empêchent pas entièrement la contraction de la veine fluide ; puisque la dépense effective par ces tuyaux est moindre que la dépense naturelle.

Si les tuyaux adaptés aux orifices sont trop courts pour être rencontrés par le fluide après sa contraction, la liqueur sortira comme par de simples orifices.

CCCLXVIII.

PROBLÈME I. *Trouver une équation qui exprime le rapport entre la dépense d'un réservoir, le tems que dure l'écoulement, la hauteur constante du fluide & le petit orifice horizontal par lequel sort la veine fluide.*

SOLUTION. Soit V la vîtesse de la veine fluide

au sortir de l'orifice, T le tems de l'écoulement, a l'aire de l'orifice, s la hauteur constante de la liqueur au-dessus du même orifice, p la vîtesse acquise à la fin d'une seconde par un corps pesant qui tombe librement, & D la dépense du réservoir. S'il s'agit de la dépense naturelle & théorique, nous aurons $D = aVT$ (*Num.* CCCLXVI.). Or la vîtesse V étant due à la hauteur s, on a $V = \sqrt{2ps}$ (*N.* CLXXII.). Donc, en substituant cette valeur de V, on aura l'équation cherchée $D = aT\sqrt{2ps}$.

Mais quand le fluide sort par un petit orifice, la dépense naturelle du réservoir est à la dépense effective, à peu près comme 5 à 8. Donc, en nommant D' la dépense effective, on aura $D' = \frac{5}{8}aT\sqrt{2ps}$.

De même, si le fluide sort à gueule bée par un tuyau additionnel, la dépense naturelle est à la dépense effective, comme 13 est à 16 à très-peu près. Donc, en nommant D'' la dépense effective, on aura $D'' = \frac{13}{16}aT\sqrt{2ps}$.

Soit, par exemple, la hauteur constante du fluide $s = 12$ pieds $= 144$ pouces; que l'orifice horizontal pratiqué au fond du réservoir, soit un cercle d'un pouce de diamètre; son aire sera $a = \frac{335}{452}$. Supposons que l'écoulement ait duré pendant une minute; la durée T sera de 60 secondes, parce que nous évaluons le tems en secondes: enfin rappelons-

SCD LYON 1

nous que $p = 30,2$ pieds $= 362,4$ pouces. En substituant ces valeurs dans les formules précédentes, nous trouverons la dépense naturelle $D = 15223$ pouces cubiques à peu près, & la dépense effective $D' = 9514$ pouces cubiques.

On auroit trouvé plus exactement la dépense effective D', en supposant qu'elle est à la dépense naturelle, comme 100 est à 161,57.

Si le fluide sortoit par un tuyau additionnel d'un pouce de diamètre, on trouveroit $D'' = 12368$ pouces cubiques à très-peu près.

Quand le fluide s'écoule par un orifice vertical très-petit, on peut déterminer les dépenses par la même méthode.

CCCLXIX.

COROLLAIRE. *Les dépenses naturelles de deux réservoirs dans chacun desquels le fluide est entretenu à une hauteur constante, sont entr'elles en raison composée des aires des orifices, des tems pendant lesquels se fait l'écoulement, & des racines quarrées des hauteurs des fluides au-dessus des orifices.*

Car, en nommant a, T, s l'orifice du premier réservoir, la durée de son écoulement & la hauteur du fluide au-dessus de son orifice; a', T', s' les quantités correspondantes dans le second réservoir, & p la vîtesse acquise à la fin d'une seconde; les dépenses naturelles des deux réservoirs seront $aT\sqrt{2ps}$,

SCD LYON 1

$a'T'\sqrt{2ps'}$. Or la première de ces quantités eſt à la ſeconde, comme $aT\sqrt{s}$ eſt à $a'T'\sqrt{s'}$.

Les dépenſes effectives par de ſimples orifices ſont auſſi dans le même rapport. Car

$\frac{5}{8}aT\sqrt{2ps} : \frac{5}{8}a'T'\sqrt{2ps'} :: aT\sqrt{s} : a'T'\sqrt{s'}$.

On peut dire la même choſe des dépenſes effectives par des tuyaux additionnels. Car

$\frac{13}{16}aT\sqrt{2ps} : \frac{13}{16}a'T'\sqrt{2ps'} :: aT\sqrt{s} : a'T'\sqrt{s'}$.

CCCLXX.

PROBLÈME II. *Connoiſſant le petit orifice* a (Fig. 166.), *& la hauteur* AB *d'un réſervoir* ABCL *conſtamment rempli de fluide, & traverſé par un diaphragme* IG *percé d'une petite ouverture* b, *on demande les hauteurs dues aux vîteſſes en* b *& en* a, *& la quantité de liqueur qui paſſera en un tems donné par chacune de ces ouvertures.*

SOLUTION. 1° Il eſt clair que l'écoulement naturel de l'eau *AIGL* par le trou *b* étant empêché par la réſiſtance de l'eau inférieure, l'eau ſort par *b* de la même manière qu'elle ſortiroit par un orifice latéral *G* égal à *b*, ſi elle communiquoit par là avec l'eau *EFGH* d'un réſervoir latéral dont la hauteur *EG* exprimât la réſiſtance que chaque point de l'eau en *b* éprouve de la part de l'eau inférieure. D'où il ſuit que la vîteſſe en *b* eſt due à la hauteur *LE*.

2° Comme la réaction eſt toujours égale & contraire à l'action, la partie d'eau *IGCB* eſt comprimée

Bibliothèque des Savants

SCD LYON 1

en tous ses points par l'eau supérieure, avec une force proportionnelle à EG. Ainsi la hauteur due à la vîtesse en a est EC.

Cela posé, nommant T le tems de l'écoulement, D la dépense par l'un ou l'autre des orifices b & a, s la hauteur donnée AB, x la hauteur LE due à la vîtesse en b, y la hauteur EC due à la vîtesse en a, & p la vîtesse qu'un corps pesant acquiert en tombant librement pendant une seconde; nous aurons (*N.* CCCLXVIII.), $D=bT\sqrt{2px}$, $D=aT\sqrt{2py}$, & $x+y=s$. Ces équations comparées ensemble donnent $x=\frac{a^2 s}{a^2+b^2}$, $y=\frac{b^2 s}{a^2+b^2}$ & $D=\frac{abT\sqrt{2ps}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

CCCLXXI.

COROLLAIRE. On voit par la seconde de ces formules, que la hauteur y due à la vîtesse de la veine fluide au sortir de l'orifice a, est moindre que la hauteur s du réservoir. Donc *la veine fluide perdra toujours de sa vîtesse, s'il se trouve quelqu'étranglement dans le réservoir ou dans les tuyaux où le fluide est contenu.*

CCCLXXII.

PROBLÈME III. *Le vase* ABCD (Fig. 167.) *étant supposé prismatique, & l'écoulement se faisant par un petit orifice* a, *on demande le tems que la surface de la liqueur mettra à s'abaisser de* AD *en*

SCD LYON 1

EF, *dans le cas où l'on ne fournira point de nouvelle eau pour entretenir cette surface à la même hauteur.*

Solution. Puisque l'orifice est très-petit par rapport à l'amplitude du vase, on pourra considérer à chaque instant la vîtesse de la veine fluide comme due à la hauteur de l'eau au-dessus de l'orifice.

Cela posé, imaginons qu'un corps non pesant soit poussé de bas en haut suivant la verticale ah par une force accélératrice constante, qui lui imprime les mêmes degrés de vîtesses que la pesanteur imprime à un corps qui tombe librement; de manière que le corps ascendant parcoure l'espace ah, suivant la même loi & dans le même tems que le corps descendant par la pesanteur parcourroit l'espace ha. Concevons la ligne ef infiniment proche de EF, & nommons s la hauteur ha, s' la hauteur ma, p la vîtesse acquise à la fin d'une seconde en vertu de la pesanteur, x le tems que le corps ascendant mettroit à parcourir mn. La vîtesse qu'auroit ce corps parvenu en m seroit $\sqrt{2ps'}$, celle qu'il auroit en h seroit $\sqrt{2ps}$, & le tems employé à parcourir ah ou s seroit $\sqrt{\frac{2s}{p}}$ (*Num.* CLXXII.).

La vîtesse $\sqrt{2ps'}$ qu'a le corps en m, ne changeant qu'infiniment peu de m en n, on peut la regarder comme uniforme pendant le tems x; donc puisque le tems dans le mouvement uniforme est égal

à l'espace divisé par la vîtesse, on aura $x = \frac{mn}{\sqrt{2ps'}}$. Mais pendant le tems T que la surface du fluide met à descendre de n en m, on a $aT\sqrt{2ps'}$ pour la dépense du réservoir, & cette dépense est évidemment égale au prisme $EFfe$, ou, ce qui est la même chose, au produit $mn \times A$, en nommant A la base EF de ce prisme. Ainsi on a l'équation $aT\sqrt{2ps'} = mn \times A$, d'où l'on tire $T = \frac{mn \times A}{a\sqrt{2ps'}}$. Donc

$$x : T :: \frac{mn}{\sqrt{2ps'}} : \frac{mn \times A}{a\sqrt{2ps'}} :: a : A.$$

Le même rapport ayant lieu entre les autres tems élémentaires que le corps ascendant & la surface de l'eau emploient à parcourir de petits espaces égaux, on conclura que le tems total que le corps ascendant emploie à parcourir la hauteur ah, est au tems total que le vase met à se vuider, comme l'aire a de l'orifice est à l'aire A de la base EF ou BC. Nommant donc T' le tems que le vase met à se vuider entièrement, nous aurons $\sqrt{\frac{2s}{p}} : T' :: a : A$. Donc $T' = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2s}{p}}$.

Par un raisonnement semblable, on trouvera que pour descendre de EF jusqu'à BC, la liqueur emploie un tems $T'' = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2s'}{p}}$. Or si l'on retranche T'' de T', on aura le tems que la surface de la li-

SCD LYON 1

queur emploie à s'abaiſſer de AD en EF. Donc, en appelant ce tems t, on aura $t = \frac{A}{a}\left(\sqrt{\frac{2s}{p}} - \sqrt{\frac{2s'}{p}}\right)$; c'eſt ce qu'il falloit trouver.

On voit qu'au moyen de cette équation, on déterminera toujours l'une quelconque des cinq quantités A, a, t, s, s', quand on connoîtra les quatre autres.

ARTICLE II.

Du Mouvement des Eaux jailliſſantes.

CCCLXXIII.

IL faut diſtinguer trois choſes dans les jets d'eau; 1° le *réſervoir ADCB* (*Fig.* 168.) où ſont aſſemblées les eaux qui doivent fournir à l'écoulement; 2° le *tuyau de conduite GEO* qui les amène du réſervoir à l'endroit où elles doivent jaillir; 3° l'orifice par lequel le jet ſort, & qu'on nomme ordinairement l'*ajutage*.

Les jets dirigés verticalement de bas en haut, s'élèveroient à la hauteur entière de leurs réſervoirs, ſi rien ne les en empêchoit. Mais le frottement contre le circuit de l'orifice, la réſiſtance que l'air oppoſe à la colonne jailliſſante, & le poids des particules fluides qui, après s'être élevées auſſi haut qu'elles peuvent, retombent ſur les ſuivantes, ſont autant de cauſes qui diminuent un peu l'élévation

SCD LYON 1

des jets. On conçoit cependant que les gros jets doivent s'élever plus haut que les petits. En effet, de deux jets qui sortent avec des vîtesses égales de leurs ajutages, le plus gros a plus de masse & par conséquent plus de force que le petit, pour vaincre les obstacles opposés.

CCCLXXIV.

POUR mieux connoître les différentes circonstances qui peuvent concourir à la hauteur plus ou moins considérable des jets d'eau, il est à propos de voir d'abord ce que l'expérience nous apprend en général sur cette matière.

Soit donc un réservoir *ADCB* (*Fig.* 169.) parallélipipédal, rectangle & vertical, dont la hauteur soit d'environ 12 pieds, & dont la base soit un quarré de 3 pieds sur chaque côté mesuré en dedans. Qu'on adapte horizontalement à ce vase un tuyau *OE* de fer-blanc, fermé par le bout *E* & ouvert du côté du réservoir. Que le diamètre de ce tuyau soit de 3 pouces 8 lignes. Soient en *F*, *G*, *H* trois ajutages circulaires dont les diamètres soient respectivement de 2, de 4 & de 8 lignes. Je suppose de plus en *K* un tuyau conique *KM* dont la hauteur soit de 5 pouces 10 lignes, le diamètre de la base inférieure de 9 lignes, & celui de la base supérieure de 4 lignes. Enfin qu'il y ait en *I* un tuyau cylindrique haut de 5 pouces 10 lignes, & dont le diamètre soit de 4 lignes. L'eau étant entretenue dans

le

SCD LYON 1

le réservoir à la hauteur constante de 11 pieds au-dessus de la paroi supérieure *OE* du tuyau, on trouve d'après les expériences de M. l'Abbé *Bossut*, les résultats suivants.

1° Le jet vertical par l'ajutage *F* de 2 lignes de diamètre, s'élève à 10 pieds 10 lignes. La colonne forme une belle gerbe. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 10 pieds 4 pouces 6 lignes.

2° Le jet vertical par l'ajutage *G* de 4 lignes de diamètre, s'élève à 10 pieds 5 pouces 10 lignes. La colonne ne s'élargit pas beaucoup par en haut; elle forme une belle gerbe. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 10 pieds 7 pouces 6 lignes.

3° Le jet vertical par l'ajutage *H* de 8 lignes de diamètre, s'élève à 10 pieds 6 pouces 6 lignes. Dans tous les jets, l'eau fait des bonds qui ne sont pas de la même hauteur. Ils sont plus sensibles ici que dans les deux exemples précédents. La colonne s'élargit beaucoup par en haut. En inclinant un peu le jet, il s'élève presque à la hauteur de 10 pieds 8 pouces, & la colonne se déforme moins que quand il est exactement vertical.

4° Le jet vertical par le tuyau conique *KM*, s'élève à 9 pieds 6 pouces 4 lignes. La colonne est fort belle. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 9 pieds 8 pouces 6 lignes.

5° Le jet vertical par le tuyau cylindrique *IN*, s'élève à 7 pieds 1 pouce 6 lignes. La colonne est

SCD LYON 1

fort belle. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 9 pieds 3 pouces 6 lignes.

6° Au lieu du tuyau *OE* (*Fig.* 169), que l'on adapte au même réservoir un tuyau *OE* (*Fig.* 170), de même longueur que le premier, mais dont le diamètre ne soit que de 9 ou 10 lignes, & dans lequel on ait percé trois orifices circulaires *F*, *G*, *H*, dont les diamètres soient respectivement de 2, de 4 & de 8 lignes. L'eau étant entretenue, comme dans les expériences précédentes, à la hauteur de 11 pieds au-dessus de la paroi supérieure du tuyau, le jet vertical par l'ajutage *F* de 2 lignes de diamètre, s'élève à 9 pieds 11 pouces. La colonne est belle.

7° Le jet vertical par l'ajutage *G* de 4 lignes de diamètre, s'élève à 9 pieds 7 pouces 10 lignes. La colonne se déforme beaucoup, & la gerbe en haut est fort élargie.

8° Le jet vertical par l'ajutage *H* de 8 lignes de diamètre, ne s'élève guères qu'à 7 pieds 10 pouces. La colonne s'éparpille extrêmement, & n'est formée, pour ainsi dire, que de jets détachés qui se succèdent les uns aux autres.

CCCLXXV.

VOICI les conclusions que l'on peut tirer de ces expériences.

1° On voit par les trois premières, que si le

SCD LYON 1

tuyau de conduite fournit les eaux avec une abondance suffisante, les gros jets s'élèvent plus haut que les petits.

2° Si le tuyau de conduite est trop étroit, les jets s'élèvent plus haut par un petit que par un grand ajutage. C'est ce qu'on trouve par les trois dernières expériences.

3° Souvent on fait les ajutages en forme de cônes ou de cylindres saillants d'une certaine hauteur au-dessus de la souche. Cet usage est très-vicieux. La 4e & la 5e expérience apprennent que ces ajutages font perdre aux jets beaucoup de leur hauteur, & qu'en particulier les ajutages cylindriques sont les plus mauvais de tous. Les ajutages qui procurent le plus d'élévation à l'eau, sont ceux qui sont percés dans la platine horizontale qui ferme l'extrémité du tuyau. Il faut que cette platine soit bien polie, mince, d'une épaisseur uniforme, & percée perpendiculairement.

4° Les jets qui se détournent un peu de la direction verticale, s'élèvent un peu plus haut que les jets rigoureusement verticaux, par la raison que les molécules fluides ayant monté dans le premier cas aussi haut qu'elle peuvent, ne retombent pas directement sur les suivantes. Il y a donc quelque chose à gagner du côté de l'élévation du jet, en lui donnant une petite inclinaison. Mais, d'un autre côté, il ne produit pas un effet aussi agréable aux

SCD LYON 1

yeux, que lorsque la gerbe retombe perpendiculairement sur elle-même.

5° Enfin, il suit des expériences précédentes, que pour donner aux jets la plus grande hauteur possible, l'ajutage ne doit être ni trop grand ni trop petit relativement au tuyau de conduite. Car nous voyons que dans les trois premières expériences, les ajutages *F* & *G* sont trop petits, & ne donnent pas un jet aussi haut que l'ajutage *H* dont le diamètre est plus grand. Au contraire, nous voyons dans les trois dernières expériences, que les ajutages *G* & *H* sont trop grands par rapport au tuyau de conduite, & qu'ils donnent des jets moins élevés que l'ajutage *F*, dont le diamètre est plus petit. Donc, pour avoir la plus grande hauteur possible du jet, il faut proportionner le tuyau de conduite à l'ajutage.

CCCLXXVI.

PROBLÈME. *Dans les jets d'eau, connoissant la hauteur du réservoir & le diamètre du tuyau de conduite, déterminer le diamètre qu'on doit donner à l'ajutage, afin que le jet s'élève à la plus grande hauteur possible.*

SOLUTION. Soit *h* la hauteur du réservoir exprimée en pieds, *D* le diamètre du tuyau de conduite, *d* celui de l'ajutage, *D* & *d* étant exprimés en lignes. Faites la proportion suivante,

SCD LYON 1

$28\frac{1}{2} : \frac{12}{4\sqrt{h}} :: D : d$. Par l'hypothèse on connoît les trois premiers termes. Donc on trouvera le diamètre d qu'il faut donner à l'ajutage.

Pour comprendre la raison de cette règle, il faut observer que si le jet ne s'élève pas à toute la hauteur possible quand l'ajutage est trop grand, c'est parce que l'eau contenue dans le tuyau de conduite a trop de vîtesse pour presser de tout son poids la veine fluide qui sort par l'orifice. En effet, la partie du poids employée à mouvoir le fluide au dedans du tuyau, ne chasse pas la colonne qui sort. C'est ainsi que nous avons remarqué (*Num.* CCCLXV.), que le fluide qui s'écoule d'un vase, n'est poussé par tout le poids de la colonne supérieure, que dans le cas où l'orifice est très-petit par rapport à la grandeur du vase; ce qui rend la vîtesse des différentes tranches, prises dans le vase, très-peu considérable par rapport à la vîtesse de la veine fluide.

Quelle que soit donc la plus grande vîtesse que l'eau contenue dans un tuyau de conduite puisse avoir sans cesser d'agir sur le jet avec une force équivalente à son poids tout entier, je l'appellerai v, & je nommerai V la vîtesse du jet, au sortir de l'ajutage. La première de ces vîtesses sera à la seconde, comme l'aire de l'ajutage est à une section circulaire du tuyau de conduite (*Num.* CCCLX.), ou comme d^2 est à

SCD LYON 1

D^2, puisque les cercles sont proportionnels aux quarrés de leurs diamètres. Donc on aura $v = \frac{Vd^2}{D^2}$.

Supposant à présent un autre jet également fourni, dans lequel la hauteur du réservoir fut h', le diamètre du tuyau de conduite D', le diamètre de l'ajutage d' & V' la vîtesse du jet, on trouveroit de même la vîtesse $v = \frac{V'd'^2}{D'^2}$, ce qui donneroit l'équation $\frac{Vd^2}{D^2} = \frac{V'd'^2}{D'^2}$, ou $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2} = \frac{d'^2\sqrt{h'}}{D'^2}$, puisque les vîtesses V & V' sont comme les racines quarrées des hauteurs h & h' (*Num.* CCCLXIII.). Donc $D'^2 : d'^2\sqrt{h'} :: D^2 : d^2\sqrt{h}$, ou prenant les racines quarrées de tous les termes de cette proportion, $D' : d'\sqrt[4]{h'} :: D : d\sqrt[4]{h}$; ce qui nous apprend que *lorsque deux tuyaux de conduite ont préciſément la grandeur qu'ils doivent avoir pour que les jets prennent toute la hauteur poſſible, les diamètres de ces tuyaux ſont en raiſon compoſée des diamètres des ajutages, & des racines quatrièmes des hauteurs des réſervoirs.* Or l'expérience apprend que la hauteur du réſervoir étant de 16 pieds, & le diamètre du tuyau de conduite de $28\frac{1}{2}$ lignes, il faut donner 6 lignes de diamètre à l'ajutage, pour que le jet ait la plus grande hauteur poſſible. Subſtituant donc dans la proportion précédente, au lieu des quantités h', D', d', les nombres 16, $28\frac{1}{2}$, 6, nous aurons

$28\frac{1}{2} : 12 :: D : d\sqrt[4]{h}$, ou divisant les deux conséquents par $\sqrt[4]{h}$, $28\frac{1}{2} : \frac{12}{\sqrt[4]{h}} :: D : d$.

Pour faire une application de la règle que nous venons de démontrer, supposons que la hauteur du réservoir soit de 36 pieds, que le diamètre du tuyau de conduite soit de 40 lignes, & que l'on demande le diamètre qu'il faut donner à l'ajutage, on aura $\sqrt[4]{36} = 2{,}45$ à très-peu près, $D = 40$; & substituant ces valeurs, on trouvera $28\frac{1}{2} : \frac{12}{2{,}45} :: 48 : d$ $= 6{,}87$ lignes. Il faudra par conséquent que l'ajutage ait presque 7 lignes pour que le jet s'élève à la plus grande hauteur possible.

CCCLXXVII.

Remarque I. Si l'on connoissoit le diamètre de l'ajutage, & que l'on demandât celui de la conduite, on le trouveroit en employant la même proportion $28\frac{1}{2} : \frac{12}{\sqrt[4]{h}} :: D : d$, dans laquelle tout seroit connu, excepté D. Au reste, il ne peut y avoir qu'à gagner du côté de la hauteur du jet, en faisant les tuyaux de conduite plus gros que ne les demandent ces calculs; mais on ne doit pas les faire plus étroits, si l'on veut que le jet s'élève à toute la hauteur qu'on peut espérer. On doit aussi prendre garde

SCD LYON 1

qu'il n'y ait aucun étranglement dans les tuyaux; autrement l'eau ne ſeroit pas fournie en abondance, & il s'en faudroit beaucoup que le jet ne s'élèvât à la hauteur convenable (*Num.* CCCLXXI.).

CCCLXXVIII.

REMARQUE II. Il faut éviter ſoigneuſement qu'il ne ſe trouve pas d'angle droit dans les tuyaux qu'on eſt obligé de couder: car le choc du courant contre ces ſortes d'angles détruit une grande partie de ſa vîteſſe & fatigue extrêmement la conduite. Lorſqu'on eſt obligé de courber les tuyaux, il faut diſtribuer la courbure ſur toute la longueur, ou du moins ſur un eſpace bien étendu.

CCCLXXIX.

REMARQUE III. Il réſulte des expériences de M. *Mariotte*, & de celles de M. l'Abbé *Boſſut*, que *les différences des hauteurs des jets verticaux aux hauteurs de leurs réſervoirs, ſont entr'elles ſenſiblement comme les quarrés des hauteurs des jets.* Lorſqu'on connoîtra donc par une expérience la quantité dont il s'en faut qu'un jet ne s'élève à la hauteur de ſon réſervoir, on trouvera par une ſimple proportion la quantité dont il s'en faudra que tout autre jet de hauteur donnée ne s'élève à la hauteur du ſien. On aura enſuite la hauteur du réſervoir en ajoutant à la hauteur du jet la quantité trouvée par la proportion qu'on vient d'indiquer. Pour faire uſage de

SCD LYON 1

cette proportion, on pourra supposer qu'un réservoir de 33 pieds de hauteur donne un jet vertical de 30 pieds.

CCCLXXX.

REMARQUE IV. Quand le réservoir ne peut se remplir que par intervalles, il est utile pour l'établissement d'un jet d'eau, de connoître à peu près le tems qu'il emploie à se vuider par un ajutage quelconque. On ne se trompera pas de beaucoup en supposant que l'écoulement se fait comme par l'orifice d'un vase où le fluide auroit une hauteur constante, égale à la hauteur du milieu du réservoir au-dessus de l'ajutage. Connoissant donc cette hauteur & la dépense ou quantité d'eau qui doit s'écouler, on cherchera la durée de l'écoulement par un orifice d'un pouce de diamètre, en employant la formule $D' = \frac{5}{8} aT\sqrt{2ps}$ trouvée (*Num.* CCCLXVIII), & dans laquelle tout sera connu, excepté le tems T. Si l'on veut que le jet dure un tems 2, 3 ou 4 fois plus grand, on choisira un ajutage dont la surface soit 2, 3 ou 4 fois plus petite que la surface de celui qui a un pouce de diamètre. Ayant ainsi déterminé le diamètre convenable à l'ajutage, on trouvera celui du tuyau de conduite, par la règle donnée (*Num.* CCCLXXVII.).

SCD LYON 1

ARTICLE III.

De la Percussion & de la Résistance des Fluides.

CCCLXXXI.

THÉORÈME. *Les percussions que deux surfaces planes reçoivent de la part de deux fluides qui viennent les choquer perpendiculairement, sont à peu près en raison composée de surfaces choquées, des densités des fluides & des quarrés des vîtesses de ces fluides.*

En effet, supposons d'abord que les fluides aient la même densité & la même vîtesse: plus les surfaces choquées auront d'étendue, plus il y aura de molécules fluides qui les rencontreront. Donc les percussions seront comme les surfaces choquées.

Supposons ensuite que les surfaces choquées soient égales & que les fluides aient la même vîtesse. Plus les fluides auront de densité, plus ils auront de force pour choquer les surfaces: donc les percussions seront comme les densités des fluides.

Supposons enfin que les surfaces choquées soient égales & que les fluides aient la même densité. En nommant P & P' les percussions contre les deux surfaces, M & M' les masses de fluides qui les rencontrent dans le même tems, V & V' les vîtesses de ces fluides, il est évident que l'on aura $P : P'$

SCD LYON 1

$:: MV : M'V'$; proportion dans laquelle on peut substituer le rapport de V à V', au lieu de celui de M à M'. Car plus les fluides ont de vîtesse, plus les masses qui viennent choquer les plans en même tems sont considérables. Donc on aura $P : P' :: V^2 : V'^2$.

Donc les percussions perpendiculaires des fluides contre des surfaces planes, sont à peu près en raison composée de ces surfaces, de la densité des fluides & des quarrés de leurs vîtesses.

Ainsi, en nommant F & F' les forces perpendiculaires qui agissent contre deux plans dont les surfaces sont S & S'; nommant aussi D & D' les densités des fluides, V & V' leurs vîtesses, on aura à peu près $F : F' :: DSV^2 : D'S'V'^2$.

CCCLXXXII.

Remarque I. Cette proportion seroit exactement vraie, si chaque tranche fluide parallèle au plan frappé, s'anéantissoit après avoir donné son coup, pour permettre à la tranche suivante de donner librement le sien. Mais il est visible, que dans la nature la percussion se fait bien différemment. Les premières molécules sont forcées de céder après le choc & de s'écouler le long des plans, ce qui doit occasionner un changement dans la direction des molécules suivantes. Celles-ci, par conséquent, ne doivent plus choquer les surfaces ni immédiatement ni suivant des directions absolument perpendicu-

SCD LYON 1

laires. Cette observation fait voir l'insuffisance de la démonstration que nous venons de donner du théorème précédent. Ceux qui seront curieux d'en avoir une plus rigoureuse, pourront consulter l'*Essai sur la résistance des Fluides*, par M. *d'Alembert*. Au reste, on conçoit qu'il peut se faire que les chocs sur des surfaces différentes, soient dénaturés semblablement, & qu'ils suivent dans l'état physique à peu près la même loi, que s'ils n'éprouvoient aucun dérangement; & c'est effectivement ce qui arrive, autant qu'on peut en juger d'après les expériences faites sur cette matière. Quant à la valeur absolue de la percussion d'un fluide, on la trouve un peu moindre que le poids d'un prisme fluide, qui auroit une base égale à la surface choquée, & une hauteur double de celle qui est due à la vîtesse du fluide.

CCCLXXXIII.

REMARQUE II. Si les deux plans choqués, au lieu d'être en repos, avoient un mouvement dans le même sens que les fluides, il est évident qu'il n'y auroit de percussion qu'en vertu des différences de vîtesse dans les plans & dans les fluides. Donc, pour avoir le rapport des percussions, il faudroit entendre par V & V' les excès des vîtesses des fluides sur les vîtesses des deux plans.

Si au contraire les plans avoient un mouvement opposé à celui des fluides, il faudroit entendre par

SCD LYON 1

V & V' les ſommes des vîteſſes des plans & des vîteſſes des fluides.

CCCLXXXIV.

REMARQUE III. Quand les plans ſont choqués obliquement par les fluides, la plûpart des Phyſiciens ſuppoſent que *les percuſſions, toutes choſes d'ailleurs égales, ſont comme les quarrés des ſinus des angles d'incidence.* Mais ce rapport eſt contredit par l'expérience, & les raiſonnements ſur leſquels il eſt fondé ne prouvent rien, à moins qu'on ne faſſe préciſion du mouvement par lequel les premiers filets fluides s'écoulent après le choc le long des plans, & troublent la percuſſion des filets ſuivants.

A plus forte raiſon manquons-nous des connoiſſances néceſſaires pour évaluer les percuſſions des fluides contre les ſurfaces courbes. Toutes les méthodes propoſées juſqu'à préſent, ſont fondées ſur des hypothèſes dans leſquelles on néglige des éléments eſſentiels, ou ces méthodes ſont ſi compoſées, qu'il n'eſt pas poſſible d'en faire uſage dans la pratique.

CCCLXXXV.

REMARQUE IV. Si au lieu de ſuppoſer les fluides en mouvement, on les ſuppoſe en repos, & que deux ſurfaces planes viennent les choquer perpendiculairement avec des vîteſſes quelconques,

SCD LYON 1

les réſiſtances qu'oppoſeront les fluides, ſeront en raiſon compoſée des denſités de ces fluides, des ſurfaces qui les diviſent & des quarrés des vîteſſes de ces ſurfaces. Cette propoſition ſe démontre par le même raiſonnement que le théorême.

En général, *la réſiſtance qu'un fluide oppoſe à un corps en mouvement, eſt égale à la percuſſion que le fluide mu avec la vîteſſe du corps, exerceroit contre ce même corps ſuppoſé en repos.* Cela paroît évident par ſoi-même. M. *d'Alembert*, au ſurplus, en a donné une démonſtration rigoureuſe, dans ſon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*. La percuſſion & la réſiſtance des fluides ſuivent donc les mêmes loix & ſe meſurent de la même manière.

ARTICLE IV.

De la Réfraction des Corps.

CCCLXXXVI.

ON appelle *réfraction* le changement de direction qu'éprouve un corps qui paſſe d'un fluide dans un autre plus ou moins réſiſtant. Par exemple, ſi une balle *A* (*Fig.* 171.) ſe meut dans l'air ſuivant la ligne *AB*, & qu'elle frappe obliquement la ſurface de l'eau *CD*, elle n'ira point en *E*, mais elle ſe détournera vers *F*. De même, ſi la balle ſe meut dans l'eau ſuivant la ligne *AB*, & qu'elle tombe

SCD LYON 1

obliquement sur la surface de l'air *CD*, elle n'ira point directement au point *E*, ni au point *F*, mais elle se détournera vers *G*. C'est ce détour dans l'un & l'autre cas, que l'on nomme réfraction ; & on la distingue par le moyen de la perpendiculaire *BP* tirée dans le nouveau milieu, du point où le corps le rencontre. Si la direction du corps dans le nouveau milieu passe entre la perpendiculaire *BP* & le prolongement de la direction qu'il avoit dans le premier, on dit que la réfraction se fait *en s'approchant de la perpendiculaire :* mais si le prolongement de la direction primitive du corps passe entre sa direction dans le nouveau milieu & la perpendiculaire *BP*, on dit que la réfraction se fait *en s'éloignant de la perpendiculaire.* J'appellerai *plan d'incidence*, celui qui est perpendiculaire au nouveau milieu, & qui passe par la direction du corps.

La réfraction des corps dépend de leur figure & de leur direction. Ce n'est qu'avec le secours de la plus sublime Géométrie, qu'on peut se flatter d'en donner une théorie générale. (Voyez le *Traité des Fluides*, par M. *d'Alembert.*) Je me bornerai à dire ici un mot de la réfraction que peuvent éprouver les corps sphériques.

CCCLXXXVII.

THÉORÈME. *Un corps sphérique passant perpendiculairement d'un milieu dans un autre, ne*

SCD LYON 1

souffre point de réfraction: mais s'il y passe obliquement, il se réfracte en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire, suivant que le nouveau milieu est plus ou moins résistant que le premier.

Car supposons d'abord que le corps sphérique *APB* (*Fig.* 172.) passant d'un milieu dans un autre plus ou moins résistant, se meuve suivant la ligne *CP* perpendiculaire à la surface *MONS* qui sépare les deux milieux ou fluides. Il est évident qu'il n'y aura point de raison pour qu'il s'écarte de cette ligne en un sens plutôt qu'en tout autre; donc il ne se réfractera en aucun sens.

Supposons ensuite que le même corps tombe obliquement dans le nouveau milieu, qu'il y soit enfoncé d'une quantité *MPN*, & que son centre vienne de décrire dans un instant la ligne infiniment petite *DC* suivant la direction *AB*. Il décriroit dans l'instant suivant une ligne égale *Cd*, s'il n'y avoit aucune résistance de fluides à surmonter. Mais si le nouveau milieu dans lequel il pénètre est plus ou moins résistant que le premier, le corps doit nécessairement se détourner de sa direction. En effet, soit *APB* le plan d'incidence dans lequel on mène des points *C*, *M*, *N*, les lignes *Ee*, *Mm*, *Nn* perpendiculaires à la ligne *AB*. Soit *AXBZ* une section du globe, perpendiculaire au plan d'incidence & qui le coupe dans la direction *AB*. Enfin par les points *m* & *n*

imaginons

SCD LYON 1

imaginons une autre section *mons* aussi perpendiculaire au plan d'incidence, & parfaitement égale à *MONS*.

Cela posé, la surface compriſe entre les deux cercles *MONS*, *mons* eſt diviſée par le plan *AXBZ* en deux parties égales, ſemblablement diſpoſées par rapport à la direction *AB* du centre & placées dans le même milieu. Donc ces deux parties doivent éprouver des réſiſtances qui ſe contrebalancent mutuellement dans le ſens perpendiculaire au plan *AXBZ*. La même ſurface compriſe entre les contours *MONS*, *mons* eſt auſſi diviſée par le plan d'incidence en deux moitiés ſemblablement diſpoſées par rapport à la ligne *AB*. Donc elles éprouvent des réſiſtances qui doivent ſe contrebalancer dans le ſens perpendiculaire au plan d'incidence; & par conſéquent le centre, en vertu des réſiſtances dont nous venons de parler, ne peut s'écarter ni du plan *AXBZ*, ni du plan d'incidence. Donc il ne changeroit pas de direction, s'il n'éprouvoit aucune autre action. Mais les deux parties *MONSP*, *monsp* égales & ſemblablement diſpoſées autour de *AB*, éprouveront deux réſiſtances différentes, dont chacune pourra ſe concevoir comme décompoſée en deux forces, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à la direction *AB*; & le centre du globe devra ſe mouvoir comme ſi ces forces lui étoient immédiatement appliquées

SCD LYON 1

(*Num.* CCLXII.). Or les forces parallèles à *AB* altéreroient la vîteſſe du point *C*, ſans rien changer à ſa direction; au lieu que les forces perpendiculaires à *AB* ne pourroient manquer de produire un changement dans la direction du centre. Car ſi le nouveau milieu eſt plus réſiſtant que le premier, la force perpendiculaire ſuivant *Ce* ſera plus grande que la force perpendiculaire ſuivant *CE*, & par conſéquent elles auront une réſultante *Cy* dirigée ſuivant *Ce*. Donc le centre ſollicité en même tems ſuivant *Ce* & ſuivant *CB*, décrira une ligne *Cc* en s'éloignant de la perpendiculaire. Si au contraire le nouveau milieu eſt moins réſiſtant que le premier, la force ſuivant *Ce* ſera moindre que la force ſuivant *CE*, & par conſéquent ces forces auront une réſultante *Cy'* dirigée ſuivant *CE*. Donc le centre ſollicité en même tems ſuivant *CE* & ſuivant *CB*, décrira une ligne *Cc'* en s'approchant de la perpendiculaire. Donc en général le mobile ſe réfracte en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire, ſuivant qu'il paſſe d'un milieu dans un autre plus ou moins réſiſtant.

CCCLXXXVIII.

REMARQUE I. La réfraction ſe fait en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire, ſuivant que le nouveau milieu eſt plus ou moins réſiſtant que le premier, non ſeulement tandis que le plan d'immerſion *MONS* (*Fig.* 172.) eſt au-

SCD LYON 1

dessous du point B, mais aussi lorsqu'il passe au-dessus de ce point (*Fig.* 173.). Car menant toujours dans le plan d'incidence les lignes Ee, Mm, Nn, perpendiculaires à la direction AB du corps, & concevant par les points m, n, une section $mOnS$ perpendiculaire au plan d'incidence & évidemment égale à la section $MONS$, les résistances qu'éprouveront les parties $ONSB$, $OnSB$ se contrebalanceront dans le sens perpendiculaire à la ligne AB, ainsi que les résistances des parties $OMAS$, $OmAS$. Mais on voit que les parties égales $OMnS$, $OmNS$ placées dans des milieux différents, éprouveront des résistances inégales, qui donneront au centre C une impulsion suivant Ce, si le nouveau milieu est plus résistant; ou suivant CE, si le nouveau milieu est moins résistant que le premier. Donc, &c.

CCCLXXXIX.

Remarque II. On peut donc conclure, que si le globe éprouvoit de la résistance dans tous les points de sa surface, la réfraction dureroit pendant tout le tems qu'il seroit plongé en partie dans l'un & en partie dans l'autre milieu. Mais imaginant le globe divisé en deux moitiés par le plan $EVeY$ (*Fig.* 174.) perpendiculaire à la ligne AB, il est visible que si la vîtesse est considérable, les milieux ou fluides n'agiront que sur l'hémisphère antérieur $EVeYB$, & qu'il se fera une espèce de vuide

SCD LYON 1

derrière le corps. Donc la réfraction cessera dès que le corps sera plongé dans le nouveau milieu jusqu'au point *e*, puisqu'alors il présentera à ce milieu tout l'hémisphère antérieur, dont les résistances se balanceront dans le sens perpendiculaire à la ligne *AB*.

CCCXC.

REMARQUE III. Si le corps passe d'un milieu dans un autre plus résistant, l'angle *PCB* augmente pendant tout le tems que dure la réfraction, & par conséquent le point *e* avance continuellement dans le sens *eF*. Or il peut arriver 1°, que malgré la réfraction, l'angle *PCB* demeure toujours moindre qu'un angle de 90 degrés, & alors le corps doit passer entièrement dans le nouveau milieu & s'y enfoncer de plus en plus. 2° Il peut arriver qu'en vertu de la réfraction, l'angle *PCB* devienne droit à l'instant où le corps est entièrement plongé, & dans ce cas il est évident que le corps ne s'enfoncera que de la quantité précise de son diamètre, & qu'il décrira après son immersion une ligne droite parallèle à la surface des deux fluides. 3° Enfin il peut arriver que l'angle *PCB* devienne droit & que le point *e* arrive en *F* avant l'immersion totale; & dans ce dernier cas le mobile doit repasser dans le premier milieu. En effet, la réfraction n'étant pas finie, l'angle *PCB* doit aller en augmentant & devenir obtus de plus en plus; ce qui ne peut être,

SCD LYON 1

à moins que le globe ne rentre dans le premier milieu. C'eſt par cette raiſon que les corps qui frappent trop obliquement la ſurface de l'eau, ſe réfléchiſſent & font des *ricochets*; que dans les batailles navalles, par exemple, les boulets ſont renvoyés par l'eau, & que la même choſe arrive aux petites pierres que les enfants jettent avec roideur ſur la ſurface d'une rivière, pour leur faire faire pluſieurs ſauts.

CCCXCI.

REMARQUE IV. La peſanteur du globe & des fluides qu'il traverſe, doit apporter quelque changement dans les loix de réfraction que nous venons d'expoſer. Mais les effets de cette peſanteur ne peuvent guères s'évaluer avec une préciſion ſuffiſante, que dans un Traité complet de la réfraction des corps.

CCCXCII.

REMARQUE V. Quoique la réſiſtance inégale des milieux doive produire un changement dans la direction du mobile qui les traverſe, il n'en faut pas conclure en général, que toute réfraction vienne de cette cauſe. On obſerve, par exemple, que la lumière ſe réfracte en s'approchant de la perpendiculaire, quand elle paſſe d'un milieu dans un autre plus denſe, de l'air dans l'eau ou dans le verre, d'un air moins denſe dans un autre plus denſe; & qu'au contraire elle s'éloigne de la perpendiculaire,

SCD LYON 1

en passant d'un milieu dans un autre de moindre densité. Il résulte même des démonstrations de M. *d'Alembert*, qu'aucune des loix qu'on observe dans la réfraction de la lumière, ne doit avoir lieu dans celle des corps solides, & qu'ainsi c'est mal-à-propos qu'on a fait dépendre l'une & l'autre des mêmes principes. Voyez son *Traité des Fluides*.

FIN.

De l'Imprimerie de J.-F.-X. JOLY, Imprimeur de la Ville & du Collége de Dole.

SCD LYON 1

APPROBATION.

J'AI lu, par ordre de Mgr. le Garde des sceaux, un manuscrit intitulé: *Leçons élémentaires de Méchanique*, par M. l'Abbé JANTET, Professeur de Philosophie au Collége royal de Dole, & je n'y ai rien trouvé qui puisse en empêcher l'impression. A Paris le 6 décembre 1784. DÉMEUNIER.

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, par la Grâce de Dieu, Roi de France & de Navarre, A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT. Notre bien amé le sieur Abbé JANTET, Professeur de Philosophie au Collége royal de Dole, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au public les *Elémens de Méchanique* de sa composition : s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre royaume; Voulons qu'il jouisse de l'effet du présent Privilége, pour lui & ses hoirs à perpétuité, pourvu qu'il ne le rétrocède à personne: & si cependant il jugeoit à propos d'en faire une cession, l'acte qui la contiendra sera enregistré en la Chambre syndicale de Paris, à peine de nullité, tant du Privilége que de la Cession; & alors, par le fait seul de la Cession enregistrée, la durée du présent Privilége sera réduite à celle de la vie de l'Exposant, ou à celle de dix années, à compter de ce jour, si l'Exposant décède avant l'expiration desdites dix années; le tout conformément aux articles IV & V de l'Arrêt du Conseil du 30 août 1777, portant Règlement sur la durée des Priviléges en Librairie. Faisons défense à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de celui qui le représentera, à peine de saisie & de confiscation des

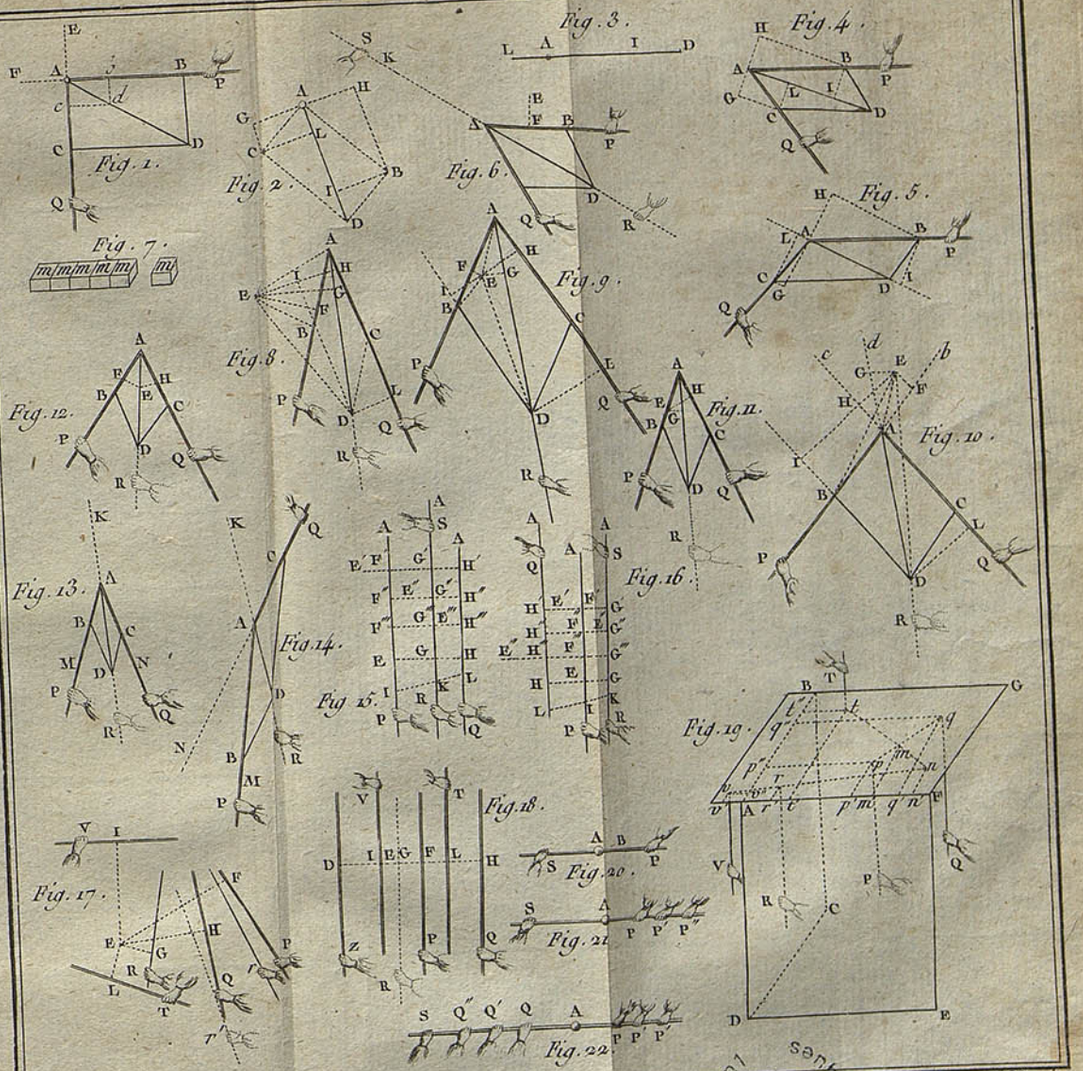
SCD LYON 1

exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende, qui ne pourra être modérée pour la première fois, de pareille amende & de déchéance d'état en cas de récidive, & de tous dépens, dommages & intérêts, conformément à l'Arrêt du Conseil du 30 août 1777, concernant les contrefaçons : A LA CHARGE que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelle ; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en beau papier & beaux caractères, conformément aux Règlemens de la Librairie, à peine de déchéance du présent Privilége ; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit ouvrage sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le sieur HUE DE MIROMESNIL, Commandeur de nos Ordres ; qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit sieur HUE DE MIROMESNIL : le tout à peine de nullité des Présentes ; DU CONTENU desquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses hoirs, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires foi soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le sixième jour du mois d'avril, l'an de grace mil sept cent quatre-vingt-cinq, & de notre Règne le onzième. Par le Roi en son Conseil. LE BEGUE.

Registré sur le Registre XXII de la Chambre royale & syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n° 149, *fol.* 303, *conformément aux dispositions énoncées dans le présent Privilége ; & à la charge de remettre à ladite Chambre les huit Exemplaires prescrits par l'article* CVIII. *du règlement de* 1723. *A Paris le* 15 *avril* 1785. *LE CLERC*, Syndic.

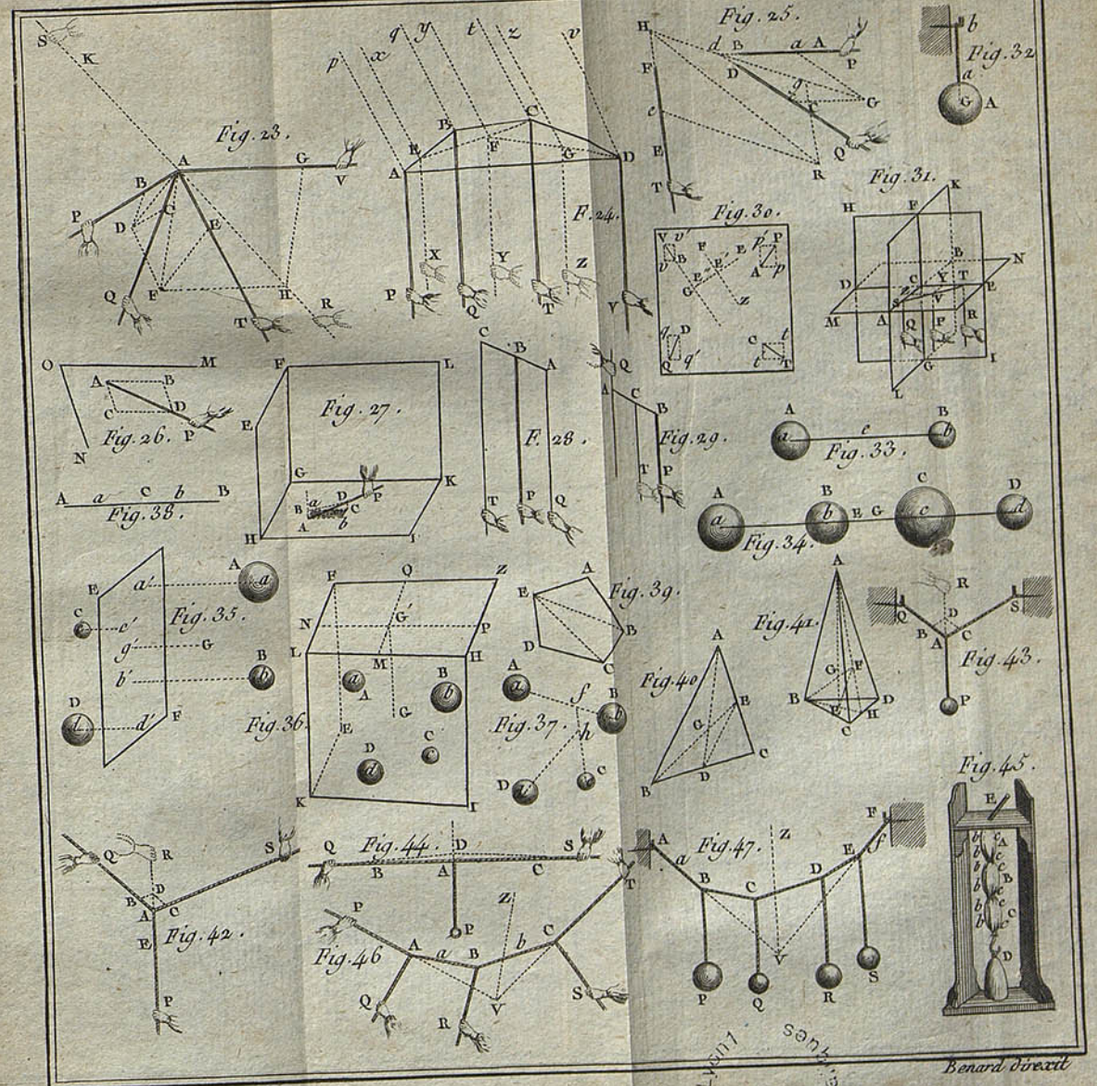
J'ai cédé le présent Privilége au sieur JOLY, Imprimeur-Libraire, pour en jouir conformément aux règlemens de la Librairie. A Dole le 2 août 1785. JANTET.

SCD LYON 1



SCD Lyon 1 Mathématiques

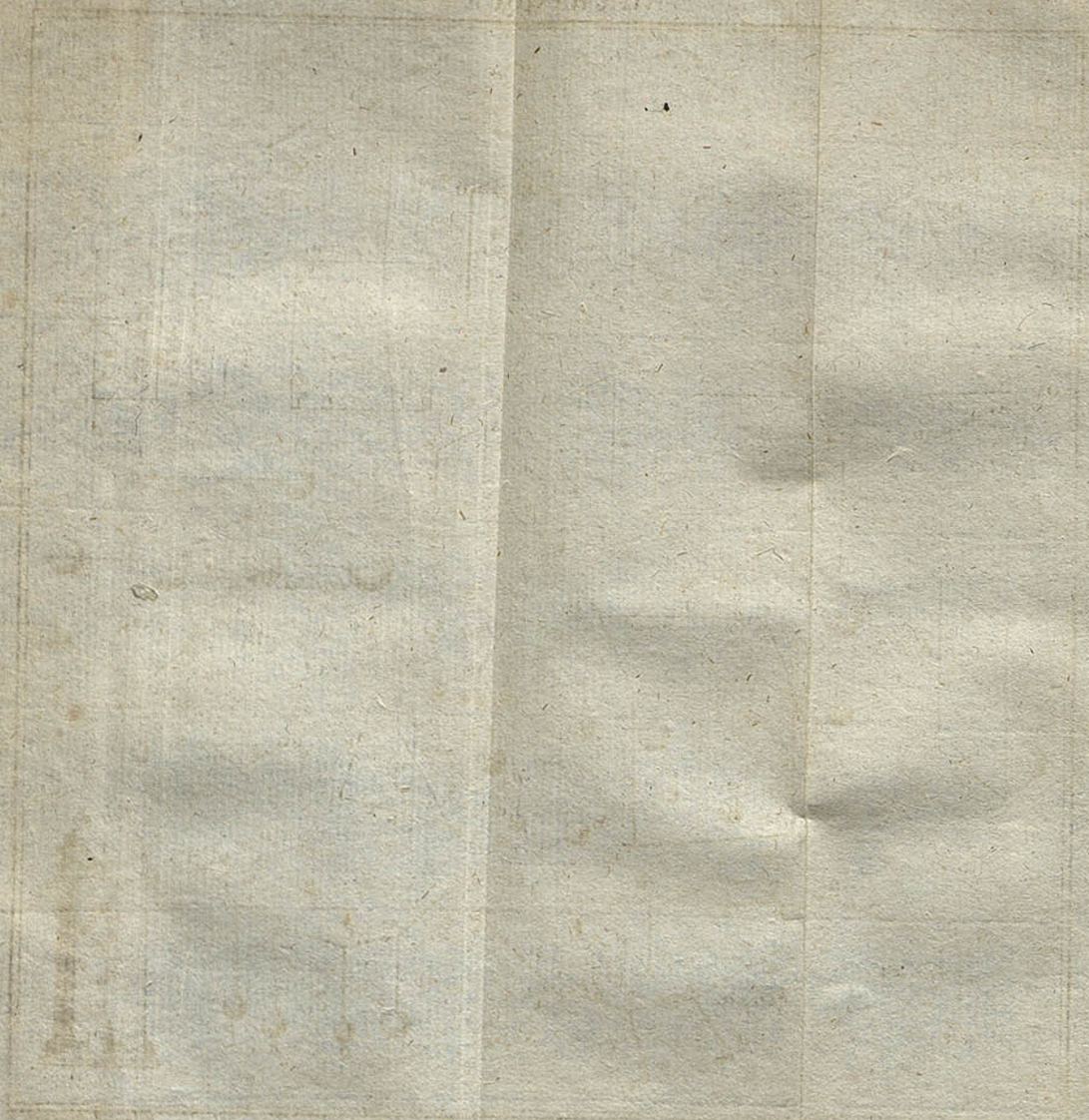
SCD LYON 1



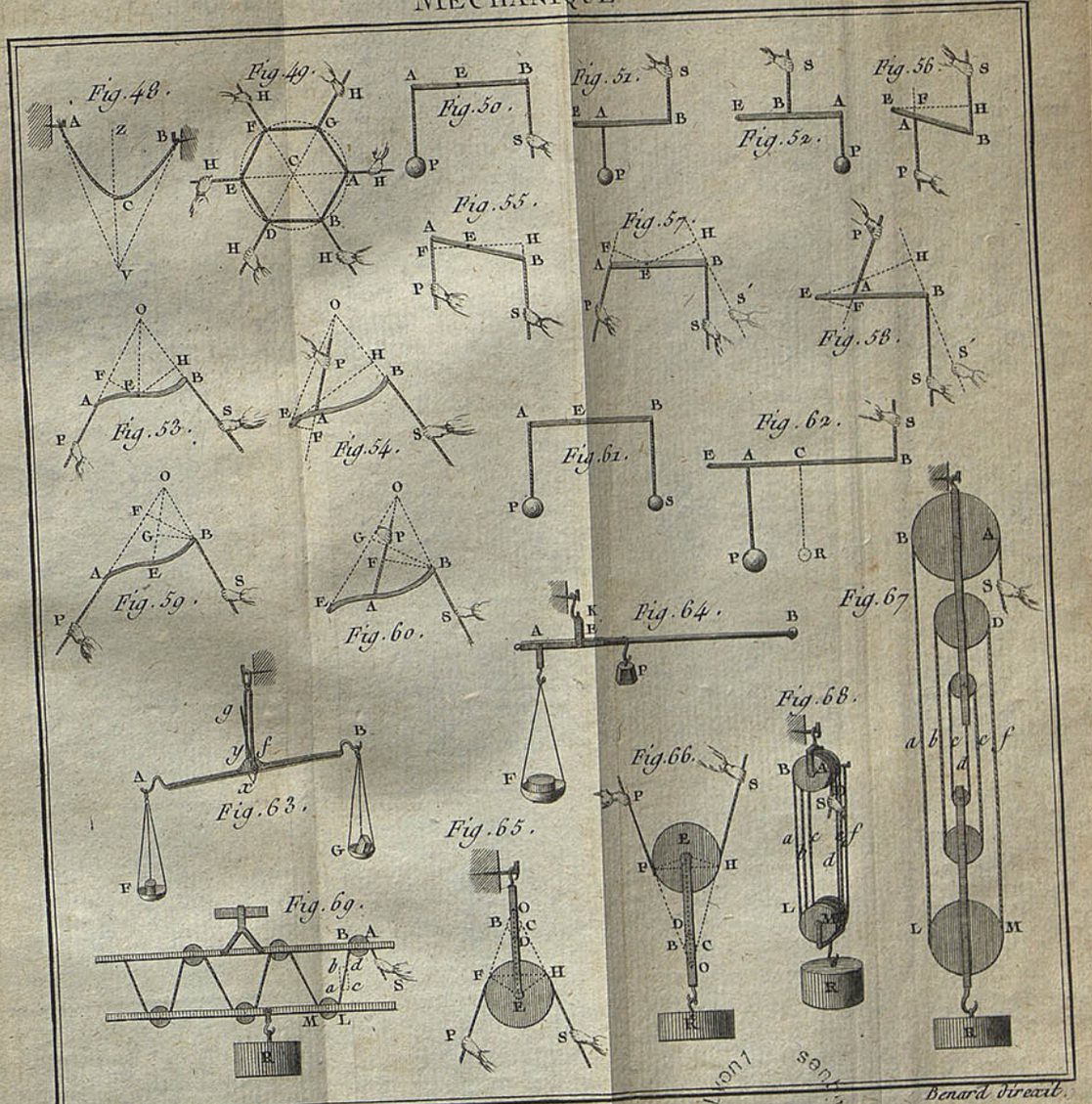
Benard direxit

SCD Lyon 1 Mathématiques

SCD LYON 1



SCD LYON 1



SCD Lyon 1 Sciences Mathématiques

SCD LYON 1

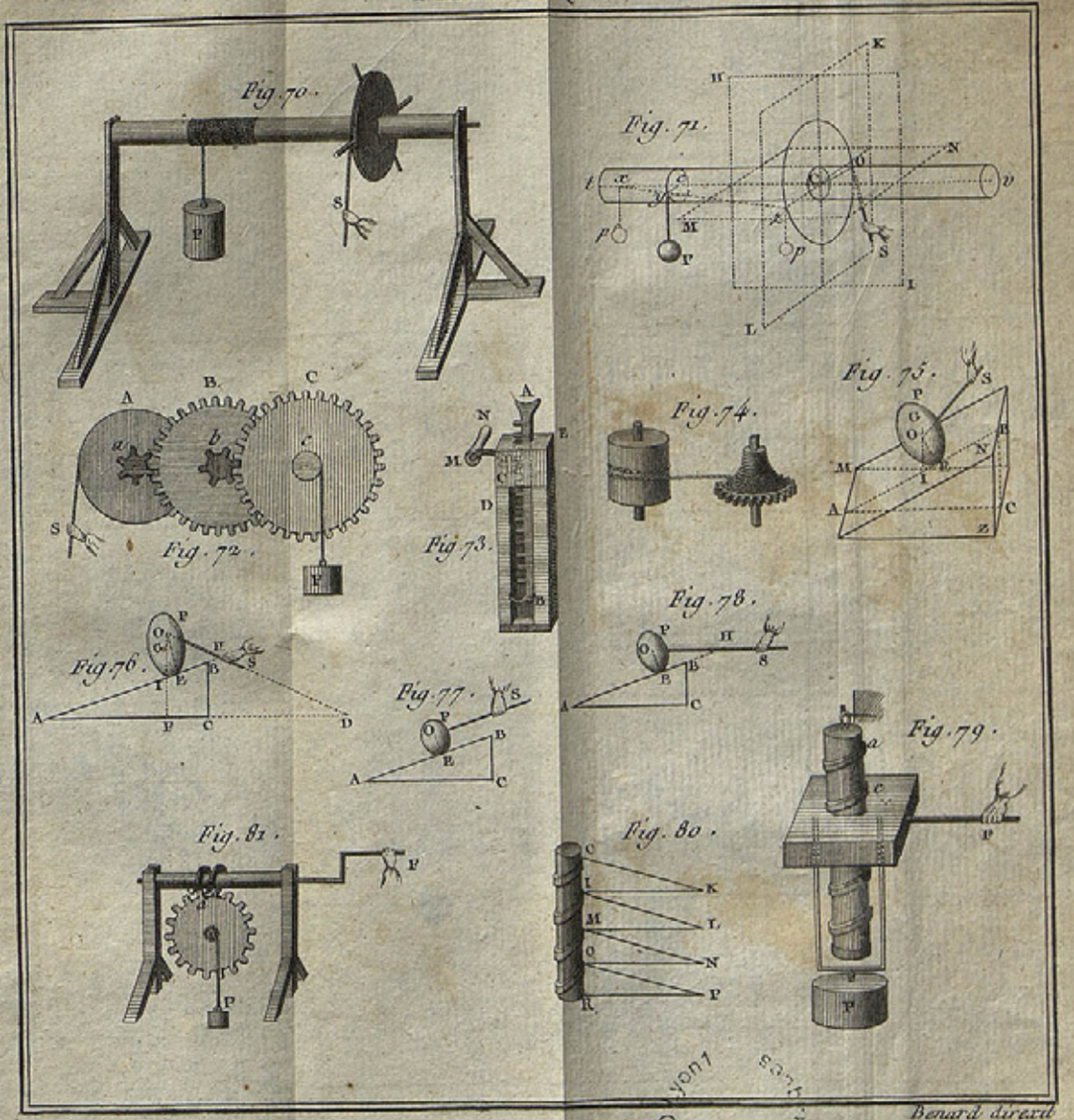
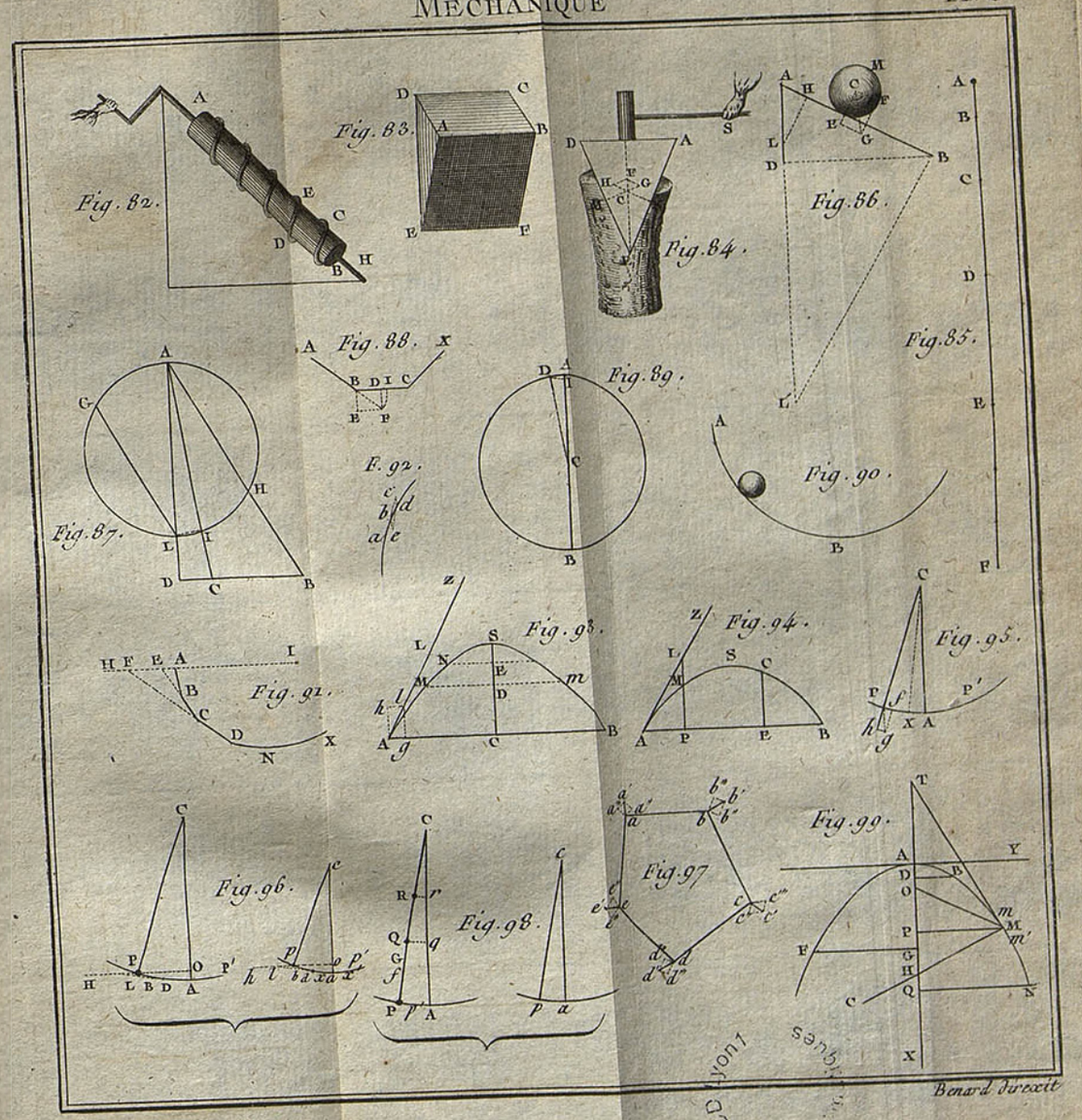


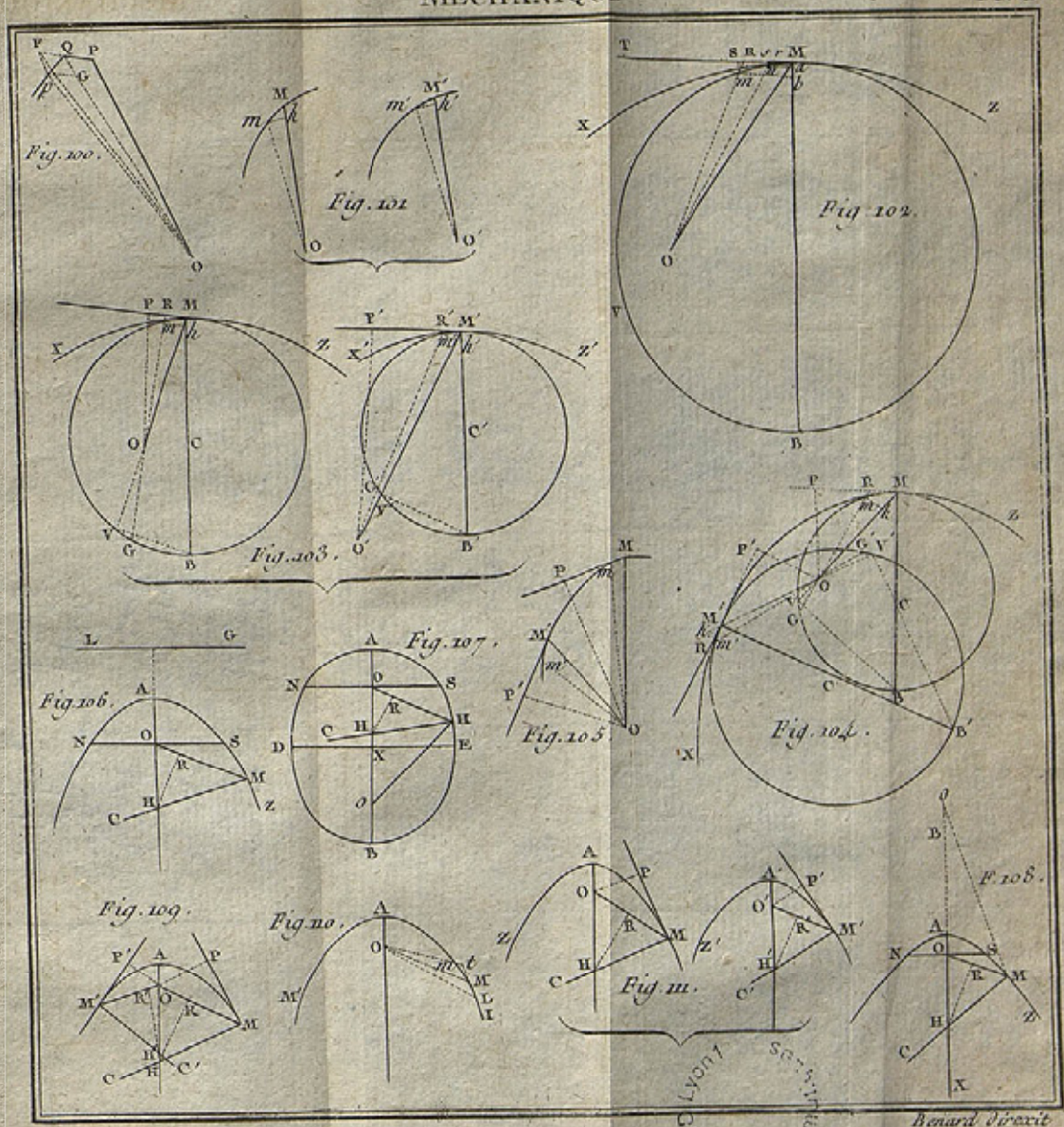
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Benard direxit

SCD Lyon1

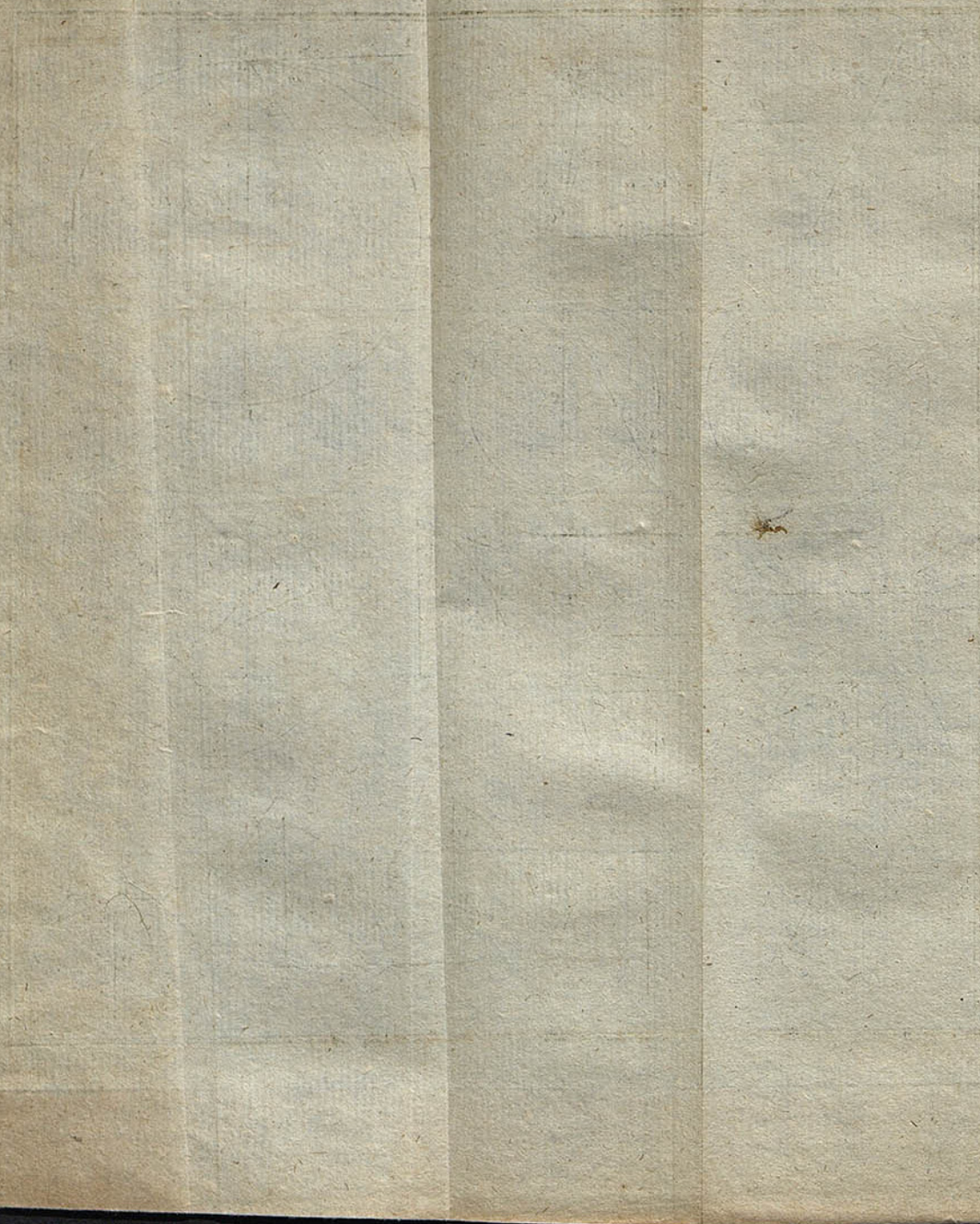


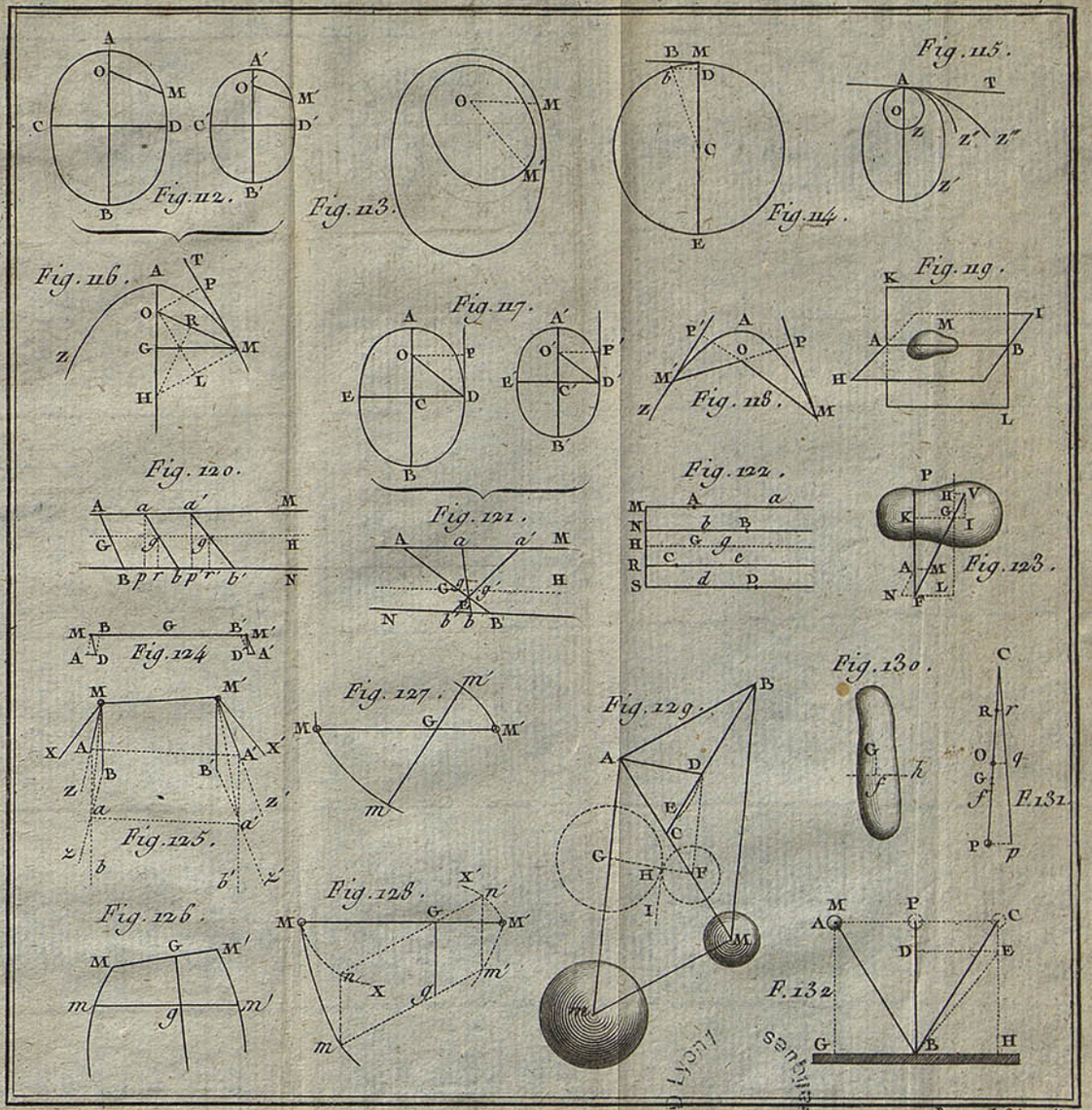
SCD Lyon 1 Sciences Mathématiques

SCD LYON 1



SCD Lyon1 Section Mathématiques

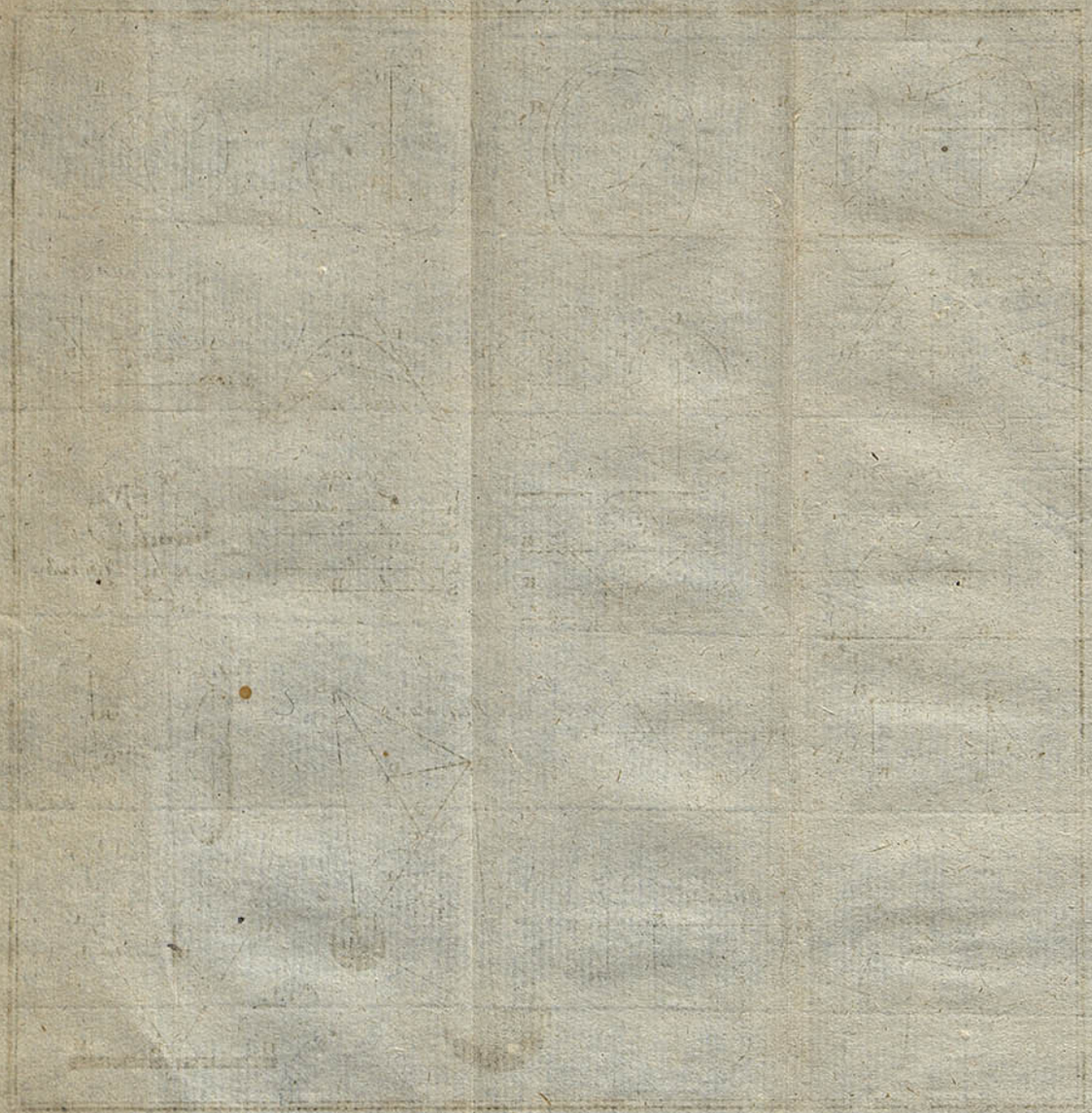


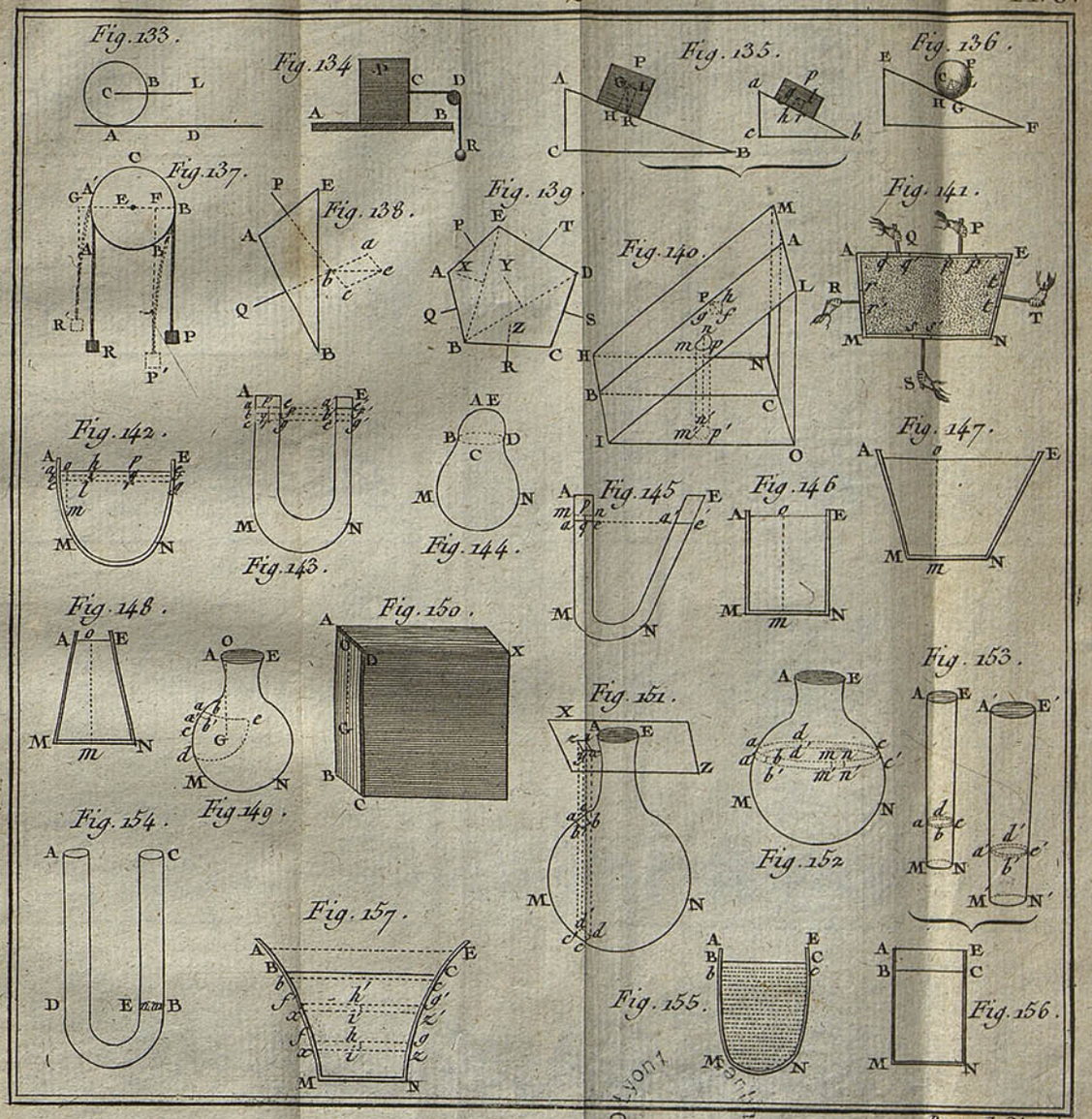


Benard direxit

SCD Lyon 1 Mathématiques

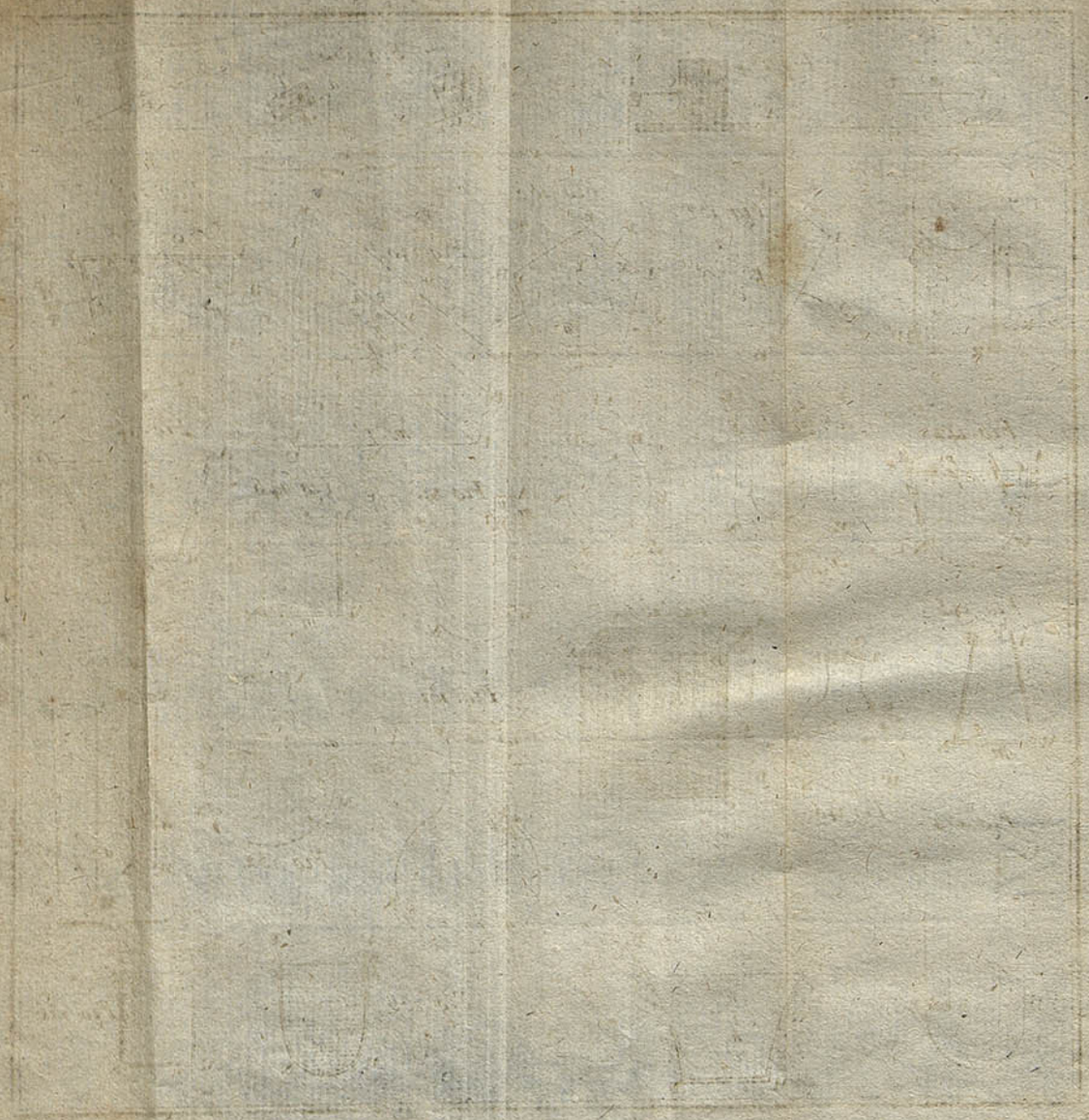
SCD LYON 1



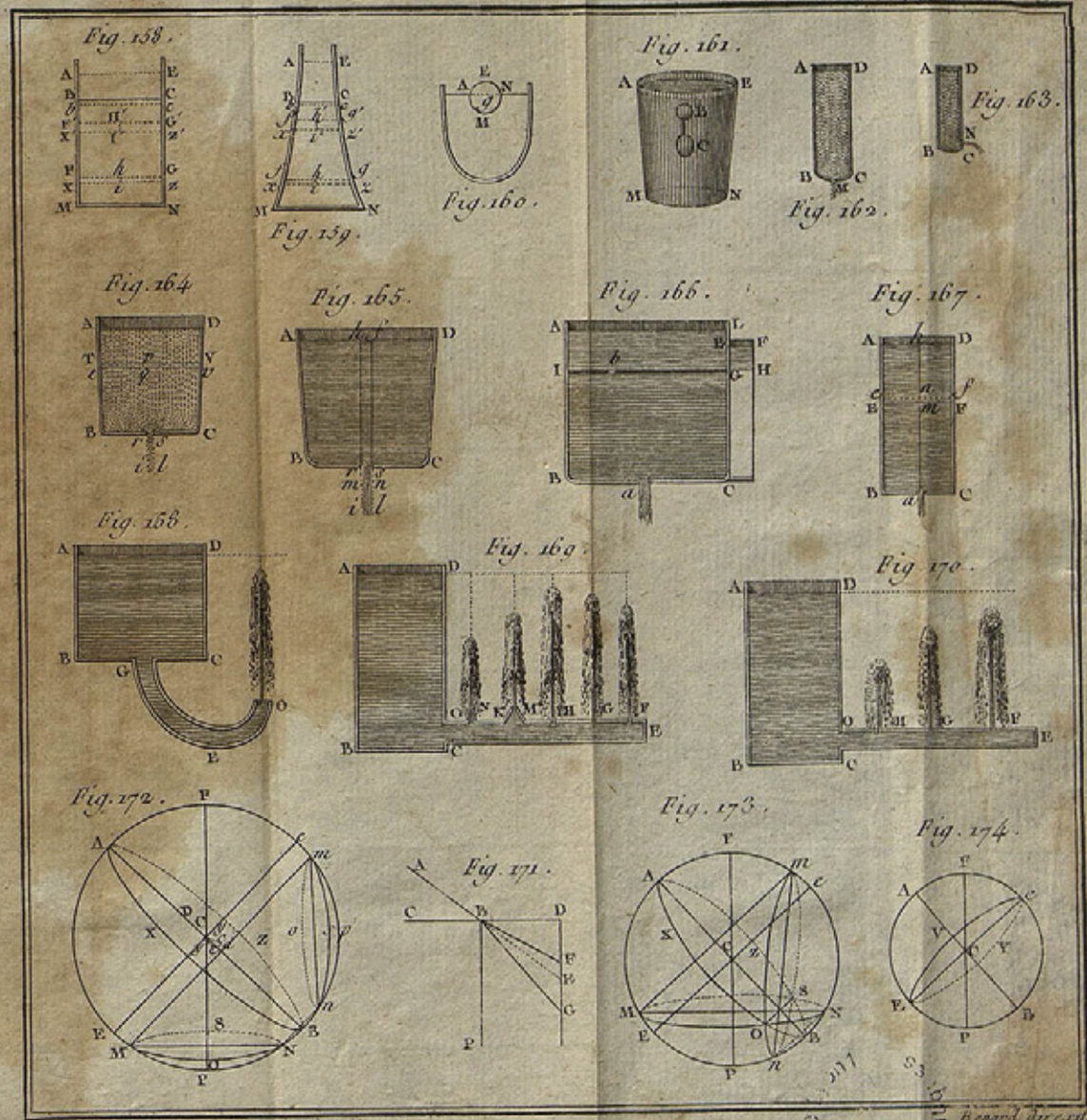


Benard direxit

SCD Lyon 1



SCD LYON 1



Benard direxit

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1