SCD LYON 1

VII

Mr. Antoine Arnaud docteur de la maison de Sorbonne, né a Paris le 6 février 1612 mort le 8 août 1694. est auteur de ce livre

proportion utile Des triangles page 237.

30 +

ITARD 020

36

SCD LYON 1

cet ouvrage est de mr. arnaud (antoine) docteur de la maison de Sorbonne, né a paris 6 février 1612 mort le 8 aoust 1694

Wolf dans son elementa matheseos universae, tom. 5e page 97. genevae 4°. 1741 apud gosse. dit ce que suit:

" nova elementa geometriae (arnoldi) suppresso nomine,
" anno 1667 primum edita 4°. dein anno 1685
= idem et anno 1690 hagae comitum in 8° recusa
= (plag. 21) idiomate gallico.

---

proportionalité des triangles semblables page 237. très remarquable.

voyez les signes plus et moins page 16. voyez aussi page 366. des élémens de mathem. du p. Prestet edit de 1689. vol 2

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE, CONTENANT,

OUTRE UN ORDRE TOUT NOUVEAU, & de nouvelles demonſtrations des propoſitions les plus communes,

De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes ſont incommenſurables.

De nouvelles meſures des angles, dont on ne s'étoit point encore aviſé,

Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.

SECONDE EDITION.

Où il y a un traité tout nouveau des Proportions, & beaucoup d'autres changemens conſiderables.

(par Arnaud)

SCD Lyon 1 Mathématiques

A PARIS,

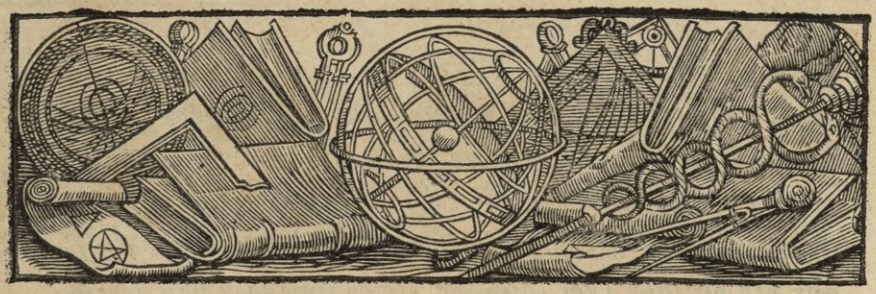
Chez GUILLAUME DESPREZ, ruë S. Jacques, à S. Proſper & aux trois Vertus, au deſſus des Mathurins.

M. DC. LXXXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

SCD LYON 1

SCD LYON 1



AVERTISSEMENT

sur cette seconde Edition.

LA Geometrie est d'une si grande utilité, & il est si necessaire de bien connoître les rapports qui se rencontrent entre diverses grandeurs: qu'il est presque impossible de faire aucun progrés considerable dans les Arts liberaux, sans avoir quelque teinture de cette Science, il seroit à desirer que l'on s'y appliquât plus qu'on ne fait, & que cette connoissance devint plus commune. Car outre l'usage continuel qu'on en peut faire dans tous les Arts avec un tres grand avantage; un esprit Geometrique est plus juste que celuy qui ne l'est pas, & beaucoup moins sujet à prendre la vrai-semblance pour la verité. C'est pourquoy l'on est redevable à ceux qui travaillent à rendre cette Science facile; & en particulier à l'Auteur non seulement de nous avoir donné ces nouveaux Elemens, sans lesquels plusieurs personnes n'auroient jamais eu de goût pour une connoissance qui demande

SCD LYON 1

tant d'application : mais aussi de ce qu'il a pris la peine de les corriger, & d'y faire plusieurs changemens considerables. La matiere qui y est traitée, principalement dans les quatre premiers livres est d'elle mesme si abstraitte, qu'il ne faut pas s'étonner si plusieurs se sont aisément rebutez des l'entrée, & s'ils ont été obligez tres souvent de commencer par le cinquiéme livre. C'est dans le dessein de lever cette difficulté que l'Auteur y a changé beaucoup de choses, & qu'il a refait entierement le second & le troisiéme livre : où il explique la nature des raisons & des Proportions Geometriques, soit simples, soit composées, avec beaucoup plus de netteté & d'ordre qu'il n'avoit fait dans la premiere edition. Et l'on peut dire que la maniere dont il se sert ne paroîtra pas si difficile à ceux qui voudront s'y appliquer un peu. Il y auroit icy assez de fondement de s'étendre sur la bonté de cet Ouvrage, qui fut receu des la premiere fois avec tant d'applaudissement. Mais il est plus à propos de ne point prevenir les Lecteurs, Et l'on doit esperer que l'avancement que feront dans la Geometrie ceux qui se serviront de ces Elemens, en sera une preuve plus seure que tout ce qu'on en pourroit dire.

PREFACE.

QUOIQUE j'aye quelque sorte de liberté de parler avantageusement de ces Nouveaux Elemens de Geometrie, puisque je n'y ay point d'autre part que celle de les avoir tirez des mains de l'Auteur pour les donner au public; mon dessein n'est pas neanmoins d'en faire voir icy l'excellence, ny de les proposer au monde comme un ouvrage fort considerable. Je serois plûtost porté à diminuer l'idée trop haute que quelques personnes en pouvoient avoir, étant tres persuadé qu'il est beaucoup plus dangereux d'estimer trop ces sortes de choses, que de ne les pas estimer assez.

La nature de toutes les sciences humaines, & principalement de celles qui entrent peu dans le commerce de la vie, est d'être mêlées d'utilitez & d'inutilitez : & je ne sçay si l'on ne peut point dire qu'elles sont toutes inutiles en elles mêmes, & qu'elles devroient passer pour un amusement entierement vain & indigne de personnes sages, si elles ne pouvoient servir d'instrumens & de preparations à d'autres connoissances vraiment utiles. Ainsi ceux qui s'y attachent pour elles mêmes comme à quelque chose de grand & de relevé n'en connoissent pas le vray usage, & cette ignorance est en eux un beaucoup plus grand défaut que s'ils ignoroient absolument ces sciences.

PREFACE.

Ce n'eſt pas un grand mal que de n'eſtre pas Geometre ; mais c'en eſt un conſiderable que de croire que la Geometrie eſt une choſe fort eſtimable, & de s'eſtimer ſoy même pour s'eſtre rempli la teſte de lignes, d'angles, de cercles, de proportions. C'eſt une ignorance tres blâmable que de ne pas ſçavoir, que toutes ces ſpeculations ſteriles ne contribuënt rien à nous rendre heureux ; qu'elles ne ſoulagent point nos miſeres ; qu'elles ne gueriſſent point nos maux ; qu'elles ne nous peuvent donner aucun contentement réel & ſolide ; que l'homme n'eſt point fait pour cela, & que bien loin que ces ſciences luy donnent ſujet de s'élever en luy-même, elles ſont au contraire des preuves de la baſſeſſe de ſon eſprit ; puiſqu'il eſt ſi vain & ſi vuide de vray bien, qu'il eſt capable de s'occuper tout entier à des choſes ſi vaines & ſi inutiles.

Cependant on ne voit que trop par experience, que ces ſortes de connoiſſances ſont d'ordinaire jointes à l'ignorance de leur prix & de leur uſage. On les recherche pour elles mêmes ; on s'y applique comme à des choſes fort importantes ; on en fait ſa principale profeſſion ; on ſe glorifie des découvertes que l'on y fait ; on croit fort obliger le monde ſi l'on veut bien luy en faire part ; & l'on s'imagine meriter par là un rang fort conſiderable entre les ſçavans & les grands eſprits.

Si cet Ouvrage n'a rien de ce qui merite la reputation de grand Geometre au jugement de ces perſonnes, en quoy il eſt tres juſte de les en croire ; au moins on peut dire avec verité que celuy qui l'a compoſé eſt exempt du défaut de la ſouhaitter, & que quoy qu'il eſtime beaucoup le genie de pluſieurs perſonnes qui ſe mélent de cette ſcience, il n'a qu'une eſtime tres mediocre pour la Geometrie en elle-même. Neanmoins comme il eſt impoſſible de ſe paſſer abſolument d'une ſcience qui ſert de fondement à tant d'arts neceſſaires à la vie humaine, il peut y avoir quelque utilité à montrer aux hommes de quelle ſorte ils en doivent uſer, & de leur rendre cet-

SCD LYON 1

te étude la plus avantageuse qu'il est possible.

C'est l'unique vuë qu'à eüe l'Auteur de ces nouveaux Elemens. Il n'a pas tant consideré la Geometrie, que l'usage qu'on en pouvoit faire ; & il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en sont pas inseparables, on s'en pouvoit tres utilement servir pour former les jeunes gens, non seulement à la justesse de l'esprit ; mais même en quelque sorte à la pieté & au reglement des mœurs.

Pour comprendre les avantages qu'on en peut tirer, il faut considerer que dans les premieres années de l'enfance l'ame de l'homme est comme toute plongée & toute ensevelie dans les sens, & qu'elle n'a que des perceptions obscures & confuses des objets qui font impression sur son corps. Elle sort à la verité de cet état à mesure que ses organes se dégagent & se fortifient par l'âge, & elle acquiert quelque liberté de former des pensées plus claires & plus distinctes, & même de les tirer les unes des autres, ce que l'on appelle raisonnablement. Mais l'amour des choses sensibles & exterieures luy étant devenu comme naturel, & par la corruption de son origine & par l'accoûtumance qu'elle a contractée durant l'enfance, les choses exterieures sont toûjours le principal objet de son plaisir & de sa pente. Ainsi non seulement les jeunes gens ne se plaisent gueres que dans les choses sensuelles ; mais même entre les personnes avancées en âge il y en a peu qui soient capables de trouver du goust dans une verité purement spirituelle, & où les sens n'ayent aucune part. Toute leur application est toûjours aux manieres agreables ; ils n'ont de l'intelligence & de la delicatesse que pour cela, & ils ne se servent de leur esprit que pour étudier l'agréement & l'art de plaire, par les choses qui flattent la concupiscence & les sens.

Il me seroit aisé de montrer, que cette disposition d'esprit est non seulement un tres grand défaut ; mais que c'est la source des plus grands desordres & des plus grands vices. Il est vray qu'il n'y a que la grace & les exercices de pieté qui puissent la guerir veritablement : mais

entre les exercices humains qui peuvent le plus servir à la diminuer, & à disposer même l'esprit à recevoir les veritez Chrestiennes avec moins d'opposition & de dégoust, il semble qu'il n'y en ait gueres de plus propre que l'étude de la Geometrie. Car rien n'est plus capable de détacher l'ame de cette application aux sens, qu'une autre application à un objet qui n'a rien d'agreable selon les sens; & c'est ce qui se rencontre parfaitement dans cette science. Elle n'a rien du tout qui puisse favoriser tant soit peu la pente de l'ame vers les sens; son objet n'a aucune liaison avec la concupiscence; elle est incapable d'eloquence & d'agréement dans le langage; rien n'y excite les passions; elle n'a rien du tout d'aimable que la verité, & elle la presente à l'ame toute nuë & détachée de tout ce que l'on aime le plus dans les autres choses.

Que si les veritez qu'elle propose ne sont pas fort utiles ny fort importantes, si l'on en demeuroit là; il est neanmoins tres utile & tres important de s'accoûtumer à aimer la verité, à la gouster, à en sentir la beauté. Et Dieu se sert souvent de cette disposition d'esprit, pour nous faire entrer dans l'amour & dans la pratique des veritez qui conduisent au salut, pour nous faire voir l'illusion de tout ce qui plaist dans les choses sensibles & exterieures, & pour nous rendre justes & equitables dans toute la conduite de nôtre vie; cet esprit d'equité consistant principalement dans le discernement & dans l'amour de la verité en toutes les affaires que nous traittons.

Mais la Geometrie ne sert pas seulement à détacher l'esprit des choses sensibles, & à inspirer le goust de la verité; elle apprend aussi à la reconnoistre & à ne se laisser pas tromper par quantité de maximes obscures & incertaines, qui servent de principes aux faux raisonnemens dont les discours des hommes sont tout remplis. Car si l'on y prend garde, ce qui nous jette ordinairement dans l'erreur & nous fait prendre le faux pour le vray, n'est pas le défaut de la liaison des consequences avec les principes en quoy consiste ce qu'on appelle la forme des argumens

gumens ; mais c'eſt l'obſcurité des principes mêmes, qui n'étant pas exactement vrais, & n'étant pas auſſi évidemment faux, preſentent à l'eſprit une lumiere confuſe où la verité & la fauſſeté ſont mêlées, ce qui cauſe à pluſieurs un eſpece d'ébloüiſſement qui leur fait approuver ces principes ſans les examiner davantage.

Il eſt vray que la Logique nous donne deux excellentes regles pour éviter cette illuſion, qui ſont de définir tous les mots équivoques, & de ne recevoir jamais que des principes clairs & certains. Mais ces regles ne ſuffiſent pas pour nous garantir d'erreur. Premierement, parce qu'on ſe trompe ſouvent dans la notion même de l'evidence, en prenant pour évident ce qui ne l'eſt pas. Et en ſecond lieu, parce que quoy qu'on ſçache ces regles, on n'eſt pas toûjours appliqué à les pratiquer. Il n'y a donc que la Geometrie qui remedie en effet à l'un & à l'autre de ces défauts. Car d'une part en fourniſſant des principes vraiment clairs, elle nous donne le modelle de la clarté & de l'evidence pour diſcerner ceux qui l'ont de ceux qui ne l'ont pas: & de l'autre, comme elle ne ſe diſpenſe jamais de l'obſervation de ces deux regles, elle accoûtume l'eſprit à les pratiquer, & à eſtre toûjours en garde contre les équivoques des mots & contre les principes confus, qui ſont les deux ſources les plus communes des mauvais raiſonnemens.

Il ne faut pas diſſimuler neanmoins, que cette coûtume même de rejetter tout ce qui n'eſt pas entierement clair peut engager dans un défaut tres conſiderable, qui eſt de vouloir pratiquer cette exactitude en toute ſorte de matieres, & de contredire tout ce qui n'eſt pas propoſé avec l'evidence Geometrique. Cependant il y a une infinité de choſes dont on ne doit pas juger en cette maniere, & qui ne peuvent pas eſtre reduites à des demonſtrations methodiques. Et la raiſon en eſt, qu'elles ne dépendent pas d'un certain nombre de principes groſſiers & certains, comme les veritez Mathematiques ; mais d'un grand nombre de preuves & de circonſtances qu'il faut que l'eſprit

voye tout dun coup, & qui n'étant pas convaincantes ſeparément, ne laiſſent pas de perſuader avec raiſon lors qu'elles ſont jointes & unies enſemble. La pluſpart des matieres morales & humaines ſont de ce nombre ; & il y a même des veritez de la Religion qui ſe prouvent beaucoup mieux par la lumiere de pluſieurs principes qui s'entr'aident & ſe ſoûtiennent les uns les autres, que par des raiſonnemens ſemblables aux demonſtrations Geometriques.

C'eſt donc ſans doute un fort grand défaut que de ne faire pas diſtinction des matieres ; d'exiger par tout cette ſuitte methodique de propoſitions, que l'on voit dans la Geometrie ; de faire difficulté ſur tout, & de croire avoir droit de rejetter abſolument un principe, lors qu'on juge qu'il peut recevoir quelque exception en quelque rencontre.

Mais ſi ce défaut eſt aſſez ordinaire à quelques Geometres, il ne naiſt pas neanmoins de la Geometrie même. Cette ſcience étant toute veritable ne peut pas autoriſer une conduite qui n'eſt fondée que ſur des principes d'erreur. Car il n'eſt pas vray qu'un principe qui ne prouve pas abſolument ne prouve rien ; & que ne prouvant pas tout ſeul, il ne prouve pas étant joint à d'autres. Il y a differens degrez de preuves. Il y en a dont on conclut la certitude, & d'autres dont on conclut l'apparence ; & de pluſieurs apparences jointes enſemble on conclut quelquefois une certitude à laquelle tous les eſprits raiſonnables ſe doiuent rendre. Il n'eſt pas abſolument certain que l'on doive voir le Soleil quelqu'un des jours de l'année qui vient, je le dois neanmoins croire ; & je ſerois ridicule d'en douter, quoy qu'il ſoit impoſſible de le démontrer. La raiſon ne doit donc pas pretendre de démontrer Geometriquement ces choſes ; mais elle peut prouver Geometriquement que c'eſt une ſottiſe de ne les pas croire : Et c'eſt en cette maniere qu'on ſe peut ſervir de la Geometrie même dans ces ſortes de matieres, pour faire voir plus clairement la force de la vray-ſemblance qui nous les doit faire croire.

SCD LYON 1

Outre ces utilitez que l'on peut tirer de la Geometrie, on en peut encore remarquer deux autres qui ne sont pas moins considerables. Il y a des veritez importantes pour la conduite de la vie & pour le salut, qui ne laissent pas d'estre difficiles à comprendre, & qui ont besoin d'une attention penible; Dieu ayant voulu, comme dit S. Augustin, que le pain de l'ame se gagnast avec quelque sorte de travail aussi bien que le pain du corps. Et il arrive de là que plusieurs personnes s'en rebutent par une certaine paresse, ou plûtost par une delicatesse d'esprit qui leur donne du dégoust de tout ce qui demande quelque effort & quelque sorte de contention. Or l'étude de la Geometrie est encore un remede à ce défaut; car en appliquant l'esprit à des veritez abstraittes & difficiles, elle luy rend faciles toutes celles qui demandent moins d'application; comme en accoûtumant le corps à porter des fardeaux pezans, on fait qu'il ne sent presque plus le poids de ceux qui sont plus legers.

Non seulement elle ouvre l'esprit & le fortifie pour concevoir tout avec moins de peine; mais elle fait aussi qu'il devient plus étendu & plus capable de comprendre plusieurs choses à la fois. Car les veritez Geometriques ont cela de propre qu'elles dépendent d'un long enchaînement de principes qu'il faut suivre pour arriver à la conclusion; & comme cette conclusion tire sa lumiere de ces principes, il faut que l'esprit voye en mesme temps, & ce qui éclaire & ce qui est éclairé, ce qu'il ne peut faire sans s'étendre & sans porter sa veuë plus loin que dans ses actions ordinaires.

Cette étenduë d'esprit, qui paroist dans la Geometrie est non seulement tres-utile pour tous les sujets qui ont besoin de raisonnement; mais elle est aussi tres admirable en elle mesme; & il n'y a gueres de qualité de nôtre ame qui en fasse mieux voir la grandeur, & qui détruise davantage les imaginations basses & grossieres de ceux qui voudroient la faire passer pour une matiere. Car le moyen de s'imaginer qu'un corps, c'est à dire,

SCD LYON 1

un eſtre où nous ne concevons qu'une étenduë figurée & mobile, puiſſe penetrer ce grand nombre de principes tout ſpirituels qu'il faut lier enſemble pour la preuve des propoſitions que la Geometrie nous démontre, & qu'il porte meſme ſa veuë juſques dans l'infiny pour en aſſeurer ou en tirer pluſieurs choſes avec une certitude entiere? Elle nous fait voir par exemple, que la Diagonale & le coſté d'un Quarré n'ont nulle meſure commune, c'eſt à dire, que l'eſprit voit que dans l'infinité des parties de differente grandeur qu'on y peut choiſir, il n'y en a aucune qui puiſſe meſurer exactement l'une & l'autre de ces deux lignes.

On peut dire que toutes les propoſitions Geometriques ſont de meſme infinies en étenduë; parce que l'on n'y conclut pas ce qu'on démontre d'une ſeule ligne, d'un ſeul angle, d'un ſeul cercle, d'un ſeul triangle, mais de toutes les lignes, de tous les angles, de tous les cercles, de tous les triangles; & qu'ainſi l'eſprit les renferme & les comprend tous en quelque ſorte quelques infinis qu'ils ſoient. Or que tout cela ſe puiſſe faire par le bouleverſement d'une matiere, & qu'en la remuant elle devienne capable de comprendre des objets ſpirituels, & d'en comprendre meſme une infinité, c'eſt ce que perſonne ne ſçauroit croire ny penſer, pourvû qu'il veüille de bonne foy ſonger à ce qu'il dit.

Ce ſont ces refléxions qui ont fait juger à l'Auteur de ces Elemens, qu'on pouvoit faire un bon uſage de la Geometrie; mais ce n'eſt pas neanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puiſqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traitent. Ils portent tous à aimer la verité; ils apprennent à la diſcerner; ils fortifient la raiſon; ils étendent la veuë de l'eſprit, & ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'ame de l'homme, & de reconnoiſtre qu'elle ne peut eſtre autre que ſpirituelle & immortelle. Ce qui luy a donc fait croire qu'il eſtoit utile de donner une nouvelle forme à cette ſcience eſt, qu'étant perſuadé que c'étoit une

chose fort avantageuse de s'accoûtumer à reduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumiere qui les éclaircit toutes les unes par les autres, il a toûjours eu quelque peine de ce que les Elemens d'Euclide étoient tellement confus & broüillez, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée & le gouſt du veritable ordre, ils ne pouvoient au contraire que l'accoûtumer au desordre & à la confusion.

Ce défaut luy paroissoit considerable dans une science dont la principale utilité est de perfectionner la raison; mais il n'eust pas pensé neanmoins à y remedier sans la rencontre que je vas dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands esprits de ce siecle, & des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques, avoit fait en quelques jours un essay d'Elemens de Geometrie; & comme il n'avoit pas cette veuë de l'ordre, il s'estoit contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide pour en substituer d'autres plus nettes & plus naturelles, Ce petit ouvrage étant tombé entre les mains de celuy qui a depuis composé ces Elemens, il s'étonna qu'un si grand esprit n'eust pas esté frappé de la confusion qu'il avoit laissée pour ce qui est de la methode, & cette pensée luy ouvrit en même temps une maniere naturelle de disposer toute la Geometrie, les démonstrations s'arrangerent d'elles mêmes dans son esprit, & tout le corps de l'ouvrage que nous donnons maintenant au public se forma dans son idée.

Cela luy fit dire en riant à quelques-uns de ses amis, que s'il avoit le loisir il luy seroit facile de faire des Elemens de Geometrie mieux ordonnez que ceux que l'on luy avoit montrez; mais ce n'étoit encore qu'un projet en l'air qu'il avoit peu d'esperance de pouvoir executer, quoique quelques personnes l'en priassent; parce qu'il auroit fait scrupule d'y employer un temps où il auroit esté en estat de faire quelqu'autre chose.

Il est arrivé neanmoins depuis que diverses rencontres luy ont donné le loisir dont il avoit besoin pour

cela. Il fut une fois obligé par une indiſpoſition de quitter ſes occupations ordinaires, & il trouva ſon ſoulagement en ſe déchargeant d'une partie de ce qu'il avoit dans l'eſprit ſur cette matiere. Une autrefois il ſe trouva quatre ou cinq jours dans une maiſon de Campagne ſans aucun livre, & il remplit encore ce vuide en compoſant quelque partie de ce Traité. Enfin en ménageant ainſi quelques petits temps, il a achevé ce qu'il avoit deſſein de faire de cet ouvrage, s'étant borné d'abord à la Geometrie des Plans comme pouvant ſuffire au commun du monde.

Quelques perſonnes ſe ſont étonnez qu'en écrivant d'une matiere ſi étendüe, & qui a eſté traitée par un ſi grand nombre d'habiles gens, il ne leût pour cela aucun livre de Geometrie, n'en ayant point même dans ſa Bibliotheque : mais il leur répondoit, que l'ordre le conduiſoit tellement, qu'il ne croyoit pas pouvoir rien oublier de conſiderable. Il ajoûtoit même que cet ordre ne ſervoit pas ſeulement à faciliter l'intelligence & à ſoulager la memoire ; mais qu'il donnoit lieu de trouver des principes plus feconds, & des demonſtrations plus nettes que celles dont on ſe ſert d'ordinaire. Et en effet il n'y a preſque dans ces nouveaux Elemens que des démonſtrations toutes nouvelles ; qui naiſſent d'elles meſmes des principes qui y ſont établis, & qui comprennent un aſſez grand nombre de nouvelles propoſitions.

On voit aſſez par là qu'il n'eſtoit pas fort difficile à l'Auteur de la nouvelle Logique ou Art de penſer, qui avoit veu quelque choſe de cette Geometrie, de remarquer, comme il a fait dans la IVe Partie, les défauts de la methode d'Euclide, & d'avancer qu'on pourroit digerer la Geometrie dans un meilleur ordre. C'étoit deviner les choſes paſſées. Mais cette avance qu'il avoit faite, ſans ſe hazarder beaucoup, a depuis ſervy d'engagement à produire ce petit ouvrage, à quoy l'on n'auroit peut eſtre jamais penſé. Car tant de perſonnes ont demandé au Libraire une nouvelle Geometrie, qu'on n'a

SCD LYON 1

pas pû la refuſer aux inſtances qu'il a faites de leur part pour l'obtenir, n'étant pas juſte de ſe faire beaucoup prier pour ſi peu de choſe.

On s'eſt donc reſolu de la donner au public, & de le rendre juge de l'utilité qu'on en peut tirer. On croit ſeulement devoir avertir le monde qu'il y aura peut-eſtre quelques perſonnes qui pourront trouver les IV. premiers Livres un peu difficiles, parce qu'on s'y eſt ſervy de démonſtrations d'Algebre, auſquelles on a quelque peine d'abord à s'accoûtumer. La raiſon qui a obligé d'en uſer ainſi eſt, que traittant des grandeurs en general entant que ce mot comprend toutes les eſpeces de quantité, on ne pouvoit pas ſe ſervir de figures pour aider l'imagination; outre que l'on jugeoit qu'il étoit utile de ſe rompre d'abord à cette methode, qui eſt la plus feconde & la plus Geometrique; mais ceux neanmoins à qui elle feroit trop de peine ont moyen de s'en exempter en commençant par le Ve Livre, & en ſuppoſant prouvées quelques propoſitions qui dépendent des quatre premiers. Ce remede eſt aiſé, & il ne les privera pas du fruit qu'ils pourront tirer de la methode de ces Elemens, lors qu'en une ſeconde lecture ils les liront tous de ſuite.

Pour les autres jugemens qu'on peut faire de cet Ouvrage, comme il eſt facile de les prévoir, il ſemble auſſi qu'on n'ait pas ſujet de s'en mettre en peine. Car s'il ſe trouve des perſonnes qui le mépriſent par des principes plus élevez, & par un éloignement de toutes ces ſortes de ſciences, peut-eſtre ne ſeront-ils pas fort éloignez du ſentiment de l'Auteur. S'il y en a qui le blâment comme Geometres en y remarquant de veritables fautes, ils ſeront encore d'accord avec luy, parce qu'il ſera toûjours tout preſt de les corriger. Enfin ceux qui le reprendront comme Geometres, mais en ſe trompant, ne peuvent pas luy eſtre fort incommodes, parce que c'eſt une matiere où les veritez ſont ſi claires, qu'elles n'ont gueres beſoin d'apologie contre les injuſtes accuſations.

SCD LYON 1

DEFINITIONS DE QUELQUES MOTS dont on s'eſt ſervi dans ces Elemens ſans les definir, parce qu'ils ſont plûtoſt de Logique que de Geometrie.

AXIOME. On appelle ainſi une propoſition ſi claire qu'elle n'a pas beſoin de preuve : comme; *Que le tout eſt plus grand que ſa partie.* Voir la Logique IV. Part. Chap. VI.

DEMANDE. On ſe ſert de ce mot quand on a quelque choſe à faire, qui eſt ſi facile qu'on a pas beſoin de preuve pour demontrer qu'on a fait ce que l'on vouloit faire : comme; *Décrire un Cercle d'un intervale donné.*

DEFINITION. Ce qu'on appelle de ce nom en Geometrie eſt la determination d'un mot qui pourroit former diverſes idées, à une idée ſi claire & ſi diſtincte qu'elle revienne toûjours dans l'eſprit lorſqu'on ſe ſert de ce mot : comme; *On appelle Parallelogramme une figure dont les coſtez oppoſez ſont paralleles.* Voyez l'Art de penſer I. Part. Chap. XI.

THEOREME. On nomme ainſi une propoſition dont il faut démontrer la verité : comme; *que le quarré de la baze d'un angle droit eſt égal aux quarrez des deux coſtez.*

PROBLEME. C'eſt auſſi une propoſition qu'il faut démontrer; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe, & prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire : comme; *Faire paſſer par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.*

LEMME. C'eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent. On en peut voir des exemples au commencement des Livres VI. X. & XI.

COROLLAIRE

COROLLAIRE. C'eſt une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre precedente, on en peut voir un grand nombre dans le Livre IX.

Mais il faut remarquer, que pour mieux faire voir la dependance qu'avoient pluſieurs propoſitions d'une ſeule qui en étoit comme le principe & le fondement, on a quelquefois mis en Corollaire ce qu'on auroit pû mettre en Theoreme, ſi on avoit voulu.

Et pour la même raiſon, il y a de certains Theoremes à qui on a donné le nom de *Propoſition fondamentale*; parce que toutes les propoſitions d'une certaine matiere en dépendent. On en peut voir des exemples dans les Livres VI. VIII. X. XI.

Explication de quelques Notes.

QUOIQUE ces Notes ſoient expliquées chacune en ſon lieu; neanmoins on a cru les devoir encore mettre icy, afin de les faire mieux entendre

\+ *Plus*; ainſi 9 + 3, c'eſt à dire; neuf plus trois.

— *Moins*: ainſi 14 — 2, c'eſt à dire; quatorze moins deux.

〓 *Marque de l'égalité*; ainſi 9 + 3 〓 14 — 2. c'eſt à dire; neuf plus trois eſt égal à quatorze moins deux.

:: Ces quatre points entre deux termes devant, & deux termes aprés marquent que ces quatre termes ſont proportionels ou arithmetiquement, on geometriquement.

Ainſi, Arithmetiquement 7. 3 :: 13. 9.

Et Geometriquement 6. 2 :: 12. 4.

÷ Ces mêmes quatre points avec une ligne qui les coupe marquent la proportion continüe; ainſi ÷ 3. 9. 27. c'eſt à dire, 3 eſt à 9; comme 9 eſt à 27.

Deux lettres enſemble comme *bd*, marquent quelquefois une grandeur de deux dimenſions, comme un plan dont la longueur ſoit *b* & la largeur *d*. Mais d'autres fois

SCD LYON 1

ce n'eſt qu'une ligne dont ces deux lettres marquent les deux extremitez ; ce qu'il eſt aiſé de diſcerner par le ſujet que l'on traite.

Les livres ſont diviſez en nombres par des chiffres qui ſont en marge : & c'eſt ſeulement à cela qu'on a égard dans les citations & les renvois à quelques points des livres precedens ; le premier chiffre, qui eſt romain marquant le livre ; & le ſecond qui eſt Arabe, marquant le nombre de ce livre. Ainſi V. 29. veut dire *le vingt-neuviéme nombre du livre cinquiéme.*

Que ſi l'endroit où l'on renvoie eſt du même livre, on cite quelquefois un tel Theorême, ou un tel Lemme, ou bien le nombre precedent avec cette marque S. qui veut dire *ſupra* ; comme S. 15. c'eſt à dire, *cy-deſſus, nombre* 15.

TABLE

De ce qui eſt traité dans chaque Livre.

On pourroit dire beaucoup de choſes ſur l'ordre qu'on a ſuivy dans ces Elemens, & pour faire voir qu'il eſt beaucoup plus naturel qu'aucun autre ait jamais obſervé dans ces matieres. Mais on aime mieux en laiſſer le jugement à ceux qui les liront, & l'on ſe contente d'en repreſenter le plan en faiſant voir de ſuite ce qui eſt traité dans chaque Livre.

LIVRE PREMIER. *Des grandeurs en General, & des quatre Operations, Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer entant qu'elles ſe peuvent appliquer à toutes ſortes de grandeurs.* Page 1

SCD LYON 1

LIVRE II. *De la Raiſon & Proportion Geometriques.* Page 25
LIVRE III. *De la Raiſon compoſée, où l'on fait voir auſſi comment on peut faire ſur les Raiſons les quatre operations communes, Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer* Page 60
LIVRE IV. *Des Grandeurs commenſurables & incommenſurables.* Page 75
LIVRE V. *De l'étendüe. De la ligne droite & circulaire. Des droites perpendiculaires & obliques.* Page 123
LIVRE VI. *Des lignes paralleles.* Page 147
LIVRE VII. *Des lignes terminées à une circonference,* où il eſt parlé, *Des Sinus, & de la proportion des arcs de divers cercles à leurs circonferences, & du paralleliſme des lignes circulaires.* Page 164
LIVRE VIII. *Des Angles rectilignes.* Page 188
LIVRE IX. *Des Angles qui ont leur ſommet hors le centre du cercle, dont les arcs ne laiſſent pas de les meſurer.* Page 205
LIVRE X. *Des Lignes proportionelles.* Page 235
LIVRE XI. *Des lignes reciproques.* Page 256
LIVRE XII. *Des Figures en general conſiderées ſelon leurs angles & leurs coſtez.* Page 299
LIVRE XIII. *Des Triangles & Quadrilateres conſiderez ſelon leurs coſtez & leurs angles.* Page 319
LIVRE XIV. *Des Figures Planes conſiderées ſelon leur aire; c'eſt à dire ſelon la grandeur des ſurfaces qu'elles contiennent. Et premierement des Rectangles.* Page 340
LIVRE XV. *De la meſure de l'aire des Parallelogrammes, des Triangles & autres Polygones.* Page 364

SOLUTION

d'un Probléme d'Arithmetique appellé

LES QUARREZ MAGIQUES. 387

EXTRAIT DU PRIVILEGE DV ROY.

PAR Grace & Privilege du Roy, donné à Chaville, le 23. Juillet 1683. Signé par le Roy en son Conseil, JONQUIER, & scellé. Il est permis à GUILLAUME DESPREZ, Marchand Libraire à Paris, de rimprimer faire rimprimer, vendre & debiter dans tous les lieux de l'obeïssance de sa Majesté, un Livre intitulé *Nouveaux Elemens de Geometrie*, avec les corrections, changemens & augmentations qui y ont esté faites, durant le temps & espace de dix ans, à compter du jour qu'ils seront achevez d'imprimer la premiere fois en vertu desdites Lettres de Privilege, avec deffenses à toutes personnes de quelques qualité & condition qu'ils soient, Libraires, Imprimeurs, ou autres, de le rimprimer faire rimprimer, vendre ny debiter sous quelques pretextes que ce soit à peine de trois mil livres d'amande, de confiscation des Exemplaires contre-faits, & de tous depens dommages & interests, ainsi qu'il est porté plus au long dans lesdites Lettres de Privilege.

Registré dans le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, le 26. jour de Iuillet 1683.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois en vertu du present Privilege, le 1. Septembre 1683.

FAUTES A CORRIGER.

PAge 40. lign. 16. au lieu de C. G. lisez G. C

Page 45. lign. 18. au lieu de $\frac{F-C}{F}$ lisez $\frac{B-C}{B}$

Lign. 19. au lieu de $\frac{F-G}{G}$ lisez $\frac{F\ G}{F}$

au lieu de $\frac{F}{F}$ moins $\frac{G}{G}$ lisez $\frac{F}{F}$ moins $\frac{G}{F}$

Page 48. lign 20. au lieu de entre celles, lisez entre elles.

Page 50 lign. 20 au lieu de galement continuees lisez également contenües.

Page 63 lign. 25 au lieu de $\frac{B\ m}{n\ n}$ :: b n. c m. lisez $\frac{B\ m}{c\ n}$ :: b n. c m.

Page 64 lign. 5. au lieu de $\frac{B\ G+C\ F}{C\ G}$ lisez $\frac{B\ G-C\ F}{C\ G}$

Page 67 lign. 8 au lieu de rrison, lisez raison.

lign. 12 au lieu de l'antecedent de la raison, lisez l'antecedent de la seconde.

lign. 27 au lieu de $\frac{B}{c}\ \frac{c}{d}\ \frac{d}{f}\ \frac{f}{g}\ \frac{g}{h}\ \frac{B}{h}$

Page 72 lign. 17 au lieu de raison doublée leurs racines, lisez raison doublée de leurs racines.

Page 81 lign. 31 au lieu de multipliez, lisez multiples.

Page 84 lign. 15 au lieu de multiplié, lisez multiple.

Page 202 lign. 32 au lieu de k. c x. lisez k. x c

Page 203 lign. 5 au lieu de *m n p.* lisez *m p n*

Page 279 lign. 35 au lieu de angles, lisez arcs

Page 354 lign. 35 au lieu de $bb = cc - dd - dy$ lisez $bb = cc - dd - 2dy$

Page 355 lign. 15 au lieu de plus le rectangle, lisez plus deux rectangles.

Page 357 lign. 33 au lieu de du decagone, lisez du pentagone.

lign. 34 au lieu de le quarré du pentagone, lisez le quarré du costé du pentagone.

Page 373 lign. 18 au lieu de *b c m n* :: $zn+fp$. lisez *b c m n* :: $c+f$. $p+n$

lign. 20 au lieu de *b c m n* :: $c+b$. $n+m$.

NOUVEAUX

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

DES GRANDEURS EN GENERAL, ET DES QUATRE OPERATIONS, Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer, entant qu'elles ſe peuvent appliquer à toutes ſortes de grandeurs.

SUPPOSITIONS GENERALES.

I. TOVTES *les Sciences ſuppoſent des connoiſſances naturelles, & elles ne conſiſtent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous ſçavons naturellement.*

AINSI *quoy qu'il ſemble que ce ſoit contre le vray ordre des ſciences de ſuppoſer dans les ſuperieures, ce qui ne ſe doit traitter que dans les inferieures, comme qui ſuppoſeroit dans la Geometrie, ce qui ne s'apprendroit que dans l'Aſtronomie; neanmoins ce n'eſt point contre cet ordre que de ſuppoſer dans une ſcience ſuperieure*

ce qui regarde l'objet de l'inferieure, lors que nous ne supposons que ce qui se peut sçavoir par la seule lumiere naturelle sans l'aide d'aucune science.

C'EST POURQUOY *ayant entrepris de traiter icy de la quantité ou grandeur en general, entant que ce mot comprend l'étenduë, le nombre, le temps, les degrez de viteſſe, & generallement tout ce qui se peut augmenter en ajoûtant ou multipliant ; & diminuer en ſouſtrayant ou diviſant, &c. je ne feray point de difficulté de ſuppoſer qu'on ſçait de certaines choſes qui ſemblent appartenir à la ſcience des nombres qu'on appelle Arithmetique, ou à la ſcience de l'étenduë qu'on appelle Geometrie ; parce que je ne ſuppoſeray rien qu'on ne puiſſe ſçavoir ſans l'aide de l'Arithmetique ou de la Geometrie pour peu d'attention qu'on y faſſe, ou qu'on y ait déja fait.*

PREMIERE SUPPOSITION.

II. JE ſuppoſe donc premierement qu'on ſçache ajoûter & multiplier de petits nombres, comme que 4 & 5 font 9, que 3 fois 5 ſont 15, &c.

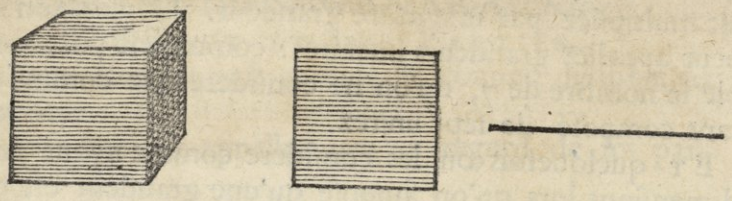
SECONDE SUPPOSITION.

III. SECONDEMENT qu'on ſçache que c'eſt la meſme choſe dans la multiplication de commencer par lequel on veut des deux nombres que l'on multiplie : comme que 3 fois 5, eſt la meſme choſe que 5 fois 3, que 4 fois 6, eſt la meſme choſe que 6 fois 4.

TROISIE'ME SUPPOSITION.

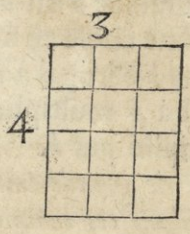
IV. JE ſuppoſe en troiſiéme lieu, que l'on ſçache que ce qu'on appelle corps, eſpace, étenduë, (car tout cela ſignifie la meſme choſe) à trois dimenſions, longueur, largeur, & profondeur. Et que quand on les conſidere toutes trois ; c'eſt alors que cette ſorte de grandeur s'appelle proprement corps ou Solide. Que quand on n'en conſidere que deux, ſçavoir la longueur & la largeur, on l'appelle alors Surface. Et que quand on n'en conſide qu'une, ſçavoir la longueur, on l'apppelle alors Ligne.

SCD LYON 1



QUATRIEME SUPPOSITION.

JE ſuppoſe en quatriéme lieu, que la multiplication & la diviſion ſe peuvent appliquer à toutes grandeurs, & non ſeulement aux nombres. Car par exemple dans l'étenduë on appelle multiplier la longueur par la largeur, lors qu'ayant un morceau de terre de 4 perches de longueur & 3 de largeur, on dit que ce morceau de terre a 12 perches de ſurface. Et au contraire, on appelle diviſer, lors que ſçachant par exemple quel eſt le contenu d'un morceau de terre, comme qu'il eſt de 12. perches, & ſçachant auſſi quelle en eſt la longueur, comme de 4 perches, on en cherche la largeur qui ſe trouvera eſtre de 3 perches. On pourroit encore donner une autre notion de la multiplication & de la diviſion par rapport à l'unité. Mais celle-là ſuffit pour ce que nous avons à faire, & l'autre ne ſe pourroit bien expliquer qu'en ſuppoſant des choſes dont nous ne parlerons que dans la ſuite. V.



CINQUIEME SUPPOSITION.

JE ſuppoſe en cinquiéme lieu, que l'on ſe puiſſe mettre dans l'eſprit que ce qu'on appelle les trois dimenſions dans les corps s'applique par accommodation à toutes les autres grandeurs, & meſme aux nombres. VI.

CAR on les conſidere quelquefois comme n'ayant qu'une dimenſion lors qu'on ne ſuppoſe point qu'on les

ait multipliez par une autre grandeur. Et alors on les peut appeller grandeurs lineaires: comme eſt par exemple le nombre de 7, qu'on ne conſidere que comme eſtant compoſé de ſept unitez.

Et quelquefois on les conſidere comme ayant deux dimenſions lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de deux lineaires; & alors on les peut appeller grandeurs planes. Comme eſt par exemple le nombre de 12, lors qu'on le conſidere comme eſtant né de la multiplication de 3 par 4. : : : :
. . . .

Et enfin on les conſidere comme ayant trois dimenſions lors qu'on ſuppoſe qu'une grandeur eſt née de la multiplication de trois grandeurs lineaires, ou d'une plane qui en a desja deux, par une lineaire. Et alors on peut appeller ces grandeurs ſolides. Comme eſt par exemple le nombre de 24, quand on le conſidere comme né de la multiplication de ces trois nombres 2. 3. 4, parce que 2 fois 3 font 6, & 4 fois 6 font 24.

SIXIEME SUPPOSITION.

VII. Je ſuppoſe enfin qu'on s'accoûtume à concevoir generalement les choſes en les marquant par des lettres ſans ſe mettre en peine de ce qu'elles ſignifient, puis qu'on ne s'en ſert que pour conclure que *b* eſt *b*, que *c* eſt *c*, ou ce qui eſt pris pour la meſme choſe en matiere de grandeur, ſur tout en general, que *b* eſt égal à *b*, & *c* à *c*, ou que *b* multiplié par *c* eſt égal à *b* multiplié par *c*, ou ſelon la 2e Suppoſition à *c* multiplié par *b*.

CETTE *remarque eſt de grande importance. Car on ne feroit que ſe broüiller ſi dans ces commencemens qui doivent eſtre tres-ſimples on vouloit appliquer ce qu'on traite generalement à des exemples particuliers dont la connoiſſance dépendroit d'autres principes. Et de plus, l'une des plus grandes utilitez de ce traité, eſt d'accoûtumer l'eſprit à concevoir les choſes d'une maniere ſpirituelle ſans l'aide d'aucunes images ſenſibles, ce qui ſert beaucoup à nous rendre capables de la connoiſſance de Dieu & de noſtre ame.*

PRINCIPES GENERAUX.

Du Tout et des Parties.

Toute grandeur eſt conſiderée comme diviſible en ſes parties. VIII.

La grandeur eſt appellée *tout* au regard de ſes parties. IX.

Lors qu'une partie de la grandeur eſt contenuë preciſément tant de fois dans ſon tout, comme 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c. elle s'appelle *partie aliquote*, ou ſimplement *aliquote*. X.

On dit auſſi qu'elle en eſt *la meſure*; parce qu'elle la meſure juſtement eſtant priſe autant de fois qu'il faut. XI.

Ainſi 3 eſt partie aliquote de 9, parce qu'il y eſt trois fois; 5, partie aliquote de 20, parce qu'il y eſt 4 fois.

Quand les parties aliquotes d'une grandeur ſont autant de fois dans leur tout que les parties aliquotes d'une autre grandeur dans le leur, elles ſont appellées *aliquotes pareilles*. Ainſi 3 & 4, ſont les aliquotes pareilles de 9 & de 12, parce que 3 eſt autant de fois dans 9, que 4 dans 12, l'un & l'autre y eſtant 3 fois. XII.

Le tout eſt meſure à ſoy-même, parce que toute grandeur eſt contenuë une fois dans ſoy-même. XIII.

On appelle *portion* toute partie aliquote ou non aliquote. Ainſi 4 eſt une portion de 13; 5 de 7. XIV.

AXIOMES.

De l'Egalité et Inegalité.

Le tout eſt plus grand que ſa partie. XV.

Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. XVI.

Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles. XVII.

Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous ſont égaux. XVIII.

Si de grandeurs égales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront égaux. XIX.

Si de grandeurs inégales on en oſte d'égales, les reſtes ſeront inégaux. XX.

SCD LYON 1

XXI. Si à grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les tous seront inégaux.

XXII. Les aliquotes pareilles de grandeurs égales sont égales. Par exemple, si *b* est égal à *c*, le tiers de *b* sera égal au tiers de *c*, cela est manifeste.

XXIII. Et par la mesme raison deux grandeurs sont égales quand leurs aliquotes pareilles sont égales. Si le tiers de *b* est égal au tiers de *c*, *b* est égal à *c*, car *b* est égal à ses trois tiers, & *c* aux trois siens. Or si un tiers est égal à un tiers, les trois tiers sont égaux aux trois tiers : puis que ce n'est qu'ajoûter choses àgales à choses égales. Donc, &c.

XXIV. On peut marquer ainsi qu'une grandeur est égale à une autre, comme que *b* est égal à *c*, $b \sqsupset c$.

DES QUATRE OPERATIONS.

AJOUTER, &c.

ADDITION.

XXV. Ajoûter, ou *Addition*, c'est mettre deux ou plusieurs grandeurs ensemble, & en faire comme un tout qui s'appelle *somme*.

Cela s'exprime ainsi *b*, plus *c*, & se marque ainsi $b + c$.

SOUSTRACTION.

XXVI. Soustraire, ou *Soustraction*, c'est retrancher une moindre grandeur d'une plus grande. Et ce qui resulte de là s'appelle *reste* ou *difference*. Car ce qui reste de la plus grande est ce en quoy la plus grande surpassoit la plus petite. Si de 5 je retranche 3, reste 2, & 2 est la difference de 5 à 3.

La Soustraction s'exprime ainsi, *b* moins *c*, & se marque ainsi $b - c$.

MULTIPLICATION.

XXVII. Multiplier ou *Multiplication*, c'est quand ayant deux grandeurs comme *b* & *c*, je fais que ce que l'unité est à l'une des deux, l'autre l'est à ce qui resulte de la Multiplication, qu'on appelle *produit*.

Une toise est à 3 toises, ce que 4 toises sont à 12; Et ainsi 12 toises est le *produit* de 3 toises multipliées par 4.

XXVIII. Cela s'exprime ainsi quand on ne se sert que de let-

SCD LYON

tres b en c, ou b par c; Il y en a qui le marquent ainsi $b \times c$; mais il est plus court de les mettre seulement ensemble bc, & nous ne nous servirons que de ce dernier.

Il faut remarquer qu'une grandeur marquée par un seul caractere comme b, ou c, s'appelle grandeur lineaire, selon la 5e Supposition. Que quand on les joint ensemble en mettant bc, cela ne veut pas dire que l'une soit ajoûtée à l'autre (ce qu'il faudroit marquer par $b + c$, b plus c,) mais que l'une est multipliée par l'autre, d'où naist ce qu'on appelle *produit*.

Que s'il ny a eu que deux grandeurs lineaires qui ayent esté multipliées l'une par l'autre, *ce produit* s'appelle *grandeur plane* ou *plan*. XXX.

Et les deux grandeurs lineaires d'où ce plan a esté produit, s'appellent *ses deux dimensions*, ou ses deux costez. XXX.

Et si c'est la mesme grandeur lineaire qui a esté multipliée par soy-mesme, comme si b en b a fait bb, ce plan s'appelle *quarré*. Et cette grandeur lineaire *sa racine*. On marque quelquefois le quarré ainsi $b^{q.}$ c'est à dire b quarré, ou $b^{2.}$ c'est à dire b de deux dimensions. XXXI.

Que si trois grandeurs lineaires sont multipliées l'une par l'autre, comme b en c, & bc en d. ce qui fait bcd, ou ce qui est la mesme chose si une grandeur plane, comme bc est multipliée par une lineaire, comme par d, ce qui fait aussi bcd, ce produit s'appelle *solide*, ou une grandeur à 3 dimensions. XXXII.

Et si c'est une mesme grandeur qui est multipliée 2 fois par elle-mesme, comme b en b, & bb en b, ou ce qui est la mesme chose si un quarré comme bb est encore une fois multiplié par b sa racine, ce qui fait bbb, ce solide s'appelle *cube*, & b la racine de ce cube. XXXIII.

On marque quelquefois le cube ainsi $b^{c.}$ c'est à dire b cube, ou $b^{3.}$ c'est à dire b de trois dimensions.

DIVISION.

Diviser ou *division*, c'est lors qu'ayant une grandeur qui s'appelle *diviseur*, parce qu'elle en doit diviser une XXXIV.

autre, qui s'appelle dividende, on fait que comme le *diviseur* est au *dividende*, l'unité soit à ce qui naist de la division qu'on appelle *quotient*.

Afin que 3 divise 12, il faut que je trouve un nombre à qui l'unité soit comme 3 est à 12, & ce nombre est 4. car 3 est quatre fois dans 12, comme l'unité est quatre fois dans 4.

La division s'exprime ainsi $b\,c$ divisé par p; & se marque ainsi $\frac{b\,c}{p}$ & cela s'appelle *quotient*, comme j'ay desja dit; & la grandeur de dessus est le *dividende* ou *grandeur à diviser*, & celle de dessous le diviseur.

C'est presque toûjours une grandeur de plusieurs dimensions qu'on divise par une grandeur de moins de dimensions. Car la division est opposée à la multiplication, comme la soustraction à l'addition, d'où vient que la multiplication du diviseur & du quotient fait une grandeur égale à la grandeur à diviser; parce que la multiplication refait ce que la division avoit défait. Et d'où vient aussi par la mesme raison que si on veut multiplier une grandeur divisée par le diviseur même, on n'a qu'à oster le diviseur, & la grandeur à diviser demeurant seule, sera le produit. Ainsi le produit de $\frac{b\,c}{g}$ en g est $b\,c$.

XXXV. La division est de peu d'usage dans le traité de la grandeur en general, parce qu'on ne sçauroit d'ordinaire déterminer un quotient qu'en descendant à quelque espece de grandeur, comme l'étenduë ou le nombre.

Il n'y a qu'une rencontre où on le peut, qui est lors que le mesme caractere se trouve dans la grandeur à diviser & dans le diviseur. Car alors ostant ce caractere de l'un & de l'autre, ce qui restera sera le quotient.

Ainsi ayant $\frac{b\,c}{b}$ le quotient sera c.

Ayant $\frac{b\,c\,d}{b\,c}$ le quotient sera d.

Ayant $\frac{b\,c\,d}{b}$ le quotient sera $c\,d$.

DES GRANDEURS
INCOMPLEXES ET COMPLEXES.

XXXVI. Outre ce que nous avons remarqué que l'on pouvoit considerer les grandeurs comme n'ayant qu'une dimension,

sion ; ou en ayant plusieurs : on peut encore considerer toutes ces sortes de grandeurs lineaires, planes, ou solides comme incomplexes, ou comme complexes.

JE les appelle *incomplexes* quand on considere une grandeur d'une ou de plusieurs dimensions à part, comme b, ou $c\,d$, ou $m\,n\,o$, sans y rien ajoûter ou en rien oster. XXXVII.

ET je les appelle *complexes* quand on y en joint d'autres de mesme genre par un *plus* ou un *moins*, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur se doit prendre plusieurs fois, comme $b + c$, ou $b + c + d$, ou $b + f - g$, ou $b\,c + f\,g$, ou $b\,c + f\,g - m\,n$. XXXVIII

Ou par des chiffres $3\,b$.

Or comme il y a quelque difficulté un peu plus grande pour faire les operations dont nous venons de parler sur les grandeurs complexes, nous en donnerons les principes & les regles.

PRINCIPES
POUR FAIRE LES QUATRE OPERATIONS SUR LES GRANDEURS COMPLEXES.

1. CHAQUE grandeur incomplexe dont la complexe est composée se peut appeller *terme*. XXXIX.

2. LE plus & le moins sont appellez *signes*. XL.

LE plus $+$ *signe affirmatif*, le moins, $-$ *signe negatif*.

3. PAR tout où n'est point le signe negatif, l'affirmatif est sous-entendu. Ainsi $b + c$, vaut $+ b + c$. Mais il seroit inutile de marquer le plus au commencement. XLI.

4. LE plus & le moins d'une même grandeur ou terme sont égaux à rien, ou valent zero. Car l'un ostant ce que l'autre a mis, ils ne demeure rien. Ainsi $b - b$, ce n'est rien, $b + c - c$. ne vaut que b. Cela est aussi important que facile. XLII.

5. LORS que le même terme est plusieurs fois repeté dans une grandeur complexe, si c'est toûjours avec le mesme signe, soit affirmatif, soit negatif, on peut ne le mettre qu'une fois avec son mesme signe, en marquant par un chiffre combien il doit estre pris de fois. Ainsi pour $b + c + c + c$, on peut mettre b plus $3\,c$, ou $b + 3\,c$: au XLIII.

SCD LYON 1

lieu de $b - g - g - g$, on peut mettre b moins $3\,g$, ou $b - 3\,g$.

XLIV. 6. Mais si la même grandeur ou terme est avec des signes divers, on peut alors selon le principe 4, oster ce terme de la grandeur complexe autant de fois qu'il est avec un plus & avec un moins. Ainsi $b + c + c - c - c$, ne vaut que b, parce que c est autant de fois osté que mis, & ainsi il ne reste rien. Que s'il y avoit un *plus* davantage, comme $b + c + c - c$, alors il le faudroit laisser une fois avec *plus* $b + c$, & de même s'il y avoit un moins davantage.

ADDITION
DES GRANDEURS COMPLEXES

XLV. Pour ajoûter une grandeur complexe, comme $b + c$, à une autre grandeur ou complexe comme $m + c$, ou incomplexe comme m, il ne faut qu'y joindre la grandeur qu'on veut ajoûter & en conserver tous les signes, en observant toûjours que le signe affirmatif est sous entendu où il n'y en a point.

A $b + c.$
ajoûter $m + n.$ } Somme $b + c + m + n.$

A $b + c.$
ajoûter $m - n.$ } Somme $b + c + m - n.$

XLVI. Que s'il y a des chiffres, il les faut laisser comme on les trouve.

A $2\,b + 3\,c.$
ajoûter $3\,m + 4\,n.$ } Somme $2\,b + 3\,c + 3\,m + 4\,n.$

XLVII. La somme estant trouvée, si le même terme s'y trouve plusieurs fois, on peut pratiquer ce qui a esté dit dans le principe 5 & 6. Ce qui soit dit une seule fois pour toutes les autres operations.

SOUSTRACTION
DES GRANDEURS COMPLEXES.

XLVIII. Pour soustraire une grandeur complexe d'une autre grandeur ou complexe ou incomplexe, il ne faut que l'y joindre en changeant tous les signes de la grandeur qu'on soustrait, & observant toûjours que le signe affirmatif

SCD LYON 1

est sous-entendu où il n'y en a point.

De $b+c$. } reste $b+c-m-n$.
ôster $m+n$. }

De $b+c$. } reste $b+c-m+n-o$.
ôster $m-n+o$. }

Il n'est pas difficile de juger pourquoy on change le *plus* sous-entendu en *moins* dans le premier terme de la grandeur à soustraire : car c'est en cela même que consiste la soustraction. Mais d'abord on est surpris de ce qu'il faut changer les signes de *moins* en *plus* ; car au lieu que la Soustraction doit faire la grandeur moindre qu'elle n'étoit, on la rend plus grande par là.

Cela est facile à comprendre quand ce que l'on doit soustraire, a d'abord un *plus* & puis un *moins*. Comme si de b je veux ôster $p-n$; car $p-n$ estant moins que p. En ostant p j'oste trop, & ainsi ayant osté p, parce qu'on a trop osté, il faut ajoûter n, qui est ce qu'on a osté de trop.

Mais quand il n'y auroit dans ce qu'on veut ôter qu'une grandeur avec le signe de *moins* : il faut toûjours la mettre par le signe de *plus*, comme si de b, j'en voulois ôster $-n$, je devrois mettre $b+n$.

Car ce qui trompe en cela, c'est qu'ajoûter *moins*, c'est ôster & retrancher *moins*, c'est ajoûter. Ajoûter au bien d'un homme une dette passive de mille francs, qu'il croit avoir payée, ce n'est pas augmenter son bien, c'est le diminuer de mille livres, & en retrancher une dette passive de la mesme somme en la payant pour luy, ce n'est pas diminuer son bien, c'est l'augmenter de mille francs. Il ne faut donc pas s'étonner si dans l'Addition à b, ajoûtant $-n$, je ne change point le *moins* en *plus*, mais le laissant comme il estoit, cela fait $b-n$: de sorte que la somme est moindre, que n'estoit-ce à quoy je l'ay ajoûté, parce que je n'ay ajoûté qu'en apparence, mais j'ay retranché en effet.

Et au contraire dans la Soustraction, si de b je retranche $-n$, il faut que changeant le signe de *moins* en *plus*,

je mette $b + n$, ce qui fait un reſte plus grand, que ce dont j'ay retranché, parce que retrrancher un *moins*, c'eſt ne retrancher qu'en apparence & ajoûter en effet. On en peut apporter une preuve bien ſenſible dans les nombres. Je veux de 7 retrancher moins 2, au lieu de 7 je prends 9—2, qui luy eſt égal. Il faut donc qu'il reſte la meſme choſe, ſi de l'un ou l'autre je retranche 4—2. Or ſi de 9—2, je retranche—2, je le pourray faire, ou effaçant—2 de 9—2, ou en mettant + 2 apres 9—2; c'eſt à dire en mettant 9—2 + 2. Or de l'une ou de l'autre maniere il reſtera 9; car 2 eſtant par *plus* & par *moins* ſe reduit à zero. Il faut donc qu'il reſte la meſme choſe lors que de 7 on oſte—2. Et cela ne peut eſtre qu'en changeant le *moins* en *plus*, & mettant 7 + 2. Ce qui fait 9.

MULTIPLICATION
DES GRANDEURS COMPLEXES.

I. POUR multiplier une grandeur complexe par une autre complexe ou incomplexe, il faut faire autant de multiplications particulieres que chaque terme de la grandeur complexe peut eſtre comparé avec chaque terme de l'autre grandeur.

DE ſorte que multipliant le nombre des termes d'une grandeur à multiplier, avec le nombre des termes de l'autre, on a le nombre des multiplications partiales qu'il faut faire pour avoir la multiplication totale, ou le produit total.

II. AINSI lors qu'une des deux grandeurs n'a qu'un terme & que l'autre en a deux, parce qu'une fois deux ne ſont que deux, il ne faudra faire que deux multiplications partiales de chacun des deux termes d'une grandeur par le le terme unique de l'autre.

$$\left.\begin{matrix} b. \\ \text{En } c + d. \end{matrix}\right\} \text{produit } cb + db.$$

III. LORS que les deux grandeurs ont chacune deux termes, parce que deux fois deux ſont 4, il faudra faire 4 multiplications partiales pour avoir le produit total.

SCD LYON 1

$\left.\begin{matrix} b+c. \\ p+q. \end{matrix}\right\}$ produit $pb+pc+qb+qc$.

LORS que chacune a trois termes, parce que trois fois trois sont neuf, il faudra faire neuf multiplications qu'on pourra disposer trois à trois en cette sorte ; LIII.

$$\left.\begin{matrix} b+c+d. \\ p+q+r. \end{matrix}\right\} \begin{matrix} pb+pc+pd. \\ +qb+qc+qd. \\ +rb+rc+rd. \end{matrix}$$

& ainsi à l'infini.

LA même chose se fait quand on multiplie des grandeurs planes par des grandeurs lineaires, d'où naissent des grandeurs solides. LIV.

$\left.\begin{matrix} bd+pq. \\ s+t. \end{matrix}\right\}$ produit $sbd+spq+tbd+tpq$.

VOILA ce qu'il faut observer generalement dans toute multiplication des grandeurs complexes. Mais il y a une difficulté particuliere pour sçavoir quand il faut mettre les signes de *plus* ou de *moins* avant les produits des multiplications partiales. C'est ce qu'on apprendra par ces trois Regles. LV.

PREMIERE REGLE.

PLUS en *plus* fait *plus* ; c'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont chacun un *plus* exprimé ou sous-entendu, donne un produit qui doit avoir le signe de *plus*. Cela est sans difficulté, & les exemples qu'on a proposez le font assez voir. LVI.

SECONDE REGLE.

PLUS en *moins*, ou *moins* en *plus* donne *moins*. C'est à dire que la multiplication de deux termes dont l'un a *plus* & l'autre *moins*, donne un produit qui doit avoir le signe de *moins*. LVII.

$\left.\begin{matrix} b \\ p-q \end{matrix}\right\}$ $pb-qb$ parce que q a *moins* & b *plus* sous-entendu.

TROISIE'ME REGLE.

Moins en *moins* donne *plus* ; C'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont tous deux *moins* donne un produit qui doit avoir le signe de *plus*. LVIII.

$\left.\begin{matrix} b-d \\ p-q \end{matrix}\right\} bp-pd-bq+dq.$

RAISON DE CES TROIS REGLES.

Ce que nous avons dit pour montrer que dans l'addition on laiſſoit le *moins* comme on le trouvoit, au lieu que dans la ſouſtraction on changeoit le *moins* en *plus*, donnera un grand jour pour l'intelligence de ces trois regles, & ſur tout de la derniere qui paroiſt d'abord fort étrange.

Suppoſons que les deux grandeurs que l'on veut multiplier ſoient 5. & 3.

On en prend une, laquelle on veut qu'on appelle le multipliant, & l'autre eſt le multiplié. Suppoſons que 5 ſoit le multipliant, & 3. le multiplié.

Chacune peut avoir l'un des deux ſignes, le *plus* & le *moins* (+ ou —) ce qui fait 4. cas.

Le 1. cas eſt quand le multipliant a *plus*, & le multiplié a auſſi *plus*; c'eſt à dire quand par + 5 je multiplie + 3.

Le 2. cas, eſt quand le multipliant a *plus*, & que le multiplié a *moins*; c'eſt à dire quand par + 5 je multiplie — 3.

Le 3. cas, eſt quand le multipliant a *moins*, & que le multiplié a *plus*; c'eſt à dire quand par — 5 je multiplie + 3.

Le 4. cas, eſt quand le multipliant à *moins*, & que le multiplié à *moins* auſſi; c'eſt à dire quand par — 5 je multiplie — 3.

Il eſt queſtion de ſçavoir quel ſigne doit avoir le produit qui ſera toûjours 15; c'eſt à dire quand ce ſera + 15 ou — 15.

Or voicy ce me ſemble des remarques qui feront voir que dans le 1. cas qui appartient à la 1. regle, & dans le 4 qui appartient à la 3. regle, le produit aura *plus*; c'eſt à dire que ce ſera + 15 : Et que dans le 2. cas, & dans le 3. qui appartiennent tous deux à la 2. regle, le produit ſera par *moins*, c'eſt à dire que ce ſera — 15.

La 1. remarque eſt, que quand le multipliant a *plus*, comme dans les deux premiers cas, c'eſt multiplier par

plus, & qu'alors la multiplicaion se fait par voie d'addition, c'est à dire en ajoûtant le multiplié, (quel qu'il soit, affirmatif ou negatif) autant de fois qu'il y a d'unitez dans le multipliant.

Et que quand le multipliant à *moins*, comme dans les deux derniers cas, c'est multiplier par *moins*, & qu'alors la multiplication se fait par voye de soustraction; c'est à dire en ostant le multiplié, quel qu'il soit autant de fois, qu'il y a d'unitez, quoy que negativement dans le multipliant.

La 2. remarque est, que c'est le multiplié qui determine en quelque sorte le signe du produit: c'est à dire que le signe que doit avoir le multiplié dans la multiplication, soit en conservant celuy qu'il avoit auparavant, soit en le changeant en son oppose, sera celuy du produit.

La 3. qui est la suitte & l'application de ces deux-là, Que quand la multiplication se fait par voye d'addition, comme dans les deux premiers cas où le multipliant a *plus*, il faut observer pour le multiplié; ce qui s'observe dans l'addition, qui est de luy conserver son signe. Et ainsi dans les deux 1. cas, le produit doit avoir le mesme signe qu'avoit le multiplié avec la multiplication. D'où il s'ensuit que dans le premier cas ou le multiplié a *plus*, le produit a *plus* aussi. C'est pourquoy si par +5 je multiplie +3 le produit sera +15. Et que dans le 2. cas où le multiplié à *moins* le produit doit aussi avoir *moins*. Et c'est pourquoy, si par +5 je multiplie —3 le produit sera —15. Ce qui revient à ce qui a esté dit que si à 5 j'ajoûte —3 la somme sera 5—3; ce qui ne fait que deux.

Mais quand la multiplication se fait par voye de soustraction, comme dans les deux derniers cas, où le multipliant a *moins*, il faut observer pour le multiplié ce qui s'observe dans la soustraction pour la grandeur positive ou negative qu'on veut retrancher, qui est de changer son signe dans le signe apposé. Et ainsi dans ces

deux derniers cas le produit doit avoir le signe opposé à celuy qu'avoit le multiplié avant la multiplication. D'où il s'ensuit que le 3. cas où le multiplié a *plus*, le produit doit avoir *moins*; c'est à dire que si par —5 je multiplie +3 le produit sera —15. Et que de mesme dans le 4. cas où le multiplié a *moins*, le produit doit avoir *plus*; c'est à dire que si par —5 je multiplie —3 le produit sera +15; Car la multiplication se faisant par voye de soustraction, multiplier —3 par —5, c'est oster 5 fois —3. Or oster une fois —3, c'est mettre +3, comme il a esté dit sur le sujet de la soustraction, donc l'oster 5 fois, c'est mettre +15, ce qu'il falloit prouver.

LIX. *Cette maniere de concevoir la multiplication de moins en moins en la considerant comme faite par voie de soustraction, m'a donné moyen de resoudre la plus grande difficulté qu'on puisse comme je croy faire sur cela, & m'avoit fait croire que ce n'estoit que par accident, que moins par moins donnoit plus. C'est que je ne pouvois ajuster à cette sorte de multiplication, la notion la plus naturelle de la multiplication en general, qui est que l'unité (où determinée dans les nombres, ou arbitraire comme dans l'étenduë) doit estre au multipliant, comme le multiplié est au produit. Car cela est visiblement faux dans la multiplication de moins en moins, puisqu'il ne peut estre vray que l'unité soit a —5 comme —3 est à +15; parce qu'il faudroit pour cela que le second terme estant plus petit que le 1. le 4. fust aussi plus petit que le 3. au lieu qu'il est beaucoup plus grand. Ie ne voy point d'autre réponse à cela que de dire la multiplication de moins par moins, se faisant par voye de soustraction, au lieu que toutes les autres se font par voye d'addition, il n'est pas estrange que la notion des multiplications ordinaires ne convienne pas à cette sorte de multiplication qui est d'une autre genre que les autres, sans qu'il soit besoin d'en excepter la multiplication des fractions comme de $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{7}$. Car en quoy celle là est differente de celle des entiers, est que pour avoir le produit, il faut faire deux multiplications, celle du 1. Numerateur par le 2 ce qui donne* 10

ne 10 *pour numerateur du produit & celle du* 1 *deminateur par le* 2, *ce qui donne* 21 *pour le deminateur du produit. Mais l'une & l'autre se fait par voie d'addition ; car on prend le* 2 *numerateur autant de fois qu'il y a d'unitez dans le premier ; c'est à dire qu'on prend* 2 *fois, ce qui fait* 10. *Et on prend aussi le* 2 *denominateur autant de fois qu'il y a d'unitez dans le premier, c'est à dire qu'on prend* 7 3 *fois, ce qui fait* 21. *Et c'est par là qu'il arrive que l'unité, ou* $\frac{3}{3}$ *est à* $\frac{2}{3}$ *comme* $\frac{5}{7}$ *est à* $\frac{10}{21}$.

COROLLAIRE DE LA TROISIE'ME REGLE. LX.

C'EST sur la 3 regle qu'est fondée une invention fort aisée de trouver les multiplications des nombres depuis 5 jusqu'à 10.

Il ne faut que baisser les 10 doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille jusqu'à 10 ; comme si ce nombre est 8, en relever 2, & de l'autre de même autant qu'il s'en faut que l'autre nombre n'aille jusqu'à dix ; comme si ce nombre est 7, en relever 3 : cela fait, il faut conter autant de dixaines qu'il y a de doigts baissez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut. La raison de cela est qu'on ne fait en cela que multiplier

par $\left.\begin{matrix} 10.-2. \\ 10.-3. \end{matrix}\right\}$ X $\}$ 100—20—30+6. somme 56.

Car en baissant les doigts, on fait la premiere multiplication partiale qui donne dix dizaines.

En levant deux doigts d'une main on fait ce que doit faire la seconde multiplication partiale, qui est de + 10. par — 2, ce qui donne — 20 : car en levant deux doigts on oste deux dizaines.

En levant 3 doigts de l'autre main on fait encore ce que doit faire la troisiéme multiplication partiale, qui est de + 10 par — 3, ce qui donne — 30 : car en levant 3 doigts on oste trois dizaines.

Et enfin en multipliant les doigts levez d'une main par

ceux de l'autre, on multiplie —2 par —3, ce qui donne +6 par la raiſon que nous avons dite.

LXII. QUATRIESME REGLE.

QUAND les termes ſe trouvent avec des nombres, il faut multiplier les nombres, par les nombres, & les termes par les termes pour en avoir les multiplications partiales, en gardant les regles precedentes pour ce qui eſt des *plus* & des *moins*.

$3b \atop 5d \Big\} 15bd.$ $\quad 3b. \atop d. \Big\} 3bd.$

$3b+2d \atop 4p+3q \Big\} 12bp+8pd+9bq+6dq.$

DIVISION.

Elle n'a rien de particulier, ſinon lors que l'une des grandeurs incomplexes du diviſeur ſe trouve dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende* ; Car alors il la faudra effacer dans le diviſeur & dans toutes les grandeurs incomplexes du *dividende*.

Exemple $\frac{ba+ca+da}{f+a}$ le quotient plus abregé ſera $\frac{b+c+d.}{f}$

AVERTISSEMENT.

Comme ces 4 operations ſur les grandeurs complexes marquées par lettres, eſt une eſpece de jargon qui embaraſſe quand on n'y eſt pas accoûtumé, il eſt utile d'en propoſer pluſieurs exemples, où on obſervera les regles qu'on a données aux nombres 42. 43. 44.

EXEMPLES DE L'ADDITION.

SOMMES.

A $b+c$
 Ajoûter c $\Big\} b+2c.$

A $b+d$
 Ajoûter $b+c$ $\Big\} 2b+d+c.$

A $b-c$
 Ajoûter $d+c$ $\Big\} b+d.$

A $b-c+d$
 Ajoûter $d+c+g$ $\Big\} b+2d+g.$

A $-b+c-m$
 Ajoûter $d-m-c$ $\Big\} d-b-2m.$

A $b+7a$ / Ajoûter $-9a$ } $b-2a$.

A $b+7a$ / Ajoûter $+9a$ } $b+16a$.

A $b+9a$ / Ajoûter $b-7a$ } $2b+2a$.

EXEMPLES DE LA SOUSTRACTION.

RESTES.

De $b+d$ / Oſter $b-m$ } $d+m$.

De $b+d$ / Oſter $-c$ } $b+d+c$.

De $b+d$ / Oſter $c+d$ } $b-c$.

De $s-\omega$ / Oſter $s-a$ } $-\omega+a$ (ou) $a-\omega$.

De $b+c-d$ / Oſter $b+m+d$ } $c-m-2d$.

De $bb+cc+cb$ / Oſter $bb+cc-cb$ } $2cb$.

De $b+d$ / Oſter $b-d$ } $2d$.

De $b+7a$ / Oſter $+9a$ } $b-2a$.

De $b+9a$ / Oſter $b-7a$ } $+16a$.

De $d+b$ / Oſter $b+d$ } o.

EXEMPLES DE LA MULTIPLICATION.

PRODUITS.

Par $b+c$ / Mult. $b+c$ } $bb+cc+2bc$.

Par $b+c$ / Mult. $b-c$ } $bb-cc$.

Par $b-c$ / Mult. $b-c$ } $bb+cc-2bc$.

Par $b+c+d$ } $bm+cm+dm$.
Mult. m }

Par $b+c+d$ } $bb+bc+bd$.
Mult. b }

Par $b+c-d$ } $bb-cc-bd+cd$.
Mult. $b-c$ }

Par $b+c-d$ } $bb-cc-dd+2,dc$.
Mult. $b-c+d$ }

EXEMPLES DE LA DIVISION.

QUOTIENTS.

Dividende $bbcc$ } bb.
Diviseur cc }

Divid. $bcdf$ } bd.
Diviseur cf }

Divid. $ba+ca+da$ } a.
Diviseur $b+c-d$ }

Divid. $bb-aa$ } $b+a$.
Diviseur $b-a$ }

Divid. $ba+ca+da$ } $b+c+d$.
Diviseur a }

Divid. $bb+aa+2,ba$ } $b+a$.
Diviseur $b+a$ }

Divid. $bb-aa$ } $b-a$.
Diviseur. $b+a$ }

DES EQUATIONS.

LXIII. TOUTE égalité entre deux grandeurs se peut appeller *équation* : mais pour l'ordinaire on donne ce nom à l'égalité de deux grandeurs complexes, comme $bp+fg \eqsim mn+st$.

Ou au moins dont l'une est complexe, comme $b+c \eqsim d$.

Chacune de ces grandeurs égales peut estre appellée *membre de l'équation*.

LXIV. IL est souvent tres-utile de trouver des équations, & l'un des plus grands secrets pour les trouver est de pouvoir donner à une même grandeur diverses dénomina-

tions, parce que souvent une dénomination en fait voir l'égalité avec une autre grandeur qu'une autre dénomination n'auroit pas fait voir.

Ainsi aiant une grandeur comme b partagée en deux portions, comme c & d, on peut nommer chaque portion ou par son propre caractere, comme c, ou par le caractere du tout moins l'autre partie. Car il est bien visible que b estant égal à $c+d$ chaque partie est égale au tout moins l'autre partie, & qu'ainsi $c = b-d$. Et $d = b-c$.

Or il y a beaucoup de rencontres où il est plus avantageux de nommer une partie du nom du tout moins l'autre partie que de luy donner un nom propre. Comme au contraire il est quelquefois plus utile de donner un nom propre à ce qui est marqué par une grandeur moins quelque chose.

THEOREME.

LA plus importante observation touchant les Equations est celle-cy. LXV.

On peut transferer chaque terme d'un des membres d'une equation en l'autre sans en troubler l'égalité, pourveu qu'on en change les signes, c'est à dire que l'ostant d'un des membres où il estoit avec *plus*, on le mette dans l'autre avec *moins* ou au contraire. Par exemple,

$$b+d=f.$$

Je puis transporter d en l'autre membre en changeant de signe & mettant

$$b=f-d.$$

Et si au contraire on avoit

$$b-d=g.$$

On pourroit mettre

$$b=g+d.$$

Que si on transportoit tous les termes d'un membre dans l'autre membre en les changeant chacun de signe, le membre où on auroit transporté tous les signes seroit égal à rien, comme seroit celuy d'où on les auroit transportez. Car si

$b + d - f = p + q - r.$

$b + d - f - p - q + r =$ à zero.

Et si on ne laisse d'un coste qu'un terme avec un *moins*, cela fera que le membre où on aura transporté les autres termes sera égal à zero moins ce terme-là.

$b + d = f - g.$

$b + d - f = -g.$

C'est à dire sera moins que rien. Ce qui semble impossible à concevoir, quoy que cela ne soit pas sans exemple même dans le langage commun, puis qu'on dit d'un homme endebté qu'il s'en faut vingt mille écus qu'il n'ait un sou.

LXVI. La raison de tout cela n'est autre que les deux maximes de l'égalité.

Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous seront égaux.

Si de grandeurs égales on en oste d'égales, les restes seront égaux.

Car si $b - d = g.$

En ajoûtant d de costé & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour ajoûter d au membre où il est avec *moins*, je n'ay qu'à le retrancher; puis qu'aussi bien si je l'avois ajoûté en disant,

$b - d + d.$

$-d$ & $+ d.$ ne feroient rien par le 4e principe.

Et pour ajoûter d à l'autre membre où il n'est point du tout, il faut que je l'y mette avec *plus* en disant $g + d.$

Et par consequent ce transport d'un terme d'un membre en un autre en changeant le *moins* en *plus* ne fait qu'ajoûter choses égales à choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

Et si j'avois $b + d = f.$

En retranchant d de costé & d'autre ils demeureront égaux.

Or pour retrancher d du membre où il est avec un *plus* je n'ay qu'à l'oster tout à fait, puis qu'on ne peut pas mieux

SCD LYON 1

le retrancher qu'en le supprimant.

Et pour le retrancher du membre où il n'estoit point du tout, il faut l'y mettre avec un *moins*, en disant $f - d$.

Et par consequent ce transport d'un terme d'un membre à un autre en changeant le *plus* en *moins*, ne fait qu'oster choses égales de choses égales, ce qui ne trouble point l'égalité.

EXEMPLES.

De la Solution d'un Probleme par Equations.

On feint qu'une Mule allant avec une Asnesse se plaignoit d'estre trop chargée, & que la Mule luy dit; Si je t'avois donné un de mes sacs, nous en aurions autant l'une que l'autre: & si tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy. LXVII.

On demande combien chacune portoit de sacs. Et on le trouve ainsi.

Le nombre inconnu des sacs de la Mule soit appellé A. & de l'Asnesse B.

Par la premiere hypothese

$A - 1 = B + 1$.

Donc ajoûtant 1 de part & d'autre

$A = B + 2$.

Par l'autre hypothese.

$A + 1$ est égal à deux fois B — 1, c'est à dire à 2 B — 2.

Donc en mettant au lieu d'A, $B + 2$ qui luy est égal.

$B + 3 = 2B - 2$.

Donc ajoûtant 2 de part & d'aure

$B + 5 = 2B$.

Donc ostant un B de part & d'autre

$5 = B$.

C'est à dire que B, le nombre des sacs de l'Asnesse, est 5, & 7 celuy des sacs de la Mule.

Second Exemple.

Ayant rencontré des pauvres & leur voulant donner à chacun 5 sols, j'ai trouvé que j'en avois un de trop peu. LXVIII.

Et ainſi ne leur ayant donné qu'à chacun 4, il m'en eſt reſté 6. Combien y avoit-il de pauvres, & combien avois-je de ſols.

Soit le nombre des pauvres appellé A.

Par l'hypotheſe

$5A - 1 = 4A + 6$.

Donc ajoûtant 1. de part & d'autre

$5A = 4A + 7$.

Donc oſtant $4A$ de part & d'autre

$A = 7$.

Donc il y avoit 7 pauvres. Et j'avois 34 ſols.

Troisie'me Exemple.

LIX. N'ayant que des Carolus de 10 deniers & des pieces de 3 blancs de 15 deniers, faire 20 ſols en 20 pieces.

Soient appellez le ſol A.

Le Carolus $B = A - 2$ den.

La piece de trois blancs $C = A + 3$ den.

Multipliant B par la difference de C à A, c'eſt à dire prenant $3B$; & C par la difference de B à A, c'eſt à dire prenant $2C$.

Je dis que $3B + 2C$ valent $5A$.

Car $3B = 3A - 6$ den.

Et $2C = 2A + 6$ den.

Or plus & moins valent zero. Donc, &c.

Or 4 fois 5 valent 20

Donc 4 fois $3B$, c'eſt à dire $12B$, & 4 fois $2C$, c'eſt à dire $8C$ valent 20 A. Ce que l'on cherchoit.

Cette équation eſt le fondement d'une regle d'Arithmetique qu'on appellle la regle d'alliage.

SCD LYON 1

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

DE LA RAISON ET PROPORTION GEOMETRIQUES.

RIEN *n'a jamais eſté moins bien éclaircy dans toute la Geometrie, que la nature de ce qu'on appelle* Raiſon: *& l'Auteur de ces Elemens n'a jamais eſté fort ſatisfait de ce qu'il en a dit dans la premiere Edition de ce Livre. Mais un Gentilhomme Flamand nommé M. de Nonancourt, qui a beaucoup de lumieres, non ſeulement dans ces ſortes de Sciences, mais auſſi dans la Philoſophie & dans la Theologie, luy ayant fait voir un petit Traité Latin intitulé* Euclides Logiſticus, ſeu de Ratione Euclideâ, *il avoüe que cela luy a ouvert les yeux, & luy a fait concevoir des Notions beaucoup plus nettes touchant cette Matiere qu'il n'en avoit auparavant: & c'eſt pourquoy on trouvera que ce ſecond Livre & le troiſiéme ſont preſque tout changez.*

PLAN GENERAL
DES PROPORTIONS.

ON peut comparer ensemble deux grandeurs en deux differentes manieres.

L'UNE est, en considerant de combien l'une surpasse l'autre quand elles sont inégales, ce qui s'appelle *Difference*: comme si je dis que 2 est la difference de 7 à 5.

L'AUTRE est, en considerant un autre rapport qui s'appelle *Raison*, que nous expliquerons plus bas.

QUE si deux grandeurs ont entr'elles ou mesme difference, ou mesme raison que deux autres, cela s'appelle Proportion: mais quand c'est une égalité de difference, cela s'appelle Proportion Arithmetique.

ET quand c'est une égalité de Raisons, Proportion Geometrique.

MAIS parce qu'on n'a point d'égard dans la Geometrie à la Proportion Arithmetique, & que quand on parle absolument de Proportion on entend toûjours la *Geometrique*, c'est à celle-là que nous nous arrêterons; & nous tâcherons d'expliquer plus clairement que l'on ne fait d'ordinaire ce que c'est que Raison, qui est le fondement de la Proportion Geometrique.

SECTION PREMIERE.
DE LA RAISON.
DEFINITIONS.

LA quantité relative d'une grandeur comparée à une autre, est ce qu'on appelle *Raison*.

LA quantité relative de 12 à 8, est la Raison de 12 à 8.

DE B à C est la Raison de B à C.

LA Raison que l'on compare s'appelle *antecedent*; & celle avec qui on la compare, *consequent*.

Remarques pour mieux faire comprendre la nature de la Raison.

1. QUAND on considere une grandeur seule, on n'y considere que sa grandeur absoluë: ainsi en comptant tous les Soldats d'une Armée de 10000 hommes, en y trouvant

10000, je dis que c'eſt une Armée de 10000 hommes: Mais ſi je compare cette Armée avec une autre de 100000 ou de 4000, la notion de ſa grandeur change; car je la trouve petite comparée avec la premiere, & grande comparée avec la ſeconde. Or c'eſt ce que j'appelle *Quantité relative*, en quoy conſiſte ce que les Geometres appellent *Raiſon*.

II. Quoy que toute Raiſon demande deux termes, neanmoins la Quantité relative en quoy la raiſon conſiſte, convient proprement à l'antecedent, & non pas au conſequent; comme encore que la Paternité ſuppoſe le Pere & le Fils, neanmoins elle ne convient qu'au Pere & non au Fils; & la Filiation ne convient qu'au Fils & non au Pere.

III. Comme la Raiſon eſt une quantité, quoy que relative, toutes les proprietez de la quantité luy conviennent: c'eſt pourquoy une raiſon eſt égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raiſon.

IV. Rien ne peut mieux faire comprendre ce que c'eſt que Raiſon, que les fractions ou nombres rompus, qui ſe marquent par deux chiffres, avec une ligne entre deux, dont le plus haut, qui s'appelle numerateur, eſt comme l'antecedent; & le plus bas, qui s'appelle dénominateur, eſt comme le conſequent: car les nombres entiers ſignifient une quantité abſoluë, en ce que 3, par exemple, ſignifie trois unitez, 4 quatre unitez, &c. au lieu que dans les fractions le numerateur ne ſignifie que par rapport au dénominateur: De ſorte que trois fractions qui ont toutes le nombre 2 pour numerateur, & qu'on en cache le dénominateur, on ne ſçait ce que ce 2 veut dire; mais ſi on les découvre, & que ce ſoient $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{7}$, dans la premiere il ſignifiera deux tiers, dans la ſeconde deux cinquiémes, dans la troiſiéme deux ſeptiémes; & il faut remarquer que plus ce dénominateur eſt un petit nombre, plus la fraction eſt grande: & au contraire, car au lieu que 3 eſt un moindre nombre que 5, & 5 que 7, deux tiers eſt plus que deux cinquiémes, & deux

cinquiémes plus que deux ſeptiémes ; ce que nous dirons dans la ſuite eſtre la meſme choſe dans les Raiſons ; celles qui ont un meſme antecedent & divers conſequens eſtant d'autant plus grandes que leur conſequent eſt plus petit.

PREMIERE DIVISION.

TOUTE Raiſon eſt d'égalité ou d'inégalité. On appelle Raiſon d'égalité quand l'antecedent eſt égal au conſequent, comme la Raiſon de B à B, de 12 à 12, d'1 à 1 ; d'inégalité quand l'antecedent eſt plus grand ou plus petit que le conſequent, comme la Raiſon de 8 à 12, ou de 12 à 8.

AVERTISSEMENT.

☞ *Il ne faut pas confondre la Raiſon d'égalité avec l'égalité des Raiſons ; car deux Raiſons peuvent eſtre égales entr'elles, quoy que chacune ſoit une Raiſon d'inégalité.*

SECONDE DIVISION.

LA Raiſon d'inégalité ſe diviſe encore en celle qu'on appelle de *nombre à nombre*, & celle qu'on appelle *Raiſon ſourde*.

ON dit que deux grandeurs ont entr'elles une Raiſon de nombre à nombre, ou quand l'une eſt préciſément contenuë tant de fois dans l'autre ; comme la Raiſon du pied à la toiſe, la Raiſon de 4 à 12 ; ou au moins, quand quelques aliquotes de l'antecedent ſont préciſément un certain nombre de fois dans le conſequent, comme la raiſon d'une aulne à une toiſe ; parce que le poûce, qui eſt la 44e partie d'une aulne, eſt 72 fois dans la toiſe.

QUAND les grandeurs ont entr'elles une raiſon de nombre à nombre, on dit qu'elles ſont *commenſurables*, parce qu'elles ont quelque partie qui peut ſervir à l'une & à l'autre de commune meſure.

C'EST ce qui convient à tous les nombres qui ont tous au moins l'unité pour meſure commune.

ET c'eſt auſſi ce qui a fait que l'on appelle cette raiſon *de nombre à nombre*.

ET le plus court auſſi eſt d'exprimer ces raiſons par les

moindres nombres qui en ont une ſemblable, comme de dire que l'aulne eſt à la toiſe comme 44 à 72; c'eſt à dire comme 11 à 18.

La Raiſon ſourde, qui eſt oppoſée à celle-là, eſt quand deux grandeurs ont une certaine Raiſon entre elles, qui ne peut eſtre marquée par aucun nombre; parce que chacune ayant des parties aliquotes de plus petites en plus petites, à l'infiny: Il ne peut neanmoins arriver qu'aucune, quelque petite qu'on la prenne, meſure juſtement l'autre grandeur, c'eſt à dire qu'elle y ſoit preciſément; mais y il aura toûjours quelque reſte plus petit que cette aliquote.

Cela paroît d'abord incroyable, & neanmoins il y a demonſtration qu'il y a des lignes qui ſont incommenſurables à d'autres lignes, comme le coſté du quarré à la Diagonale.

DE LA COMPOSITION DES RAISONS.

Comme la Raiſon eſt une quantité ou grandeur, quoy que relative, tout ce qui convient à la quantité ou grandeur en general convient auſſi à la Raiſon.

Et ainſi comme deux grandeurs peuvent eſtre comparées enſemble, deux raiſons le peuvent eſtre auſſi: & alors, comme il y a quatre termes dans cette comparaiſon, le premier & le quatriéme qui ſont l'antecedent de la premiere Raiſon & le conſequent de la deuxiéme, s'appellent *extrémes*; & le deuxiéme & le troiſiéme qui ſont le conſequent de la premiere Raiſon & l'antecedent de la ſeconde, s'appellent *moyens*.

Que ſi conſiderant enſemble pluſieurs Raiſons le conſequent de la precedente eſt toûjours le meſme que l'antecedent de la ſuivante, ces Raiſons peuvent eſtre appellées continuës.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette comparaiſon de Raiſons, eſt que comme une grandeur comparée à une autre luy eſt égale ou inégale, & quand elle eſt inégale qu'elle eſt plus grande ou plus petite: Il

faut auſſi qu'une Raiſon comparée à une autre luy ſoit égale ou inégale, & quand elle eſt inégale qu'elle luy ſoit plus grande ou plus petite.

Et comme c'eſt dans cette comparaiſon de deux grandeurs que conſiſte la Raiſon d'égalité ou d'inégalité, il eſt clair encore que deux Raiſons eſtant comparées enſemble, en ſorte que l'une ſoit l'antecedent & l'autre le conſequent de cette comparaiſon, elles ont entr'elles une nouvelle Raiſon, ou d'égalité ſi elles ſont égales, ou d'inégalité ſi elles ſont inégales.

Or quand c'eſt la Raiſon d'égalité qui eſt entre deux Raiſons, c'eſt à dire quand deux Raiſons ſont égales, cela s'appelle proportion, ou proportion geometrique.

DEFINITION
de la Proportion Geometrique.

Ainsi ce qu'on entend par la *Proportion Geometrique*, ou par le mot de *Proportion* quand on n'y ajoûte rien, n'eſt autre choſe que l'égalité de deux Raiſons, qui conſiſte en ce que la quantité relative d'un antecedent comparé à ſon conſequent, eſt égale à la quantité relative d'un autre antecedent comparé auſſi à ſon conſequent.

La Proportion s'explique en diverſes manieres, c'eſt à dire qu'il y a diverſes façons de parler pour ſignifier que quatre grandeurs, comme B, C, F, G, ſont proportionnelles. On dit premierement que la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſiéme à la quatriéme; que B eſt à C comme F à G.

2. Que la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt égale à la Raiſon de la troiſiéme à la quatriéme.

3. Que la premiere a la meſme Raiſon à la ſeconde que la troiſiéme à la quatriéme; & pour abreger on ſe ſert de quatre points :: entre les deux Raiſons B C :: F G.

Definition.

Nous avons déja dit que comparant enſemble deux Raiſons, l'antecedent de la premiere & le conſequent de la ſeconde s'appellent extremes; & l'antecedent de la

seconde & le consequent de la premiere les moyens: Mais dans les Raisons égales les extremes & les moyens sont dits estre reciproques les uns aux autres ; c'est à dire que le premier & le quatriéme terme sont reciproques au deuxiéme & au troisiéme.

AVERTISSEMENT.

Nous *avons déja dit que la Raison estant une quantité, quoy que relative, comme deux grandeurs estant comparées l'une à l'autre font une Raison ; on peut aussi comparer deux Raisons l'une à l'autre, comme la Raison B à X. à la Raison C à X, & considerer quelles Raisons elles ont entr'elles ; & alors la premiere Raison (qui a son antecedent & son consequent) n'est que l'antecedent de cette nouvelle Raison que l'on cherche entre ces deux Raisons, & la seconde Raison en est le consequent ; & que pour mieux marquer il semble alors à propos de metre les consequens de ces Raisons que l'on compare au dessous de leurs antecedens, avec une petite ligne entre deux, comme on fait dans les Fractions en cette maniere.*

$$\frac{B}{X} \quad \frac{C}{X}$$

Or cela estant ainsi, ces deux Raisons considerées en cette maniere peuvent estre entre les deux premiers termes d'une position, dont les deux derniers seront ou deux grandeurs absoluës, comme si je dis, la Raison de B à X est à la Raison de C à X, comme B est à C.

$$\frac{B}{X} \quad \frac{C}{X} :: B\ C.$$

ou deux autres Raisons, comme si je dis, la Raison d'X à X est à la Raison de B à X, comme la Raison d'X à C est à la Raison de B à C.

$$\frac{X}{X} \quad \frac{B}{X} :: \frac{X}{C} \quad \frac{B}{C}$$

PROPORTIONS,

OU RAISONS EGALES NATURELLEMENT CONNUES.

On ne sçauroit mieux faire comprendre ce que c'est

que proportion ou égalité de Raisons, que par des exemples de proportions naturellement connuës, qui serviront aussi de principes pour connoistre celles qui ne se discernent pas si facilement.

I.

Toutes les Raisons d'égalité sont égales entr'elles; la Raison de B à B est égale à la Raison de C à C, la Raison d'1 à 1 est égale à la Raison de 3 à 3.

II.

La Raison d'une grandeur à son multiple quelconque, est égale à la Raison d'une autre grandeur à son équimultiple. La Raison de B au triple de B, est égale à la Raison de C au triple de C.

La Raison de 2 au triple de 2 (qui est 6) est égale à la Raison de 5 au triple de 5 (qui est 15.

III.

La Raison d'une grandeur à une autre grandeur est égale à la Raison de leur équimultiple.

La Raison de B à C est égale à la Raison du triple de B au triple de C.

La Raison de 2 à 5 est égale à la Raison de 6 triple de 2. à 15 triple de 5.

IV.

La Raison des multiples differents de la mesme grandeur est égale à la Raison des multiples d'une autre grandeur pareils aux premiers, chacun à chacun & dans le mesme ordre.

La Raison de 3 B à 5 B. est égale à la Raison de 3 C à 5. C.

V.

La Raison des multiples pareils de deux grandeurs, est égale à la Raison d'autre multiples pareils de mesme grandeur.

La Raison de 3 B à 3 C est égale à la Raison de 5 B à 5. C.

Avertissement.

Tout *ce qu'on vient de dire des multiples se peut dire aussi des aliquotes, n'estant que la mesme chose sous un autre nom;*

nom ; car toute grandeur eſt multiple de ſes aliquotes, & aliquote de ſes multiples.

DEFINITION. DIVISION.

LA Proportion diſcrete ou continuë : On l'appelle diſcrete quand le conſequent de la premiere Raiſon eſt different de l'antecedent de la ſeconde, comme dans tous les exemples qu'on a rapporté. B C. :: F G.

On l'appelle continuë quand la meſme grandeur qui eſt le conſequent de la premiere Raiſon eſt l'antecedent de la ſeconde, comme ſi je diſois B eſt à C, comme à D B C :: C eſt à D C D ; ce qui ſe peut auſſi marquer ainſi $\frac{\cdot:\cdot}{\cdot\cdot}$ B C D.

DEFINITION.

CETTE proportion continuë s'appelle Progreſſion, quand y ayant pluſieurs raiſons égales de ſuitte, le conſequent de de la precedente eſt toûjours l'antecedent de la ſuivante comme B eſt à C, comme C à D, comme D à F, comme F à G, &c. Ce qui ſe marque ainſi $\frac{\cdot:\cdot}{\cdot\cdot}$ B C D F G.

I. AXIOME.

LA Raiſon d'un antecedent à un conſequent, a pour parties les Raiſons de chaque parties de l'antecedent à ce meſme conſequent, & cette raiſon eſt égale à toutes les raiſons partiales de l'antecedent priſes enſemble au meſme conſequent, ſoit la grandeur T, diviſée en pluſieurs parties égales, ou inégales, comme M P Q. ſi on compare T à quelque autre quantité comme O : enſorte que T ſoit l'antecedent, & O le conſequent : La raiſon de T à O, a pour parties les raiſons de M à O, de P à O, de Q à O, & leur eſt égale.

$$\frac{T}{O} = \frac{M}{O} + \frac{P}{O} + \frac{Q}{O}$$

CAR T valant M + P + Q. il eſt viſible que T eſt égale a $\frac{M + P + Q}{O}$

Remarquez que je dis que la Raiſon $\frac{T}{O}$, a pour parties les raiſons $\frac{M}{O}$ $\frac{P}{O}$ $\frac{Q}{O}$, & non pas qu'elle en eſt compoſée, ce

qui signifie tout autre chose comme on verra dans la suitte.

II. Axiome.

La Raison d'un antecedent à un consequent, est égale à la Raison d'un autre antecedent moindre que le premier au mesme consequent, plus la Raison de la grandeur dont un antecedent surpasse l'autre au consequent. Et ainsi la Raison du plus grand antecedent au consequent est plus grande que la Raison du plus petit antecedent à ce mesme consequent.

C'est une suitte de l'Axiome precedent.

Car la Raison du grand antecedent au consequent, a pour parties la Raison du petit antecedent au consequent plus la Raison de la quantité, dont le grand antecedent surpasse le plus petit, à ce mesme consequent, & elle leur est égale.

Cette quantité dont une grandeur en surpasse une autre, s'appelle la Difference qui est entre ces deux grandeurs, soit B plus grand que C, & la difference de B à C, soit appellé X : ensorte que C + X, soit égal à B $\frac{B}{D}$ est égal à $\frac{C}{F}$ + $\frac{X}{D}$.

III. Axiome.

La Raison de l'antecedent à une partie du consequent est plus grande que la raison du mesme antecedent à tout le consequent, & ainsi la raison d'un antecedent à un consequent est une plus grande raison que celle du mesme antecedent à un autre consequent plus grand que le premier.

La Raison de B à X partie de D est plus grande que la Raison de B à D, & de mesme si X est plus petit que Y. La Raison de B à X, sera plus grande que celle de B à Y.

IV. Axiome.

Les Raisons qui ont un mesme consequent sont entre elles comme leur antecedens, $\frac{B}{X}$ $\frac{C}{X}$ :: BC.

C'est une suite du 2 Axiome ; car si deux antecedens étant comparez à un mesme consequent, la Raison du plus

grand antecedent est plus grande que celle du plus petit. Il faut que ces raisons soient entre elles comme les antecedens.

V. Axiome.

Les Raisons qui ont un mesme antecedent sont entre elles comme leurs consequens dans un ordre reciproque ou renversé, c'est à dire que la premiere est à la seconde, comme le consequent de la seconde est au consequent de la premiere $\frac{x}{B} \frac{x}{C}$ :: CB.

C'est la suitte du troisiéme Axiome; car si comparant le mesme antecedent à differens consequens, la Raison de cet antecedent à chaque consequent est plus grande quand le consequent est plus petit, & plus petite quand le consequent est plus grand. Il est clair que ces raisons doivent estre entre elles comme les consequens dans un ordre renversé, puisque si le consequent de la premiere est plus grand que le consequent de la seconde. La premiere sera plus petite que la seconde, comme le consequent de la seconde est plus petit que le consequent de la premiere.

VI. Axiome.

Si deux raisons sont égales à une mesme raisons: elles sont égales entre elles.

BC. :: MN.
FG. ::

Donc BC. :: FG.

Et c'est la mesme chose que si deux raisons sont égales à deux autres raisons chacune a chacune, elles sont égaentre elles, si les Raisons I & O estant supposées égales, la Raison A est égale à la Raison I, & la Raison E, égale à la Raison O, & A & E seront égales entre elles.

Corollaire.

Quand plusieurs proportions discretes considerées ensemble, sont telles que les deux derniers termes de la precedente font toûjours les deux premiers termes de la suivante: elles peuvent estre appellées continuës en leur maniere, ou discretement continuës, & alors il est clair que toutes ces raisons de ces diverses proportions sont

égales, & qu'ainsi l'on peut toûjours conclure que les deux premiers termes sont entre eux comme les deux derniers, ce qui sera d'un grand abregement dans la suitte. Exemples dans les nombres.

$\frac{8}{12}\ \frac{15}{21} :: \frac{2}{3}\ \frac{5}{7} :: \frac{7}{3}\ \frac{5}{2} :: \frac{7}{5}\ \frac{3}{2} ::$

Donc $\frac{8}{12}\ \frac{15}{21} :: \frac{7}{5}\ \frac{3}{2}$.

VIII. Axiome.

Deux grandeurs sont égales lors qu'elles ont même Raison à une mesme grandeur, ou qu'une mesme grandeur à mesme Raison à chacune.

Si B S :: D S.

Ou que S B :: S D.

Donc B est égal à D.

Que si ce sont les grandeurs B & D qu'on suppose égales, elles auront mesme Raison à une mesme grandeur, & une mesme grandeur aura mesme Raison à chacune. Si B est égale à D B S :: D S & S B :: S D.

Le fondement de tout cela, est qu'il est clair qu'en matiere de Raison deux grandeurs égales, & une mesme grandeur deux fois repetée font la mesme chose.

VIII. Axiome.

Il peut y avoir trois sortes d'égalitez en 4 termes qui font deux Raisons.

1. L'égalité des antecedens qui font le 1. & le 3e de ces 4 termes. 2. L'égalité des Raisons mesmes. 3. L'égalité des consequens qui sont le 2 & le 4, & deux de ces égalitez estant données donnent celle qui reste, soient les 2 Raisons $\frac{B}{S}$ & $\frac{D}{T}$.

Preuve du premier & 2 cas, supposé que le 1 terme soit égale au 3, & le 2 au 4. B à D & S à T par ces hypotheses, & le septiéme Axiome B S :: D S :: D T, donc par le VIe B S :: D T.

Preuve du 3e cas, supposé que $\frac{B}{S}$ soit égale à $\frac{D}{T}$ & B égale à D par ces hypotheses, & le VII. Axiome B S :: D T :: B T donc par le VII. S est égale à T.

C'est la mesme chose si on suppose que S est égale à T,

on en conclura de la meſme ſorte que B ſera égale à D.

Corollaire.

Il en eſt de meſme des Raiſons que des Grandeurs ; car 1 conſiderant enſemble 4 Raiſons, elles ſeront proportionnelles, Si la 1 eſt égale à la 3e & la 2 à la 4. Ainſi parce que la Raiſon de 2 à 3, eſt égale à la Raiſon de 4 à 6, & la Raiſon de 5 à 7, égalle à celle de 15 à 21 $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{15}{21}$.

2. Suppoſant que ces 4 Raiſons ſont proportionnelles. Si la 1 eſt égale à la 3e, la 2 le ſera à la 4, & reciproquement ſi la 2 eſt ſupoſée égale à la 4e, la 1. le ſera à la 3e.

IX. Axiome.

Quand on a deux proportions, les 4 Raiſons de ces deux proportions ſont proportionnelles. La 1 Raiſon de la 1re Proportion eſtant à la 1re Raiſon de la 2 Proportion, comme la 2 Raiſon de la 1re Proportion eſt à la 2 Raiſon de la derniere. Si B C :: F G & M N :: P Q $\frac{B}{C}$ $\frac{M}{N}$ :: $\frac{F}{G}$ $\frac{P}{Q}$.

Car la 1 Raiſon $\frac{B}{C}$ eſt égale à la 3 $\frac{F}{G}$ par ce que ce ſont les deux Raiſons de la 1 Proportion, & la 2 eſt égale à la 4 par la meſme Raiſon. Donc par le viii. Axiome, il y a une nouvelle proportion entre ces 4 Raiſons.

X. Axiome.

On ne change rien dans une proportion quand on ne fait qu'en tranſpoſer les raiſons ; car deux choſes égales demeureront toûjours égales de quelque maniere qu'on les diſpoſe. Si donc

B C. :: F G.

F G. :: B C.

I. Theoreme.

Deux Raiſons ſont égales quand toutes les Aliquotes pareilles de chaque antecedent ſont également contenuës dans ſon conſequent.

Soient 4 grandeurs B C F G, & les Aliquotes quelconques de B ſoient appellées X, & les pareilles de F ſoient appellées Y. Je dis que B C :: F G ſi X & Y ſont également contenuës dans les conſequens C & G.

Mais cela peut eſtre entendu en deux manieres. La premiere eſt quand X eſt préciſement autant de fois dans

C qu'Y est dans G, & alors il n'y a aucune difficulté, & il suffit mesme d'avoir examiné une seule Aliquote pareille des antecedens ; car il est visible que si X [$\frac{1}{10}$ de B] est sept fois dans C, & Y [$\frac{1}{10}$ de F] 7 fois dans G B C :: F G 10. X 7. X :: 10 Y 7. Y

L'autre maniere fait toute la difficulté, c'est quand une Aliquote quelconque de B que je nomme X, n'est jamais précisement tant de fois dans C, mais toûjours avec quelque reste ; car alors l'Aliquote quelconque pareille de F ne peut estre également contenuë dans G, que par ce qu'elle y sera autant de fois que X dans C. Mais toûjours avec quelque reste comme si X $\frac{1}{10}$ de B est dans C 7 fois plus R & Y $\frac{1}{10}$ de F est aussi dans G sept fois plus R. Je dis que quand on peut sçavoir que cela se trouvera generalement dans toutes les aliquotes pareilles des antecedens ; c'est à dire qu'elles seront toutes au moins en cette maniere également contenuës dans les consequens, les Raisons de $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ seront égales, je ne sçay si on le peut mieux prouver qu'en cette maniere.

Si les Raisons $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ n'estoient pas égales dans cette supposition ; Il faudroit que la premiere fust plus ou moins grande que la seconde, & & si elle estoit plus grande en augmentant son consequent de quelque chose on la diminueroit, & par là on la pourroit rendre égale à $\frac{F}{G}$ comme au contraire si elle estoit moins grande, on pourroit ajoûter quelque chose au consequent de la seconde, & par là rendant cette seconde moins grande, on pourroit encore faire que la premiere luy fust égale.

Or on ne sçauroit augmenter C de quoy que ce soit qu'on ne rende la Raison $\frac{B}{C}$ plus petite qu'il ne faut pour estre égale à $\frac{F}{G}$ ce que l'on peut prouver ainsi ajoûtant Z à C quand Z ne seroit que la milliéme partie de l'épaisseur d'un cheveux. Je dis que la Raison $\frac{B}{C+Z}$ seroit plus petite qu'il ne faudroit pour estre égale à $\frac{F}{G}$ car si l'on prend l'Aliquote X plus petite que Z, il est manifeste que X sera dans C + Z une fois plus que dans C : de sorte que si X est la $\frac{1}{10.0.}$ de B & qu'elle soit 870 dans

C la meſme X [priſe comme il a eſté dit plus petite que Z] ſera dans C + Z 8702 + R au lieu que Y qui eſt auſſi la $\frac{1}{10000}$ de F ne ſera dans G que 8701 + R.

Or il eſt clair que la Raiſon de 10000 X a 8702 X plus R eſt plus petite que la Raiſon de 10000 Y 8701 Y + R.

Donc on ne peut rien ajoûter à C qu'on ne rende $\frac{B}{C+Z}$ plus petite que $\frac{F}{G}$. Il eſt aiſé de voir que l'on prouvera de la meſme ſorte qu'on ne peut rien ajoûter à G que l'on ne rende la Raiſon $\frac{B}{C}$ plus grande que G + Z.

Donc la Raiſon $\frac{B}{C}$ n'eſt ny plus ny moins grande que la Raiſon $\frac{F}{G}$.

Donc elle luy eſt égale.

II. THEOREME.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles : elles le ſeront en les renverſant ; c'eſt à dire en comparant le premier conſequent au premier antecedent, & le ſecond conſequent au 2 antecedent, le 2 terme au premier, le 4 au 3e, ce qui s'appelle *Permutando*. Si B C :: F G, je dis que C B :: G F ; car $\frac{C}{C}\frac{B}{C}$ :: $\frac{G}{G}\frac{F}{G}$ par le Corolaire du 8 Axiome, la ſeconde de ces Raiſons eſtant égale à la 4e par l'hypotheſe, & la premiere & la 3e eſtant des Raiſons d'égalité. Or les deux premieres Raiſons aiant meſme conſequent ſont comme leurs antecedens par le 4e Axiome, & il en eſt de meſme des deux dernieres qui ont auſſi meſme conſequent. Donc C B :: G F, ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront en les prenant à rebours ; c'eſt à dire que la 4e ſera à la 3e comme la 2 à la 1e ſi B C :: F G. G F :: C B par le precedent Theoreme. La 2 eſt à la 1e comme la 4 eſt à la 3e C B :: G F.

Donc par le X Axiome en tranſpoſant les Raiſons la 4e ſera à la 3e comme la 2 à la 1 G F :: C B : autrement par l'hypotheſe, les Raiſons $\frac{F}{G}$ & $\frac{B}{C}$ ſont égales ; donc par le IX. Axiome $\frac{G}{G}\frac{F}{G}$ :: $\frac{C}{C}\frac{B}{C}$ donc par le 4e Axiome G F :: C B.

SCD LYON 1

III. Theoreme.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en les prenant alternativement ; c'eſt à dire en comparant les antecedens enſemble, & les conſequent enſemble, le 1re terme au 3e, & le 2 au 4e, ce qui s'appelle *Alternando*. Si B C :: F G. Je dis qu'*Alternando* B F :: C G ; car $\frac{B}{C}$ $\frac{F}{C}$ :: $\frac{F}{G}$ $\frac{B}{C}$ par le 8e Axiome & ſon Corollaire. La premiere & la 3e Raiſon eſtant égale par l'hypotheſe, & la 2 & la 4e eſtant la meſme. Or $\frac{B}{C}$ $\frac{F}{C}$ :: B F par le VI Axiome, & $\frac{F}{G}$ $\frac{F}{C}$ C G par le Ve Axiome.
Donc B F :: C G par le ce qu'il falloit demonſtrer.

Corollaire.

Si 4 grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en tranſpoſant la premiere, & la 4e, c'eſt à dire que la 4e ſera à la ſeconde, comme la 3e à la 1re ſi B C :: F G C G :: F B ; car par le precedent Theoreme, la 1re eſt à la 3e comme la 2 à la 4e B F :: C G. Donc *Permutando* la 3 eſt à la 1re comme la 4e eſt à la 2 F B :: G C, donc par le X Axiome en tranſpoſant les Raiſons. La 4e ſera à la 2 comme la 3e à la 1re G C : : F B. Autrement par le precedent Theoreme, les Raiſons $\frac{B}{F}$ & $\frac{C}{G}$ :: $\frac{F}{F}$ $\frac{B}{F}$ donc par le 4e Axiome G C :: F G.

Huit Dispositions.

Dans leſquelles 4 Grandeurs peuvent eſtre proportionnelles.

Il s'enſuit deux choſes de ce que deſſus : 1 que 4 grandeurs eſtant proportionnelles elles le ſont toûjours de quelque maniere qu'on les tranſporte, pourveu que les extrémes demeurent extrémes, & les moyens, moyens, ou que les extremes deviennent moyens, & les moyens extrémes.

2. Qu'il y a huit differentes Diſpoſitions, ny plus ny moins, dans leſquelles 4 Grandeurs peuvent eſtre proportionnelles. Les Voicy en les marquant par premiere, ſeconde, troiſiéme, & quatriéme ſelon qu'elles auroient eſté diſpoſées la 1 fois.

Hypotheſe

Hypotheſe 1 2 : : 3 4. } Premiere diſpoſition.
10 Axiome 3 4 : : 1 2. } Equivalente.
2 Theoreme 2 1 : : 4 3. } Permutation.
10 Axiome 4 3 : : 2 1. } Equivalente.
3 Theoreme 1 3 : : 2 4. } Alterne.
10 Axiome 2 4 : : 1 3. } Equivalente.
2 Theoreme 3 1 : : 4 2. } Permutation de l'Alterne.
10 Axiome 4 2 : : 3 1. } Equivalente.

On peut encore prouver ces 8 Diſpoſitions en cette maniere ayant mis en quarré les 4 Grandeurs proportionnelles : enſorte que dans la premiere diſpoſition, les antecedens ſoient au deſſus des conſequens.

Ainſi $\frac{B}{C}$ $\frac{F}{G}$.

Elles ſeront toûjours proportionnelles en les prenant deux à deux en meſme ſens de quelque maniere que ce ſoit, pourveu que ce ne ſoit point de coin en coin. Mais

1 De haut en bas par l'Hypotheſe.
2 De bas en haut *Permutando*.
3 De gauche à droite *Alternando*.
4 De droite à gauche *Permutando*. L'Alterne & chacune de ces diſpoſitions eſt double, parce que l'on peut commencer par laquelle on voudra de deux raiſons.

IV. THEOREME.

DES RAISONS PROPORTIONNELLES.

LES deux Theoremes precedens ſont vrais, des Raiſons proportionnelles auſſi-bien que des Grandeurs ; c'eſt à dire que ſi 4 Raiſons ſont proportionnelles, la 1e eſtant à la 2 comme la 3e à la 4e, elles le ſeront *Permutando* & *Alternando* ; c'eſt à dire que la 2 ſera à la premiere comme la 4e à la 3e, & que la premiere ſera à la 3e comme la 2 à la 4e. On ſe contentera de prouver l'Alterne qui eſt de plus grand uſage, ſoient les 4 Raiſons proportionnelles $\frac{2}{21}$ $\frac{1}{15}$: : $\frac{4}{7}$ $\frac{6}{7}$ qu'on appellera pour les marquer avec moins d'embarras $\frac{a}{c}$ $\frac{e}{}$: : $\frac{i}{o}$ elles ne ſont proportionnelles que parce que la Raiſon qui eſt entre les deux premieres Raiſons [$\frac{a}{}$ & $\frac{e}{}$] eſt égale à la Raiſon qui eſt entre les deux dernieres [$\frac{i}{}$ & $\frac{o}{}$] donc $\frac{a}{c}$ $\frac{i}{o}$ donc

comparant chacune de ces Raiſons égales entre elles, avec la Raiſon qui eſt entre la 3 & la 2 Raiſons ; c'eſt à dire avec $\frac{1}{E}$. Il eſt clair par que $\frac{a}{e}\ \frac{i}{e} :: \frac{i}{o}\ \frac{i}{e}$

Or les deux premieres de ces 4 nouvelles Raiſons ayant meſme conſequent, ſont comme les antecedens a & i, & les deux dernieres ayant le meſme antecedent, ſont comme les conſequens dans un ordre renverſé ; c'eſt à dire comme e & o, donc ſi A E :: I O A I :: E O.

V. Theoreme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B C : : F G. on ajoûte deux quelconques, comme M & N. La raiſon de la 2 à la 5, eſt à la Raiſon de la 4 à la 6 comme la Raiſon de la 1 à la 5 eſt a, la Raiſon de la 3 à la ſixiéme $\frac{C}{M}\ \frac{G}{N} :: \frac{B}{M}\ \frac{F}{N}$.

Donc la 1 & la 3 de ces 4 Raiſons ayant meſme conſequent, ſont comme les antecedens ; c'eſt à dire comme C eſt à B. Et il en eſt de meſme de la 2 & de la 4 qui ſont comme G a F. Or par l'Hypotheſe & le 2^{d} Theoreme C B :: G F. Donc la premiere de ces Raiſons eſt à la 3, comme la 2 à la 4 donc *Alternando* la 1 eſt à la 2, comme la 3 à la 4.

VI. Theoreme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B C : : F G, on ajoûte deux autres quelconques comme 3 & 2. la Raiſon de la 2 à la 5 eſt à la Raiſon de la 6 à la 3 comme la Riaſon de la 1 à la 5, eſt à la Raiſon de la 6 à la 4 $\frac{C}{M}\ \frac{N}{E} :: \frac{B}{M}\ \frac{N}{G}$.

Demonſtration. La 1 & la 3 de ces 4 Raiſons ayant même conſequent, ſont comme les antecedens par le IV. Axiome ; c'eſt à dire comme C à B. Et la 2 & la 4 ayant meſme antecedent font comme les conſequens dans un ordre renverſé [par le V Axiome,] c'eſt à dire comme G a F. Or par l'Hypotheſe & le 2 Theoreme C B : : G F dont la 1 de ces Raiſons eſt à la 3 comme la 2 à la 4 ce qu'il falloit demonſtrer.

Corollaire.

Dans l'une & l'autre de ces deux proportions de Raiſons des deux Theoremes precedens, ſi l'on ſuppoſe que

SCD LYON 1

les deux premieres Raiſons ſont égales. Les deux dernieres le ſont auſſi, c'eſt à dire pour le 5 Theoreme. Si C M :: G N B M :: F N, & par le VI. Theoreme. Si C M :: N F B M :: N G. C'eſt une ſuitte évidente de ces deux Theoremes, mais comme on a accouſtumé de propoſer l'un & l'autre en d'autres termes nous en ferons le VII. & le VIII. Theoreme.

VII. Theoreme.

Si à 4 Grandeurs proportionnelles comme B C :: F G. On en ajoûte deux autres comme M N qui ſoient telles que la 2 eſt à la 5 comme la 4 à la 6. la 1 ſera à la 5 comme la 3 à la 6.

1 Hypotheſe B C :: F G.
2 Hypotheſe C M :: G N.
Conſequences à prouver B M :: F N.

Demonſtration pour la 1 Hypotheſe & le 4 Axiome. Ces 4 Raiſons ſont proportionnelles $\frac{B}{M}\ \frac{C}{M} :: \frac{F}{N}\ \frac{G}{N}$. Or par la 2 Hypotheſe, la 2 Raiſon & la 4 [$\frac{C}{M}$ & $\frac{G}{N}$] ſont égales, [car c'eſt ce que l'on ſuppoſe quand on dit que C M :: G N.] Donc par le Corollaire du VIII Axiome, la 1 Raiſon & la 3 $\frac{B}{M}$ & $\frac{F}{N}$ ſont égales, c'eſt à dire que B M :: F N, ce qui eſt la conſequence à prouver. Ce Theoreme, s'appelle *Æqualitas Ordinata.*

VIII. Theoreme.

Si 4 grandeurs proportionnelles comme B C :: F G, on en ajoûte deux autres comme X & Y qui ſoient telles que la 2, ſoit à la 5 comme la 6 à la 3. la premiere ſera à la 5 comme la 6 à la 4.

1 Hypotheſe B C :: F G.
2 Hypotheſe C X :: Y F.
Conſequences à prouver B X :: Y G.

Demonſtration par la 1 Hypotheſe, & le IV & V Axiome $\frac{B}{X}\ \frac{C}{X} :: \frac{Y}{G}\ \frac{Y}{F}$. Or par la 2 Hypotheſe, la ſeconde & la quatriéme Raiſon [$\frac{C}{X}$ & $\frac{Y}{F}$] ſont égales; car c'eſt ce que l'on ſuppoſe quand on dit que C X :: Y F, donc par le Corollaire du VIII Axiome, la 1 Raiſon & la 3 [$\frac{B}{X}$ & $\frac{Y}{G}$] ſont égales auſſi, c'eſt à dire que B X :: Y G, ce qui eſt

la conſequence à prouver. Ce Theoreme s'appelle *Æqualitas Perturbata.*

AVERTISSEMENT.

ON propoſe encore ce dernier Theoreme d'une autre maniere qui revient à la meſme choſe, quoique cela paroiſſe fort different.

VIII. THEOREME.

Propoſé d'une autre maniere.

Y ayant 3 Grandeurs d'une part, & 3 de l'autre. Si la 1 d'une part eſt à la 2 comme la 2 de l'autre part eſt à la 3, & que la 2 d'une part ſoit à la 3 comme la 1 de l'autre part eſt à la 2, la 1 d'une part ſera à la 3, comme la 1 de l'autre part ſera à la 3e.

Soient les Grandeurs 3 d'une part B C X & 3 de l'autre. Y F G

1 Hypotheſe B C : : F G.

2 Hypotheſe C X : : Y F.

Conſequences à prouver B X : : Y G.

On voit clairement que ce ſont les meſmes Hypotheſes & la meſme conſequence à prouver que dans le VIII. Theoreme, & qu'ainſi cela ſe prouvera de la meſme ſorte. Il faudra peut-eſtre mettre là les reciproques.

IX. THEOREME.

Si 4 Grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront encore en comparant chaque antecedent plus ou moins, ſon conſequent avec ſon conſequent, c'eſt à dire que ſi la 1 eſt à la 2 comme la 3 eſt à la 4, la 1 plus ou moins, la 2 ſera à la 2 comme la 3 plus ou moins, la 4 à la 4; ce qui s'appelle ordinairement *Componendo*, s'il y a plus, & *Dividendo* s'il y a moins, quoique peut-eſtre par abus, comme nous le ferons voir plus bas, & il faut remarquer que pour y avoir moins chaque antecedent doit eſtre plus grand que ſon conſequent. Il faut prouver que B C : : F G. B plus ou moins C eſt à C comme ce que F plus ou moins G eſt à G; c'eſt que $B \pm C C : : F \pm G G$ $\frac{B}{C}$ & $\frac{F}{G}$ eſtant égales par l'hypotheſe, & $\frac{C}{C} = \frac{G}{G}$, parce que ce ſont deux Raiſons d'égalité $\frac{B}{C} \pm \frac{C}{C}$ eſt égal à $\frac{F}{G} \pm \frac{G}{G}$. Or

$\frac{B}{C} \pm \frac{C}{C}$ n'est autre chose que $\frac{B \pm C}{G}$ & $\frac{F}{G} \pm \frac{G}{G}$ n'est autre chose que $\frac{F \pm G}{G}$ donc $\frac{B \pm C}{G}$ est égal à $\frac{F \pm G}{G}$, c'est à dire que la raison B plus ou moins C à C est égale à la Raison de F plus ou moins G à G, donc B ± C C :: F ± G G ce qu'il falloit demonstrer.

X. Theoreme.

Si 4 Grandeurs sont proportionnelles, & que chaque antecedent soit plus grand que son consequent, le 1 antecedent est à la quantité dont il surpasse son consequent en mesme Raison que le second antecedent est à la quantité dont il surpasse son consequent. Cette quantité s'appelle la difference de l'antecedent d'avec son consequent, comme nous avons déja veu, soit B C : : F G, & que chaque antecedent soit plus grand que le consequent. Je dis que B B — C :: F F — G pour le montrer, il ne faut que prouver B — C B :: F — G F ; car si cela est, l'autre sera vray *Permutando*. Or ce dernier est clair; car la Raison de $\frac{B-C}{B}$ est la mesme chose que $\frac{B}{B}$ moins $\frac{C}{B}$ & $\frac{F-G}{F}$ est la mesme chose que la Raison $\frac{1}{1}$ moins $\frac{G}{F}$. Or $\frac{B}{B} = \frac{F}{F}$ & $\frac{C}{B} = \frac{G}{F}$ donc $\frac{B-C}{B} = \frac{F-G}{F}$ donc B — C B :: F — G F & *Permutando* B B — C :: F F — G, ce qu'il falloit demonstrer.

XI. Theoreme.

Lors qu'on a deux proportions que je nommeray A & E. Si 3 termes de l'une sont égaux à 3 termes de l'autre, chacune à chacune, & dans le mesme ordre [c'est à dire le 1 au 1, le 2 au 2, &c.] Les deux qui resteront da part & d'autre seront aussi égaux entre eux.

Soit la proportion A B D :: L M

& la proportion E β δ :: λ μ. Je dis que si le premier terme d'A est égal au 1 terme d'E, & le 2 au 2, & le 3 au 3, les deux 4 le seront aussi ; car par le 2 Axiome, les 2 premieres Raisons d'A & d'E sont entre elles comme les deux dernieres.

Or les deux premieres sont égales par le 8 Axiome,

parce que par l'Hypotheſe, les antecedens ſont égaux, & leurs conſequens auſſi. Il faut donc auſſi que les deux dernieres Raiſons ſoient égales, c'eſt à dire que L M :: λ μ. Or les deux antecedens de ces deux Raiſons qui ſont L & λ ſont égaux par l'Hypotheſe. Donc par le VIII Axiome, les deux conſequens M & μ le ſont auſſi, ce qu'il falloit demonſtrer.

On prouvera ſans peine la meſme choſe, ſi c'eſt l'égalité d'un autre terme d'A à un ſemblable d'E, comme du 2 au 2 qui ſoit ſuppoſé inconnu; car alors l'égalité de deux dernieres Raiſons qui ſera manifeſte par l'Hypotheſe, prouvera celle des deux premieres : & l'égalité des deux premieres, dont les antecedens ſont égaux par l'Hypotheſe prouvera l'égalité des deux conſequens qui ſeront le 2 terme D A, & le 2 D E.

I. Corollaire.

Ce theoreme ne laiſſe pas d'eſtre vray quand les 3 termes d'une proportion égaux chacun à chacun a 3 termes, de l'autre ne ſeroient pas dans le meſme ordre dans l'une & dans l'autre, pourveu que les deux moyens de l'une ſoient égaux, ou aux deux moyens de l'autre, ou aux 2 extremes; car alors il ſera aiſé en tranſportant les termes de l'une, de faire que les termes égaux ſe repondent dans l'une & dans l'autre ſelon ce qui a eſté dit.

II. Corollaire.

Si deux proportions A & E eſtoient continuës, les deux moyennes proportionnelles eſtant égales, l'un des extremes d'A, ne pourroit eſtre égal à l'un des extremes d'E, que l'autre extreme d'A ne ſoit égal à l'autre extreme d'E.

XII. Theoreme.

Plusieurs Raiſons eſtant égales, tous les antecedens ſont à tous les conſequens, comme un des antecedens à ſon conſequent comme deux Raiſons eſtant égales, l'antecedent eſt à l'antecedent, comme le conſequent au conſequent; ainſi 4 Raiſons [ou tant que l'on voudra] eſtant égales, le premier antecedent eſt au derniere an-

SCD LYON 1

tecedent, comme le 1 conſequent au dernier, & le 2 antecedent, au dernier antecedent comme le 2 conſequent au dernier, & ainſi la ſuitte juſques au dernier antecedent qui ſera à ſoy-même, comme le dernier conſequent à ſoy-meſme.

Donc les 4 Raiſons de chacun des quatre antecedens au dernier antecedent, ſont égales aux 4 Raiſons de chacun des 4 conſequens au dernier conſequent, chacune à chacune, c'eſt à dire que ſi ces 4 Raiſons égales, ſont $\frac{B\ C\ D\ F}{A\ E\ I\ O}$ $\frac{B\ C\ D\ F}{F\ F\ F\ F}$ ſeront égales chacune à chacune à $\frac{A\ E\ I\ O}{O\ O\ O\ O}$.

Or ces Raiſons des 4 antecedens au dernier ſont la meſme choſe que la Raiſon des 4 antecedens, joints avec le ſigne de plus au dernier antecedent, c'eſt à dire que $\frac{B + C + D + F}{F}$

Et les 4 Raiſons des 4 conſequens au dernier que l'unique Raiſon $\frac{A + C + I + O}{O}$

Donc $B + C + D + F$ eſt à F, comme $A + E + I + O$ eſt à O.

Donc *Alternando*, les 4 antecedens ſont aux 4 conſequens, comme F dernier antecedent eſt à O dernier conſequent.

SECTION DEUXIE'ME.

Des Raiſons tant d'égalité que d'inégalité qui peuvent eſtre entre diverſes Raiſons, quand les termes de l'une ſont multipliables par ceux de l'autre.

Avertissement.

On croit ordinairement que les grandeurs de divers genre qu'on appelle Heterogenes, ne ſe peuvent pas multiplier, cela ne me paroît pas vray, on a beſoin d'explication; car les nombres ſont d'un autre genre que les autres grandeurs comme l'étenduë & le temps, & neantmoins il eſt clair que les nombres

SCD LYON 1

multiplient toutes ſortes de grandeurs, & que c'eſt une veritable Multiplication, quand je dis 6 toiſes ou 6 heures, puiſque c'eſt prendre une toiſe ou une heure autant de fois qu'il y a d'unitez dans 6, en quoy conſiſte la Multiplication.

De plus ce qui ne ſe peut multiplier par la nature, ſe peut multiplier par une fiction d'eſprit, par laquelle la verité ſe découvre auſſi certainement que par les Multiplications réelles; ainſi voulant ſçavoir quel chemin fera en dix heures celuy qui a fait 24 lieuës en 8 heures; je multiplie par une fiction d'eſprit 10 heures par 24 lieuës, ce qui me donne un produit imaginaire d'heures & de lieuës de 240 qui eſtant diviſé par 8 heures me donne 30 lieuës. On multiplie auſſi par la meſme fiction d'eſprit des ſurfaces par des ſurfaces, quoique cela donne pour produit une étenduë de 4 dimenſions qui ne peut eſtre dans la nature, & neantmoins on ne laiſſe pas de decouvrir beaucoup de veritez par ces ſortes de multiplications.

Ie ſçay bien qu'on dit que c'eſt parce que ces produits imaginaires ſe peuvent reduire en lignes qui auront meſme raiſon entre celles que ces produits; mais il n'y a guere d'apparence que la verité de ces ſortes de preuves dependent de ces lignes, qui ſont viſiblement étrangeres à ces demonſtrations: quoy qu'il en ſoit ne me voulant broüiller avec perſonne, chacun prendra ce que je diray des Raiſons qui ſe trouvent entre diverſes raiſons qu'on ne connoît qu'en multipliant les termes de l'un par ceux de l'autre, ſelon l'opinion qu'il aura que les termes de certaines raiſons, ſont ou ne ſont pas multipliables les uns par les autres; car ce n'eſt que dans cette ſuppoſition que tout ce que je m'en vais dire ſe doit entendre.

I. LEMME.

ON a déja veu dans ce Livre precedent que deux grandeurs ont été multipliées l'une par l'autre, quand l'unité eſt à l'une comme l'autre eſt au Produit, c'eſt à dire ce qui s'eſt fait par cette Multiplication; Ainſi 3 multipliez par 4 donnent 12, parce que 1 3 :: 4 12, & un tiers

tiers multiplié par un quart donne une douziéme, parce que $1\frac{1}{3} :: \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$ l'unité estant triple du tiers comme le quart est triple du douziéme, & de mesme generalement quand B & X estant multipliez donnent B X. Il faut que I X :: B. B X.

II. Lemme.

Il s'ensuit de là que toute Grandeur estant multipliée par un autre, la Grandeur simple est à soy-mesme multipliée comme l'unité est à l'autre Grandeur par laquelle elle a esté multipliée B B X :: I X. Ce n'est que transporter les deux Raisons qui se doivent trouver dans toute la Multiplication.

III. Lemme.

Deux Grandeurs estant multipliées par une mesme Grandeur, si elles sont égales, leurs Produits seront égaux, & si les Produits sont égaux, elles seront égales, B & D deux Grandeurs égales. Je dis que B X & D X sont égaux, car par le premier Lemme

IX. $\left\{ \begin{array}{l} :: B.X \\ :: D.X \end{array} \right.$ donc B B X :: D D X. Donc si les Grandeurs B & D sont égales, les Produits B X & D X le sont aussi par le VIII. Axiome, & si les Produits B X & D X sont égaux, les Grandeurs B & D le sont aussi par le même VIII. Axiomme.

IV. Lemme.

Lorsque deux Grandeurs estant multipliées l'une par l'autre font un Produit, & que 2 autres en font une autre, comme par exemple. $\begin{smallmatrix} B & S & B & S \\ D & T & D & T \end{smallmatrix}$. On y peut remarquer 3 sortes d'égalitez. La 1e & la 2e les égalitez de chacune des deux Grandeurs d'une part à chacune des Grandeurs de l'autre de B à D & S à T. La 3e égalité des deux Produits B S & D T : or deux de ces égalitez estant données donnent la 3e, c'est à dire que si chacune des deux Grandeurs d'une part est égale à chacune des deux Grandeurs de l'autre les Produits sont égaux.

2. Et si ce sont les 2 Produits qui sont supposez égaux, & qu'une des Grandeurs d'une part, soit égale à l'une de

SCD LYON 1

l'autre part, les deux autres Grandeurs sont égales.

Preuve du premier Cas, la double Hypothese de B égal à D & d'S, égale à T fait voir par le 3e Lemme que B S = D S = D T, donc B S = D T ce qu'il falloit demonstrer.

Preuve du 2e Cas par la double Hypothese de B S égal à D T, & de B égal à D, en se souvenant du 3e Lemme B S = D T = B T, donc B S = B T, donc le 3e Lemme S = T ce qu'il falloit demonstrer.

I. Proposition Generale.

Si les deux termes d'une Raison sont multipliez par une mesme grandeur la Raison des termes simples est égale à celle des termes multipliez B C :: B M. C M ou $\frac{B}{C} = \frac{BM}{CM}$

I. Demonstration.

Par le 2 Lemme B BM. } IM donc B B M C C M,
C C M. }

donc *Alternando* B C :: B M C M.

II. Demonstration.

Toutes les Aliquotes pareilles des antecedens B & B M sont également continuées dans les consequens C & C M.

Car soit X, l'Aliquote quelconque de B, & si l'on veut la centiéme, 100 X seront la mesme chose que B.

Donc par le 1^r Lemme ce sera la mesme chose de multiplier cent X par M que de multiplier B par M, Donc B M & 100 fois X M sont la mesme chose, donc X & M sont les Aliquotes pareilles des antecedens B C B M.

Supposé maintenant que X soit danc C ou tant de fois sans reste ou toûjours avec quelque reste qu'il y soit, par exemple 87 precisement ou 87 fois plus R.

Ce sera la mesme chose de multiplier C par M que de multiplier par M, ou 87 fois X précisement [ce qui donne 87 X M] ou 87 X + R [ce qui donne 87 X M + R M] Donc C M est la mesme chose que ou

{ 87 X M
{ 87 X M + R M.

Comme donc il est clair par les proportions naturelle-

ment connuës, & par le 1^r Theoreme que 100 X 87 X :: 100 X M 87 X M ou 100 X 87 X + R :: 100 X M 87 X M + R M. Il eſt clair auſſi que B [égal à 100 X] eſt à C [égal à 87 X ou à 87 X + R] comme B M [égal à 100 X M] eſt à C M [égal à 87 X M ou à 87 X M + R M, c'eſt à dire que B C :: B M. C M ce qu'il falloit demonſtrer.

Corollaire.

Quand des Grandeurs de pluſieurs dimenſions, & qui en ont autant l'une que l'autre font une Raiſon, les meſmes lettres qui ſe trouveront dans l'une & dans l'autre de ces Grandeurs, eſtant oſtées de part & d'autre une pour une, ce qui reſtera, donnera la meſme Raiſon en termes plus ſimples que s'il ne reſtoit rien, ces Raiſons ſeroient entre elles comme un à un B M. C M :: B. C. B B. B C :: B C. B C M. B C N :: M N. D F G. D P G :: F G. P G. R S T. T R S :: T T.

Probleme.

Ayant deux Raiſons quelconques, faire que demeurant les meſmes, elles ayent meſme conſequent : Il ne faut que multiplier les deux termes de chacune par le conſequent de l'autre.

Par là elles demeureront chacune de meſme qu'elles eſtoient auparavant par la propoſition precedente, & elles auront pour conſequent commun les produits des deux conſequens $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N} :: \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{CN}$.

II. Proposition Generale.

Pour connoiſtre la Raiſon que des raiſons quelconques ont entres elles.

Deux Raiſons quelconques ſont entre elles, comme le Produit des extremes, c'eſt à dire du premier antecedent par le 2 conſequent] eſt au Produit des moyens, c'eſt à dire du 2 antecedent par le premier conſequent] $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N}$: : B N. C M. car par le precedent Probleme, on reduit les deux Raiſons données à n'avoir qu'un meſme conſequent en donnant pour antecedent à la premiere le Produit des extremes, & à la ſeconde le Produit des

moyens & à chacune pour conſequent le Produit des conſequens.

Donc par le 5e principe n'ayant qu'un conſequent, elles ſont comme les antecedens, & par conſequent comme le Produit des extrémes qui eſt l'antecedent de la premiere au Produit des moyens qui eſt l'antecedent de la ſeconde. $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N} :: \frac{BN}{CN}\ \frac{CM}{CN} ::$ BN. CM.

I. Theoreme.

Deux Raiſons quelconques ſont entre elles comme la Raiſon des antecedens à celle des conſequens $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N} :: \frac{B}{M}\ \frac{C}{N}$.

Car cette nouvelle comparaiſon laiſſant les meſmes extremes B & N ne fait que tranſpoſer les moyens C & M, donc ces deux nouvelles Raiſons ſont encore entre elles comme le Produit des meſmes moyens $\left.\begin{matrix}B\ M.\\ \overline{C}\ \overline{N}.\end{matrix}\right\} :: \left.\begin{matrix}B\ C.\\ \overline{M}\ \overline{N}.\end{matrix}\right\}$ BN. CM.

II. Theoreme.

Deux Raiſons quelconques ſont entre elles, comme ces meſmes Raiſons renverſées priſes dans un ordre renverſé.

J'appelle Raiſons renverſées quand de l'antecedent on en fait le conſequent, & du conſequent l'antecedent. Je dis donc que $\frac{B}{C}\ \frac{M}{N} :: \frac{N}{M}\ \frac{C}{B}$; car il faut prendre ces Raiſons renverſées dans un ordre renverſé, afin que ce ſoit toûjours les meſmes extremes & les meſmes moyens.

$\left.\begin{matrix}B\ M\\ \overline{C}\ \overline{N}\\ N\ C\\ \overline{M}\ B\end{matrix}\right\}$ BN. CM.

Avertissement.

Toutes les Raiſons d'égalité eſtant égales, elles ont toutes meſme raiſon à quelque raiſon que ce ſoit, & ainſi on peut prendre celle que l'on veut à diſcretion, & les demonſtrations pour l'ordinaire en ſont plus ſenſibles, quand on prend celle du conſequent au conſe-

SCD LYON

quent de la Raiſon d'inégalité, avec laquelle on compare cette Raiſon d'égalité.

III. Theoreme.

La Raiſon d'égalité eſt à une Raiſon quelconque d'inégalité, comme le conſequent de la Raiſon d'inégalité eſt à ſon antecedent.

1 Demon. $\frac{X}{X} \frac{B}{C} :: XC. XB :: CB.$

2 Demon. $\frac{C}{C} \frac{B}{C} :: CB.$

Et toute Raiſon d'inégalité eſt à la Raiſon d'égalité, comme l'antecedent de la Raiſon d'inégalité eſt à ſon conſequent $\frac{B}{C} \frac{X}{X} :: BX. CX :: BC.$

Autrement $\frac{B}{C} \frac{C}{C} :: BC.$

I. Corollaire.

La Raiſon d'égalité eſt plus grande qu'aucune Raiſon de moindre inégalité, & plus petite qu'aucune Raiſon de plus grande inégalité, car elle eſt à chacune, comme le conſequent de chacune eſt à ſon antecedent, donc la Raiſon d'égalité eſt plus grande qu'aucune Raiſon de moindre inégalité.

On prouvera de la meſme ſorte qu'elle eſt plus petite qu'aucune Raiſon de plus grande inégalité, parce que le conſequent de toute Raiſon de plus grande inégalité eſt plus petit que ſon antecedent.

Cela ſeroit encore plus groſſierement en prenant pour Raiſon d'égalité celle du conſequent au conſequent de la Raiſon, avec laquelle on la compare; car il eſt clair que la Raiſon de 4 à 4 eſt plus grande que la Raiſon de 3 à 4, parce qu'ayant meſme conſequent celle d'égalité à un plus grand antecedent $\frac{1}{4} \frac{1}{4}$, & il eſt clair auſſi par le même principe que la Raiſon de 3 à 3 eſt plus petite que la Raiſon de 4 à 3 $\frac{1}{3} \frac{1}{3}$.

II. Corollaire.

La Raiſon d'égalité eſt moyenne proportionnelle entre deux Raiſons, dont l'une eſt l'inverſe de l'autre, ou l'inverſe d'une Raiſon égale à l'autre $\frac{B}{C} \frac{C}{C} :: \frac{B}{B} \frac{C}{B}$ que ſi $\frac{F}{G}$ eſt égale à $\frac{B}{C} \frac{G}{F}$ ſera auſſi égale à $\frac{C}{B}$ & par conſequent $\frac{B}{C} \frac{C}{C} :: \frac{F}{F} \frac{G}{F}$.

III. Corollaire.

La Raiſon de moindre inégalité eſt d'autant plus grande, & la raiſon de plus graande inégalité eſt d'autant plus petite que l'une & l'autre approche plus de la Raiſon d'égalité. J'en laiſſe à trouver la demonſtration qui ſe tire ſans peine du Theoreme precedent.

II. Theoreme.

Si les deux termes d'une Raiſon ſont multipliez par deux nouvelles grandeurs, l'antecedent par l'une, & le conſequent par l'autre.

La Raiſon des termes ſimples, eſt à la Raiſon des termes multipliez, comme la Grandeur qui a multiplié l'antecedent, à celle qui a multiplié le conſequent $\frac{bm}{cn} \frac{b}{c}$ :: BMC CNB :: MN.

Corollaire.

La Raiſon des Racines eſt à la Raiſon des Quarrez comme la derniere Racine eſt à la premiere $\frac{b}{c} \frac{bb}{cc}$ :: CB, & la Raiſon des Quarrez eſt à celle des Racines, comme la premiere racine eſt à la derniere $\frac{bb}{cc} \frac{b}{c}$ :: BC.

Avertissement.

On jugera ſans peine par là de ce qu'eſt la Raiſon des Racines à la Raiſon des Cubes.

III. Theoreme.

Si ayant deux Raiſons quelconques, j'en fais une troiſiéme qui ait pour entecedent le produit des antecedens des deux premieres, & pour conſequent le produit de leurs conſequens, chacune des premieres eſt à la troiſiéme comme le conſequent de l'autre eſt ſon antecedent, c'eſt à dire que la premiere eſt à la troiſiéme, comme le conſequent de la ſeconde eſt à ſon antecedent, & la ſeconde eſt à la troiſiéme, comme l'antecedent de la premiere eſt à ſon antecedent, ſoient les deux Raiſons quelconques, $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$ & la troiſiéme $\frac{bm}{cn} \frac{b}{c} \frac{bm}{cn}$ :: NM & $\frac{m}{n} \frac{bm}{cn}$ :: CB. C'eſt la meſme choſe que le ſecond Theoreme propoſé autrement.

IV. Theoreme.

Si deux Raiſons ſont égales, le Produit des extrémes

est égal au Produit des moyens: & si ces deux Produits sont égaux, les Raisons sont égales. Cela se prouve ordinairement ainsi, soient les deux Raisons $\frac{b}{c}$ $\frac{f}{g}$: On compare le Produit des extremes B G avec le produit des consequens C G & le Produit des moyens avec le mesme Produit des consequens C G, & on raisonne ainsi,

B G. C G :: B C.

& C F. C G :: F G.

Donc si les Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ sont égales, les Raisons $\frac{b}{c}$ $\frac{g}{g}$ seront égales aussi, & ces deux dernieres raisons ayant un mesme consequent, elles ne sçauroient estre égales que leurs antecedens B G & C F ne soient égaux.

Or de ces deux antecedens B G est le Produit des extremes, & C F le produit des moyens. Donc si les Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ sont égales, le Produit des extremes sera égal au Produit des moyens.

Que si au contraire on suppose que B G & C F soient égaux, ils ne pourront avoir qu'une mesme Raison à un mesme consequent C G par S, donc les deux Raisons $\frac{bg}{cg}$ $\frac{cf}{cg}$ sont égales, & pa consequent les deux $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ ausquelles deux autres sont égales chacune à chacune, seront égales: aussi cette demonstaction est tres-ingenieuse & tres-bonne, mais la nostre est beaucoup plus courte & plus claire; car par la seconde proposition generale, deux Raisons quelconques sont entre elles, comme le Produit des extremes, est au produit des moyens.

Donc si elles sont égales, ces deux Produits sont égaux, & si ces deux Produits sont égaux, elles sont égales.

I. Corollaire.

Les 4 Termes d'une proposition sont toûjours proportionnels en quelque façon qu'on les dispose, pourveu que les extrémes demeurent toûjours extrêmes, & les moyens moyens, ou que les deux extrémes deviennent moyens, & les deux moyens extrémes.

Car tant que cela sera dans toutes ces differentes dispositions, le produit des extrémes sera toûjours égal au Produit des moyens, & par consequent les 4 termes ainsi

SCD LYON 1

disposez, seront toûjours proportionnels.

II. Corollaire.

Le Produit des moyens [ou celuy des extrémes qui luy est égal, est moyen proportionnel entre le produit des antecedens & celuy des consequens, c'est à dire que si

B C :: F G ;
B F C F :: C F C G ; car le produit des exremes B F. C G

est égal au produit des moyens C F C F. C F estant commun à l'un & à l'autre, & B G qui reste du premier étant égal à l'autre C F du second.

III. Corollaire.

Les Quarrés des deux termes de chaque Raison, sont entre eux comme le produit des antecedens est au produit des consequens. B B. C C :: B F. C G ;

car B B. C G = C C B F.

C B estant commun à l'un & à l'autre, & B G du premier estant égal à C F du second.

IV. Corollaire.

4. Grandeurs estant proportionnelles, leurs Quarrez le sont aussi. Si B C :: F G.

B B C C :: F F G G ; car B B G G = C C F F.

le prémier estant le Quarré de B G, & le second de C F.

V. Corollaire.

Quatre nombres estant proportionnels, le produit des quatre multipliez l'un par l'autre est necessairement un nombre quarré, qui a pour sa racine le Produit des extrémes ou celui des moyens qui est la mesme chose ; car le produit des quatre nombres proportionnels, est la même chose que le produit des extrémes multipliez par le produit des moyens 2. 3 :: 4. 6. 2 fois 6 [12] par 3 fois 4 [12] font 12 fois 12 ; c'est à dire 144, & c'est absolument la mesme chose que de dire 2 fois 3 sont 6, 4 fois 6 sont 24, 6 fois 24 sont 144.

VI. Corollaire.

On prouve aisément par ce 4 Theoreme, ce qui a esté dit cy-dessus, que quatre grandeurs estant proportionnelles comme B C :: F G. si on en ajoute 2 autres quelconques

conques comme M & N, les quatre Raisons suivantes sont proportionnelles $\frac{c}{m}\frac{n}{f}::\frac{b}{m}\frac{n}{g}$; car par la proposition generale, les deux premieres Raisons sont entre elles comme C F est à M N, & les deux dernieres comme B G est à M N. Or par le Theoreme precedent C F $=$ B G donc C F. M N :: B G. M N; donc $\frac{c}{m}\frac{n}{f}::\frac{b}{m}\frac{n}{g}$ ce qu'il falloit demonstrer.

V. THEOREME.

SI les deux moyens d'une proportion sont égaux aux deux moyens d'une autre proportion, & que l'un des extrémes de l'un soit égal à l'un des extrémes de l'autre, l'autre extréme sera aussi à l'autre extréme, & il n'importe ni que les deux moyens supposez égaux de part & d'autre ne soient pas placez de mesme dans ces deux proportions [comme si c'est le 1 des moyens de la proportion A qui soit égal au 2 des moyens de la proportion C, & le second d'A au premier de C] ni que ce soit le 1 des extrémes d'A qui soit supposé égal au dernier de C, les 2 extrémes d'A & de C n'en seront pas moins égaux.

Demonstr. les 2 moyens d'A estant égaux aux 2 moyens D C. Le produit des moyens d'A sera égal au Produit des moyens de C par le 2 Lemme. Or dans chaque proportion le Produit des moyens est égal au produit des extrémes.

Donc les Produits des extrémes d'A & de C sont égaux aussi.

Or par le 2 Lemme, supposé que l'un des extrémes d'A quel qu'il soit, soit égal à l'un des extrémes de C quel qu'il soit aussi, l'autre extréme d'A, sera égal à l'autre extreme de C.

COROLLAIRE.

SI A & C estoient deux proportions continuës, les deux moyennes proportionnelles estant égales, l'un des extrémes d'A, ne pourroit estre égal à l'un des extrémes de C, que les deux autres extrémes d'A & de C ne fussent

aussi égaux, ce qui est prouvé dans ce Theoreme & ce Corollaire, l'a déja esté plus haut d'une autre façon.

DES RECIPROQUES.

Deux Grandeurs sont dites estre reciproques à deux autres, quand les unes sont les extrémes d'une proportion, & que les autres en sont les moyens. Ainsi dans la proportion B C :: F G. B & G sont reciproques à C & F, & il est clair, par ce qui vient d'estre dit, que quand deux proportions sont reciproques à deux autres, le Produit des unes est égal au produit des autres. Que s'il n'y a que trois Grandeurs dans une proportion, parce qu'elle est continuë, celui du milieu qui sert de consequent à la premiere Raison, & d'antecedent à la seconde, est appellé moyenne proportionnelle, & alors le Quarré de cette Grandeur est égal au Produit des autres Grandeurs. Si B. D :: D H. B H = D D.

VI. Theoreme.

Si deux Grandeurs chacune de deux dimensions sont égales : l'une des dimensions de la premiere est à l'une des dimensions de la seconde, comme l'autre dimension de la seconde est à l'autre dimension de la premiere. Si B G est égal à C F, B sera à C comme F à G, c'est une suitte manifeste de ce qui vient d'estre dit.

VII. Theoreme.

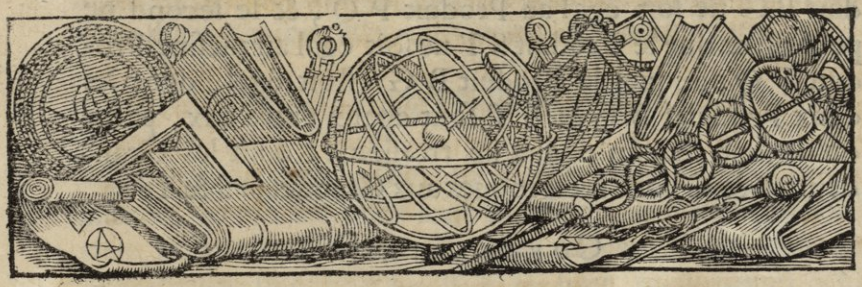
Si deux Grandeurs d'une part, & deux autres d'une autre, sont chacune reciproques à deux autres Grandeurs, elles seront reciproques entre elles. Si B & G sont reciproques à P & Q ; [c'est à dire si B P :: Q G] & que S T soient aussi reciproques à P & Q ; [c'est à dire si S P :: Q T] B & G seront aussi reciproques à S T ; [c'est à dire que B S :: T G.] Car le premier ne peut estre que le Pro-

duit B G ne ſoit égal au Produit P Q, & le ſecond ne peut eſtre que le Produit S T ne ſoit égal au meſme Produit P Q, auquel le Produit B G eſtoit égal, donc les deux Produits B G & S T ſont égaux entre eux, parce qu'ils ſont chacun égal à un troiſiéme, dont les Grandeurs B & G ſont reciproques aux Grandeurs S & T.

COROLLAIRE.

QUATRE Grandeurs eſtant proportionnelles, ſi la 1 eſt à une 5 comme une 6 eſt à la 4, la 2 ſera auſſi à la 5, comme la 6 à la 3; car il eſt clair par l'Hypotheſe que la 1 & la 4 ſont reciproques à la 5 & à la 6. Or la 2 & la 3 ſont auſſi reciproques à la 1 & à la 4 : elles le ſont donc auſſi à la 5 & à la 6. Soient les 4 proportionnelles B C F G, & les deux autres P Q.

Si B C :: F G.
& B P :: Q G.
C P :: Q F.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TROISIE'ME.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

Où l'on fait voir auſſi comment on peut faire ſur les Raiſons les quatre Operations communes Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer.

I. *ON ne s'eſt point encore aviſé que je ſçache de faire ſur les 4 Operations communes Ajoûter, Souſtraire, Multiplier, Diviſer, ce que l'on fait ſur les autres Grandeurs, cependant la maniere dont nous avons expliqué la Nature de la Raiſon dans le Livre precedent, fait voir que cela ſe peut faire ſans peine (& voicy comment.)*

I. LEMME.

Pour l'Addition & Souſtraction.

II. Nous avons déja veu N, que quand deux Rai-

sons ont le meſme conſequent, la Raiſon qui a pour antecedent le premier antecedent plus ou moins le ſecond, & pour conſequent le conſequent commun, ſt ou la ſomme de deux Raiſons, c'eſt à dire l'une plus l'autre ou la difference de ces deux Raiſons, c'eſt à dire la premiere moins la ſeconde. $\frac{B}{X}\ \frac{D}{X}\ \frac{B+D}{X}\ \frac{B-D}{X}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{7}$ $\frac{5+3}{7}\ \frac{5-3}{7}$ delà s'enſuit.

ADDITION.

POUR ajoûter enſemble deux Raiſons quelconques, il ne faut que les reduire à un meſme conſequent. La Raiſon des nouveaux antecedens joints par le ſigne de Plus au commun conſequent, eſt la ſomme de ces deux Raiſons données, ou l'une ajoûtée à l'autre. III.

$$\left\{\begin{matrix}\frac{B}{D} & \frac{S}{T} & \frac{BT}{DT} & \frac{DS}{DT} & \frac{BT+DS}{DT}\\ \frac{7}{5} & \frac{4}{9} & \frac{63}{45} & \frac{20}{45} & \frac{63+20}{45}\end{matrix}\right.$$

autrement la Raiſon qui a pour antecedent le Produit des extrémes, plus le produit des moyens, & pour conſequent le Produit des conſequens, eſt la ſomme de ces deux Raiſons données.

SOUSTRACTION.

POUR ſouſtraire une Raiſon quelconque d'une autre qui ſoit plus grande. Il faut de meſme les reduire à un meſme conſequent, & alors la Raiſon du plus grand antecedent, moins le plus petit au conſequent, eſt la difference de ces deux Raiſons, où la plus grande moins la plus petite $\frac{b}{d}\ \frac{f}{t}\ \frac{bt}{dt}\ \frac{ds}{dt}\ \frac{bt-ds}{dt}\ \frac{7}{5}\ \frac{4}{9}\ \frac{63-20}{45}$. IV.

Autrement aiant mis la plus grande Raiſon la premiere, la Raiſon qui aura pour antecedent le produit des extrémes moins le produit des moyens, & pour conſequent le Produit des conſequens, eſt la difference de ces deux Raiſons ou la plus grande moins la plus petite.

AVERTISSEMENT.

On voit par là que les Geometres appellent Compoſition & Diviſion, quand ils diſent que quatre Grandeurs eſtant pro-

portionnelles Componendo *ou* Dividendo. *La* 1 *plus ou moins, la* 2 *eſt à la* 2 *comme la* 3 *plus ou moins, la* 4 *eſt à la* 4, *a dû eſtre plûtoſt appellé Addition & Souſtraction, & qu'on a dû dire que cela ſe fait* ad dendo *ou* ſubtrahendo, *& c'eſt ainſi que nous avons reſolu de l'appeller dans le reſte de ces Elemens.*

II. Lemme.

V. Pour la Multiplication & la Diviſion comme dans les Grandeurs abſoluës, on a multiplié deux Grandeurs l'une par l'autre, quand l'unité eſt à l'une de ces Grandeurs, comme l'autre eſt à ce qui eſt né de cette Multiplication qu'on appelle le Produit, & qu'on a diviſé une Grandeur par une autre, quand la Grandeur qui diviſe eſt à celle à diviſer, ce qu'eſt l'unité à ce qui eſt né de cette Diviſion qu'on appelle le Quotient.

Il faut auſſi que dans les Grandeurs relatives qui s'appellent Raiſons, on ait multiplié deux Raiſons l'une par l'autre, quand ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives eſt à l'une des Raiſons, comme l'autre eſt à la Raiſon qui eſt née de cette Multiplication.

Et qu'on ait diviſé une Raiſon par une autre quand la Raiſon qui a dû diviſer eſt à celle à diviſer, comme eſt ce qui tient lieu d'unité dans ces Grandeurs relatives à la Raiſon qui eſt née de cette Diviſion.

Or ce qui tient lieu d'unité dans les Grandeurs relatives, c'eſt à dire dans les Raiſons, ne peut eſtre autre choſe que la Raiſon d'égalité qui eſt celle ou l'antecedent eſt égal au conſequent comme $\frac{6}{6}$ $\frac{1}{1}$. Cela eſt clair de ſoy-meſme, & ſe prouve encore par l'analogie des fractions qui ont un parfait raport aux Raiſons comme on l'a déja ſouvent obſervé.

Car dans les fractions, celle dont le numerateur eſt le meſme nombre que le dénonciateur [ce qui revient entierement à la raiſon d'égalité] eſt la meſme choſe que l'unité, deux moitiés $\frac{2}{2}$, trois tiers $\frac{3}{3}$, quatre quarts $\frac{4}{4}$ n'eſtant que l'unité diverſement exprimée.

SCD LYON 1

Cela estant supposé, il est tres-facile de multiplier & de diviser les Raisons.

Multiplication de deux Raisons.

On a multiplié deux Raisons quand on a fait une Raison qui a pour antecedent le produit des antecedens & pour consequent le produit des consequens, ayant les deux Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, elles se trouveront multipliées par la Raison de $\frac{bm}{cn}$. VI.

Pour le prouver il ne faut que montrer que la Raison d'égalité est à la Raison $\frac{b}{c}$ comme la Raison $\frac{m}{n}$ est à la Raison $\frac{bm}{cn}$; c'est à dire que $\frac{c}{c} \frac{b}{c} :: \frac{m}{n} \frac{bm}{cn}$.

Ce qui est facile : Car par 2 $\frac{c}{c} \frac{b}{c}$ :: c b.
& par 2 $\frac{m}{n} \frac{bm}{cn}$ :: c b.
donc $\frac{c}{c} \frac{b}{c} :: \frac{m}{n} \frac{bm}{cn}$.

Division d'une Raison par une autre.

On a divisé une Raison par une autre, quand ayant mis la premiere celle qui doit diviser l'autre, on a fait une Raison qui a pour antecedent le produit des moyens; c'est à dire le produit du consequent de la Raison qui tient lieu de diviseur par l'antecedent de l'autre & pour le consequent le produit des extremes : ainsi $\frac{b}{c}$ a divisé $\frac{m}{n}$ quand on a la Raison de $\frac{cm}{bn}$. Pour le prouver il faut demonstrer que la Raison $\frac{cm}{bn}$ est à la Raison $\frac{m}{n}$ comme la Raison d'égalité est est à la Raison de $\frac{cm}{bn}$; c'est à dire que $\frac{b}{c} \frac{m}{n} :: \frac{x}{x} \frac{cm}{bn}$. Or cela est facile : car par le 2 $\frac{b}{bn} \frac{m}{n}$ :: - bn cm. Or par le 2 $\frac{x}{x} \frac{cm}{bn}$ :: bn cm. donc $\frac{b}{c} \frac{m}{n} :: \frac{x}{b} \frac{cm}{bn}$.

Probleme.

Ayant trois Raisons quelconques, en trouver une quatriéme pour proportionnelle, soient les trois Raisons quelconques $\frac{b}{c} \frac{d}{f} \frac{m}{n}$, les deux du milieu estant multipliées l'une par l'autre, ce qui fait $\frac{dm}{fn}$, si on divise cette nouvelle Raison par la premiere, ce qui donne $\frac{cdm}{bfn}$, cette derniere Raison est la quatriéme, proportionnelle au au regard des trois autres : c'est à dire que $\frac{b}{c} \frac{d}{f} :: \frac{m}{n} \frac{cdm}{bfn}$. VII.

Car $\frac{b}{c} \frac{d}{f}$ :: BF CD. par, & $\frac{m}{n} \frac{cdm}{bfn}$ :: BF CD par

Observation.

Ce que font ces quatre regles sur les Raisons égales, VIII.

l'addition de deux Raiſons égales fait une Raiſon double de chacune. Si BC :: FG $\frac{bg+cf}{cg}$ eſt double de chacune de ces deux Raiſons, la ſouſtraction de deux Raiſons égales donne zero pour l'antecedent, & par conſequent le réduit à rien. Si BC :: FG. $\frac{BG+CF}{CG}$

Car BG = CF, donc l'un moins l'autre n'eſt rien. La multiplication de deux Raiſons égales fait une Raiſon compoſée des deux, qui s'appelle Raiſon doublée, dont on va parler bien-toſt.

La diviſion d'une Raiſon par une autre qui luy eſt égale, donne une Raiſon d'égalité. Si $\frac{b}{c}$ eſt égale à $\frac{f}{g}$, $\frac{b}{c}$ diviſant $\frac{f}{g}$ donne $\frac{cf}{bg}$ qui eſt une Raiſon d'égalité, parce que CF = BG.

DE LA RAISON COMPOSE'E.

IX. Ce qui vient d'eſtre dit de la multiplication des Raiſons fait comprendre ſans peine ce que c'eſt que la Raiſon compoſée ; ce qui n'a point encore eſté bien expliqué par aucun Geometre.

Car au lieu d'en donner une definition generale, ils ſe ſont contentez d'apporter l'exemple d'une Raiſon compoſée dans un cas particulier, comme ſi on n'eût pû avoir d'autre notion plus claire, plus diſtincte & plus univerſelle de la Raiſon compoſée.

„ Lors, diſent-ils, qu'ayant deux grandeurs on en prend „ une troiſiéme telle que l'on veut, & que l'on compa- „ re la premiere des grandeurs données à cette troiſié- „ me, & cette troiſiéme à la ſeconde des données, la „ Raiſon des deux grandeurs données eſt compoſée de „ deux Raiſons, de la premiere grandeur à l'interpoſée „ & de l'interpoſée à la ſeconde : ainſi la Raiſon de B „ à D eſt compoſée des Raiſons de B à X & d'X à D.

Or il eſt auſſi ridicule de ne dire que cela pour expliquer la nature de la Raiſon compoſée, que ſi on ſe contentoit de dire pour définir la proportion Geometrique, que quand la premiere grandeur eſt double de la ſeconde,

SCD LYON 1

de, & la troiſiéme double de la quatriéme, cela s'appelle proportion.

Car comme cette définition de la proportion ſeroit vicieuſe, parce qu'elle ne comprendroit pas tout le défini, celle qu'ils donnent de la Raiſon compoſée ne l'eſt pas moins, parce que bien loin de convenir à toute Raiſon compoſée, ce n'eſt qu'un abregement dans un cas particulier de la maniere dont ſe forment les Raiſons compoſées, comme on le verra plus bas. Voicy donc en general ce que c'eſt que Raiſon compoſée.

DEFINITION DE LA RAISON COMPOSE'E.

IX. LA compoſition des Raiſons n'eſt autre choſe que leur multiplication ; & une Raiſon qui eſt née de la multiplication de deux ou pluſieurs Raiſons, eſt dite compoſée de ces deux ou pluſieurs Raiſons.

C'eſt pourquoy, ſuivant ce qu'on a dit de la multiplication, & y ajoûtant ſeulement les termes de Compoſante & de Compoſée, une Raiſon eſt compoſée de deux Raiſons quand la Raiſon d'égalité eſt à l'une des compoſantes, comme l'autre compoſant eſt à la Raiſon compoſée.

PROPOSITION GENERALE.

X. LA Raiſon qui a pour antecedent le produit de tous les antecedens de pluſieurs Raiſons, & pour conſequent le produit de tous les conſequenens, eſt compoſée de toutes ces Raiſons : ainſi la Raiſon de $\frac{bmp}{cnq}$ eſt compoſée de trois Raiſons $\frac{b}{c}$ $\frac{m}{n}$ $\frac{p}{q}$.

On ne peut le demonſtrer qu'en commançant par deux Raiſons, & en faiſant voir d'abord que $\frac{bm}{cn}$ eſt compoſée des Raiſons $\frac{b}{c}$ $\frac{m}{n}$.

Or il ne faut pour cela que prouver que la Raiſon d'égalité eſt à $\frac{b}{c}$ comme $\frac{m}{n}$ eſt à $\frac{bm}{cn}$; ce qu'on a déja fait en expliquant la Multiplication.

Et quand cela eſt fait des deux premieres, on prouvera de la meſme ſorte que $\frac{bmp}{cnq}$ eſt compoſée de toutes les trois, en faiſant voir qu'elle eſt compoſée de $\frac{bm}{cn}$ [qui l'eſt des deux premieres] & de la la troiſiéme $\frac{p}{q}$.

Car $\frac{x}{x} \frac{bm}{cn} :: cn\ bm$ par 2, & $\frac{p}{q} \frac{bmp}{cnq} :: cn\ bm$ par

Donc $\frac{x}{x} \frac{bm}{cn} :: \frac{p}{q} \frac{bmp}{cnq}$ & par conſequent $\frac{bmp}{cnq}$ eſt compoſé de $\frac{p}{q}$ & $\frac{bm}{cn}$, laquelle l'eſt de $\frac{b}{c}$ & $\frac{m}{n}$, & ainſi l'eſt de toutes trois $\frac{b}{c} \frac{m}{n} \frac{p}{q}$.

Suite importante de la vraye notion de la Raiſon compoſée.

XI. La veritable notion de la Raiſon compoſée eſtant une fois établie, qui eſt la Raiſon du produit des antecedens de deux ou pluſieurs Raiſons au produit de leurs conſequens, il s'enſuit de là une choſe fort remarquable; c'eſt que lors qu'il ſe rencontre dans les Raiſons compoſantes des antecedens égaux aux conſequens, il faut les ôter un pour un avant que de former les produits des antecedens & des conſequens, qui doivent faire l'antecedent & le conſequent de la Raiſon compoſée, ſi on veut qu'elle ſoit réduite aux moindres termes qu'elle peut eſtre.

Que ſi ces antecedens & conſequens égaux eſtans ôtez, il ne reſtoit qu'un antecedent & un conſequent dans les Raiſons compoſantes, cét antecedent & conſequent ſera toute la Raiſon compoſée: & s'il ne reſtoit rien, la Raiſon compoſée ſeroit d'un à un, parce que ce ſeroit une marque que le produit des antecedens ſeroit égal au produit des conſequens.

On verra mieux tout cela par des exemples.

RAISONS COMPOSANTES.

XII. $\frac{b}{d} \frac{e}{p} \frac{d}{r} \frac{p}{ſ} \frac{q}{b} \frac{cq}{rſ}$
$\frac{m}{d} \frac{n}{ſ} \frac{ſ}{m} \frac{x}{n} \frac{x}{d}$
$\frac{a}{o} \frac{e}{a} \frac{o}{e} \frac{i}{i}$

La Raiſon de cela, eſt que quand on auroit mis toutes ces lettres ſemblables dans le produit des antecedens & dans celuy des conſequens, il les en faudroit ôter pour avoir la Raiſon de ces produits reduite aux moindres termes qu'elle peut eſtre, ſelon ce qui a eſté dit cy-deſſus.

Il vaut donc mieux les retrancher d'abord, comme inutiles, quand on ne veut qu'avoir la Raiſon de ces

Produits qui est la Raison composée.

On peut tirer delà divers Corollaires qui donneront une grande lumiere à toute cette matiere de la Raison composée.

I. Corollaire.

Quand une de ces Raisons composantes, est une Raison d'égalité; Il ne la faut que retrancher comme inutile à la Rrison composé $\frac{x}{y}\frac{b}{c}\frac{m}{n}\frac{bm}{cd}$ $\frac{x}{y}\frac{b}{c}\frac{b}{c}$. XIII.

II. Corollaire.

Quand les deux Raisons composantes ont la mesme grandeur pour leurs extrémes, la Raison composée a pour son antecedent l'antecedent de la Raison, & pour son consequent le consequent de la premiere $\frac{x}{b}\frac{d}{y}\frac{d}{b}$. XIV.

III. Corollaire.

Lors qu'au contraire les deux Raisons ont la mesme grandeur pour moyens 1 [comme il arrive dans les Raisons que nous avons dites, se pouvoir appeller continuës.] La Raison composée a pour son antecedent l'antecedent de la 1 Raison, & pour son consequent le consequent de la 2. XV.

IV. Corollaire.

Quand il y a de suitte plusieurs de ces Raisons continuës égales ou inégales; c'est à dire qui sont telles que le consequent de la precedente est toûjours l'antecedent de la suivante, la Raison du premier antecedent au dernier consequent est composée de toutes ces Raisons. XVI.

$\frac{b}{c}\frac{c}{d}\frac{d}{f}\frac{f}{g}\frac{g}{h}\frac{b}{b}$.

V. Corollaire.

Ce qui vient d'estre dit est la mesme chose que ce qu'on propose en cette matiere, ayant plusieurs Grandeurs de suitte, la Raison de la premiere à la derniere est composée de toutes les Raisons continuës, de toutes les Grandeurs, c'est à dire des Raisons de la 1. à la 2, & de la 2 à la 3, & de la 3 à la 4 jusqu'à la derniere, c'est la mesme chose que le 2e Theoreme, & que le 1e Corollaire s'il n'y a que trois Grandeurs; car ayant ces grandeurs b XVII.

$c\,d\,f\,g\,h$, leurs Raisons continuës sont $\frac{b}{c}\,\frac{c}{d}\,\frac{d}{f}\,\frac{f}{g}\,\frac{g}{h}$. Donc par le 2 Theoreme la Raison $\frac{b}{h}$ à $\frac{b}{h}$ est composée de toutes ces Raisons, & s'il n'y a que trois Grandeurs $b\,c\,d$. La Raison de b à d $\frac{b}{d}$ par le 1 Corollaire est composée de deux Raisons $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{d}$.

VI. Corollaire.

XVIII. Si entre deux Grandeurs données, on en interpose une ou plusieurs autres à discretion, la Raison des Grandeurs données sera composée de deux ou de plusieurs Raisons continuës que formeront ces Grandeurs données avec les interposées. Soient les données $b\,d$ l'interposée à discretion x ou si on en veut mettre plusieurs $x\,y\,z$, ce qu'on a dit des 3 Grandeurs ne peut pas n'estre point vray de $b\,x\,d$.

VII. Corollaire.

XIX. Deux Raisons estant égales, si on en renverse une en faisant l'antecedent du consequent, & le consequent de l'antecedent, la Raison composée de ces deux Raisons, dont l'une est renversée est une Raison d'égalité. J'en laisse à trouver la demonstration.

III. Theoreme.

XX. Deux Raisons composées sont égales quand les Raisons composantes de l'une, sont égales chacune à chacune aux Raisons composantes de l'autre, toute raison composée est le 4 terme d'une proportion, dont la Raison d'égalité fait le premier terme, & les deux Raisons composantes le 2 & le 3, donc les Raisons d'égalité estant égales dans l'une & l'autre proportion.

Si les Raisons composantes d'une part sont égales aux Raisons composantes de l'autre part, les trois premiers termes de l'une sont égaux aux trois premiers termes de l'autre.

Et par consequent les deux Raisons composées qui en sont chacune le 4 terme, seront égales par 2.

IV. Theoreme.

XXI. Si les Raisons donc une raison est composée sont toutes deux de moindres inégalité, la composée est moindre

qu'aucune des composantes. Si elles sont toutes deux de plus grande inégalité la composée est plus grande qu'aucune des composantes. Si l'une est de moindre inégalité, & l'autre de plus grande inégalité, l'acomposée sera plus petite que celle de plus grande inégalité, & la plus grande que celle de moindre inégalité. Tout cela dépend de deux principes.

L'un que toute raison composée est le 4e terme d'une proportion dont la Raison d'égalité est le premier terme & les deux composantes, le 2 & le 3 terme, l'autre que la Raison composante qui fait le 3 terme de cette proportion est à la composée, comme le consequent de celle qui en fait le 2 terme est à son antecedent par 2 & cy-dessus.

Donc quand l'une & l'autre composante est de moindre inégalité, le consequent de chacune estant plus grand que son antecedent, elles ne pourront estre disposées de sorte que l'une & l'autre ne soit plus grande que la composée, $\frac{1}{1}\ \frac{2}{3} :: \frac{4}{5}\ \frac{8}{15} :: 32$

$\frac{1}{1}\ \frac{4}{5} :: \frac{2}{3}\ \frac{8}{15} :: 54$ & au contraire par le mesme principe quand les deux composantes sont de plus grandes inégalité, le consequent de chacune estant plus petit que son antecedent, chacune aussi est plus petite que la composée. $\frac{3}{1}\ \frac{3}{2} :: \frac{5}{4}\ \frac{15}{8} :: 23.\ \frac{2}{2}\ \frac{5}{4} :: \frac{2}{2}\ \frac{15}{8} :: 45.$

Mais si l'une des composantes est de moindre inégalité, le consequent en l'une estant plus grand que l'antecedent & moindre en l'autre, la composante de plus grande inégalité sera plus grande que la composée, & celle de moindre inégalité plus petite que la composée. $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3} :: \frac{7}{5}\ \frac{14}{15} :: 32.\ \frac{1}{1}\ \frac{7}{5} :: \frac{2}{3}\ \frac{14}{15} :: 57.$

Observation sur ce Theoreme.

On voit clairement par ce qui vient d'estre demonstré dans ce Theoreme, que la composition des Raisons n'en peut estre une Addition, mais en doit estre une Multiplication; car il est contre la nature de l'Addition que deux choses ajoûtées ensemble fassent un tout qui soit moindre que chacune, parce qu'il faudroit pour cela XXIII.

qu'un tout fuſt moindre que la partie, mais il en eſt tout autrement de la Multiplication, dans laquelle il ſe peut faire que deux choſes eſtant multipliées l'une par l'autre, il en naiſſe un Produit qui ſoit moindre que chacune, & cela arrive toûjours quand les deux choſes que l'on multiplie ſont moindres chacune que l'unité, comme quand on multiplie un tiers par un quart, ce qui fait un douziéme, & c'eſt ce qui fait encore voir la parfaite analogie des nombres aux raiſons ; car il n'arrive jamais que la Raiſon compoſée ſoit plus petite qu'aucune des compoſantes, que quand chacune des compoſantes eſt de moindre inégalité, & qu'elle eſt par conſequent plus petite que la Raiſon d'égalité qui tient lieu d'unité dans les Raiſons.

Quand une Raiſon eſt compoſée de pluſieurs Raiſons égales, ſi c'eſt de deux, elle s'appelle doublée, de trois triplée, de quatre quadruplée, &c.

V. THEOREME.

XXIII. S'IL y a pluſieurs termes en proportion continuelle ; c'eſt à dire que le premier ſoit au ſecond, comme le 2 au 3, & le 3 au 4 & le 4 au 5, ce qui s'appelle Progreſſion Geometrique, la Raiſon d'un terme à l'autre, ſera ſimple ou doublée, ou triplée ou quadruplée, &c. ſelon que ces termes ſeront diſtans l'un de l'autre ; car s'ils ſe ſuivent immediatement, leur Raiſon ſera ſimple, c'eſt à dire la meſme qui regne dans toute la Progreſſion.

S'il y a un terme entre deux qui eſt une moyennne proportionelle leur Raiſon ſera doublée, c'eſt à dire compoſée de deux Raiſons ſimples, qui par l'hypotheſe ſont égales.

S'il y a deux termes entre deux, c'eſt à dire deux moyennes proportionnelles, leur raiſon ſera triplée s'il y en a trois quadruplée, &c.

VI. THEOREME.

XXIV. LA Raiſon d'une grandeur de pluſieurs dimenſions à toute autre grandeur homogene, d'autant de dimenſions eſt compoſée de toutes les Raiſons de chacune des

SCD LYON 1

dimensions d'une grandeur à chacune des dimensions de l'autre : ce n'est qu'une application de la definition de la Raison composée; car comparant chacune des dimensions d'une grandeur à chacune des dimensions de l'autre, on met tous les antecedens de ces Raisons dans une des grandeurs, & tous les consequens dans l'autre. Or une Grandeur de plusieurs dimensions est la mesme chose que le Produit de ces dimensions multipliées l'une par l'autre : Et par consequent les grandeurs sont entre elles, comme le produit de leur dimension, c'est à dire comme le Produit des antecedens des Raisons de chacune des dimensions de l'une à chacune des dimensions de l'autre au Produit des consequens de ces mesmes Raisons, ce qui est une Raison composée de ces Raisons par la définition mesme de la Raison composée.

I. COROLLAIRE.

TOUTE Grandeur plane est à une autre Grandeur plane en raison composée de deux raisons de chacun des côtez de l'une à chacun des côtez de l'autre, c'est la mesme chose que la precedente. XXV.

II. COROLLAIRE.

TOUTE Grandeur solide est à une autre Grandeur solide en raison composée de trois raisons de chacune des côtez de l'un à chacune des côtez de l'autre, c'est la même chose que la proposition generale. XXVI.

III. COROLLAIRE.

LES Grandeurs planes & solides ayant quelqu'une de leurs dimensions égale & l'autre inégale sont entre elles comme les inégales. *b f. b g :: f g. b f d. b f g. :: d g. b f d. b m n :: f d. m n.* XXVII.

IV. COROLLAIRE.

LES plans dont les deux dimensions ont mesme raison, chacune de l'un à chacune de l'autre, sont en raison doublée de cette mesme raison. Cela est clair par le premier Corollaire & la définition de la Raison doublée. XXVIII.

SCD LYON 1

V. COROLLAIRE.

XXIX. LES solides dont les trois dimensions ont mesme raison chacune de l'un à chacune de l'autre, sont en raison triplée de cette raison. Cela est encore clair par le second Corollaire, & la définition de la raison triplée.

VI. COROLLAIRE.

XXX. TOUS les Quarrez & les Cubes sont en raison, les uns doublez, & les autres triplez de la raison de leurs racines, car toutes les dimensions des Quarrez & des Cubes estant égales entre elles, elles ne peuvent pas n'avoir pas chacune la mesme raison à chacune des dimensions des autres Quarrez & des autres Cubes.

VII. COROLLAIRE.

XXXI. SI 4 Grandeurs sont proportionelles, leurs Quarrez & leurs Cubes le sont aussi. Si *b c*: : *f g bb. cc*: : *ff gg. bbb ccc* : : *fff ggg* ; car les Quarrez estant en raison doublée, leurs Racines & leurs Cubes en raison triplée, les Raisons doublées, & les triples de Raisons égales doivent estre égales par le 3e Theoreme.

VIII. COROLLAIRE.

XXXII. LE Produit de deux Grandeurs quelconques est moyen proportionnel entre les Quarrez de chaque Grandeur. Soient les Grandeurs *b* & *c*. *bb. bc* : : *bc cc* ; car *bb. bc* : : *b. c.* & *bc. cc* : : *b. c.*

C'est la mesme chose que de dire que le Produit de la toute, & d'une partie est moyen proportionnel entre le Quarré de la toute & le Quarré de cette partie ; car il est visible que si la toute est *t* & *m* une partie *tt. t. m* : : *t m. mm.*

IX. COROLLAIRE.

XXXIII. EN toute Progression Geometrique, les Quarrez de deux termes qui se suivent immediatement sont entre eux comme deux termes, entre lesquels il y en a un d'interposé. Soient ∴ *b c d f g* en Progression Geometrique. Je dis que *b b. cc* : : *b. d* ou *cc dd* : : *c f* ; car la Raison de *b d* est doublée de celle de *bc.* Or par le 6 Corollaire, les Quarrez *bb* & *cc*, sont aussi en raison doublée

doublée de celle de *b c* Cela se peut prouver encore d'une autre sorte. Si ∷ *b c d f*. *b d* = *c c*. Or *b b*. *b d* :: *b d* donc *b b c c* :: *b d*.

X. COROLLAIRE.

EN toute la Progression Geometrique, les Cubes de deux termes qui se suivent immediatement, sont entre eux comme deux termes, entre lesquels il y en a deux d'interposez ; car les Cubes sont en raison triplée de la Raison de la Progression, & les termes entre lesquels il y en a deux d'interposée, sont aussi en raison triplée de cette mesme raison, cela se peut prouver aussi par Corollaire 7e ; car si ∷ *b c*. *d f*. par *b b*. *c c* :: *c f*, donc *b b f*. = *c c c*. Or *b b b*. *b b f* :: *b f*. donc *b b b*. *c c c* :: *b f*. XXXIV.

XI. COROLLAIRE.

C'EST par là qu'on a trouvé comment il s'y falloit prendre pour doubler un Cube donné ; car ayant un Cube donné *b b b*. Il faut prendre *f* double de *b*, & si on peut trouver deux moyennes continuëment proportionnelles entre *b* & *f*, comme seroient *c* & *d* : ensorte que soient *b c d f*. Le Cube de *c* premiere de ces moyennes proportionnelles sera double du Cube de *b*. XXXV.

VII. THEOREME. DEFINITION.

DEUX Grandeurs planes qui sont telles que les deux dimensions de l'une sont les extrémes d'une proportion, dont les deux dimensions de l'autre, sont les moyens, ou [ce qui est la mesme chose] que l'une des dimensions de la premiere soit à l'une des dimensions de la seconde, comme l'autre dimension de la seconde est à l'autre dimension de la premiere sont appellées reciproques, & sont toûjours égales. XXXVI.

Soient *b g* & *c f*. Je dis que si *b* est à *c* comme *f* est à *g*

b c :: *g f*.

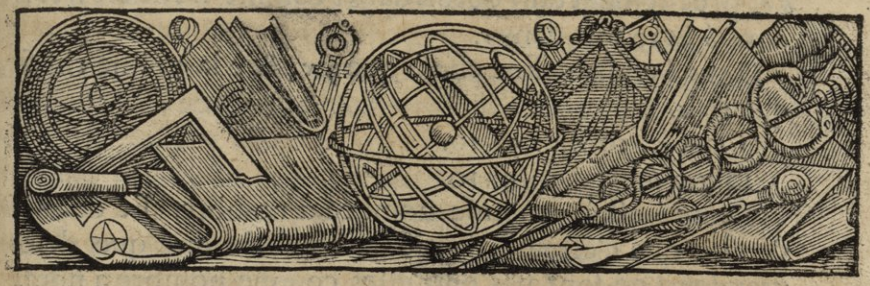
b g = *c f*.

SCD LYON 1

Or par 2 le Produit des extrémes *b g* qui eſt le premier de ces deux plans eſt égal au Produit des moyens *c f* qui eſt le ſecond de ces deux plans.

VIII. Theoreme.

Les Grandeurs planes égales ſont toûjours reciproques, c'eſt à dire les deux dimenſions de l'une ſont les extrémes de la proportion dont les deux dimenſions de l'autre ſont les moyens. Si *b g* eſt égal à *e f*. Je dis que *b c* :: *f g*.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUATRIE'ME.

DES GRANDEURS COMMENSURABLES ET INCOMMENSURABLES.

NOus *avons dit generalement qu'il y a deux sortes de raisons ; la raison de nombre à nombre, & la raison sourde ; & comme c'est par là que les grandeurs sont commensurables & incommensurables, la suite naturelle nous oblige de parler de ces sortes de Grandeurs.* I.

DEFINITION.

C'EST la même chose de dire que deux grandeurs sont commensurables, & de dire qu'elles sont comme nombre à nombre. II.

Car afin que *b* soit commensurable à *c*, il faut que quelque grandeur comme *x* soit préciſément tant de fois dans

b & préciſément tant de fois dans *c* comme ſi elle eſt 9 fois dans *b* & 10 fois dans *c*.

Donc *b* eſt la meſme choſe que 9 *x*, & *c* la même choſe que 10 *x*.

Or 9 *x*. 10 *x* :: 9. 10.

Donc *b*. *c* :: 9. 10.

Donc *b* eſt à *c* comme nombre à nombre. Et delà il s'enſuit que c'eſt auſſi la même choſe de dire que deux grandeurs ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre, & de dire qu'elles ſont incommenſurables, puiſque ſi elles eſtoient commenſurables elles ſeroient comme nombre à nombre.

SECTION PREMIERE.

Des Grandeurs commenſurables ou des Raiſons de nombre à nombre.

III. TOUT ce qui a eſté dit dans les deux Livres precedens des Raiſons en general, peut eſtre appliqué ſans peine aux Raiſons de nombre à nombre. Ce n'eſt donc pas ce que l'on va faire icy : ce ſeroit une repetition inutile. Mais on parlera ſeulement de ce qui convient ſpecifiquement aux Raiſons de nombre à nombre, & en quoy elles ſont differentes des Raiſons Sourdes.

I. LEMME.

Marquer les nombres par lettres.

IV. ON peut marquer les nombres par lettres comme les autres grandeurs : & alors il faut obſerver en faiſant les quatre operations ſur les nombres que l'on a marquez par lettres, tout ce qui a eſté dit dans le I. Livre de ces operations ſur les grandeurs quelconques : D'où naît pluſieurs differences entre cette maniere de marquer les nombres par lettres, & celle de les marquer par chiffres.

1. Une ſeule lettre peut marquer quand on veut quelque grand nombre que ce ſoit ; au lieu qu'il faut beaucoup de caracteres pour marquer les grands nombres.

2. Les chiffres changent dans l'Addition, Souſtraction, Multiplication des nombres ; mais les lettres ne changent point : Car ſi *b* ſignifie 4. & *a* 5, pour les adjoûter

SCD LYON 1

en chiffres je mettray 9, & par lettres je mettray $b+a$. Et pour multiplier en chiffre je mettray 20, & par lettres je mettray ba: & c'eſt en cela qu'eſt le plus grand avantage des lettres; car les multiplications s'y font ſans peine, & laiſſent toûjours voir les nombres par leſquels on a multiplié; au lieu que deux grands nombres ſont difficiles à multiplier par chiffres, & on ne voit plus dans le produit les nombres dont il a eſté fait.

3. Le rang dans les chiffres fait tout; car 29 & 92 ſont deux nombres bien differens: Mais il ne fait rien dans les lettres quand on les joint enſemble, ce qui marque une multiplication; car il n'importe par où on commence la multiplication de deux nombres. C'eſt toûjours la meſme choſe 5 fois 4, ou 4 fois 5: & ainſi *bcd*, *bdc*, *dbc* marquent le meſme chiffre.

4. Les chiffres ſignifient des nombres déterminez: & un meſme caractere dans la meſme place des unitez, des dixaines, &c. ne peut ſignifier que la meſme choſe. Mais les lettres ſignifient des nombres quelconques; en obſervant neanmoins que dans une meſme operation la meſme lettre doit ſignifier le meſme nombre.

II. LEMME.

CETTE maniere de marquer les nombres par lettres, fait voir que les nombres peuvent eſtre conſiderez comme eſtant d'une dimenſion, ou de deux, ou de trois, ou de quatre, &c. V.

On conſidere un nombre comme eſtant d'une ſeule dimenſion, lors qu'on regarde ſimplement ce qu'il contient d'unitez & qu'on le marque par une ſeule lettre, ſoit qu'il ait beſoin pour eſtre écrit en chiffre d'un ſeul ou de pluſieurs caracteres. Ainſi 72 marqué par un *s*, eſt un nombre d'une ſeule dimenſion.

On le conſidere comme ayant deux dimenſions, lors qu'il eſt exprimé par deux lettres qui marquent deux nombres, qui ſe multipliant l'un l'autre font le nombre total qu'on veut exprimer, Ainſi *b* ſignifiant 2, & *p* 36, *bp* ſignifie deux fois 36, ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 3 dimensions, lors qu'il est exprimé par 3 lettres, qui marquent 3 nombres, dont le 3e multiplie le produit des deux premiers. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3 & *m* 12 : *b cm* signifie 2 fois 3 fois 12. c'est à dire, 6 fois 12 ; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant 4. dimensions, lors qu'il est exprimé par 4 lettres qui marquent 4 nombres, dont le 3e ayant multiplié le produit des deux premiers, le 4. multiplie le produit des 3. autres. Ainsi *b* signifiant 2, *c* 3, & *d* 4 ; *bcdc* signifie 2 fois 3 fois 4 fois 3 ; c'est à dire, 6 fois 4 fois 3, ou 24 fois 3 ; ce qui fait encore 72.

On le considere comme ayant cinq dimensions, lors qu'il est exprimé par 5. lettres.

De 6 quand par 6.

De 7 quand par 7.

De 8 quand par 8, &c.

III. Lemme.

VI. On voit assez que deux mesmes lettres, comme *bb* ou *cc*, doivent faire un nombre quarré ; & 3 mesmes lettres, comme *bbb*, un nombre cubique.

Mais il y a encore une autre observation à faire sur ces nombres. C'est qu'un nombre est reconnu pour quarré non seulement quand il est exprimé par deux mêmes lettres comme *bb*, mais aussi quand on partage en deux parts égales les lettres d'un nombre, en sorte que les mêmes lettres se trouvent en l'une & en l'autre partie. Ainsi *bbcc*, ou *bbccdd*. sont des nombres quarrez, parce que l'un se peut partager en *bc* & *bc*, & l'autre en *bcd* & *bcd*. Car on a déja veu qu'il n'importoit de rien en quelque maniere que les lettres fussent rangées.

Un nombre de même est cubique non seulement quand il est exprimé par les trois mêmes lettres comme *bbb*, mais aussi quand les lettres qui le marquent peuvent estre divisées en trois parts égales dont chacune contienne les mêmes lettres. Ainsi *bbbccc*, ou *bbbcccddd* sont deux nombres cubiques, parce que le premier se peut partager en *bc*, *bc* & *bc*, & l'autre en *bcd*, *bcd* & *bcd*.

SCD LYON 1

COROLLAIRE.

IL s'ensuit delà sans autre preuve, que le produit de deux nombres quarrez est toûjours un nombre quarré qui a pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres quarrez. Ainsi *b b* en *c c* fait *b b c c*, qui a pour sa racine *b c*. Et que le produit de deux nombres cubiques est toûjours un nombre cubique, qui a aussi pour sa racine le produit des deux racines des deux autres nombres cubiques. VII.

IV. LEMME.

LES exposans d'une raison de nombre à nombre sont necessairement ou deux nombres impairs, ou un nombre pair & un impair, mais ce ne peut estre deux pairs; car deux pairs pouvant encore l'un & l'autre estre partagez par la moitié. Cette raison n'auroit pas esté reduite aux moindres termes qu'elle l'auroit pû estre & cette division par la moitié fera enfin que ces deux pairs se reduiront ou à deux impairs comme la raison de 10 à 6 se reduit à la raison de 5 à 3, ou au moins à un pair & à un impair comme la raison de 8 à 14 se reduit à la raison de 4 à 7. VIII.

V. LEMME.

QUOY que deux nombres n'ayent pas autant de dimensions l'un que l'autre, ils ne laissent pas de pouvoir estre comparez ensemble, parce que tous les nombres estant mesurez par l'unité ont toûjours raison l'un à l'autre. IX.

Neanmoins il est souvent utile de pouvoir faire que le nombre qui auroit moins de dimensions que l'autre, en ait autant demeurant le même, & cela est aisé.

Car reservant la lettre (*i*) pour marquer l'unité il ne faut qu'augmenter les lettres du nombre qui en a moins que l'autre, d'autant d'*i* qu'il est necessaire pour faire qu'il y ait autant de lettres à l'un qu'à l'autre. Ainsi ayant à comparer *b* avec *b x*; ajoûtant un *i* à *b*, *b i* aura autant de dimensions que *b x*.

Et neanmoins *b i* sera le même nombre que *b*, parce que l'unité multipliant un nombre ne le change point; 4 fois un, ou une fois 4, estant la même chose que quatre.

Et quand on le multiplieroit 2, 3 & 4 fois par l'unité, ce seroit toûjours de même : comme il se voit en ce que l'unité prise une fois (ce qui peut estre marqué par un seul *i*) est un nombre lineaire & multiplié par soy-même, ce qui peut estre marqué par deux (*ii*) est un nombre quarré, quoy que ce soit toûjours un : Et marqué par trois (*iii*) un nombre cubique : Et par quatre (*iiii*) un nombre quarré de quarré : Et ainsi à l'infini. D'où il s'ensuit que comme un seul (*i*) n'apporte aucun changement au nombre auquel il est ajoûté, deux, trois, quatre *i*, n'en apportent point aussi.

Cette observation sera de grand usage dans les Theoremes suivans.

VI. Lemme.

X. Il est bon pour distinguer plus facilement les nombres pairs des impairs de marquer les nombres pairs par des consonnes, & les impairs par des voyelles, reservant toûjours *l* pour l'unité : neantmoins quand on ne considere ni les pairs ni les impairs, les consonnes alors se prendront pour les nombres en general.

VII. Lemme.

XI. Outre cette maniere de marquer par lettres les nombres que l'on veut multiplier, on peut aussi en les marquant par les chiffres ordinaires avoir presque les mesmes avantages, qui sont. 1, Que les nombres multiplians & multipliez paroissent toûjours. 2, Qu'on voit tout d'un coup combien de dimensions est chaque nombre. 3. Que l'on voit sans peine les exposans de chaque raison de nombre à nombre.

Il ne faut pour cela que faire deux choses. La 1re est de mettre une virgule entre deux, ou trois, ou quatre, ou cinq nombres que l'on veut multiplier les uns par les autres, en se souvenant que cette virgule veut dire *fois*.

Ainsi 4, 5, voudra dire 4 fois 5 *c.* 20.

5, 12. 5 fois 12 *c.* 60.

5, 6,

5, 6, 7, 8. 5 fois 6 fois 7 fois huit, *c.* 30 fois 7 qui font 210, & 8 fois 210 ce qui fait 1680.

Les quarrez se mettront de mesme.

3, 3. Quarré de 3. 9.

4, 4. Quarré de 4. 16.

12, 12. Quarré de 12. 144.

36, 36. Quarré de 36. 1296.

Les Cubes de mesme.

4, 4, 4. Le Cube de 4. 64.

10, 10, 10. Le Cube de 10. 1000.

On peut aussi dans cette maniere faire les nombres d'autant de dimensions les uns que les autres, en multipliant par 1 c'est à dire par l'unité ceux qui n'en ont pas tant, & mettant la virgule entre deux. Ainsi si je veux comparer 4 à 4, 7. Je n'auray qu'à mettre 4, 1 & 4, 7. Ce qui signifiera 4 fois 1, & 4 fois 7. Ce qui peut estre de grand usage dans les proportions.

L'autre invention qui n'est que pour les nombre quarrez, cubiques, quarrez de quarrez, &c. C'est de faire comme aux lettres mettre au dessus un peu à costé un petit 2 pour les quarrez, un 3 pour les cubes. Un 4. pour les quarrez de quarrez, &c.

Ainsi 8^2 marquera le quarré de 8. 64.

8^3. Le cube de 8. 512.

8^4. Le quarré de quarré 8. 4096.

DEFINITIONS.

Il y a quelques definitions qu'il faut sçavoir pour bien comprendre les raisons de nombre à nombre. XII.

1. Un nombre est dit en diviser un autre, ou en estre la mesure quand il y est précisement tant de fois.

Aussi l'unité est la mesure de tous les autres nombres, & tous les autres nombres sont multipliés de l'unité.

2. Elle est la mesure de tous les autres nombres pairs, & tous les nombres pairs sont multiples de l'unité.

Mais il faut remarquer 1, que chaque nombre est la mesure de soy-mesme, parce qu'il est une fois dans soy-

meſme. Et ainſi tout nombre a au moins deux meſures, ſoy-meſme & l'unité. Il n'y a que l'unité qui n'a que ſoy-meſme. 2, Que toutes meſures ſont doubles, ſi ce n'eſt dans les quarrez, où un nombre ſe multiplie ſoy-même; Car ſi 3 par exemple eſt le quart de 12, quatre en ſera le tiers. Si 5 eſt le 12me de 60, 12 en ſera le 5me.

3. On dit qu'un nombre eſt nombre premier, quand il n'a de meſure que l'unité & ſoy-meſme, (ce qui ſe ſous-entend ſans qu'on le diſe.) Comme 2. 3. 5. 7. 11. 13, &c.

Hors le nombre de deux nul nombre pair ne peut eſtre premier, parce que tous (hors deux) peuvent au moins eſtre diviſez par 2.

4. Deux nombres ſont premiers entr'eux, quand ils n'ont de meſure commune que l'unité.

Il s'enſuit delà que deux nombres differens qui ſont chacun premiers le ſont entr'eux, comme 5. 7. 11. J'ay dit deux nombres differens; car deux meſmes nombres comme 5 & 5, quoy que chacun ſoit premier, ne le ſont point entr'eux; Car outre l'unité eſtant chacun à ſoy-meſme ſa meſure, ils ont encore cette meſure commune.

Deux nombres qui ſe ſuivent ſont premiers entr'eux.

Deux impairs qui ſe ſuivent comme 7 & 9 le ſont auſſi.

Tous les quarrez ſont premiers entr'eux, lors que leurs racines ſont des nombres premiers, ou ſeulement premiers entr'eux, quoy que nul quarré ne puiſſe eſtre nombre premier 9. 25. 49. 64. 81.

Deux nombres premiers entre eux, ne ſçauroient tous deux eſtre pairs. Il faut qu'au moins l'un des deux ſoit impair; car deux pairs auroient le nombre de deux pour meſure commune.

La Notion des Raiſons de nombre à nombre.

XIII. La raiſon de nombre à nombre eſt bien plus facile à concevoir que la raiſon des grandeurs en general, à cauſe que les nombres ont toûjours l'unité pour commune meſure, & qu'il y a des grandeurs qui n'ont aucune meſure commune.

SCD LYON 1

Ainsi la raison de deux nombres ne consiste qu'en ce que l'un est tant de fois dans l'autre. Si l'un est multiple de l'autre, comme 4 est 3 fois dans 12, ou que quelque aliquote de l'un est precisement tant de fois dans l'autre, ce qui est toûjours certain au moins de l'unité, comme 2 qui est le tiers de 6, est quatre fois dans 8. L'unité qui est le quart de quatre, est 7 fois dans 7.

Or delà il est aisé de comprendre qu'afin que la raison de deux nombres soit égale à la raison de deux autres, il faut que si le second est multiple du premier, le troisiéme soit autant de fois dans le quatriéme que le premier est dans le second, ou que si le premier n'a que quelqu'un de ses aliquotes qui soit tant de fois dans le second, une aliquote pareille du troisiéme, soit autant de fois dans le quatriéme, c'est à dire que si le tiers du premier est cinq fois dans le second: il faut aussi que le tiers du troisiéme soit cinq fois dans le quatriéme. Quatre est 5 fois dans 20 comme 7 est 5 fois dans 35.

La moitié de 6 est 5 fois dans 15, comme la moitié de 8 est 5 fois dans 20.

Division Generale.

La plus generale division des raisons de nombre à nombre, est de dire que les uns sont premiers, & les autres non premiers. XIV.

J'appelle premieres celles dont les termes sont premiers entre eux, comme la raison de l'unité à tout autre nombre: La raison de 2 a tout nombre impair.

J'appelle non premieres, celles dont les termes ne sont pas des nombres premiers entre eux, comme 8. 12. 15. 20. 45. 81.

Propositions Fondamentales.

Deux raisons premieres estant differentes ne sçauroient estre égales. XV.

Chaque raison premiere peut estre égale à une infinité de non premieres.

Chaque raiſon non premiere peut eſtre reduite à une premiere qui luy ſera égale.

Il faut prouver toutes ces trois propoſitions.

La premiere ſe prouve ainſi. Deux nombres premiers entre eux n'ont de meſure commune que l'unité qui eſt l'aliquote qui prend ſa denomination du nombre meſme. comme l'unité eſt une ſeiziéme de 16. Si je compare donc 16 à 25 qui ſont deux nombres premiers entre eux (quoy que nul ne ſoit premier.) La raiſon de 16 à 25 ne conſiſte qu'en ce qu'une 16me de 16 eſt 25 fois dans 25. Or dans l'infinité des nombres, il n'y a que 16 & ſes multiples, comme 2 fois 16, 3 fois 16 qui ait des ſeiziémes, & il n'y a auſſi que 25 & ſes multiples, comme 2, 25. 3, 25. en qui quelque nombre puiſſe eſtre préciſement 25 fois. Or deux nombres dont l'un ſeroit multiplié de 16, & l'autre de 25 ne ſeroient pas des nombres premiers entre eux. Donc il eſt impoſſible que deux raiſons premieres eſtant differentes ſoient égales.

PREUVE DE LA DEUXIEME PROPOSITION.

XVI. ELLE eſt claire par ce qui vient d'eſtre dit; car deux nombres premiers entre eux peuvent eſtre chacun multipliés par un meſme nombre, & cela une infinité de fois: ny ayant point de nombre qui ne puiſſe multiplier l'un & & l'autre. Et alors (par 11. 51.) cette raiſon non-premiere ſera égale à la premiere.

PREUVE DE LA TROISIEME PROPOSITION.

XVII. UNE raiſon non premiere eſt celle qui eſt entre deux nombres non premiers entre eux. Or afin que deux nombres ſoient non premiers entre eux: il faut qu'il ayent une commune meſure autre que l'unité, & que par conſequent ils ſoient multiples d'un meſme nombre. Ils ont donc chacun deux dimenſions, & en ont une commune. Ils peuvent donc eſtre exprimés chacun par deux lettres, dont il y en aura une qui ſera la même, ou par deux chiffres avec une virgule entre deux, & il y aura de part &

SCD LYON 1

d'autre le meſme chiffre. Donc effaçant ou la meſme lettre, ou le meſme chiffre, ce qui reſtera ſera en meſme raiſon par 11. 51. 52.

8. 12.
bd. ad } :: *b. a.*
2, 4. 3, 4. } :: 2. 3.

Mais il faut remarquer 2 choſes. La premiere que quand l'un des nombres eſt multiple de l'autre, c'eſt le nombre meſme dont l'autre eſt multiple, qui eſt la meſure commune des deux nombres : de ſorte qu'il faut ou l'exprimer ou le concevoir comme eſtant multiplié par l'unité 5 à 20 ; c'eſt à dire 4 1. à 4, 5. De ſorte qu'effaçant 4 de part & d'autre, la reduction ſera 1. 5.

La deuxiéme que toute raiſon d'un meſme nombre à ſoy-meſme ſe reduit à la raiſon de l'unité à l'unité ; car ils ont chacun deux meſures comme il a eſté dit, l'unité & ſoy-meſme, & chacune leur eſt commune, effaçant donc la plus grande de ces meſures qui ſont toutes deux communes, reſte l'unité de part & d'autre.

SI la premiere reduction ne donnoit pas des nombres premiers entre eux, (ce qui arrive quand on ne prend pas le plus grand diviſeur commun,) il ne faudroit que recommencer, & il eſt indubitable que cela ſe reduiroit à la fin à une raiſon premiere, c'eſt à dire à une raiſon de deux nombres premiers entre eux.

COROLLAIRE.

LES deux termes de la raiſon premiere à laquelle ſe reduit une raiſon non premiere, s'appellent *les expoſans* de cette raiſon non-premiere. XVIII.

Ainſi 2 & 3 ſont les *expoſans* de la raiſon de 8 à 12. 4 & 5. Les *expoſans* de la raiſon de 28 à 35.

Cela s'appelle autrement reduire une raiſon aux moindres termes qu'elle peut eſtre. Et pour abreger le mot de *reduire* ſignifiera tout cela. Ce qu'il faut bien remarquer.

Cecy revient encore à cette maxime. Si un meſme nombre en diviſe deux autres, les quotiens ſont proportionnels ; car le meſme nombre 4 ayant diviſé 8 & 12, les

quotiens ont esté 2 & 3 qui sont en mesme raison que 8 & 12.

I. Theoreme.

XIX. Deux raisons égales ont necessairement les mesmes exposans, & ce n'est qu'en cela qu'elles sont égales.

Car il faut que deux raisons que l'on compare, ou soient toutes deux premieres, ou toutes deux non-premieres, ou que l'une soit premiere, & l'autre non premiere.

Or il vient d'estre prouvé qu'elles ne sçauroient estre égales estant toutes deux premieres si elles sont differentes : & que les non-premieres se peuvent reduire à une premiere. Il faut donc que les non-premieres pour estre égales se puissent reduire à une seule & mesme premiere, ou s'il n'y en a qu'une de non-premiere, qu'elle se puisse reduire à la mesme premiere que celle qui l'est déja. Or c'est ce qu'on appelle avoir les mesmes *exposans*, que de ne pouvoir estre reduite qu'à une mesme & seule raison premiere. Donc il est impossible que deux raisons égales n'ayent pas les mesmes *exposans*.

II. Theoreme.

XX. Deux raisons de nombre à nombre estant égales, le produit des antecedens est au produit des consequens comme deux nombres quarrez : où, la raison du produit des antecedens au produit des consequens a pour ses exposans des nombres quarrez ; Car deux raisons ne sçauroient estre égales, qu'elles n'ayent les mesmes exposans par le Theoreme precedent. C'est à dire qu'estant reduites, elles ne le soient à deux raisons premieres qui ont chacune le mesme antecedent & le mesme consequent. Donc le produit des antecedens sera la multiplication d'un nombre par soy même, ce qui fait un nombre quarré, & de même du produit des consequens.

Deux raisons égales $b\,x.\ c\,x :: b\,y.\ c\,y.$
reduites aux moindres termes $b.\ \ c :: b.\ \ c.$

SCD LYON 1

Donc le produit de antecedens eſt *bb.*
& celuy des conſeqvens *cc.*
Exemple par les chiffres ſelon le ſixiéme Lemme.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3.
Exp. 4. 5 :: 4. 5.

Donc le produit des antecedens eſt 4 fois 4 ; c'eſt à dire le quarré de quatre.

Et le produit des conſequens 5 fois 5 ; c'eſt à dire le quarré de cinq.

III. THEOREME.

TROIS raiſons de nombre à nombre eſtant égales, la raiſon du produit des 3 antecedens au produit des 3 conſequens a pour ſes expoſans des nombres cubiques. XXI.

C'eſt la meſme choſe ; car trois raiſons ne ſçauroient eſtre égales, qu'elles n'aient toutes trois les meſmes expoſans. C'eſt à dire qu'eſtant reduites elles ne le ſoient à trois raiſons, qui ne ſeront que la meſme ayant toutes trois le meſme antecedent & le meſme conſequent. Donc le produit des antecedens ſera un cube, & le produit des conſequens un autre cube.

bx. cx :: by. cy :: bz. cz.
b. c :: b. c :: b. c.

Donc le produit { des antecedens *bbb.* / des conſequens *ccc.*

C'eſt la meſme choſe par les chiffres.

4, 7. 5, 7 :: 4, 3. 5, 3 :: 4, 9. 5, 9.
4. 5 :: 4. 5 :: 4. 5.

Donc le produit des antecedens eſt 4, 4, 4, c'eſt à dire le cube de 4. Et le produit des conſequens 5, 5, 5, c'eſt à dire le cube de 5.

IV. THEOREME.

LA raiſon doublée ou triplée d'une raiſon de nombre à nombre a pour ſes expoſans des nombres quarrez ſi elle eſt doublée, & des nombres cubiques ſi elle eſt triplée. XXII.

SCD LYON 1

Car une raiſon doublée n'eſt autre choſe qu'une raiſon compoſée de deux raiſons égales.

Or une raiſon compoſée de deux raiſons n'eſt autre choſe que la raiſon du produit des antecedens de ces deux raiſons au produit de deux conſequens par III. 33.

Donc une raiſon compoſée de deux raiſons égales de nombre à nombre (ce qui eſt la même choſe que la raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre) n'eſt autre choſe que la raiſon du produit des antecedens de 2 raiſons égales de nombre à nombre au produit des conſequens.

Or cette raiſon du produit des antecedens de deux raiſons égales de nombre à nombre au produit des conſequens, a pour ſes expoſans des nombres quarrez par le 2 Theoreme.

Donc toute raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre a pour ſes expoſans des nombres quarrez.

On prouvera de la meſme ſorte par le 3 Theoreme que la raiſon triplée d'une raiſon de nombre à nombre a pour ſes expoſans des nombres cubiques ; parce qu'une raiſon triplée n'eſt autre choſe qu'une raiſon compoſée de trois raiſons égales. Donc, &c.

I. Corollaire.

XXIII. Trois nombres eſtant continuëment proportionnels, ne peuvent eſtre reduits aux moindres nombres qu'ils peuvent eſtre, que les deux extrémes ne ſoient des nombres quarrez, & celuy du mileu le produit de leurs racines.

Car le 1. de ces 3 nombres eſt au troiſiéme en raiſon doublée de la raiſon du 1 au 2, ou ce qui eſt la meſme choſe en raiſon compoſée de la raiſon du 1 au 2, & de celle du 2 au 3 comme il a eſté prouvé III. 34. Donc par le 3 Theoreme la raiſon du 1 au 3 doit avoir pour ſes expoſans des nombres quarrez. Or par III. 4. le produit des 2 racines eſt le moyen proportionnel entre deux quarrez, & il eſt clair que deux nombres quarrez ne peuvent avoir qu'un ſeul nombre pour moyen proportionnel. Donc le produit des deux racines doit eſtre ce ſecond terme.

II.

SCD LYON 1

II. COROLLAIRE.

QUATRE grandeurs estant continuëment proportionnelles la raison de la 1 à la 4, a pour ses exposans des nombres cubiques. XXIV.

C'est la même chose; car (par III. 34.) la raison de la 1 à la 4 est une raison triplée. Or par le Theoreme precedent, toute raison triplée a pour ses exposans des nombres cubiques.

V. THEOREME.

SI plusieurs nombres sont continuëment proportionnels (ce qui s'appelle Progression Geometrique :) il faut necessairement qu'estant *reduits*, ils soient ou tous impairs, ou tous pairs hors l'un des extremes, qui sera seul necessairement impair. Car il est clair qu'ils ne peuvent pas estre tous pairs, parce qu'ils ne seroient pas *reduits*. XXV.

Demonstr. Ce qui fait que les nombres sont proportionnels, & qu'il y a toûjours une mesme raison entre ceux qui se suivent immediatement. Et ainsi toutes ces raisons estant égales n'ont que les mêmes exposans, qui sont ou l'unité & quelque autre nombre que ce soit, quand la Progression est multiple. Ou deux autres nombres quand elle n'est pas multiple, lesquels deux nombres sont necessairement ou tous deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair 5. 12.

PREUVE DU PREMIER CAS.

DANS le premier cas; c'est à dire quand l'un des exposans est l'unité, la verité du Theoreme est manifeste; car le 2 exposant sera le 2 terme de la Progression, & tous les autres en sont les puissances, le 3 le quarré, le 4 le cube, le 5 le quarré de quarré, &c. D'où il s'ensuit que si ce 2 exposant est un nombre impair, (toutes les puissances d'un nombre impair l'estant toûjours aussi,) tous les termes de la Progression sont impairs. XXVI.

Exemple quand le deuxiéme terme est 5, se souvenir que

par 5^2. 5^3, &c. J'entends toûjours le quarré de 5. le cube de 5, &c.

:: 1. 5. 5^2. 5^3. 5^4, &c.

:: 1. 5. 25. 125. 625, &c.

Que si le 2 exposant est pair, comme il sera le 2 terme de la Progression, & que tous les autres termes seront ses puissances : ils seront tous pairs (toute puissance d'un nombre pair l'étant toûjours aussi.) Il n'y aura donc que l'unité qui sera un nombre impair dans cette Progression.

Exemple, ce second exposant estant 10.

:: 1. 10. 10^2. 10^3. 10^4, &c.

:: 1. 10. 100. 1000. 10000.

Preuve du deuxieme Cas.

XXVII. Quand la Progression n'est pas multiple ; c'est à dire quand l'un des deux exposans n'est pas l'unité, il faut toûjours qu'ils soient ou tous deux impairs, ou l'un pair & l'autre impair, comme il a déja esté dit. Or ce sont alors les deux exposans qui determinent tous les autres termes.

Car les deux extrémes doivent estre la mesme puissance de chacun des deux exposans ; c'est à dire le quarré s'il n'y en a que trois termes, le cube s'il y en a 4. le qq. s'il y a 5. le qc. s'il y en a 6, & ainsi jusques à l'infiny. Et tous les autres termes doivent avoir autant de dimensions que ces extrémes ; c'est à dire avoir 2 si ces extrémes sont des quarrez. 3 si ce sont des cubes. 4 Si ce sont des qq. 5 Si ce sont des qc, &c. Mais il faut qu'une partie de leurs dimensions soit d'un exposant, & l'autre partie de l'autre exposant.

Or delà s'ensuit tout ce qu'on avoit à prouver dans ce Theoreme ; car 1. Quand les deux exposans sont impairs, toutes les multiplications qui sont les extrémes & ceux d'entre deux se font par impairs, & par consequent ils doivent tous estre impairs.

Exemples, les deux exposans estant 3. & 5. (il faut se

souvenir qu'une virgule entre deux chiffres signifie qu'ils se doivent multiplier l'un l'autre.

3^2. $3,5$. 5^2.	9. 15. 25.
3^3. $3^2,5$. $3,5^2$. 5^3.	27. 45. 75. 125.
3^4. $3^3,5$. $3^2,5^2$. $3,5^3$. 5^4.	81. 135. 225. 375. 625.

2. Quand l'un des exposans est pair & l'autre impair, l'un des extrémes sera pair & l'autre impair. Mais tous ceux d'entre deux seront pairs, parce qu'il y aura quelqu'un de leurs dimensions qui sera un nombre pair. Or toute multiplication où il entre un nombre pair, fait un nombre pair.

Exemples. Les deux exposans estant 2 & 5.

2^2. $2,5$. 5^2.	4. 10. 25.
2^3. $2^2,5$. $2,5^2$. 5^3.	8. 20. 50. 125.
2^4. $2^3,5$. $2^2,5^2$. $2,5^3$. 5^4.	16. 40. 100. 250. 625.

AVERTISSEMENT.

Ces deux cas de la Progression multiple, & de la non multiple ne sont differens qu'en apparence. Le 1. se devant concevoir comme estant virtuellement semblable au second; Car l'unité qui en est le premier terme doit estre conceuë comme quarré quand il y a trois termes, comme cube quand il y en a 4, comme quarré de quarré quand il y en a 5, & ainsi de suite. Et tous les autres termes doivent estre conceus comme ayant autant de dimensions qu'en a le dernier terme de la Progression: ce qui se fait par le moyen des unitez que l'on met par autant de dimension qui leur manquent. Cela se comprendra mieux pour des exemples, soit i *pris pour l'unité, &* x *pour l'autre exposant quelconque pair ou impair. Voici comme ces Progressions multiples doivent estre conceuës, pour estre semblables aux non multiples.* XXVIII.

ii. ix. xx.
iii. iix. ixx. xxx.
iiii. iiix. iixx. ixxx. xxxx.

SECTION SECONDE.

Des Grandeurs incommenſurables ou des Raiſons Sourdes.

XXIX. Nous avons déja dit, que ce qui fait que des Grandeurs ſont appellées incommenſurables (ce qui eſt la même choſe que n'avoir entre elles qu'une raiſon ſourde,) eſt qu'ayant chacune une infinité de meſures de plus petites en plus petites, nulle des meſures de l'une ne peut eſtre la meſure de l'autre.

Cela paroiſt incomprehenſible, & l'eſt en effet, parce que ce qui eſt cauſe de cela, ne peut eſtre que la diviſibilité de la matiere à l'infiny. Or il eſt clair que tout ce qui tient de l'infinité, ne ſçauroit eſtre compris par un eſprit finy tel qu'eſt celuy de tous les hommes.

Il ne faut donc pas s'imaginer que l'on puiſſe avoir des notions auſſi claires des raiſons ſourdes, qu'on en a des raiſons de nombre à nombre: ny qu'on puiſſe prouver poſitivement que deux grandeurs ſont incommenſurables, on ne le peut certainement. Et tout ce que l'on ſçauroit faire de mieux, eſt de le faire negativement, c'eſt à dire en monſtrant qu'elles ne ſont point entre elles comme nombre à nombre: par où on eſt tres-convaincu que la choſe eſt, quoy qu'on ne penetre pas comment cela peut eſtre. Tout ſe reduit donc à faire voir par les proprietez eſſentielles des raiſons de nombre à nombre que nous venons d'établir qu'elles peuvent eſtre les grandeurs qui ne ſont point entre elles comme nombre à nombre, & qui par conſequent ſont incommenſurables, parce que les proprietez des raiſons de nombre à nombre ne pourroient convenir à la raiſon qu'elles auroient entre elles. C'eſt pourquoy il faut bien avoir dans l'eſprit les definitions ſuivantes.

DEFINITIONS.

XXX. DEUX grandeurs ſont incommenſurables, quand elles ne ſont point entre elles comme nombre à nombre, ou

que la raiſon qu'elles ont entre elles n'eſt point une raiſon de nombre à nombre.

2. Une raiſon eſt ſourde quand on peut prouver qu'elle n'a point ce qui convient neceſſairement aux raiſons de nombre à nombre.

3. Chacune des deux raiſons égales, dont eſt compoſée la raiſon qu'on appelle *doublée*, ou des trois égales dont eſt compoſée la raiſon qu'on appelle *triplée*, ſoit appellee la raiſon ſimple d'une raiſon doublée ou triplée.

4. Deux grandeurs peuvent eſtre incommenſurables, que leurs quarrez & leurs cubes ne le ſont pas. Et on dit alors, qu'elles ſont incommenſurables en elles mêmes, ou en longueur, ou lineairement, mais qu'elles ſont commenſurables en puiſſance. Et il faut remarquer que le quarré eſt la puiſſance, qui s'appelle ſimplement puiſſance, le cube la 2, le quarré de quarré la 3, & ainſi à l'infiny. Et que neanmoins quand on les marque par un petit chiffre au deſſus & un peu à côté d'une lettre, ou d'un plus grand chiffre, 2 ſignifie le quarré, 3 le cube, 4 le quarré de quarré, comme 6^2. 6^3. 6^4, &c. De 8^2. 8^3. 8^4.

PROPOSITION FONDAMENTALE DES INCOMMENSURABLES.

DEUX grandeurs ſont incommenſurables (quoy que non en puiſſance, ou 1 ou 2.) Quand la Raiſon qu'elles ont entre elles, eſt la raiſon ſimple, ou d'une raiſon doublée, qui a pour ſes expoſans d'autres nombres que deux nombres quarrez, ou d'une raiſon triplée qui a pour ſes expoſans d'autres nombres que deux cubiques. XXXI.

C'eſt une ſuitte neceſſaire de ce qui a eſté prouvé cy-deſſus, qu'une raiſon compoſée de deux raiſons égale de nombre à nombre, doit avoir neceſſairement pour ſes expoſans des nombres quarrez; c'eſt à dire que les deux termes de cette raiſon doublée doivent eſtre neceſſairement deux nombres quarrez, comme 1 & 4. 4 & 9 16 & 25.

Et qu'il ne ſuffit pas que l'un d'eux ſoit quarré, mais qu'ils le doivent eſtre tous deux.

Donc toute raiſon qui a pour ſes expoſans d'autres nombres que deux nombres quarrez ne ſçauroit eſtre compoſée de deux raiſons égales de nombre à nombre: Elle ne le peut donc eſtre que de deux raiſons ſourdes. Donc les deux grandeurs entre leſquelles eſt cette raiſon, qui ne ſçauroit eſtre de nombre à nombre, ſont incommenſurables par la 1 definition S 31. & pàr 2. S.

Il n'y a rien de plus facile que d'appliquer tout cela à la raiſon ſimple d'une raiſon triplée, &c.

Mais on voit bien auſſi que ces grandeurs ſont commenſurables en puiſſance ou 1. ou 2; car c'eſt ce que l'on ſuppoſe que leurs quarrez ou leurs cubes ſont comme nombre à nombre, mais non comme deux nombres ou quarrez ou cubiques.

I. Corollaire.

XXXII. Deux quarrez qui ſont entre eux comme deux nombres, & non comme deux nombres quarrez ont leurs racines incommenſurables.

Et deux Cubes de meſmes ont leurs racines incommenſurables, ſi ces Cubes ſont entre eux comme deux nombres, qui ne ſont pas tous deux cubiques.

C'eſt la propoſition meſme; car par III. 41. deux quarrez ſont entre eux en raiſon doublée de leurs racines, & deux cubes en raiſon triplée. Donc ſi les quarrez ſont entre eux comme 2 à 1. ou comme 4 à 3. La raiſon des racines ſera la raiſon ſimple d'une raiſon doublée, qui n'aura pas pour ſes expoſans deux nombres quarrez. Donc ce ſera une raiſon ſourde. Donc ces deux racines ſeront incommenſurables: Et on voit aſſez qu'il en ſera de meſme de la racine des cubes.

II. Corollaire.

XXXIII. Quand trois grandeurs ſont continuëment proportionnelles. Si la 1 eſt à la derniere comme deux nombres

SCD LYON 1

qui ne soient pas tous deux quarrez, comme si la 1. est à la derniere comme 2 à 1, ou comme 3 à 2. La seconde sera incommensurable à la premiere & à la derniere, c'est à dire que la raison de la 1. à la derniere sera une raison sourde, aussi bien que celle qui luy est égale de la 2 à la 3. Mais cette 2 sera commensurable en puissance à chacune des deux autres; car (par III. 45.) La raison de la 1. à la 3 est composée des 2 raisons égales de la 1 à la 2. & de la 2 à la 3. Donc si ces deux raisons estoient de nombre à nombre, la raison de la 1 à la 3 qui en est composée, auroit eu pour ses exposans deux nombres quarrez. Or elles ne les a pas par l'hypothese. Elles sont donc sourdes: & par consequent la 2 de ces 3 grandeurs est incommensurable tant la 1. que la 3.

Mais elle leur est commensurable en puissance; car (par III. 44.) le quarré de la 1. est au quarré de la 2, la 1. à la 3, & le quarré de la 2. au quarré de la 3. est de mesme comme la 1. à la 3.

III. Corollaire.

Lors que 4 grandeurs sont continuëment proportionnelles, si la 1 est à la 4 comme deux nombres qui ne soient pas tous deux cubiques: Chaque grandeur est incommensurable à celle qui la suit, en longueur & en 1 puissance, & seulement commensurable en 2 puissance. XXXIV.

C'est la même demonstration que la precedente; Car d'une part (par III. 45.) La raison de la 1. à la 4 doit estre composée des 3 raisons égales de la 1 à la 2. de la 2 à la 3. & de la 3 à la 4. Donc c'est une raison triplée, qui par l'hypothese a d'autres nombres pour ses exposans que des nombres cubiques. Donc par la proposition, chacune de ces raisons est sourde. Donc les grandeurs qui ont entre elles cette raison sourde sont incommensurables.

D'autre part (par III. 44.) Les cubes de deux de ces grandeurs qui se suivent sont en mesme raison que la 1 à la 4. Or par l'hypothese, la raison de la 1. à la 4, est une raison de nombre à nombre (quoy ce ne soit pas celle qui

eſt entre deux nombres cubiques.) Donc ces grandeurs qui ſe ſuivent ſont commenſurables en 2 puiſſance.

IV. Corollaire.

XXXV. Si 3 grandeurs ſont telles, que d'une part le quarré de la plus grande ſoit égal au quarré des deux autres, & que de l'autre la plus petite des trois ſoit une aliquote de la plus grande, c'eſt à dire qu'elle ſoit à la plus grande comme l'unité à quelque nombre : celle qui eſt entre deux ſera incommenſurable à l'une & à l'autre, & elle leur ſera ſeulement commenſurable en puiſſance.

Soient les trois grandeurs *b. d. i.* Et que *b* ſoit à *i* comme 3 à 1. Leurs quarrez ſeront comme 9. à 1. Donc par l'hypotheſe du plus grand quarré égal aux deux autres.

bb. dd. :: 9. 8.

Et *dd. ii.* :: 8. 1.

Donc par le 1. Corollaire, *b* & *d* ſont incommenſurables, & *d.* & 1. le ſont auſſi. Mais on voit aſſez que *d.* eſt commenſurable en puiſſance à l'une & à l'autre.

V. Corollaire.

XXXVI. Si trois Grandeurs ſont d'une part continuëment proportionnelles, & que de l'autre la plus grande ſoit égale aux deux autres : elles ſont abſolument incommenſurables entre elles.

Car ſi elles eſtoient comme trois nombres, il faudroit par là 5 hypotheſe, & le 5 Theoreme qu'elles fuſſent ou comme trois impairs, ou comme un impair, & deux pairs, ou comme deux pairs, & un impair ; c'eſt à dire en l'une de ces 3 manieres, en marquant les impairs par des voyelles, & les pairs par des conſonnes, & en commençant par la plus grande. *a. e. o.*

a. b. c.

b. c. e.

Or la 2 hypotheſe fait que tous ces 3 cas ſont impoſſibles ; car cette 2e hypotheſe, eſt que la 1. doit eſtre égale aux 2 dernieres, ce qui ne peut eſtre dans aucun des trois cas:

cas: La 1. dans les deux premiers cas estant un impair, & les deux dernieres un pair. Et dans le 3e cas estant un pair, & les deux dernieres faisant un impair.

AVERTISSEMENT IMPORTANT.

XXXI. *De tout ce qui vient d'estre dit dans la 1 section des raisons de nombre à nombre, & dans cette 2 des raisons sourdes, on voit aisément que la maniere dont les premieres sont égales, est tres-differente de celle dont le sont ces dernieres; car il paroît par les propositions fondamentales de la 1 section S. 15. Que deux raisons de nombre à nombre ne sont égales, que par ce qu'elles ont les mesmes exposans, & qu'ainsi estant reduites, elles ne sont toutes deux qu'une seule & mesme raison. 8 est à 12, ou 100 est à 150. par ce que la raison de 8 à 12, est la raison de 2 à 3, & que la raison de 100 à 150, est aussi la raison de 2 à 3.*

Mais il n'en est pas de mesme des raisons sourdes; car on ne peut point dire qu'elles ayent les mesmes exposans. Elles ne seroient plus sourdes si cela estoit. Ce n'est donc point de là qu'on doit prendre leur égalité, mais comme il a esté prouvé dans le 1 Theoreme du 2 Livre de ce que toutes les aliquotes pareilles des deux antecedens, sont également contenuës dans les consequens, quoy que nulle aliquote du 1. antecedent, ne soit préciſement tant de fois dans son consequent, ny par consequent l'aliquote pareille du 2. antecedent dans le 2 consequent; mais que ce soit toûjours au regard de l'un & de l'autre avec quelque reste.

Et c'est pourquoy dans les raisons de nombre à nombre, quand une seule aliquote pareille de chaque antecedent, par exemple un tiers est également contenu dans chaque consequent, c'est à dire autant de fois dans l'un que dans l'autre, on n'a point besoin apres cela d'examiner d'autres aliquotes. Mais dans deux raisons sourdes pour estre assuré qu'elles sont égales, il faut avoir comme examiné toutes les aliquotes pareilles de l'un & de l'autre antecedent quoy qu'infinies, & estre assuré que nulle du 1 ne

pourra estre dans son consequent avec quelque reste, que la pareille du 2 antecedent ne soit autant de fois dans son consequent, quoy qu'avec aussi quelque reste, comme nous le demonstrerons des lignes dans le 10 Livre. Et ainsi l'on ne peut point dire à proprement parler que 2 raisons sourdes égales (sur tout quand leurs termes sont absolument incommensurables, tant lineairement qu'en puissance) se puissent reduire à une seule & mesme raison premiere; puisque l'on ne peut dire ny quelle des deux tiendroit lieu de premiere, ny qu'il y en ait une troisiéme qui soit plûtost *raison premiere* que ces deux-là, à laquelle il les faille reduire pour les comprendre plus facilement; car assurement cela est impossible.

C'est pourquoy il faut bien prendre garde à ne pas étendre aux raisons entre deux étenduës, ce que nous avons dit dans les propositions fondamentales de la 1. section; Que deux differentes raisons premieres ne pouvoient estre égales; car on ne l'a dit que des raisons de nombre à nombre, & cela n'a point de lieu dans les raisons sourdes entre deux étenduës.

Et c'est ce qui me fait croire que ceux qui se servent de la consideration des exposans, qu'ils supposent estre les mesmes dans toutes les raisons égales, pour expliquer les proprietez des propositions en general, que nous avons demonstrées par une autre voye dans le commencement du 2 Livre, font le mesme sophisme que celuy qui ayant à expliquer la nature du genre, le feroit par ce qui ne convient qu'à une de ses especes, qui est un sophisme assez ordinaire, mais qui n'en est pas moins sophisme; car c'est ainsi par exemple qu'on explique les actions des bêtes par des pensées & des volontez qui ne conviennent qu'à l'homme, & qu'on le fait mesme au regard des choses inanimées. Presque tout le monde s'imaginant que les pierres vont au centre de la terre, comme à un lieu de repos, par une inclination qui a quelque rapport à celle qui nous fait desirer ce que nous regardons comme nôtre bien.

SCD LYON 1

AVERTISSEMENT.

Tout ce qui suit jusques à la fin de ce Livre ne sont que des pensées détachées que l'on peut passer, mais où je croy neanmoins que l'on trouvera assez de choses nouvelles, ou demonstrées d'une nouvelle maniere.

SECTION TROISIEME.

Reflexions sur les nombres quarrez, & divers moyens de trouver les sommes de plusieurs nombres rangez en de certains ordres. XXXIII.

De la difference entre deux quarrez.

DEUX quarrez quelconques ont pour leur difference le produit de la somme de leur racine par leur difference.

Soient les deux quarrez *bb.* & *cc.*

Leur difference sera *bb*—*cc.*

Or la somme des racines est *b* + *c.* leur difference *b* — *c*

Et le produit de l'un par l'autre donne *bb*—*cc*; ce qui est leur difference.

Exemple dans les nombres.

Ayant les deux quarrez 12, 12 (144) & 9, 9 (81.)

Je veux sçavoir tout d'un coup leur difference. Je prens la somme des racines qui est 12 + 9 (21.)

Et leur difference 12 — 9 (3.)

3, 21 donne 63 qui est justement la difference de 144 à 81.

COROLLAIRE.

QUAND les racines de deux quarrez ne different que d'une unité, leur difference est simplement la somme des racines; car on ne fait rien davantage en la multipliant par l'unité. XXXIV.

Ainsi la difference entre 10, 10 (100) & 9, 9 (81) est 19 la somme des racines 10 & 9.

I. PROBLEME.

TROUVER des quarrez qui ayent entre eux une difference donnée. XXXV.

Soit h la difference donnée, l'ayant divisée par celuy qu'il me plaira de ses diviseurs, & appellant d ce diviseur & q le quotient, il est clair que dq est égal à h, & qu'ainsi ces deux quarrez auront h pour leur difference s'ils ont dq.

Or ils auront dq, si je donne au premier pour sa racine $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}q$.

Et au 2. pour la sienne $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}q$. (remarquez qu'il faut mettre pour le premier de d ou de q, celuy qui sera le plus grand.)

Car le quarré du 1 sera $\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{2}dq$; (car deux quarts font une moitié.)

Et le quarré du 2 sera $\frac{1}{4}dd + \frac{1}{4}qq - \frac{1}{2}dq$.

Donc la difference entre ces quarrez sera deux moitiez de dq; c'est à dire dq qui est égal à h.

Exemple dans les nombres, soit 80 la difference donnée. Je la divise par 20 & le quotient sera 4.

Donc la moitié de 20 (10) & la moitié de 4 (2) donneront les racines de ces deux quarrez;

sçavoir 10 + 2 (12)

& 10 — 2 (8)

Car le quarré du 1 sera 100 + 4 + 2, 2, 10 (40)

Et le quarré du 2 sera 100 + 4 — 40.

Donc leur difference est 80. qui est en effet la difference du quarré de 12 (144) du quarré de 8 (64.)

Corollaire.

XXXVI. Quand la moitié de l'un des deux du diviseur ou du quotient, seroit un nombre rompu, la mesme chose se rencontreroit.

Exemple, soit la difference donnée 60, qui estant divisé par 12 donne 5. Je dis que le quarré de b plus $2\frac{1}{2}$ ($8\frac{1}{2}$) & de b moins $2\frac{1}{2}$ ($3\frac{1}{2}$) auront 60 pour leur difference.

Car le quarré de $8\frac{1}{2}$ est $72\frac{1}{4}$ & celuy de $3\frac{1}{2}$ $12\frac{1}{4}$ qui ont visiblement 60 pour leur difference.

On pourroit mesme prendre l'unité pour diviseur) ce

qui donneroit 60 pour quotient,) & ce seroit la même chose.

Car le quarré de 30 + ½ est 900 + ¼ + 30.
Et celuy de 30 — ½ est 900 + ¼ — 30.
Donc ces deux quarrez ont 60 pour leur difference; car le premier est 930 + ¼, & le dernier 870 + ¼.

II. Probleme.

Trouver tous les nombres dont le quarré est égal à deux quarrez. XXXVII.

Tout nombre composé de deux quarrez, comme 4 + 1 (5) 9 + 4 (13) 16 + 1 (17) 16 + 9 (25) à son quarré égal à deux quarrez. Et il n'y a que ces nombres là, ou leurs multiples, qui ayent cette proprieté.

Soit un nombre quelconque composé de 2 quarrez, comme $bb + cc$. Il est impossible que son quarré ne soit pas égal au quarré du nombre $bb - cc$, & à celuy du nombre 2. bc. C'est à dire qui sera le double du produit des deux racines.

Car $bb + cc$ a pour son quarré $b^4 + c^4 + 2.bb\,cc$.
Et $bb - cc$ a pour son quarré $b^4 + c^4 - 2.bb\,cc$.
Donc leur difference est $4.bb\,cc$, qui est certainement un quarré qui a pour sa racine $2\,b\,c$. Donc ce quarré là, plus celuy qui a pour sa racine $bb - cc$, doivent estre égaux à celuy dont la racine est $bb + cc$.

Donc il est impossible qu'un nombre composé de deux quarrez, n'ait pas son quarré égal à deux quarrez.

Exemple dans les nombres. 29 est composé de deux quarrez de 25 & de 4. Je dis donc que son quarré sera égal au quarré de 25 — 4 (21,) & à celuy de 2, 2, 5; c'est à dire de 20.

Car 25 + 4 a pour son quarré 625 + 16 + 2, 4, 25. (200.)
Et 25 — 4 a pour son quarré 625 + 16 — 200.
Donc leur difference est 400 qui est le quarré de 20.
Et en effet le 1. de ces quarrez sera 841.
Le second 441.
Et le troisiéme 400.

I. Corollaire.

XXXVIII Tout nombre quarré plus 1 fait un nombre, dont le quarré eſt égal à deux quarrez, comme 16 + 1. 36 + 1. Mais alors le ſecond quarré ayant pour ſa racine ce quaré primitif moins un, le troiſiéme eſt quatre fois ce même quarré, & a pour ſa racine deux fois la racine de ce quarré que j'ay appellé primitif.

Exemple 36. + 1. a pour ſon quarré 36, 36, (1296) + 1 + 2, 36 (72.)

Et 36 — 1 a pour ſon quarré 36, 36 (1296 + 1 — 2, 36 (72.)

Donc leur difference eſt 4, 36. (144) dont la racine eſt 2, 6 (12.)

II. Corollaire.

XXXIX. La plus grande moitié d'un quarré impair à ſon quarré égal à deux quarrez; ſçavoir au quarré de la plus petite moitié, & au quarré impair dont cette premiere racine eſt la plus grande moitié.

Preuve particuliere, ſoit *hh* un quarré impair, ſoit *m* ſa plus grande moitié & *n* la plus petite (je les appelle ainſi, parce que je ſuppoſe qu'elles ne different que d'une unité) $m = n + 1$. Donc $m + n$ eſtant égal à hh, $n + n + 1$, ou $2n + 1$ ſeront auſſi égales à *hh*.

Et le quarré de $n + 1$ ſera la meſme choſe que *mm*.

Or $n + 1$ a pour ſon quarré $nn + 1 + 2n$.

Or $2n + 1 = hh$.

Donc $mm = nn + hh$; ce qu'il falloit demonſtrer.

Exemple dans les nombres.

Le quarré de 25 à 13 pour ſa plus grande partie, & 12 pour la plus petite.

Donc le quarré de 12 + 1 eſt la meſme choſe que le quarré de 13.

Or 12 + 1 a pour ſon quarré 12, 12, (144) + 1 + 24.

Et 24 + 1, eſt 25. Donc 144 + 25 = 169 quarré de 13.

SCD LYON 1

AVERTISSEMENT.

ON *dira peut estre qu'il n'est donc pas vray qu'il n'y ait que les nombres composez de deux quarrez ou leurs multiples, qui ayent leur quarré égal à deux quarrez.* XL.

Je nie la consequence ; car il n'y a point de plus grande moitié de quarré impair qui ne soit composée de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la plus grande moitié de la racine de ce quarré impair & de la plus petite. Exemple, 25 quarré de 5 à 13 pour sa plus grande moitié, & 5 sa racine a 3 pour sa plus grande moitié, & 2 pour la plus petite. Je dis donc que 13 sera composé du quarré de 3 qui est 9, & du quarré de 2 qui est 4. Et voicy la raison pourquoy il faut necessairement que cela soit ainsi ; car le quarré de 5 est la mesme chose que le quarré de 3 + 2, qui est 9 + 4 + 2, 6 (12.) Et n'y ayant qu'un de difference entre 3 & 2. Les deux quarrez de 3 & 2, ne sçauroient aussi estre differents du double du produit des deux racines que d'une unité. C'est pourquoy les deux quarrez 9 & 4 seront toûjours la plus grande moitié du quarré de 5, & 2, 6 sa plus petite moitié.

III. COROLLAIRE.

LE double d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composé de deux quarrez ; sçavoir du quarré de la somme des racines des deux premiers quarrez & du quarré de leur difference. XLI.

Soient les 2 quarrez dont est composé le 1. nombre $bb + cc$. Je dis que le double de ce nombre là sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $b + c$, & l'autre $b - c$.

Car $b + c$ a pour son quarré $bb + cc + 2bc$.

Et $b - c$ a pour le sien $bb + cc - 2bc$.

Or $2bc$ estant par + & par — se reduit à zero. Reste donc $2bb$ & $2cc$ qui font le double de $bb + cc$.

Exemple dans les nombres. Le double de 25 + 4 est 58.

Les racines de ces premiers quarrez sont 5 & 2.

SCD LYON 1

Or 5 + 2 a pour son quarré 25 + 4 + 2, 10 (20,) ce qui fait en tout 49.

Et 5 — 2 a pour son quarré 25 + 4 — 20 ce qui fait 9. Donc le tout fait 49 + 9, ce qui fait 58 double de 29.

IV. Corollaire.

XLII. La moitié d'un nombre composé de deux quarrez est aussi composée de deux quarré, sçavoir du quarrez de la moitié de la somme des racines, & du quarré de la moitié de leur difference.

Soient les deux quarrez bb + & cc. Je dis que $\frac{1}{2}$ bb + plus $\frac{1}{2}$ cc, sera aussi composé de deux quarrez, dont le premier aura pour sa racine $\frac{1}{2}$ b + $\frac{1}{2}$ c. Ce qui fait pour quarré $\frac{1}{4}$ bb + $\frac{1}{4}$ cc + $\frac{1}{2}$ bc.

Et l'autre aura pour sa racine $\frac{1}{2}$ b — c, ce qui fait $\frac{1}{4}$ bb + $\frac{1}{4}$ cc — $\frac{1}{2}$ bc.

Or ces deux quarrez ensemble tout comté & tout rabbatu font $\frac{1}{2}$ bb + $\frac{1}{2}$ cc. Et par consequent la moitié du nombre composé de bb & cc.

Exemple dans les nombres 208 est composé des quarrez 144 & 64. La somme de leurs racines est 12 + 8, dont la moitié est 10, & leur difference 4, dont la moitié est 2, donc le quarré de 10 (100) plus celuy de 2 (4) doit estre comme il est aussi la moitié de 208.

PROBLEMES.

Pour trouver les sommes de plusieurs nombres mis dans une certaine suite.

I. Probleme.

XLIII. Trouver la somme d'une Progression Arithmetique quelque grande qu'elle soit, pourveu qu'on en connoisse le premier & le dernier terme, & le nombre des termes.

Il ne faudra qu'ajoûter le 1 & le dernier, & multiplier ce nombre composé du 1 & du dernier par la moitié du nombre des termes, ou le nombre des termes entier, par la moitié de ce que font le premier & le dernier.

Exemple.

SCD LYON 1

Exemple. Cent pierres estant arrangées de toise en toise, si un homme s'oblige à les ramasser toutes l'une apres l'autre, & les mettre en un tas à une toise pres de la premiere : combien fera-t'il de toises de chemin ? Il en fera deux pour la 1re pierre, 4 pour la 2, & 200 pour la derniere. Ce sera donc une Progression Arithmetique de 100 termes, dont le premier & le dernier feront 202. Il faut donc multiplier ou 50 par 202 ou 100, par 101, ce qui fera 10100 ; c'est à dire 12120 pas Geometriques ; ce qui fait plus de 4 lieuës.

II. Probleme.

Trouver la somme d'une Progression Geometrique, XLIV
supposant qu'elle va en augmentant comme c'est le plus ordinaire, & qu'ainsi l'antecedent de chaque raison est plus petit que son consequent.

Soit la somme de tous les termes appellée S.

Le premier terme a le 2 b & le dernier ω. Et les exposans de la raison qui regne par toute la Progression n & m ; c'est à dire que deux termes qui se suivent immediatement sont entre eux comme n est à m, ou comme a est à b : si la premiere raison est déja dans les moindres termes qu'elle peut estre.

Or tous les termes estant antecedens hors le dernier qui n'est que consequent, & tous consequens hors le premier qui n'est qu'antecedent. Tous les antecedens se pourront nommer S—ω. Et tous les consequent S—a.

Cela supposé, je dis que le dernier moins le 1 ; (c'est à dire $\omega - a$) est à toute la somme moins le dernier, (c'est à dire à S—ω) comme $m-n$, est à n, ou comme $b-a$ est à a. Et en voicy la raison.

Parce qui a esté dit 11. 45 dans une Progression Geometrique, tous les antecedens sont à tous les consequens, comme un antecedent est à un consequent.

Donc *permutando*, tous les consequens sont à tous les antecedens comme un consequent est à un antedent.

Donc *dividendo*, tous les consequens moins tous les

antecedens ſont à tous les antecedens, comme un conſequent moins ſon antecedent eſt à ſon antecedent.

Or quand je dis, *tous les conſequens moins tous les antecedens*, c'eſt comme ſi je diſois le dernier terme moins le premier ($\omega - a$;) car tous les termes eſtant conſequens hors le premier, je les mets tous par *plus*, hors le premier, quand je dis, *tous les conſequens*: & eſtant tous antecedens hors le dernier, je les mets tous par *moins* hors le dernier, quand je dis *moins tous les antecedens*. Ils ſont donc tous hors le premier & le dernier, par plus & par moins, & par conſequent ſe reduiſent à rien. Et il n'y a que le dernier qui ne ſoit que par *plus*, & le premier qui ne ſoit que par *moins*. Donc cela ſe reduit au dernier moins le premier ($\omega - a$.)

Donc quand la Progreſſion eſt aſcendante, le dernier terme moins le 1, eſt à tous les termes moins le dernier, comme le 2 terme moins le premier eſt au premier.

En voicy la preuve par la ſpecieuſe.

$S - a.\ S - \omega.\ ::\ b.\ a.$

Donc *dividendo* $S - a - S + \omega.\ S - \omega\ ::\ b - a.\ a.$

Or dans le premier terme de cette proportion S eſtant par *plus* & par *moins* ſe reduit à rien. Reſte donc ω par *plus* & a par *moins*. Donc cela ne veut dire qu'$\omega - a$.

Mais ſi la Progreſſion eſtoit décendante, chaque antecedent eſtant plus grand que ſon conſequent, il ne faudroit que changer & dire.

Que le 1 terme moins le dernier ſeroit à tous les termes moins le premier, comme un antecedent moins ſon conſequent eſt à ſon conſequent $a - \omega.\ S - a\ ::\ n - m.\ m.$

I. Corollaire.

XLV. On pourra prouver facilement par là que ſi on prend d'un tout une dixiéme, & une dixiéme de cette dixiéme; c'eſt à dire $\frac{1}{100}$ & une dixiéme de cette centiéme, c'eſt à dire $\frac{1}{1000}$ & ainſi juſques à l'infiny, toutes ces dixiémes de dixiémes priſes à l'infiny ne feront que $\frac{1}{9}$ du tout, & les neuviémes de neuviémes priſes de la meſme ſorte, $\frac{1}{8}$ & les huitiémes de huitiémes $\frac{1}{7}$, & ainſi en diminuant toû-

SCD LYON 1

jours les dominateurs d'un, les quarts un tiers, les tiers une moitié, & les moitiés le tout.

Il ne faut pour cela que faire une Progreſſion Geometrique en cette maniere. 1. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$. & ainſi à l'infiny.

Donc par ce qui vient d'eſtre dit. 1. moins le dernier terme (qui ſe reduit à zero la progreſſion allant à l'infiny, de ſorte qu'on le doit prendre ſimplement pour 1.) eſt à tous les termes de la Progreſſion moins un ; c'eſt à dire à toute cette infinité de dixiémes de 10mes, comme $1 - \frac{1}{10}$ eſt à $\frac{1}{10}$, c'eſt à dire comme $\frac{9}{10}$ eſt à $\frac{1}{10}$, & parconſequent comme 9 à 1. Donc toute cette infinité de dixiémes de 10mes, n'eſt au tout que comme un à 9. Donc elles ne ſont que la 9 partie du tout ; ce qu'il falloit demonſtrer.

II. Corollaire.

On voit par la ſolution du ſophiſme des anciens contre le mouvement. XLVI.

Suppoſant, diſoient-ils, qu'Achille aille 10 fois plus viſte qu'une tortuë, ſi la tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achile ne l'attrapera : car tandis qu'Achile fera la 1re lieuë, la tortuë fera la $\frac{1}{10}$ de la 2e lieuë ; & tandis qu'Achile fera la $\frac{1}{10}$ de la 2e lieuë, la tortuë ſera la $\frac{1}{10}$ de cette $\frac{1}{10}$, & ainſi à l'infiny.

Tout cela ſuppoſe que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini faſſent une eſpace infini, au lieu qu'elles ne font toutes enſemble qu'$\frac{1}{9}$ de lieuë, ſelon le Theoreme precedent.

Et c'eſt pourquoy Achile doit attraper la tortuë à la premiere $\frac{1}{9}$ de la 2e lieuë. Car allant 10 fois plus viſte que la tortuë, il doit avoir fait dix fois autant de chemin dans le même temps.

Donc pendant que la tortuë parcourra une $\frac{1}{9}$ de lieuë, Achile en doit parcourir $\frac{10}{9}$, ce qui fait juſtement la premiere lieuë compoſée de $\frac{9}{9}$, plus $\frac{1}{9}$ de la ſeconde lieuë.

III. Corollaire.

Si une horloge a deux aiguilles, l'une des heures, qui fait XLVII.

ſon tour en 12 heures, & l'autre des minutes, qui fait le même tour en une heure, marquer tous les points auſquels ces deux aiguilles ſe rencontreront.

Ce ſera à ces heures icy. $1 + \frac{1}{11}\ 2 + \frac{2}{11}\ 3 + \frac{3}{11}\ 4 + \frac{4}{11}\ 5 + \frac{5}{11}\ 6 + \frac{6}{11}\ 7 + \frac{7}{11}\ 8 + \frac{8}{11}\ 9 + \frac{9}{11}\ 10 + \frac{10}{11}\ 11 + \frac{11}{11}$. C'eſt à dire 12 heures.

La preuve en eſt aiſée à deviner par celle du premier Corollaire.

III. Probleme.

XLVIII. Trouver la ſuite des nombres triangulaires, pyramidaux & plus que pyramidaux.

Pour bien comprendre cecy, il faut remarquer qu'on peut diſpoſer les nombres en pluſieurs bandes, qui ſeront telles que chaque nombre d'une bande ſera égal à tous ceux de la bande precedente incluſivement juſques à celuy-là, c'eſt à dire que le 2 par exemple de la troiſiéme bande ſera égal aux deux premiers de la 2, le 3 aux trois premiers, le 4 aux quatre premiers, & ainſi de ſuite juſqu'à l'infiny.

On le comprendra mieux par l'exemple de 6 bandes que je ne continueray que juſques à 9 termes.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495
6	1	6	21	56	126	252	462	792	2187

La premiere bande n'eſt que d'unités.

La deuxiéme des nombres ordinaires, dont on voit aſ-

ſez que chacun comprend autant d'unitez qu'il y a eu de termes dans la premiere bande juſques à ce terme de la 2.

La troiſiéme eſt des nombres qu'on appelle Triangulaires, parce qu'ils ſe peuvent diſpoſer en triangle.

La quatriéme de ceux qu'on appelle Pyramidaux.

La cinquiéme des ſeconds-Pyramidaux. Je ne ſçay ſi on leur a donné un autre nom.

La ſixiéme des troiſiémes Pyramidaux. Et cela ſe peut continuer juſques à l'infiny.

Il s'agit donc de trouver la ſomme de tant de nombres que l'on voudra à commencer toûjours par l'unité dans chacune de ces bandes. Par exemple la ſomme des dix premiers termes de la troiſiéme bande, ou de la quatriéme, ou de la cinquiéme. Et il faut remarquer que c'eſt la meſme choſe de trouver la ſomme des dix premiers termes de la troiſiéme bande; c'eſt à dire des dix premiers nombres triangulaires, que de trouver le dixiéme nombre pyramidal.

Voilà une regle generale pour cela que je tiens d'un fort habile homme. Je la pourrois propoſer generalement: mais j'aime mieux l'appliquer tout d'un coup à un exemple particulier par lequel on jugera ſans peine de tous les autres.

Je veux chercher la ſomme des 10 premiers termes de quelques bandes que ce ſoit. Je mets 10, & puis 11, & puis 12, &c. comme des nombres qui ſe doivent multiplier les uns les autres ſelon les bandes, dont on veut ſçavoir la ſomme des dix premiers termes: & je mets au deſſous de chacun de ces nombres 1, 2, 3, &c. en cette maniere.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, &c.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Les nombres de deſſous ſont pour diviſer les produits des nombres de deſſus; car ſi j'ay beſoin de multiplier les 3 premiers nombres les uns par les autres, je les diviſeray par le produit des 3 de deſſous, qui ne font que *b*, parce que l'unité ne change rien en diviſant.

Cela ſuppoſé, ſi je veux avoir la ſomme de dix termes de la 1. bande, je ne prends que le premier chiffre d'enhaut qui marque que c'eſt de dix termes, dont je veux avoir la ſomme. Et ce nombre me la donne ſans qu'il ſoit diviſé, parce que l'unité qui eſt au deſſous ne diviſe point.

Mais ſi je veux avoir la ſomme de dix termes de la 2e bande, je multiplie les deux premiers nombres de deſſus, c'eſt à dire 10 par 11, ce qui fait 110, & les diviſe par les deux de deſſous; c'eſt à dire par une fois 2, ce qui donne 55. Mais pour faire cela plus facilement avant que de faire la multiplication, je diviſe par deux l'un des deux chiffres qui le peut eſtre, & je multiplie l'autre nombre par ſa moitié, c'eſt à dire 11 par 5; ce qui donne encore 55.

Si je veux avoir la ſomme de dix termes de la 3e bande, je me ſers pour cela des trois premiers chiffres d'enhaut, & je commence par diviſer ou 10 par 2 & 12 par 3, ou tout d'un coup 12 par 6; (car cela revient au meſme,) & je multiplie les uns par les autres 5, 11, 4, ou 10, 11, 2, ce qui donnera 220, qui ſont la ſomme de dix premiers chiffres de la 3e bande.

Pour la 4e bande je me ſers des 4 chiffres d'enhaut, les ayant auparavant diviſez par ceux d'enbas, ſçavoir 10 par 2, & 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à 1, qui ne fera rien dans la multiplication des chiffres d'enhaut, & ainſi ils ſe reduiront à 5, 11, 13, ce qui fait 715.

Pour la 5e bande, on en fera autant des 5 chiffres d'enhaut, on les diviſera autant que l'on pourra par ceux d'enbas en cette maniere, 14 par 2, ce qui donnera 7, 12 par 3 fois 4, ce qui le reduira à rien au regard de la multiplication à faire, & 10 par 5, ce qui donnera 2. Et ainſi ces 5 nombres ne ſeront plus que 2, 11, 13, 7, ce qui fait 2002.

Je n'en dirai pas davantage. On voit aſſez comment cela doit faire pour toutes les bandes ſuivantes, & pour toute autre quantité de termes dont on voudra ſçavoir la ſomme, comme la ſomme des 100 premiers termes de

SCD LYON 1

quelques bandes que ce soit ; car laissant toûjours enbas 1, 2, 3, &c. ce qui est invariable pour diviser les nombres d'enhaut : il faudra mettre pour ces nombres d'enhaut 100, 101, 102, 103, &c.

Mais j'avoüe franchement que je ne sçay la raison de cela que pour la 2 & la 3 bande, & non pour les autres.

Observations sur les nombres Triangulaires.

J'ay déja dit qu'on appelloit Triangulaires les chiffres de la 3 bande. Or comme je pretends m'en servir pour trouver avec beaucoup de facilité la somme des quarrez & des cubes : j'ay besoin d'en remarquer quelques proprietez. XLIX.

La 1 est que deux nombres triangulaires qui se suivent immediatement font pris ensemble le quaré du nombre qui répond au plus grand des deux. On le verra par la table & en voicy la raison.

Je dis donc que le nombre Triangulaire de 9 & celui de 10, doivent faire ensemble le quarré de 10 qui est cent. Car pour avoir le nombre triangulaire de neuf, il faut multiplier 9 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 9, & pour avoir celuy de 10, il faut multiplier 11 par la moitié de 10, ce qui fait 5, 11. Or 9 & 11 faisant 20, il est visible que ces deux multiplications ensemble font 5, 20 ; c'est à dire 100.

Autrement 5, 10 — 1 font 50 — 5.
Et 5, 10 + 1 font 50 + 5.
Or cela fait ensemble 2, 50, c'est à dire 100.

Autre exemple, le nombre Triangulaire de 8 est 4, 9.
Et celuy de 9 5, 9.
Ce qui fait ensemble 9, 9 ou 81.

La 2 proprieté est que deux nombres Triangulaires qui se suivent ont pour leur difference le nombre naturel qui répond au plus grand.

Et il faut bien que cela soit ainsi ; car le 9me nombre Triangulaire est la somme des 9 premiers nombres, &

le 10 la ſomme des 10 premiers, qui parconſequent ne peut differer de l'autre, que parce qu'elle a 10 de plus.

On peut encore remarquer une 3e proprieté de ces nombres Triangulaires, qui eſt aſſez ſurprenante, quoy qu'elle ne ſoit pas de grand uſage. C'eſt que tout nombre quarré impair moins un ſe pouvant diviſer par 8, pour trouver combien 8 y ſera de fois, il ne faut que prendre le nombre triangulaire de la plus petite moitié de la racine de ce quarré impair. Exemples 8 eſt 45 fois dans le quarré de 19, parce que le nombre triangulaire de 9 (qui eſt la plus petite moitié de 19) eſt 45. Et 8 eſt 120 fois dans le quarré de 31, parce que 120 eſt le nombre Triangulaire de 15 qui eſt la plus petite moitié de 31.

De la premiere Proprieté il s'enſuit que toute quantité de nombres quarrez pris de ſuite, (ce qui ſe ſuppoſe toûjours) contient deux fois la meſme quantité des nombres Triangulaires moins le dernier qu'elle ne contient qu'une fois. Car chaque nombre Triangulaire entre deux fois dans la compoſition d'un quarré, hors le dernier qui ny entre qu'une fois: 1. dans le 1, qui eſt auſſi 1. Et dans le 2 qui eſt 1 + 3, & 3 qui eſt entré dans le 2 quarré qui eſt 4, entre avec 6 dans le 3 qui eſt 9, & 6 avec 10 dans le 4 qui eſt 16 & 10 avec 15 dans le 5 qui eſt 25, & 15 avec 21 dans le 6 qui eſt 36.

On voit donc que ſi on en demeure-là, il n'y aura que 21, ſixiéme nombre Triangulaire, qui n'entrera qu'une fois dans l'un des 6 premiers quarrez, & par conſequent tous les autres y entrant deux fois, il eſt donc clair que la ſomme des 6 quarrez plus 21, doit eſtre égale au double de la ſomme des 6 premiers nombres triangulaires.

IV. Probleme.

L. Trouver la ſomme de tant de nombres quarrez de ſuite que l'on voudra, c'eſt à dire des 10 premiers, des 20 des 100, &c.

On n'a ſelon ce qui vient d'eſtre dit, qu'à avoir la ſomme d'autant de nombres Triangulaires; c'eſt à dire de ceux

ceux de la 3 bande, la doubler, & puis en oſter le dernier des nombres Triangulaires, dont a trouvé la ſomme.

Le 10 nombre Triangulaire eſt 55. La ſomme des 10 premiers eſt 220, comme on l'a déja fait voir. Le double eſt 440, d'où oſtant 55, on aura 385 pour la ſomme des 10 premiers quarrez.

Autrement. Faites comme ſi vous vouliez avoir la ſomme des 10 premiers nombres Triangulaires, en mettant au deſſous 1, 2, 3, ou ſeulement 2, 3; car l'1 ne ſert que pour l'analogie, & au deſſus 10, 11, mais au lieu du troiſiéme qui eſt 12, mettre la ſomme des deux premiers qui eſt 21; ainſi

10, 11, 21.
2, 3,

Puis ayant diviſé 10 par 2, ce qui donne 5 & 21 par 3, ce qui donne 7, multiplier les uns par les autres 5, 11, 7, ce qui donnera 55, 7, ce fait 385.

Cette derniere façon revient à l'autre; car il faut remarquer que ſi au lieu de prendre pour troiſiéme nombre le premier plus 2. On prend le double du 1 plus un: il ſe trouve toûjours que ce dernier plus trois eſt double de celuy dont on ſe ſert pour trouver la ſomme des Triangulaires: d'où il arrive que diviſant l'un & l'autre par trois, celuy dont on ſe ſert pour les quarrez plus 1 eſt double de l'autre. 21 plus 3 eſt double de 12, & le tiers de 21 eſtant 7 7 + 1 eſt double de 4 qui eſt le tiers de 12.

V. PROBLEME.

TROUVER la ſomme de tant de Cubes que l'on voudra en les prenant de ſuite, c'eſt à dire des 10 premiers, des 20 premiers, &c. LI.

Le quarré du nombre triangulaire qui répond au nombre des Cubes dont on veut avoir la ſomme eſt la ſomme des Cubes; c'eſt à dire que ſi on veut avoir la ſomme des 10 premiers Cubes, il ne faut que trouver le 10 nombre Triangulaire qui eſt 55, & ſon quarré qui eſt 3025 ſera le nombre des Cubes.

On le peut prouver en deux manieres, l'une plus ſubtile, & l'autre plus naturelle. La 1 dépend des deux pro-

prietez des nombres triangulaires.

Car par la 1, deux triangulaires qui ſe ſuivent font enſemble le quarré du nombre qui répond au plus grand, c'eſt à dire que le 5 qui eſt 15, & le 6 qui eſt 21, font enſemble le quarré de 6 qui eſt 36.

Et par la ſeconde ces deux meſmes Triangulaires ont 6 pour leur difference. D'où il s'enſuit que les prenant pour racines de deux quarrez: ces quarrez auront pour leur difference la ſomme de ces deux racines qui eſt 36 multipliée par leur difference qui eſt 6, c'eſt à dire qu'ils auront pour leur difference le cube de 6.

Or pour voir plus facilement ce qui ſuit delà, nous marquerons chaque nombre triangulaire par un accent circonflexe que nous mettrons au deſſus du nombre qui marque ſa place, c'eſt à dire que 6 ſera le ſixiéme nombre Triangulaire qui eſt 21, 5 le cinquiéme qui eſt 15, & ainſi des autres.

Et pour marquer le quarré de chacun nous mettrons ſeulement 6^2 5^2. Et les Cubes des nombres ordinaires 6^3. 5^3. 4^3, &c. Cela eſtant.

$$6^2 = \begin{cases} 6^3 \\ 5^2 \end{cases} = \begin{cases} 5^3 \\ 4^2 \end{cases} = \begin{cases} 4^3 \\ 3^2 \end{cases} = \begin{cases} 3^3 \\ 2^2 \end{cases} = \begin{cases} 2^3 \\ 1^2 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

D'où il s'enſuit que laiſſant là les quarrez des autres nombres Triangulaires, parce que l'on a leurs équivalens, le ſeul quarré du ſixiéme nombre, qui eſt 441 eſt égal à la ſomme des ſix premiers nombres cubes.

L'autre raiſon eſt plus ſimple, & on la peut exprimer ainſi. La ſomme de tant de nombres cubiques de ſuite que l'on voudra, eſt le produit de la ſomme de toutes les racines multipliée par cette meſme ſomme; car prenant comme il le faut, ces nombres cubiques d'ordre, leurs racines ſeront toûjours autant de nombres naturels que l'on prendra de Cubes dont on voudra ſçavoir la ſomme.

Soient donc tant de nombres naturels que l'on voudra en commenceant par 1.

Les multipliant par autant	1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
d'autres tous les meſmes.	1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.

SCD LYON 1

Il se fera autant de multiplications partiales, que sera le quarré des termes que l'on prendra, c'est à dire que si on n'en prend que 5, il y aura 25 multiplications partiales. Si 6, il y en aura 36, &c.

Mais il faut remarquer 1. Que de ces multiplications partiales, les directes comme 2, 2. 3, 3. sont toûjours simples, & que celles qui se font en croix, comme 2, 3, 3, 5, &c. sont toûjours doubles.

En second lieu, que c'est la mesme chose de multiplier 6 par 2 + 4 que de le multiplier separement par 2, en disant 2, 6. & par 4 en disant 4, 6. Il faut seulement remarquer que la multiplication de 2 + 4 par 6 comprend deux des 36 multiplications partiales, que doit avoir la multiplication des 6 premiers nombres par eux mesmes: & qui ajoûtant *bis* cela en fait 4.

Cela supposé, voicy comme ces 36 *Multiplications partiales feront les* 6 *premiers Cubes.*

Denomb. des partiales.	Mult. partiales.		Cubes.
1	1, 1	1	1
3 { 1, 2	2, 2 ; 1, 2 *bis*	4 ; 4 } 2, 4.	8
5 { 1, 4	3, 3 ; 1 + 2, 3 *bis*	9 ; 2, 9 } 3, 9.	27
7 { 1, 4, 2	4, 4 ; 1 + 3, 4 *bis* ; 2, 4 *bis*	16 ; 2, 16 ; 16 } 4, 16	64
9 { 1, 4, 4	5, 5 ; 1 + 4, 5 *bis* ; 2 + 3, 5 *bis*	25 ; 2, 25 ; 2, 25 } 5, 25.	125
11 { 1, 4, 4, 2	6, 6 ; 1 + 5, 6 *bis* ; 2 + 4, 6 *bis* ; 3, 6 *bis*	36 ; 2, 36 ; 2, 36 ; 36 } 6, 36.	236

Somme 36.

On voit par là, que le premier nombre multiplié par soy-mesme ne donne qu'une multiplication qui fait un premier nombre cube.

Que les deux premiers 1. 2 multipliez aussi par eux mêmes, (ce qui se doit toûjours sous-entendre sans qu'il soit besoin de l'exprimer,) luy donne 4, dont une estant déja prise, les trois autres donnent huit second nombre cube.

Que les trois premiers 1. 2. 3. en donnent 9 dont 4 étant prises qui ont donné les deux premiers cubes, les cinq qui restent donnent le 3. 27.

Que les quatre 1. 2. 3. 4. en donnent 16, dont 9 estant déja prises qui ont donné les trois premiers cubes, les 7 qui restent donnent le 4 64.

Que les cinq 1. 2. 3. 4. 5. en donnent 25, dont 16 estant déja prises qui ont donné les 4 premiers cubes, les 9 qui restent donnent le 5. 125.

Que les six 1. 2. 3. 4. 5. 6. en donnent 36, dont 25 estant déja prises qui ont donné les cinq premiers cubes. Les 11 qui restent donnent le 6. 2. 16.

Et on voit sans peine que cela doit aller jusqu'à l'infiny.

Mais pour éviter l'embarras & la longueur de ces multiplications partiales, (ce qui n'a servy qu'à la preuve.) Il ne faut que prendre la somme de toutes ces racines, (c'est à dire de tant que l'on voudra de nombres naturels,) & la multiplier par elle-même ; car il est visible que c'est la même chose de multiplier 3 par 3, que de multiplier 1 + 2 par 1 + 2.

Or la somme de ces nombres naturels, est ce qu'on appelle nombre triangulaire ; car 6 par exemple, est le nombre triangulaire de 3, parce que 1 + 2 + 3 font 6. Donc en multipliant le dixiéme nombre triangulaire qui est 55 par soy mesme, on aura la somme des dix premiers cubes.

Or rien n'est plus facile que de trouver le nombre triangulaire de tel nombre que l'on veut ; car si c'est un nombre impair, Il ne faut que le multiplier par sa plus gran-

SCD LYON 1

de moitié : 5. 3, 5. 7. 4, 7. 9. 5, 9. 11. 6, 11. &c.

Et si c'est un nombre pair, il ne faut que prendre sa moitié, & multiplier par là ce nombre plus un. 6. 3, 7. 8. 4, 9. 10. 5, 11. 12. 6, 13. 14. 7, 13.

Comment il se faut conduire pour resoudre tous les Problemes semblables à ceux de la mule & de l'asneſſe, des deux vases qui ont un mesme couvercle, &c.

PREPARATION.

Il faut écrire les hypotheses en donnant des noms aux quantitez inconnuës, exemple, mule, asneſſe.

Le nombre des sacs que porte la mule soit appellé A, & celuy que porte l'asneſſe B.

HYPOTHESES.

1. Hip. $A - 3 = B + 3$ { Si la mule donne à l'asneſſe trois de ses sacs, ils en auront autant l'une que l'autre. LII.

2. Hip. $A + 1 = 3B - 3$ { Si l'asneſſe donne à la mule l'un de ses sacs, la mule en porter a 3 fois autant que l'asneſſe.

Ayant ces hypotheses, il faut trouver les équivalens; c'est à dire l'équivalent d'A par B plus ou moins, ce qu'il faut, & l'équivalent de B par A plus ou moins ce qu'il faut.

Pour trouver les équivalens d'une Hypotheſe : il faut oſter d'un membre les chiffres & laiſſer la lettre seule, & transporter les chiffres dans l'autre membre, en changeant le signe. Exemple

EQUIVALENS.

Par la 1 Hip. $\begin{cases} A = B + 6. \\ B = A - 6. \end{cases}$

Par la 2 Hip. $\begin{cases} A = 3B - 4. \\ 3B = A + 4. \end{cases}$

Ayant ces équivalens, on resout sans peine les Problemes. Il ne faut pour cela que reprendre les Hypotheses, & si on veut resoudre le Probleme par la premiere : Il faut se servir des équivalens de la seconde, & au contraire si on le veut resoudre par la seconde Hypothese. Il faut se servir des équivalens de la premiere, & par là, on fera que dans l'équation de chaque hypothese, il n'y ait que les mesmes lettres dans l'un & dans l'autre membre.

I. PROBLEME. HYPOTHESES.

1. $\left\{\begin{array}{l} A-3=B+3. \\ A+1=3B-3. \end{array}\right.$
2.

EQUIVALENS.

Par la 1 Hyp. $\left\{\begin{array}{l} A=B+6. \\ B=A-6. \end{array}\right.$

Par la 2 Hyp. $\left\{\begin{array}{l} A=3B-4. \\ 3B=A+4. \end{array}\right.$

I. Solution par la 1 *Hypothese en reduisant tout en B.*

1. Hypothese. $\left\{\begin{array}{l} A-3=B+3. \end{array}\right.$
Equivalent de la 2. $\left\{\begin{array}{l} A=3B-4. \end{array}\right.$

Je puis donc mettre au lieu d'A 3 B—4, donc mettant dans le second membre de l'équation 7 qui est par moins dans le premier.

$3B=B+10.$
Donc $2B=10.$
Donc $B=5.$

II. Solution par la 2 *Hypothese en reduisant le tout en B.*

2. Hypothese. $\left\{\begin{array}{l} A+1=3B-3. \end{array}\right.$
2. Eq. de la 2 Hyp. $\left\{\begin{array}{l} B=A-6. \end{array}\right.$

Mettant donc B 6 au lieu d'A.

$B+7=3B-3.$
Donc $B+10=3B.$
Donc $10=2B.$
Donc $5=B.$

SCD LYON 1

III. *Solution par la 2 Hypotheſe en reduiſant tout en A.*

2 Hypotheſe. $\left\{\begin{array}{l} A+1 = B-3. \\ B\ A = -6. \end{array}\right.$
2 Equiv. de la 2.

Donc mettant au lieu de 3 B trois fois A—6 qui font 3 A—18.

A + 1 = 3 A—18—3, [c'eſt à dire—21] & tranſpoſant 21 dans le premier membre en changeant le ſigne.

A + 22 = 3 A.
Donc 22 = 2 A.
Donc 11 = A.
Donc A eſt 11 & B 5;
C'eſt à dire que la mule avoit 11 ſacs, & l'aſneſſe 5.

II. Probleme.

Hypotheſes 1. $\left\{\begin{array}{l} A-9 = B+9. \\ A+3 = 3B-9. \end{array}\right.$
2.

Equivalens de la 1 Hypoth. $\left\{\begin{array}{l} 1\ A = B+18. \\ 2\ B = A-18. \end{array}\right.$

Equivalens de la 2. $\left\{\begin{array}{l} A = 3B-12. \\ 3b = a+12 \end{array}\right.$

I. *Solution par la 1 Hypotheſe en reduiſant tout en B.*

1. Hypotheſe. $\left\{\begin{array}{l} A-9 = B+9. \\ A = 3B-12. \end{array}\right.$
Equiv. de la 2.

3 B—12—9, [c'eſt à dire—21 = B + 9.
Donc 3 B = B + 30.
Donc 2 B = 30.
Donc B = 15.

II. *Solution par la 2 Hypotheſe en reduiſant tout en A.*

2 Hypotheſe. $\left\{\begin{array}{l} A+3 = 3B-9. \\ B = A-18. \end{array}\right.$
2 Equiv. de la 1.

A + 3 = 3 A—63.
Donc A + 66 B = 3 A.
Donc 66 B = 2 A.
Donc 33 = A. C'eſt à dire que A eſt 33 & B eſt 15.

SCD LYON 1

III. *Solution par la 2 Hypotheſe en reduiſant tout en B.*

3 B + 9 = B + 21.
Donc 3 B = B + 30.
Donc 2 B = 30.
Donc B = 15.

III. Probleme.

LIII. Hypotheſe 1. $\begin{cases} A + 2000 = 4\,B. \\ 2. \quad B + 1000 = \frac{1}{2}\,A. \end{cases}$

Equiv. de la 1. $\begin{cases} A = 4\,B - 2000. \\ \text{de la } 2. \quad B = \frac{1}{2}\,A - 1000. \end{cases}$

I. *Solution par la 1 Hypotheſe.*

A + 2000 = 2 A — 4000.
Donc A + 6000 = 2 A.
Donc 6000 = A.

II. *Solution par la 2 Hypotheſe.*

B + 1000 = 2 B — 1000.
Donc B + 2000 = 2 B.
Donc 2000 = B.

III. *Solution par la 1 Hypotheſe.*

LIV. A + 2000 = 4 B.
Donc $\frac{1}{4}$ A + 500 = B.
Donc B = $\frac{1}{2}$ A — 1000.
Donc $\frac{1}{4}$ A + 500 = $\frac{1}{2}$ A — 1000.
Donc $\frac{1}{4}$ A + 1500 = $\frac{1}{2}$ A.
Donc 1500 A = $\frac{1}{4}$ A.
Donc 6000 = A.

IV. Probleme.

Hypotheſe 1. $\begin{cases} A + 3000 = 3\,B. \\ 2. \quad B + 3000 = \frac{1}{2}\,A. \end{cases}$

Equiv. de la 1. $\begin{cases} A = 3\,B - 3000. \\ 2. \quad B = \frac{1}{2}\,A - 3000. \end{cases}$

I. *Solution*

I. *Solution par la* 1 *Hypotheſe.*

A + 3000 = A $\frac{1}{2}$ — 3000.
Donc A + 6000 = A $\frac{1}{2}$.
Donc 6000 = $\frac{1}{2}$ A.
Donc 12000 = A.

II. *Solution par la* 2 *hypotheſe.*

B + 3000 = B $\frac{1}{2}$ — 1500.
Donc B + 4500 = B $\frac{1}{2}$.
Donc 4500 = $\frac{1}{2}$ B.

V. PROBLEME.

Hypotheſe 1. $\left\{\begin{array}{l} A + 3000 = 9\ B. \\ 2.\ B + 5000 = \frac{1}{3}\ A. \end{array}\right.$
Eqviv. de la 1. $\left\{\begin{array}{l} A = 9\ B - 3000. \\ \text{de la } 2.\ B = \frac{1}{3}\ A - 5000. \end{array}\right.$

I. *Solution par la* 1^e *Hypotheſe.*

A + 3000 = 3 A — 45000.
Donc A + 48000 = 3 A.
Donc 48000 = 2 A.
Donc 24000 = A.

II. *Solution par la* 2^e *Hypotheſe.*

B + 5000 = 3 B — 1000.
Donc B + 6000 = 3 B.
Donc 6000 = 2 B.
Donc 3000 = B.

VI. PROBLEME.

Hypotheſe 1. $\left\{\begin{array}{l} A - 25 = B + 25. \\ 2.\ A + 25 = 2\ B - 50. \end{array}\right.$
Equiv. de la 1. $\left\{\begin{array}{l} A = B + 50. \\ B = A - 50. \end{array}\right.$
de la 2. $\left\{\begin{array}{l} A = 2\ B - 75. \end{array}\right.$

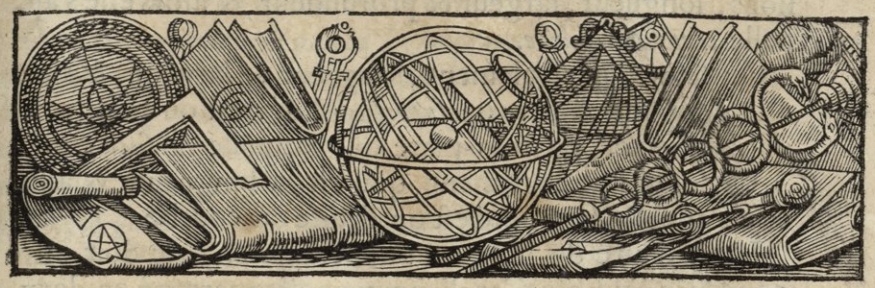
SCD LYON 1

I. *Solution par la 1 Hypotheſe.*

B + 25 = 2B — 100.
Donc B + 125 = 2B.
Donc 125 = B.

II. *Solution par la 2 Hypotheſe.*

A + 25 = 2 A — 150.
Donc A = 2 A — 175.
Donc A = 175.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE CINQUIE'ME.

DE L'ESTENDUE.

DE LA LIGNE DROITE ET CIRCULAIRE. DES DROITES PERPENDICULAIRES, ET OBLIQUES.

DEFINITIONS.

NOus *avons parlé jusques icy de la grandeur en general. Il faut maintenant descendre à ses especes.* 1.

TOUTE grandeur est continuë, comme est l'étenduë, le temps, le mouvement: ou non continuë, comme le nombre.

La continuë est ou successive, comme le temps, le mouvement.

Ou permanente, qui s'appelle generalement *espace* ou *étenduë.*

Mais elle se considere ou selon toutes ses trois dimen-

SCD LYON 1

sions, longueur, largeur & profondeur, & alors elle s'appelle *corps* ou *solide*.

Ou selon deux seulement, longueur & largeur, & alors elle s'appelle *surface* ou *superficie*, qui est ou plate, qui s'appelle *plan*, ou non plate qui s'appelle *surface courbe*.

Ou selon une seulement, qui est la longueur, & alors elle s'appelle *ligne*, qui est ou droite ou courbe.

L'extrémité de la ligne s'appelle *point*, qui doit estre conceu indivisible. Car s'il pouvoit estre partagé en deux, l'une de ces moitiez ne seroit pas à l'extrémité de la ligne.

Et par la même raison la ligne, qui est indivisible selon la largeur, parce qu'elle est considerée comme n'en ayant point, est l'extrémité de la surface.

Et la surface qui est aussi indivisible selon la profondeur, est l'extrémité du corps.

PREMIER AVERTISSEMENT.

II. LES *idées d'une surface plate & d'une ligne droite sont si simples, qu'on ne feroit qu'embroüiller ces termes en les voulant definir. On peut seulement en donner des exemples pour en fixer l'idée aux termes de chaque langue.*

SECOND AVERTISSEMENT.

III. QUOY *qu'il n'y ait point au monde d'étenduë qui n'ait que longueur & largeur sans profondeur, ou longueur sans largeur ny profondeur, & encor moins de point, qui n'ait ny longueur, ny largeur, ny profondeur; ce que disent les Geometres des surfaces, des lignes & des points ne laisse pas d'estre vray, parce qu'il suffit pour cela que dans un corps qui est veritablement long, large, & profond, je puisse n'en considerer que la longueur & la largeur, sans faire attention à la profondeur, ou même la longueur seule sans m'arrester ny à la largeur, ny à la profondeur. Ainsi pour mesurer un champ, je ne m'amuse pas à creuser pour sçavoir si la terre y est bien profonde, mais je regarde seulement combien il est long & large: Et pour sçavoir combien il y a de Paris à Orleans, je ne mesure pas la largeur des chemins, mais seulement la longueur. Et de même ce qu'on appelle Point n'est que la ligne même, entant qu'on n'y considere que la negation d'une plus longue étenduë.*

SCD LYON 1

TROISIEME AVERTISSEMENT.

ON *doit commencer par la ligne comme par la plus ſimple eſtenduë: & de plus pour en rendre la conſideration plus facile lors que l'on compare pluſieurs lignes enſemble, on les ſuppoſe toûjours dans ces premiers élemens comme eſtant poſées, ou décrites ſur un même plan, c'eſt à dire ſur une même ſuperficie plate; ce qu'il ſuffit d'avoir dit une fois pour toutes.* IV.

PRREMIERE SECTION.

DE LA LIGNE DROITE.

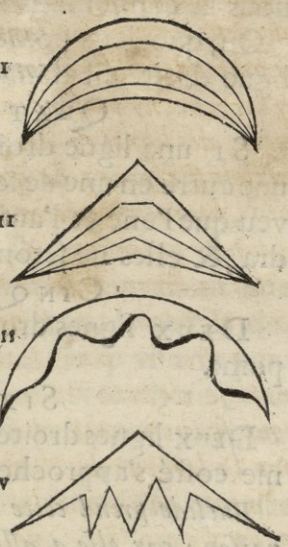
Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en eſt tres claire d'elle même, & que tous les hommes conçoivent la même choſe par ce mot. Mais il eſt bon de remarquer ce que nous concevons naturellement eſtre enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre ſi l'on veut pour ſa definition. V.

La ligne droite eſt la plus courte étenduë entre deux points.

Et celle qui approche plus de la droite, eſt auſſi la plus courte: ce qui a donné occaſion à Archimede d'établir ce principe ou Axiome.

PREMIER AXIOME.

SI deux lignes ſur le même plan ont les extremitez communes & ſont courbes ou creuſes vers la même part, celle qui eſt contenuë eſt plus courte que celle qui la contient. J'ay dit courbes ou creuſes, car cela n'eſt pas ſeulement vray des lignes courbes comme dans la I. figure, mais auſſi des droites comme dans la II, lors que deux ou pluſieurs lignes droites ſe joignant font un creux. Car alors deux ou pluſieurs lignes droites ſont conſiderées comme une ſeule ligne courbe qui ſeroit creuſe vers ce coſté-là. VI.



Mais il faut bien remarquer ces

mots, (vers la même part) car cela ne seroit pas vray, si la même ligne courbe estoit creuse vers differens côtez comme dans la III figure, ou si diverses lignes droites considerées comme une seule ligne faisoient aussi des creux de differens costez comme dans la IV figure; car alors la contenante pourroit estre plus courte que la contenuë.

SECOND AXIOME OU DEMANDE.

VII. AYANT deux points donnez on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Et on n'y en peut mener qu'une.

Laquelle par consequent est l'unique & naturelle mesure de la distance entre ces deux points. L'instrument dont on se sert pour cela s'appelle *regle*.

TROISIEME AXIOME OU DEMANDE.

VIII. LA simplicité de la ligne droite fait qu'en ayant une posée on la peut prolonger de part & d'autre jusques à l'infiny, c'est à dire tant que l'on veut.

D'où il s'ensuit que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Ou, que connoissant deux points dans une ligne droite, nous la connoissons toute.

Ou, que deux points estant donnez de position, toute la ligne droite est donnee.

QUATRIEME AXIOME.

IX. SI une ligne droite est immediatement couchée sur une autre en une de ses parties, elle le sera en toutes, pourveu que l'une & l'autre soit prolongée autant qu'il faudra, & elles ne seront proprement qu'ue même ligne.

CINQUIEME AXIOME.

X. DEUX lignes droites ne se peuvent couper qu'en un point.

SIXIEME AXIOME.

XI. DEUX lignes droites qui estant prolongées vers un même costé s'approchent peu à peu, se couperont à la fin.

Euclide prend cette proposition pour un principe & avec raison: car elle a assez de clarté pour s'en contenter, & ce

SCD LYON 1

ſeroit perdre le temps inutilement que de ſe rompre la teſte pour la prouver par un long circuit.

SECONDE SECTION.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

DEFINITIONS.

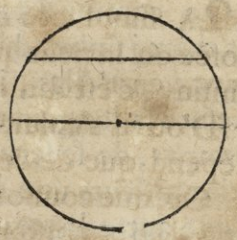
XII. LA ligne que décrit ſur un plan l'une des extrémitez d'une ligne droite, ſon autre extrémité demeurant immobile, s'appelle *circulaire*, ou *circonference*.

XIII. ET l'eſpace que décrit toute la ligne s'appelle *cercle*.

XIV. LE point immobile, *centre*, qui ne peut pas n'eſtre point également diſtant de chaque point de la circonference, puiſque c'eſt toûjours la même ligne qui a fait cette diſtance.

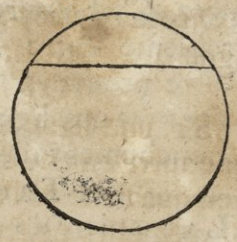
XV. ET ainſi il eſt bien clair que toutes les lignes du centre à la circonference ſont égales.

XVI. CES lignes s'appellent *rayons* ou *demydiametres*.



XVII. LES lignes menées d'un point de la circonference à un autre s'appellent *cordes*.

XVIII. SI elles paſſent par le centre, elles s'appellent *diametres*, & elles coupent le cercle & la circonference en deux parties égales, qui s'appellent *demycercles* & *demycirconferences*.



XIX. LA partie de la circonference qui ſe trouve entre les extremitez d'une corde s'appelle *arc*. Mais lors que cette corde eſt moindre qu'un diametre, il y a deux portions de circonferences qui ſe terminent aux extremitez de cette corde. L'une plus grande que la demycirconference, & l'autre plus petite. Or quand on parle de l'arc d'une corde, ſi on n'ajoûte autre choſe, on entend celuy qui n'eſt pas plus grand que la demycirconference. Ce qui ſoit bien remarqué.

XX. TOUTE circonference ſe conçoit diviſée en 360. parties égales qui s'appellent *degrez*.

XXI. CHAQUE degré en 60 minutes premieres qu'on appelle ſimplement *minutes :* Chaque minute en 60 *ſecondes*, & chaque ſeconde en 60 *troiſiémes* ; & ainſi à l'infini.

PREMIER AXIOME OU DEMANDE.

XXII. ON demande qu'ayant un intervale donné, on puiſſe décrire une circonference de cet intervale. Ce qu'on ne peut douter eſtre poſſible, puis qu'il ne faut pour cela que concevoir que la ligne qui joindra les deux points de cet intervale ſe remuë, l'une de ſes extremitez demeurant immobile.

La machine la plus ordinaire dont on ſe ſert pour la décrire ſur le papier s'appelle, *compas*, qui a deux jambes, qui eſtant ouvertes plus ou moins ſelon l'intervale donné, l'une demeurant immobile, l'autre décrit la circonference.

SECOND AXIOME OU DEMANDE.

XXIII. OR comme il faut ſuppoſer dans cette operation que les deux jambes du compas gardent toûjours la même diſtance entr'elles, il n'eſt rien de plus facile aprés avoir meſuré la longueur d'une ligne donnée par l'ouverture du compas, de ſe ſervir de cette même ouverture pour décrire ailleurs une ligne égale à celle-là, ou retrancher d'une autre ligne une portion qui ſoit égale à cette premiere. C'eſt pourquoy on peut hardiment mettre ce Probleme entre les demandes qui n'ont point beſoin d'eſtre prouvées.

Décrire une ligne égale à une ligne donnée, ſoit par le retranchement d'une autre ligne, ſoit par tout ailleurs.

TROISIEME AXIOME.

XXIV. LA maniere dont l'on conçoit que ſe forme la ligne circulaire eſt ſi ſimple, qu'il eſt impoſſible de concevoir qu'elle ne ſoit pas par tout dans une entiere uniformité. Et de là il s'enſuit que les Theoremes ſuivans ſont naturellement connus.

Les circonferences qui ſont décrites d'un égal intervale ſont égales.

Et celles qui ſont decrites d'un plus petit intervale ſont plus petites.

Et

SCD LYON 1

Et d'un plus grand sont plus grandes.

Quatrieme Axiome.

Les degrez de circonferences égales sont égaux, puis que ce sont aliquotes pareilles de grandeurs égales. Et par la même raison les degrez d'une petite circonference sont plus petits que les degrez d'une plus grande. XXV.

Cinquieme Axiome.

Dans un même cercle les cordes qui soûtiennent des arcs égaux sont égales, & les arcs qui sont soûtenus par des cordes égales sont égaux. C'est une suite évidemment necessaire de l'entiere uniformité de la circonference. Il ne faut que de l'attention pour en appercevoir la certitude. XXVI.

Il en est de même dans deux cercles égaux que dans le même cercle.

Sixieme Axiome.

Toutes les lignes tirées du centre qui sont plus petites que les rayons du cercle, ont leur extremité au dedans du cercle : que si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors ; si égales, dans la circonference même. XXVII.

Septieme Axiome.

Lors qu'on a d'une ligne, l'une des extremitez donnée de position, & sa longueur, son autre extremité doit estre dans la circonference du cercle décrit par un intervale de cette longueur donnée.

TROISIEME SECTION.

DES LIGNES DROITES PERPENDICULAIRES. XXVIII.

Definitions.

Nous avons déja dit qu'une ligne droite n'en peut couper une autre droite qu'en un point. Mais la coupant elle le peut faire en deux manieres.

La premiere, est en ne panchant point plus vers un costé de la ligne coupée, que vers l'autre.

Et alors elles sont dites se couper *perpendiculairement* & estre *perpendiculaires* l'une à l'autre.

La seconde, en penchant plus vers un costé que vers l'autre, & alors elles sont dites se couper *obliquement* & estre *obliques* l'une au regard de l'autre.

Mais il ne faut pas confondre l'obliquité qui convient

SCD LYON 1

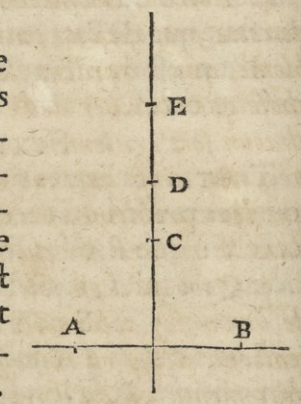
à une ligne droite par rapport à une autre ligne, avec la curvité qui convient à la ligne par sa nature même, & constituë une espece de ligne opposée à la ligne droite.

AVERTISSEMENT.

XXX. QUOY *que deux lignes qui se coupent, & soient coupées mutuellement, neanmoins afin qu'on ne les confonde pas, nous appellerons l'une coupée & l'autre coupante.*

DEFINITION PLUS EXACTE DE LA PERPENDICULAIRE.

XXXI. POUR former une notion plus distincte de deux lignes perpendiculaires, on les peut définir en cette sorte.



Lors que deux points de la ligne coupée estans pris également distans de l'un des points de la ligne coupante, tout autre point de la ligne coupante se trouvera aussi estre également distant de ces deux points de la ligne coupée, la ligne coupante est perpendiculaire à la coupée, étant bien clair qu'elle ne peut alors incliner plus d'un costé que d'autre.

AXIOME.

XXXII. POUR montrer que tous les points de la ligne coupante sont également distans de deux de la ligne coupée, il suffit d'en auoir deux dans la ligne coupante dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Car de là il s'ensuivra que tous les autres le seront aussi.

JE *pretens que la seule consideration de la nature de la ligne droite fait voir la verité de cette proposition, & que sans cela il est impossible de garder dans la Geometrie l'ordre naturel des choses.*

Car 1. *puisque la position de la ligne droite ne dépend que de deux points, & qu'en ayant donné deux points, elle est toute donnée, c'est à dire que la position de tous les autres points est determinée, il est visible que la position de ces deux points de la ligne coupante, dont on suppose que chacun est également distant de deux points de la ligne coupée, détermine tous*

les autres à en estre aussi également distans.

2. *S'il y en avoit quelqu'un qui approchast plus de l'un des points que de l'autre, la ligne seroit necessairement courbée de ce costé là.*

3. *Il n'y auroit point de raison pourquoy il s'approcheroit plûtost d'un costé que de l'autre, ny pourquoy il s'approcheroit de tant plûtost que de tant. Car la position de ces deux points donnez qui determine tous les autres points de la ligne, ne les peut determiner qu'à une égalité de distance, puis qu'ils n'ont pour eux-mesmes que cette determination là.*

4. *Tous les Geometres semblent assez convenir de l'évidence de cette proposition, puisque dans la solution de tous les problemes qui regardent les perpendiculaires, ils ne font autre chose que chercher deux points dans la ligne coupante, dont chacun soit également distant de deux points de la ligne coupée. Et ainsi quelque circuit qu'ils cherchent pour montrer que leur probleme est resolu par là, il est clair neanmoins que dans la nature des choses ce n'est que cela seul qui l'a resolu.*

5. *Quoy qu'il en soit, je soûtiens que quiconque voudra agir de bonne foy reconnoistra que considerant les choses avec attention, il luy est impossible de concevoir que cela puisse estre autrement, & qu'il repugne à l'idée que nous avons naturellement de la ligne droite, que deux de ses points estans posez directement, comme nous avons dit, sur une autre ligne, quelqu'un des autres s'écarte ou à droit ou à gauche, & s'approche ainsi plus prés de l'un des costez de la ligne.*

Or il me semble tres inutile de chercher bien loin & par de longs détours des preuves d'une chose dont il nous est impossible de douter, pour peu que nous y voulions faire attention.

6. *Ce qui doit faire rejetter le scrupule qu'on pourroit avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle-mëme, c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses, & employer des triangles pour demonstrer les proprietez des lignes, c'est à dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à la veritable methode.*

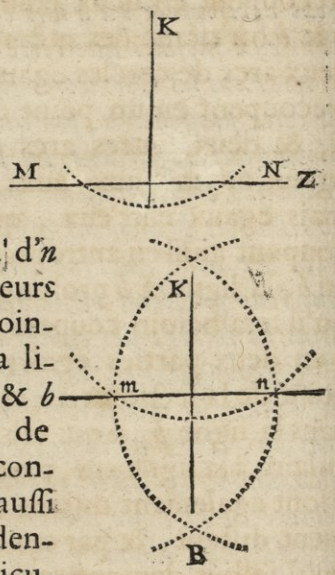
Soit donc, de justice ou de grace, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition, qui donne un moyen tres facile

de démonstrer les Problemes suivans sans se servir des triangles comme fait Euclide.

Premier Probleme.

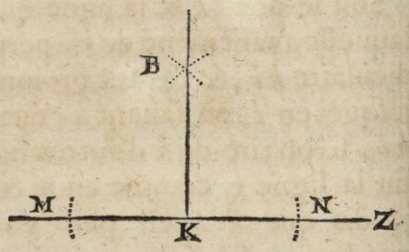
XXXIII. D'un point donné hors une ligne donnée tirer une perpendiculaire sur cette ligne : on suppose que cette ligne soit prolongée s'il en est besoin, & que le point donné ne se puisse pas rencontrer dans la ligne prolongée, car alors il ne seroit pas proprement hors cette ligne.

Soit le point *k* & la ligne *z* de *k* pris pour centre, décrire un cercle qui coupe *z*, & par consequent y marque 2 points comme *m* & *n*, également distans de *k*, puisque *m k*, & *n k* seront rayons du même cercle. Cela fait, décrivant deux cercles égaux d'*m* & d'*n* qui s'entrecoupent par tout ailleurs qu'en *k*, comme en *b*, la ligne qui joindra *b* & *k* sera perpendiculaire à la ligne *z*, ce qu'il falloit faire. Car *k* & *b* sont chacun également distans de deux points de *z*, *m* & *n*, & par consequent tous les autres en seront aussi également distans par la precedente, & ainsi sa ligne sera perpendiculaire par la definition.



Second Probleme.

XXXIV. D'un point donné dans une ligne élever un perpendiculaire. Soit le point *k* dans la ligne *z* qui étant pris pour centre, le cercle que l'on décrira de ce centre coupera la ligne *z*, prolongée s'il en est besoin, en deux points comme *m* & *n*, qui seront également distans de *k*. Donc l'intersection de 2 cercles égaux qui auront *m* & *n* pour centre donnera le point *b*, auquel il faudra mener la ligne



SCD LYON 1

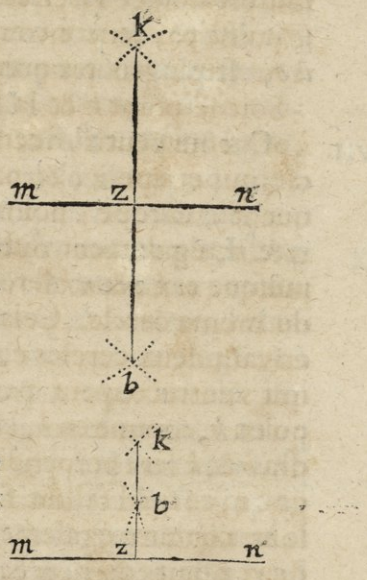
du point *k* pour faire la perpendiculaire que l'on cherche.

C'eſt la même preuve que du precedent. Car *k* & *b* ſeront chacun également diſtans de *m* & *n*.

Troisieme Probleme.

Couper une ligne donnée en deux parties égales. XXXV.

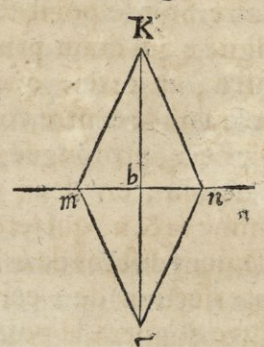
Soit la ligne donnée *m n*, en tirant des deux extremitez *m* & *n*, pris pour centres, deux cercles égaux qui s'entrecoupent en deux points comme *k* & *b* où tirant des mêmes centres deux arcs de cercles égaux qui s'entrecoupent en un point comme en *k*, & deux autres arcs de cercles égaux ou inégaux aux premiers, mais égaux entr'eux, qui s'entrecoupent auſſi en autre point comme en *b*, la ligne *k b* prolongée autant qu'il ſera beſoin coupera la ligne *m n* en deux parties égales. Car ſi le point de la ſection eſt *z* comme il eſt dans la ligne *b*, *k* qui eſt perpendiculaire à la ligne *m n*, parce que *b* & *k* ſont également diſtans de *m* & *n*, *z* auſſi en ſera également diſtant, & par conſequent *m z* ſera égal à *z n*. Ce qu'il falloit demonſtrer.



I. Theoreme.

La perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent eſtre menées d'un point à une ligne. XXXVI.

Soit le point *k* & la ligne *z*, ſur laquelle ayant mené de *k* la perpendiculaire *k b*, & l'ayant prolongée juſques en *c*, en faiſant *b c* égale à *k b*, ſi on tire de *k* d'autres lignes ſur la ligne *z* comme en *m* & *n*, je dis que *k b* eſt plus courte que *k m*, ou *k n*. Car ayant tiré les lignes *m c* & *n c*, je dis que *k m* eſt égale à *m c*, & *k n* à *n c*, puiſque la

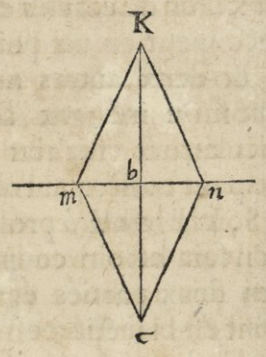


ligne z eſtant perpendiculaire à la ligne $k\,c$, le point b qui eſt commun à ces deux lignes ne peut eſtre comme il eſt également diſtant de k & de c, que les autres points comme m & n ne ſoient auſſi chacun également diſtans de k & de c.

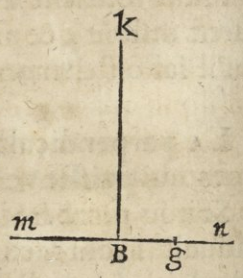
Or cela eſtant, il eſt clair que la ligne $k\,b\,c$ eſtant droite eſt plus courte que les lignes $k\,m\,c$, qui ne font pas une ligne droite, & par conſequent $k\,b$, qui eſt la moitié de $k\,b\,c$, eſt plus courte que $k\,m$, qui eſt la moitie de $k\,m\,c$.

II. THEOREME.

XXXVII. ON ne peut élever du meſme point d'une ligne plus d'une perpendiculaire, ny en mener plus d'une d'un point à une ligne. Le premier eſt clair de ſoy-même: car ayant élevé du milieu de la ligne $m\,n$, la perpendiculaire $b\,k$, il eſt viſible que ſi on en vouloit élever une autre du même point b, on ne la pourroit tirer que plus vers un côté que vers l'autre, ce qui eſt directement contraire à la notion de perpendiculaire.



La 2e partie eſt encore tres manifeſte, & ſe peut neanmoins prouver de cette ſorte. Soit mené de k ſur $m\,n$ la perpendiculaire $k\,b$, en ſorte que b ſoit également diſtant de m & n, dont par conſequent k doit eſtre auſſi également diſtant: ſi on menoit de k une autre perpendiculaire à un autre point comme à g, il faudroit que g fuſt également diſtant de m & de n, puiſque k qui ſeroit un des points de cette ligne en eſt également diſtant. Or cela eſt impoſſible, puiſque ſi g eſtoit entre b & m, il ſeroit plus prés de m que de n, & s'il eſtoit entre b & n, il ſeroit plus prés de n que de m.



I. COROLLAIRE.

XXXVIII. LA perpendiculaire eſt la meſure d'un point hors d'une ligne à cette ligne, & de la ligne à ce point.

Car eſtant unique & la plus courte de toutes les lignes

qui peuvent estre menées d'un point à une ligne, on n'en pouvoit prendre aucune autre qui fust si propre à mesurer cette distance.

II. Corollaire.

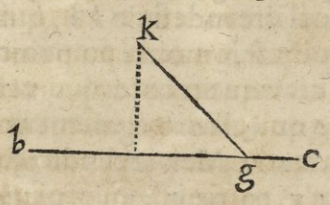
Deux differentes lignes estant perpendiculaires à une même ligne, il est impossible qu'elles se rencontrent, quoy que prolongées à l'infini. XXXIX.

Car si elles se rencontroient; elles auroient un point commun, & ainsi il y auroit deux lignes menées d'un même point qui seroient perpendiculaires à une même ligne, ce qu'on a fait voir estre impossible.

III. Corollaire.

Lors que d'un point hors une ligne on a tiré une oblique sur cette ligne, si du même point on tire une perpendiculaire sur la même ligne, cette perpendiculaire tombera du costé que l'oblique est inclinée sur cette ligne. XL.

Soit la ligne *b c*, & le point *k* dont ait esté tirée l'oblique *k g* qui soit inclinée vers *b*, je dis qu'il est clair parce qui a esté dit de la perpendiculaire, que si du même point *k* on en tire une sur *b c*, elle tombera entre *b* & *g*, & non pas entre *g* & *c*, car il est visible que si elle tomboit entre *g* & *c*, tant s'en faut qu'elle fust perpendiculaire, qu'elle seroit encore plus oblique que *k g*.



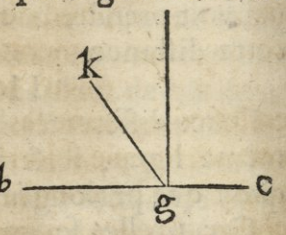
De plus ayant pris dans la ligne *b c* deux points également distans de *k*, comme pourroit estre *b* & *c* (33. S) le point où tombera la perpendiculaire doit estre également distant de ces deux points (*b c*); & au contraire celuy où tombe l'oblique doit estre plus éloigné du point vers lequel elle est inclinée, & par consequent la perpendiculaire doit tomber du costé vers lequel cette ligne est inclinée.

IV. Corollaire.

Si d'un point où une oblique coupe une ligne on veut élever une perpendiculaire sur cette ligne, elle s'élevera du costé vers lequel cette oblique n'est pas inclinée. XLI.

SCD LYON 1

Soit la ligne *b c* coupée par l'oblique *k g* inclinée vers *b*, ſi du point *g* on veut élever une perpendiculaire ſur *b c*, elle s'élevera du coſté de *c*, non du coſté de *b*; c'eſt à dire qu'elle ſe trouvera entre les lignes *k g* & *g c*, & non pas entre *k g* & *g b*. Car il eſt viſible que ſi elle ſe trouvoit entre *k g* & *g b*, elle ſeroit encore plus inclinée que *k g*.

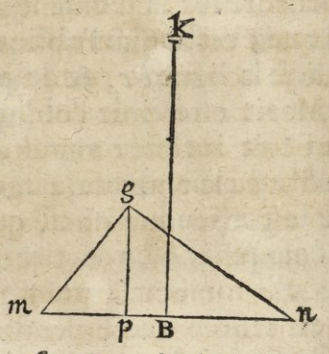


XLII.

III. THEOREME.

LA perpendiculaire indefinie qui coupe par la moitié la diſtance de deux points comprend tous les points du meſme plan, dont chacun peut eſtre également diſtant de ces deux points.

Soient les points *m* & *n* joints par la ligne *m n*, & la perpendiculaire indefinie *k b*, qui la coupe par la moitié au point *b*, il eſt clair que tous les poins de la ligne *k b* ſont également diſtans de *m n*. Mais je dis de plus, qu'il n'y en peut avoir aucun autre hors cette ligne qui en ſoit également diſtant. Car il faudra qu'il ſoit à l'un des coſtez comme ſeroit *g*, d'où tirant une perpendiculaire ſur *m n* (par 5.) elle la coupera en un autre point que *b*, comme ſeroit *p*, Or ſi *g* eſtoit également diſtant d'*m* & d'*n*, il faudroit que *p*, qui ſeroit un point de la perpendiculaire en fuſt auſſi également diſtant, ce qui eſt viſiblement impoſſible, comme on l'a déja veu.



QUATRIEME SECTION.

DES LIGNES DROITES OBLIQUES.

Explication de la maniere dont on doit conſiderer les Lignes obliques pour le mieux comprendre

XLIII. NOUS avons déja dit que lors qu'une ligne droite en coupe

coupe une autre en penchant plus d'un costé que de l'autre, elle s'appelle oblique au regard de cette ligne qu'elle coupe obliquement.

Mais pour mieux juger de la grandeur de ces obliques en les comparant les unes aux autres, il est bon de ne les considerer que selon le costé selon lequel elles approchent plus de la ligne qu'elles coupent, qui est aussi la façon la plus naturelle de considerer ces lignes.

De plus, nous ne regarderons les obliques que comme menées d'un certain point à la ligne qu'elles coupent, & comme terminées à cette ligne.

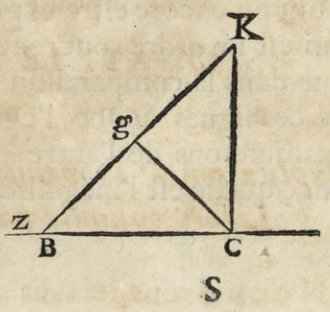
Cela estant supposé, ce que j'entens par l'obliquité d'une ligne sur une autre, est que cette ligne soit plus couchée sur la ligne qu'elle coupe, que ne seroit la perpendiculaire menée du mesme point sur la mesme ligne. De sorte que c'est toûjours par rapport à cette perpendiculaire que je considere cette obliquité.

Mais ce rapport enferme deux choses. 1. La distance du point qui est commun à l'oblique & à la perpendiculaire d'avec le point de la ligne où la perpendiculaire tombe, qui est la mesme chose que la longueur de cette perpendiculaire.

2. La distance du point ou l'oblique tombe, d'avec celuy où tombe la perpendiculaire, que j'appelle l'éloignement du perpendicule.

A quoy il faut ajoûter la distance du point d'où l'oblique est menée de celuy où elle coupe la ligne au regard de laquelle elle est appellée oblique : qui est la mesme chose que la longueur de cette oblique.

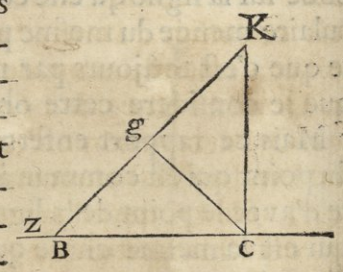
Soit par exemple la ligne z indefinie, sur laquelle on fasse décendre du point *k* au point *b* l'oblique *k b*, & que de *k* on tire la perpendiculaire *k c*, les trois distances dont nous venons de parler font trois lignes; dont deux (sçavoir la per-



pendiculaire *k c*, & l'éloignement du perpendicule *b c* ſe coupent perpendiculairement, & la troiſiéme, qui eſt l'oblique *k b*, rencontre obliquement l'une & l'autre.

Et ainſi peut eſtre conſiderée tantoſt comme l'oblique de l'une, tantoſt comme oblique de l'autre. Mais il faudra alors changer alternativement aux deux autres lignes les noms de perpendiculaire & d'éloignement du perpendicule. Car ſi je conſidere *k b* comme oblique ſur *b c*. *k c* eſt la perpendiculaire, & *b c* l'éloignement du perpendicule. Et au contraire ſi je conſidere *k b* comme oblique ſur *k c*, *b c* ſera la perpendiculaire, & *k c* l'éloignement du perpendicule.

On pourroit auſſi conſiderer *b c* & *k c* comme obliques ſur *k b*, (car comme les lignes ſont mutuellement perpendiculaires, elles ſont auſſi mutuellement obliques.) Mais pour ſuivre noſtre methode il faudroit alors mener une perpendiculaire du point *c* à la ligne *k b*, comme ſeroit *c g*. Et ainſi en conſiderant *b c* comme oblique ſur la ligne *b k*, la perpendiculaire ſeroit *c g*, & l'éloignement du perpendicule *g b*. Mais à moins que de faire cela, *k b* ſeule eſt conſiderée comme oblique, tantoſt au regard de l'une, tantoſt au regard de l'autre.



La conſideration de ces trois lignes, *k b* oblique, *k c* perpendiculaire, *b c* éloignement du perpendicule, nous fera comprendre pluſieurs choſes des lignes obliques qui n'ont pû encore eſtre expliquées que par des triangles, ce qui eſt un ordre tout renverſé. Et nous verrons d'une part que dans la comparaiſon des obliques, l'égalité en deux de ces lignes donne l'égalité dans la troiſiéme, & nous examinerons de l'autre quand il n'y a égalité que dans une, quelle eſt l'inégalité des deux autres.

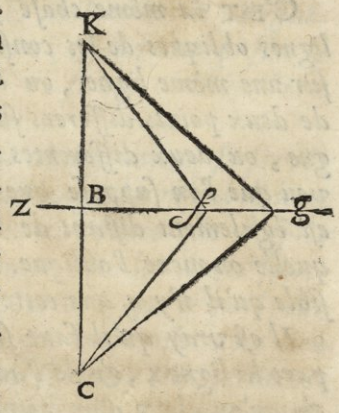
SCD LYON 1

PROPOSITION FONDAMENTALE.

DE LA MESURE DES LIGNES OBLIQUES.

LES lignes obliques menées du meſme point à une même ligne, ſont plus longues, plus elles ſont éloignées du perpendicule. XLIV.

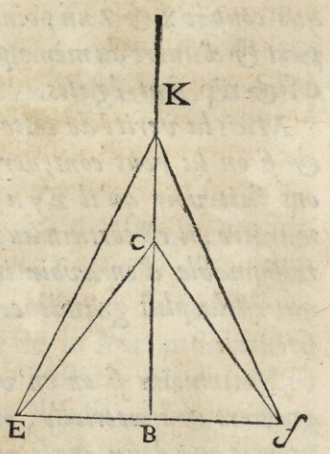
Soient du point *k* menées ſur la ligne *z* la perpendiculaire *k b*, & les obliques *k f* & *k g*. Et ſoit prolongée *k b* juſques en *c*, en ſorte que *b c* ſoit égale à *k b*. Et ſoient auſſi menées les lignes *f c* & *g c* : je dis premierement que *z* eſtant perpendiculaire à *k b*, comme le point *b*, qui eſt commun à l'une & à l'autre eſt également diſtant de *k* & de *c*. Donc *k f* eſt égale à *f c*, & *k g* à *g c*. Or par la maxime d'Archimede Liv. I. *k f c* eſt plus courte que *k g c*. Donc *k f*, qui eſt la moitié de *k f c* eſt plus courte que *k g*, qui eſt la moitié de *k g c*. Ce qu'il falloit demonſtrer.



COROLLAIRE.

IL eſt viſible que ce n'eſt que la même choſe ſi l'on dit que de toutes les obliques qui ſeront menées au même point d'une même ligne de divers points d'une perpendiculaire à cette ligne pris du même côté, celles qui ſont menées des points plus proches de la ligne où tombe l'oblique ſont les plus courtes. XLV.

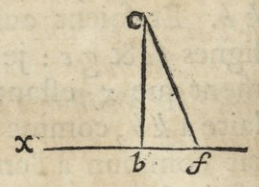
Car il ne faudra alors que tirer d'autres lignes des mêmes points de cette perpendiculaire vers un même point de l'autre côté de la ligne qui coupe cette perpendiculaire également diſtant de



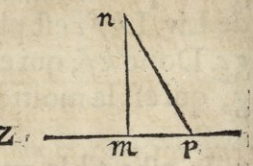
cette perpendiculaire. Si je veux montrer par exemple que la ligne *k f* eſt plus longue que *c f*, je n'ay qu'à prendre le point *c* autant diſtant de *b*, que *f* eſt auſſi diſtant de *b*, & tirer les lignes *k e* & *c e*, & faire enſuite la demonſtration precedente.

AVERTISSEMENT.

XLVI. C'EST *la même choſe pour juger de la grandeur de deux lignes obliques de les conſiderer comme menées du même point ſur une même ligne, ou comme menées de deux points differens ſur la même ligne, ou deux differentes lignes, pourveu que l'on ſuppoſe que chaque point eſt également diſtant de la ligne à laquelle on mene l'oblique. Car il eſt viſible qu'il n'y a que cette diſtance qui y faſſe quelque choſe.*



Il eſt vray qu'il faut ſuppoſer pour cela que ſi l'on a d'une part la ligne x, *& de l'autre la ligne* z, *& qu'on éleve d'un point de chacune, comme de* b *&* d m, *une perpendiculaire, & que dans chaque perpendiculaire on prenne un point comme* c *&* n, *qui ſoit de part & d'autre également diſtant du point de la ſection* b *&* m; *& qu'on prenne auſſi dans chaque coupée* x *&* z *un point comme* f *&* p, *également diſtant de part & d'autre du même point de la ſection* b *&* m, *les obliques* c f *&* n p *ſont égales.*



Mais la verité de cette ſuppoſition eſt naturellement connuë, & ſi on la peut conteſter de paroles, comme les Pyrrhoniens ont fait voir qu'il n'y a rien qu'on ne puiſſe conteſter en cette maniere, il eſt certain au moins qu'il eſt impoſſible à tout eſprit raiſonnable d'en avoir interieurement le moindre doute, ce qui eſt la plus grande certitude qu'on doive deſirer dans les ſciences.

Neanmoins ſi on en veut eſtre convaincu par une preuve groſſiere & materielle, on peut ſe ſervir de celle dont Euclide prouve que deux angles eſtant égaux, & ayant les coſtez égaux

SCD LYON 1

aux coſtez, la baze eſt égale à la baze ; qui eſt qu'il fait mettre ces angles l'un deſſus l'autre, en ſorte que les extrémitez des coſtez ſe trouvent enſemble ; d'où il conclud que les bazes ſont auſſi couchées l'une ſur l'autre, ce qu'on appelle en Latin congruere, *& par conſequent égales. Car on peut de même icy s'imaginer que la ligne* z *eſt couchée ſur la ligne* x, *en ſorte que le point* m *eſt immediatement ſur le point* b, *& la perpendiculaire ſur la perpendiculaire : D'où il arrivera neceſſairement que le point* n *ſera ſur le point* c, *& le point* p *ſur le point* f, *& qu'ainſi les obliques* n p *&* c f *ſeront couchées l'une ſur l'autre, & ainſi entierement egales.*

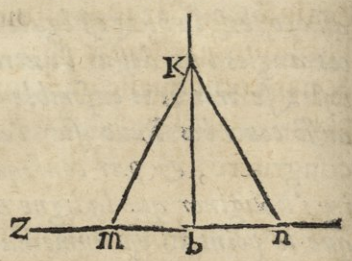
Voila ce qui peut ſatisfaire ceux qui aiment mieux ſe ſervir dans la connoiſſance des choſes de leur imagination que de leur intelligence : ce que je trouve fort mauvais, parce que l'eſprit ſe rend par là incapable de bien comprendre les choſes ſpirituelles, s'accouſtumant à ne recevoir pour vray que ce qu'il peut concevoir par des fantômes & des images corporelles : au lieu qu'il y a beaucoup de choſes que nous ſçavons tres certainement ſans que nous les puiſſions concevoir par l'imagination, comme quand je dis : Je penſe, donc je ſuis, *nul fantôme ou image corporelle ne me peut ſervir à me faire concevoir ce que j'entends par ces mots ;* je penſe, je ſuis.

EGALITE' DANS LES LIGNES OBLIQUES.

CETTE ſeule propoſition avec ſon corollaire & l'avertiſſement nous donne moyen de prouver facilement pluſieurs theoremes touchant les lignes obliques. Et voicy premierement ceux de l'égalité. XLVII.

I. THEOREME.

DES trois lignes que nous avons dit ſe devoir conſiderer dans les lignes obliques ; la perpendiculaire, l'éloignement du perpendicule, & l'oblique même ; deux ne peuvent eſtre égales que la troiſiéme ne le ſoit auſſi. Ainſi 1. S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques ſont égales. XLVIII.



Soient du point *k* de la ligne *k b*, qui coupe perpendiculairement la ligne *z* en *b*, menées les deux obliques *k m* & *k n*, la perpendiculaire eſtant la même, & par conſequent égale à ſoy même. Si *b m*, qui eſt l'éloignement du perpendicule de l'oblique *km* eſt égal à *b n*, qui eſt l'éloignement du perpendicule de l'oblique *k n*; *k m* & *k n* ſeront égales. Car les points *m* & *n* ne peuvent eſtre également diſtans de *b*, l'un des points de la perpendiculaire *k b*, qu'ils ne ſoient auſſi également diſtans de tout autre point de cette perpendiculaire, & par conſequent de *k*. Donc *k m* eſt égale à *k n*.

I. Corollaire.

XLIX. On ne peut mener d'un point à une ligne que deux lignes égales. Car on n'en peut mener qu'une ſeule perpendiculaire. Et pour les obliques, elles ne peuvent eſtre égales que les deux points où elles coupent cette ligne ne ſoient également diſtans du point où tombe la perpendiculaire. Or il ne peut y avoir que deux points, l'un d'un coſté & l'autre de l'autre, qui ſoient également diſtans de ce point. Car tout autre en ſera, ou plus proche ou plus éloigné, comme il eſt évident. Donc, &c.

II. Corollaire.

L. Il eſt impoſſible qu'un meſme point ſoit également diſtant de trois points d'une ligne droite.

C'eſt la meſme choſe que la precedente differemment énoncée.

II. Theoreme.

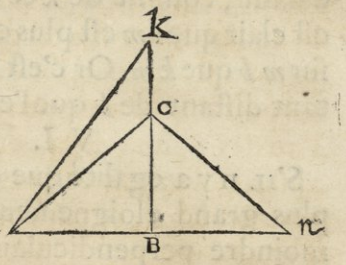
LI. S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.

Soit fait comme devant. Si *k m* eſt égale à *k n*, *b m* ſera

égale à *b n*. Car si *m* estoit plus éloignée de *b* que n'est *n*, l'oblique *k m* seroit plus éloignée de la perpendiculaire, & par consequent plus longue par la proposition principale.

III. THEOREME.

S'IL y a égalité dans l'oblique & dans l'éloignement du perpendicule, il y en a dans la perpendiculaire. LII.



Car si la perpendiculaire de l'une estoit plus grande que la perpendiculaire de l'autre, c'est comme si des deux obliques qui se terminent en *m* & *n* l'une descendoit du point *k* de la perpendiculaire *k b*, & l'autre du point *c* plus bas que *k* de cette mesme perpendiculaire *k b*, de sorte que l'une seroit *k m*, & l'autre *c n*.

Or si cela estoit, *c n* seroit plus petite que *k m*, par 44. & 45. *sup.* ce qui est contre l'hypothese.

IV. THEOREME.

QUAND il n'y a égalité donnée que dans l'une de ces trois lignes, voicy ce qui est des deux autres. LIII.

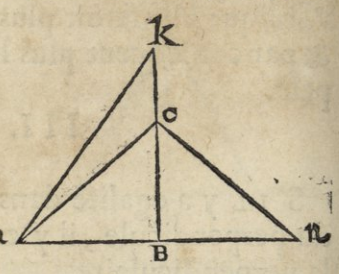
1. S'il n'y a égalité que dans la perpendiculaire, le plus grand éloignement du perpendicule donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique donne le plus grand éloignement du perpendicule. C'est ce qui a esté prouvé dans la proposition principale.

V. THEOREME.

2. S'IL n'y a égalité que dans l'éloignement du perpendicule, la plus grande perpendiculaire donne la plus grande oblique, & la plus grande oblique la plus grande perpendiculaire; & alors la plus grande oblique est la moins oblique. LIV.

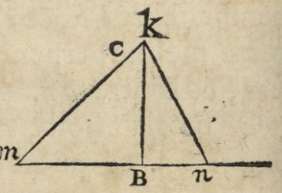
Il y a deux parties dont la premiere a esté prouvée par

le corollaire de la proposition fondamentale ; & pour l'autre, elle en est une suite évidente. Car si deux obliques se terminent au mesme point d'une ligne comme *k m*, & qu'elles soient menées de deux points differens de la mesme perpendiculaire, comme de *k* & de *c*, il est clair que *cm* est plus couchée sur *m b* que *k m*. Or c'est la mesme chose, si ayant pris *n* autant distant de *b* que l'est *m* on tire *c n* au lieu de *c m*.

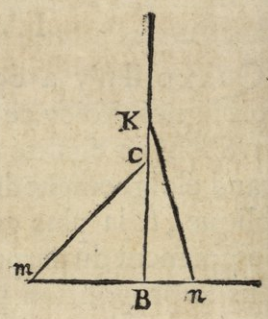


VI. Theoreme.

LIV. S'il n'y a égalité que dans la longueur des obliques, le plus grand éloignement du perpendicule donnera une moindre perpendiculaire, & une moindre perpendiculaire donnera un plus grand éloignement du perpendicule. Cela est clair par les theoremes precedens.



Car soit la perpendiculaire *k b* sur la ligne *m n*, si on tire l'oblique *c m*, & qu'on prenne un autre point plus prés de *b*, comme *n*, il est visible que *c n* seroit plus courte que *c m* par le 4e Theoreme, & par consequent afin qu'on mene à *n* de quelque point de la ligne *k b* une oblique égale à *c m*, il faudra la tirer d'un point plus éloigné de *b* que n'est *c*, comme de *k*.



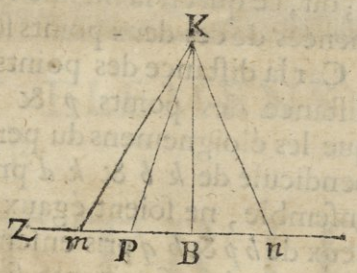
Avertissement.

LV. *Je ne dis rien de la diverse obliquité qu'à la même ligne sur les deux lignes qui peuvent estre reciproquement considerées comme sa perpendiculaire & son éloignement du perpendicule, comme* K b *sur* b c *& sur* K c: *car cela est trop facile à juger par ce qui est dit.*

VII. Theo-

VII. THEOREME.

LORS que deux lignes obliques ſont menées d'un meſme point ſur une même ligne, la diſtance des deux points de ſection eſt égale à la diſtance du perpendicule, de l'une plus ou moins la diſtance du perpendicule de l'autre. *Plus*, ſi les lignes ſont inclinées de different coſté; *moins*, ſi elles ſont inclinées du meſme coſté. LVI.



Soient menées du point *k* ſur la ligne *z* les deux obliques *k m* & *k n*, inclinées de different côté, & une autre comme *k p*, inclinée du meſme coſté que *k m*; il eſt viſible que la perpendiculaire *k b* ſe trouvera entre *k m* & *k n*, mais au delà de *k m* & de *k p*: & ainſi la diſtance entre les points de la ſection *m* & *n* ſera égal à l'éloignement du perpendicule de *k m*, qui eſt *m b* plus l'éloignement du perpendicule de *k n*, qui eſt *b n*.

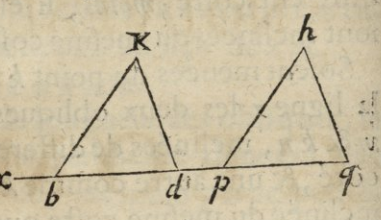
Mais ſi on conſidere *k m*, & *k p*, inclinée du meſme côté, il eſt viſible que la diſtance d'*m* & *p*, points de la ſection de ces deux obliques, eſt moindre que l'éloignement du perpendicule de *k m*, qui eſt *m b* de la longueur de *p b*, qui eſt l'éloignement du perpendicule de l'autre oblique *k p*.

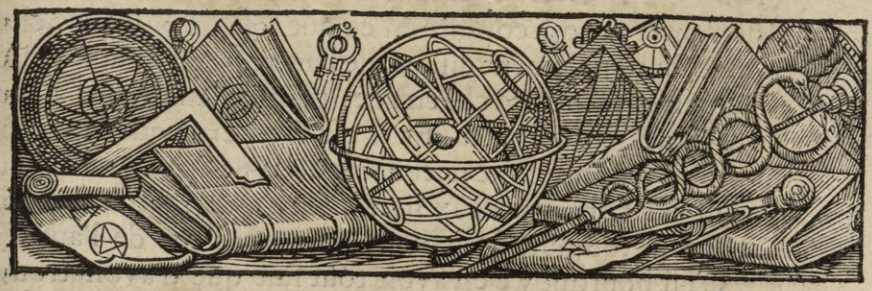
VIII. THEOREME.

DEUX lignes obliques inégales entr'elles & inclinées de different coſté eſtant menées du meſme point ſur la meſme ligne: & deux autres obliques, dont chacune eſt égale à chacune des deux premieres, eſtant auſſi menées d'un autre point ſur une meſme ligne, & y eſtant auſſi inclinées de different coſté, ſi la diſtance des points de ſection des deux premieres obliques eſt égale à la diſtance des points de ſection des deux dernieres, les deux points dont elles ſont menées ſont également diſtans de la ligne à laquelle elles ſont menées. XLVII.

Soient sur la ligne x menées du point k les deux obliques $k\,b$ & $k\,d$, & du point h deux autres obliques $h\,p$ & $h\,q$, ensorte que $k\,b$ soit égale à $h\,p$, & $k\,d$ à $h\,q$, & que les points b & d soient autant distans que le sont p & q; je dis que les points k & h son également distans de la ligne x; ou, ce qui est la mesme chose, que les perpendiculaires menées de ces deux points sont égales.

Car la distance des points b & d ne peut estre égale à la distance des points p & q que les éloignemens du perpendicule de $k\,b$ & $k\,d$ pris ensemble, ne soient égaux à ceux de $h\,p$ & $h\,q$ pris ensemble: ce qui ne seroit pas si k estoit plus éloigné de x que h. Car alors $k\,b$ estant égal à $h\,p$ auroit son éloignement du perpendicule plus petit que ne l'auroit $h\,p$, puis qu'elle descendroit d'un point plus éloigné que ne descend $h\,p$, (par 44. *sup.*) de même $k\,d$ auroit son éloignement du perpendicule plus petit que $h\,q$; Et ainsi les deux éloignemens du perpendicule de $k\,b$ & de $k\,d$ pris ensemble seroient plus petits que ceux de $h\,p$ & $h\,q$ pris ensemble.





NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE SIXIE'ME.

DES LIGNES PARALLELES.

APRES *avoir parlé des lignes droittes qui se rencontrent, soit perpendiculairement, soit obliquement, on peut considerer dans les lignes une autre proprieté toute opposée, qui est de ne se rencontrer jamais, & d'estre toûjours également distantes l'une de l'autre, & c'est ce qu'on appelle des lignes paralleles.* 1.

DEUX NOTIONS DES LIGNES PARALLELES, L'UNE NEGATIVE ET L'AUTRE POSITIVE.

MAIS ces lignes peuvent estre considerées selon deux notions differentes; l'une negative & l'autre positive. 11.

La negative est de ne se rencontrer jamais, quoy que prolongées à l'infiny.

La positive, d'estre toûjours également distantes l'une

de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points de chacune sont également distans de l'autre ; c'est à dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne, sont égales. Et il est bien clair que la notion negative est une suite necessaire de la positive, ne se pouvant pas faire que deux lignes se rencontrent si elles demeurent toûjours également distantes l'une de l'autre.

C'est pourquoy c'est avoir tout fait que d'avoir trouvé des marques certaines par lesquelles on puisse reconnoître que deux lignes sont paralleles selon la notion positive, c'est à dire qu'elles soient tellement disposées, que les points de chacune soient également distans de l'autre, ce qui suppose toûjours qu'elles soient prolongées autant qu'il est necessaire, afin que des points de l'une on puisse tirer des perpendiculaires sur l'autre.

C'est ce que nous trouverons facilement apres avoir établi quelques Lemmes.

AVERTISSEMENT
POUR LES LEMMES SUIVANS.

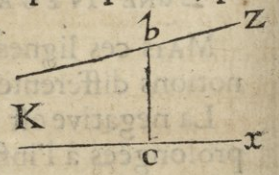
III. LORS *que dans les Lemmes suivans je compare diverses lignes qui coupent les deux mêmes, je suppose toûjours deux choses.*

L'une, que ces coupées, dont l'une sera toûjours nommée x *& l'autre* z, *ou ne se joignent point, ou se joignent simplement saus se traverser: c'est à dire qu'on les considere toûjours comme n'ayant point changé de costé au regard l'une de l'autre.*

L'autre, que ces coupantes soient enfermées entre les coupées, & c'est aussi ce que j'entens dans tout ce Livre quand je parle des lignes entre-paralleles.

I. LEMME.

IV. QUAND les deux lignes *x* & *z* sont coupées par *b c*, perpendiculaire sur *x*, & oblique sur *z*, il arrive trois choses.



1. Que toutes les autres lignes menées de *z* perpendiculairement sur *x*, sont obliques sur *z*.

2. Qu'elles sont inclinées sur *z* du même costé que *c b*

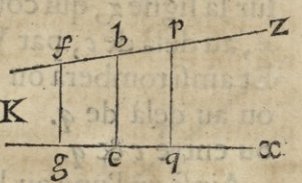
l'eſt auſſi ſur z, lequel coſté j'appelleray k.

3. Que les perpendiculaires ſur z ſont obliques ſur x, & inclinées ſur x du même côté que $c\,b$ l'eſt ſur z, c'eſt à dire vers k.

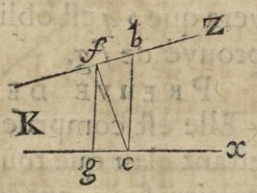
Les deux premieres parties ſe prouvent enſemble, & la la preuve de ces deux premieres emporte celle de la 3e.

Preuve des deux premieres Parties.

Soient pris deux points en la ligne z, f & p aux deux coſtez de b, d'où ſoient menées $f\,g$ & $p\,q$ perpendiculairement ſur la ligne x, il faut prouver qu'elles ſeront obliques ſur z, & inclinées vers k.

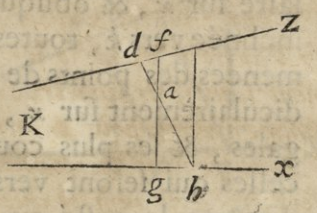


Soit tirée de c une perpendiculaire ſur z, elle ſera vers k, & non pas vers p, par V. 40. Et ainſi le point où cette perpendiculaire tombera ſur z ſera
ou le même point que f.
ou au delà de f.
ou entre f & b.

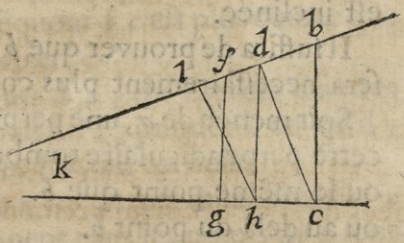


1. Cas. Si c'eſt le même point que f, $c\,f$ eſtant perpendiculaire ſur la ligne z, $g\,f$ ſera oblique ſur z, & inclinée vers k.

2. Cas. Si ce point eſt au delà de f, comme en $c\,d$, alors $c\,d$ coupera $f\,g$. Que ce ſoit en a. Donc $a\,d$ eſtant perpendiculaire ſur z, $a\,f$ (qui eſt la même choſe que $g\,f$) ſera oblique ſur z, inclinée vers $a\,d$, & par conſequent vers k.



3. Cas. Si d eſt entre f & b, de d menant $d\,h$ perpendiculaire ſur x, & de h, $h\,l$ perpendiculaire ſur z; ſi $h\,l$ ſe termine ou à f, ou au delà de f, on prouvera de la même ſorte que dans le premier & dans le ſecond Cas,

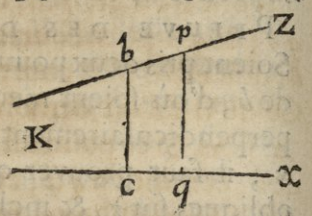


$g f$ eſt oblique ſur z, & inclinée vers k.

Et ſi $h l$ n'alloit pas juſques à f, on tireroit encore d'l, $l m$ perpendiculaire ſur x, & d'm une perpendiculaire ſur z, juſques à ce qu'il y en ait une qui ſe termine à f, ou au del à d'f.

point faible

On prouve de la même ſorte que $q p$ eſt oblique ſur z, & inclinée vers k, excepté qu'on élevera de b une perpendiculaire ſur la ligne z, qui coupera la ligne x, au delà de c, par V. 41.



Et ainſi tombera ou à q.
ou au delà de q.
ou entre c & q.

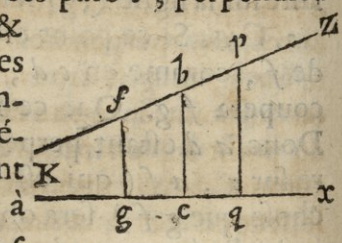
Ainſi en l'une ou l'autre de ces trois manieres, on prouvera que $p q$ eſt oblique & inclinée vers k, comme on l'a prouvé de $f g$.

Preuve de la troisieme Partie.

Elle eſt compriſe dans la preuve des deux premieres, eſtant clair que toutes les lignes qui ont eſté perpendiculaires ſur z, ont eſté obliques ſur x, & inclinées vers k.

II. Lemme.

V. Si les lignes x & z ſont coupées par $b c$, perpendiculaire ſur x, & oblique ſur z, & inclinée vers k, toutes les lignes menées des points de z, perpendiculairement ſur x, ſeront inégales, & les plus courtes ſeront celles qui ſeront vers k, c'eſt à dire vers le coſté ou la ligne $b c$ eſt inclinée.

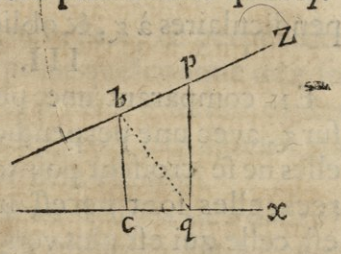


Il ſuffira de prouver que $b c$ eſtant plus vers k que $p q$, ſera neceſſairement plus courte que $p q$.

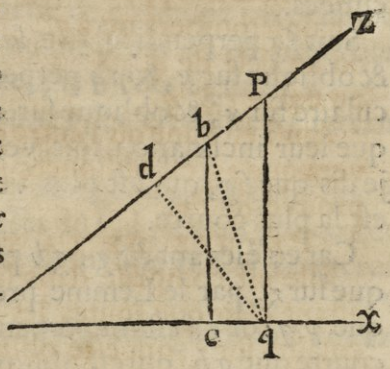
Soit menée de q, une perpendiculaire ſur z, le point où cette perpendiculaire tombera, ſera
ou le même point que b.
ou au delà du point b.
ou entre b & p.

SCD LYON 1

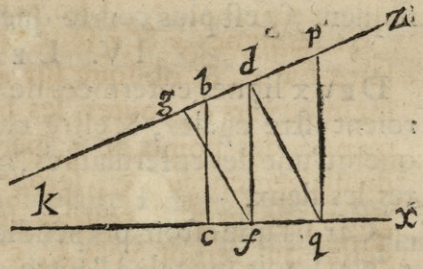
1. Cas. Si c'eſt le même point que *b*, *b c* eſtant perpendiculaire ſur *x*, & *b q* oblique, *b c* ſera plus courte que *b q*. Or par la même raiſon *q b* eſtant perpendiculaire ſur *z*, & *p q* oblique, *q b* eſt plus courte que *q p*. Donc ſi *b c* eſt plus courte que *q b*, & *q b* plus courte que *p q*, *b c* doit eſtre plus courte que *p q*, Ce qu'il fal'oit demonſtrer.



2. Cas. Si ce point eſt au delà de *b*, comme en *q d*, en tirant *q b*, *q b* ſera oblique, mais plus proche de la perpendiculaire *q d*, que *p q*, & par conſequent plus courte que *p q*. Or *b c* eſt plus courte que *q b*. Donc *b c* eſt à plus forte raiſon plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demonſtrer.



3. Cas. Si *d* ſe trouve entre *b* & *p*, de *d* on tirera *d f* perpendiculaire ſur *x*, & d'*f*, *f g*, perpendiculaire ſur *z*, & *g* ſe trouvant ou au point *b*, ou au delà du point *b*, on prouvera comme dans le premier & le ſecond cas que *b c* eſt plus courte que *d f*, laquelle par le premier cas eſt plus courte que *p q*, & par conſequent *b c* eſt plus courte que *p q*. Ce qu'il falloit demonſtrer.



Que ſi *f g* n'alloit pas juſques à *b*, on tireroit d'autres perpendiculaires ſur *x*, & puis ſur *z*, juſques à ce qu'il y en euſt une qui allaſt juſques à *b*, ou au delà.

Donc de tous les points de *z* les perpendiculaires ſur *x* ſont inégales, & par conſequent tous les points de *z* ſont inégalement diſtans de *x*, lors qu'une même ligne eſt perpendiculaire ſur *x*, & oblique ſur *z*.

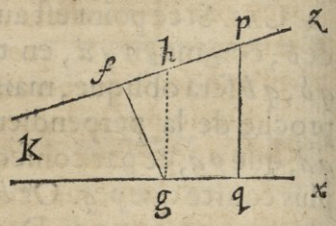
SCD LYON 1

COROLLAIRE.

VI. C'EST visiblement la même chose de toutes les lignes perpendiculaires à z, & obliques sur x, comparées ensemble.

III. LEMME.

VII. EN comparant une perpendiculaire sur x, & oblique sur z, avec une perpendiculaire sur z & oblique sur x: si elles ne se croisent point, mais qu'elle soient toutes separees, elles sont necessairement inégales, & la plus courte est celle qui est plus vers le costé vers lequel elles sont inclinées.



Soit fg perpendiculaire sur z, & oblique sur x, & pq perpendiculaire sur x, & oblique sur z, & que leur inclination soit vers k; je dis que fg, qui est plus vers k est la plus courte.

Car en élevant de g, gh perpendiculaire sur x, & oblique sur z, par le Lemme precedent gh sera plus courte que pq: or gf estant perpendiculaire sur z, elle est plus courte que gh, qui est oblique sur la même z, & par consequent fg est plus courte que pq.

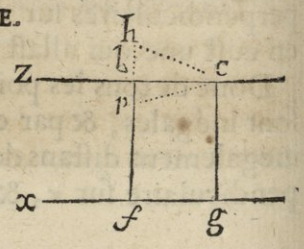
IV. LEMME.

VIII. DEUX lignes enfermées ne se croisant point, ne sçauroient estre égales, & estre chacune perpendiculaire sur quelqu'une des enfermantes, qu'elles ne le soient sur toutes les deux.

Car si l'une estoit perpendiculaire sur x, & oblique sur z, elle seroit inégale à l'autre, ou par le second Lemme, si l'autre estoit aussi perpendiculaire sur x; ou par le troisiéme, si l'autre estoit perpendiculaire sur z. Il faut donc pour estre égales qu'elles soient perpendiculaires sur l'une & sur l'autre des enfermantes.

V. LEMME.

IX. SI une ligne enfermée est perpendiculaire à l'une & à l'autre des enfermantes, toutes les lignes menées de quelque point que ce soit d'une enfermante perpendiculairement



sur

ſur l'autre, ſeront égales à cette enfermée, & par conſequent entr'elles.

Soit *b f* enfermée entre les lignes *z* & *x*, & perpendiculaire à l'une & à l'autre : & de *c* point quelconque de *z* ſoit menée *c g* perpendiculaire ſur *x* : *b f* & *c g* ſeront égales, ſi on ne peut rien retrancher de *b f*, ny y rien ajoûter, que *b f* & *c g* ne ſoient inégales. Or cela eſt ainſi.

Car ſi de *p*, point quelconque au deſſous de *b* dans *b f*, on tire *p c*, cette ligne *p c* coupera obliquement *b f*, puiſque par l'hypotheſe *c b* (partie de *z*) coupe perpendiculairement *b f*, & que d'un même point on ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire à la même ligne.

Donc par le ſecond Lemme *p f* (c'eſt à dire *b f* retranchée de quelque choſe) & *c g* ſont inégales.

Ce ſera la même choſe ſi on alongeoit *b f* de quoy que ce fuſt. Car ſi du point *h* au deſſus de *b*, *b f* eſtant prolongée, on tiroit *h c*, cette ligne par la meſme raiſon couperoit obliquement *b f* prolongée.

Donc par le ſecond Lemme *b f* prolongée ſeroit encore inégale à *c g*.

Donc on ne ſçauroit rien retrancher de *b f*, ny y rien ajoûter, que *b f* & *c g* ne ſoient inégales.

Donc elles ſont égales.

VI. LEMME.

SI une ligne eſt perpendiculaire à deux lignes, toutes les lignes perpendiculaires à l'une de ces lignes ſeront perpendiculaires à toutes les deux. X.

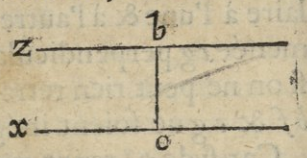
Car s'il y en avoit une ſeule qui fût perpendiculaire ſur l'une & oblique ſur l'autre, il s'enſuivroit par le premier Lemme que toutes les autres lignes perpendiculaires à l'une de ces deux lignes ſeroient obliques ſur l'autre.

Donc s'il y en a une ſeule qui ſoit perpendiculaire à toutes les deux, il faudra neceſſairement que toutes celles qui ſont perpendiculaires à l'une des deux enfermantes le ſoient à toutes les deux, & par conſequent qu'elles ſoient toutes égales par le precedent Lemme.

SCD LYON 1

VII. Lemme.

XI. Deux lignes ne se traversant point, tous les points de chacune sont également distans de l'autre, ou tous inégalement distans. Car menans d'un point de z, bc, perpendiculaire sur x; si bc est aussi perpendiculaire sur z, de quelque point de z qu'on mene des perpendiculaires sur x, elles seront égales à bc par le 5e Lemme; & ce sera la même chose de quelque point d'x qu'on mene des perpendiculaires sur z.

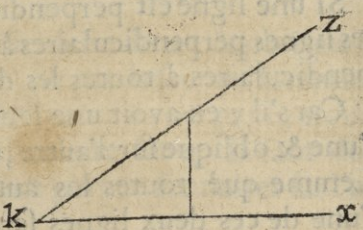


Que si au contraire bc est oblique sur z, toutes les perpendiculaires des points de z sur x seront inégales, & par consequent tous les points de z inégalement distans d'x. Et il en sera de mesme des perpendiculaires sur z, menées des points d'x, qui par la mesme raison seront toutes inégales entr'elles. Et par consequent aussi tous les points d'x seront inégalement distans de z.

Mais remarquez que je ne dis pas qu'un point d'x ne puisse estre aussi distant de z qu'un point de z est distant d'x, mais seulement que tous les points d'x sont inégalement distans de z, & tous les points de z inégalement distans d'x.

VIII. Lemme.

XII. Si deux lignes menées d'un mesme point sont inclinées l'une sur l'autre, tous les points de chacune sont inégalement distans de l'autre, & les plus courtes perpendiculaires des points de chacune sur l'autre seront celles qui sont les plus proches du point de la section.



Car on ne peut tirer d'un point de z une perpendiculaire sur x, qu'elle ne soit oblique sur z, par V. 37. Dont tout le reste suit par le second Lemme.

SCD LYON 1

TROIS PROPOSITIONS FONDAMENTALES DES PARALLELES.

Ces Lemmes donnent trois marques certaines pour reconnoiſtre ſi deux lignes ſont paralleles ſelon la notion poſitive, c'eſt à dire ſi tous les points de chacune ſont également diſtans de l'autre ; ce qui ſera les trois Propoſitions ſuivantes.

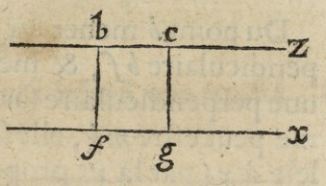
I. PROPOSITION.

SI deux lignes ſont coupées par une ligne perpendiculaire à l'une, & à l'autre tous les points de chacune ſont également diſtans de l'autre, & par conſequent elles ſont paralleles. 5. & 6e Lemmes. XIII.

II. PROPOSITION.

SI deux points d'une ligne ſont également diſtans d'une autre ligne, tous les points de chacune ſont également diſtans de l'autre, & par conſequent elles ſont paralleles. 4. & 5e Lemmes. XIV.

Soient *b* & *c* deux points de la ligne *z* également diſtans de la ligne *x* ; *bf* & *cg* perpendiculaires ſur *x* ſeront égales.



Donc elles ſeront auſſi perpendiculaires ſur *z*, par le 4e Lemme.

Donc toutes les autres lignes menées des points de *z* perpendiculairement ſur *x*, ſeront auſſi perpendiculaires ſur *z*, & égales à ces deux-là (par le 6e Lemme.) Et il en ſera de meſme de celles qu'on menera des points d'*x* perpendiculairement ſur *z*.

III. PROPOSITION.

DEux lignes ne ſe croiſant point & eſtant enfermées entre deux lignes, ne ſçauroient eſtre égales & eſtre perpendiculaires, l'une ſur une des enfermantes & l'autre ſur l'autre, qu'elles ne le ſoient chacune ſur toutes les deux (par le 4e Lemme) & que par conſequent ces lignes en- XV.

fermantes ne soient paralleles (par le 6e Lemme.)

I. Corollaire.

XVI. Toutes les perpendiculaires entre deux paralleles sont égales : car c'est cela mesme qui les rend paralleles.

II. Corollaire.

XVII. Les obliques entre paralleles sont plus longues que les perpendiculaires. Car chaque oblique est plus longue que sa perpendiculaire, & toutes les perpendiculaires sont égales.

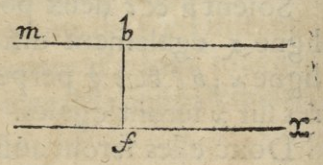
Probleme.

XVIII. Mener par un point donné une parallele à une ligne donnée.

Soit la ligne donnée *x*, & le point donné *b*, on peut en diverses manieres mener par le point *b* une parallele à *x*.

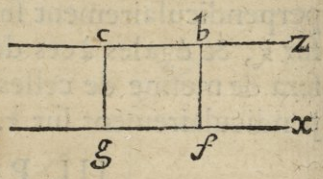
Premiere Maniere.

Du point *b* mener sur *x* la perpendiculaire *b f*, & mener par *b* une perpendiculaire sur *b f*, comme peut estre *m b*, elle sera parallele à *x* (par la 1re proposition.)



Seconde Maniere.

Ayant mené de *b* sur *x* la perpendiculaire *b f*, en élever une autre d'un autre point quelconque d'*x*, comme *g c*, la prenant égale à *b f*, & joignant les points *c* & *b*. *c b*. sera parallele à *x*, par la 2e proposition.

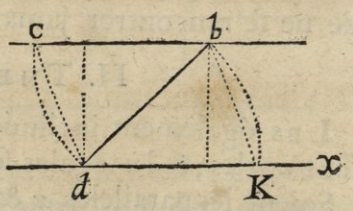


Troisieme Maniere plus courte et plus facile.

Du point *b* tirer sur *x* une oblique quelconque, comme *b d*. Du centre *d*, intervale *b d*, d'écrire l'arc *b k*, qui cou-

SCD LYON 1

pe *x* en *k*. Puis du centre *b*, intervale *b d*, décrire une portion de circonference dans laquelle on puiſſe prendre l'arc *d c*, égal à l'arc *b k*; la ligne *c b* ſera parallele à *d k*, c'eſt à dire à *x*.



Car les deux arcs *b k*, & *d c*, eſtant égaux & de cercles égaux, les cordes de ces arcs ſeront égales.

De plus *b c*, & *d k*, ſont égales auſſi, parce que ce ſont rayons de cercles égaux.

Donc *d b*, eſtant égale à elle même, les trois lignes d'une part *d b*, *d c*, *c b*, & les trois de l'autre *b d*, *b k*, *d k* ſont égales chacune à chacune.

Donc le point *d* eſt autant éloigné de la ligné *c b*, que le point *b*, de la ligne *d k*, par V. 57.

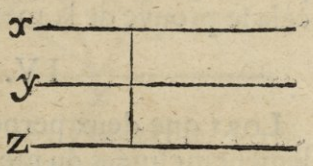
Donc les perpendiculaires de *d* ſur *c b*, & de *b* ſur *d k*, ſont égales.

Donc *c b* & *d k* ſont paralleles par la 3e propoſition.

I. THEOREME.

DEUX lignes ne ſçauroient eſtre paralleles à une troiſiéme, qu'elles ne le ſoient entr'elles. XIX.

Si *x* & *z* ſont chacune parallele à *y*, elles le ſont entr'elles. Car ſoit élevé d'un point d'*x* une perpendiculaire qui coupe *y* & *z*, elle coupera perpendiculairement *y*, parce que *x* & *y* ſont paralleles. Et eſtant perpendiculaire ſur *y*, elle le ſera auſſi ſur *z*, parce qu'*y* & *z* ſont paralleles.



Donc *x* & *z* auront une même perpendiculaire. Donc elles ſeront paralleles.

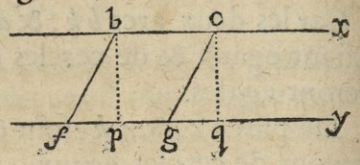
COROLLAIRE.

ON ne ſçauroit faire paſſer par le meſme point deux differentes lignes qui ſoient paralleles à une meſme. Car il faudroit par le Theoreme precedent qu'elles fuſſent paralleles entr'elles, ce qui eſt abſurde, puis qu'elles auroient XX.

un point commun, & qu'il eſt de l'eſſence des paralleles de ne ſe rencontrer jamais.

II. Theoreme.

XXI. Les également inclinées entre les meſmes paralleles ſont égales, & les égales ſont également inclinées.



Soient les paralleles *x* & *y*. Soient également inclinées entre ces paralleles *b f* & *c g*. Soient menées de *b* & de *c* les perpendiculaires *b p* & *c q*; ces perpendiculaires ſont égales. Donc afin que *b f* & *c g* ſoient également inclinées, il faut que les éloignemens du perpendicule *f p* & *g q* ſoient égaux: or cela eſtant, les obliques ſont égales par V. 48.

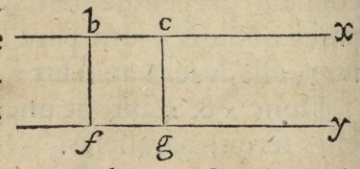
Et par la meſme raiſon les obliques *b f* & *c g* eſtant égales, & les perpendiculaires *b p* & *c q* égales auſſi, les éloignemens du perpendicule *f p* & *g q* ſeront égaux. Donc ces obliques égales ſeront également inclinées.

III. Theoreme.

XXII. Les plus inclinées entre les meſmes paralleles ſont les plus longues, & les plus longues ſont les plus inclinées; cela ſe prouve de la meſme ſorte par V. 54.

IV. Theoreme.

XXIII. Lors que deux perpendiculaires ou deux obliques également inclinées du meſme côté coupent des paralle les, le portions de ces paralleles compriſes entre ces lignes ſont égales.

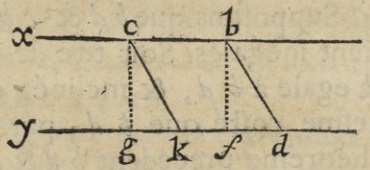


1. Cela eſt clair pour les perpendiculaires. Car *b c* & *f g* ſont chacune perpendiculaire aux deux *b f* & *c g*, & par conſequent égales par le cinquiéme Lemme.

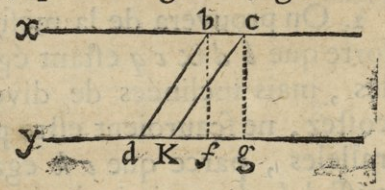
2. Si ces deux coupantes ſont également obliques du meſme coſté, comme *b d* & *c k*; je dis que *b c* & *d k* ſe

SCD LYON 1

trouveront auſſi eſtre égales: car tirant les perpendiculaires bf & cg, par le premier cas bc eſt égale à fg.



Or df eſt égale à kg, parce que ces obliques ſont ſuppoſées également inclinées. Donc ajoûtant fk à l'une & à l'autre, dk ſera égale à fg. Donc dk eſt égale à bc, qui eſt égale à fg. Et il n'importe que les lignes fuſſent ſi proches que les éloignemens du perpendicule entreroient l'un dans l'autre comme en cette figure.

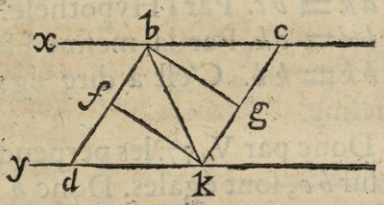


Car $bc = fg$.
$df = kg$.
Donc oſtant kf de l'un & de l'autre,
$dk = fg$. & par conſequent à bc.

V. THEOREME.

LES obliques également inclinées du meſme coſté entre paralleles, ſont paralleles elles meſmes. XXIV.

Soit comme devant bd & ck également inclinées entre les paralleles x & y. Soit menée l'oblique bk.



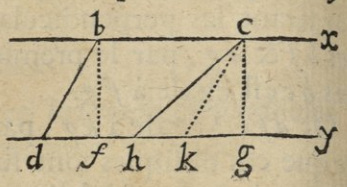
$bd = kc$. Par l'Hypotheſe & le 2 Theoreme.
$dk = cb$. Par le Theoreme precedent.
$bk = kb$. C'eſt à dire à ſoy-meſme.

Donc par V. 57. les perpendiculaires de k ſur bd & de b ſur ck ſont égales. Donc les lignes bd & ck ſont paralleles par 15. S.

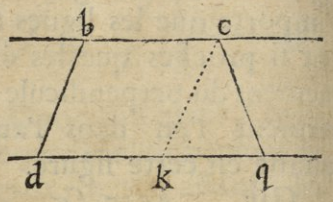
VI. THEOREME.

LES inégales entre paralleles, quoy qu'inclinées du meſme coſté ne peuvent eſtre paralleles, non plus que les égales qui ſont inclinées de divers coſtez. Car XXV.

1. Suppoſons que *b d* & *c h* entre les paralleles *x* & *y* ſoient inégales. Soit tiré de *c*, *c k* égale à *b d*, & inclinée du meſme coſté que *b d*; par le Theoréme precedent *b d* & *c k* ſont paralleles. Donc *b d* & *c h* ne peuvent pas eſtre paralleles, par 20. S.



2. On prouvera de la meſme ſorte que *b d* & *c q* eſtant égales, mais inclinées de divers coſtez, ne ſçauroient eſtre paralleles, parce que *c k* égale auſſi à *b d*, mais inclinée du même côté luy eſt paralleles.

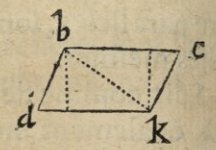


VII. Theoreme.

XXVI. Quatre lignes ne ſe joignant qu'aux extrémitez, ſi les oppoſées ſont égales elles ſont paralleles.

Soient les quatre lignes *b c*, *d k*, *b d*, *c k*; ayant tiré l'oblique *b k*,

d k = *b c*. Par l'Hypotheſe.
b d = *c k*. Par la meſme Hypotheſe.
b k = *k b*. C'eſt à dire égale à ſoy-meſme.



Donc par V. 57. les perpendiculaires de *b* ſur *d k*, & de *k* ſur *b c*, ſont égales. Donc *b c* & *d k* ſont parallelles par 15. S.

VIII. Theoreme.

XXVII. Quatre lignes ne ſe joignant qu'aux extrémitez, ſi les oppoſées ſont paralleles elles ſont égales.

Soit fait comme auparavant, *b c* & *d k* ſont paralleles. Donc *b d* & *c k* qui ſont entre ces paralleles ne ſçauroient eſtre elles meſmes paralleles qu'elles ne ſoient égales & inclinées du meſme coſté par le ſixiéme Thereme. Donc elles ſont égales, &c.

Mais eſtant égales & inclinées du meſme coſté, les portions

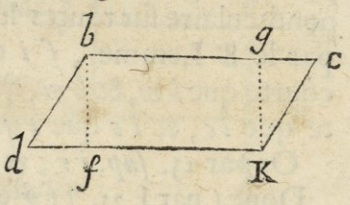
SCD LYON 1

portions des paralleles qui ſont compriſes entre ces lignes ſont égales par le 4e Theoreme. Donc *b c* & *d k* ſont égales.

IX. THEOREME.

QUATRE lignes ne ſe joignant qu'aux extrémitez, ſi deux des oppoſées ſont paralleles & égales, les deux autres oppoſées ſont auſſi paralleles & égales. XXVIII.

Si *b c* & *d k* ſont paralleles & égales; donc les perpendiculaires *b f* & *k g* ſont égales, & *b g* égale à *f k*, 23. *ſup.*



Donc *d f* égale à *g c*. I 19.
Donc *b d* & *k c* ſont égales, par V. 48.
Et paralleles par 24. *ſup.*

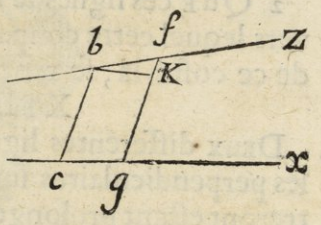
X. THEOREME.

LES lignes qui enferment des paralleles égales, ſont paralleles elles mêmes. On le prouve de la même ſorte. XXIX.

COROLLAIRE.

LES lignes qui enferment des paralleles inégales ne ſçauroient eſtre paralleles. XXX.

Car ſi les paralleles *b c* & *f g*, enfermées entre *x* & *z*, eſtoient inégales prenant *g k* égale à *b c*, la ligne *b k* par le Theoreme precedent eſt parallele à *x*. Donc *x* n'eſt pas parallele à *z*, par 19. *ſup.*

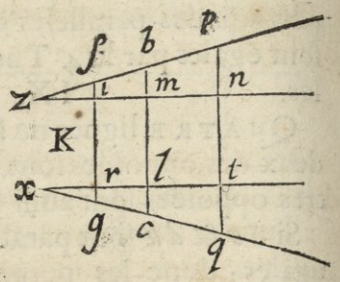


XI. THEOREME.

QUAND une ligne en coupe deux obliquement, & qu'elle eſt inclinée ſur chacune du même coſté, toutes les paralleles à cette coupante enfermées entre ces deux mêmes lignes ſont inégales: & les plus courtes ſont celles qui ſont vers le coſté, vers lequel cette premiere coupante eſtoit inclinée. XXXI.

Soit *x* & *z*, coupées l'une & l'autre obliquement par *b c*, inclinée vers *k*; je dis que *f g* & *p q*, paralleles à *b c*, & en-

fermées auſſi entre x & z, ſeront inégales : & fg plus proche de k ſera la plus courte, & pq la plus longue. Car ſoit menée zn, perpendiculaire ſur les trois paralleles, & xt de même perpendiculaire ſur toutes les trois, par le 8e Lemme, fi eſt plus courte que bm, & bm, que pn ; & de même rg plus courte que lc, & lc que tq.



Or par 23. *ſup.* ir, ml, & nt ſont égales.

Donc (par I. 21.) fg eſt plus courte que bc ; & bc que pq. Ce qu'il falloit demonſtrer.

I. Corollaire.

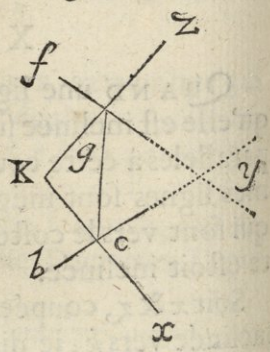
XXII. Il s'enſuit delà, 1. Que deux lignes coupées par une ligne qui coupe toutes les deux obliquement, & qui eſt inclinée ſur chacune du même côté, ne ſçauroient eſtre paralleles.

II. Corollaire.

XXIII. 2. Que ces lignes ſe rapprochant toûjours vers le côté vers lequel cette coupante eſt inclinée, eſtant prolongées de ce coſté-là, ſe rencontreront à la fin. V. 11.

XII. Theoreme.

XXIV. Deux differentes lignes ſe joignant en un même point, les perpendiculaires ſur chacune de ces lignes ſe rencontreront eſtant prolongées du coſté qui regarde la concavité que font ces lignes jointes à un même point.



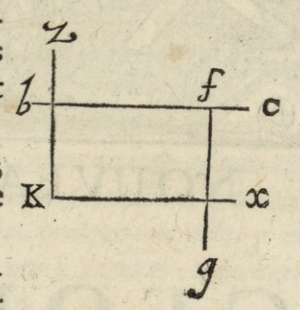
Soient les deux lignes kz & kx, dont kz ſoit coupée en g, perpendiculairement par fg, & kx, coupée en c, perpendiculairement par bc ; ſoient joints les points g & c ; il eſt clair que gc eſt oblique tant ſur fg que ſur bc, & inclinée ſur l'une & ſur l'autre vers y :

SCD LYON 1

Donc elles se rencontreront estant prolongées de ce costé là par 33. *sup.*

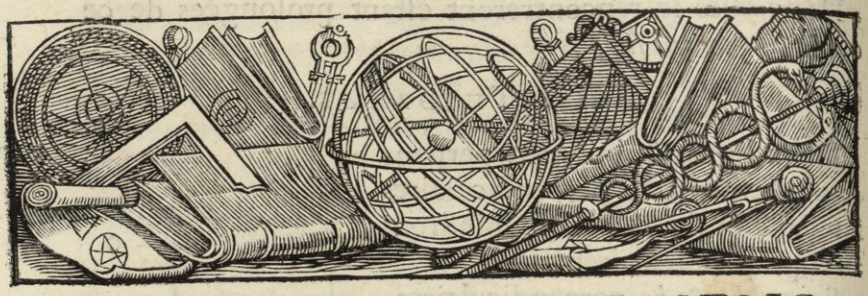
XIII. Theoreme.

Deux lignes se joignant perpendiculairement, les perpendiculaires sur l'une & sur l'autre se joindront aussi perpendiculairement. XXV.



Soient $k z$ & $k x$ perpendiculaires; si $b c$ est perpendiculaire sur $k z$, elle est parallele à $k x$, par 13. *sup.*

Donc $g f$ ne peut estre perpendiculaire sur $k x$, qu'elle ne le soit aussi sur $b c$.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE

LIVRE SEPTIE'ME

DES LIGNES TERMINE'ES A UNE CIRCONFERENCE,

Où il eſt parlé

DES SINUS,

Et de la Proportion des Arcs de divers Cercles à leurs Circonferenees, & du Paralleliſme des Lignes Circulaires.

1. USQUES *icy nous avons conſideré les lignes droites entant qu'elles ſont terminées à d'autres lignes droites, ou qu'elles leur ſont paralleles. Nous les conſiderons maintenant entant qu'elles ſont terminées à quelque point d'une circonference.*

On les peut diſtinguer par les diverſes ſituations du point d'où elles ſont menées à la circonference. Car ce point eſt

1. *Ou dans la circonference même,*
2. *Ou au dedans du cercle,*
3. *Ou au dehors.*

SCD LYON 1

1. *Quand il eſt dans la circonference même, ce ſont les lignes qui ſont menées d'un point de la circonference à un autre point de la même circonference; Et ce ſont celles que nous avons déja dit s'appeller* des cordes.

2. *Quand le point eſt au dedans du cercle, ſi ce point eſt le centre, ce ſont* des rayons. *Mais ſi ce n'eſt pas le centre, on les peut appeller* des ſecantes interieures.

3. *Et quand ce point eſt hors le cercle; ou ces lignes entrent dans le cercle, le coupant dans ſa convexité & eſtant terminées à ſa concavité; ou elles n'entrent point dans le cercle; & alors elles ſont telles, que ſi on les prolongeoit elles y entreroient, & tant celles là que celles qui y entrent, peuvent eſtre appellées* des ſecantes exterieures.

Ou bien, quoy que prolongées, elles n'entrent point dans le cercle; & ce ſont celles là que l'on dit toucher le cercle, & que l'on appelle pour cette raiſon des tangentes.

Mais parce que les deux derniers genres, hors la derniere eſpece du 3e, qui eſt des tangentes, peuvent eſtre compris dans les mêmes propoſitions, nous renfermerons tout cela en 3. ſections, Dont

La 1. *ſera des cordes.*

La 2. *des ſecantes interieures & exterieures.*

La 3. *des tangentes.*

Et nous y en ajoûterons une 4e, qui ſera du parallelisme des lignes circulaires.

PREMIERE SECTION.

DES CORDES

Premier Theoreme.

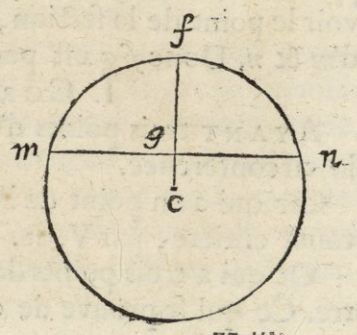
Les lignes droites qui coupent les cordes peuvent avoir trois conditions.

La 1. De les couper perpendiculairement.

La 2. De les couper par la moitié.

La 3. De paſſer par le centre.

Or deux de ces conditions tant donneés, donnent la 3e.



II.

C'eſt à dire:

1. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, elles paſſent par le centre.

2. Si elles coupent les cordes perpendiculairement & qu'elles paſſent par le centre, elles les coupent par la moitié.

3. Si elles les coupent par la moitié & qu'elles paſſent par le centre, elles les coupent perpendiculairement.

Soit pour tous les cas le centre *c*, & la corde *mn*, coupée par *fg*.

PREUVE DU PREMIER CAS.

Si *fg*, eſtant perpendiculaire *à mn*, la coupe par la moitié, le point *g* eſt également diſtant des extrémitez de la coupée *m* & *n*. Donc *fg* eſtant prolongée doit contenir tous les points de ce plan également diſtans d'*m* & *n*, par V. 39. Or le centre eſt un de ces points: Donc il ſe doit trouver dans *fg* prolongée. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Si *fg* coupe perpendiculairement *mn*, & qu'eſtant continuée elle paſſe par le centre, il y a un point dans cette ligne, ſçavoir le centre qui eſt également diſtant d'*m* & *n*. Donc tous les autres points de cette ligne *fg*, dont l'un eſt le point de la ſection, ſont également diſtans d'*m* & *n*. (par V. 31. 32.) Donc *mn* eſt diviſée par la moitié.

PREUVE DU TROISIEME CAS.

Si *fg* diviſant *mn* par la moitié eſtant prolongée paſſe par le centre, il y aura deux points dans cette ligne, ſçavoir le point de la ſection, & le centre également diſtans d'*m* & *n*. Donc *fg* eſt perpendiculaire à *mn*, par V. 32.

I. COROLLAIRE.

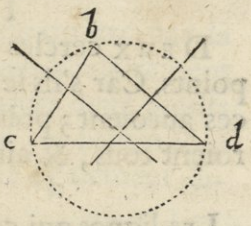
III. AYANT trois points d'une circonference, on a toute la circonference.

Car qui a un point de la circonference & le centre, l'a toute entiere, par V. 22.

Or qui a trois points de la circonference, en a le centre. Ce qui ſe prouve de cette ſorte.

SCD LYON 1

Il eſt clair que ces trois points ne peuvent pas eſtre dans la même ligne droitte, parce que tous les points d'une circonference doivent eſtre également diſtans d'un même point, ſçavoir le centre, & qu'il eſt impoſſible que trois points d'une ligne droitte ſoient également diſtans d'un même point, par V. 47.



Ainſi joignant ces trois points deux à deux, on a trois cordes qui ſoûtiennent 3 arcs de cette circonference.

Donc le centre ſe trouvera dans l'interſection de deux lignes qui couperont perpendiculairement & par la moitié de deux de ces 3 cordes.

Car par le precedent Theoreme chacune de ces perpendiculaires paſſe par le centre. Donc le centre eſt le point qui leur eſt commun. Et par là on voit combien il eſt facile de reſoudre ce Probleme.

Probleme.

Trouver la circonference qui paſſe par trois divers points donnez.

Il ne faut que faire ce qui a ſervi de preuve au Theoreme precedent, en remarquant que ſi ces trois points étoient dans la même ligne droitte, le Probleme ſeroit impoſſible, parce que les perpendiculaires eſtant paralleles ne ſe rencontreroient jamais : au lieu qu'il eſt toûjours poſſible quand ils ſont en deux differentes lignes, parce que les lignes qui les couperont perpendiculairement ſe rencontreront. VI. 34.

II. Corollaire.

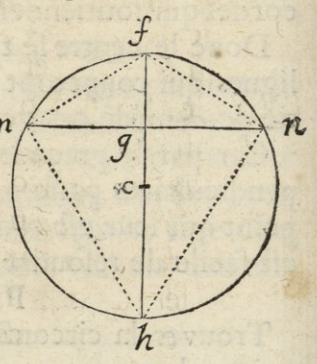
Deux circonferences ne peuvent avoir trois points communs, qu'elles ne les ayent tous. Car par le premier Corollaire ces 3 points communs auront le meſme centre. Donc ces cercles ſeront concentriques. Or deux cercles eſtant concentriques, s'ils ont un rayon égal, tous les points des circonferences ſont enſemble : comme quand un cercle de bois convexe eſt emboité dans un autre cercle de bois qui eſt creux. IV.

III. COROLLAIRE.

V. DEUX cercles ne se peuvent couper en plus de deux points. Car s'ils se coupoient en trois, leurs circonferences auroient 3 points communs, & par consequent les auroient tous, & ainsi ne se couperoient point.

II. THEOREME.

VI. LES lignes qui coupent les cordes perpendiculairement & par la moitié, coupent aussi par la moitié les arcs grands & petits qui soûtiennent ces cordes de part & d'autre.



Soit la corde *m n* coupée par *f h* perpendiculairement & par la moitié; je dis que chacun des arcs *m f n*, & *m h n*, sont coupez par la moitié, l'un en *f*, & l'autre en *h*. Car *f g* estant perpendiculaire à *m n*, & ayant un de ses points, sçavoir le point de section également distant d'*m* & *n*, tous ses autres points, comme *f h*, seront aussi également distans d'*m* & *n*. Donc tirant les cordes *f m* & *f n*, elles seront égales, & par consequent les arcs qu'elles soûtiennent seront égaux. Donc par la même raison ces cordes *h m* & *h n* seront égales, & les arcs qu'elles soûtiendront égaux. Donc les deux arcs *m f n*, & *m h n*, seront chacun partagez par la moitié par la ligne *f g*.

COROLLAIRE.

VII. TOUT rayon perpendiculaire à un diametre coupe par la moitié la demy circonference qui soûtient ce diametre. Car y ayant un point dans ce rayon perpendiculaire à ce diametre également distant des extrémitez de ce diametre, sçavoir le centre, tous les autres points de ce rayon seront aussi également distans des extrémitez de ce diametre. Donc le point où ce rayon coupe cette circonference en sera également distant. Donc cette circonference sera coupée par la moitié. Par V. 26.

III. THEO-

SCD LYON 1

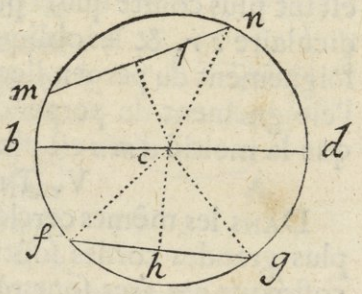
III. THEOREME.

LA ligne qui passant par le centre coupe un arc par la moitié, coupe aussi par la moitié & perpendiculairement la corde qui soûtient cet arc. Car il y a alors deux points dans la ligne qui coupe l'arc par la moitié, le centre & le point de section de l'arc, dont chacun est également distant des deux extrémitez de la corde. VIII.

IV. THEOREME.

LES cordes également distantes du centre dans le même cercle, ou dans cercles égaux, sont égales; & les égales sont également distantes du centre; & les plus proches du centre sont les plus grandes. IX.

Cela est clair des diametres qui sont également proches du centre, puis qu'ils passent tous par le centre.



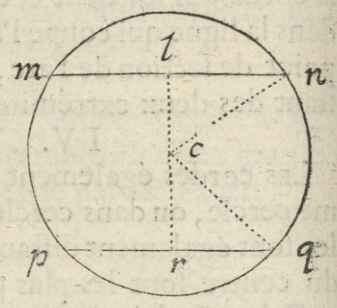
Et il est clair aussi que tout diametre est plus grand que toute autre corde, puisque tirant du centre deux rayons aux extrémitez de toute autre corde, ces deux rayons seront égaux au diametre & plus grands que cette corde. Par V. 5.

Pour ce qui est des autres cordes: 1. Les également distantes du centre sont égales. Car si *m n* & *f g* sont également distantes du centre. Donc les perpendiculaires du centre à chacune sont égales, puis que c'est ce qui mesure la distance de ces cordes d'avec le centre. V. 38.

Et de plus ces perpendiculaires les divisent chacune par la moitié. Donc tirant les rayons *c n* & *c g*, *l n*, & *h g* (qui sont les moitiez de chacune de ces cordes) seront égales, par V. 50. parce que les obliques *c n* & *c g* sont égales, & les perpendiculaires aussi *c l* & *c h*. Donc les toutes *m n* & *f g* sont égales. Ce qu'il falloit demonstrer.

2. Les égales sont également distantes du centre: car y ayant égalité entre les moitiez de ces cordes *l n* & *h g*, qui peuvent estre considerées comme les éloignemens du per-

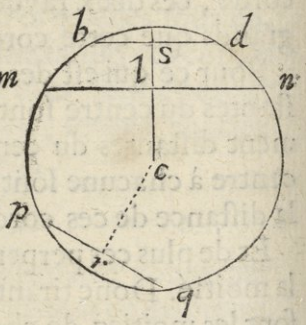
pendicule, & entre les rayons cn & cg, qui ſont les obliques, il faut qu'il y ait auſſi égalité entre les perpendiculaires du centre à ces cordes qu'elles diviſent par la moitié, (V. 51.) & qu'ainſi ces cordes ſoient également diſtantes du centre.



3. Les plus proches du centre ſont les plus longues, car ſi la corde $m\,n$ eſt plus proche du centre que la corde $p\,q$, elle doit eſtre plus grande que la corde $p\,q$, parce que la perpendiculaire cl eſtant plus courte que la perpendiculaire $c\,r$, & les obliques $c\,n$ & $c\,q$ eſtant égales; l'éloignement du perpendicule $l\,n$ doit eſtre plus grand que l'éloignement du perpendicule $r\,q$. (V. 54.) C'eſt à dire que la moitié d'$m\,n$ eſt plus grande que la moitié de $p.\,q$.

V. THEOREME.

x. DANS les mêmes cercles ou dans des cercles égaux, les plus grandes cordes ſoûtiennent les plus grands arcs du coſté que ces arcs ſont plus petits que la demycirconference.



Soit $m\,n$ plus grande que $p\,q$; je dis que l'arc $m\,n$ eſt plus grand que $p\,q$. Car prolongeant la perpendiculaire $c\,l$ juſques à ce qu'elle ſoit auſſi longue que la perpendiculaire $c\,r$, comme $c\,s$, & tirant la corde $b\,d$, qui ſoit perpendiculaire à $c\,s$, cette corde $b\,d$ eſt égale à $p\,q$, par le Theoreme precedent. Et ces deux cordes $m\,n$ & $b\,d$ eſtant paralleles (par VI. 13.) ne ſe peuvent jamais rencontrer.

Donc l'arc $m\,n$ ne pourra manquer de comprendre l'arc $b\,d$. Donc il ſera plus grand que l'arc $b\,d$, puiſque le tout eſt plus grand que ſa partie.

Donc l'arc $m\,n$ eſt plus grand auſſi que l'arc $p\,q$, qui eſt

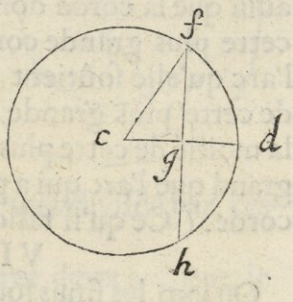
SCD LYON 1

égal à l'arc *b d*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

D'une autre meſure des Arcs, qui ſont les Sinus.

DEFINITIONS.

QUAND un arc eſt moindre que la moitié de la demy-circonference, ou le quart de la circonference, la perpendiculaire de l'une des extrémitez de l'arc ſur le rayon ou le diametre qui ſe termine à l'autre extrémité, s'appelle *le ſinus* de cet arc; & la partie du rayon ou diametre qui eſt depuis la rencontre de la perpendiculaire, ou ſinus, juſqu'à l'extrémité de l'arc, s'appelle *le ſinus verſe*. XI.



Soit une circonference, dont le centre eſt *c*, & un arc moindre que la moitié de la demy circonference *f d*, ſoit tiré le rayon *c d*, & la perpendiculaire d'*f* ſur ce rayon *f g*, cette perpendiculaire *f g* eſt le *ſinus* de l'arc *f d*; & *g d* en eſt le *ſinus verſe*.

I. LEMME.

QUE ſi on continuë *f g* juſqu'à *h*, autre point de la circonference, il eſt clair par le 1er Theoreme que *f h* eſt partagée par la moitié par *c d*, & qu'ainſi le ſinus *f g* eſt la moitié de la corde *f h*. XII.

II. LEMME.

ET il eſt clair auſſi par le 2e Theoreme que l'arc *f d h*, ſoûtenu par la corde *f h*, eſt double de l'arc *f d*, dont *f g* eſt le ſinus. XIII.

D'où il s'enſuit qu'on peut encore definir le *ſinus*.

AUTRE DEFINITION DES SINUS.

LA moitié de la corde du double de l'arc.

Car *f g* eſt la moitié de la corde *f h*, laquelle corde *f g h* ſoûtient l'arc *f d h*, lequel eſt double de l'arc *f d*. Tout cela eſtant ſuppoſé ſoit. XIV.

VI. THEOREME.

DANS le même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs qui ont le ſinus égal ſont égaux; & les ſinus égaux XV.

donnent des arcs égaux ; & les arcs qui ont les plus grands sinus, sont les plus grands. Car par le 1 Lemme les sinus égaux sont moitiez de cordes égales. Or par le 2 Lemme ces cordes égales soûtiennent des arcs égaux qui sont doubles des arcs qui ont pour sinus ces sinus égaux. Donc les arcs doubles de ceux là estant égaux, ceux là le sont aussi. La converse se prouve de la même sorte, sans qu'il soit besoin de s'y arrester.

Et de même quand un sinus est plus grand que l'autre, la corde dont le plus grand est la moitié, est plus grande aussi que la corde dont le plus petit est la moitié. Donc cette plus grande corde soûtient un plus grand arc. Or l'arc qu'elle soûtient est double de celuy dont la moitié de cette plus grande corde est le sinns. Donc l'arc dont la moitié de cette plus grande corde est le sinus, est plus grand que l'arc qui a pour sinus la moitié d'une plus petite corde. (Ce qu'il falloit demonstrer.)

VII. Theoreme.

XVI. Quand les sinus sont égaux, les sinus verses le sont aussi, & les plus grands sinus donnent les plus grands sinus verses.

Car les sinus égaux sont également distans du centre. Or cette distance du centre ostée du rayon, ce qui reste est le sinus verse. Donc cette distance estant égale, le sinus verse est égal.

Que si le sinus est plus grand, cette distance est plus petite. Donc ostant moins du rayon, ce qui reste, qui est le sinus verse, est plus grand.

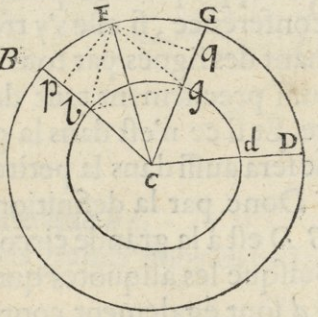
Avertissement.

XVII. *Les sinus ne mesurent proprement que les arcs moindres que la moitié de la demy circonference. Mais cela n'empêche pas qu'on ne s'en puisse servir pour mesurer ceux qui sont plus grands. Car ce qui manque à ces plus grands arcs pour faire la demycirconference, s'appelle le complement de ces plus grands arcs. Or ces complemens se mesurent par les sinus ; & il est aisé de juger que ces complemens estant égaux, ces plus grands arcs sont égaux aussi. Mais qu'estant inégaux, celuy qui a le plus petit complement est le plus grand.*

SCD LYON 1

VIII. THEOREME.

QUAND plusieurs circonferences sont concentriques, & que du centre on tire des lignes indefinies, les arcs de toutes ces circonferences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonferences. XVIII.



Soient au tour du centre *c* deux circonferences concentriques, & soient tirées les deux lignes *c B* & *B c D*; je dis que l'arc *B D* de la plus grande, & *b d* de la plus petite, sont proportionels à leurs circonferences.

Car les aliquotes quelconques de *B D* soient appellez *x*; je dis que si par tous les points de section on tire des lignes au centre, *b d* sera divisée par ces lignes en aliquotes pareilles.

Pour le prouver il suffit de considerer deux *x*, que je suppose estre *B F* & *F G*, tirant les lignes *F c* & *G c*; je dis que les arcs *b f* & *f g* sont égaux entr'eux, aussi bien que *B F* & *F G*. Car tirant d'*F* une perpendiculaire sur *B c* & une autre sur *G c*, les deux perpendiculaires *F p* & *F q* seront les sinus d'arcs égaux, & par consequent égales; & les sinus verses de ces arcs *B p* & *B q* seront aussi égaux. Donc *p b* & *q g* seront aussi égales.

Donc *F b* & *F g* sont égales, parce que ce sont les obliques dont les perpendiculaires *F p* & *F q* sont égales, comme aussi les éloignemens des perpendicules *p b* & *q g*. V. 48.

Donc dans la ligne *F c* il y a deux points, sçavoir *F* & *c*, dont chacun est également distant de *b* & de *g*.

Donc *F c* coupe perpendiculairement & par la moitié la corde *b g*, & par consequent aussi l'arc *b f g*.

Donc l'arc *b f* est égal à l'arc *f g*. Ce qu'il falloit demonstrer.

Or cela estant demonstré, il est clair qu'on prouvera la

même choſe de toutes les aliquotes de *B G* en les prenant deux à deux.

Donc *B G* eſtant diviſé en aliquotes quelconques, les lignes menées au centre par tous les points de ſection feront des aliquotes pareilles dans *b g*, leſquelles on pourra appeller *x*.

Or appliquant *X* pour meſurer le reſte de la grande circonference, ſi elle s'y trouve preciſement tant de fois menant des lignes par tous les points de ſection, *x* ſe trouvera auſſi preciſement tant de fois dans la petite circonference. Et ſi ce n'eſt dans la grande qu'avec quelque reſte, ce ne ſera auſſi dans la petite qu'avec quelque reſte.

Donc par la definition des grandeurs proportionnelles *B D* eſt à la grande circonference, comme *b d* à la petite, puiſque les aliquotes quelconques pareilles de *B D* & de *b d* ſont également contenuës dans les 2 circonferences.

Definition.

XVIII. Les arcs qui ont même raiſon à leur circonference ſoient appellez proportionnellement égaux, ou d'autant de degrez l'un que l'autre. Surquoy il ſe faut ſouvenir que toute circonference grande ou petite eſt conſiderée comme diviſée en 360 parties, qu'on appelle degrez, & chaque degré en 60 minutes, & chaque minute en 60 ſecondes, & chaque ſeconde en 60 troiſiémes, & ainſi à l'infiny.

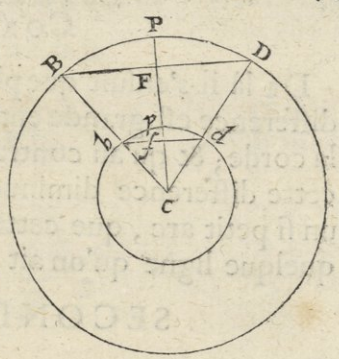
Et comme on ne regarde point la grandeur abſoluë des portions d'une circonference, parce que cette grandeur nous eſt inconnuë, mais ſeulement la grandeur relative, c'eſt à dire par proportion à la circonference; on pourroit appeller les arcs qui ſont proportionellement égaux, parce qu'ils ſont d'autant de degrez ſimplement *égaux*: & appeller *tout-égaux* ceux qui le ſont tout enſemble proportionellement & abſolument comme ſont les arcs d'autant de degrez dans le meſme cercle.

IX. Theoreme.

XIX. Quand les cercles ſont inégaux, les arcs proportionellement égaux ſont ſoûtenus par de plus grandes cordes, & ont de plus grands ſinus, dans les plus grands cercles.

SCD LYON 1

Soient au tour du centre *c* deux circonferences concentriques, les arcs *B D* & *b d* compris entre les mesmes rayons *B C* & *D C* sont proportionellement égaux.



Or tirant les cordes *B D* & *b d* & les divisant par la moitié aussi bien que les arcs par la ligne *P c*, les arcs *B P* & *b p* son aussi proportionellement égaux. Or *B F* & *b f*, perpendiculaires sur *P c*, sont les sinus de ces deux arcs.

Et par VI. 12. *B F* est plus grande que *b f*.

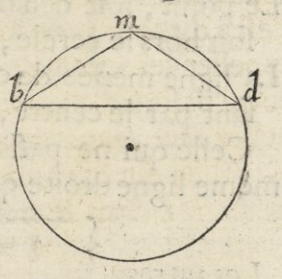
Donc les arcs égaux ont de plus grands sinus dans les plus grands cercles.

Et de même la corde *B D* est plus grande que *b d* (par VI. 31.) & aussi parce que *B F*, moitié de *B D*, est plus grande que *b f*, moitié de *b d*.

Donc les arcs *B D* & *b d* estant proportionellement égaux, celuy du plus grand cercle a une plus grande corde.

X. THEOREME.

LES cordes dans un même cercle ne sont point proportionelles aux arcs, mais les plus grands arcs (j'entens toûjours ceux qui ne sont pas plus grands que la demycirconference) ont de plus petites cordes à proportion que les plus petits. C'est à dire que la corde d'un arc, qui n'est que la moitié d'un plus grand arc, est plus grande que la moitié de la corde de ce plus grand arc. XXI.



La preuve en est bien facile. Car soit l'arc *b d* partagé en *m* par la moitié, *b m* égale à *d m* seront chacune la corde d'un arc qui n'est que la moitié de l'arc que soûtient la corde *b d*. Or ces deux cordes *b m* & *d m* sont plus grandes que *b d*. Donc estant égales, chacune est plus grande que la moitié de la corde *b d*.

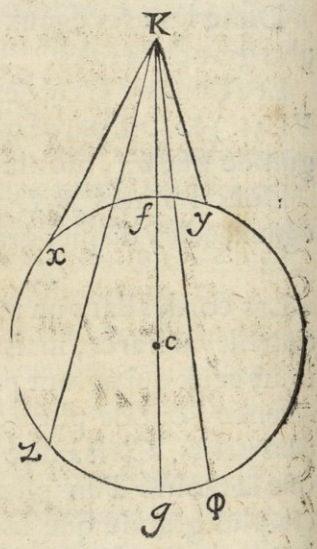
Corollaire.

XXII. De là il s'enſuit que plus les arcs ſont grands, plus la difference eſt grande entre la longueur de l'arc & celle de la corde; & qu'au contraire plus les arcs ſont petits plus cette difference diminuë. De ſorte qu'on peut prendre un ſi petit arc, que cette difference ſera plus petite que quelque ligne qu'on ait donnée.

SECONDE SECTION.

Des Secantes interieures et exterieures.

XXIII. Nous avons déja dit que les lignes menées à la circonference d'un point de dedans le cercle autre que le centre ſe pouvoient appeller *des ſecantes interieures.*



Et que quand le point eſtoit hors le cercle, & qu'elles n'étoient point tangentes, on les pouvoit appeller des *ſecantes exterieures.*

Or pour abreger le diſcours dans l'expreſſion de ces lignes, ſoient toûjours appellez

Le centre *c.*

Le point, ſoit dedans le cercle, ſoit hors le cercle, *k.*

La ligne menée de ce point paſſant par le centre, *kg.*

Celle qui ne paſſant point par le centre eſt dans la même ligne droite que celle qui y paſſe, *kf.*

Les autres, *kx. ky. kz. k.*

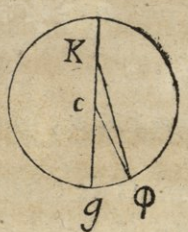
Cela ſuppoſé ſoit.

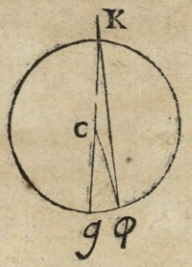
I. Theo-

I. THEOREME.

XXIV.

LA plus longue de ces lignes est kg. C'est à dire celle qui passe par le centre.





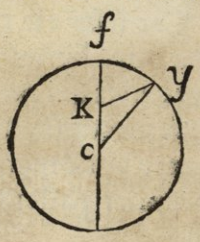
Car si on la veut comparer avec $k\varphi$, soit tiré le rayon $c\varphi$, qui est égal à cg. kc, plus $c\varphi$, est plus grande que $k\varphi$, par V. 6.

Donc kg, est plus grande que $k\varphi$.

II. THEOREME.

XXV.

LA plus courte de toutes ces lignes est kf. C'est à dire celle qui ne passant point par le centre est dans la même ligne droite que celle qui y passe.



Car comparant kf avec ky, & ayant tiré le rayon cy,

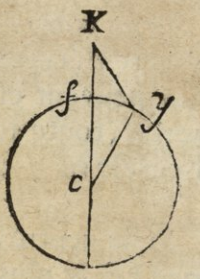
Si k est au dedans du cercle,

ck plus kf est égale à cy.

Or cy est plus courte que ck plus ky.

Donc ck plus kf est plus courte que ck plus ky.

Donc ostant ck, qui est commun, kf est plus courte que ky.



Que si k est dehors le cercle,

kf plus fc, est plus courte que ky plus yc.

Or fc est égale à yc.

Donc kf est plus courte que ky.

III. THEOREME.

XXVI.

LES lignes menées de k à des points de la circonference également distans de f ou de g sont égales. Et il faut remarquer que deux points ne sçauroient estre également distans d'f, qu'ils ne soient aussi également distans de g. Mais on appelle également distans d'f ceux qui sont plus

proches d'*f* que que de *g*, & également distans de *g* ceux qui sont plus proches de *g* que d'*f*.

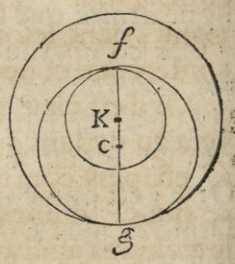
Soient les deux points également distans d'*f*, x & *x* la corde terminée par ces deux x & *x* est coupée perpendiculairement par la ligne *fc*, puisque *f* par l'hypothese est également distant d'x & *x*, & *c* aussi, parce que c'est le centre du cercle.

Donc tous les points de cette ligne sont également distans d'x & *x*. Donc le point *k*, qui en est un. Donc *k* x & *k x* sont égales.

C'est la même chose de 2 points également distans de *g*.

IV. Theoreme.

XXVII. Si du centre *k*, intervale *k f*, ou *k g*, on décrit un nouveau cercle, il touchera le premier cercle en un seul point, c'est à dire en *f*, ouen *g*, sans le couper.

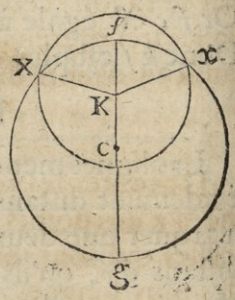


Car si *k f* est rayon du 2e cercle, comme cette ligne est la plus courte de toutes celles qui peuvent estre menées de *k* à la circonference du 1er cercle, toute autre ligne menée à la circonference du premier passera la circonference du second.

Et au contraire si *k g* est le rayon du 2e cercle, cette ligne estant la plus longue de toutes celles qui peuvent estre menées de *k* à la circonference du 1er cercle, toute autre ligne menée de *k* à la circonference du 1 cercle ne pourra pas aller jusqu'à la circonference du 2.

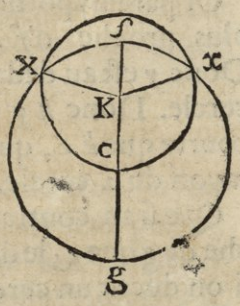
V. Theoreme.

XXVIII. Si du centre *k*, intervale plus grand que *k f*, & plus petit que *k g*, comme pourroit estre *k x*, on décrit un cercle, il coupera la circonference du premier au point x & *x*. C'est à dire à 2 points également distans de *f*, (ou également distans de *g*, si on avoit pris un point pour déterminer cet intervale plus proche de *g*,) & la partie de la circonfe.



rence du 1 cercle entre x & x, dont le milieu est f, sera au dedans du 2 cercle, au lieu que la partie de la même circonference du 1 cercle, entre ces deux mêmes points x & x, dont g est le milieu, sera au dehors du 2 cercle. Car par 4. S. deux circonferences ne se peuvent couper en plus de deux points.

Or cela estant, le rayon du 2 cercle estant $k\,x$, toute ligne menée de k à la circonference du 1 cercle qui sera égale à $k\,x$, se trouvera aussi terminée à la circonference du 2 cercle.



Or par le troisiéme Theoreme cette ligne égale à $k\,x$ est celle qui est terminée à un point de la circonference du premier cercle, aussi distant d'f de l'autre costé qu'x en est distant de son costé Donc x & x seront les deux seuls points dans lesquels la deuxiéme circonference coupera la premiere.

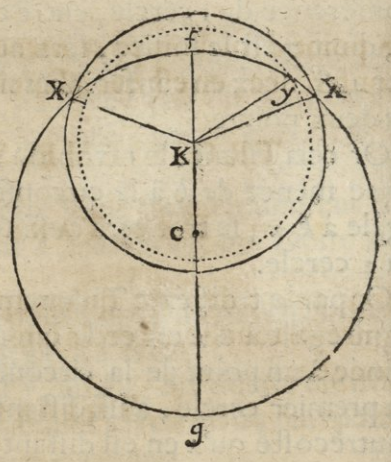
Or il est clair que le point f se trouvera au dedans du 2 cercle, parce que $k\,f$ est plus courte que $k\,x$, qui en est le rayon. Donc tout ce qui est d'une part entre f & x, & de l'autre entre f & x, se trouvera aussi au dedans du 2 cercle, puis qu'il faudroit que le 2 cercle eust coupé le 1 en d'autres points qu'x & x, afin que quelqu'un des points plus proche d'f se trouvassent ou dans la circonference du 2 cercle, ou au dehors.

Et par la mesme raison le point g se trouvera au dehors du 2 cercle, parce que $k\,g$ est plus longue que $k\,x$, qui en est le rayon: ce qui fait voir aussi que tous les points de la 1 circonference plus proches de g qu'x se trouveront aussi au dehors du 2 cercle.

VI. THEOREME.

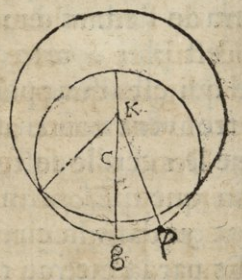
DE toutes les lignes menées de k, celles qui sont menées à des points plus proches d'f sont les plus courtes, & celles qui sont menées à des points plus proches de g sont les plus longues. XXIX.

Suppoſons par exemple que le point *y* eſt plus proche d'*f* que le point *x*; je dis que *k y* eſt plus courte que *k x*. Car ſi on décrit un cercle du centre *k*, intervale *k x*, par le Theoreme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches d'*f* qu'*x* ſe trouveront au dedans du deuxiéme cercle.



Or par l'hypotheſe, *y* eſt plus proche d'*f*, qu'*x*. Donc *y* eſt au dedans du 2 cercle. Donc *k y* eſt plus courte que *k x*, qui eſt un rayon du 2 cercle.

Que ſi au contraire nous ſuppoſons que ϕ eſt plus proche de *g* que *z*; je dis que *k* ϕ eſt plus longue que *k z*. Car ſi on décrit un cercle du centre *k*, intervale *k z*, par le Theoreme precedent tous les points de la circonference du premier cercle plus proches de *g* que *z*, ſe trouveront au dehors du deuxiéme cercle. Or par l'hypotheſe, ϕ eſt plus proche de *g* que *z*. Donc ϕ eſt au dehors du cercle. Donc *k* ϕ eſt plus longue que *k z*, qui eſt un rayon du deuxiéme cercle.



I. Corollaire.

XXX. De nul point autre que le centre on ne peut mener trois lignes égales à la circonference. Car les 3 points où ces trois lignes ſeroient terminées ne peuvent pas eſtre également diſtans du point *f*, ou du point *g*. Donc ſi l'un des 3 eſt plus proche ou plus éloigné du point *f*, la ligne qui y ſera terminée ſera plus courte ou plus longue que les deux autres. Donc, &c.

SCD LYON 1

II. Corollaire.

Le point d'où l'on peut mener trois lignes égales à la circonference, en eſt neceſſairement le centre.

TROISIEME SECTION.

Des Tangentes.

Nous avons déja dit qu'on appelle *tangente* du cercle la ligne qui touche le cercle ſans entrer dedans, quoy que prolongée. XXXI.

I. Theoreme.

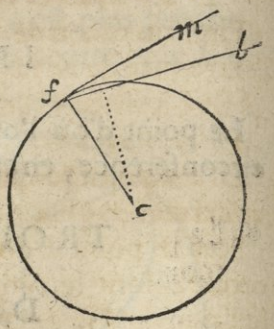
Toute ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon touche le cercle, & ne le touche qu'en un ſeul point; c'eſt à dire qu'il n'y a qu'un ſeul point qui ſoit commun à la circonference & à cette ligne; & ce point s'appelle le point de l'atouchement. Car puiſque le rayon eſt perpendiculaire à cette ligne, c'eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent eſtre menées du centre à cette ligne. Donc toute autre menée du centre ſera plus longue. Donc elle ſe terminera en un point hors de la circonference. Donc nul autre point que celuy où ce rayon coupe perpendiculairement cette ligne ne pourra eſtre commun à cette circonference & à cette ligne. Ce qu'il falloit demonſtrer.

II. Theoreme.

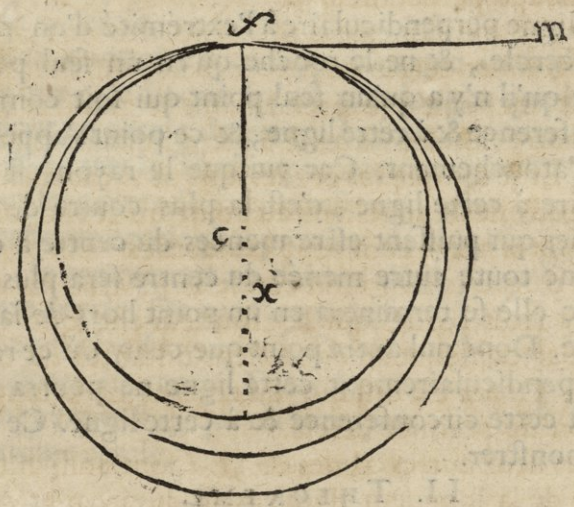
On ne peut faire paſſer aucune ligne droite entre la tangente & la circonference, quoy qu'on en puiſſe faire paſſer une infinité de circulaires qui ne ſe rencontreront que dans le point de l'attouchement.

La premiere partie ſe prouve ainſi. Soit *c f* un rayon, *m f* la tangente : ſoit *b* un point quelconque au deſſous de la tangente. Tirant de *b* une ligne à *f*, elle ſera obli-

que ſur $c f$, inclinée vers c, parce que $m f$ eſt perpendiculaire à $c f$. Donc la perpendiculaire de c à $b f$, ſera plus courte que $c f$. Donc elle ſe terminera dans le cercle (V. 27.) Donc une partie de $b f$ ſera au dedans du cerle. Donc on n'aura pas pû faire paſſer $b f$ entre la tangente & la circonference.



La deuxiéme partie ſe prouve ainſi. Soit $f c$ prolongée à l'infiny du coſté de c: ſoient tous les divers points de cette ligne au deſſous de c appellez x. Toutes les circonferences qui auront l'un de ces points que j'appelle x pour centre, & $x f$ pour rayon, auront $m f$ pour tangente par le premier Theoreme, & ne rencontreront, ny la circonference qui a c pour centre, ny les unes les autres, qu'en f (par 27. S.) Donc toutes ces circonferences paſſeront ſans ſe rencontrer entre la tangente & le premier cercle.



I. Probleme.

XXXIII. Descrire la tangente qui touche la circonference à un point donné.

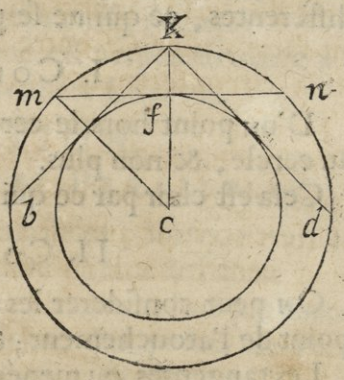
SCD LYON 1

Tirer un rayon de ce point donné, la perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon sera la tangente que l'on cherche.

II. Probleme.

D'un point donné hors le cercle tirer des tangentes au cercle. XXXIV.

Soit le point *k* donné hors le cercle, dont le centre est *c*, & le rayon *cf*; je décris un autre cercle du même centre, intervalle *ck*, & puis ayant tiré la ligne *kc*, qui coupe en *f* la circonference du 1 cercle, je tire par le point *f* la corde du grand cercle *mn*, qui coupe perpendiculairement *kc*, ce qui fait que *mn* touche le premier cercle en *f*.



Cela fait, du point *k* je prends dans le grand cercle de part & d'autre les deux arcs *kb*, *kd*, égaux chacun à l'arc *mn*; Et je dis que les cordes *kb*, *kd* touchent le 1 cercle, & qu'elles le touchent au point où les rayons du grand cercle *mc* & *nc* coupent ces cordes.

Car les trois arcs du grand cercle *mn*, *kb*, *kd* estant égaux, les trois cordes qui les soûtiennent sont égales aussi, & par consequent également distantes du centre par 4. *sup.* Or *mn* est distante du centre *c* de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc les deux autres cordes *kb*, *kd* sont aussi distantes du centre de la longueur d'un rayon du premier cercle.

Donc ce rayon leur est perpendiculaire, puis qu'autrement il ne mesureroit pas leur distance d'avec le centre.

Donc par le Theoreme precedent elles sont tangentes du premier cercle.

Et elles le touchent au point où elles sont coupées par les rayons du grand cercle *mc* & *nc*. Car le point *k* partageant par la moitié l'arc *mn*, le point *m* partage aussi par la moitié l'arc *kb*. Donc le rayon *mc* est perpendiculaire

à la corde *k b*, parce que les deux points *m* & *c* ſont chacun également diſtans de *k* & de *b*.

Donc ſi le point où le rayon *mc* coupe la corde *k b* eſt *h*, *h* ſera auſſi l'extrémité du rayon du premier cercle, qui eſt perpendiculaire à la corde *k b*, puis qu'autrement il faudroit que de *c* on puſt tirer ſur *k b* deux perpendiculaires differentes, ce qui ne ſe peut.

I. Corollaire.

XXXV. D'un point hors le cercle on peut tirer deux tangentes au cercle, & non plus.

Cela eſt clair par ce qui vient d'eſtre demonſtré.

II. Corollaire.

XXXVI. On peut conſiderer les tangentes comme terminées au point de l'atouchement ; & alors

Les tangentes, ou menées à un même cercle d'un même point, ou de divers point également diſtans du centre, ou menées à des cercles égaux de points également diſtans des centres de chacun ; ſont égales.

Car il eſt viſible par la ſolution du deuxiéme Probleme, que dans tous ces cas, ces tangentes ſont moitié de cordes égales.

QUATRIEME SECTION.

Des Circonferences paralleles.

I. Lemme.

XXXVII. Une ligne droite eſt perpendiculaire à une circonference, autant que la nature de l'une & de l'autre le peut ſouffrir, lorſqu'elle eſt perpendiculaire à la tangente au point de la ſection.

II. Lemme.

XXXVIII D'où il s'enſuit, que toute ligne qui eſtant prolongée paſſe par le centre, eſt perpendiculaire à la circonference.

III. Lemme.

SCD LYON 1

III. Lemme.

La distance d'un point à une circonference, se mesure par la plus courte ligne qui puisse estre menée de ce point à cette circonference. Or cette plus courte ligne est celle qui ne comprend point le centre, mais qui est dans la même ligne droite que celle qui y passe. (S. 25.) XXXIX.

Et par consequent cette ligne est perpendiculaire à la circonference par les deux premiers Lemmes.

DEFINITION.

des circonferences Paralleles.

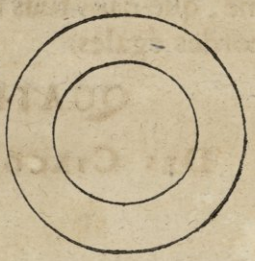
Deux circonferences sont paralleles, lorsque tous les points de chacune sont également distans de l'autre. XL.

C'est à dire selon les precedens Lemmes, lorsque toutes les lignes droites, menées chacune des points de l'une perpendiculairement sur l'autre, sont égales.

I. Theoreme.

Toutes les circonferences concentriques (c'est à dire qui ont un mesme centre) sont paralleles. XLI.

Car tous les rayons de la plus grande cir conference sont perpendiculaires à l'une & à l'autre. Donc ostant les rayons de la plus petite, ce qui restera entre les deux circonferences, sera égal, & en mesurera la distance. Donc tous les points de chacune seront également distans de l'autre. Donc elles sont paralleles.

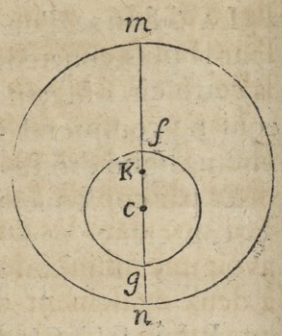


II. Theoreme.

Deux cercles non concentriques estant l'un dans l'autre, le diametre du plus grand qui passera par les deux centres, coupera chaque circonference par la moitié; & alors il arrivera 3. ou 4. choses considerables. XLII.

1. Les parties de ce diametre qui se trouveront d'un

coſté & d'autre entre les deux circonferences, c'eſt à dire fm, & gn, ſont perpendiculaires à l'une & à l'autre, & meſurent fm le plus grand, & gn le plus petit éloignement de ces deux circonferences.



2. Nulle autre ligne que ces deux-là qui ſe trouvent dans ce diametre qui paſſe par les deux centres, ne peut eſtre perpendiculaire à l'une & à l'autre circonference, toute autre ligne qui ſera perpendiculaire à l'une des circonferences, étant oblique ſur l'autre.

3. Tous les points d'une demy-circonference d'une part ſont inégalement diſtans de l'autre demy-circonference de la meſme part.

4. Toutes les fois que deux points d'une circonference ſont également diſtans de l'une ou l'autre des extremitez de ſon diametre, qui paſſe par les deux centres, ils ſont auſſi également diſtans de l'autre circonference.

Tout cela eſt ſi aiſé à prouver par ce qui a eſté dit dans la 2e Section, & par les trois Lemmes de celle-cy, que j'aime mieux le laiſſer à trouver pour exercer l'eſprit, que de perdre du temps à le demonſtrer.

Corollaire.

XLII. Il s'enſuit de là, qu'on peut remarquer trois differences entre le paralleliſme des lignes droites, & celuy des lignes circulaires.

La 1re eſt, que la notion negative des paralleles droites, qui conſiſte à ne ſe rencontrer jamais quand on les prolongeroit à l'infiny, n'a point de lieu dans les circulaires, qui peuvent bien ne ſe rencontrer jamais ſans eſtre paralleles; de ſorte que pour l'eſtre il faut que ce ſoit ſelon la notion poſitive, qui conſiſte en ce que les points de l'une ſont toûjours également diſtans de l'autre.

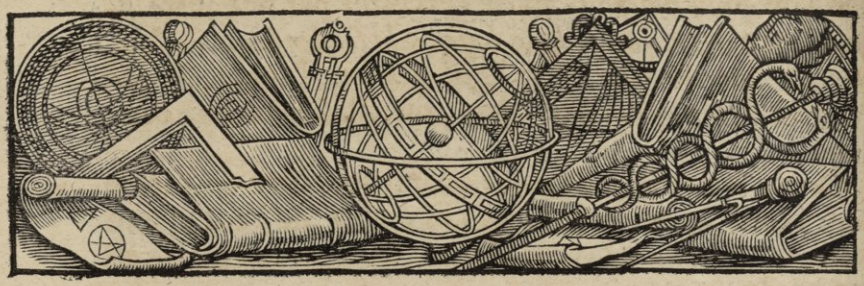
La 2e eſt, eſt que deux lignes droites ſont paralleles,

SCD LYON 1

quand une meſme ligne eſt perpendiculaire à l'une & à l'autre. Au lieu qu'il peut y avoir non ſeulement une ligne droite, mais deux, qui ſoient perpendiculaires à l'une & à l'autre circonference, ſans qu'elles ſoient paralleles, mais il n'y en peut pas avoir trois.

La 3e eſt, que deux lignes droites ne s'étant point croiſées, il ne peut pas y avoir deux points de l'une également diſtans de l'autre, qu'elles ne ſoient paralleles. Au lieu que dans les circonferences non paralleles il peut y avoir une infinité de points dans chacune, qui ſoient deux à deux également diſtans de l'autre. Mais il n'y en peut avoir trois enſemble.

Le fondement de ces differences vient d'une part de ce que la ligne circulaire eſt bornée en elle-meſme. Et de l'autre, de ce qu'il en faut avoir trois points pour en avoir la poſition; au lieu qu'il n'en faut que deux pour avoir celle de la ligne droite.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE HUITIE'ME.

DES ANGLES RECTILIGNES.

I. *APRES avoir parlé des lignes, c'eſt ſuivre l'ordre de la nature que de paſſer aux angles qui ſont plus compoſez que les lignes tenant quelque choſe des ſurfaces, comme nous allons voir.*

DEFINITION DE L'ANGLE RECTILIGNE.

II. *L'angle rectiligne* eſt une ſurface compriſe entre deux lignes droites qui ſe joignent en un point du coſté où elles s'approchent le plus, indefinie & indeterminée ſelon l'une de ſes dimenſions, qui eſt celle qui répond à la longueur des lignes qui la comprennent, & determinée ſelon l'autre par la partie proportionnelle d'une circonference dont le centre eſt au point où ces lignes ſe joignent.

AUTRES DEFINITIONS.

III. LES lignes qui comprennent l'angle s'appellent *ſes côtez.*

IV. LE point où ces lignes ſe joignent s'appelle *ſon ſommet.*

SCD LYON 1

Si l'on joint deux points de ces costez par une autre ligne, cette ligne s'appelle *la base* ou *la soustendante de l'angle*. Et l'on dit que cette ligne *soûtient* l'angle, & que l'angle est *opposé* à cette ligne, ou est *soûtenu* par cette ligne.

Cette base s'appelle *corde* quand les côtez de l'angle sont égaux, pource qu'alors ces costez de l'angle sont considerez comme rayons d'un cercle dont cette base est une corde. VI.

Que si d'un des côtez on peut faire décendre une perpendiculaire sur l'autre, cette base alors s'appelle le *sinus* de cet angle. VII.

Cette partie proportionelle de la circonferenee qui mesure la grandeur de l'angle s'appelle *l'arc que comprend l'angle*. VIII.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

DE LA MESURE DES ANGLES.

Les arcs de toutes les circonferences qui ont pour centre le point où les costez de l'angle se coupent sont tous proportionels à leurs circonferences, & par consequent determinent tous la mesme grandeur de l'angle. IX.

La consequence est claire par la definition de l'angle, puisque nous avons dit que c'estoit une surface indeterminée selon une dimension, & qui n'estoit determinée selon l'autre que par une partie proportionnelle des circonferences qui ont pour centre le point où ses costez se joignent.

Pour montrer donc que les arcs de ces circonferences determinent tous la mêsme grandeur de l'angle, il ne faut que montrer que tous ces arcs sont proportionels à leurs circonferences.

Or c'est ce qui a déja esté prouvé, Livre VII. 20.

DE LA PREMIERE MESURE DE L'ANGLE

QUI EST L'ARC COMPRIS ENTRE SES COSTEZ.

Il s'ensuit delà que pour sçavoir la vraye grandeur d'un angle, il faut sçavoir la grandeur proportionelle de l'arc compris entre ses costez, c'est à dire de combien de degrez X.

SCD LYON 1

eſt cet arc. Car un degré n'eſt pas le nom d'une grandeur abſoluë, mais proportionelle, puiſque, comme nous avons déja dit, il ſignifie la trois cent ſoixantiéme partie de quelque circonference que ce ſoit, dont chacune en ſoy eſt plus grande ou plus petite ſelon que la circonference eſt plus grande ou plus petite: & il en eſt de meſme des minutes, des ſecondes, & des troiſiémes. C'eſt pourquoy on peut appeller arcs égaux, ſelon qu'il a eſté dit VII. 19. ceux qui ſont d'autant de degrez, quoy qu'ils puiſſent eſtre inégaux ſelon leur grandeur abſoluë, & égaux en toute maniere, ou *tout-égaux*, ceux qui ſont d'autant de degrez & qui ſont auſſi égaux ſelon leur grandeur abſoluë, tels que ſont les arcs d'autant de degrez dans les cercles égaux.

De l'Angle droit.

XI. C'est par là qu'on a diviſé l'angle en *droit* & *non droit*, & le non droit, en *aigu* & *obtus*.

On appelle angle droit celuy qui a pour meſure la moitié de la demy-circonference. D'où il s'enſuit.

1. Que tout angle droit a de l'autre coſté ſur la meſme ligne un autre angle qui luy eſt égal, puiſque l'angle qui eſt de l'autre coſté a pour meſure ce qui reſte de la demy-circonference, qui eſt la moitié.

2. Qu'un angle droit eſt la meſme choſe qu'un angle de 90. degrez. Car la demy-circonference en ayant 180. la moitié de cette demy-circonference en a 90.

3. Que toute ligne perpendiculaire ſur un ligne fait ſur cette ligne deux angles droits, l'un d'un coſté & l'autre de l'autre. Car elle partage en deux la demy-circonference qui a pour centre le point de leur ſection, par VII. 17.

De l'Angle aigu.

XII. On appelle angle *aigu* celuy qui eſt moindre qu'un droit, c'eſt à dire qui a pour meſure un arc moindre que la moitié de la demy-circonference. D'où il s'enſuit.

Que tout angle moindre que de 90. degrez eſt aigu.

De l'Angle obtus.

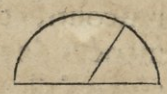
XIII. On appelle angle *obtus* celuy qui eſt plus grand que

l'angle droit; c'est à dire qui a pour mesure un arc plus grand que la moitié de la demy-circonference. D'où il s'ensuit.

Que tout angle plus grand que de 90. degrez est obtus.

I. Theoreme.

XIV. Toute ligne qui en coupe une autre obliquement fait d'un costé une angle aigu & de l'autre un obtus, & les deux ensemble valent deux droits. Car cette ligne partage inégalement la demy circonference. Et partant fait deux angles inégaux. Mais elle ne la divise qu'en deux portions, & partant les deux portions prises ensemble valent toute la demy-circonference.



II. Theoreme.

XV. Lorsque plusieurs lignes droites en rencontrent une en un même point & du mesme costé, tous les angles que font toutes ces lignes entre elles & avec la rencontrée valent deux droits. Car ils comprennent tous ensemble la demy-circonference, qui est la mesure de deux angles droits.

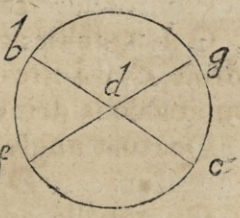
Definition.

XVI. L'angle *aigu*, qui avec l'obtus vaut deux angles droits, s'appelle le *complement de l'angle obtus*.

III. Theoreme.

XVII. Lorsque deux lignes se coupent en passant de part & d'autre, il est bien clair que si elles se coupent perpendiculairement, elles font quatre angles égaux tous quatre entr'eux, c'est à dire tous quatre droits.

Mais si elles se coupent obliquement, elles en font deux aigus & deux obtus, dont l'aigu est opposé à l'aigu & l'obtus à l'obtus, & cela s'appelle estre opposé au sommet. Et les opposez sont égaux.

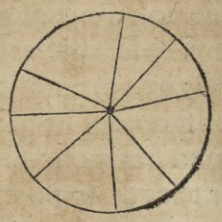


Car faisant un cercle du point où ces deux lignes *b c* & *f g* se coupent, chacune coupera la circonference par la moitié, & par consequent la moitié

b g c est égale à la moitié *f b g*. Or ces deux moitiez ont l'arc *b g* de commun, qui est l'arc d'un des angles obtus: & par consequent ostant cet arc, l'arc de l'aigu qui reste d'une part sera égal à l'arc de l'aigu qui reste de l'autre. On prouvera la même chose des deux angles obtus.

IV. Theoreme.

XVIII. Lorsque plusieurs lignes droites se rencontrent en un même point estant menées de toutes parts, tous les angles qu'elles font valent quatre droits. Car ils ont tous ensemble pour mesure une circonference entiere.



DES AUTRES MESURES DE L'ANGLE.

XIX. *Quoy que l'angle n'ait en effet de vraye & naturelle mesure que l'arc d'un cercle; neanmoins comme on ne connoist pas la longueur des lignes courbes, on est obligé d'avoir recours à d'autres mesures, mais toûjours par rapport à celle là.*

On les peut rapporter à trois qui sont toutes prises de la base considerée diversement: ou comme *corde*: ou comme *sinus*: ou simplement comme *base*.

DE LA SECONDE MESURE DE L'ANGLE Qui est la Corde.

XX. Nous commencerons par la base considerée comme corde, sur quoy il faut remarquer

1. Que pour cela il faut que les costez de l'Angle soient pris égaux. Car alors ils sont considerez comme rayons d'un cercle dont le centre est au sommet, & ainsi la ligne qui en joint les extremitez est la corde de l'arc de ce cercle qui mesure cet angle.

2. Les angles ainsi considerez peuvent estre appellez *isosceles*, c'est à dire à jambes égales.

3. Deux angles isosceles comparez ensemble peuvent estre ou *équilateres* entre eux, ou *inéquilateres*; c'est à dire que leurs costez sont rayons ou de cercles égaux, ou de cercles inégaux.

Cela

Cela supposé, pour bien comprendre toute cette mesure de l'angle, il ne faut que faire attention à ces Lemmes tirez des Livres V. & VII.

I. LEMME.

DANS les cercles égaux les cordes égales soûtiennent des arcs tout-égaux. Et les arcs égaux sont soûtenus par cordes égales. XXI.

II. LEMME.

DANS les cercles égaux les plus grandes cordes soûtiennent de plus grands arcs. Et les plus grands arcs sont soûtenus par les plus grandes cordes. VII. 10. XXII.

III. LEMME.

LES cercles estant inégaux, les cordes égales soûtiennent des arcs de plus de degrez dans les plus petits cercles VII. 20. XXIII.

IV. LEMME.

LES arcs d'un même nombre de degrez sont soûtenus par de plus grandes cordes dans les plus grands cercles. VII. 20. XXIV.

I. THEOREME.

TROIS sortes d'égalitez peuvent estre considerées dans deux angles isosceles. XXV.

1. L'égalité des costez de l'un à ceux de l'autre, qui fait qu'on les appelle *équilateres entr'eux*.

2. L'égalité des cordes, qui les peut faire appeller *isocordes*.

3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux de ces égalitez estant données, donnent la 3me.

PREMIER CAS.

LES angles équilateres entr'eux & isocordes sont égaux. XXVI.
Car ils ont pour mesure des arcs tout-égaux, puisqu'étant équilateres ils sont mesurez par des arcs de cercles égaux, & que par le 1er Lemme les cordes égales de cercles égaux soûtiennent des arcs tout-égaux.

SECOND CAS.

LES angles équilateres & égaux sont isocordes. C'est la converse du même premier Lemme. XXVII.

TROISIEME CAS.

XXVIII. LES angles isocordes & égaux sont équilateres enrr'eux. Car il est aisé de voir par le 3e Lemme que les cordes égales ne peuvent soûtenir des arcs égaux, que dans les mêmes cercles, ou en des cercles égaux.

II. THEOREME.

XXIX. QUAND il n'y a égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrive.

PREMIERE CAS.

XXX. N'Y ayant égalité que dans les costez, les plus grandes cordes donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grandes Cordes. C'est le 2e Lemme.

SECOND CAS.

N'Y ayant égalité que dans les cordes, les plus grands costez donnent les plus petits angles, & les plus petits angles ont les plus grands costez. C'est le 3e Lemme.

TROISIEME CAS.

XXXI. N'Y ayant égalité que dans la grandeur des angles, les plus grandes cordes donnent les plus grands costez, & les plus grands costez ont les plus grandes cordes. C'est le 4e Lemme.

I. PROBLEME.

XXXII. COUPER en deux un angle donné. L'ayant pris isoscele, il ne faut qu'en couper la corde perpendiculairement & par la moitié, ce qui se fait de la même sorte. Car alors l'arc sera partagé par la moitié, par VII. 6.

II. PROBLEME.

XXXIII. AYANT un point donné dans une ligne donnée, en élever une qui fasse sur cette ligne un angle égal à un donné. Soit l'angle donné. L'ayant fait isoscele en marquer la corde, puis du point donné dans la ligne pris pour centre, décrire d'un intervale égal aux costez de l'angle donné une portion de circonference, dans laquelle en commençant par le point où cette circonference coupera la ligne donnée, on prendra une corde égale à la corde de l'angle donné. La ligne menée du point donné à l'extremité de cette corde satisfera au Probleme. Car ces deux angles

SCD LYON 1

ſeront équilateres entr'eux & iſocordes ; & par conſequent égaux par le premier Theoreme.

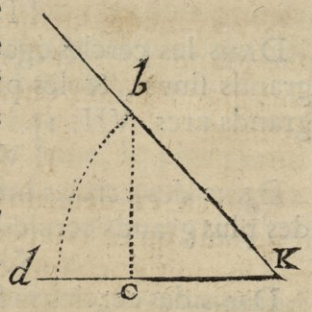
DE LA TROSIEME MESURE DE L'ANGLE, QUI EST LE SINUS.

LE ſinus de l'arc qui meſure un angle peut eſtre appellé le ſinus de cet angle. D'où il s'enſuit, XXXIV.

1. QUE comme il n'y a que les arcs moindres que la moitié de la demy-circonference qui ayent un ſinus ; il n'y a auſſi que les angles aigus qui en ayent. Ce qui n'empéche pas qu'on ne ſe puiſſe ſervir des ſinus pour comparer enſemble deux angles obtus, en meſurant par les ſinus les angles aigus qui ſont les complemens de ces obtus. Voyez VII. 17. XXXV.

2. IL s'enſuit que toute ligne menée d'un point de l'un des coſtez d'un angle aigu perpendiculairement ſur l'autre coſté, eſt le ſinus de l'arc qui meſure cet angle, & par conſequent le ſinus de cet angle. XXXVI.

Car ſoit *k* le ſommet d'un angle aigu, & que de *b*, point quelconque de l'un de ſes coſtez, ſoit menée ſur l'autre la perpendiculaire *b c*. Je dis que *b c* eſt le ſinus de l'arc qui meſure cet angle. Car ayant prolongé *k c* juſques en *d*, en ſorte que *k d* ſoit égale à *k b* ; ſi du centre *k*, intervale *k b*, on décrit un cercle, l'arc de ce cercle compris entre *d* & *b* ſera la meſure de cet angle. Or *b c* eſt le ſinus de cet arc, par VII. 11. Donc *b c* eſt le ſinus de l'arc qui meſure l'angle *k*, & par conſequent de l'angle *k*.



3. IL s'enſuit que le coſté d'un des points duquel eſt menée la perpendiculaire ſur l'autre coſté conſideré depuis le ſommet juſques à ce point, comme *k b*, peut eſtre appellé le rayon de cet angle, parce qu'il eſt le rayon du cercle dont l'arc le meſure. Et l'autre coſté depuis le point où tombe la perpendiculaire ou *ſinus*, peut eſtre appellé l'*antiſinus*, qui eſt toûjours égal au rayon moins le *ſinus verſe*. D'où il s'enſuit, XXXVII.

XXXVIII. 4. Que la grandeur du ſinus reglant toûjours celle du ſinus verſe (comme il a eſté montré VII. 16) elle regle toûjours auſſi celle des *antiſinus*, quoyque par rapport au rayon, puiſque l'*antiſinus* n'eſt autre choſe que le rayon moins le *ſinus verſe*; de ſorte que dans deux angles differens les rayons & les ſinus ne ſçauroient eſtre égaux que les antiſinus ne le ſoient auſſi.

Tout cela ſuppoſé, ſoient conſiderez les Lemmes ſuivans.

I. Lemme.

XXXIX. Quand on dit que deux angles qu'on veut meſurer par les ſinus ont le rayon égal, c'eſt de même que ſi l'on diſoit qu'ils ſont meſurez par des arcs de cercles égaux; & s'ils ont le rayon inégal, par des arcs de cercles inégaux.

II. Lemme.

XL. Dans les cercles égaux les arcs égaux ont des ſinus égaux, & les ſinus égaux donnent des arcs égaux. VII. 15.

III. Lemme.

XLI. Dans les cercles égaux les plus grands arcs ont les plus grands ſinus, & les plus grands ſinus donnent les plus grands arcs. VII. 15.

IV. Lemme.

XLII. Dans des cercles inégaux les arcs eſtant égaux, ceux des plus grands cercles ont les plus grands ſinus. VII. 18.

V. Lemme.

XLIII. Dans des cercles inégaux les ſinus eſtant égaux, ceux des plus grands cercles donnent des arcs proportionellement plus petits, c'eſt à dire de moins de degrez. C'eſt une ſuitte claire du precedent.

I. Theoreme.

XLIV. Trois égalitez peuvent eſtre conſiderées dans les angles que l'on compare & que l'on meſure par les ſinus.

1. L'égalité des rayons.
2. L'égalité des ſinus.
3. L'égalité des angles mêmes.

Or deux eſtant données donnent la 3e.

SCD LYON 1

PREMIER CAS.

LES angles qui ont le rayon égal & le sinus égal sont égaux. 1er & 2me Lemme. XLV.

SECOND CAS.

LES angles égaux qui ont le rayon égal ont le sinus égal. 1er & 2me Lemme. XLVI.

TROISIEME CAS.

LES angles qui sont égaux & qui ont le sinus égal, ont le rayon égal. Car s'ils avoient le rayon inégal, ils seroient mesurez par des arcs de cercles inégaux : & par consequent (selon le 5e Lemme) les sinus égaux donneroient des arcs proportionellement inégaux, & ainsi les angles ne pourroient pas estre égaux. XLVII.

II. THEOREME.

N'Y ayant égalité que dans l'une de ces trois choses, voicy ce qui arrivera. XLVIII.

PREMIER CAS.

N'Y ayant égalité que dans le rayon, les plus grands sinus donnent les plus grands angles, & les plus grands angles ont les plus grands sinus. 3e Lemme. XLIX.

SECOND CAS.

N'Y ayant égalité que dans les sinus, le plus grand rayon donne le plus petit angle, & le plus petit angle a le plus grand rayon. 5me Lemme. L.

TROISIEME CAS.

N'Y ayant égalité que dans les angles, le plus grand rayon donne le plus grand sinus, & le plus grand sinus donne le plus grand rayon. LI.

DES ANGLES FAITS PAR LES LIGNES ENTRE PARALLELES.

COMME les perperpendiculaires entre les paralleles font des angles droits sur l'une & sur l'autre (ce qui est toûjours la mesme chose) il n'y a que les angles que font les obliques à considerer.

Mais ces obliques entre paralleles faisant d'une part un angle aigu & de l'autre un obtus, c'est l'aigu que l'on mesure premierement, & par l'aigu on connoist l'obtus. Et

ainſi quand nous parlerons d'angles égaux, nous entendrons les aigus, & les obtus par conſequence ſeulement.

Or dans la conſideration de ces angles aigus faits par des obliques entre paralleles,

L'oblique eſt le rayon de l'angle,

La perpendiculaire de l'extremité de l'oblique (qui eſt un point de l'une des paralleles ſur l'autre parallele) en eſt le ſinus.

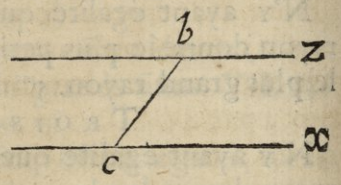
D'où il s'enſuit, que les ſinus qui meſurent les angles que font des obliques entre les mêmes paralleles ſont tous égaux, parce que les perpendiculaires entre les mêmes paralleles ſont égales.

Comme auſſi entre differentes paralleles, pourveu que les deux paralleles d'une part ſoient autant diſtantes l'une de l'autre, que celles de l'autre part. Et c'eſt ce qu'on peut appeller deux eſpaces paralleles égaux.

On peut tirer de là diverſes propoſitions importantes qui ne ſeront que des Corollaires du 1er ou du 2me Theoreme.

I. COROLLAIRE.

LII. TOUTE oblique entre deux paralleles fait les angles alternes ſur ces paralleles égaux, c'eſt à dire que l'aigu qui eſt d'une part eſt égal à l'aigu qui eſt de l'autre part, & par conſequent l'obtus à l'obtus.



Car ces angles alternes ont pour rayon cette même ligne oblique *b c*, & pour ſinus l'un la perpendiculaire de *b*, ſur la parallele *x*, & l'autre la perpendiculaire de *c*, ſur la parallele *z*. Or ces deux perpendiculaires ſont égales. Donc par 45. S.

II. COROLLAIRE.

LIII. LES obliques égales entre les mêmes paralleles font les angles égaux: par la même raiſon.

III. COROLLAIRE.

LIV. LES obliques entre paralleles qui font les angles égaux ſont égales, S. 47.

SCD LYON 1

IV. COROLLAIRE.

LES plus courtes lignes entre paralleles sont les plus grands angles; par le 2 Theoreme. 2. Cas. LV.

V. COROLLAIRE.

QUAND des lignes sont enfermées entre differentes lignes paralleles, on peut y considerer trois égalitez. LVI.

1. L'égalité des obliques.

2. L'égalité des angles.

3. L'égalité de la distance entre les unes & les autres de ces paralleles, ce qui fait que cette distance estant égale, les perpendiculaires entre ces differentes paralleles sont égales.

Or deux de ces égalitez estant données donnent la troisiéme.

1. CAS. Si les obliques sont égales, & les angles qu'elles font entre leurs paralleles égaux, les unes & les autres paralleles sont également distantes. Car ce sont des angles qui sont égaux, & qui ont les rayons égaux (sçavoir ces obliques.) Donc leurs sinus sont égaux, par 46. S.

Or ils ont pour sinus les perpendiculaires entre leurs paralleles.

Donc ces perpendiculaires sont égales.

2. CAS. Si les obliques sont égales, & les paralleles de part & d'autre également distantes, les angles seront égaux, par 45. S.

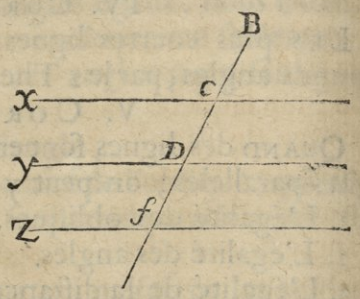
3. CAS. Si les paralleles de part & d'autre sont également distantes, & que les angles soient égaux, les obliques sont égales, 47. S.

VI. COROLLAIRE.

LA même ligne coupant obliquement plusieurs paralleles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est à dire qu'elle fait sur toutes les angles aigus égaux. C'est une suitte du premier Corollaire & de 13. S. LVII.

Soient trois lignes paralleles x, y, z, coupées par la ligne B en c, en d, en f; l'angle aigu vers c au dessus d'x est égal à l'angle aigu de dessous, parce qu'ils sont opposez au sommet; & l'angle aigu de dessous est égal à

l'angle aigu vers *d*, au dessus d'*y*, parce qu'ils sont alternes, & ce dernier est égal à l'aigu de dessous *y*, parce qu'ils sont opposez au sommet. Et ce dernier à l'aigu vers *f*, au dessus de *z*, parce qu'ils sont alternes, & ainsi des autres. Donc tous les angles aigus que fait une même ligne sur diverses paralleles qu'elles coupe sont égaux. Et de là il s'ensuit, que les obtus sont égaux aussi, parce que les aigus sont les complemens des obtus.



VII. Corollaire.

LVIII. Plusieurs paralleles estant également distantes les unes des autres, c'est à dire la 1 de la 2, & la 2 de la 3, & la 3 de la 4, &c.

Si une même ligne les coupe toutes, toutes les portions de cette ligne compriſes entre deux de ces paralleles sont égales.

Car tous les angles aigus que fait cette ligne sur ces paralleles sont égaux. Et les sinus de ces angles, qui sont les perpendiculaires entre chaques deux paralleles, sont égaux aussi par l'hypothese.

Donc les rayons de ces angles qui sont les portions de cette ligne compriſes entre chaques deux paralleles sont égales.

VIII. Corollaire.

LIX. Lors que deux lignes sont menées d'un même point sur une autre ligne, c'est comme si ces lignes estoient entre paralleles.

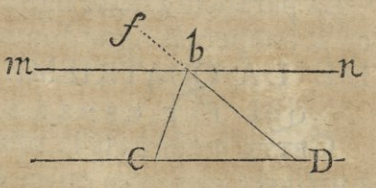
Car on peut par ce point tirer une parallele à la ligne que ces deux lignes coupent.

IX. Corollaire.

LX. Tout angle plus les deux angles que font ces costez sur la base sont égaux à deux droits.

Soient *b c* & *b d* les costez d'un angle, & *c d* la base, par

par le precedent Corollaire, on peut mener par le point *b* la ligne *m n*, parallele à la baſe, ſur laquelle parallele les coſtez de l'angle donné feront de nouveaux angles autour du donné, ſçavoir l'angle *m b c*, & *n b d*. Or ces trois angles ſont égaux à deux droits, par 15. S. Et chacun des deux qui ſont à coſté de l'angle donné, eſt égal à un de la baſe, ſçavoir à ſon alterne, par 51. S.



Donc les deux de la baſe plus l'angle donné ſont égaux à deux droits.

X. Corollaire.

LXI. Si on prolonge un coſté d'un angle vers le ſommet de l'angle, comme ſi on prolongeoit *d b* juſques en *f*, l'angle que fait ce coſté prolongé ſur l'autre coſté, comme l'angle *f b c*, eſt égal aux deux angles ſur la baſe. Car cet angle qui eſt appellé exterieur plus l'angle du ſommet, vallent deux droits. Or les deux angles ſur la baſe, plus l'angle du ſommet vallent auſſi deux droits. Oſtant donc l'angle du ſommet qui eſt commun, l'angle exterieur ſera égal aux deux angles ſur la baſe.

Ce ſera la même choſe ſi on prolonge la baſe. Car l'angle exterieur que fera la baſe prolongée ſur un coſté, ſera égal aux deux interieurs oppoſez; c'eſt à dire à l'angle que fait l'autre coſté ſur la baſe plus l'angle du ſommet.

XI. Corollaire.

LXII. Deux angles ſont égaux, quand les angles que les côtez de l'un font ſur ſa baſe, ſont égaux à ceux que les côtez de l'autre font ſur la ſienne.

XII. Corollaire.

III. Probleme.

LXIII. D'un point donné hors une ligne donnée, mener une ligne qui faſſe ſur la donnée un angle donné.

D'un point quelconque de la ligne donnée en élever une qui faſſe ſur la donnée l'angle donné (par le 2e Probleme. 33.)

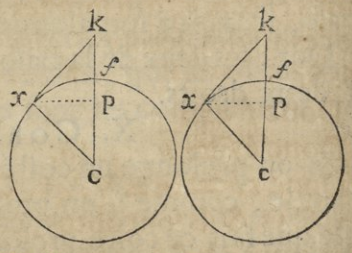
La parallele à cette ligne qui passera par le point donné & coupera la ligne donnée, satisfera au Probleme.

DE LA QUATRIEME MESURE DE L'ANGLE QUI EST GENERALEMENT LA BASE.

CETTE mesure est la plus imparfaite, & ne peut servir à mesurer les angles qu'en cas que les costez de deux angles non isosceles soient égaux chacun à chacun, ce qui fera deux Theoremes.

I. THEOREME.

LXIII. LORS que deux angles non isosceles sont équilateres entr'eux; c'est à dire que chacun des costez de l'un est égal à chacun des côtez de l'autre; si la base est égale à la base, ces angles sont égaux.



C'est ce qui se prouve ainsi. Ou l'on peut faire tomber une perpendiculaire de l'extremité de l'un des costez de ces angles sur l'autre côté; ou on ne le peut, comme lors qu'ils sont obtus.

1. CAS. Si on le peut (comme lorsque les angles sont *k c x*) les perperpendiculaires *x p* seront égales, par V. 57.

Or ces perpendiculaires sont les sinus de ces angles qui ont aussi le rayon égal, sçavoir *c x*. Donc ils sont égaux, par 45. S.

2. CAS. Si on ne le peut (comme si ces angles estoient *c x k* des mêmes figures) alors la perpendiculaire *x p* menée du sommet même de chacun des angles, feroit voir que les deux angles que les costez de chacun de ces angles obtus font sur leur base, sont égaux chacun à chacun (c'est à dire l'angle *k* égal à l'angle *k*, & l'angle *c*, à l'angle *c*.) Donc les angles obtus *k c x* seront égaux, par 62. S.

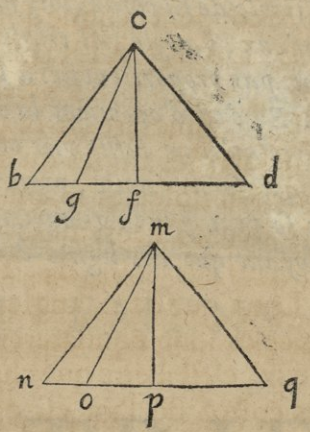
II. THEOREME.

LXIV. DEUX angles égaux estant équilateres entr'eux ont la base égale.

Ces angles égaux que l'on suppose équilateres entre eux sont,

SCD LYON 1

1. Ou droits.
2. Ou aigus.
3. Ou obtus.



1. CAS. S'ils sont droits, comme *b f c*, & *m n p*, ils ont les bases *b c* & *m n* égales, par V. 48.

2. CAS. S'ils sont aigus, comme *b d c*, *n q m*; les perpendiculaires *c f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales, par 56. S.

Donc *f d* = *p q*. V. 48.
Donc *b f* = *n p*. I. 19.
Donc *c b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demonstrer.

3. CAS. S'ils sont obtus, comme *b g c*, & *n o m*; les angles aigus *c g f*, *m o p*, complemens de ces obtus, seront égaux.

Donc les perpendiculaires *c f* & *m p*, qui sont les sinus de ces angles, seront égales par S. 56.

Donc *g f* = *o p*.
Donc *b f* = *n p*. I. 18.
Donc *c b* = *m n*. V. 48. Ce qu'il falloit demonstrer.

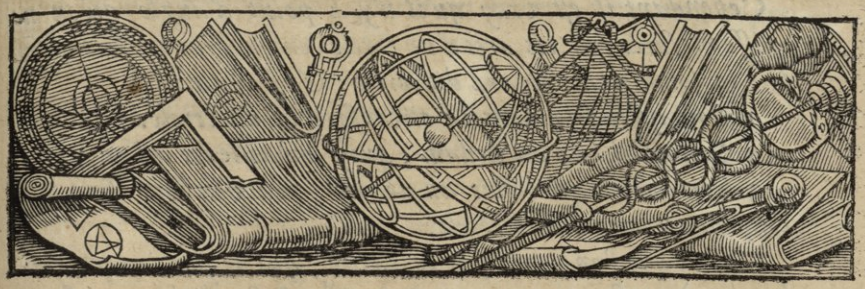
OBSERVATION,

Touchant la comparaison de la premiere mesure des angles avec ces trois dernieres.

Nous avons déja dit qu'il n'y avoit que l'arc qui fust la mesure parfaite & naturelle de l'angle. Mais pour le mieux voir, il faut remarquer que les trois autres mesures montrent bien si un angle est égal à un angle, ou entre des angles inégaux quel est le plus grand ou quel est le plus petit. Mais il n'y a que l'arc qui donne la veritable proportion entre les angles inégaux. Car il est certain que si l'arc est triple ou quadruple, ou quintuple de l'arc, l'angle sera aussi triple, quadruple ou quintuple de l'angle. Mais cela ne se peut pas dire des trois autres mesures, estant faux que si la corde

eſt triple de la corde, lors même que les angles ſont équilateres entr'eux, l'angle ſoit triple de l'angle, parce que les cordes ne ſont pas proportionelles à leurs arcs, comme il a eſté dit VII. 21. *Et c'eſt d'où vient la difficulté de la triſection de l'angle, parce qu'il ne ſuffit pas pour cela de couper la corde en trois: ce qui ſeroit facile, mais il faut couper l'arc en trois; ce qui ne ſe peut par la geometrie ordinaire, c'eſt à dire en n'y employant que des lignes droites & circulaires.*

SCD LYON 1



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE NEUVIE'ME.

Des angles qui ont leur ſommet hors le centre du Cercle, dont les Arcs ne laiſſent pas de les meſurer.

IL eſt bien aiſé de reconnoiſtre que les angles ne peuvent avoir pour veritable meſure que les arcs d'un cercle, & que toutes les autres meſures, comme les cordes, les ſinus, & les baſes, ne peuvent eſtre que ſubſidiaires de celle-là, & que même elles ne les meſurent qu'imparfaitement. I.

Mais on a creu juſques icy qu'on ne pouvoit employer pour meſurer un angle que les arcs du cercle au centre duquel eſt le ſommet de cet angle. Et ainſi arrivant rarement que deux angles que l'on compare ayent leur ſommet au centre du même cercle, on ne pouvoit preſque jamais employer la meſure des arcs dans la comparaiſon de pluſieurs angles, & on eſtoit obligé d'avoir recours à de longs circuits par la conference de pluſieurs triangles, ce qui obligeoit à conſiderer tant de lignes, qu'il eſtoit impoſſible que l'imagination n'en fuſt extrémement fatiquée, qui eſt une des choſes qu'on doit éviter autant que l'on peut dans l'étude de la Geometrie.

Cependant il eſt vray qu'il n'y a point d'angle qu'on ne puiſſe meſurer par les arcs d'un cercle, en quelque endroit qu'en ſoit le ſommet au regard du cercle : C'eſt à dire,

1. *Soit qu'il ſoit dans la circonference du cercle.*

2. *Soit qu'il ſoit au dedans, quoy qu'ailleurs qu'au centre.*

3. *Soit même qu'il ſoit au dehors, pourveu que ſes coſtez coupent ou touchent le cercle.*

C'eſt ce que l'on verra par ce Livre, qui ne ſervira pas ſeulement à meſurer avec une merveilleuſe facilité toutes ſortes d'angles, mais donnera auſſi par là de grandes ouvertures pour trouver beaucoup de nouvelles choſes touchant la proportion des lignes.

Mais pour rendre les preuves plus courtes, il eſt bon de ſuppoſer quelques Lemmes, ou clairs d'eux mêmes, ou demonſtrez dans le Livre precedent, afin d'y renvoyer quand on en aura beſoin.

I. LEMME. DEFINITION.

III. LORSQUE dans toutes ces ſortes d'angles on dit qu'un tel arc du cercle auquel ils ont rapport leur ſert de meſure, cela veut dire, que ſi ce même angle eſtoit au centre du cercle, il auroit cet arc, ou un autre qui luy ſeroit égal, pour ſa meſure. Ou bien cela veut dire, qu'un angle qui ſeroit au centre de ce cercle, & qui auroit cet arc pour meſure, ſeroit égal à l'angle hors le centre qu'on dit avoir cet arc pour ſa meſure.

Et de là il s'enſuit, que dans ces ſortes d'angles, auſſi bien que dans ceux qui ſont au centre du cercle, deux angles ſont égaux quand ils ont pour meſure des arcs égaux, ou abſolument quand ce ſont des arcs du même cercle, ou de cercles égaux ; ou proportionellement quand ce ſont des arcs de cercles inégaux : l'arc du petit ayant la même raiſon à ſa circonference, que l'arc du grand à la ſienne : comme ſi l'un & l'autre eſtoit la dixiéme partie de ſa circonference, c'eſt à dire de 36. degrez.

II. LEMME.

IV. TOUT angle qui a pour meſure la MOITIE' { de la demy-circonference eſt *Droit.* / d'un arc moindre que la demy-c. *Aigu.* / d'un arc plus grand que la demy-c. *Obtus.*

SCD LYON 1

Et de là il s'enſuit, que quand on dit que deux angles, ou trois angles ſont égaux à deux droits, cela veut dire que ces deux angles, ou ces trois angles pris enſemble ont pour meſure la demy-circonference, c'eſt à dire 180. degrez.

Et quand on dit que deux angles ſont égaux à un droit, cela veut dire que ces deux angles pris enſemble ont pour meſure la moitié de la demy-circonference, c'eſt à dire 90. degrez.

III. LEMME.

QUAND un tout eſt partagé en pluſieurs portions, comme *A* en *b*, *c*, *d*; comme ces trois portions enſemble font le tout, les trois moitiez de ces portions, c'eſt à dire une moitié de chacune, font toutes enſemble la moitié du tout, de ſorte que ces trois expreſſions ſont la même choſe. V.

La moitié du tout.

La moitié des trois portions que comprend le tout.

Les trois moitiez de ces portions, c'eſt à dire une de chacune, ce qui s'entend toûjours, quoy qu'on ne le marque pas.

Et ainſi ſuppoſant qu'*A* ſoit une circonference, & que *b*, *c*, *d*, ſoient trois arcs qui la comprennent toute,

$\frac{1}{2}$ de l'arc *b*, $\frac{1}{2}$ de l'arc *c*, $\frac{1}{2}$ de l'arc *d* } ſont égales priſes enſemble à la $\frac{1}{2}$ de la circonference, c'eſt à dire à la demy-circonference, ou à 180. degrez.

Et ſuppoſant qu'*A* ſoit une demy-circonference, & que *b* & *c* ſoient deux arcs qui la comprennent, deux moitiez de ces arcs, une de chacun, valent la moitié de la demy-circonference. C'eſt à dire 90. degrez.

Et alors on peut exprimer la moitié de l'un de ces arcs en deux manieres, ou par ſon propre nom, comme la $\frac{1}{2}$ d'un tel arc, ou par la moitié du tout dont il eſt portion moins la moitié de l'autre arc.

Ainſi eſtant donné une demy-circonference qui comprend les arcs *b* & *c*, la $\frac{1}{2}$ de l'arc *b* eſt la même choſe que la moitié de la demy-circonference moins la $\frac{1}{2}$ de l'arc *c*.

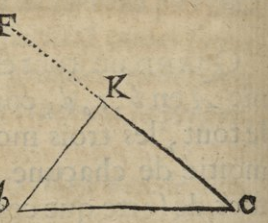
Enfin ſi un tout a deux portions, la moitié de la plus grande moins la moitié de la plus petite eſt la même cho-

SCD LYON 1

se que la moitié du tout moins la petite entiere. Car si le tout a pour portions *b* & *c*, la moitié du tout est égale à la moitié de *b* plus la moitié de *c*. Il faut donc oster deux fois la moitié de *c* de la moitié du tout, pour rendre la moitié du tout égale à la moitié de *b*, dont on auroit osté la moitié de *c*.

IV. Lemme.

VI. Enfin il se faut souvenir,



1. Que tout angle plus les deux que font ses costez sur sa base sont égaux à deux droits.

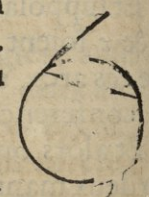
2. Que les deux angles sur la base d'un angle droit sont égaux à un droit.

3. Que si on prolonge un costé de l'angle vers le sommet, le nouvel angle que fait ce costé prolongé sur l'autre costé est égal aux deux angles qui sont sur la base du premier angle. Ainsi l'angle *f k b* est égal aux angles vers *b* & vers *c*.

La premiere sorte d'angles dont le sommet est en la circonference d'un Cercle donné.

Division.

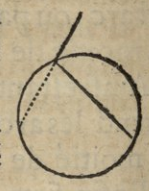
VII. Le sommet d'un angle ne se peut terminer en la circonference d'un cercle qu'en 3 manieres.



1. Quand l'un des costez est au dedans du cercle & l'autre au dehors.

2. Quand tous les deux sont au dedans.

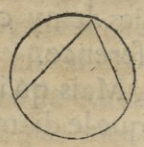
3. Quand ils sont tous deux au dehors du cercle. Mais parce que la premiere se subdivise en deux, on peut conter 4. genres de cette sorte d'angles.



Le 1. Quand l'un des côtez est au dedans du cercle, & en est une corde, & que l'autre costé qui est au dehors touche le cercle.

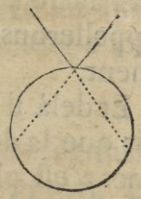
Le 2. Quand l'un des costez estant aussi au dedans du cercle

cercle celuy qui eſt au dehors coupe le cercle, & entre dans le cercle lorſqu'on le prolonge de ce coſté-là: ou que ce n'eſt même qu'une corde prolongée hors le cercle.



Le 3. Quand tous les deux coſtez ſont au dedans du cercle, & en ſont deux cordes.

Le 4. Quand ils ſont tous deux au dehors.



Mais parce qu'alors cette ſorte d'angle ne peut avoir de rapport au cercle, que parce qu'il ſeroit égal à un angle qu'on luy oppoſeroit au ſommet, qui ſeroit neceſſairement ou du 1 ou du 3 genre, il ne ſera point neceſſaire de rien dire de ce 4 genre, puiſqu'on en pourra juger par les autres.

Et ainſi il ne reſtera qu'à donner la meſure des trois premiers; ce que nous ferons par trois Theoremes tres clairs & tres-faciles, & dont même les deux derniers ne ſeront qu'une ſuite du premier: & en même temps ſi feconds pour parler ainſi, qu'un tres grand nombre de propoſitions qui ne ſe prouvent dans la Geometrie ordinaire que par des voyes tres obſcures & tres embaraſſées s'en deduiront ſans peine, comme n'en eſtant que de ſimples Corollaires.

Mais pour cela il eſt neceſſaire de marquer la maniere dont on exprime les angles du premier & du troiſiéme genre dans la Geometrie ordinaire. Car pour celuy du deuxiéme, perſonne ne les a encore conſiderez.

Premier Avertissement.

Definitions.

L'Angle du premier genre, qui eſt celuy qui eſt compris entre une corde & une tangente, eſt appellé ordinairement *angle du ſegment*, *angulus ſegmenti*. VIII.

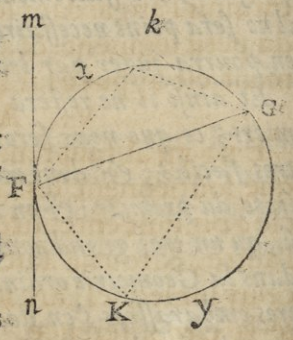
Et l'angle du 3e genre qui eſt compris entre deux cordes qui ſe terminent d'une part à un même point de la circonference, *l'angle dans le ſegment*, *angulus in ſegmento*. Ce que pour mieux entendre, il faut remarquer, que toute corde partage le cercle en deux portions, qui ſont appellées *ſegmens*, & que ces portions ou ſegmens ſont égaux quand cette corde eſt un diametre, & alors on les appelle

des demy cercles, & l'arc de chacun eſt une demy-circonference.

Mais qu'ils ſont inégaux, quand c'eſt une autre corde que le diametre, l'un eſtant plus petit que le demy-cercle, & l'autre plus grand. De ſorte que pour abreger nous appellerons l'un le petit ſegment, & l'autre le grand ſegment.

Et delà il eſt clair que l'arc du petit ſegment eſt plus petit que la demy-circonference, & que l'arc du grand ſegment eſt plus grand que la demy-circonference.

Cela ſuppoſé, ſi on tire la corde *F G*, & au point *F* la tangente *m n*; *E x G* eſt le petit ſegmenr, & *F y G* le grand ſegment.



Et l'angle *G F m*, l'angle du petit ſegment; parce que la tangente *m F* eſt du coſté de ce ſegment-là.

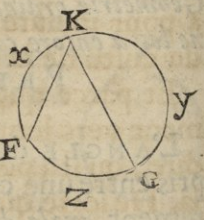
Et l'angle *G Fn*, l'angle du grand ſegment.

Mais l'angle *F k G* eſt l'angle dans le petit ſegment.

Et l'angle *F K G*, l'angle dans le grand ſegment.

II. AVERTISSEMENT.

IX. ON peut encore remarquer qu'au regard de l'angle du ſegment, il faut que la corde qui diviſe les deux ſegmens ſoit décrite, parce qu'elle fait l'un des coſtez de l'angle. Mais que cela n'eſt pas neceſſaire au regard de l'angle dans le ſegment, parce que la corde n'eſt que la baſe de cet angle, & qu'elle eſt ſuffiſamment marquée par les 2 points de la circonference auſquels aboutiſſent les deux coſtez de l'angle, comme l'angle *F k G*, eſt ſuffiſamment marqué, quoy que la ligne *F G* ne ſoit que ſous-entenduë & non tracée.



III. AVERTISSEMENT.

X. L'ANGLE dans le ſegment ſe peut exprimer en deux

manieres ; ou par raport au ſegment dans lequel il eſt inſcrit, ſon ſommet ſe trouvant dans l'arc de ce ſegment ; ou par raport à l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Et c'eſt en cette maniere qu'il vaut mieux l'exprimer, quand la corde qui joindroit les extrémitez de ſes coſtez n'eſt pas marquée ; comme dans l'angle *FkG*, qui eſt appuyé ſur l'arc *FzG* ; & alors on dit ſimplement que c'eſt un angle inſcrit dans le cercle, ſans parler de ſegment.

IV. Avertissement.

Il eſt aiſé de voir que l'angle inſcrit dans un ſegment eſt toûjours appuyé ſur l'arc du ſegment oppoſé. Et qu'ainſi l'angle dans le grand ſegment eſt appuyé ſur l'arc du petit ſegment : & au contraire l'angle dans le petit ſegment eſt appuyé ſur l'arc du grand. XI.

V. Avertissement.

Enfin il faut remarquer, que quand on parle des arcs que ſoûtiennent les coſtez d'un angle inſcrit dans le cercle, on doit entendre les deux qui ſont à coſté l'un de l'autre, & tout-à fait ſeparez l'un de l'autre, & qui avec celuy ſur lequel l'arc inſcrit eſt appuyé comprennent toute la circonference. XII.

PREMIER THEOREME,

fondamental de tous les autres.

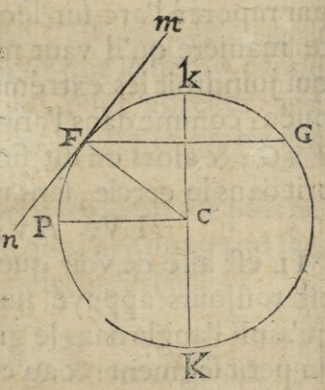
Tout angle compris entre une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par cette corde du coſté de la tangente. XIII.

Et parce que cet angle eſt auſſi appellé l'angle du ſegment vers lequel eſt cette tangente, ſelon cela on doit dire, qu'il a pour meſure la moitié de l'arc de ce ſegment-là. De ſorte que ſi c'eſt l'angle du petit ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment ; & ſi c'eſt l'angle du grand ſegment, il a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Ce Theoreme eſt le fondement de la meſure des angles par des arcs de cercles hors le centre deſquels eſt leur ſommet ; & la preuve en eſt tres-facile.

Soit la corde *FG* & la ligne *m n* qui touche le cercle

dont le centre eſt au point *c*, l'angle *m F G* eſt l'angle du petit ſegment, & *n F G* l'angle du grand.



Soit tiré le diametre *k K* perpendiculaire à *F G*; & le rayon *c F*, & *P c* perpendiculaire au diametre *K k*, & par conſequent parallele à *F G*, le diametre *k K* coupera par la moitié les arcs du grand & du petit ſegment. D'où il s'enſuit que l'angle au centre *F c k* a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment. Et que l'angle au contraire *F c K* a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

De ſorte que le Theoreme ſera demonſtré (par le 1er Lemme) ſi on peut faire voir, que l'angle du petit ſegment *m F G* eſt égal à l'angle au centre *F c k*. Or cela eſt facile. Car *c P* & *F G* eſtant paralleles, les angles alternes que fait ſur l'une & ſur l'autre le rayon de l'atouchement (c'eſt à dire les angles *P c F*, & *c F G*) ſont égaux.

Or l'angle *m F c* (qui comprend l'angle du ſegment & l'angle *c F G*) eſt droit: & par conſequent égal à l'angle *P c k*, qui eſt droit auſſi, & qui comprend les deux angles *F c k* & *P c F*. Donc oſtant de part & d'autre les angles *c F G* & *P c F* (que l'on vient de faire voir eſtre égaux) l'angle du ſegment demeurera égal à l'angle *F c k*, qui a pour meſure la moitié de l'arc du petit ſegment.

Donc l'angle du petit ſegment *m F G*, a auſſi pour meſure la moitié de cet arc du petit ſegment. Ce qu'il falloit demonſtrer.

On fera voir de même que l'angle du grand ſegment *n F G* eſt égal à l'angle au centre *F c K*, qui a pour meſure la moitié de l'arc du grand ſegment.

Car l'angle du grand ſegment comprend l'angle droit *n F c* & l'angle *c F G*. Or l'angle au centre *F c K* comprend auſſi l'angle droit *P c K* & l'angle *P c F*.

Or les angles *c F G* & *P c F* ſont égaux, comme il vient

d'estre dit. Donc estant ajoûtez chacun à un droit, ils rendent égaux l'angle du segment & l'angle au centre, qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment.

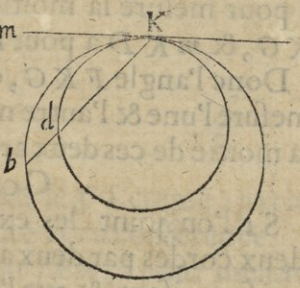
Donc (par le 1 Lemme) l'angle du grand segment a pour mesure la moitié du grand segment.

I. Corollaire.

L'angle du demy-cercle est droit. XIV.
Celuy du petit segment est aigu.
Celuy du grand, obtus.
Cela est clair par le 2e Lemme.

II. Corollaire.

Lorsque deux cercles dont l'un est dans l'autre se touchent, XV.



toutes les cordes menées du point de l'atttouchement à la circonference du plus grand cercle soûtiennent des arcs proportionellement égaux dans les deux cercles: c'est à dire que la ligne entiere (*k b*) soûtient dans le grand cercle un arc égal à celuy que soûtient dans le petit (*k d*) partie de cette même ligne.

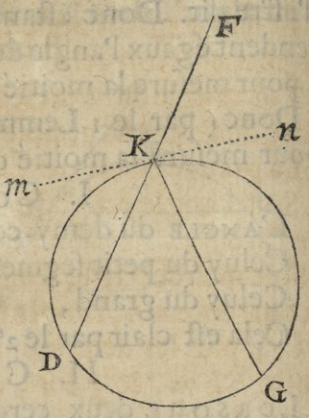
Car les angles *m k b* & *m k d* sont le même angle. Or l'un a pour mesure la moitié de l'arc *k b*, & l'autre la moitié de l'arc *k d*. Donc ces deux arcs sont proportionnellement égaux.

II. Theoreme.

Tout angle dont le sommet est en la circonference, & XVI. qui est compris entre une corde & la partie d'une autre corde prolongée hors le cercle du costé qu'elle est hors le cercle, a pour mesure la moitié des deux arcs qui sont à costé du sommet de cet angle, & qui sont soûtenus par les deux cordes, dont l'une est le costé de l'angle, & l'autre en fait l'autre costé par sa partie prolongée hors le cercle.

Soient les deux cordes *K D* & *K G*, dont *K G* soit prolongée en *F* hors le cercle; je dis que l'angle *F K G* a

pour mesure la moitié des deux arcs KD & KG.



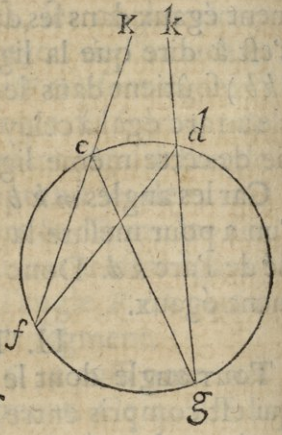
Car soit tirée par le point K la tangente mn, l'angle FKG comprend les deux angles FKn & nKG. Or l'angle FKn est égal à l'angle mKD, parce qu'il luy est opposé au sommet. Donc l'angle FKG est égal aux deux angles nKG & mKD.

Or par le 1er Theoreme nKG a pour mesure la moitié de l'arc KG, & mKD a pour mesure la moitié de l'arc KD.

Donc l'angle FKG, qui est égal à tous les deux, a pour mesure l'une & l'autre moitié de ces deux arcs. C'est à dire la moitié de ces deux arcs, par le troisiéme Lemme.

COROLLAIRE.

XVII. Si l'on joint les extremitez de deux cordes par deux autres cordes qui se croisent, & que l'on prolonge hors le cercle les deux premieres cordes, les angles que le prolongement de chacune fera sur les cordes qui se croisent, seront égaux.



Soient les deux premieres cordes cf & dg.

Les deux qui se croisent, fd & gc.

Les prolongemens, Kc & kd.

Je dis que les angles Kcg & kdf sont égaux.

Car par le precedent Theoreme l'un & l'autre a pour mesure la moitié des arcs fc, cd, dg.

III. THEOREME.

XVIII. TOUT angle inscrit au cercle, c'est à dire compris entre deux cordes qui ne se joignent qu'en la circonference, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.

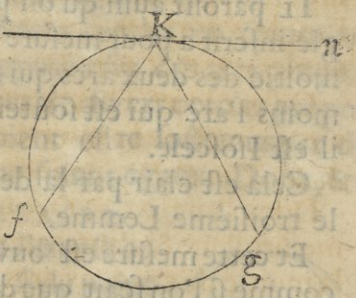
SCD LYON 1

Et parce qu'on appelle auſſi ces angles (angles dans le ſegment) ſelon cela.

Tout angle dans un ſegment a pour meſure la moitié de l'arc du ſegment oppoſé. Voyez le 4 Avertiſſement.

La preuve en eſt tres facile par le premier Theoreme.

Soit l'angle *f k g*. Je dis qu'il a pour meſure la moitié de l'arc *f g*.

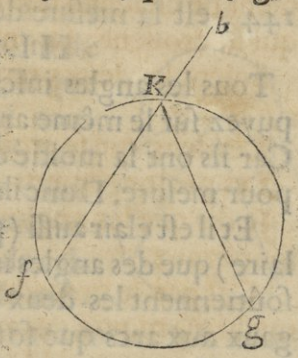


Soit menée par le ſommet *k* la tangente *m n*, l'angle inſcrit *f k g*, plus les deux qui ſont à coſté *f k m*, & *g k n*, valent deux droits.

Donc ils ont pour meſure la demy-circonference, par le 2e Lemme.

Donc ils ont pour meſure les trois moitiez des arcs *f g*, *k f*, *k g* (par le 3e Lemme) parce que ces trois arcs comprennent toute la circonference.

Or l'un de ces trois angles, ſçavoir *f k m*, a pour meſure la moitié de l'arc *k f*; & l'autre, ſçavoir *g k n*, a pour meſure la moitié de l'arc *k g*. Donc il reſte pour la meſure du 3e, qui eſt l'angle inſcrit, la moitié du 3e arc, qui eſt *f g*.



On peut encore prouver la meſme choſe par le 2 Theoreme. Car ſi on prolonge *f k* juſques à *b*, les angles *f k g* & *g k b* valent deux droits, & par conſequent ont pour meſure la moitié de la circonference, & par conſequent auſſi les trois moitiez des trois arcs *k f*, *k g*, *f g*.

Or l'angle *b k g* a pour ſa meſure la moitié des deux arcs *k f* & *k g*, par le deuxiéme Theoreme.

Reſte donc pour la meſure de l'angle inſcrit la moitié du troiſiéme arc, qui eſt *f g*.

I. COROLLAIRE.

IL paroiſt par là, que ſi on oſte de la circonference en- XIX.

tiere, c'eſt à dire de 360. degrez, les deux arcs que ſoûtiennent les coſtez de l'angle inſcrit, la moitié de ce qui reſtera ſera la meſure de l'angle inſcrit, comme ſi l'un de ces arcs eſt de 100 degrez, & l'autre de 44, oſtant 144 de 360, reſtera 216, dont la moitié eſt 108 pour la meſure de l'angle inſcrit.

II. Corollaire.

XX. Il paroiſt auſſi qu'on peut dire encore: Que tout angle inſcrit a pour meſure la demy-circonference moins la moitié des deux arcs qui ſont ſoûtenus par ces coſtez: ou moins l'arc qui eſt ſoûtenu par l'un de ſes coſtez quand il eſt Iſoſcele.

Cela eſt clair par la demonſtration precedente, & par le troiſiéme Lemme.

Et cette meſure eſt ſouvent plus commode que l'autre, comme ſi l'on ſçait que des arcs que ſoûtiennent les côtez de l'angle inſcrit l'un eſt de 100 degrez, & l'autre de 44, en oſtant 50 & 22, qui font 72, de 180, ce qui reſtera qui eſt 108 eſt la meſure de cet angle inſcrit.

Et cela eſt encore plus facile, quand l'angle inſcrit eſt Iſoſcele, comme ſi l'un & l'autre de ſes coſtez ſoûtient un arc de 36 degrez: car oſtant 36 de 180, ce qui reſte, qui eſt 144, eſt la meſure de cet angle inſcrit.

III. Corollaire.

XXI. Tous les angles inſcrits dans le même ſegment, ou appuyez ſur le même arc, ou ſur des arcs égaux, ſont égaux. Car ils ont la moitié du même arc ou de deux arcs égaux pour meſure. Donc ils ſont égaux par le premier Lemme.

Et il eſt clair auſſi (par le premier & le deuxiéme Corollaire) que des angles inſcrits ſont égaux quand les arcs que ſoûtiennent les deux coſtez de l'un pris enſemble ſont égaux aux arcs que ſoûtiennent les deux côtez de l'autre, & qu'ils ne peuvent eſtre égaux que cela ne ſoit.

Que ſi au contraire des angles inſcrits ſont ſuppoſez égaux, ils faut qu'ils ſoient appuyez ſur des arcs égaux, ou abſolument, ſi c'eſt dans le même cercle ou en des cercles égaux que ces angles ſoient inſcrits; ou proportionellement,

SCD LYON 1

ment, si c'est dans des cercles inégaux. Ce qu'il faut aussi supposer dans la premiere partie de ce Corollaire. Car les arcs proportionnellement égaux sont autant pour l'égalité des angles que s'ils l'estoient.

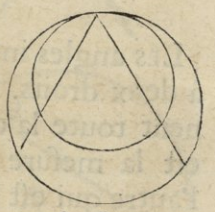
IV. COROLLAIRE.

Si deux angles inscrits en divers cercles sont égaux, & qu'ils soient soûtenus par des cordes égales, les cercles dans lesquels ils sont inscrits sont égaux. XXII.

Car les angles inscrits en divers cercles ne sçauroient estre égaux, qu'ils ne soient appuyez sur des arcs proportionellement égaux, & des arcs de divers cercles proportionellement égaux ne sçauroient estre soûtenus par des cordes égales que les cercles ne soient égaux. Donc, &c.

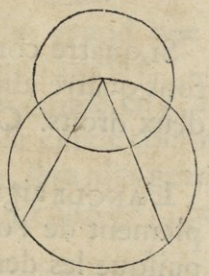
V. COROLLAIRE.

LORSQUE deux cercles dont l'un est au dedans de l'autre se touchent, si du point de l'attouchement on mene deux lignes jusques à la circonference du plus grand, les arcs de l'une & de l'autre circonference compris entre ces deux lignes seront proportionnellement égaux. Car le même angle sera mesuré par la moitié de l'un & de l'autre de ces arcs. XXIII.



VI. COROLLAIRE.

Si un cercle a pour centre un point de la circonference d'un autre cercle, & que de ce point on tire deux lignes qui coupent l'une & l'autre circonference, l'arc de celle qui a ce point pour centre compris entre ces deux lignes est proportionnellement égal à la moitié de l'arc de celle dans laquelle est ce point. Car le même angle a pour mesure le premier arc entier & la moitié de l'autre. XXIV.



VII. COROLLAIRE.

Si l'angle inscrit & l'angle au centre sont appuyez sur le même arc, l'angle au centre est double de l'angle inscrit. Car l'inscrit a pour mesure la moitié de l'arc, qui entier XXV.

est la mesure de l'angle au centre.

VIII. COROLLAIRE.

XXVI. Tous les angles dans un segment sont égaux à l'angle du segment opposé. Et ainsi l'angle dans le grand segment est égal à l'angle du petit segment ; & l'angle dans le petit segment égal à l'angle du grand.

Car l'angle du grand segment est appuyé sur l'arc du petit. Donc il a pour mesure la moitié de l'arc du petit, qui est aussi la mesure de l'angle du petit segment.

IX. COROLLAIRE.

XXVII. L'ANGLE dans le demy-cercle est droit.
Dans le grand segment, aigu.
Dans le petit, obtus.
Cela est clair par le deuxiéme Lemme.

X. COROLLAIRE.

XXVIII. LES angles inscrits en deux segmens opposez sont égaux à deux droits. Car les arcs des deux segmens comprennent toute la circonference. Donc la moitié de l'un qui est la mesure de l'un de ces angles plus la moitié de l'autre qui est la mesure de l'autre angle, valent la demy-circonference (par le troisiéme Lemme.) Donc pris ensemble ils ont pour mesure la demy-circonference. Donc ils valent deux droits.

XI. COROLLAIRE.

XXIX. SI quatre cordes ne se joignent qu'aux extremitez, elles font quatre angles inscrits dont les opposez sont égaux à deux droits. C'est la même chose que le precedent.

XII. COROLLAIRE.

XXX. L'ANGLE aigu qui est dans le grand segment est le complement de l'obtus qui est dans le petit. Cela est clair, puisque les deux ensemble valent deux droits.

XIII. COROLLAIRE.

XXXI. LA moitié de la base d'un angle inscrit est son sinus, s'il est capable d'en avoir, c'est à dire s'il est aigu : ou de son complement, s'il est obtus. Car le sinus est la moitié de la corde du double de l'arc. Or la base d'un angle inscrit est la corde d'un arc qui est double de celuy qui mesure l'an-

SCD LYON 1

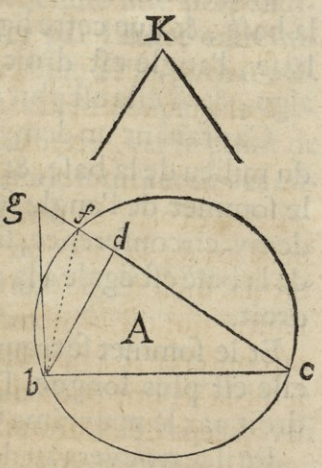
gle inscrit. Donc la moitié de cette corde est son sinus ; s'il est aigu : ou s'il est obtus, le sinus de son complement, c'est à dire de l'angle aigu qui estant inscrit dans le segment opposé a aussi cette corde pour sa base.

XIV. Corollaire.

On dit qu'un segment est capable d'un tel angle quand tous les angles dans ce segment sont égaux à cet angle.

Et quand cela est, il est impossible qu'un angle de cette grandeur ait pour base la corde de ce segment que son sommet ne se trouve dans un des points de l'arc du segment.

Supposons par exemple que le segment A soit capable de l'angle *k* ; je dis que tout angle égal à l'angle *k*, qui aura *b c* pour base, aura son sommet dans un des points de l'arc du segment A. XXXII.



Car s'il l'avoit au dedans du cercle comme en *d*, prolongeant *c d* jusques en *f*, point de la circonference, & tirant la ligne *b f*, l'angle *b f c* sera égal à l'angle *k* par l'hypotese. Or l'angle *b d c*, par le 4me Lemme, est égal à l'angle *b f c*. plus l'angle *f b d*. Donc il est plus grand que le seul angle *b f c*. Donc il est plus grand que l'angle *k*.

Et si le sommet estoit hors du segment comme en *g*, tirant une ligne de *b* au point où *c g* coupe le cercle comme à *f*, on prouvera que l'angle *b f c*, égal à *k*, sera plus grand que l'angle *b g c*, parce qu'il sera égal à *b g c* plus *g b f*, par le quatriéme Lemme.

Donc l'angle qui a *b c* pour base ne peut estre égal à *k* qui est l'angle dont le segment *A* est capable, qu'il n'ait son sommet dans la circonference, puisque s'il l'avoit au dedans il seroit plus grand, & s'il l'avoit au dehors il seroit plus petit.

SCD LYON 1

XV. Corollaire.

XXXIII. Si on fait le diametre d'un cercle de l'hypothenuſe d'un angle droit, le ſommet de cet angle droit ſe trouvera dans la circonference du cercle.

Car chaque demy-cercle eſt capable de cet angle droit. Donc par le Corollaire precedent, nul angle droit ne peut avoir pour l'hypothenuſe la corde du demy-cercle qui eſt le diametre, que ſon ſommet ne ſe trouve en un des points de la demy-circonference.

XVI. Corollaire.

XXXIV. Si du ſommet d'un angle on tire une ligne au milieu de la baſe, & que cette ligne ſoit égale à la moitié de cette baſe, l'angle eſt droit : mais ſi elle eſt plus longue, il eſt aigu ; & ſi elle eſt plus courte, il eſt obtus.

Car faiſant un demy-cercle qui ait pour centre le point du milieu de la baſe, & pour intervale la moitié de la baſe, le ſommet de l'angle ſe trouvera dans un des points de la demy-circonference, ſi la ligne tirée du ſommet au milieu de la baſe eſt égale à la moitié de la baſe. Donc l'angle ſera droit.

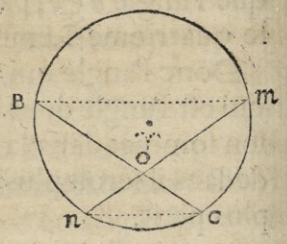
Et le ſommet ſe trouvera au dehors du demy-cercle, ſi elle eſt plus longue. Donc l'angle ſera plus petit qu'un droit par le neuviéme Corollaire, & par conſequent aigu.

Et il ſe trouvera au dedans du demy-cercle ſi elle eſt plus courte. Donc l'angle ſera plus grand qu'un droit par le neuviéme Corollaire. Donc obtus.

XVII. Corollaire.

XXXV. Quand deux cordes égales ſe coupent, chaque partie de l'une eſt égale à chaque partie de l'autre.

Soient les cordes égales *B c* & *m n*, qui ſe coupent en *o*, les arcs *b n c* & *m c n* ſont égaux, parce qu'ils ſont ſoûtenus par des cordes égales. Donc oſtant de ces deux arcs l'arc *n c*, qui leur eſt commun ; les arcs *B n* & *m c* demeurent égaux. Donc tirant la ligne *n c*, les angles inſcrits



SCD LYON 1

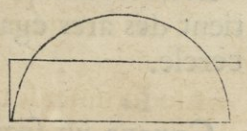
ncB & *cnm* sont égaux, parce qu'ils sont appuyez sur des arcs égaux. Donc les deux lignes *o n* & *o c* sont égales, parce qu'estant menées d'un même point elles font des angles égaux sur la même base. Et on prouvera de même en tirant la ligne *B m* que *o m* & *o B* sont égales. Donc chaque partie de l'une de ces cordes est égale à chaque partie de l'autre.

I. PROBLEME.

TROUVER l'angle droit dont on a l'hypothenuse & la distance du sommet à l'hypothenuse. XXXVI.

Elever de l'extremité de l'hypothenuse une perpendiculaire égale à cette distance, & tirer par l'autre extremité de cette perpendiculaire une parallele à l'hypothenuse.

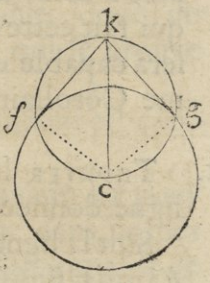
L'un des deux points où cette parallele coupera le cercle qui aura l'hypothenuse pour diametre, ou le point de l'attouchement, si elle le touche, sera le sommet de cet angle droit qui en determinera les costez.



Car la distance estant donnée de ce sommet à l'hypothenuse, il ne se peut trouver ailleurs (d'un costé) qu'en quelqu'un des points de cette parallele ; & parce que cet angle est supposé droit, il faut par le 11. Corollaire qu'il se trouve aussi en quelqu'un des points de la demy-circonference. Donc en un des points où elle la coupe, ou en celuy auquel elle le touche.

II. PROBLEME.

D'UN point hors le cercle tirer les tangentes au cercle & montrer qu'on n'en peut tirer que deux, & qu'elles sont égales. XXXVII



Soit *k* le point hors le cercle, & *c* le centre du cercle, joindre ces points par une ligne. Décrire le cercle qui aura cette ligne pour diametre & qui coupera le premier en deux points comme *f* & *g* ; *kf*, & *kg*, seront les deux tangentes tirées du

point *k* au premier cercle.

Car l'angle que l'une & l'autre fait avec le rayon du premier cercle eſt droit, parce qu'il eſt dans un demy-cercle.

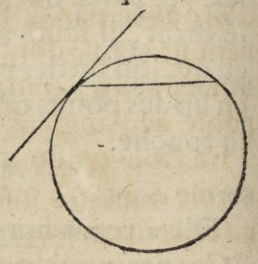
Et il ne peut y avoir que ces deux lignes tirées du point *k* qui touchent le cercle, parce que le ſommet de l'angle droit, qui doit avoir pour coſtez la tangente tirée de *k* & un rayon du premier cercle doit eſtre en un point commun aux circonferences des deux cercles, puiſqu'il doit eſtre dans la circonference du premier, à cauſe qu'un rayon du premier en eſt un des coſtez; & dans celle du ſecond, à cauſe que tous les angles droits qui ont le diametre du ſecond cercle pour hypothenuſe doivent avoir leur ſommet dans la circonference de ce ſecond cercle (par le treiziéme Corollaire.)

Or il n'y a que les poins *f* & *g* qui ſoient communs aux deux cercles. Donc on ne peut tirer de *k* que les deux tangentes *k f* & *k g*.

Et il eſt clair qu'elles ſont égales, puiſque chacune ſoûtient des arcs égaux dans la circonference du nouveau cercle.

III. Probleme.

XXXVIII. Couper un ſegment dans un cercle donné qui ſoit capable d'un angle donné.



Ayant tiré une tangente au cercle, la corde qui fera avec cette tangente au point de l'atouchement un angle égal à l'angle donné, ſatisfera au Probleme. Car le ſegment du coſté oppoſé à celuy de l'angle égal au donné qui fait cette corde avec la tangente, ſera capable de l'angle donné, par le cinquiéme & dixiéme Corollaire.

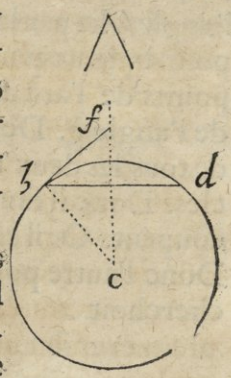
IV. Probleme.

XXXIX. Trouver le cercle dont le ſegment terminé par une ligne donnée ſoit capable d'un angle donné.

Soit la ligne donnée *b d*, & l'angle donné *k*; ſoit tirée *b f* qui faſſe ſur *b d* un angle égal à l'angle *k*.

SCD LYON 1

Soit élevé du point *b* une perpendiculaire à *b f*, & qu'il y ait une autre perpendiculaire à *b d* qui coupe *b d* par la moitié; le point *c*, où je suppose que ces deux perpendiculaires se rencontreront sera le centre du cercle, qui aura *c b* ou *c d* pour intervale, & pour tangente *f b*.



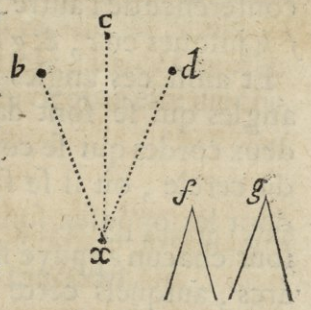
Donc le segment opposé à celuy vers lequel est *f b* sera capable d'un angle égal à l'angle *f b d*, par le 5e Corollaire, parceque l'un sera l'angle du segment, & l'autre l'angle dans le segment opposé.

V. Probleme.

XL. Connoissant qu'elle est la distance de trois points l'un de l'autre, comme de *b*, *c*, *d*, & ne sçachant d'un 4e comme *x*, sinon de quel costé il est, à l'égard de ces trois-là, & qu'elle est la grandeur de l'angle compris entre ces lignes *x b* & *x c*, & de celuy qui est compris entre ces lignes *x c* & *x d* trouver ce 4e point.

Les lignes *b c* & *c d* sont données par l'hypothese.

Et les angles donnez soient *f* & *g*.



Trouver par le Probleme precedent le cercle dont le segment terminé par *b c*, tourné vers *x*, soit capable de l'angle *f*.

Et trouver de mesme un autre cercle dont le segment terminé par *c d* & tourné vers *x*, soit capable de l'angle *g*.

Ces deux cercles se couperont en deux points, dont l'un sera *c* par la construction, & l'autre *x* : ce qui se prouve ainsi.

Les deux angles *b x c*, & *c x d*, dont la grandeur est connuë, ont leur sommet au même point.

Or par le 10me Corollaire l'angle égal à *f* ayant *b c* pour base ne peut avoir son sommet ailleurs que dans un des points de l'arc du segment qu'on a trouvé estre capable de

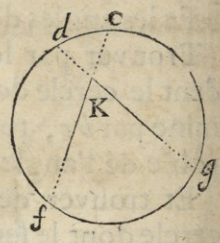
SCD LYON 1

l'angle *f*. Et par la même raison l'angle égal à *g* ayant *c d* pour base ne peut aussi avoir son sommet que dans un des points de l'arc du segment qu'on a trouvé estre capable de l'angle *g*. Donc il faut que ce point qui est le sommet de tous les deux angles soit commun à tous les deux cercles. Donc il faut que ce soit l'un des deux points où ils se coupent. Or il est bien visible que ce n'est pas le point *c*. Donc l'autre point où ils se coupent est le point *x* que l'on cherchoit.

II.

Des angles dont le sommet est au dedans du cercle & ailleurs qu'au centre.

XLI. Quand le sommet d'un angle est au dedans du cercle, mais ailleurs qu'au centre, comme peut estre l'angle *k*, ses costez doivent toûjours estre considerez comme terminez par la circonference, comme au point *f* & *g*; & de plus il les faut aussi prolonger au delà du sommet jusques à la circonference de l'autre part, en prolongeant par exemple *f k* jusques en *c*, & *g k* jusques en *d*.



Et ainsi ces angles se reduisent aux angles qui se font dans la section de deux cordes qui se coupent au dedans du cercle, où il se fait quatre angles dont les opposez sont égaux, & qui sont chacun appuyé sur l'un des quatre arcs, ausquels cette circonference se trouve divisée par ces deux cordes.

Voicy donc le Theoreme qui nous apprendra la mesure de ces angles.

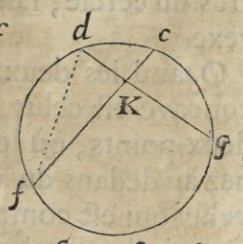
IV. Theoreme.

XLII. Tout angle fait par la section de deux cordes qui se coupent au dedans du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc opposé.

Soient les deux cordes *c f* & *d g* qui se coupent en *k*. Prenons lequel on voudra des quatre angles qu'elles font en

en se coupant, comme *f k g*; je dis qu'il aura pour sa mesure la moitié de l'arc *f g* plus la moitié de l'arc opposé *d c*.

Soient joints les points *d f*, l'angle *f k g* est égal aux deux angles vers *d* & vers *f* (par le quatriéme Lemme.)



Or l'angle vers *d* pour mesure la moitié de l'arc *f g* sur lequel il est appuyé, & l'angle vers *f* la moitié de l'arc *c d*, par la même raison.

Donc l'angle *f k g* qui leur est égal, a pour sa mesure les moitiez de ces deux mêmes arcs: ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

QUAND deux cordes égales moindres que des diametres se coupent, elles divisent la circonference en quatre arcs, dont il y en a deux opposez qui sont égaux, & deux autres inégaux; & alors les angles qui sont appuyez sur chacun de ces arcs égaux ont pour mesure cet arc entier. XLIII.

Car les opposez estant égaux, un entier est la même chose, que la moitié de l'un plus la moitié de l'autre.

Je ne prouve point ce qui est supposé dans ce Corollaire, parce que c'est une suite visible de ce qui a esté demonstré, sup. 35.

III.

Des angles dont le sommet est hors le cercle que leurs costez coupent ou touchent.

LES costez d'un angle dont le sommet est hors le cercle peuvent, XLIV.

Ou le couper tous deux.

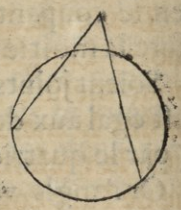
Ou le toucher tous deux.

Ou l'un le couper & l'autre le toucher.

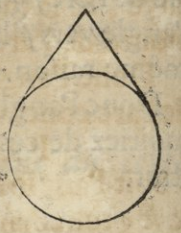
Mais quand ils le coupent, on les considere toûjours comme entrans dans le cercle selon sa convexité, & estant terminez par la circonference au dedans du cercle selon sa concavité.

SCD LYON 1

C'eſt pourquoy ces angles ſont toûjours conſiderez comme eſtant appuyez ſur deux arcs du cercle, l'un concave & l'autre convexe.

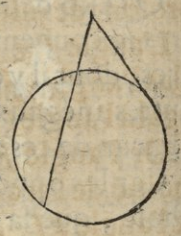


Quand les deux coſtez le coupent, l'arc concave eſt celuy qui eſt compris entre les deux points, où les deux coſtez ſont terminez au dedans du cercle. Et le convexe eſt celuy qui eſt compris entre les deux points par où il entre dans le cercle.



Quand tous les deux coſtez touchent le cercle, l'un & l'autre eſt compris entre les deux points de l'attouchement, mais l'un eſt concave au regard de l'angle, & l'autre convexe.

Et quand l'un touche & l'autre coupe le cercle, le concave eſt compris entre le point de l'attouchement & celuy où ſe termine l'autre coſté; & le convexe entre le point de l'attouchement & celuy où l'autre coſté entre dans le cercle.



Il eſtoit neceſſaire de bien expliquer ces deux ſortes d'arcs, parce que de là dépend la meſure de ces angles ſelon ce Theoreme.

V. THEOREME.

XLV. LORS que le ſommet d'un angle eſt hors le cercle, ſoit que ces deux coſtez coupent le cercle, ou que tous deux le touchent, ou que l'un le coupe & l'autre le touche, il a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.

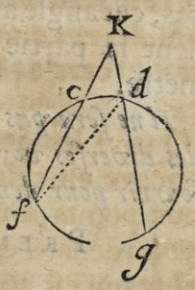
PREUVE DANS LE PREMIER CAS.

Soit l'angle *f k g*, dont le coſté *k f* coupe le cercle en *c*, & *k g* en *d*; l'arc concave eſt *f g*, & le convexe *c d*. Il faut donc prouver que cet angle a pour meſure la moitié de l'arc *f g*, moins la moitié de l'arc *c d*, & on le prouve ainſi.

Soit tirée la ligne *f d*. Par le 4e Lemme, l'angle *f d g* eſt égal à l'angle *f k g*, plus l'angle *k f d*.

SCD LYON 1

Donc l'angle *k* est égal à l'angle *f d g* moins l'angle *k f d*. Donc il doit avoir pour mesure la mesure de l'angle *f d g* moins la mesure de l'angle *k f d*.

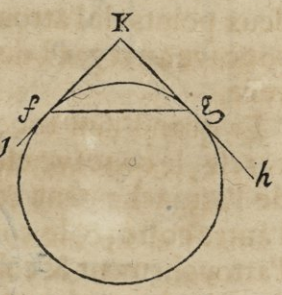


Or la mesure de l'angle *f d g* est la moitié de l'arc concave *f g*, sur lequel il est appuyé ; & la mesure de l'angle *k f d* est la moitié de l'arc convexe *d c*.

Donc l'angle *k* a pour mesure la moitié de l'arc concave *f g*, moins la moitié de l'arc convexe *d c*.

PREUVE DU SECOND CAS.

Soit l'angle *k*, dont les costez *k f* & *k g* touchent le cercle, & soit *k g* prolongée jusques en *h*.



L'angle *f g h* est égal à l'angle *k* plus l'angle *k f g*. Donc l'angle *k* est égal à l'angle *f g h*, moins l'angle *k f g*.

Or l'angle *f g h* a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment *f g*, & l'angle *k f g* a pour mesure la moitié de l'arc du petit segment *f g*. Donc l'angle *k* a pour mesure la moitié de l'arc du grand segment, qui est l'arc concave moins l'arc du petit segment, qui est l'arc convexe.

La preuve du troisiéme Cas est semblable à ces deux-là, tenant quelque chose de l'un & de l'autre. Il vaut mieux la laisser trouver.

AVERTISSEMENT.

Outre cette mesure qui est generale à toutes ces sortes d'angles, il y en a qui sont particulieres à quelques-uns qu'il est bon de marquer par des Theoremes particuliers.

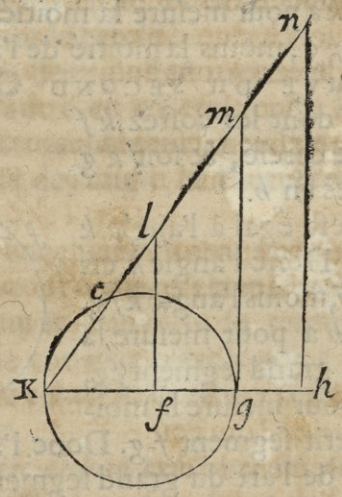
VI. THEOREME.

UN angle ayant son sommet hors le cercle, si l'un de ses costez qui coupe le cercle se termine à l'extremité d'un diametre auquel l'autre costé est perpendiculaire, soit en coupant le cercle, soit en le touchant, soit même estant hors le cercle, ce diametre y estant prolongé, en tous ces XLVI.

cas, cet angle a pour sa mesure la moitié de l'arc que soûtient la partie de son costé non perpendiculaire au diametre.

Il ne sera pas inutile de donner ce Theoreme pour exemple des diverses voyes que les principes qu'on a établis peuvent fournir pour demonstrer une même chose.

PREMIERE DEMONSTRATION.



XLVII. SOIT le diametre $k\,g$ prolongé jusques à h. Soit de k tirée une ligne indefinie qui coupe le cercle en c.

Soit de divers points de cette ligne hors le cercle comme de l, m, n, tirées sur le diametre les perpendiculaires $l\,f$, $m\,g$, $n\,h$. J'ay à prouver que chacun de ces angles vers l, m, n, a pour mesure la moitié de l'arc $k\,c$. Ce qu'on peut faire en cette maniere.

Chacun des angles vers l, m, n, plus l'angle vers k valent un angle droit par le 4e Lemme, parce que ce sont les angles sur la base d'un angle droit. Donc chacun de ces angles, plus l'angle vers k ont pour mesure la moitié de la demy circonference. Donc ils ont aussi pour mesure, par le 3e Lemme les deux moitiez des deux arcs $k\,c$ & $c\,g$, qui comprennent la demy-circonference.

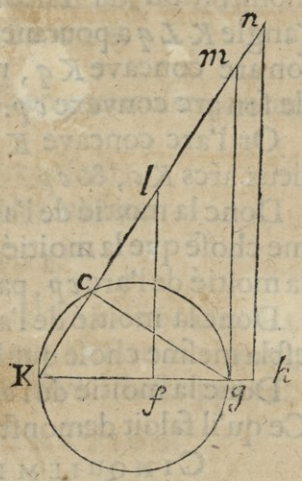
SCD LYON 1

Or l'angle vers *k* a pour sa mesure la moitié de l'arc *c g* sur lequel il est appuyé.

Reste donc pour la mesure de chacun des autres la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'il faloit demonstrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

SOIT encore tirée la ligne *c g*, l'angle *k c g* est droit, parce qu'il est dans le demy-cercle. Donc l'angle *c g k* est égal à chacun des angles vers *l m n*, puisque chacun de ces angles, plus l'angle vers *k* sont aussi égaux à un droit. LVIII.

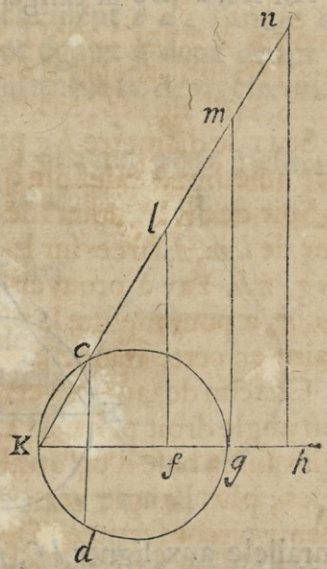


Or l'angle *c g k* a pour mesure la moitié de l'arc *k c*, sur lequel il est appuyé.

Donc la moitié de cet arc *k c* est aussi la mesure de chacun des angles vers *l*, *m*, *n*.

TROISIEME DEMONSTRATION.

SOIT tirée la ligne *c d* qui coupe perpendiculairement le diametre, ce qui fera que les arcs *k c* & *k d* seront égaux. Et la ligne *c d* estant parallele aux lignes *l f*, *m g*, *n h*, les angles que font ces paralleles sur la même ligne aux points *c*, *l*, *m*, *n*, sont égaux. XLIX.



Or l'angle *k c d* a pour sa mesure la moitié de l'arc *k d* égal à l'arc *k c*. Donc chacun des angles vers *l*, *m*, *n*, a pour mesure la moitié de l'un ou l'autre de ces deux arcs qui sont égaux, *k d* & *k c*. Donc on peut dire qu'ils ont pour mesure la moitié de l'arc *k c*. Ce qu'il faloit demonstrer.

Quatrieme Demonstration.

L. C'est l'application de la demonstration du Theoreme general à ce cas particulier.

Je suppose que la perpendiculaire Lf coupe le cercle en p & en q. Par la demonstration du Theoreme general, l'angle KLq a pour mesure la moitié de son arc concave Kq, moins la moitié de son arc convexe cp.

Or l'arc concave Kq est égal aux deux arcs Kc, & cp.

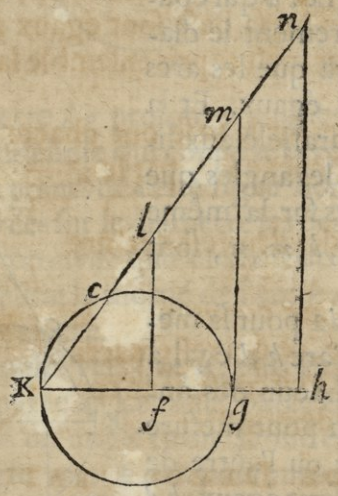
Donc la moitié de l'arc Kq est la même chose que la moitié de l'arc Kc, plus la moitié de l'arc cp, par le 3e Lemme.

Donc la moitié de l'arc Kq, moins la moitié de l'arc cp est la mesme chose que la moitié de l'arc kc.

Donc la moitié de l'arc kc est la mesure de l'angle kLq. Ce qu'il faloit demonstrer.

Cinquieme Demontration.

LI. Ayant tiré la tangeante PK, cette tangeante sera



parallele aux lignes lf, mg, nh, qui sont perpendiculaires au diametre. Donc l'angle PKc, est égal aux an-

gles vers l, m, n. Or l'angle $P K c$ a pour sa mesure la moitié de l'arc $P c$ (par 15 S,) donc chacun des autres angles vers l, m, n aura aussi pour sa mesure la moitié de ce mesme arc. Je croy que cette demonstration est la meilleur de toutes.

DES ANGLES DONT LES DEUX COSTEZ TOUCHENT LE CERCLE.

Il est bon d'en dire quelque chose en particulier, outre ce qu'on en a dit en general. LII.

On les peut appeller des angles circonscrits.

Et voicy une nouvelle maniere de les mesurer.

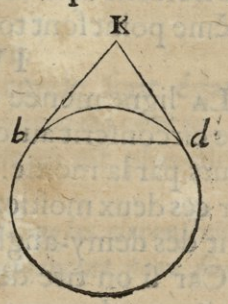
VII. THEOREME.

L'ANGLE circonscrit au cercle, c'est à dire dont les deux côtez touchent le cercle, a pour mesure la demy-circonference moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé. LIII.

PREMIERE DEMONSTRATION.

SOIT l'angle $b k d$, à qui soit donné pour base la ligne qui joint les deux points d'attouchement $b d$; l'angle k plus les deux angles sur sa base sont égaux à deux droits, c'est à dire ont pour mesure pris ensemble la demycirconference.

Or les deux angles sur la base ont chacun pour mesure la moitié de l'arc convexe $b d$, par le 2e Theoreme.



Donc la mesure des deux est cet arc convexe.

Donc ostant cet arc convexe de la demycirconference, ce qui restera sera la mesure de l'angle k circonscrit au cercle : ce qu'il falloit demonstrer.

SECONDE DEMONSTRATION.

PAR la demonstration generale l'angle k a pour mesure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc conve-

SCD LYON 1

xe. Or ces deux arcs comprennent toute la circonference. Donc par le 3e Lemme, la moitié de toute la circonference moins l'arc convexe entier est la mesme chose que la moitié de l'arc concave, moins la moitié du convexe.

I. Corollaire.

LIV. Deux angles circonscrits sont égaux quand ils sont appuyez sur des arcs convexes d'autant de degrez, & le plus grand est celuy qui est appuyé sur un arc de moins de degrez.

Car de 180 degrez qui en oste un nombre égal, ce qui reste est égal, & plus le nombre qu'on en oste est petit, plus ce qui reste est grand. Donc, &c.

II. Corollaire.

LV. Si un angle circonscrit est appuyé sur un arc convexe qui soit soûtenu par le côté d'un angle inscrit isoscele, l'angle inscrit & le circonscrit sont égaux.

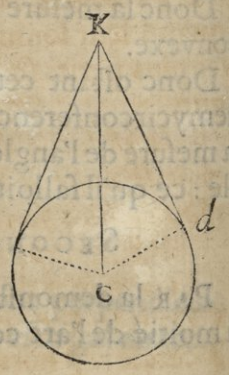
Car ostant cet arc de la demy-circonference, ce qui restera sera la mesure du circonscrit par 53. S. & de l'inscrit par 20. S.

III. Corollaire.

LVI. Il est bon de considerer toûjours les côtez de l'angle circonscrit comme terminez au point de l'attouchement. Et selon cela il faut dire que tout angle circonscrit est isoscelle : car les deux tangentes au cercle menées du même point sont toûjours égales, par le 2e Probleme.

IV. Corollaire.

LVII. La ligne menée du sommet de l'angle circonscrit au centre le divise toûjours par la moitié. Et l'on peut appeller ces deux moitiez de l'angle circonscrit des demy-angles circonscrits.



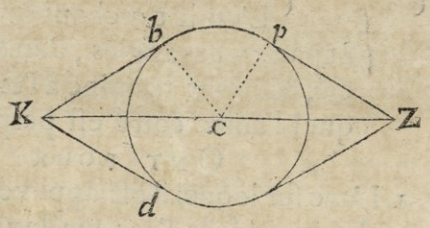
Car si on tire deux rayons au point de l'attouchement, on ne pourra considerer ces deux demyangles, qu'on ne voye sans peine que les costez de l'un sont égaux aux costez de l'autre, & que les rayons du même cercle, & par con-

sequent

ſequent les ſinus en ſont égaux. Donc ils ſont égaux.

V. Corollaire.

Les angles circonſcripts au même cercle ſont égaux quand les tangentes de l'un ſont égales aux tangentes de l'autre. LVIII.



Soient *k b* tangente de l'angle *k* égale à ∠ *z p*, tangente de l'angle ∠ *z*. Je dis que les angles *k* & ∠ *z* ſont égaux. Car tirant les lignes du centre *k c* & ∠ *z c*, & les rayons *c b* & *c p*, les angles *k b c* & ∠ *z p c* ſont égaux, parce qu'ils ſont tous deux droits.

Et les coſtez de l'un ſont égaux aux coſtez de l'autre, puiſque par l'hypotheſe *k b* eſt égale à ∠ *z p*, & que *c b* & *c p* ſont les rayons du même cercle.

Donc les baſes de ces angles *k c* & ∠ *z c* ſont égales.

Donc les angles *b k c* & *p* ∠ *z c* ſont égaux, les coſtez de l'un eſtant égaux aux coſtez de l'autre, & ayant les deux rayons pour leurs ſinus.

Or ces deux angles *b k c* & *p* ∠ *z c* ſont chacun la moitié de chaque angle circonſcrit, par le Corollaire precedent.

Donc les angles circonſcrits ſont égaux : ce qu'il falloit demonſtrer.

VI. Corollaire.

Les angles circonſcrits au même cercle ſont égaux quand leur ſommet eſt également éloigné du centre, & les plus petits ſont ceux dont le ſommet en eſt plus éloigné. LIX.

Cela eſt facile à prouver par les demy-angles circonſcrits, & je le laiſſe à trouver à ceux qui commencent pour faire eſſay de leurs forces.

Recapitulation de la mesure des Angles.

Le ſommet de l'angle eſt LX.

- Dans le cercle
  - au centre. 1.
  - hors le centre. 2.

Dans la circonf. { l'un des costez au dedans, & l'autre au dehors, { le touchant. 3. / le coupant. 4.
tous deux au dedans du cercle. 5.

Hors le cercle. { Les deux costez le coupant. 6.
Les deux le touchant. 7.
L'un le touchant & l'autre le coupant. 8.

Et parmy ces angles, l'un des costez coupant le cercle, & estant terminé à l'extremité du diametre auquel l'autre costé est perpendiculaire. 9.

ONT POUR MESURE.

1. L'arc sur lequel il est appuyé. VIII. 10.

2. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé plus la moitié de l'arc opposé. IX. 42.

3. La moitié de l'arc que soûtient le costé qui est au dedans du cercle. IX. 13.

4. La moitié de l'arc que soûtient le costé qui est au dedans du cercle, plus la moitié de celuy que soûtient le prolongement du costé qui est hors le cercle. IX. 16.

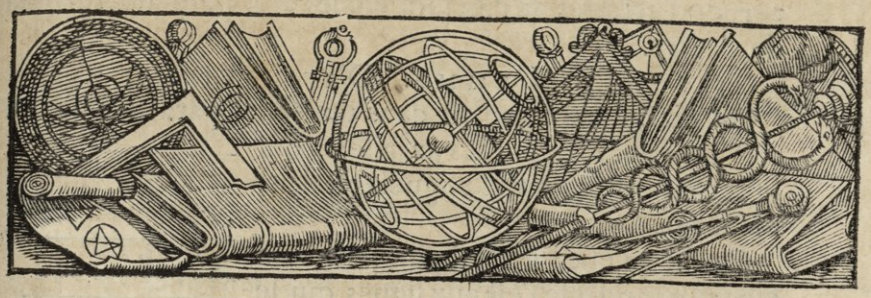
5. La moitié de l'arc sur lequel il est appuyé. IX. 18.

6. 7. 8. La moitié de l'arc concave sur lequel il est appuyé moins la moitié de l'arc convexe. IX. 45.

7. La demy-circonference moins l'arc convexe sur lequel il est appuyé. IX. 52.

9. La moitié de l'arc soûtenu par la partie du costé non perpendiculaire au diametre. IX. 46.

SCD LYON 1



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DIXIE'ME.

DES LIGNES PROPORTIONELLES.

LA proportion des lignes dépend de deux choſes, des paralleles & des angles, & ainſi elle n'a pû ſe bien traitter qu'après l'explication de l'une & de l'autre. Et meſme pour en bien comprendre tout le myſtere, il faut reprendre beaucoup de choſes des paralleles que nous propoſerons en forme de Lemmes. I.

I. LEMME. DEFINITION.

UN eſpace compris d'une part entre deux paralleles & indefiny de l'autre, ſoit appellé eſpace parallele. II.

II. LEMME. DEFINITION.

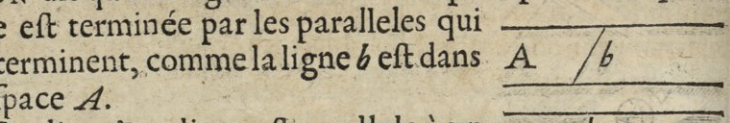
COMME on ne conſidere dans ces eſpaces que la diſtance entre les paralleles, leur grandeur dépend de cette diſtance qui eſt meſurée par les perpendiculaires compriſes entre ces paralleles, que nous appellerons pour cette raiſon les perpendiculaires des eſpaces. III.

Et delà il s'enſuit que ces eſpaces ſont égaux quand les

perpendiculaires de l'un ſont égales aux perpendiculaires de l'autre.

III. Lemme. Definition.

IV. On dit qu'une ligne eſt dans un eſpace parallele quand elle eſt terminée par les paralleles qui le terminent, comme la ligne *b* eſt dans l'eſpace *A*.



On dit qu'une ligne eſt parallele à un eſpace quand elle l'eſt aux lignes qui le terminent, comme la ligne *b* eſt parallele à l'eſpace *A*.

IV. Lemme.

V. L'inclination d'une ligne dans un eſpace ſe conſidere par l'angle aigu qu'elle fait ſur l'une & l'autre parallele, le faiſant toûjours égal.

D'où il s'enſuit que deux lignes ſont également inclinées dans le meſme eſpace, ou dans deux eſpaces differens, quand les angles aigus que fait l'une ſont égaux aux angles aigus que fait l'autre.

Et que la moins inclinée eſt celle qui fait ſon angle aigu moins aigu & plus approchant du droit.

V. Lemme important.

VI. Lorsque deux ou pluſieurs lignes ſont menées d'un même point ſur la même ligne, elles ſont cenſées eſtre dans un même eſpace parallele. Car il ne faut alors que concevoir une ligne menée par ce point commun, qui ſoit parallele à celle qui les termine. D'où il s'enſuit que les coſtez d'un angle terminez par une baſe ſont toûjours cenſez eſtre dans le même eſpace parallele.

VI. Lemme.

VII. Deux angles ſoient appellez ſemblables lors qu'eſtans égaux les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun.

Et on eſt aſſeuré que cela eſt; 1. quand on ſçait qu'ils ſont égaux, & qu'un des angles ſur la baſe de l'un eſt égal à l'un des angles ſur la baſe de l'autre: car delà il s'enſuit que l'autre eſt égal auſſi.

2. Lors qu'étant égaux ils ſont de plus Iſoſceles. VIII. 59.

VII. LEMME.

VIII.

QUAND les sommets de deux angles sont également distans chacun de sa base (prolongée s'il est besoin) ces deux angles peuvent estre compris dans le même espace parallele. Car mettant ces deux bases sur une même ligne, la ligne qui passera par les deux sommets sera parallele à celle qui comprendra les deux bases.

VIII. LEMME.

IX.

DANS le même espace parallele, ou dans les espaces paralleles égaux, toutes les également inclinées sont égales, & toutes les égales sont également inclinées. VIII. 54.

Et au contraire les espaces paralleles sont égaux quand les également inclinées y sont égales. Car delà il est certain que les perpendiculaires le sont aussi. VIII. 56.

IX. LEMME.

X.

LORS qu'une même ligne est coupée par plusieurs lignes toutes paralleles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les paralleles qui les renferment. VIII. 57.

X. LEMME.

XI.

LORS qu'il y a proportion entre quatre lignes, on dit que deux de ces lignes sont proportionelles aux deux autres lignes quand les deux antecedens de la proportion se trouvent dans les deux premieres, & les deux consequens dans les deux dernieres. D'où il s'ensuit aussi qu'*Alternando*, on peut prendre aussi les deux premieres pour les deux termes d'une raison, & les deux dernieres pour les deux termes de l'autre.

PROPOSITION FONDAMENTALE DES LIGNES PROPORTIONELLES.

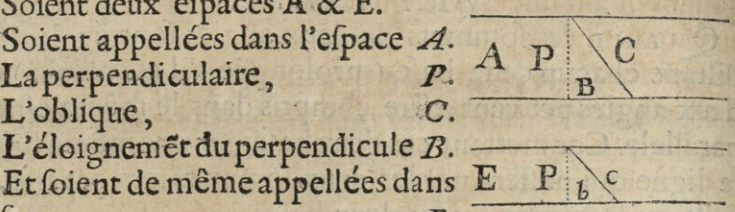
XII.

LORS que deux lignes sont également inclinées en deux differens espaces paralleles, elles sont entr'elles comme les perpendiculaires de ces espaces, & leurs éloignemens du perpendicule sont aussi en même raison.

SCD LYON 1

Soient deux espaces A & E.

Soient appellées dans l'espace *A*.
La perpendiculaire, *P*.
L'oblique, *C*.
L'éloignemẽt du perpendicule *B*.
Et soient de même appellées dans l'espace, *E*.
La perpendiculaire *p*.
L'oblique *c*.
L'éloignement du perpendicule *b*.



Je dis que

P. p. :: C. c. :: B. b.

Et en voila la preuve tres-naturelle, dont je ne croy pas que jamais personne se soit avisé.

Soit *P* divisée en quelques aliquotes que l'on voudra, 10. 20. 500. 6000. 10000. &c. Et ces aliquotes quelconques de *P* soient appellées *x*.

Si on tire par tout les points de cette division telle qu'elle soit des paralleles à l'espace *A*, cet espace sera divisé en autant de petits espaces paralleles qu'*x* sera dans *P*. Et ces petits espaces seront égaux par le 2ᵉ Lemme, parce qu'ils auront tous *x* pour perpendiculaire.

Et de là il s'ensuit que *C* sera aussi divisé en aliquotes pareilles à celles de *P*, parce que les portions de *C*, qui se trouvent entre chacun de ces petits espaces égaux y étant également inclinées par le 9ᵉ. Lemme, y sont égales par le 8.

Soient donc les aliquotes de *C* pareilles à celles de *P* appellées *y*.

Que si de tous les points de division de *C* on tire des paralleles à *P* (qui seront par consequent perpendiculaires à l'espace) elles couperont encore *B* en aliquotes pareilles, parce que chaque *y* se trouvant également inclinée en chacun de ces nouveaux petits espaces, ils seront égaux par le 9ᵉ Lemme. Et par consequent les portions de *B* qui seront toutes perpendiculaires dans ces espaces égaux, seront égales. (Et cela même seroit vray quand elles n'y seroient pas perpendiculaires, pourveu qu'elles y fussent

également inclinées. Ce qu'il faut remarquer pour une autre occasion.)

Cela estant fait, prenant x pour mesurer p de l'espace E, où elle s'y trouvera precisement tant de fois, ou tant de fois plus quelque reste, c'est à dire plus une portion moindre qu'x. Et ainsi tirant des lignes paralleles à l'espace E par tous les points de la division de p mesurée par x, l'espace E se trouvera divisé en autant de petits espaces égaux entr'eux, & égaux à ceux qui ont eu la même x pour perpendiculaire dans l'espace A, qu'x se sera trouvé dans p, si ce n'est qu'il y en aura un plus petit, si x ne s'y est trouvée que tant de fois plus quelque reste. Car le petit espace où sera compris ce reste sera plus petit que les autres.

Et de-là il s'ensuit que c estant aussi inclinée dans E que C dans A, les portions de c comprises dans ces espaces égaux à ceux d'A seront égales aux portions de C, & ainsi se pourront aussi appeller y, & s'il y avoit eu en p un reste moindre qu'x, il y auroit aussi eu en c un reste moindre qu'y.

Donc par la definition des grandeurs proportionnelles,

$$P\ p.\ ::\ C\ c.$$

puisque x & y, aliquotes quelconques pareilles des deux antecedens P & C, sont également contenuës dans les deux consequens p & c, si dans l'un sans reste, dans l'autre sans reste : si dans l'un avec reste, dans l'autre avec reste.

On prouvera la même chose de B & de b. Car si c étant mesurée & divisée par y, on tire des paralleles à p (qui seront perpendiculaires à l'espace) par tous les points de la division, b sera divisée en autant de parties que c, & ces parties seront égales aux parties de B, que nous avons nommées z : si ce n'est qu'il y en aura une moindre que z, s'il y a eu un reste dans c moindre qu'y.

Donc les aliquotes pareilles de C & de B seront également contenuës dans c & b.

SCD LYON 1

Donc $Cc :: Bb$.

Donc $Pp :: Cc :: Bb$. Ce qu'il falloit demonſtrer

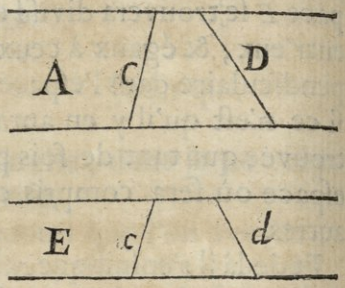
I. THEOREME.

XIII. Si deux lignes inégalement inclinées dans le même eſpace le ſont autant chacune, que chacune de deux autres le ſont dans un autre eſpace, les également inclinées ſont en même raiſon.

Soient les eſpaces A & E.

Soit C autant inclinée dans l'eſpace A que c dans l'eſpace E.

Et D autant inclinée dans l'eſpace A que d dans l'eſpace E.



Je dis que $Cc :: Dd$.

Car par la propoſition precedente

C eſt à c, comme la perpendiculaire d'A à la perpendiculaire d'E.

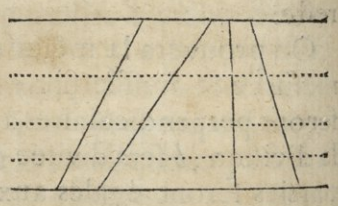
Or D eſt auſſi à d, comme ces deux mêmes perpendiculaires.

Donc $Cc :: Dd$.

On le peut auſſi prouver immédiatement & par ſoy-même ſans avoir recours aux perpendiculaires par la même voye dont on s'eſt ſervy dans la Propoſition precedente, & que je ne repete point, parce qu'il eſt tres-facile de la trouver.

I. COROLLAIRE.

XIV. Plusieurs lignes étant diverſement inclinées dans le même eſpace parallele, ſi elles ſont toutes coupées par des paralleles à cet eſpace, elles le ſont proportionellement, c'eſt à dire



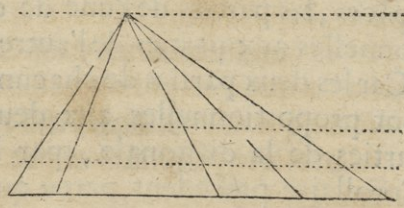
que chaque toute eſt à chacune de ſes parties, telle qu'eſt la premiere, ou la deuxiéme, ou la troiſiéme, &c. comme chaque autre toute à la même partie premiere, ou deuxiéme, ou troiſiéme, &c.

C'eſt une ſuitte manifeſte du precedent Theoreme, puiſque

puiſque d'une part toutes les toutes ſont dans le même eſpace, qui eſt l'eſpace total. Toutes les premieres parties dans le 1er eſpace partial, les 2des dans le 2e, & ainſi des autres. Et que de l'autre chaque toute & chacune de ſes parties ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace par le 9e Lemme. Donc la 1re toute eſt à ſa 1re partie comme la ſeconde toute à ſa 1re partie.

II. COROLLAIRE.

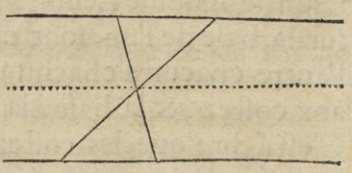
Si pluſieurs lignes ſont menées d'un même point ſur une même ligne, elles ſont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallelles à celle qui les termine. XV.



C'eſt la même choſe que le precedent Corollaire, puiſque tirant par le point commun à toutes ces lignes une ligne parallele à la ligne qui les termine, elles ſe trouveront toutes dans le même eſpace parallele, & par conſequent les paralleles à cet eſpace les doivent toutes couper proportionellement.

III. COROLLAIRE.

Si deux lignes compriſes dans un même eſpace ſe coupent, elles ſont coupées proportionellement. C'eſt a dire que les parties de l'une ſont proportionnelles aux parties de l'autre, outre que la toute eſt à la toute comme chaque partie à la même partie. XVI.

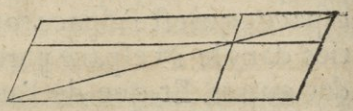


C'eſt encore la même choſe que le 1er Corollaire, puiſque menant une parallele à l'eſpace par le point de la ſection, ce ſeront deux lignes dans le même eſpace total qui ſont coupées par une parallele à cet eſpace, & qui par conſequent le doivent eſtre proportionnellement.

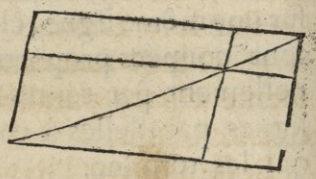
SCD LYON 1

IV. Corollaire.

XVII. Si quatre lignes dont les opposées sont paralleles se joignent aux extremitez, elles font deux espaces paralleles, l'un d'un sens & l'autre de l'autre sens, & la ligne tirée de coin en coin s'appelle diagonale.



Que si d'un point quelconque de cette diagonale on tire deux lignes compriſes chacune dans chacun de ces deux espaces, les parties de l'une de ces lignes seront proportionnelles aux parties de l'autre.



Car les deux parties de chacune sont proportionnelles aux deux parties de la diagonale, par le Corollaire precedent, parce que chacune de ces lignes & la diagonale sont compriſes dans le même espace parallele & s'y coupent. Dont les parties de chacune estant en même raiſon que celles de la diagonale, les parties de l'une doivent auſſi estre en même raiſon que les parties de l'autre, puiſque deux raiſons égales à une 3e. sont égales entr'elles.

II. Theoreme.

XVIII. Lorsque deux angles sont semblables (c'est à dire selon le ſixiéme Lemme, lorſqu'estant égaux les angles ſur la baſe de l'un sont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun) ces coſtez sont proportionnels aux coſtez, & la baſe à la baſe, & la hauteur à la hauteur. C'est à dire que les coſtez de ces deux angles également inclinez chacun ſur ſa baſe seront en même raiſon que les deux autres coſtez & que les deux baſes, & que les diſtances de chaque ſommet à chaque baſe : ce que j'appelle la hauteur de chaque angle.

Soient les deux angles nommez *A* & *E*.
Soit le grand coſté d'*A* nommé *C*.
Le petit *D*.
La baſe *B*.

SCD LYON 1

La hauteur H.

Et dans l'angle E.

Le grand costé c.

Le petit d.

La base b.

La hauteur h.

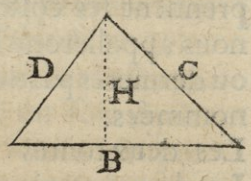
Je dis que $C\ c :: D\ d :: B\ b :: H\ h$.

On le peut prouver facilement de la même sorte qu'on a prouvé la Proposition fondamentale, c'est pourquoy je ne le repete point.

Mais on le peut encore de cette autre sorte.

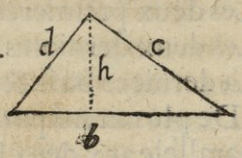
Par le 5e Lemme.

1°. C & D sont censées estre dans le méme espace parallele, & de même c & d.



Et de plus par l'hypotese C & c sont également inclinées chacune dans son espace, & de même D & d.

Donc par la Proposition fondamentale, & par le 1er Theoreme.



$C.\ c :: H.\ h.$

$D.\ d :: H.\ h.$

$C.\ c :: D.\ d.$ & *alternando* $C.\ D :: c.\ d.$

2°. Par le 5e Lemme, C & B sont dans le même espace parallele & de même c & b, & de plus C & c sont également inclinées chacune dans son espace & de même B & b.

Donc par le 1er Theoreme,

$C.\ c :: B.\ b$ & *alternando* $C.\ B :: c.\ b.$

3°. Par le même 5e Lemme, D & B sont dans le même espace parallele, & de même d & b.

Et de plus, D & B sont également inclinées chacune dans son espace, & de même d & b.

Donc par le 1er Theoreme,

$D.\ d :: B.\ b.$ & *alternando* $D.\ B. :: d.\ b.$

Donc $\left.\begin{matrix} C. & c \\ D. & d \end{matrix}\right\} :: B.\ b.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

I. Corollaire.

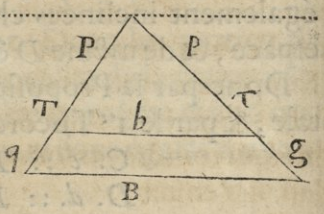
XIX. Deux angles Isosceles estant égaux, ils sont semblables, & par consequent les costez sont aux costez comme la base à la base, & la hauteur à la hauteur. Car deux angles estant Isosceles, ils ne peuvent estre égaux que les angles sur la base de l'un ne soient égaux aux angles sur la base de l'autre. VIII. 60.

II. Corollaire.

XX. Si un angle a deux bases paralleles, il s'y trouvera diverses sortes de proportions de grad usage.

Mais pour le mieux faire entendre, il faut considerer que les costez de cet angle selon la derniere base comprennent ses costez selon la premiere, & c'est pourquoy nous appellerons les uns *toutes*, & les autres les premieres ou dernieres parties de chacune de ces toutes. Soient donc nommées.

Les deux toutes T. & *T*.
Les deux premieres parties p. & *p*.
Les deux dernieres q. & *g*.
La derniere base & la 1re *B*. & *b*.



De plus tirant par le sommet une parallele aux deux bases, il se trouvera trois espaces paralleles.

Le total entre le sommet & *B*, que j'appelleray ω.
Le premier partial entre le sommet & *b*, *A*.
Le second partial entre *b* & *B*, *E*.

Cela estant par le 9e Lemme,

T est autant inclinée dans ω, que p dans A, & q dans *E*.

Et de même *T* autant inclinée dans ω, que *p* dans A. & *g* dans *E*.

Donc par le 1er Theoreme,

1. T. p. :: *T*. *p*. & *alternando*. T. *T* :: p. *p*.
2. T. q. :: *T*. *g*. T. *T* :: q. *g*.
3. p. q. :: *p*. *g*. p. *p* :: q. *g*.

4. Par le 2e Theoreme chaque toute & sa premiere partie sont en même raison que la derniere base & la premiere.

SCD LYON 1

T. p :: B. *b*. T. B. :: p. *b*.
T. *p* :: B. *b*. *T*. B. :: *p*. *b*.

Car cet angle qui a deux baſes paralleles doit eſtre conſideré comme ſi c'eſtoient deux angles égaux, dont l'un euſt pour coſtez & pour baſes T. *T*. B. & l'autre p. *p*. *b*. & ainſi les deux angles ſur la baſe de l'un étant égaux aux deux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun, les coſtez de l'un ſont proportionnels aux coſtez de l'autre, & les baſes auſſi. Et par conſequent T. p :: *T*. *p*. :: B. *b*.

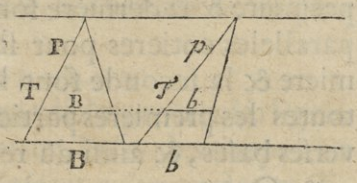
III. Corollaire.

Lorsque deux angles ont leur ſommet également diſtant de leur baſe, & que par conſequent ils peuvent eſtre compris dans le même eſpace parallele (ſelon le 7e Lemme) ſi l'on donne à ces deux angles de nouvelles baſes paralleles aux anciennes, & dont chacune en ſoit également diſtante, ces deux nouvelles baſes ſeront proportionelles aux deux anciennes. XXI.

Suppoſons que les deux baſes de ces deux angles, leſquelles j'appelleray B & *B*, ſoient ſur la même ligne, la ligne qui joindra les ſommets ſera parallele à cette ligne. D'où il s'enſuit,

1°. Que conſiderant dans chacun de ces angles un ſeul coſté, dont j'appelleray l'un T & l'autre *T*, ce ſeront deux lignes dans le meſme eſpace parallele.

2°. Que les deux nouvelles baſes, que j'appelleray b & *b*, eſtant paralleles aux anciennes, & en devant eſtre chacune également diſtantes, ſe trouveront neceſſairement dans la même ligne parallele à l'eſpace.



Donc par le 1er Corollaire du 1er Theoreme : cette ligne parallele à l'eſpace coupe proportionnellement T & *T*, & ainſi appelant p la premiere partie de T. & *p* la premiere partie de *T*, T. p :: *T*. *p*.

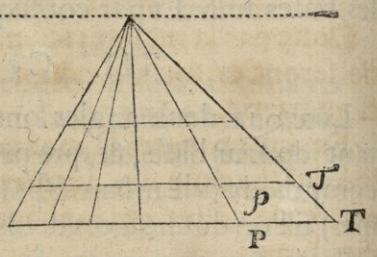
Or par le Corollaire precedent chacun de ces angles

ayant deux baſes paralleles $\begin{cases} T.\ p :: B.\ b. \\ T.\ p :: B.\ b. \end{cases}$

Donc les deux raiſons de B. b & de $B.\ b$ ſont égales, puiſque chacune eſt égale à chacune des deux raiſons T. p & $T.\ p$ qui ſont égales entr'elles. Donc

B. b : : $B.\ b.$ Donc *alternando* B. B : : b. $b.$

IV. Corollaire.



Si d'un même point on tire pluſieurs lignes à la même ligne compriſes entre la premiere & la derniere, & qu'on tire des paralleles à celle-là qui ſoient auſſi compriſes entre la premiere & la derniere de ces lignes tirées du même point, toutes ces paralleles ſeront coupées proportionnellement, c'eſt à dire que chaque toute & ſa premiere partie ſeront en même raiſon que chaque autre toute & ſa 1re partie, & ainſi du reſte.

Il ſuffit d'examiner deux de ces paralleles comme eſt la derniere, que j'appelleray T, & ſa premiere partie p, & une autre que j'appelleray T, & ſa premiere partie p, & ainſi il faut prouver que

T. p : : $T.\ p.$

XXII. Et pour cela il ne faut que conſiderer, 1°. Que ces lignes tirées d'un même point font divers angles, que la premiere & la derniere font l'angle total, qui a toutes les paralleles entieres pour ſes diverſes baſes. Que la premiere & la ſeconde font le premier angle partial, qui a toutes les premieres parties de ces paralleles pour ſes diverſes baſes, & ainſi du reſte.

2°. Que tous ces angles ſont dans le même eſpace parallele, parce qu'on peut tirer une ligne par leur ſommet commun qui ſera parallele à la derniere baſe de l'angle total.

Donc T eſtant la derniere baſe de l'angle, & p la

derniere baſe du 1er angle partial, laquelle eſt partie de la ligne T & *p*, dont *T* eſt une autre baſe de l'angle total, & *p* une autre baſe du 1er angle partial, ſeront auſſi ſur une même ligne parallele à l'eſpace, puiſque *p* eſt partie de *T*.

Donc par le Corollaire precedent, les deux dernieres baſes de ces deux angles T & p ſeront en meſme raiſon que leurs deux autres baſes *T* & *p*. Donc

T. p :: *T*. *p*.

Donc par la meſme raiſon chaque parallele & ſa 1re partie ſeront en meſme raiſon que chaque autre parallele & ſa 1re partie.

En on prouvera la meſme choſe avec la meſme facilité de chacune des autres parties en comparant toûjours enſemble celles qui ſont renfermées entre les deux meſmes lignes.

V. Corollaire.

Si l'une de ces paralleles renfermées entre la 1re & la derniere de pluſieurs lignes tirées du meſme point, & diviſée par ces lignes en parties aliquotes; c'eſt à dire en un certain nombre de partie égales, toutes les autres ſont diuiſées par les meſmes lignes en aliquotes pareilles. XXIII.

C'eſt une ſuite manifeſte du precedent Corollaire. Car ſi chaque partie de l'une de ces paralleles en eſt par exemple la dixiéme partie, il faut que chaque partie de chaque autre parallele en ſoit auſſi la dixiéme partie, puiſque chaque parallele & chacune de ſes parties ſont en meſme raiſon que chaque autre parallele, & chacune de ſes parties ſemblables.

VI. Corollaire.

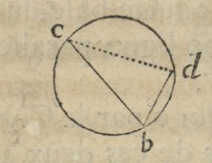
Si un angle a pluſieurs baſes paralleles, toutes les lignes tirées du ſommet qui couperont ces baſes, les couperont proportionellement. D'où il s'enſuit qu'en quelques aliquotes que l'une de ces baſes paralleles ſoit diviſée, toutes les autres le ſeront en aliquotes pareilles. XXIV.

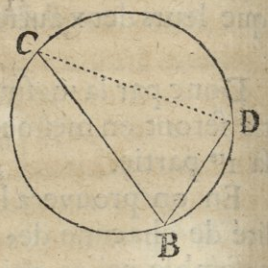
Ce n'eſt que les precedens Corollaires un peu autrement énoncez.

SCD LYON 1

VII. Corollaire.

XXV. Les deux cordes d'un cercle ſont proportionnelles aux deux cordes d'un autre cercle, ſi les arcs que ſoutiennent les unes ſont proportionellement égaux aux arcs que ſoutiennent les autres, chacun à chacun.





Soient conſiderées les deux cordes d'un cercle, comme jointes & faiſant un angle inſcrit : telles que ſont *b c* & *b d* d'une part; & *B C* & *B D* de l'autre. (Car ſi elles ne faiſoient pas d'angle inſcrit dans chaque cercle, il ne faudroit qu'en prendre d'égales à celles-là qui en fiſſent, puiſque ſoutenant des arcs égaux dans chaque cercle, par V. 26. ce ſera la meſme choſe pour juger de la proportion.) Cela ſuppoſé,

L'angle *c b d* inſcrit dans le premier cercle eſt égal à l'angle *C B D* inſcrit dans le ſecond cercle, par I X. 21.

Et les angles que font les coſtez *b c* & *b d* ſur la baſe *d c*, ſont égaux aux angles que font les coſtez *B C* & *B D* ſur la baſe *D C*, chacun à chacun, par IX. 21.

Donc par la 2e Theoreme,

b c. B C :: b d. B D :: d c. D C.

VIII. Corollaire.

XXVI. Si deux cordes de divers cercles ſoutiennent des arcs proportionellement égaux, (c'eſt à dire d'autant de degrez) elles ſont proportionnelles aux diametres de ces cercles.

C'eſt une ſuite du precedent. Car les diametres ſoutiennent des arcs proportionellement égaux dans chaque cercle, puiſqu'ils en ſoutiennent la demy-circonference. C'eſt donc la meſme preuve & encore plus facile.

IX. Corol.

SCD LYON 1

IX. Corollaire.

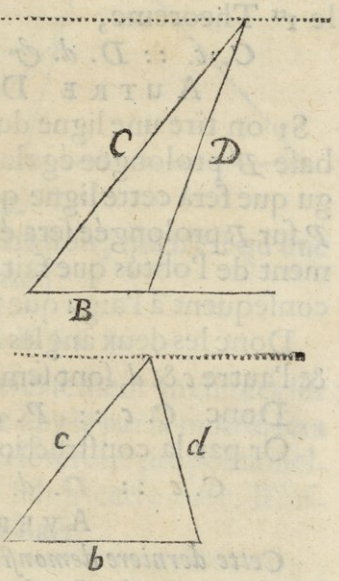
Si deux cordes égales de divers cercles soutiennent chacune autant de degrez, les cercles sont égaux. Car par le precedent Corollaire elles sont en mesme raison que les diametres des cercles. Donc si elles sont égales, les diametres sont égaux. Donc les cercles sont égaux. XXVII.

III. Theoreme.

Deux Angles quoy qu'inégaux ont neanmoins leurs costez proportionnels, lorsque le costé de l'un sur sa base fait un angle égal à celuy que fait aussi sur sa base l'un des costez de l'autre, & que l'autre costé du premier angle faisant sur sa base un angle obtus, & l'autre costé du second angle faisant un angle aigu sur la sienne, l'aigu est le complement de l'obtus, en sorte que tous les deux ensemble valent deux angles droits. XXVIII.

Cette derniere condition se peut encore exprimer en une autre maniere, qui est que ces deux costez, l'un d'un angle & l'autre de l'autre, fassent chacun sur sa base le même angle aigu, mais que l'un le fasse au dehors de la base & l'autre au dedans.

Cette derniere expression fait entrer plus facilement dans la demonstration de ce Theoreme.



Soient les deux angles, dont l'un ait pour costez C & D; & pour base B. Et l'autre pour costez c & d, & pour base b.

Je suppose, 1°. Que les angles que les costez C & c font chacun sur leur base sont égaux.

2°. Que le costé D fait un angle obtus sur la base B, & d un angle aigu sur la base b, mais que cet aigu est égal au complement de cet obtus. D'où il s'ensuit.

Que l'angle aigu que *D* fait sur la base en dehors en la concevant prolongee, est égal à l'angle aigu que *d* fait sur la sienne en dedans.

Cela estant, je dis que *C. c :: D. d.*

Car soient faits de deux angles deux espaces paralleles en prolongeant les bases *B* & *b* autant qu'il est necessaire, & tirant par chacun des sommets des paralleles a ces bases. Et celuy de ces espaces dans lequel sont *C* & *D* soit appelé *A*, & l'autre *E*.

Par l'hypothese l'angle aigu que fait *C* dans l'espace *A* est égal à l'angle aigu que fait *c* dans l'espace *E*.

Donc par le 4e Lemme *C* & *c* sont également inclinées chacune dans son espace.

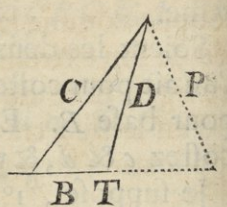
De mesme par l'hypothese l'angle aigu que fait *D* dans l'espace *A* (sur la base *B* prolongée) est égal à l'angle aigu que fait *d* dans l'espace *E*.

Donc par le 4e Lemme *D* & *d* sont également inclinées chacune dans son espace, & il n'importe que *D* soit autrement tournée au regard de *c*, car cela ne change en rien l'inclination de chacune dans son espace. Donc par le 1er Theoreme,

C. c. :: D. d. & alternando C. D :: c. d.

AUTRE DEMONSTRATION.

XXIX. Si on tire une ligne du sommet sur la base *B* prolongée égale à *D*, l'angle aigu que fera cette ligne que j'appelleray *P* sur *B* prolongée sera égal au complement de l'obtus que fait *D* sur *B*, & par consequent à l'aigu que fait *d* sur *c*.



Donc les deux angles dont l'un a pour ses costez *C* & *P*, & l'autre *c* & *d*, sont semblables par le 6e Lemme.

Donc *C. c :: P. d.*

Or par la construction *P* est égale à *D*. Donc

C. c :: D. d.

AVERTISSEMENT.

XXXX. *Cette derniere demonstration, quoyque moins bonne que la premiere, a cela d'utile, qu'elle fait voir plus clairement la*

SCD LYON 1

difference qu'il y a entre ce 3e Theoreme & le 2e, qui eſt que dans le 2e non ſeulement les coſtez d'un triangle ſont proportionels à ceux de l'autre, mais auſſi la baſe; au lieu que dans celuy-cy il n'y a que les coſtez de proportionnels, eſtant bien clair que la baſe B, *ſur laquelle eſt l'angle obtus, doit eſtre plus petite à proportion que la baſe* b.

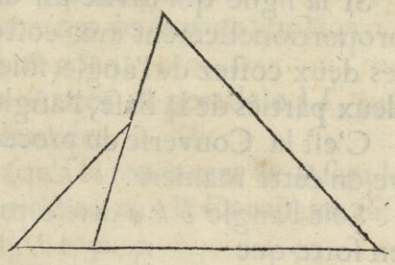
Car appellant T *la baſe* B, *prolongée juſques à* P, *il eſt clair que l'angle qui a pour coſtez* C, *&* P *&* T *pour baſe, eſt ſemblable à l'angle qui a pour coſtez* c *&* d, *&* b *pour baſe.*

Donc par le 2e Theoreme C. c. / P. d. :: T. b.

Or B *n'eſt que partie de* P, *donc il n'y a pas la même raiſon de* B *à* b, *que de* C *à* c.

I. Corollaire.

Une ligne que j'appelleray la coupante eſtant inclinée ſur une autre que j'appelleray la coupée, ſi de l'extremité & d'un autre point de cette coupante on tire deux lignes de part & d'autre qui faſſent des angles égaux ſur la coupée, la coupante entiere ſera à ſa partie vers la coupée comme la ligne tirée de ſon extremité à l'autre ligne tirée de ſon autre point. XXXI.



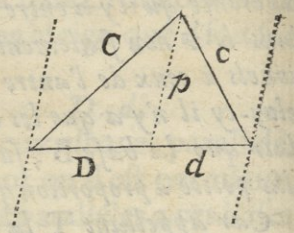
J'en laiſſe à trouver la demonſtration, qui n'eſt qu'une application du precedent Theoreme.

II. Corollaire.

Si un angle a diverſes baſes diverſement inclinées ſur ſes coſtez, la ligne qui diviſera cet angle par la moitié fera que les deux parties de chaque baſe ſeront proportionelles aux deux coſtez de cet angle ſelon cette baſe. Il ſuffira de le demonſtrer en une ſeule baſe. XXXII.

SCD LYON 1

Soit un angle diviſé par la moitié par la ligne *p*. Soit l'un de ces coſtez appellé *C* & l'autre *c*, la partie de la baſe qui joint *C* appellée *D*, & l'autre *d*.



Si on tire par les extremitez de la baſe des paralleles à *p*, il y aura deux eſpaces paralleles.

Celuy dans lequel ſont *C* & *D* ſoit appelé *A*, & l'autre *E*, par le 9e Lemme *D* & *d* ſont également inclinées chacune dans ſon eſpace.

Et par l'hypoteſe *C* & *c* ſont auſſi également inclinées chacune dans le ſien, puiſque les angles aigus que chacune fait ſur *p* ſont égaux.

Donc par le premier Theoreme,

C. c :: D. d. & alternando C. D :: c. d.

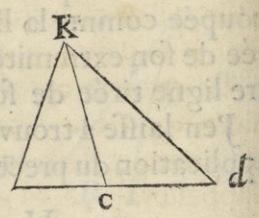
III. Corollaire.

XXXIII. Si la ligne qui diviſe un angle en diviſe auſſi la baſe proportionellement aux coſtez, c'eſt à dire en ſorte que les deux coſtez de l'angle ſoient en même raiſon que les deux parties de la baſe, l'angle eſt diviſé par la moitié.

C'eſt la Converſe du precedent Corollaire qui ſe prouve en cette maniere.

Soit l'angle *b k d* diviſé par *k c*, en ſorte que

b c. c d. :: k b. k d.



Si nous ſuppoſons que ce meſme angle eſt diviſé par la moitié par *k x*, il s'enſuit par le precedent Corollaire que

b x. x d :: k b. k d.

Donc *b x. x d :: b c. c d.*

Donc *componendo b d. x d :: b d. c d.*

Donc les points *x* & *c* ne ſçauroient eſtre que le meſme point, & *k x* & *k c* la meſme ligne. Donc *k c* diviſe l'angle par la moitié. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCD LYON 1

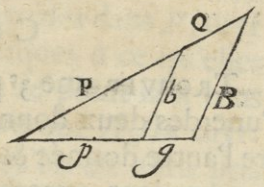
I. Probleme.

Trouver une 4e proportionelle. C'eſt à dire ayant la 1re, la 2e & la 3e, de 4 lignes proportionelles trouver la 4e. XXXIV.

Ou ayant les deux premiers termes d'une raiſon, & l'antecedent de la 2e, en trouver le conſequent.

Le moyen le plus facile eſt de ſe ſervir pour cela du premier Corollaire du ſecond Theoreme. (13. S.) Et ainſi donnant les meſmes noms aux trois données & à la 4e, qui eſt à trouver, j'appeleray

La 1re p.
La 2e q.
La 3e *p*.
Et la 4e à trouver *q*.



Cela eſtant, il faut

1°. Mettre p & q ſur une meſme ligne.

2°. Faire un angle de *p* la 3e avec p la 1re.

3°. Joindre par *b* les extremitez de la 1re & de la 3e.

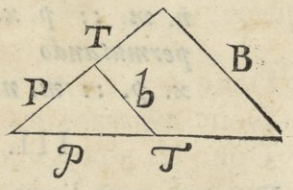
4°. Prolonger indefiniment *p* la 3e.

5°. De l'extremité de q la 2e tirer *B* perallele à *b*, juſqu'à la rencontre de *p* prolongée.

Le prolongement de *p* juſqu'à la rencontre de *B* ſera la 4e que l'on cherche. Car il eſt clair par le Corollaire ſuſdit (13. S.) que p. q. :: *p*. *q*.

On peut encore faire la meſme choſe d'une autre maniere, qui eſt de renfermer la plus petite des deux premieres données dans la plus grande: & alors la plus grande s'appellera T, & la plus petite qui en eſt partie p. XXXV.

Mais il faut prendre garde ſi la premiere des données eſt la plus petite ou la plus grande. Car ſi c'eſt la plus grande, il faudra commencer par T, & la 3e ſera auſſi *T*. Et alors pour trouver *p*, qui ſera la 4e que l'on cherche, aprés auoir joint par *B* les extremitez de T & de *T*. *b* parallele à *B* eſtant tirée de l'extre-



mité de p sur *T* donnera *p*. Car il est encor clair par le mesme Corollaire que

T. p. :: *T*. *p*.

Que si la 1re des deux données est la plus petite, la 3e sera *p*, & la 4e à trouver sera *T*. De sorte qu'aprés avoir joint par *b* les extremitez de p & *p*, il faudra prolonger *p*, & tirant de l'extremité de T sur le prolongement de *p*, *B* parallele à *b*, on aura *T* pour la 4e à trouver. Car par le même Corollaire (13. S.) *permutando*.

p. T :: *p*. *T*.

Corollaire.

XXXVI. Trouver une 3e proportionelle, c'est à dire faire que l'une des deux données soit moyenne proportionelle entre l'autre donnée & la trouvée. C'est la mesme chose que le precedent, excepté qu'une seule des deux données tient lieu de la 2e & de la 3e.

II. Probleme.

XXXII. Trouver la ligne qui soit à une ligne donnée en raison donnée.

Soit la ligne donnée p, la raison donnée *m*. *n*, la ligne que lon cherche *x*. Ainsi il faut trouver.

x. *p*. :: *m*. *n*.

Or pour cela il ne faut que transporter les termes en commençant par *n*, & les mettant ainsi,

n. *m*. :: *p*. *x*.

& puis trouver *x* par le Probleme precedent. Ce qu'étant fait on aura ce que l'on cherche, parce que si

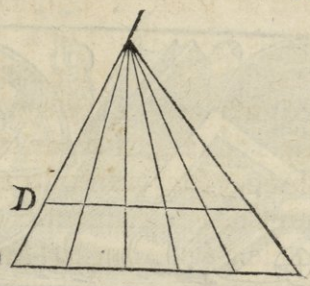
n. *m*. :: *p*. *x*.
permutando
x. *p*. :: *m*. *n*. Ce qu'il faloit demonstrer.

III. Probleme.

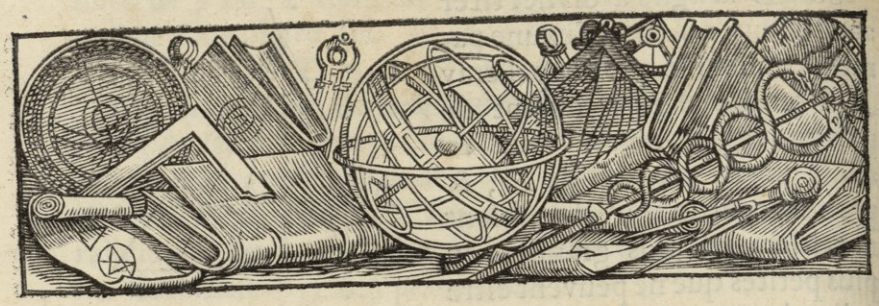
Diviser une ligne donnée en quelque aliquotes que l'on voudra.

SCD LYON 1

Soit *D* la ligne à diviſer tirer au deſſous ou au deſſus une parallele indefinie que j'appelleray *P*. Prendre dans *P* autant de parties égales qu'on veut en avoir en la diviſion de *D*, & prendre garde qu'elles ſoient notablement plus grandes ou plus petites que ne peuvent eſtre celles de *D*; puis de deux points entre leſquels ſont compriſes toutes les parties égales qu'on a priſes dans *P*, tirer deux lignes par les extremitez de *D*. juſques à ce qu'elles ſe joignent: toutes les lignes tirees de ce point là à tous les points de la diviſion de *P* qui couperont *D*, la diviſeront en autant de parties égales qu'on en aura pris dans *P*.



La preuve en eſt cy-deſſus dans le 5e Corollaire du 2e Theoreme. (22. S.)



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE ONZIE'ME.

DES LIGNES RECIPROQUES.

CE livre cy sera encore de la proportion des lignes, & contiendra plusieurs choses nonvelles que l'on jugera peut estre plus belles & plus generales, que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matiere des proportions, en ne se servant que des lignes droittes & des cercles.

Pour les mieux faire entendre nous proposerons quelques Lemmes qui feront voir aussi en quoy est different ce que l'on traite dans ce livre de ce qui vient d'estre traitté dans le livre precedent, & nous le diviserons en 7. sections.

SECTION

SECTION I.

Lemmes & de ce qu'on entend par les Antiparalleles: avec le plan des principales choſes qu'on doit traiter dans ce livre.

I. LEMME.

QUAND il y a proportion entre 4 lignes, on y doit remarquer en les comparant deux à deux, deux rapports fort differens. I.

L'un eſt celuy qui fait dire que les unes ſont proportionelles aux autres.

Et l'autre, que les unes ſont reciproques aux autres.

Car ſi on compare ou la 1re & la 3e avec la 2e & la 4e, c'eſt à dire les deux antecedens avec les deux conſequens;

Ou les deux premieres avec les deux dernieres, c'eſt à dire le 1er antecedent & ſon conſequent avec le 2e antecedent & ſon conſequent; on dit alors que les unes ſont *proportionelles* aux autres.

Mais ſi on compare la 1re & la 4e avec la 2e & la 3e, c'eſt-à dire les extrêmes avec les moyens; on dit alors que les unes ſont *reciproques* aux autres.

Tout ce que nous avons dit dans le livre precedent ne regarde que le premier rapport.

Et tout ce que nous dirons dans celuy-cy ne regarde preſque que le ſecond, & c'eſt pourquoy nous l'avons intitulé des lignes reciproques.

II. LEMME.

UNE ſeule ligne peut eſtre dite reciproque à deux lignes, & deux lignes eſtre reciproques à une ſeule. Mais c'eſt lors ſeulement que cette ligne que l'on compare ſeule avec deux autres eſt moyenne proportionelle entre ces deux autres. Car alors elle en vaut deux, parce qu'elle fait deux termes de la proportion. Le premier & le dernier quand on commence par elle: comme ſi je dis, une ligne II.

SCD LYON 1

de 6 pieds est à une de 4 comme une de 9 à une de 6 : ou le 2e & le 3e quand on la met au milieu, comme si je dis 4. 6 :: 6. 9. Et il faut remarquer que quoique cette derniere disposition soit la plus ordinaire, il y a neanmoins des rencontres où il est utile de se servir de la premiere, comme on pourra voir à la fin de ce Livre.

III. Lemme.

III. Lorsqu'un angle a deux bases, & que les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base chacun à chacun, cela peut arriver en deux manieres.

La premiere est quand l'angle que l'une des bases fait sur un costé est égal à l'angle que l'autre base fait sur le même côté. (J'appelle le mesme côté la mesme ligne droite tirée du sommet, quoique considerée selon les diverses bases elle tienne lieu de deux costez.)

Or il est visible que cela ne peut estre que quand les bases de cet angle sont paralleles, comme l'on a veu X. 13.

La seconde maniere est quand l'angle qu'une base fait sur un côté est égal à l'angle que l'autre base fait sur l'autre costé. Et alors on peut appeller ces bases *antiparalleles*, pour marquer leur effet oppose à celuy des bases paralleles. Ce sont ces sortes de bases qui feront presque toutes les preuves dans tout ce Livre.

IV. Lemme.

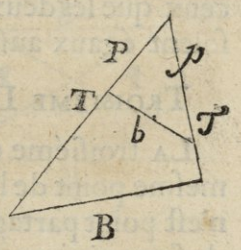
IV. Les bases paralleles d'un méme angle ne peuvent estre disposées que d'une seule maniere, qui est d'estre toutes separées l'une de l'autre. Car c'est le propre des paralleles de ne se pouvoir jamais joindre. Mais les antiparalleles peuvent estre disposées en trois manieres differentes.

Premiere Disposition des Antiparalleles.

V. La premiere ressemble à celle des paralleles, les deux antiparalleles étant aussi toutes separées, & alors il est visible que les côtez de cet angle selon la derniere base

SCD LYON 1

que nous appellerons B, comprennent les costez de ce mesme angle selon la premiere base que nous appellerons b : & ainsi les unes sont *toutes*, & les autres leurs premieres parties, c'est à dire leur partie la plus proche du sommet (& remarquez que dans tout ce Livre se sera toûjours celle-là que nous entendrons par le nom de partie. où de 1e partie.)



C'est pourquoy comme dans l'autre Livre nous appellerons toûjours les deux toutes T. *T*.
& leurs parties p. *p*.
de sorte que p de caractere romain sera toûjours la partie de T du mesme caractere romain : Et *p* de caractere italien sera toûjours la partie de *T* de caractere italien.

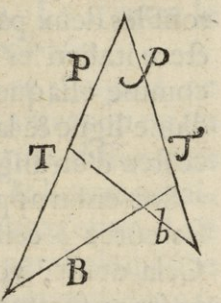
Or afin que les bases B & b soient antiparalleles, il est clair qu'il faut ;

Que l'angle que T premiere toute fait sur B, soit égal à l'angle que *p* partie de la seconde toute fait sur b. Et que l'angle que *T* seconde toute fait sur B soit égal à l'angle que p partie de la premiere toute fait sur b.

Seconde Disposition des Antiparalleles.

La seconde est quand elles se croisent. Et alors ce ne sont pas les deux toutes qui sont les costez au regard d'une base, & les deux parties qui le sont au regard de l'autre, comme dans la premiere disposition. VII.

Mais les costez au regard de chaque base sont une toute & la partie de l'autre toute. Et ainsi pour distinguer les deux bases nous appellerons B celle qui se trouve terminée par l'extremité de T, & l'autre b.

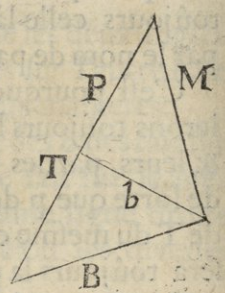


Or afin que les bases soient antiparalleles dans cette disposition, il est clair qu'il faut que les angles que les deux toutes font, l'une sur B & l'autre sur b, soient égaux ; Et que

ceux que les deux parties font l'une sur B & l'autre sur b soient égaux aussi.

Troisieme Disposition des Antiparalleles.

VII. La troisiéme est quand les deux baſes se joignent en un meſme point de l'un des côtez. Et alors comme ce côté n'eſt point partagé, & que ſeul il tient lieu d'une toute & de ſa partie, nous l'appellerons *M*, appellant à l'ordinaire la derniere baſe *B*, la premiere *b*, le côté partagé T, & ſa partie p.



Or afin que les baſes *B* & *b* ſoient antiparallaleles, il faut que l'angle que T fait ſur *B* ſoit égal à l'angle que *M* fait ſur *b*, & que l'angle que *M* fait ſur *B* (qui comprend celuy qu'elle fait ſur *b*) ſoit égal à l'angle que p fait ſur *b*.

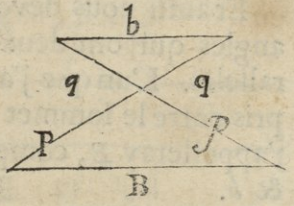
V. Lemme.

VIII. Lorsque deux lignes ſe coupant font 4 angles qui ſont deux à deux oppoſez au ſommet, & par conſequent égaux, on peut donner des baſes à deux de ces angles opoſez au ſommet qui ſoient telles que ces angles ſoient ſemblables, c'eſt à dire, que les deux angles ſur la baſe de l'un ſoient égaux aux deux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun. Mais cela peut arriver en deux manieres, que pour mieux faire entendre, p & q de caractere romain marqueront les deux parties d'une meſme ligne, & *p* & *q* de caractere italien les deux parties de l'autre ligne. Et de plus, comme chaque angle doit avoir pour ſes coſtez la partie d'une ligne & la partie d'une autre ligne, p & *p* ſeront les coſtez d'un angle, & q & *q* les côtez de l'autre.

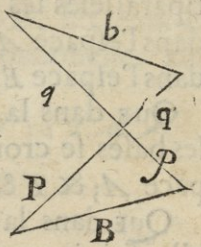
Soit enfin appelée *B* la baſe de l'angle qui a p & *p* pour ſes côtez *b* celle de l'angle qui a *q* & q pour ſes côtez. Cela étant, voicy les deux manieres dont ces angles oppoſez au ſommet peuvent eſtre ſemblables.

SCD LYON 1

La 1re est quand ce sont les angles alternes qui sont égaux sur les deux bases. C'est à dire quand ce sont les deux parties d'une même ligne, comme p & q, qui font des angles égaux p sur *B*, & q sur *b*, & ainsi des deux autres, & alors il est clair que ces deux bases doivent estre paralleles.



La 2e est quand ce sont les angles de proche en proche qui sont égaux sur les deux bases: de sorte que ce sont p & *q*, parties l'une d'une ligne & l'autre de l'autre, qui font les angles égaux p sur *B*, & *q* sur *b*, & *p* & q qui font aussi les angles égaux *p* sur *B*, & q sur *b*. IX.



Ce sont encore ces bases que nous appellerons *antiparalleles*, pour marquer leur effet contraire à celuy des paralleles.

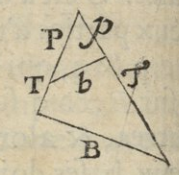
VI. Lemme. X.

Comme lorsqu'un angle a deux bases paralleles, on peut & on doit considerer ces côtez selon une base dans un espace parallele, & ses autres costez selon l'autre base dans un autre espace parallele. Il en est de même quand les bases sont antiparalleles, avec cette difference.

Que quand les bases sont paralleles, une seule ligne tirée par le sommet fait trois espaces paralleles. Le 1er compris entre le sommet & la derniere base. Le 2e entre le sommet & la 1e base. Le 3e entre les deux bases.

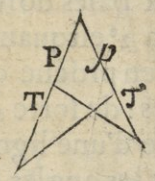
Mais quand elles sont antiparalleles, ce 3e espace ne peut pas estre parallele. Et pour les deux autres on ne les peut concevoir qu'en s'imaginant deux lignes differentes tirées par le sommet, l'une parallele à *B*, & l'autre parallele à *b*. Car *B* & *b* n'estant pas paralleles entr'elles, il est visible qu'une seule ligne ne peut pas estre parallele à l'une & à l'autre; mais il suffit de s'imaginer ces lignes tirées par le sommet, sans qu'il soit necessaire de les décrire.

Et ainsi nous devons toûjours nous imaginer dans ces angles qui ont deux baſes antiparalleles deux eſpaces paralleles. L'un que j'appelleray *A*, compris entre le ſommet & *B*. Et l'autre que j'appelleray *E*, compris entre le ſommet & *b*.



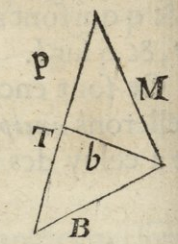
XI. Et de plus il faut remarquer,

Que dans la 1e diſpoſition des baſes antiparalleles les deux toutes T & *T* ſont dans l'eſpace *A*, & les deux parties p & *p* dans l'eſpace *E*.



XII. Que dans la ſeconde, qui eſt quand les baſes ſe croiſent, *T* & *p* ſont dans l'eſpace *A*; & *T* & p dans l'eſpace *E*.

XIII. Que dans la troiſiéme, qui eſt quand elles ſe joignent en un ſeul point d'un côté, *M* ſe trouve dans l'un & l'autre eſpace. Car l'eſpace *A* comprend T & *M*: Et l'eſpace *E*. *M* & p.



VII. Le'mme.

XIV. Il en eſt de meſme quand les angles oppoſez au ſommet ont leurs baſes antiparalleles.

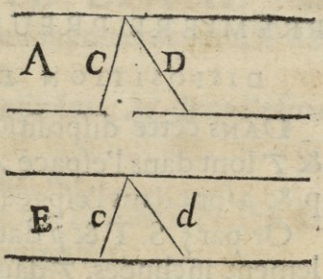
Car il ſe faut imaginer deux lignes tirées par le ſommet commun, dont l'une ſoit parallele à *B* & l'autre *à b*; & ainſi l'on aura deux eſpaces paralleles, l'un compris entre le ſommet & *B* (dans lequel ſont p & *p*) que nous appellerons *A*. Et l'autre compris entre ce meſme ſommet & *b* (dans lequel ſont q & *q*) que nous appellerons *E*.

VIII. Lemme.

XV. Tout ce qu'on aura à prouver dans ce Livre le ſera par le premier Theoreme du Livre precedent, que je repeteray encore icy, afin qu'on l'ait plus preſent dans l'eſprit.

SCD LYON 1

Si deux lignes (comme *C* & *D*) ſont dans un meſme eſpace parallele, comme eſt l'eſpace *A*.



Et que deux autres lignes comme (*c* & *d*) ſoient dans un autre eſpace parallele, comme eſt l'eſpace *E*.

Si C & *c* ſont également inclinées ; *C* dans *A*, & *c* dans *E*, & que *D* & *d*, ſoient auſſi également inclinées *D* dans *A* & *d* dans *E*, les deux également inclinées entr'elles ſont proportionelles aux deux qui le ſont auſſi entr'elles.

C. c :: D. d. & alternando C. D :: c. d.

IX. LEMME.

POUR ne ſe point broüiller en diſpoſant les termes, il eſt bon de s'abſtraindre à donner toûjours pour premier & deuxiéme termes de la proportion les également inclinées dans les deux differens eſpaces paralleles, & de meſme au regard du troiſiéme & du quatriéme. Et pour premier & troiſiéme termes, celles qui ſont dans le meſme eſpace parallele. Et de meſme au regard du deuxiéme & du quatriéme. Sauf à les diſpoſer aprés autrement, *Alternando*. XVII.

I. PROPOSITION FONDAMENTALE.

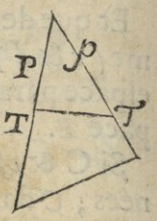
DES RECIPROQUES.

LORSQU'UN meſme angle à deux baſes antiparalleles, une toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie. C'eſt à dire que XVII.

T. *p* :: *T*. p. ou T. *T* :: *p*. p.

PREMIERE PREUVE DANS LA PREMIERE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

XVIII. DANS cette disposition les deux toutes T & *T* sont dans l'espace *A*, & les deux parties p & *p* sont dans l'espace *E*. (par 11. S.)



Or par 5. S. T & *p* dans *E*. & *T*. & p également inclinées, *T* dans *A*, & p dans *E*.

Donc (par 15. S.) T. *p* :: *T*. p.

Or T & sa partie p sont les extremes de la proportion, dont *T* & *p* sa partie sont les moyens.

Donc une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

SECONDE PREUVE DANS LA SECONDE DISPOSITION DES ANTIPARALLELES.

XIX. DANS cette 2e disposition T & *p* (partie de l'autre toute) sont dans l'espace *A*, & *T* & p dans l'espace *E*. (par 12. S.)

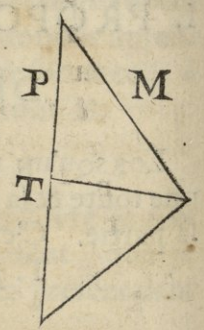
Or (par 5. S.) T & *T* son également inclinées, T dans *A*, & *T* dans *E*. Et de même p & *p* également inclinées, p dans *A* & *p* dans *E*.

Donc (par 15. S.) T. *T* :: *p*. p.

Je reserve la 3e disposition pour un Corollaire à part.

COROLLAIRE.

XX. QUAND un angle a deux bases antiparalleles dans la 3e disposition, qui est quand elles se joignent à un seul point d'un costé, ce costé est moyenne proportionelle entre l'autre costé entier & sa partie : C'est à dire que



T. *M* :: *M*. *p*.

Car (par 13. S.) dans cette disposition *M* est dans l'un & l'autre espace, parce que T & *M* sont dans l'espace *A*, & *M* & p dans l'espace *E*.

Or

Or (par 5. S.) T & *M* ſont également inclinées, T dans l'eſpace *A*, & *M* dans l'eſpace *E*.

Et *M* & p ſont également inclinées, *M* dans l'eſpace *A* & p dans l'eſpace *E*.

Donc (par 15. S.) *T*. *M* :: *M*. p.

II. PROPOSITION FONDAMENTALE

DES RECIPROQUES.

QUAND deux lignes ſe coupant font deux angles oppoſez au ſommet qui ont des baſes *antiparalleles*, les parties de l'une de ces lignes qui ſe coupent en ce ſommet ſont reciproques aux parties de l'autre. (*Voyez la figure du n.* 9) XXI.

Car (par 14. S.) p & *p* ſont dans l'eſpace *A*, & q & *q* ſont dans l'eſpace *E*.

Or (par 9. S.) p & *q* ſont également inclinées, p dans *A*, & *q* dans *E*.

Et *p* & q également inclinées, *p* dans *A* & q dans *E*.

Donc (par 15. S.)

p. *q* :: *p*. q.

Or p & q ſont les parties de la même ligne: & *p* & *q* ſont les parties de l'autre ligne.

Donc les parties d'une ligne ſont reciproques aux parties de l'autre.

COROLLAIRE.

SI une de ces lignes qui en ſe coupant font des angles oppoſez au ſommet, qui ont des baſes *antiparalleles*, eſt diviſée par la moitie, une ſeule de ces moitiez eſt moyenne proportionelle entre les parties de l'autre ligne. XXII.

Cela eſt clair, puiſque c'eſt la même choſe de donner pour les moyens de cette proportion les deux moitiez de la même ligne, ou une ſeule moitié priſe deux fois.

PLAN GENERAL DE CE QUE L'ON PRETEND MONTRER DANS LA SUITE DE CE LIVRE.

Nous avons déja dit que les extremes d'une proportion comparez aux moyens s'appellent reciproques: & qu'ainſi il y en a dans toute proportion. XXIII

SCD LYON 1

Mais ce que l'on pretend principalement faire dans ce livre eſt de monſtrer comment deux lignes droites qui ſe rapportent a une meſme, ou parce qu'elles en ſont les deux parties, ou parce que l'une eſt la toute, & l'autre une partie de cette toute, ſont reciproques à deux autres lignes, qui ſe rapportent de la meſme ſorte à une meſme ligne : ou quelquefois meſme à une ſeule qui étant repetée deux fois fera ou les deux extremes ou les deux moyens de la proportion.

Il faut pour cela que les deux lignes à chacune deſquelles, deux ſe rapportent, & que par cette raiſon ont peut appeller les principales *ayent un point commun, ce qui peut eſtre en deux manieres. Ou paree qu'elles ſe coupent en un meſme point ſans paſſer plus outre, & alors ce point commun s'appellera* terminant.

Quand le point commun eſt de ſection, *chaque ligne étant coupée en deux, ce ſont les deux parties d'une meſme ligne qui doivent eſtre reciproques aux deux parties de l'autre. Et alors ce point commun aux deux* principales *l'eſt auſſi aux* 4. *lignes: quoy que ce ne ſoit qu'au regard des principales qu'il ſoit point de* ſection : *car les parties ne s'y coupent pas, mais y aboutiſſent.*

Mais quand le point eſt terminant *au regard des principales (car cela ſeul ne donneroit que deux lignes & qu'il en faut* 4. *ou au moins* 3.) *il eſt neceſſaire que ces lignes principales qui ſont terminées par ce point commun, ſoient encore toutes deux coupées en quelque autre endroit (ou au moins l'une) afin que cela puiſſe faire* 4. *lignes (ou au moins* 3.) *Et alors ce ſont les deux toutes, & la partie de chacune vers le point commun qui font les* 4. *lignes : & il faut que ce ſoit chaque toute & ſa partie vers le point commun qui ſoient reciproques à l'autre toute & à ſa premiere partie.*

Quand le point eſt de ſection *les deux principales ſe coupant font* 4. *angles dans ce point de ſection ; mais il ſuffit d'en conſiderer deux oppoſez au ſommet. Et il faut alors que ces deux Angles qui ſont égaux ayent leurs baſes antiparalleles, ſelon ce qui vient d'eſtre dit n.* 9.

Mais qnand le point eſt terminant, *c'eſt le meſme angle*

SCD LYON 1

qui doit avoir deux baſes antiparalleles, & l'une des trois manieres qui ont eſté repreſentées S. 18. 19. 20.

Il n'eſt donc queſtion que de chercher les voyes generales pour trouver ſes baſes antiparalleles.

Or voity ce qui m'eſt venu en penſée ſur cela.

I'ay reconnu qu'il n'y a point de voye generale pour couper tout d'un coup les coſtez d'un angle, ou les coſtez de deux angles oppoſez au ſommet par des baſes antiparalleles qu'en y employant la circonference d'un cercle : c'eſt pourquoy on ne peut trouver ſur cela la moyenne proportionelle entre deux lignes données.

I'ay inferé de là qu'il falloit que le point commun dont nous venons de parler, ſoit qu'il ſoit de ſection, *ou* terminant, *ait rapport à la circonference d'un cercle. C'eſt à dire qu'il faut qu'il ſoit ou*

1. *Dans le Cercle.*
2. *Hors le Cercle.*
3. *Dans la circonference du Cercle.*

Quand le point commun eſt au dedans du cercle, c'eſt toûjours un point de ſection, & ce ſont deux angles oppoſez au ſommet qui ont leurs baſes antiparalleles. Car il faut que les 4. lignes dont deux ſont reciproques aux deux autres, ſoient les deux parties de chacune des principales qui ſe coupent en un point quelconque au dedans du cercle, & qui ſe termineut de part & d'autre à 4. points differens de la circonference.

Quand le point commun eſt hors le cercle, c'eſt toûjours un point terminant. Car ce ſont deux toutes qui partant de ce point qui eſt hors le cercle coupent chacune la circonference du cercle en un point de ſa convexité, & ſe terminent à un autre point de ſa concavité, & alors ce ſont chaque toute & ſa partie hors le cercle qui ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie qui eſt auſſi hors le cercle. Mais il peut arriver que l'une de ces lignes ne faiſant que toucher le cercle ſans paſſer plus outre, le point auquel elle aboutira tenant lieu de cenvexité & de concavité, elle ſera toute ſeule reciproque à l'autre toute & à ſa partie, c'eſt à dire qu'elle en ſera moyenne proportionelle.

SCD LYON 1

Mais quand le point commun eſt dans la circonference meſme du cercle, on a beſoin pour avoir des reciproques d'une ligne droite indefinie outre la circulaire, qui coupe perpendiculairement celle qui peut eſtre menée indefiniment du point commun en paſſant par le centre. Et alors cette ligne indefinie *ou coupe le cercle ou le touche, ou eſt au deſſous, ou eſt au deſſus. I'appelle au deſſous celle qui eſt telle, que le centre eſt entre cette ligne & le point commun. I'appelle au deſſus celle qui eſt à l'oppoſite.*

Dans les trois premiers cas le point commun eſt toûjours un point terminant, *& chacune des deux lignes qui en partent, ou coupe le cercle & eſt terminée par l'indefinie, ou coupe l'indefinie & eſt terminée par le cercle. Et alors chaque toute & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie. Mais il y en peut avoir une qui ſe terminera à un point commun à la circonference & à l'indefinie, & alors elle ſera moyenne proportionelle entre l'autre toute & ſa partie.*

Mais le 4. cas, c'eſt à dire quand l'indefinie eſt au deſſus du point commun, ce point commun ne peut eſtre qu'un point de ſection. *Car toutes les fois que des lignes ſe couperont dans ce point & ſe termineront d'une part à la circonference & de l'autre à l'*indefinie, *les parties de l'une ſont reciproques à celles de l'autre.*

Il faut relire tout le Livre IX. Car c'eſt ſur ce qui y eſt dit que ſont fondées les demonſtrations de celuy-cy.

DEUX AVIS DE LOGIQUE.

I.

XXIV. *Quand on a à prouver qu'un angle ayant deux baſes, les angles ſur une ſont égaux aux angles ſur l'autre chacun à chacun, on eſt aſſuré que cela eſt, quand on a prouvé que l'un des angles ſur une baſe eſt égal à l'un des angles ſur l'autre, parce qu'il s'enſuit de là neceſſairement que l'autre eſt égal auſſi à l'autre.*

Cette preuve eſt convaincante, & on s'en doit paſſer quand on ne peut mieux. Mais il faut avoüer qu'elle n'eſt pas ſi

SCD LYON 1

bonne & ne fait pas si bien entrer dans la nature des choses, que celle qui montre positivement que l'un & l'autre angle d'une base est égal à l'un & l'autre angle de l'autre. Et c'est pourquoy je ne me contenteray point de la premiere sorte de preuve, & me serviray toûjours de cette derniere.

2.

Quand on a à prouver de plusieurs binaires de lignes, qu'ils sont reciproques les uns aux autres, on en est asseuré quand on peut montrer qu'ils sont tous reciproques à un même binaire, ou qu'ils ont tous la même moyenne proportionelle.

Mais quoique cela soit convaincant, l'esprit ne reçoit pas la même clarté & ne demeure pas si satisfait, que si on montroit immediatement de chaque binaire qu'il est reciproque à chaque autre.

Et ainsi, quoy qu'il me fust facile d'employer la premiere voye, je me suis resolu de n'employer que cette derniere comme plus parfaite & plus lumineuse pour parler ainsi, & peut estre qu'on trouvera que ces deux exemples sont remarquables pour faire voir la difference qu'il y a entre convaincre l'esprit en le mettant hors d'estat de pouvoir douter qu'une chose soit; & le satisfaire pleinement en luy donnant toute la clarté qu'il peut raisonnablement desirer.

Réprenons maintenant la division proposée, qui est que le point commun aux lignes reciproques par la section du cercle, est necessairement

1. *Ou dans le cercle.*
2. *Ou hors le cercle.*
3. *Ou dans la circonference du cercle.*

SCD LYON 1

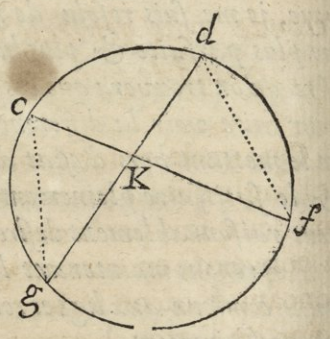
SECTION II.

Premiere voye generale pour trouver des Reciproques quand le point cammun eſt au dedans du cercle.

XXVI. CETTE voie eſt pour trouver que les parties d'une ligne ſont reciproques aux parties d'une autre ligne, ou à une ligne quand elle eſt moyenne proportionelle. Et ainſi elle eſt toute appuyée ſur la 2e Propoſition fondamentale & ſon Corollaire (21. & 22. S.) qui eſt des angles oppoſez au ſommet qui ont leurs baſes antiparalleles.

VII. THEOREME.

XXVII. SI deux cordes ſe coupent dans le cercle, les parties de l'une ſont reciproques aux parties de l'autre.



Soient les cordes *c f* & *d g* qui ſe coupent en *k*. Soient tirées les baſes à deux angles oppoſez *c g*. *d f*. Je dis qu'elles ſont antiparalleles.

Car (par 9. 18.) les angles vers *g* & vers *f* ſont égaux, parce qu'ils ſont appuyez ſur le même arc *c d*. Et par la même raiſon les angles vers *c* & vers *d* ſont égaux auſſi, étant appuyez ſur le même arc *g f*.

Donc les baſes *c g* & *d f* ſont antiparalleles.

Donc par la 2e Propoſition fondamentale (21. S.)

k f. *k g* : : *k d*. *k c*.

p. *q* : : *p*. *q*.

VIII. THEOREME.

COROLLAIRE DU SEPTIEME.

XXVIII. SI une des lignes eſt coupée par la moitié, une de ces moitiez eſt moyenne proportionelle entre les deux parties de l'autre.

SCD LYON 1

C'eſt le Corollaire même de la 2e Propoſition fondamentale.

Corollaire.

Si d'un point quelconque d'un diametre on éleve une perpendiculaire juſques à la circonference, cette perpendiculaire ſera moyenne proportionnelle entre les deux parties du diametre. XXXIX.

Car il eſt clair que cette perpendiculaire eſt la moitié de la corde qui couperoit le diametre perpendiculairement par ce point. Donc par le Theoreme precedent elle doit eſtre moyenne proportionelle entre les parties du diametre.

SECTION III.

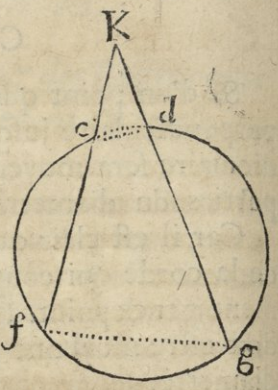
Seconde voie generale pour trouver des Reciproques quand le point commun eſt hors le Cercle.

Quand le point commun eſt hors le cercle : les côtez de l'angle qui l'a pour ſommet peuvent eſtre coupez chacun deux fois par la circonference du cercle ; une fois par la convexité en entrant dans le cercle, & une fois par ſa concavité, où on les ſuppoſe terminées ; ſi ce n'eſt que le point de l'attouchement tenant lieu tout ſeul de la convexité & de la concavité, un des coſtez peut n'eſtre terminé qu'à ce point. Et alors il ſera tangente du cercle, & les deux baſes antiparalleles n'auront que trois points differens. C'eſt ce qu'on verra dans les deux Theoremes ſuivans. XXX.

SCD LYON 1

III. THEOREME.

XXXI. LORSQUE d'un point hors le cercle on tire des lignes qui coupent le cercle en sa convexité, & sont terminées en sa concavité, chaque toute, & sa partie hors le cercle, sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie hors le cercle.



Soient tirées $k f$, qui coupe la circonference en c; & $k g$ qui la coupe en d. Je dis que les baſes $f g$ & $c d$ ſont antiparalleles.

Car (par IX. 16.) l'angle $k c d$ a pour meſure la moitié des deux arcs $c d$, & $c f$. Or la moitié de ces deux arcs $c d$ & $c f$ eſt auſſi la meſure de l'angle $k g f$. (par IX. 18.) Donc les angles $k c d$ & $k g f$ ſont égaux.

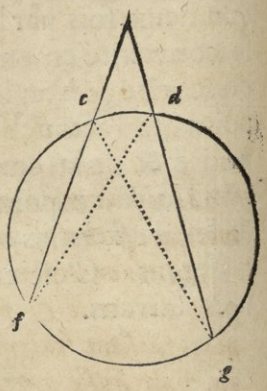
On prouvera de la meſme ſorte l'égalité des angles $k d c$ & $k f g$.

Donc les baſes $f g$ & $c d$ ſont antiparalleles.

Donc $k f . k d :: k g . k c$.

T. p :: T. p.

XXXII. ON peut auſſi prouver ce Theoreme en croiſant les baſes, en montrant que les baſes $f d$ & $g c$ ſont antiparalleles.



Cat les angles vers f & vers g ſont égaux eſtant appuyez ſur le même arc $c d$.

Et pour les angles $k c g$ & $k d f$, ils ſont égaux, parce que ſi on les examine (par IX. 16.) on trouvera qu'ils ont chacune pour meſure la moitié des trois arcs $f c$, $c d$, $d g$.

Donc les baſes $f d$ & $g c$ ſont antiparalleles.

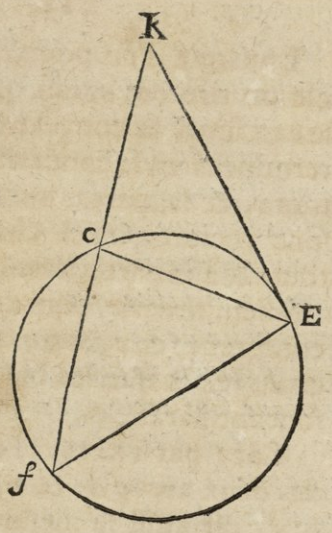
Donc $k f . k g :: k d . k c$.

T. T :: p. p.

IV. THEO-

IV. THEOREME.

COROLLAIRE DU CINQUIEME.



XXXIII.

Si l'une de ces lignes tirées d'un point hors le cercle eſt une tangente, cette tangente eſt moyenne proportionelle entre chaque toute & ſa partie hors le cercle.

Soit tirée *k f* qui coupe le cercle en *c* & la tangente *k E*; je dis que les baſes *f E* & *c E* ſont antiparalleles. Car (par IX. 18.) l'angle *k f E*, a pour meſure la moitié de l'arc *c E*, qui eſt auſſi la meſure de l'angle *k E c* (par IX. 13.)

Et l'angle *k E f*, (par IX. 15.) a pour meſure la moitié des deux arcs *E c* & *c f*, qui eſt auſſi la meſure de l'angle *k c E*, par IX. 16.)

Donc les baſes *f E* & *E c* ſont antiparalleles.

Donc par 29. S.

k f. k E. :: *k E. k c.*
T. *m* :: *m.* p.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a rien juſqu'icy qui ne ſoit dans toutes les Geometries: ſi ce n'eſt qu'il eſt prouvé d'une maniere nouvelle. XXXIV.

Mais on le pourroit encore faire comprendre d'une maniere plus naturelle & plus ſimple ſans conſiderer aucuns angles, mais faiſant ſeulement attention à la nature du cercle: ce qui fera voir auſſi pourquoy on a beſoin d'un cercle pour couper des lignes Reciproquement.

Soit que le point commun ſoit au dedans du cercle ou au dehors, on peut conſiderer entre toutes les lignes qui ſe coupent dans ce point ou qui partent de ce point, celle qui paſſe par le

centre que nous appellerons la centrique, *& les autres* excentriques.

Quand le point eſt au dedans du cercle, la centrique *eſt un diametre, & par conſequent la plus grande ligne qui puiſſe paſſer par le point commun que nous ſuppoſons n'eſtre pas le centre, mais c'eſt auſſi la plus inégalement partagée. Car comme il paroiſt par VII. 25. la plus petite d'une* excentrique *quelconque, eſt plus grande que la plus petite de la* centrique, *& en recompenſe la plus grande partie de* l'excentrique *eſt plus petite que la grande partie de la* centrique. *Et l'uniformité de la ligne circulaire fait que cette compenſation eſt ſi juſte, qu'il ne faut pas s'eſtonner ſi les deux parties de la centrique ſont reciproques aux deux parties de toute excentrique, c'eſt à dire ſi la petite partie de la centrique eſt à la plus petite partie de l'excentrique, comme la plus grande de l'excentrique eſt à la plus grande de la centrique. D'où il s'enſuit auſſi que les deux parties d'une excentrique quelconque doivent eſtre reciproques aux deux parties de toute autre excentrique.*

Il en eſt de meſme quand le point eſt hors le cercle. Car la centrique eſt auſſi la plus longue de toutes, & ſa partie qui eſt hors le cercle eſt au contraire plus courte, que la partie de toute autre qui eſt auſſi hors le cercle. Ce qui faiſant une compoſentation juſte à cauſe de l'uniformité du cercle, on juge aiſement que la centrique & ſa partie hors le cercle doivent eſtre reciproques à toute excentrique & ſa partie hors le cercle; & qu'il eſt de meſme des excentriques comparées les unes aux autres, celles qui approchent le plus de la centrique eſtant toûjours les plus longues, & ayant toûjours auſſi leurs parties de dehors plus courtes.

SCD LYON 1

SECTION IV.

Troiſiéme voie generale pour trouver des Reciproques, quand le point commun eſt dans la circonference du Cercle.

Ie ne croy pas que ce que l'on va dire ſe trouve nulle part. XXXV.

Nous avons déja remarqué que cette derniere voie generale ſe pouvoit diviſer en deux manieres : Dans l'une deſquelles le point commun étoit terminant, *& dans l'autre* de ſection.

Qu'il eſtoit terminant *quand la ligne droite indefinie dont nous allons parler ou coupoit le cercle, ou le touchoit, ou eſtoit au deſſus du cercle.*

Et qu'il eſtoit de ſection, c'eſt à dire que les deux lignes principales s'y coupoient, quand cette ligne indefinie étoit au deſſus du cercle. Il faut donc traiter ſeparement ces deux manieres.

PREMIERE MANIERE DE LA III. VOIE GENERALE.

Quand l'indefinie coupe, ou touche, ou eſt au deſſous du Cercle.

Vne ſeule propoſition comprendra la maniere de trouver une infinité de reciproques. Et il eſt peut eſtre difficile de s'imaginer rien de plus general ſur la proportion des lignes par la Geometrie ordinaire.

PROPOSITION GENERALE.

Si d'un point dans la circonference on tire une ligne indefiniment par le centre, & qu'on en tire une autre indefinie que j'appelleray *y*, qui coupe perpendiculaire-

ment celle qui passe par le centre, en quelque endroit qu'elle la coupe, soit en coupant aussi le cercle, soit en le touchant, soit tout à fait hors le cercle & au dessous: toutes les lignes tirées du point dans la circonference qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference: ou coupées par la circonference & terminées par *y*; seront telles, que chaque toute & sa partie vers le point commun seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie: & chaque toute & sa partie auront pour moyenne proportionelle celle qui sera terminée à un point commun à *y*, & à la circonference.

XXXVII. Cette proposition est si vaste & comprend tant de cas qu'on n'en sçauroit bien voir la verité, qu'en la considerant dans ces cas particuliers qui sont trois principaux.

Le 1er. Quand la ligne *y* coupe le cercle.

Le 2e. Quand elle le touche.

Le 3e. Quand elle est tout à fait hors le cercle, & au dessous.

C'est ce que nous traiterons par divers Theoremes.

Premier Cas.

XXXVIII Le 1er Cas est quand *y* coupe le cercle. Et alors il n'est point necessaire de dire que cette ligne doit estre perpendiculaire à celle qui estant tirée du point *K* passe par le centre: car il suffit de dire (ce qui est la mesme chose) qu'elle doit couper le cercle en deux points, que j'appelleray E & *E*, qui soient également distans de *K*. Cela étant vray, voicy le 1er Theoreme.

V. Theoreme.

XXXIX. Si la ligne *y* coupe le cercle en deux points également distans de *K*, toutes les lignes tirées du point *K* qui seront ou coupées par *y*, & terminées par la circonference, ou coupées par la circonference & terminées par *y*, seront telles que chaque toute & sa partie vers *K* seront reciproques à chaque autre toute & à sa partie vers *K*.

On peut faire sur cela trois comparaisons.

SCD LYON 1

La 1re. De deux lignes qui ſont toutes deux coupées par *y* & terminées par la circonference.

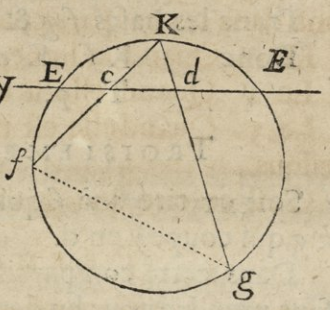
La 2e. De deux lignes qui ſont toutes deux coupées par la circonference, & terminées par *y*.

La 3e. De deux lignes, dont l'une eſt coupée par *y*, & terminée par la circonference, & l'autre coupée par la circonference, & terminée par *y*.

Premiere Comparaison.

XL.

Soient tirées *K f*, qui coupe *y* en *c*; & *K g* qui le coupe en *d*: je dis que les baſes *f g* & *c d* ſont antiparalleles. Donc tout le reſte s'enſuit (par la 1re Propoſition fondamentale, S. 17.



Car (par IX. 42.) l'angle *K c E*, a pour meſure la moitié de l'arc *K E* plus la moitié de l'arc *E f*, & l'arc *K E* eſtant égal à l'arc *K E*, cette meſure eſt égale à la moitié des deux arcs *K* E & E *f*. Or la moitié des deux arcs *K* E & E *f* eſt la meſure de l'angle inſcript *K g f*, parce que l'arc *K* E *f*, ſur lequel il eſt appuyé, comprend ces deux-là.

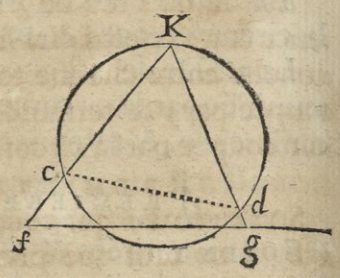
Donc l'angle *K c E* (ou *K c d*) eſt égal à l'angle *K g f*. On prouvera la même choſe des angles *K d c* & *k f g*. Donc ces deux baſes ſont antiparalleles.

Donc (par la 1re Propoſition fond. S. 17.) la toute d'une part & ſa partie ſont reciproques à l'autre toute & à ſa partie. Ce qu'il falloit demonſtrer.

K *f*. K *d*. :: K *g*. K *c*.
T. *p*. :: *T*. p.

Seconde Comparaison.

XLI. Soient tirées kf qui coupe la circonference en c, & kg qui la coupe en d; je dis que les baſes fg & cd ſont antiparalleles.



Car (par IX. 46.) l'angle kfg a pour meſure la moitié de l'arc kc, qui eſt auſſi la meſure de l'angle inſcript kdc. Donc les angles kfg & kdc ſont égaux.

On prouvera de la même ſorte que les angles kgf & kcd ſont égaux.

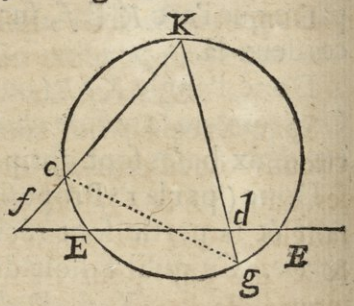
Donc les baſes fg & cd ſont antiparalleles.

Donc $Kf.\ Kd :: Kg.\ Kc.$
$T.\ p. :: T.\ p.$

Troisieme Comparaison.

XLII. Soient tirées kf qui coupe la circonference en c, & kg qui coupe y en d.

Dans cette comparaiſon les baſes ſe croiſent. Car il faut prendre pour les deux baſes fd & gc.



Or pour prouver qu'elles ſont antiparalleles, il faut montrer que les angles kfd, ou kfE. & kgc, ſont égaux. Ce qui eſt facile, puiſqu'il eſt clair (par ce qui vient d'eſtre dit (42. S.) que l'un & l'autre a pour meſure la moitié de l'arc kc, & pour les deux autres kdE & kcg, cela ſe prouve auſſi facilement (par ce qui a eſté dit 40 S.) de l'égalité entre les angles kdf (ou kdE) & kcg.

Donc les baſes fd & gc ſont antiparalleles.

Donc $Kf.\ Kg :: Kd.\ Kc.$
$T.\ T :: p.\ p.$

SCD LYON 1

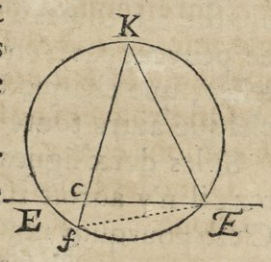
VI. Theoreme.

Corollaire Cinquie'me.

La ligne tirée de *k* au point commun à la circonference & à *y* (c'est à dire *k* E ou *k E*) est moyenne proportionelle entre chaque toute & sa partie, soit qu'elle soit coupée par *y* & terminée par la circonference, soit qu'elle soit coupée par la circonference & terminée par *y*. XLIII.

Premiere Comparaison.

Soit tirée *k f* qui coupe *y* en *c*, & *k E*, il ne faut que prouver que les bases *f*. E & *c*. *E* sont antiparalleles. Ce qui est facile.



Car les angles inscripts *k f E* & *k E c* (ou *k E* E) sont égaux, parce que (par 1x. 17.) l'un est appuyé sur l'arc *k E*, & l'autre sur l'arc *k* E, qui sont égaux.

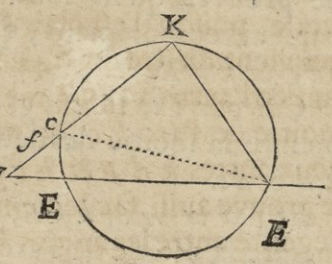
Et pour les angles *k c E*, & *k E f*, leur égalité se prouve de la même sorte que l'égalité des arcs *k f g* & *k d c*, dans le 1er Theoreme. 1re Comparaison.

Donc ces bases sont antiparalleles & disposées en la 3e maniere expliquée dans le 4e Lemme.

Donc K*f*. K E :: K *E*. K *C*.
T. *m* :: *m*. p.

Seconde Comparaison.

Soit tirée *k f* qui coupe la circonference en *c*; je dis que les bases *f E* & *c E* sont antiparalleles. Car les angles *k f E* & *k E c* ont pour mesure la moitié de l'arc *k c*, selon ce qui a esté dit, 1er Theoreme, 2e Comparaison, & les angles inscripts *k E f*, ou *k E k* & *k c E* sont appuyez sur les angles *k* E, qui sont égaux. XLIV.



Donc K*f*. K *E* :: K *E*. K *c*.
T. *m* :: *m*. p.

SCD LYON 1

Second Cas.

XLV. Le 2e Cas de la proposition principale (S. 39.) est quand la ligne *y* touche le cercle en un point diametralement opposé à *k*: ce qui comprend aussi deux Theoremes.

VII. Theoreme.

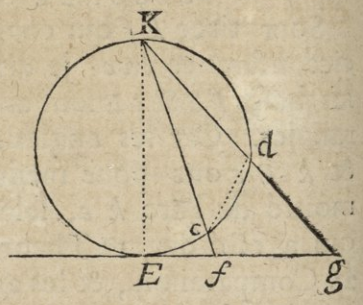
XLVI. Quand *y* touche le cercle en un point diametralement opposé à *k*, toutes les lignes tirées de *k* sur cette ligne (qui ne peuvent pas n'estre point coupées par le cercle) sont telles, que chaque toute & sa partie sont reciproques à chaque autre toute & à sa partie.

Si les deux lignes estoient tirées de deux differens côtez, il n'y auroit rien qui n'eust déja esté prouvé (42. S.) C'est pourquoy nous le proposerons du même côté. Ce qui pourra aussi servir aux cas semblables du 1er Theoreme.

Soient tirées du même côté *k f*, coupée par la circonference en *c*, & *k g* coupée par la circonference en *d*; il faut prouver que les bases *f g* & *c d* sont antiparalleles. Or il y a sur chacune un angle aigu *k g f* (ou *k g E*) & *k c d*, & un obtus *k f g* & *k d c*.

Mais pour les aigus ils sont égaux, parce qu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc *k d*. (par IX. 46.)

Et pour les obtus, il est aisé de prouver qu'ils sont égaux par leurs complemens, qui sont *c d g* & *k f E*.



Car par IX. 16. *c d g*, a pour mesure la moitié des deux arcs *k d* & *d c*.

Et par IX. 46. *k f E*, a pour mesure la moitié de l'arc *k d c*, qui comprend ces deux là.

Donc ces angles aigus sont égaux.

Donc les obtus *k d c* & *k f g*, dont ces aigus sont les supplemens, sont égaux aussi.

Donc

Donc les baſes $f g$ & $c d$ ſont antiparalleles.

Donc $k f. k d :: k g. k c.$

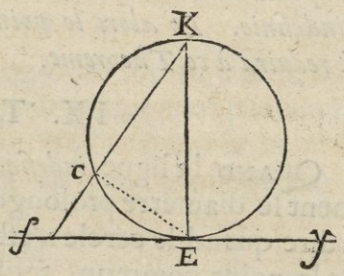
$T. p :: T.$ p.

VIII. THEOREME.

COROLLAIRE DU SIXIE'ME.

LE diametre tiré du point k (& par conſequent tout autre) eſt moyenne proportionelle entre chaque toute & ſa partie. XLVII.

Soit tirée $k f$ qui ſoit coupée en c, les baſes $f E$ & $c E$ ſont antiparalleles.



Car les angles $k E f$, & $k c E$, ſon droits, & par conſequent égaux.

Et les aigus $k f E$, & $k E c$, ont chacun pour meſure la moitié de l'arc $k c$ (par IX. 18. & 46.

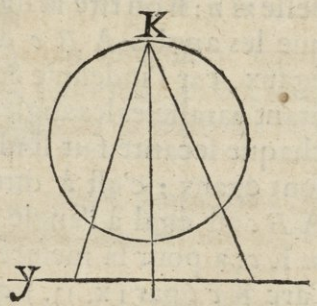
Donc les baſes $f E$ & $c E$ ſont antiparalleles.

Donc $k f. k E :: k E. k c.$

$T. m :: m.$ p.

TROISIEME CAS.

LE 3e Cas eſt quand la ligne y eſt tout à fait hors le cercle & au deſſous : mais comme il n'a aucune difficulté particuliere, nous ne nous y arreſterons point. XLVIII.



Il faut ſeulement remarquer, qu'il n'y a point de moyenne proportionelle dans ce 3e Cas, parce qu'il n'y a aucun point qui ſoit commun à la ligne y, & à la circonference, la ligne y eſtant tout à fait hors le cercle.

SCD LYON 1

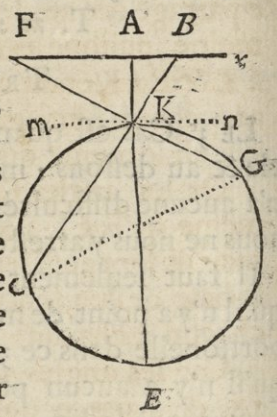
SECONDE MANIERE

De la troiſiéme voie pour trouver des Reciproques. Quand l'indefinie eſt tout à fait hors le Cercle & au deſſus.

Nous avons veu dans le plan, que l'indefinie eſt au deſſus du point commun quand le cercle n'eſt pas entre ce point, & l'indefinie. Et alors le point commun ſera de ſection & tout ſe reduira à ce Theoreme.

IX. THEOREME.

XLIX. QUAND la ligne *indefinie* qui coupe perpendiculairement le diametre prolongé, eſt au deſſus du cercle, c'eſt à dire quand le cercle n'eſt point entre cette ligne *indefinie* & le point commun, toutes les lignes qui ſe couperont dans ce point, étant terminées d'une part par l'*indefinie*, & de l'autre par le cercle, les parties de l'une ſeront reciproques aux parties de l'autre.



SOIT *l'indefinie y*, le diametre prolongé A *E*, le point commun K, l'une des ſecantes *B* C, & l'autre F *G*, & une tangente au point K, qu'on appelle *m n*: ſi on tire la ligne *c G*, je dis que les angles A *B c* & *c G* K, ſont égaux, car l'indefinie & la tengeante étant paralleles les angles alternes que chaque ſecante fait ſur l'une & l'autre ſont égaux : c'eſt à dire que l'angle A *B c* eſt égal à l'angle *m* K *c* : : : Or *m* K *c*, a pour ſa meſure la moitié de l'arc K *c* (par IX. 13.) qui eſt auſſi la meſure de l'angle *c G* K (par IX. 18.) Donc les angles A *B c* & *c G* K, ſont égaux. Et il en eſt de meſme des deux angles A F *G*, & *G c* K. Donc les baſes *B* F & *G c* des deux angles oppo-

SCD LYON 1

ſez en K ſont antiparalleles, par 9 S.

Donc les parties de la ligne *B C* ſont reciproques à celles de la ligne F *G* par 21. S.

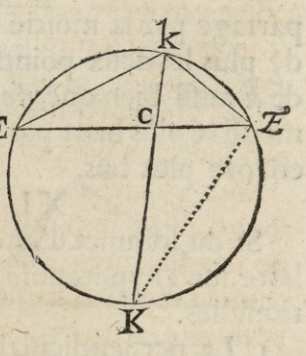
SECTION V.

Autres Theoremes, ou qui n'entrent pas dans l'analogie des precedens, ou qui ſe peuvent rapporter à pluſieurs de ces trois voies.

X. THEOREME.

LES deux côtez de tout angle inſcrit au cercle ſont reciproques à la ligne entiere, qui le partageant par la moitié ſe termine à la circonference & à la partie de cette ligne compriſe entre le ſommet de l'angle coupé par la moitié & ſa baſe. L.

Soit l'angle inſcrit E *k E*. Soit pris le point K dans le ſegment oppoſé également diſtant d'E & d'*E*. La ligne *k* K qui coupe la baſe en *c* partage cet angle inſcript par la moitié, puiſque les deux angles E *k* K & E *k* K étant appuyez ſur des arcs égaux ſont égaux (par IX 18.) qui eſt le même qu'E *k* K. *E k* K.



Or les angles E *k c* (qui eſt le méme qu'E *k* K) & *E k* K ne ſont pas ſeulement égaux, mais ils ſont auſſi ſemblables, c'eſt à dire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe del'autre chacun à chacun.

Car les angles inſcrits vers E & vers K ſont égaux (par IX. 18.) parce qu'ils ſont appuyez ſur le même arc *k E*.

2. (par IX. 42.) L'angle *k c* E, a pour meſure la moitié de l'arc *k* E ſur lequel il eſt appuyé, plus la moitié de l'arc oppoſé *E* K. Et l'arc E K étant égal à l'arc *E* K, cet-

te mesure est égale à la moitié des arcs *k* E & E K, qui est la mesure de l'angle inscrit *k E* K. (par IX. 18.)

Donc les angles *k c* E & *k E* K sont égaux.

Donc les angles E *k c* & *E k* K sont semblables.

Donc (par XI. 17.)

k E. *k* K :: *k c*. *k E*.

Ce qu'il falloit demonstrer, puisque *k* E & *k E* sont les deux côtez de l'angle partagé par la moitié, & que *k* K est la ligne entiere qui le partage, & *k c* sa partie.

Corollaire.

LI. Si l'angle inscrit étoit Isoscele, chaque costé seroit moyenne proportionelle entre la toute qui le diviseroit par la moitié & sa partie.

Car les côtez de l'angle étant égaux, les prendre tous deux, ou en prendre un deux fois, c'est la mesme chose.

Mais quand l'angle inscrit est Isoscele, la ligne qui le partage par la moitié est necessairement un diametre. Et de plus les deux points E *E* étant alors également distans de *k* aussi bien que de K, cela revient à ce qui a esté demonstré plus haut par une autre voie, & à ce qui le sera encore plus bas.

XI. Theoreme.

LII. Si du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypotenuse, il y aura trois moyennes proportionelles.

1. La perpendiculaire entre les deux parties de l'hypotenuse.

2. Le petit côté de l'angle droit entre la plus petite partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

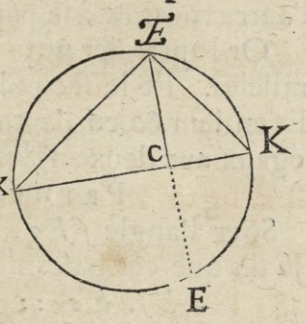
3. Le plus grand côté de l'angle droit entre la plus grande partie de l'hypotenuse qui y est jointe, & l'hypotenuse entiere.

Tout cela se peut prouver par un grand nombre de voies. Mais celle-cy me semble la plus facile & la moins embaraſſée.

SCD LYON 1

Soit l'angle droit *k E* K, & la perpendiculaire du sommet à l'hypotenuse *E c*.

Si on fait un cercle qui ait l'hypotenuse *k* K pour diametre, le sommet *E* se trouvera dans la circonference par IX. 31.



Et si on prolonge *E c* jusques à E, que je suppose estre le point opposé de la circonference, la corde *E* E, sera coupée en *c* par la moitié, & les points *E* E également distans tant de *k* que de K.

Donc 1. par le 29. S.

k c. E c :: E c. c K.

Donc 2. par le 6e Theoreme [43. S.]

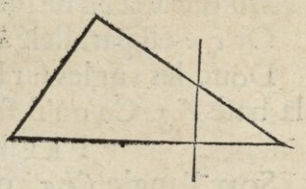
k c. k E :: k E. c K.

Donc 3. par le même 6e Theoreme.

K *c.* K *E ::* K *E. c k.*

XII. Theoreme.

Toute ligne qui coupant perpendiculairement l'hypotenuse d'un angle droit en coupe aussi un côté, l'hypotenuse entiere & sa partie vers le point qui luy est commun avec le côté coupé, sont reciproques au côté coupé entier, & à sa même partie vers le point commun. La preuve en est facile par le 6e Theoreme & par d'autres voies que je laisse à trouver. LIII.



Dernier Theoreme.

Un angle ayant deux bases, si ses costez selon une base sont proportionnels à ses costez selon l'autre base, les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base chacun à chacun. C'est la converse de la pluspart des propositions de ce Livre, qui se prouve ainsi. LIV.

Les costez sur une base ne sçauroient estre proportionels aux costez sur l'autre base qu'en deux manieres.

SCD LYON 1

La 1e est, quand la toute d'une part & sa partie sont proportionelles à l'autre toute & à sa partie.

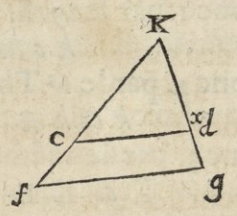
La 2e, quand une toute & sa partie sont reciproques à l'autre toute & à sa partie.

Or le premier ne peut estre, que les bases ne soient paralleles. Et le second, qu'elles ne soient antiparalleles. Et en l'un & en l'autre les deux angles sur une base sont égaux aux deux angles sur l'autre base.

PREUVE DU PREMIER.

LV. SOIT l'angle fkg, dont les deux bases soient fg & cd. Je dis que ces bases sont paralleles, si

$$kf.\ kc :: kg.\ kd.$$



Car soit mené du point c une parallele à fg, qui coupe kg en un point que j'appelleray x.

Il est certain (par XI. 19.) que

$$kf.\ kc :: kg.\ kx.$$

Or par l'hypothese,

$$kf.\ kc :: kg.\ kd.$$

Donc kx & kd sont égales par 11. 43.

Donc les points k & d ne sont qu'un même point.

Donc cx & cd ne sont que la même ligne.

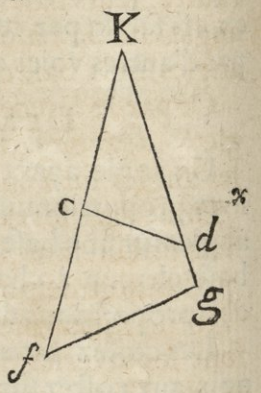
Or cx est parallele à fg. Donc cd luy est aussi parallele.

Donc les angles sur la base cd sont égaux aux angles sur la base fg. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREUVE DU SECOND.

LVI. SOIT l'angle fkg, qui ait deux bases fg & cd. Je dis que ces bases sont antiparalleles, si

$$kf.\ kd. :: kg.\ kc.$$



Car soit tirée du point c une ligne qui coupant kg, prolongée s'il est besoin, fasse sur kg un angle égal à celuy que gf fait sur kf, & que le point où cette ligne coupera kg soit x, cette ligne cx sera une base de l'angle k antiparallele à la base fg, & par consequent (par 18. S.)

SCD LYON 1

$kf. kx :: kg. kc.$

Or par l'hypotheſe,

$kf. kd. :: kg. kc.$

Donc par II. 43. kx eſt égale à kd.

Donc les points x & d eſtant ſur la même ligne, ne ſont qu'un même point.

Donc cx & cd ne ſont qu'une même ligne.

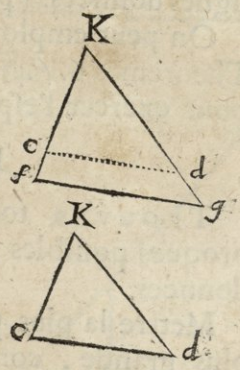
Or cx eſt antiparallele à fg.

Donc cd eſt auſſi antiparallele à fg.

Donc les angles ſur la baſe cd ſont égaux aux angles ſur la baſe fg. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

LVII. Si deux angles égaux ont leur côtez proportionels, ils ſont ſemblables; c'eſt à dire que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre chacun à chacun.



Soient les angles égaux qui ayent leurs coſtez proportionels fKg, & ckd, en ſorte que $Kf. Kc :: Kg, kd$.

D'où il s'enſuit que ſi Kf eſt plus grand que kc, Kg ſera plus grand que kd. Prenant donc dans Kf, Kc egale à kc, & dans Kg, Kd égale à kd, les angles cKd & ckd étant égaux, & les côtez de l'un étant égaux à ceux de l'autre, leurs baſes ſeront égales, & les angles ſur la baſe de l'un égaux aux angles ſur la baſe de l'autre, par VIII. 63. & 64.

Or par le precedent Theoreme les deux baſes de l'angle K, ſçavoir la baſe cd & la baſe fg, ſont paralleles, & les angles ſur l'une ſont égaux aux angles ſur l'autre.

Donc dans les deux angles égaux K & k les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Remarquez que ce dernier Theoreme & ſon Corollaire ſont les inverſes des principaux Theoremes de ce Livre & du Livre precedent, & qu'ils ſeront de grand uſage dans la ſuite.

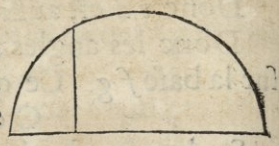
SCD LYON 1

SECTION VI.

Problemes.

I. Probleme.

LVIII. Trouver la moyenne proportionelle entre deux lignes données. Joindre les lignes données. Faire un demy-cercle, dont prises ensemble elles soient diametre : la perpendiculaire élevée du point où se joignent ces lignes à la circonference sera la moyenne proportionelle entre ces lignes données. (par 38. S.)

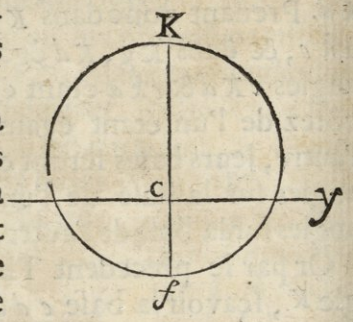


On peut employer pour trouver la même chose les Theoremes 6. (43. S.) & 4. 53. S.) J'en laisse la recherche pour exercer l'esprit.

II. Probleme.

LIX. Trouver toutes les reciproques possibles à deux lignes données.

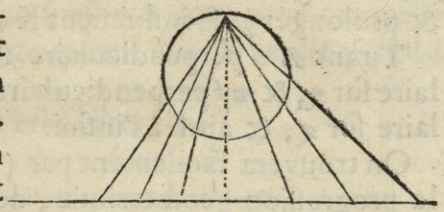
Mettre la plus petite dans la plus grande, comme *k c* dans *k f*. Faire un cercle qui ait la plus grande pour diametre. Et du point *c*, où la plus petite se termine, tirer sur ce diametre une perpendiculaire indefinie comme *y*. Cette Perpendiculaire satisfera au Probleme, comme on le peut juger, en considerant le 5e Theoreme (39. 40. 41. &c. S.) sans qu'il soit besoin que je m'amuse à l'expliquer davantage.



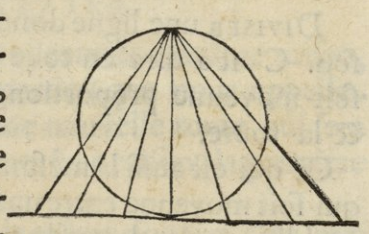
Troisie'me

III. PROBLEME.

LX.



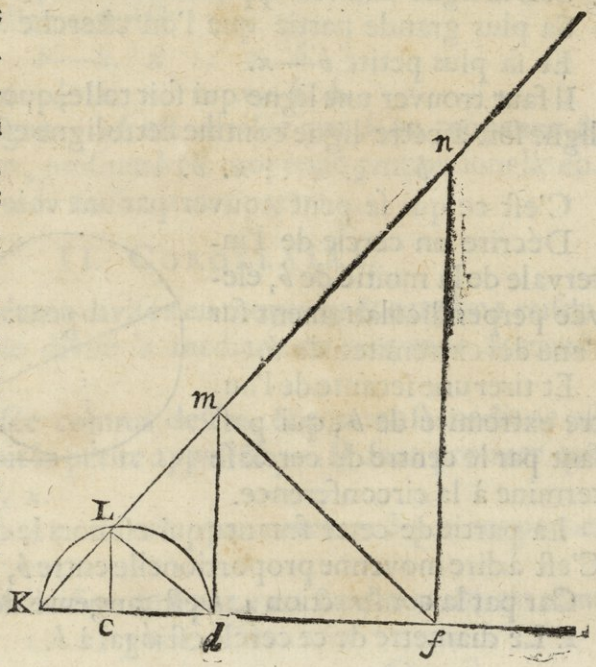
AYANT tiré à discretion d'un même point tant de lignes que l'on voudra sur une même ligne, les diviser toutes, en sorte que chaque toute & sa partie vers le point commun soient reciproques à chaque autre toute & à sa même partie.



Tout cercle dont la circonference passera par le point commun, & qui aura pour diametre, ou la perpendiculaire entiere de ce point à la ligne, ou une partie de cette perpendiculaire, satisfera au Probleme, par le 7e Theoreme, & ce qui a esté dit du 3e Cas (48. S.)

IV. PROBLEME.

AYANT les trois premieres lignes d'une progression geometrique, trouver toutes autres à l'infini.



Faire que la 3e comprenne la 1re, comme K *d* comprend K *c*, faire un cercle qui ait K *d* pour diametre, de *c* élever la perpendiculaire *c Z*, & puis ti-

rer une ligne indefinie de K par *L*, laquelle j'appelleray *x*; & prolonger auſſi infiniment K *d*, laquelle j'appelleray *z*.

Tirant *L d* perpendiculaire ſur *x*, & *d m* perpendiculaire ſur *z*, & *m f* perpendiculaire ſur *x*, & *f n* perpendiculaire ſur *z*, & ainſi à l'infini.

On trouvera facilement par (20. S.) la ſuite infinie de la progreſſion geometrique, dont les trois premiers termes auront eſté *k c. k L. k d.* qui ſeront ſuivis de *k m. k f. k n. k g.* &c.

V. PROBLEME.

LXII. DIVISER une ligne donnée en moyenne & extrême raiſon. C'eſt à dire en telle ſorte que ſa plus grande partie ſoit moyenne proportionelle entre la plus petite partie & la toute.

Ce qui eſt auſſi la meſme choſe que de trouver une ligne qui ſoit moyenne entre une donnée & cette donnée moins cette moyenne, laquelle pour cette raiſon j'appelleray la mediane.

Soit la ligne donnée appellée *b*.

Sa plus grande partie que l'on cherche *x*

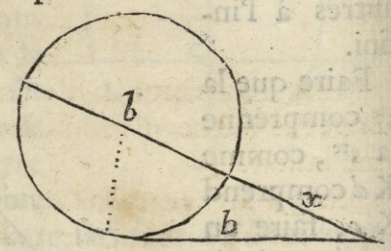
Et ſa plus petite *b*—*x*.

Il faut trouver une ligne qui ſoit telle, que *b* moins cette ligne ſoit à cette ligne comme cette ligne eſt à *b*.

b—*x*. *x* :: *x*. *b*.

C'eſt ce qui ſe peut trouver par une voie fort facile.

Décrire un cercle de l'intervale de la moitié de *b*, élevée perpendiculairement ſur l'une des extremitez de *b*.



Et tirer une ſecante de l'autre extremité de *b*, qui paſſant par le centre du cercle ſe termine à la circonference.

La partie de cette ſecante qui eſt hors le cercle ſera *x*. C'eſt à dire moyenne proportionelle entre *b*, & *b*—*x*.

Car par la conſtruction 1. *b* eſt tangente de ce cercle.

2. Le diametre de ce cercle eſt égal à *b*.

3. Et par conſequent la ſecante entiere eſt $x+b$.

Or (par 33. S.) b tangente eſt moyenne proportionelle entre la partie de la ſecante qui eſt hors le cercle (c'eſt à dire x.)

Et la ſecante entiere (c'eſt à dire $x+b$

Donc $x.\ b :: b.\ x+b.$

Donc *permutando* $b..\ x :: x+b.\ b.$

Donc *dividendo* $b-x.\ x :: x.\ b.$

Ce qu'il falloit demonſtrer.

I. COROLLAIRE.

UNE ligne étant diviſée en moyenne & extrême raiſon; LXIII.
ſi on y ajoûte ſa plus grande partie (que nous appellerons la mediane) il s'en fera une nouvelle toute qui ſera encore diviſée en moyenne & extrême raiſon, la premiere toute étant la mediane.

C'eſt ce qui ſe voit par la voie même dont on s'eſt ſervi pour diviſer la premiere toute en moyenne & extrême raiſon, en ſorte qu'il ne faut que recompoſer, pour parler ainſi, ce que l'on a diviſé.

Car ſi $b-x.\ x :: x.\ b.$

Componendo $b.\ x :: x+b.\ b.$

Donc la ligne $x+b$ eſt diviſée par b en moyenne & extreme raiſon, puiſque b eſt moyenne proportionelle entre la toute $x+b$. & ſon autre partie x.

II. COROLLAIRE.

UNE ligne étant diviſée en moyenne & extrême raiſon, LXIV.
ſa petite partie diviſe la mediane en moyenne & extrême raiſon.

Soit b diviſée comme deſſus; & comme ſa mediane eſt appellée x, ſoit la petite appellée y. Il faut prouver que $x-y.\ y :: y.\ x.$

Or il ne faut pour cela que nommer b par ces parties $y+x$.

Car par la diviſion de b par x en moyenne & extrême raiſon $y.\ x :: x.\ y+x.$

SCD LYON 1

Donc *permutando* $x\ y.\ ::\ y+x.\ x.$

Donc *dividendo* $x-y.y\ ::\ y.\ x.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

III. Corollaire.

LXV. Il eſt aiſé de conclure de ces deux Corollaires, que lorſqu'on a une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes & plus petites diviſées de la même ſorte.

PREUVE DES PLUS GRANDES.

LXVI. Si on joint la mediane à la premiere toute, il s'en fait une ſeconde toute qui à la premiere pour ſa mediane (par le premier Corollaire.)

Donc ſi on joint la premiere toute à la deuxiéme, il s'en fait une troiſiéme qui a la deuxiéme pour ſa mediane.

Et joignant la deuxiéme à la troiſiéme, il s'en fait une quatriéme qui a la troiſiéme pour ſa mediane, & ainſi à l'infini.

PREUVE DES PLUS PETITES.

Si on prend la mediane de la premiere toute, il s'en fait une ſeconde toute plus petite, qui a pour ſa mediane (par le deuxiéme Corollaire) la petite partie de la premiere toute.

Et cette mediane de la deuxiéme toute eſt une troiſiéme toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la deuxiéme toute, & cette mediane de la troiſiéme toute eſt une quatriéme toute qui a pour ſa mediane la petite partie de la troiſiéme toute, & ainſi à l'infini. Ce qui peut eſtre conſideré comme une nouvelle & tres belle preuve de la diviſibilité d'une ligne à l'infini.

VI. Probleme.

LXVII. Ayant la grandeur des côtez d'un angle qui doive eſtre la moitié de chacun des angles ſur la baſe, en trouver la baſe.

SCD LYON 1

Soit *K b* de la grandeur de ces costez, & soit décritte une portion de cercle de cette intervalle & du centre *K*.

Soit divisée *K b* en *c*. en moyenne & extrême raison, en sorte.

b c. *c* K :: *c* K. *b* K.

La corde *b d* de la grandeur de *c* K, qui est la moyenne entre *b c* & *b K*, sera la base de cet angle, & K *d* en sera l'autre costé.

Car soit tirée la ligne *c d*, je suppose que les deux angles sur la base d'un angle Isoscele sont égaux. Et ainsi j'auray prouvé que l'angle K est la moitié de chacun des angles sur la base, si je puis montrer deux choses.

La 1re. Que l'angle K est égal à l'angle *b d c*.

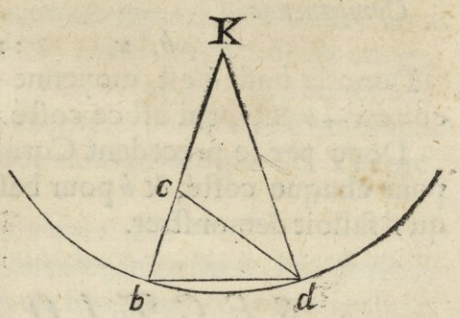
La 2e. Que l'angle *b d c* est la moitié de l'angle *b d* K.

PREUVE DE LA PREMIERE.

L'angle *b* a deux bases, *c d* & K *d*, & ses costez selon une base sont proportionnels à ses costez selon l'autre base, puisque

b c. *b d* :: *b d* *b K*.

Donc les bases *c d* & K *d* sont antiparalleles, & par consequent les angles sur une sont égaux aux angles sur l'autre chacun à chacun.



Donc l'angle K est égal à l'angle *b d c*. Ce qui est la premiere chose qu'il falloit demonstrer.

PREUVE DE LA SECONDE.

Les deux parties de *b* K, base de l'angle de *b d* K, sont en même raison que les deux costez de cet angle, puisque *d* K étant égale à *b* K, & *c K* à *b d*,

b c. *c* K :: *b d*. *d* K.

Donc l'angle *b d* K est divisé par la moitié.

SCD LYON 1

Donc l'angle *K* étant égal à l'angle *b d c*, qui est la moitié de l'angle *b d* K, est aussi la moitié de l'angle *b d* K. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

LXVIII. TOUT angle Isoscele dont la base est moyenne proportionelle entre le costé entier & le costé moins cette base, est de 36 degrez, & chacun des angles sur la base de 72. Car 36. plus deux fois 72. qui est la double de 36, vaut 180, qui est ce que valent les trois angles pris ensemble.

VII. PROBLEME.

AYANT la base d'un angle Isoscele de 36 degrez, en trouver le costé.

Soit *b* la base donnée divisée en moyenne & extréme raison, & *x* en soit la plus grande partie, $x+b$ sera le costé de cet angle. C'est à dire que l'angle qui aura $x+b$ pour l'un & l'autre de ces costez, & *b* pour base, sera de 36 degrez.

Car puisque par la division de *b* en moyenne & extrême raison. $b-x.\ x.\ ::\ x.\ b.$

Componendo.

$b.\ x\ ::\ x+b.\ b.$

Donc la base *b* est moyenne proportionelle entre le costé $x+b$ & *x*, qui est ce costé moins *b*.

Donc par le precedent Corollaire l'angle qui a $x+b$ pour chaque costé, & *b* pour base, est de 36 degrez. Ce qu'il falloit demonstrer.

SECTION VII.

Des lignes incommensurables.

CE que nous avons dit dans le IV. Livre des grandeurs incommensurables donne une si grande facilité d'expliquer les lignes incommensurables, qu'il ne faut pour cela qu'ajoûter à ce Livre trois ou quatre propositions.

SCD LYON 1

PROPOSITION GENERALE.

Lorſque trois lignes ſont continuellement proportionelles, la raiſon de la premiere à la troiſiéme peut eſtre de trois ſortes: ce qui ſe fait en trois cas.

Premier Cas.

Si la raiſon de la premiere à la troiſiéme eſt une raiſon de nombre à nombre qui ait pour ſes expoſans des nombres quarrez, la moyenne eſt à chacune des deux autres, comme le produit des racines de ces nombres quarrez, eſt à chacun de ces nombres quarrez, & par conſequent la moyenne eſt commenſurable aux deux autres.

Second Cas.

Si la raiſon de la 1re à la 3e eſt une raiſon de nombre à nombre, qui n'ait pas pour ſes expoſans des nombres quarrez, la moyenne eſt incommenſurable en longueur & commenſurable en puiſſance à la 1re & à la 3e.

Troisieme Cas.

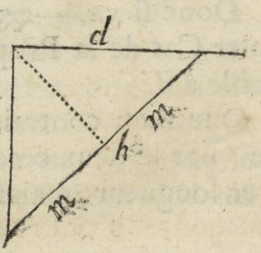
Si la raiſon de la 1re à la 3e eſt une raiſon ſourde, & non de nombre à nombre, la moyenne eſt incommenſurable aux deux autres, tant en longueur qu'en puiſſance.

Tous ces 3 Cas ſe prouvent des lignes, de la même ſorte qu'on les a prouvez dans le IV. Livre des grandeurs en general. C'eſt pourquoy ce qui reſte icy eſt d'appliquer cette doctrine generale à des exemples particuliers qui ſoient propres aux lignes. Ce que nous ferons par les Theoremes ſuivans.

I. Theoreme.

Un angle droit étant Iſoſcele, le coſté & l'hypotenuſe ſont incommenſurables en longueur & commenſurables en puiſſance. LXXI.

Soit un angle droit Iſoſcele, dont
L'hypotenuſe ſoit appellée *h.*
Le côté *d.*
La perpendiculaire du ſommet à l'hypotenuſe la partagera en deux également. Chaque moitié ſoit appellée *m.*



SCD LYON 1

Donc ∴ *h. d. m.*

Or *h. m* :: 2. 1.

Donc 2 & 1 n'étant pas deux nombres quarrez (par le 2ᵉ Cas) *d* eſt incommenſurable en longueur à *h* & à *m*.

Mais il leur eſt commenſurable en puiſſance, parce que

$$\left\{\begin{matrix} hh. & dd \\ dd. & mm \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} h. & m. \\ 2. & 1. \end{matrix}\right.$$

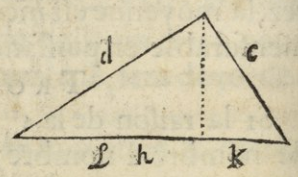
II. THEOREME.

LXXI. QUAND l'hypotenuſe eſt à l'un des côtez d'un angle droit, comme nombre à nombre, il eſt aiſé de juger ſi l'autre côté eſt commenſurable ou incommenſurable à l'hypotenuſe. Et voicy comment.

Soit l'hypotenuſe *h*.

Un des coſtez *c*.

L'autre coſté *d*.



Une perpendiculaire eſtant menée du ſommet à l'hypotenuſe,

Soit ſa portion vers *c* appellée *k*,

Et l'autre vers *d* appellée *l*.

Il s'enſuit que $\left\{\begin{matrix} \therefore & h. & c. & k. \\ \therefore & h. & d. & l. \end{matrix}\right.$

Suppoſant donc que *h* & *c* ſoient comme les deux nombres *x* & *z*. C'eſt à dire que

h. c :: *x. z.*

Donc la raiſon de *h. k.* eſtant doublée de la raiſon de *h.c.*

h. k :: *xx. zz.*

Or *k* & *l* étant les deux portions de *h*,

$l \coloneqq h - k$.

Donc *h. l* :: *xx. xx.*—*zz.*

Donc ſi *xx.*—*zz.* eſt un nombre quarré par le premier Cas de la Propoſition principale, *h* eſt commenſurable à *d*.

Que ſi au contraire *xx*—*zz* n'eſt pas un nombre quarré (par le deuxiéme Cas) *h* n'eſt point commenſurable à *d* en longueur, mais ſeulement en puiſſance.

III. THEO-

SCD LYON 1

III. THEOREME.

LXXII. LORSQU'UN des côtez de l'angle droit eſt une aliquote de l'hypotenuſe, l'autre côté eſt incommenſurable à l'hypotenuſe en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance.

Car afin que *c* par exemple, ſoit une aliquote de *h*, il faut que *h* ſoit à *c*, comme quelque nombre à l'unité que je marqueray par un 1.

Soit donc *h*. *c* :: *x*. 1.

Donc par le Theoreme 2.

h. *k* :: *xx*. 11.

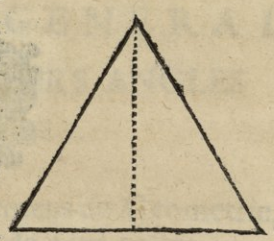
h. *l* :: *xx*. *xx*—11

Or il eſt impoſſible que *xx*—11 ſoit un nombre quarré. Car (11) ne fait qu'une unité, ſelon ce qui a eſté dit, IV. 7. Et deux nombres quarrez ne peuvent jamais eſtre differens ſeulement d'une unité.

Donc par le Theoreme 2e *h* & *d* ſont incommenſurables en longueur, & commenſurables ſeulement en puiſſance.

COROLLAIRE.

LXXIII. SI la baſe d'un angle Iſoſcele eſt égale au coſté, la perpendiculaire du ſommet à la baſe eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance avec le coſté.



Car alors cette perpendiculaire fait un angle droit avec la moitié de la baſe, & l'un ou l'autre des coſtez eſt l'hypotenuſe de cet angle droit.

Donc l'un des coſtez de cet angle droit, qui eſt la moitié de la baſe, eſt auſſi la moitié de l'hypotenuſe.

Donc il eſt une aliquote de l'hypotenuſe.

Donc par le Theoreme precedent l'autre coſté, qui eſt la perpendiculaire, eſt incommenſurable en longueur, & commenſurable ſeulement en puiſſance avec l'hypotenuſe de cet angle droit, laquelle eſt le coſté de l'angle dont la baſe eſt ſuppoſée égale à chaque coſté.

SCD LYON 1

IV. THEOREME.

LXXIV. AYANT deux lignes incommensurables en longueur (ou par les Theoremes precedens, ou par d'autres voyes) & ayant trouvé la moyenne proportionelle entre ces deux lignes, elle leur sera incommensurable tant en longueur, qu'en puissance.

Cela est clair par le 3e Cas de la Proposition principale.

V. THEOREME.

LXXV. QUAND une ligne est divisée en moyenne & extrême raison, la toute & ses deux parties sont incommensurables les unes aux autres. C'est ce qui a esté prouvé dans le 4. Livre, num. 37.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a à dire de quatre lignes continuellement proportionelles que ce qui a esté dit dans le IV. Livre de quatre grandeurs continuellement proportionelles.

SCD LYON 1

NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE DOUZIE'ME.

DES FIGURES EN GENERAL CONSIDERE'ES SELON LEURS ANGLES ET LEURS COSTEZ.

ON appelle figure dans les elemens de Geometrie, une ſurface platte terminée de tous coſtez. I.

Ce qui comprend deux choſes : la premiere, les extremitez de cette ſurface : la ſeconde, l'eſpace qu'elle comprend ; ce qui s'appelle *l'aire de la figure.*

Nous les conſiderons dans ce Livre & le ſuivant ſelon le premier rapport ; & dans d'autres Livres nous les conſidererons ſelon le dernier.

Division.

Toute figure conſiderée ſelon ſes extremitez, eſt, II.

Ou rectiligne.
Ou curviligne.
Ou mixte.

SCD LYON 1

PREMIERE DEFINITION.

III. On appelle rectiligne celle qui est terminée par des lignes droites, qui ne peuvent estre moins de trois, étant clair que deux lignes droites ne peuvent pas terminer un espace de tous costez, puisqu'elles ne peuvent se rencontrer qu'en un point, ce qui laisse l'espace ouvert du costé opposé à ce point.

Il est clair aussi par là que les lignes droites ne peuvent terminer un espace, qu'en faisant autant d'angles qu'il y a de lignes droites qui terminent l'espace. Car si un angle demande deux lignes, une ligne sert à deux angles.

Et ainsi l'on peut considerer trois choses dans l'extremité d'une figure rectiligne. 1. Les angles. 2. Les costez. 3. Le circuit, qu'on appelle aussi *perimetre*, qui n'est autre chose que la somme des costez ; c'est à dire tous les costez pris ensemble.

SECONDE DEFINITION.

IV. On appelle curviligne celle qui est terminée par une ou plusieurs lignes courbes. Et une seule ligne courbe pouvant rentrer en soy même, peut terminer une espace.

Mais on ne considere icy des figures curvilignes que le seul cercle ; parce que de toutes les lignes courbes on ne considere que la circulaire.

TROISIEME DEFINITION.

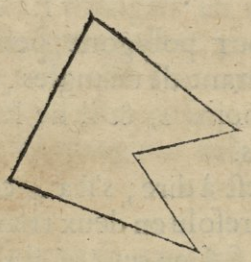
V. On appelle figure mixte celle qui est terminée en partie par des lignes droites, & en partie par des courbes, dont on ne considere icy que les portions de cercle, qui sont celles qui sont terminées par une corde & une portion de circonference ; ou les secteurs du cercle qui sont terminez par deux rayons & une portion de la circonference, tel qu'est un quart de cercle.

SCD LYON 1

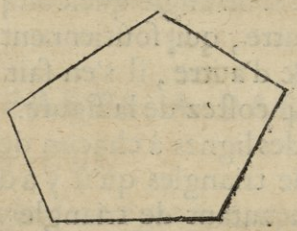
DES FIGURES RECTILIGNES

VI.

On peut diviſer les figures rectilignes en celles qui ont quelque angle rentrant, & celles dont tous les angles ſont ſaillans ; c'eſt à dire tels que leur pointe regarde toûjours le dehors de la figure.



Les Geometres ſe ſont reſtraints à conſiderer les dernieres, parce qu'on y peut facilement reduire les premieres.



ESPECES DES FIGURES RECTILIGNES.

VII.

Toute figure rectiligne ayant autant d'angles que de coſtez, on les diviſe indifferemment par le nombre de leurs angles ou de leurs coſtez, & on les nomme ſelon l'un ou ſelon l'autre.

Ainſi on appelle Triangle une figure de trois angles & de trois coſtez, & Quadrilatere celle de quatre angles & de quatre coſtez.

Les noms Grecs des figures ſont pris du nombre des angles : comme

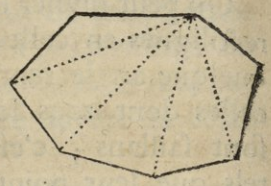
Pentagone, de cinq.
Exagone, de ſix.
Heptagone, de ſept.
Octogone, de huit.
Decagone, de dix.
Et Polygone, de pluſieurs angles indeterminément.

Ces noms ſont ſi communs, qu'il eſt bon de ne les pas ignorer ; mais on peut ſe paſſer d'en ſçavoir d'autres qui ſont moins communs : & appeller les figures du nombre de

leurs coſtez ou de leurs angles, une figure de quinze coſtez, de trente, de cent, de mille &c.

I. THEOREME.

VIII. TOUT polygone peut eſtre reſolu en autant de triangles, qu'il a de côtez moins 2, & il ne le peut eſtre en moins.



C'eſt à dire, s'il a 4 coſtez, il peut eſtre reſolu en deux triangles; ſi 5, en trois; ſi 6, en quatre; ſi 7, en cinq; ſi 8, en ſix &c.

Car d'un angle quelconque tirant deux lignes de part & d'autre, qui ſoûtiennent chacune l'angle qui le ſuit de part & d'autre, il s'en fait deux triangles qui comprennent 4 coſtez de la figure. Mais de ce méme angle menant des lignes à chacun des autres angles, il s'en fait autant de triangles qu'il y a de coſtez outre ces 4. Donc il y aura autant de triangles qu'il y a de coſtez outre ces 4. Donc il y aura autant de triangles que de coſtez moins 2, puiſqu'il y a neceſſairement 2 de ces triangles qui comprennent 4 de ces coſtez.

II. THEOREME.

IX. Tous les angles d'un polygone quelconque ſont égaux à autant de droits que le double de ces coſtez moins 4.

Car nous avons déja veu qu'un angle plus les deux angles que font ſes coſtez ſur ſa baſe, ſont égaux à deux droits. Or un angle avec ſa baſe n'eſt point different d'un triangle. Et par conſequent les trois angles d'un triangle valent deux angles droits, qui ſont ſix moins 4.

Or par le precedent Theoreme tout autre polygone peut eſtre reſolu en autant de triangles moins 2 qu'il a de coſtez; & les angles de ces triangles comprendront ceux du polygone. Donc ſi le polygone à 7 coſtez eſtant reſolu en 5 triangles, les angles de ces 5 triangles en vaudront dix droits, qui ſont 14 moins 4.

On le peut encore démontrer d'une autre ſorte, en prenant un point quelconque au dedans du polygone, & de ce point menant des lignes à tous les angles. Car alors

SCD LYON 1

l'heptagone sera partagé en 7 triangles, qui auront tous deux costez de leurs angles au tour de la figure, & le 3e au dedans. Or tous les 21 angles de ces 7 triangles en valent 14 droits, & les 7 du dedans de la figure valent 4 droits (& quand il y en auroit mille, ou tant que l'on voudra, ils ne vaudront jamais que 4 droits) & par consequent les 14 autres qui sont égaux à ceux de l'heptagone valent 14 droits moins 4; c'est à dire 10 droits.

DIVISION.

Les figures de ces differentes especes se peuvent considerer ou chacune à part, ou en les comparant deux ensemble.

FIGURES CONSIDERE'ES A PART.

DEFINITIONS.

1. CELLES dont tous les angles sont égaux, s'appellent *Equiangles*. X.

2. Celles dont tous les costez sont égaux, s'appellent *Equilateres*.

3. Celles qui sont tout ensemble equiangles & equilateres, s'appellent *Regulieres*.

Et on met aussi le cercle entre les regulieres, à cause de sa parfaite uniformité, & qu'on le peut considerer comme un polygone regulier d'une infinité de costez.

4. Celles dont les angles, ou les costez seroient alternativement égaux; c'est à dire le premier égal au 3e, 5e, 7e, 9e, & le second égal au 4e, 6e, 8e, 10e, se peuvent appeller alternativement equiangles ou equilaterales.

Mais il faut remarquer que cela ne peut estre que quand le nombre des angles ou des costez est pair. Car s'il estoit impair, le dernier & le premier se trouveroient égaux; & par consequent le penultiéme & le premier seroient inégaux: & par consequent ils ne seroient pas tous alternativement égaux.

SCD LYON 1

FIGURES COMPARE'ES.

DEFINITIONS.

XI. QUAND on compare deux figures de même genre, c'eſt à dire d'un nombre égal de coſtez.

1. Si les angles de l'une ſont égaux aux angles de l'autre, on les appelle *Equiangles*; & ce mot ne marque pas alors que les angles de chaque figure ſoient égaux entr'eux; mais ſeulement que ceux de l'une ſont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

2. Si les coſtez de l'une ſont égaux aux coſtez de l'autre, on les appelle *Equilateres*, ou *Equilateres entr'elles*.

3. Si elles ſont tout enſemble equiangles & equilateres entr'elles, on les peut appeller T*out-égales*; ce qu'il faut bien diſtinguer de celles qu'on appelle ſimplement *Egales*.

4. Si elles ſont equiangles, & que les coſtez de l'une ſoient proportionels aux coſtez de l'autre, on les appelle *Semblables*.

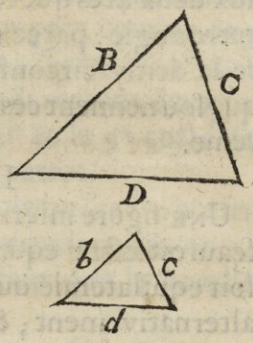
Ce qui fait voir que les *tout-égales* ſont toûjours *ſemblables*, puiſqu'il y a même raiſon entre les coſtez de l'une & de l'autre, qui eſt la raiſon de l'égalité. Au lieu que les *ſemblables* ne ſont pas tous toûjours *tout-égales*: puiſqu'il peut y avoir une autre raiſon que celle d'égalité, qui ſoit la même entre les coſtez de l'une & de l'autre.

Les coſtez des figures ſemblables, entre leſquels il y a même raiſon, s'appellent les coſtez *Homologues*, qui ſont toûjours le plus grand coſté de l'une & de l'autre: & toûjours ainſi. Et c'eſt ce qui produit ce Theoreme.

I. THEOREME

I. THEOREME.

LES circuits de deux figures semblables sont en même raison que leurs costez homologues. XII.



Car soient les trois costez de l'une de ces figures, *B C D*; & de l'autre *b c d*.

Puisque *B* est à *b*, comme *C* à *c*, & *D* à *d*.

Les trois d'une part (qui font le circuit de la premiere figure) sont aux trois de l'autre part (qui font le circuit de la seconde) en même raison que chacune d'une part à chacune de l'autre. C'est ce qui a esté demonstré, II. 45.

AUTRES DEFINITIONS.

QUAND on compare deux figures de même ou de differentes especes. XIII.

5. Si le circuit de l'une est égal au circuit de l'autre, on les appelle *Isoperimetres*.

6. Si l'espace que comprend l'une est égal à l'espace que comprend l'autre, on les appelle *égales*. Ce qui appartient au Livre où l'on traittera des figures considerées selon *l'aire*. Et ce qu'il ne faut pas confondre, comme il a déja esté dit, avec celles qu'on appelle *tout-égales*.

DES FIGURES INSCRITTES OU CIRCONSCRITTES AU CERCLE.

DES INSCRITTES.

ON dit qu'une figure rectiline est *inscritte au cercle*, quand les sommets de ses angles se trouvent dans la circonference de ce cercle. D'où il s'ensuit, XIV.

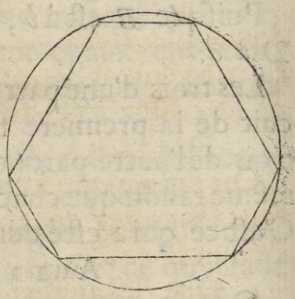
1. Que les angles de cette figure inscritte se doivent alors considerer comme des angles inscrits au cercle, dont il a esté parlé dans le Livre IX.

2. Qu'ainsi les angles d'une figure inscritte ne sçauroient

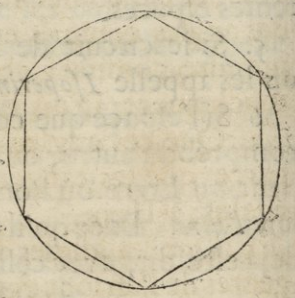
estre égaux, que quand les deux arcs qui soutiennent les deux costez de chaque angle sont égaux pris ensemble aux deux arcs que soutiennent les deux costez de chaque autre angle : parce que chacun de ces angles a pour mesure la demy-circonference moins la moitié des deux arcs que soutiennent ces costez. IX. 19. D'où s'ensuit ce Theoreme.

II. Theoreme.

XXV. Une figure inscritte au cercle ne sçauroit estre equiangle qu'elle ne soit equilaterale ou absolument, ou alternativement ; & en ce dernier cas, il faut que le nombre de ses costez soit pair.



Car afin que les angles d'une figure inscritte au cercle (qui sont des angles inscrits) soient tous égaux, il faut & il suffit que les deux arcs que soutiennent les costez de chaque angle pris ensemble soient égaux aux arcs que soutiennent aussi les costez de tout autre angle, comme il vient d'estre dit.



Or cela est quand tous ces arcs sont égaux : ce qui arrive quand la figure est absolument équilaterale, parce que tous ces costez estant égaux, tous les arcs qu'ils soutiennent le sont aussi.

Mais cela arrive encore quand ces arcs sont alternativement égaux, pourveu qu'ils soient en nombre pair ; parce qu'alors la moitié de ces arcs estant petits & tous égaux entr'eux, & la moitié plus grands tous égaux aussi entr'eux, & un petit estant toûjours suivi d'un grand, les deux arcs soutenant les costez d'un angle inscrit pris ensemble seront toûjours égaux à deux autres arcs soutenans les costez de tout autre angle. Et ainsi ces angles seront égaux. Or pour cela il suffit que les costez de la figure

SCD LYON 1

ſoient alternativement égaux, parce qu'alors ils ſoutiendront des arcs alternativement égaux.

Mais il eſt bien viſible qu'il faut en ce cas là que le nombre des coſtez ſoit pair. Car s'il eſtoit impair, comme de 9. il y auroit neceſſairement deux coſtez, ſçavoir le 1er & le 9e qui ſeroient de ſuite tous deux grands ou tous deux petits; & ainſi l'angle compris entre le 1er & le 9e coſté ſeroit ou plus grand ou plus petit que les autres.

Donc une figure inſcritte en un cercle ne ſçauroit eſtre équiangle, ſi elle n'eſt ou abſolument équilaterale ou alternativement, & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes coſtez ſoit pair.

Des Cirsconscrittes au Cercle.

On dit qu'une figure eſt *circonſcritte à un cercle*, quand tous les coſtez de la figure touchent le cercle. Et de-là il s'enſuit, XVI.

1. Que les angles de la figure ſont des angles circonſcrits; & par conſequent il eſt bon de les conſiderer comme des angles compris entre deux tangentes, que l'on doit prendre comme ſi chacun eſtoit terminé au point de l'attouchement. D'où il s'enſuit encore,

2. Que ces angles circonſcrits ſont toûjours Iſoſceles; parce que les tangentes menées d'un même point ſont égales, VII. 34.

3. Que les angles circonſcrits ſont égaux quand les tangentes de l'un ſont égales aux tangentes de l'autre. IX. 55.

4. Que chaque coſté d'une figure circonſcritte eſt compoſé de deux tangentes, qui viennent de deux differens angles.

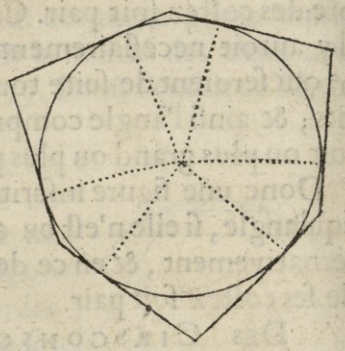
Et delà s'enſuit ce Theoreme.

III. Theoreme.

Une figure circonſcritte au cercle ne ſçauroit eſtre equilaterale qu'elle ne ſoit equiangle, ou abſolument ou alternativement; & en ce dernier cas il faut que le nombre de ſes angles ſoit pair. XVII.

Car afin qu'une figure circonſcritte au cercle ſoit équilaterale, il faut & il ſuffit que deux tangentes dont eſt com-

posé chaque costé de cette figure circonscritte prises ensemble soient égales à deux autres tangentes dont sera composé tout autre costé.



Or cela est quand toutes ces tangentes sont égales, ce qui arrive quand tous les angles de cette figure sont égaux ; car alors toutes les tangentes sont égales aussi.

Mais cela arrive encore quand les angles de la figure sont alternativement égaux, pourveu que ce soit en nombre pair, en sorte que la moitié des angles n'ait que deux petites tangentes (ce qui fait neanmoins les plus grands angles) & l'autre moitié deux plus grandes tangentes, & que toutes les petites soient égales entr'elles, & les grandes aussi, & qu'un petit angle soit toûjours suivi d'un grand.

Car alors chaque costé sera composé d'une petite & d'une grande tangente (parce que chaque costé, comme il a esté dit, est composé de deux tangentes qui viennent de deux differens angles.) Donc tous les costez seront égaux.

Donc une figure circonscritte au cercle ne peut estre équilaterale, si elle n'est equiangle, ou absolument ou alternativement, & en ce dernier cas il faut que le nombre des angles soit pair. Ce qu'il falloit demonstrer.

Des Figures Regulieres.

XVIII. Le meilleur moyen de bien concevoir les figures regulieres, est de les considerer comme inscrittes en un cercle ; parce qu'elles peuvent toutes y estre inscrites, selon ce Theoreme.

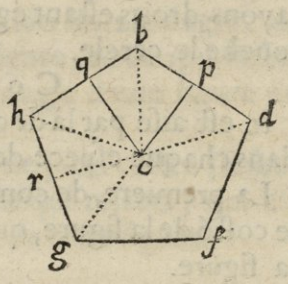
IV. Theoreme.

XIX. Toute figure reguliere peut estre inscritte & circonscritte en un cercle ; parce qu'il y a toûjours dans ces figures un point qui en est le centre, dont toutes les lignes menées à tous les angles (qu'on appelle rayons) sont

SCD LYON 1

égales, & dont toutes les perpendiculaires menées au côté (qu'on peut appeller *les raïons droits*) ſont auſſi égales entr'elles.

Soit une figure reguliere de tant de coſtez & d'angles que l'on voudra, il ſuffira d'en conſiderer 4 ou 5 angles, dont j'appelleray les ſommets *b. d. f. g. h.*



Si de *p* milieu du coſté *b d*, & de *q* milieu du coſté *b h*, on éleve deux perpendiculaires, elles ſe rencontreront eſtant prolongées, par VI. 34.

Et le point *c* où elles ſe rencontrent ſera le centre de la figure.

Car du point *c*, intervale *c b*, décrivant une circonference, elle paſſera par les trois points *h. b. d.* VII. 3.

Donc les trois raïons *c b*, *c h*, & *c d*, ſeront égaux,

Donc les 4 angles *c h b*, *c b h*, *c b d*, *c d b* ſeront égaux, par VIII. 64.

Donc chacun de ces trois raïons *ch*, *c b*, *c d*, partage par la moitié l'angle de la figure.

Donc l'angle *c h g*, étant égal à l'angle *c h b b*, *c g* baſe de l'angle *c h g*, doit eſtre égale à *c b*, baſe de l'angle *c h b*, par VIII. 65.

Donc ce 4e raïon *c g* eſt égal aux trois autres.

Et il eſt clair que quand cette figure reguliere auroit cent mille angles, on prouveroit la même choſe de toutes les lignes menées de *c* aux angles, qui ſont les raïons.

Donc ſi de ce point *c* & de l'intervale d'un rayon on décrit un cercle, la figure ſera inſcritte en ce cercle; puiſque tous les raïons eſtant égaux, les ſommets de tous les angles ſe trouveront dans la circonference de ce cercle.

Et delà il s'enſuit que tous les coſtez de cette figure ſeront des cordes égales du méme cercle.

Donc les perpendiculaires du centre aux coſtez ſont égales, par VII. 8.

Or ces perpendiculaires en ſont les raïons droits.

Donc si on décrit un autre cercle de l'intervale d'un rayon droit ; c'est à dire d'une perpendiculaire à un costé, cette figure sera circonscritte à ce cercle ; puisque tous ces rayons droits estant égaux, il n'y aura aucun costé qui ne touche le cercle.

XX. COROLLAIRE.

IL est aisé par là de determiner trois choses importantes dans chaque espece de figure reguliere.

La premiere, de combien de degrez est l'arc qui soûtient le costé de la figure, que j'appelleray simplement l'arc de la figure.

La seconde, de combien de degrez est l'angle de la figure ; c'est à dire l'angle compris entre les deux costez de la figure.

La troisiéme, quel est aussi l'angle que fait un rayon sur un costé : c'est ce qui se verra par ces trois Problemes.

PREMIER PROBLEME.

XXI. DETERMINER la grandeur de l'arc de toute espece de figure reguliere.

La circonference estant divisée en 360 degrez, ou 21600 minutes, ou 1296000 secondes : si on divise ce nombre par celuy des costez de la figure, le quotient fera voir de combien de degrez, ou de minutes, ou de secondes est l'arc de la figure.

Ainsi l'arc d'une figure de 15 costez est de 24 degrez, parce que 15 divisant 360, le quotient est 24.

L'arc d'une figure de 3600 costez est de 6 minutes, parce que 21600 minutes estant divisées par 3600, le quotient est 6.

SECOND PROBLEME.

XXII. DETERMINER la grandeur de l'angle de toute espece de figure reguliere.

Ayant trouvé l'arc par le premier Probleme, oster les degrez de cet arc de 180. qui est la demy-circonference, ce qui restera sera la mesure de l'angle de la figure.

Car tout angle d'une figure reguliere doit estre consideré comme un angle Isoscele inscrit dans le cercle, qui a

SCD LYON 1

pour mesure la demy-circonference moins l'arc que soûtient un de ses costez. IX. 20.

Et ainsi pour avoir la grandeur de l'angle d'une figure de 15 costez, il ne faut qu'ôter de 180 les 24 degrez de l'arc que soûtient le costé de cette figure; & ce qui restera, qui est 156, sera la mesure de l'angle d'une figure de 15 costez.

Et pour avoir l'angle d'une figure de 3600 costez, il faut oster 6 minutes de 180 degrez, & ce qui restera, qui est 179 d. 54'. sera la mesure de l'angle de cette figure.

III. Probleme.

Determiner la grandeur de l'angle que fait le rayon sur le costé de toute figure reguliere. XXIII.

Il ne faut pour cela que prendre la moitié du nombre des degrez que vaut l'angle de la figure. Parce que tout rayon partage par la moitié l'angle de la figure.

Ainsi l'angle du rayon sur le costé dans une figure de 15 costez, est de 78 degrez, qui est la moitié de 156. Et l'angle du rayon sur le costé d'une figure de 3600 costez, est de 89. d. 57'.

CONSIDERATION SUR LE CERCLE.

Les Geometres considerent souvent le cercle comme un polygone d'une infinité de costez: & selon cela voicy de quelle sorte on devroit marquer les trois choses que nous venons de determiner dans tout autre polygone. XXIV.

Puisque l'arc d'un poligone regulier est dautant plus petit, que le nombre de ses costez est grand, il faut que l'arc d'un polygone d'une infinité de costez soit infiniment petit, & qu'ainsi il ne puisse estre marqué que par zero.

Or qui oste zero de 180 degrez, reste 180 pour l'angle de ce polygone infini.

Et qui divise 180 par la moitié, reste 90, qui est la mesure d'un angle droit pour l'angle du rayon sur le costé de ce polygone infini.

SCD LYON 1

Auſſi il eſt vray que l'angle du rayon ſur la circonference d'un cercle eſt droit en ſa maniere, puiſque le rayon coupe perpendiculairement ſa circonference ; & que ſi cet angle eſt plus petit qu'un droit, ce n'eſt que de l'eſpace qui eſt entre la circonference & la tangente, qui eſt plus petit que tout angle aigu ; quoy qu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puiſſe eſtre diviſé en une infinité de plus petits.

Et on peut dire auſſi que tout point de la circonference eſt comme le ſommet d'un angle de 180 degrez, puis qu'étant partagé par le rayon en deux angles égaux, chacun de ſes angles de part & d'autre eſt droit en ſa maniere ; & qu'ainſi chacun eſt de 90 degrez.

DES FIGURES REGULIERES COMPARE'ES ENSEMBLE.

V. THEOREME.

XXVI. LES figures regulieres de même eſpece, c'eſt à dire dautant de coſtez, ſont toûjours ſemblables, & les circuits ſont en même raiſon que les coſtez.

Car par ce qui vient d'eſtre dit, les angles de deux figures regulieres de même eſpece ſont neceſſairement égaux ; leur grandeur eſtant determinée par les arcs des figures, & ces arcs l'étant par le nombre des côtez de la figure.

Et pour ce qui eſt des côtez, ceux de chaque figure étant égaux, on peut appeller les uns *b*, & les autres *c*.

Or il eſt bien clair que *b*. *c* :: *b*. *c*.

Et il eſt clair auſſi que *b* eſt à *c*, comme 10 *b* à 10 *c*, ou 100 *b* à 100 *c*, ou 1000 *b* à 1000 *c*.

Donc les circuits ne ſçauroient manquer d'eſtre en même raiſon que les côtez.

VI. THEOREME.

XXVII. DEUX figures regulieres étant de meſme eſpece, ces 4 choſes de l'une, *rayon*, *rayon droit*, *côté*, *circuit*, ſont en même

même raiſon avec ces 4 autres mêmes choſes de l'autre : c'eſt à dire que le rayon de l'une eſt au rayon de l'autre, comme le rayon droit au rayon droit, le côté au côté, le circuit au circuit.

Ces deux derniers viennent d'eſtre prouvez ; mais ils ne laiſſeront pas d'entrer dans la preuve generale des autres.

Il ne faut pour cela que conſiderer dans chacune de ces figures un angle compris entre un rayon, & un rayon droit qui a pour baſe la moitié du coſté.

Ces deux angles ſont ſemblables en toutes les figures regulieres de même eſpece ; c'eſt à dire que l'angle eſt égal à l'angle, & que les angles ſur la baſe de l'un ſont égaux aux angles ſur la baſe de l'autre.

Car chacun de ces angles a pour meſure la moitié de l'arc de la figure, puiſque ſa baſe eſt la moitié du coſté. Or dans toutes les figures de même eſpece l'arc de la figure eſt d'autant de degrez en l'une qu'en l'autre.

Pour les angles ſur chacune des baſes cela eſt encore plus clair, puiſque l'un eſt droit en l'un & en l'autre ; ſçavoir celuy qui eſt fait par le rayon droit ; & que l'autre eſt la moitié de l'angle de la figure qui eſt égal en toutes les figures de meſme eſpece.

Or puiſque ces angles ſont ſemblables par X. 17. les coſtez ſont proportionels aux coſtez ; & la baſe à la baſe : c'eſt à dire que,

Le rayon eſt au rayon, comme le rayon droit à un rayon droit, & la moitié du coſté à la moitié du coſté. Et par conſequent comme le coſté au coſté, & le circuit au circuit.

I. COROLLAIRE.

LES coſtez & les circuits de deux figures regulieres de même eſpece ſont en même raiſon, que les diametres des cercles dans leſquels elles ſont inſcrites. XXVII.

Car ces diametres ſont le double des rayons de ces figures. Donc &c.

II. Corollaire.

XXVIII. Les circonferences des cercles ſont en même raiſon que leurs diametres.

Car les cercles ſont comme des polygones d'une infinité de côtez, & leur circonference eſt comme le circuit comprenant cette infinité de côtez. Donc par le precedent Corollaire ce circuit d'une infinité de côtez d'une part, eſt au circuit d'une infinité de côtez de l'autre, comme le diametre au diametre.

C'eſt la ſeule voye dont on peut prouver la proportion des circonferences & des diametres. Car n'y en ayant point pour le faire poſitivement & immediatement, on eſt reduit à y employer l'analogie des polygones ſemblables d'un ſi grand nombre de coſtez que l'on voudra, qu'on peut concevoir eſtre inſcrits dans l'un & l'autre cercle : comme de cent mille côtez, de cent millions, de cent mille mllions, & ainſi juſqu'à l'infini.

Car plus ces polygones ont de côtez, moins il y a de difference entre la circonference du cercle & leur circuit, VII. 19. Et ainſi quelque petite que ſoit une ligne donnée, quand ce ne ſeroit que la cent milliême partie de l'épaiſſeur d'une feüille de papier, on peut concevoir un polygone de tant de côtez inſcrit dans l'un & dans l'autre cercle, que la difference de ſon circuit d'avec la circonference de ces cercles ſera moindre que cette ligne donnée.

Or de quelque grand nombre de côtez que ſoient ces polygones, leurs circuits ſeront toûjours en même raiſon que les diametres, par le Corollaire precedent.

Donc on doit conclure par une analogie tres certaine, que les circonferences ſont auſſi en même raiſon que les diametres.

III. Corollaire.

XXIX. Si deux figures regulieres de même eſpece ont de l'égalité en l'une de ces quatre choſes, rayon, rayon droit, côté, circuit, elles l'ont en tout, & ſont tout-égales.

SCD LYON 1

C'eſt une ſuite évidente du ſixiéme Theoreme.

IV. COROLLAIRE.

L'UNE de ces quatre choſes étant donnée la grandeur de la figure reguliere eſt determinée : c'eſt à dire qu'elle ne peut eſtre que d'une ſorte, quoy qu'il ne ſoit pas toûjours facile de la décrire ; parce que ſouvent il n'eſt pas aiſé ou de trouver le côté d'une figure reguliere en ayant le rayon, ce qui eſt la même choſe que de l'inſcrire en un cercle donné : ou d'en trouver le rayon en ayant le côté ; ce qui eſt la même choſe que trouver le cercle dans lequel une figure dont le côté eſt donné puiſſe eſtre inſcritte. C'eſt dequoy nous allons traitter. XXX.

DE L'INSCRIPTION OV CIRCONSCRIPTION du'ne figure reguliere de telle eſpece dans un Cercle donné.

IL eſt bien facile parce qui a eſté dit, une figure reguliere eſtant décritte, d'en trouver le rayon pour l'inſcrire dans un cercle : mais il n'eſt pas auſſi facile d'inſcrire dans un cercle donné, telle figure reguliere que l'on voudra. Et ſouvent même on ne le peut que mecaniquement, & non geometriquement, au moins par la Geometrie ordinaire ; parce qu'elle ne donne pas le moyen de diviſer un arc donné, en 3, en 5, en 7 &c. ce qui ſeroit ſouvent neceſſaire pour inſcrire en un cercle donné telle figure que l'on voudroit. XXXI.

Ainſi je penſe que tout ce que l'on peut faire de mieux ſe reduit à ces deux regles generales, & à quelques Problemes particuliers.

PREMIERE REGLE GENERALE.

LORSQU'ON ſçait inſcrire en un cercle donné une certaine eſpece de figure reguliere, il eſt bien facile d'inſcrire toutes celles qui ont plus ou moins de coſtez, ſelon la progreſſion double. XXXII.

SCD LYON 1

C'eſt à dire qui en ont deux fois moins, 4 fois moins, 8 fois moins &c. juſques à ce qu'on ſoit arrivé ou à 4, ou à un nombre impair, qui ne ſe puiſſe plus diviſer par la moitié.

Ou qui en ont deux fois plus, 4 fois plus, 8 fois plus &c. juſqu'à l'infini.

Suppoſons, par exemple, qu'on ſçache inſcire dans un cercle donné une figure de 32 coſtez, la corde qui ſoûtiendra deux arcs de cette figure, ſera le coſté d'une figure de 16. Et celle qui ſoûtiendra deux arcs de la figure de 16 coſtez, ſera le coſté d'une figure de 8. Et ainſi de ſuite.

Et au contraire la corde qui ſoûtiendra la moitié de l'arc de cette figure de 32 coſtez ſera le coſté d'une figure de 64. Et celle qui ſoûtiendra la moitié de l'arc d'une figure de 64 coſtez, ſera le coſté d'une figure de 128 coſtez. Et ainſi à l'infini.

SECONDE REGLE GENERALE.

XXXIII. Lorsque l'on ſçait inſcrire une certaine eſpece de figure reguliere en un cercle donné, on la ſçait auſſi circonſcrire.

Car ayant les points de tous les ſommets des angles de l'inſcrite, les tangentes au cercle à ces mêmes points eſtant prolongées juſques à ce qu'elles ſe rencontrent, font une figure ſemblable circonſcritte au même cercle ; puiſque d'une part tous les angles circonſcrits de cette figure ſont égaux, eſtant appuyez ſur des arcs convexes égaux; & que de l'autre chacun de ces angles eſt égal à l'angle de la figure circonſcritte, par IX. 52.

PROBLEMES PARTICULIERS.

I.

XXXIV. Inscrire un quadrilatere regulier (qui s'appelle quarré) dans un cercle donné.

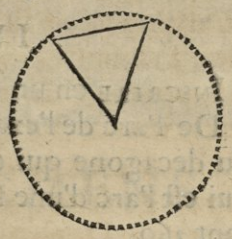
Deux diametres qui ſe coupent partagent la circonference en 4 parties, dont chacune eſt l'arc du quarré inſcrit dans le cercle.

SCD LYON 1

COROLLAIRE.

INSCRIRE dans un cercle donné une figure de 8 costez, de 16, de 32 ; & ainsi à l'infini. 2e Regle generale. XXXV.

II. PROBLEME.



INSCRIRE en un cercle donné un exagone regulier. XXXVI.

Le demi diametre ou rayon est le côté de l'exagone. Car ayant fait un angle compris par deux rayons, & ayant pour base une ligne égale au rayon, cet angle est de 60 degrez, puisque cet angle est égal à chacun des angles sur la base, & que les trois ensemble valent 180 degrez. Donc chacun est de 60 degrez. Or 60 degrez est l'arc de l'exagone. Donc le demy diametre est le côté de l'exagone.

I. COROLLAIRE.

INSCRIRE en un cercle donné un triangle regulier. XXXVII.

Doubler l'arc de l'exagone, par la 1re Regle generale.

II. COROLLAIRE.

INSCRIRE en un cercle donné une figure de 12 côtez, de 24, de 48. Et ainsi à l'infini. 1re Regle generale. XXXVIII

III. PROBLEME.

INSCRIRE en un cercle donné un decagone, ou figure de dix côtez. XXXIX.

Ayant divisé le demy diametre en moyenne ou extrême raison (par XI. 68.) la plus grande partie de cette ligne ainsi divisée est le côté du decagone. Car elle soûtient un arc de 36. degrez, par XI. 73.

I. COROLLAIRE.

INSCRIRE en un cercle donné un pentagone & figure de cinq côtez. XL.

Doubler l'arc du decagone, par la 1re Regle generale.

II. Corollaire.

XLI. Inscrire en un cercle donné une figure de 20 côtez, de 40, de 80 : & ainsi à l'infini. 1re Regle generale.

IV. Probleme.

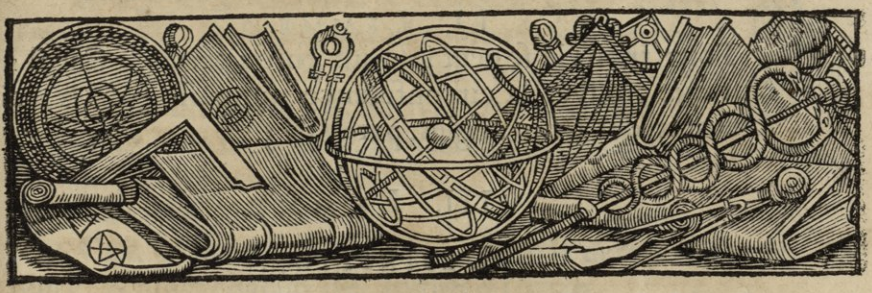
XLII. Inscrire en un cercle donné une figure de 15 côtez.

De l'arc de l'exagone qui est de 60 degrez, oster l'arc du decagone qui est de 36, il restera un arc de 24 degrez, qui est l'arc d'une figure de 15 costez ; parce que 24 fois 15 font 360.

Corollaire.

XLIII. Inscrire en un cercle donné une figure de 30 costez, de 60, de 120. Et ainsi à l'infini. 1re Regle generale.

SCD LYON 1



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE TREIZIE'ME.

DES TRIANGLES ET QUADRILATERES CONSIDEREZ SELON LEURS COSTEZ ET LEURS ANGLES.

APRE'S ce qui a eſté dit des figures en general, il ne reſte plus que d'expliquer ce qui eſt particulier aux triangles, & aux quadrilateres.

PREMIERE SECTION.

Des Triangles.

I. LEMME.

UN angle avec ſa baſe, eſt la même choſe qu'un triangle. Et ainſi tout ce qui a eſté dit dans les livres des angles, des proportionelles, & des reciproques des angles conſiderez avec leur baſe, ſe peut ſans peine appliquer aux triangles. I.

SCD LYON 1

II. LEMME.

II. TOUT triangle ſe peut inſcrire en un cercle. Car il ne faut que trouver la circonference qui paſſe par les trois ſommets des trois angles, par VII. 3.

III. LEMME.

DEFINITION.

III. LE côté quelconque d'un triangle en peut eſtre appellé *la baſe*, & les deux autres ſes coſtez : & alors l'angle ſoûtenu par la baſe eſt appellé *l'angle du ſommet*, & la diſtance de ce ſommet à la baſe eſt appellée *la hauteur du triangle*.

TRIANGLES CONSIDEREZ A PART.

I. THEOREME.

IV. TOUT triangle a ſes trois angles égaux à deux droits. VIII. 59.

I. COROLLAIRE.

V. Tous les trois angles d'un triangle peuvent eſtre aigus ; mais il n'y en peut avoir qu'un droit ou obtus.

II. COROLLAIRE.

VI. SI l'un des angles du triangle eſt droit, les deux autres valent un droit.

III. COROLLAIRE.

VII. QUI connoît la grandeur des deux angles d'un triangle, connoît la grandeur du 3^e^. Car ôtant de la demy-circonference les deux dont ont connoît la grandeur, ce qui reſte eſt la grandeur du 3^e^.

Qui connoît de combien de degrez ſont les deux, ſçait de combien de degrez eſt le 3e. Car ôtant le nombre des degrez que valent les deux de 180, ce qui reſte eſt le nombre des degrez que vaut le 3e. Si les deux valent 108 degrez, le 3e en vaut 72.

II. THEOREME.

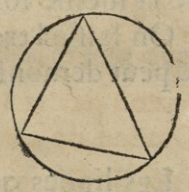
VIII. DANS tout triangle le plus grand côté ſoûtient le plus grand

SCD LYON 1

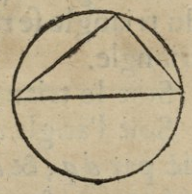
grand angle, & le plus grand angle eſt ſoûtenu par le plus grand côté. Car par le 2e Lemme, tout triangle peut eſtre inſcrit dans un cercle, & alors la circonference du cercle eſt partagée en trois arcs, ſur chacun deſquels eſt appuyé chacun des angles du triangle.

Or ces trois arcs ſont:

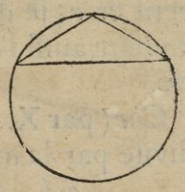
1er Cas. Ou tous trois moindres que la demy-circonference: & alors chacun des angles du triangle eſt aigu. (IX. 25.) Et il eſt clair que le plus grand angle étant appuyé ſur le plus grand arc, eſt auſſi ſoûtenu par le plus grand côté. VII. 10.



2e Cas. Ou l'un de ces arcs eſt une demy-circonference, & les autres moindres; & alors l'angle appuyé ſur la demy-circonference eſt droit (IX. 25.) Et par conſequent le plus grand de tous; comme auſſi le coſté qui le ſoûtient, qui eſt un diametre, eſt plus grand qu'aucun des deux autres. VII. 9.



3e Cas. Ou l'un de ces arcs eſt plus grand que la demy-circonference; & alors l'angle appuyé ſur cet arc eſt obtus, & par conſequent le plus grand de tous: comme auſſi le coſté qui le ſoûtient terminant le ſegment dans lequel eſt cet angle obtus, eſt plus prés du centre qu'aucun des deux coſtez qui le comprennent; & ainſi plus grand. VII. 10.



I. Corollaire.

Tous les coſtez du triangle étant égaux, tous les angles le ſont auſſi: & au contraire tous les angles eſtant égaux, les coſtez le ſont auſſi. IX.

Car étant inſcrit dans un cercle, les coſtez égaux ſoûtiennent des arcs égaux. Or les angles appuyez ſur des arcs égaux, ſont égaux. IX. 21.

Que ſi au contraire on ſuppoſoit les trois angles égaux, on prouveroit de la même maniere que les coſtez ſont égaux. Car les angles égaux ſeront appuyez ſur des arcs

égaux. IX. 21. Or les arcs égaux sont soûtenus par des costez égaux.

II. Corollaire.

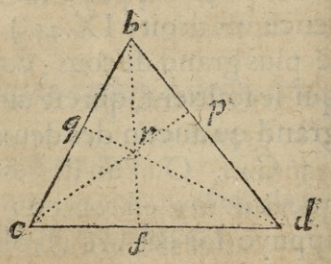
X. Tout triangle qui a deux costez égaux a les deux angles soûtenus par ces costez égaux ; & au contraire. En inscrivant ce triangle dans le cercle, on prouvera ce Corollaire de la même sorte que le precedent.

On laisse à trouver beaucoup d'autres manieres dont on le peut demonstrer.

III. Theorem

XI. Les lignes qui divisent par la moitié chacun des angles du triangle se rencontrent en un même point au dedans du triangle.

Soit le triangle *b c d*.



Soit l'angle *d* divisé par la moitié par *d q*, & *c* divisé par la moitié par *c p*, & que *d q* & *c p* se coupent en *r* ; je dis que la ligne *b r* divisera aussi l'angle *b* par la moitié.

Car (par X. 30) l'angle *d* étant divisé par la moitié,

d b. b q :: d c. c q.

Et par la même raison considerant *d q*, comme la base de l'angle *c*, divisé par la moitié par *c r.*

c d. c q :: d r. q r.

Donc *d b. b q :: d r. q r.*

Donc (par X. 31.) la ligne *b r* divise l'angle *b* par la moitié. Ce qu'il falloit demonstrer.

Corollaire.

Ces lignes coupant par la moitié les angles d'un triangle font plusieurs proportions. On les peut reduire à 9, en commençant la comparaison par les portions des secantes.

SCD LYON 1

Pour l'angle *b. b r. r s* { *b d. d s.* / *b c. c s.*

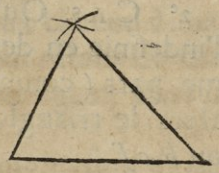
Pour l'angle *c. c r. r p* { *c d. d p.* / *c b. b p.*

Pour l'angle *d. d r. r q* { *d b. b q.* / *d c. c q.*

I. Probleme.

Faire un triangle de trois lignes données. Il faut que deux quelconques soient plus grandes que la 3e. XII.

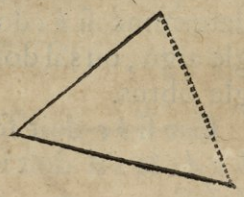
De chacune des deux extremitez de l'une des données décrire un cercle de l'intervalle de chacune des deux autres ; où ces deux cercles se rencontreront, ce sera le point où il faudra tirer les deux côtez du triangle.



II. Probleme.

Faire le triangle dont on a un angle, & la grandeur des costez qui le comprennent. XIII.

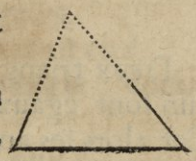
Ayant mis ces deux costez en sorte qu'ils fassent l'angle donné, la ligne qui en joindra les extremitez achevera le triangle.



III. Probleme.

Faire le triangle dont on a un costé, & les deux angles sur ce costé. XIV.

Tirant des lignes sur les extremitez du costé donné qui fassent les angles donnez, où elles se rencontreront elles acheveront le triangle.



IV. Probleme.

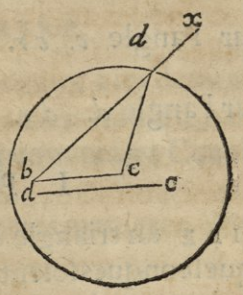
Faire le triangle dont on a un angle, un des costez qui le comprend, & la grandeur du costé qui le soûtient. XV.

Soit *b c* le costé donné comprenant l'angle donné, & *c d* la grandeur du costé qui doit soûtenir l'angle donné,

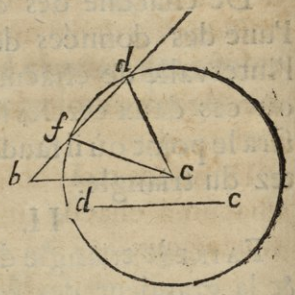
SCD LYON 1

tirant de *b* une ligne indefinie qui faſſe ſur *b c* l'angle donné, & décrivant un cercle de *c*, intervalle *c d*.

1. CAS. Ou ce cercle ne coupera l'indefinie qu'au point *d*. Ce qui arrivera toûjours quand le coſté qui doit ſoûtenir l'angle donné eſt plus grand que celuy qui le comprend) & alors le triangle ſera *b c d*.



2^e CAS. Ou le cercle coupera l'indefinie en deux points de la même part (comme en *f* & en *d*) & alors le triangle pourra eſtre *b c d*, ou *b c f*.



Et pour ſçavoir lequel des deux c'eſt preciſément, il faudroit avoir determiné ſi *b c* doit ſoûtenir un angle aigu, ou s'il doit ſoûtenir un angle obtus.

Car ſi *b c* doit ſoûtenir un angle aigu, le triangle eſt *b c d*: & s'il doit ſoûtenir un angle obtus, le triangle eſt *b c f*.

TRIANGLES COMPAREZ.

I. THEOREME.

XVI. DEUX triangles ſont tout-égaux, quand les coſtez de l'un ſont égaux aux coſtez de l'autre, chacun à chacun. Car alors les angles de l'un ſont auſſi égaux aux angles de l'autre, par VIII. 64.

II. THEOREME.

XVII. DEUX triangles ſont tout-égaux quand ils ont un angle égal, & que les coſtez qui comprennent dans l'un cet angle égal, ſont égaux à ceux qui le comprennent dans l'autre, chacun à chacun. Car alors la baſe eſt auſſi égale à la baſe, par VIII. 65.

SCD LYON 1

III. Theoreme.

Deux triangles sont tout-égaux quand ils ont un costé égal, & que les angles sur ce costé égal sont égaux chacun à chacun. XVIII.

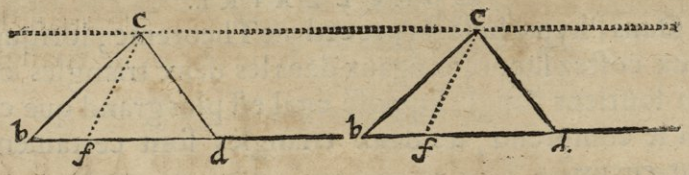
Car ces deux angles estant égaux chacun à chacun, le troisiême qui est celuy que soûtient le costé égal, sera égal aussi (S. 7.)

Si donc l'on s'imagine que ces deux triangles sont chacun inscrit dans un cercle, ces cercles seront égaux (par X. 26.) parce que le costé égal soûtiendra dans chacun de ces cercles des arcs d'autant de degrez.

Donc les deux autres angles estant égaux chacun à chacun seront appuyez sur des arcs égaux, qui estant de cercles égaux seront soûtenus par des costez égaux chacun à chacun.

Donc les trois costez de ces deux triangles sont égaux chacun à chacun aussi bien que les angles. Donc ils sont tout-égaux.

IV. Theoreme.



Si deux triangles ont ces trois choses égales. XIX.

Un angle, comme celuy dont le sommet est en *b*.

Un des costez qui comprennent cet angle, comme *b c*.

Et le costé qui le soûtient, comme *c d*, ou *c f*.

Il faut outre cela afin qu'ils soient tout-égaux, où que l'angle que soûtient *b c*, ne soit obtus ny dans l'un ny dans l'autre, ou qu'il soit obtus dans tous les deux.

Car supposant qu'on eust mené par *c* une parallele à *b d*.

Ces deux triangles seroient enfermez entre deux es-

paces paralleles égaux (par VIII. 56.) parce que *b c* eſt égale & fait le même angle *c b d* dans l'un & dans l'autre.

Donc le coſté *c d* ou *c f* eſtant égal par l'hypotheſe dans les deux triangles, s'il eſt oblique dans tous les deux vers le même endroit, il fait le même angle aigu dans l'un & dans l'autre ; lorſque c'eſt vers le dedans du triangle qu'il eſt incliné, comme quand c'eſt *c d*, en l'un & en l'autre ; ou le même angle obtus quand c'eſt vers le dehors, comme ſi c'eſt *c f* en l'un & en l'autre. VIII. 56.

Donc les deux triangles qui avoient déja deux coſtez égaux par l'hypotheſe ſe trouvant encore avoir deux angles égaux, & par conſequent trois (7. S.) ſeront tout-égaux par le 2e Theoreme.

Mais ſi le coſté que ſoûtient *b c* eſtoit diverſement incliné dans ces deux triangles, parce que ce ſeroit *c d* dans l'un & *c f* dans l'autre, ces triangles n'auroient garde d'être tout-égaux, puiſque *c d* feroit dans l'un un angle aigu ; & *c f* dans l'autre un angle obtus.

COROLLAIRE.

Dans l'hypotheſe du precedent Theoreme, lorſque des deux coſtez ſuppoſez égaux dans les deux triangles celuy qui ſoûtient l'angle ſuppoſé égal eſt plus grand que celuy qui le comprend, les deux triangles ſont certainement tout-egaux.

Car alors dans l'un & dans l'autre angle *c d b* eſt neceſſairement aigu, par 8. S.

V. THEOREME.

XX. DEUX triangles équiangles entr'eux ſont ſemblables. C'eſt à dire que les coſtez de l'un ſont proportionels aux coſtez de l'autre. C'eſt ce qui a eſté prouvé en diverſes manieres dans les deux livres des Proportionelles. Voyez X. 18.

AVERTISSEMENT ET DEFINITION.

XXI. EN comparant deux triangles ſemblables, il faut toûjours comparer les plus grand coſté de l'un au plus grand

SCD LYON 1

coſté de l'autre, le moyen au moyen, & le plus petit au plus petit. Ainſi le plus grand coſté eſtant appellé *b*. b.
Le moyen *d*. d.
Et le plus petit *h*. h.
Dans deux triangles ſemblables.
b. b :: *d*. d :: *h*. h.
Et ces coſtez que l'on doit comparer enſemble s'appellent homologues.

I. Corollaire.

Les coſtez qui ſoûtiennent les angles égaux, ſont homologues. Car dans l'vn & dans l'autre le plus grand côté ſoûtient le plus grand angle; le moyen coſté le moyen angle; le plus petit coſté le plus petit angle. Cela ſe prouve encore par le X. livre 18. XXII.

II. Corollaire.

Deux triangles ſont équiangles, ſi deux angles de l'un ſont égaux aux deux angles de l'autre, chacun à chacun. Car il s'enſuit de là que le 3e eſt auſſi égal au 3e. XXIII.

VI. Theoreme.

Lorsque deux triangles ont un angle égal, & les coſtez qui ſoûtiennent ces angles proportionels, ils ſont ſemblables. Car alors la baſe eſt auſſi proportionelle à la baſe, & les deux angles ſur cette baſe égaux, par XI. 63. XXIV.

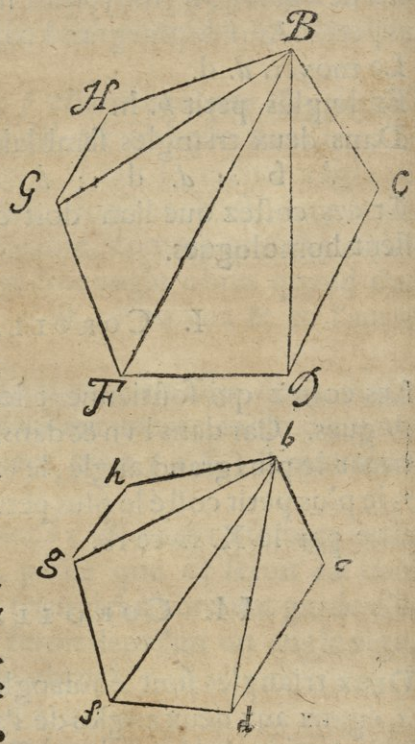
VII. Theoreme.

Si deux triangles ſont de même hauteur, les paralleles à la baſe également diſtantes de la baſe dans l'une & dans l'autre ſont entr'elles comme ces baſes. XXV.
Cela eſt demonſtré X. 20.

SCD LYON 1

VIII. THEOREME.

XXVI. DEUX polygones quelconques eſtant ſemblables peuvent eſtre partagez, chacun en autant de triangles, qui ſeront tels, que ceux d'une part ſont ſemblables à ceux de l'autre part, chacun à chacun, & les coſtez homologues de deux de ces triangles ſemblables, ſont en même raiſon que ceux de deux autres ſemblables.



Soient deux exagones irreguliers ſemblables *B C D F G H*, & *b c d f g h*. Soient menées dans le grand des lignes de *B* à *D*, à F, à *G*. Et de même dans le petit.

L'une & l'autre exagone ſera en 4 triangles.

Sçavoir { *B C D. B D F. B F G. B G H.* / *b c d. b d f. b f g. b g h* }

Qui ſont ſemblables deux à deux *B C D*; à *b c d* &c.

Car les angles *C* & *c* ſont égaux par l'hypotheſe que les exagones ſont ſemblables, & les coſtez *C B* & *C D* proportionels aux coſtez *c b* & *c d* par la même hypotheſe.

Donc les baſes *B D* & *b d* ſont auſſi proportionelles aux coſtez, & les triangles ſemblables, par le 6e Theoreme.

B D F & *b d f* ſont ſemblables auſſi. Car les angles *C D F* & *c d f* eſtant égaux par l'hypotheſe, ſi on en oſte les angles *B D C* & *b d c* qui ſont égaux auſſi (comme on le vient de voir) les angles *B D F* & *b d f* demeureront égaux.

Or

Or les costez de ces angles BD & DF d'une part, & bd & df de l'autre sont proportionels. Donc les bases DF & df sont proportionels aux costez, & les triangles BDF & bdf semblables. On prouvera la même chose & de la même maniere des autres triangles. Donc les triangles d'une part sont semblables à ceux de l'autre.

Il reste à prouver que les costez homologues de deux de ces triangles semblables sont en même raison que ceux de deux autres semblables, ce qui est aisé. Car prenant les points B & b pour sommet des quatre triangles d'une part & d'autre, ils auront chacun pour base un des costez de l'exagone. Les deux premiers CD & cd, les deux seconds DF & df &c.

Or par l'hypothese $CD.\ cd :: DF.\ df$.

Donc les bases des deux premiers triangles sont proportionelles aux bases des deux seconds. Et ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

On omet diverses choses qui pourroient estre dittes des triangles semblables, parce qu'il n'y a rien en tout cela qui ne se trouve facilement par ce qui a esté dit des angles considerez avec leurs bases dans les deux livres des Proportionelles. XXVII.

DIVISION DU TRIANGLE EN SES ESPECES.

LE triangle se divise selon les costez & selon les angles. XXVIII.

Les côtez sont { tous trois inégaux, & s'appelle Scalene.
Deux égaux, Isoscele.
Tous trois égaux, Equilateral.

Les angles sont { Tous trois aigus, Oxygone.
Deux aigus & l'autre { obtus, Amblygone.
droit, Rectangle.

Le scalene à ses trois angles inégaux.
L'Isoscele en a deux égaux.
L'equilateral les a tous trois égaux.

Le scalene, L'Isoscele } peuvent estre { Oxygone. Amblygone. Rectangle.

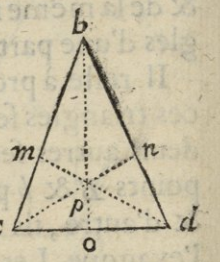
L'equilateral ne sçauroit estre qu'oxygone.

SCD LYON 1

DES TRIANGLES OXYGONES.

THEOREME.

XXIX. Si de tous les angles d'un triangle oxygone on tire des perpendiculaires aux côtez, elles se couperont en un même point au dedans du triangle.



Soit le triangle *b c d*, & deux perpendiculaires aux costez *d m*, *cn*; je dis que *b o* menée par le point *p*; qui est celuy où *d m* & *c n* se coupent, sera aussi perpendiculaire.

Car les triangles *c b n* & *d b m* sont équiangles ayant chacun un angle droit & un angle commun; & par consequent les angles *b c n* & *b d m* sont égaux.

Et par consequent aussi les triangles *b d m* & *c p m* sont équiangles, ayant chacun un angle droit, & l'angle *m c p* (qui est le même que *b c n*) estant égal à l'angle *b d m*.

Donc *d m. m c* : : *m b. m p. & alternando d m. m b* : : *m c. m p.*

Donc les triangles *b m p* & *d m c* sont équiangles, par 24. *sup.* puisque dans le triangle *b m p* les costez *d m* & *m c*, qui comprennent un angle drait, sont proportionels à *m b* & *m p* qui comprennent aussi un angle droit.

Donc l'angle *m b p* soûtenu par *m p*, est égal à l'angle *m d c* soûtenu par *m c*.

Or les angles *m p b* & *o p d* sont égaux, parce qu'ils sont opposez au sommet. Donc les triangles *m p b* & *o p d* sont équiangles.

Or l'angle *p m b* est droit par la constructiion.

Donc l'angle *o p d* est droit aussi. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

XXX. Ces perpendiculaires coupant les angles d'un triangle, font 12 triangles rectangles: 6 grands, qui ont pour hypothenuse l'un des costez du triangle total, & qui enferment

tous quelque chose les uns des autres : & 6 petits entierement separez, & qui ont chacun pour hypothenuse la portion d'une perpendiculaire la plus proche de l'angle qu'elle coupe ; & ces 12 triangles rectangles sont 4 à 4 équiangles, deux grands & deux petits. C'est un exercice d'esprit de les trouver, & il vaut mieux le laisser à ceux qui commencent. Je diray seulement qu'entre les diverses proportions qui se font par tous ces triangles, il y en a de deux sortes fort considerables.

La premiere est, que le costé d'un angle & sa premiere portion sont reciproques à l'autre costé & sa premiere portion c'est à dire que le grand costé est au petit comme la premiere portion du petit à la premiere portion du grand. Exemple dans l'angle *b*.

grand, petit, :: 1. portion du grand, 1. portion du petit.
b d. b c. :: b m. b n.

La seconde est, que les portions d'un costé du triangle total sont reciproques à la perpendiculaire entiere, & sa portion qui fait l'angle droit ; c'est à dire qu'une portion du costé est à la perpendiculaire, comme la portion de la perpendiculaire qui fait l'angle droit, est à l'autre portion du costé. Exemple :

port. du costé. perpend :: port. de la perp. port. du costé.
m c. m d :: m p. m b.

DES TRIANGLES RECTANGLES.

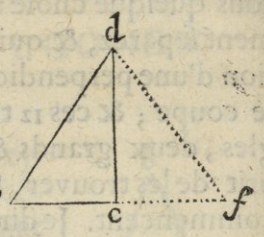
I. THEOREME.

Si l'un des angles aigus du triangle rectangle est double de l'autre (ce qui ne peut estre qu'il ne vaille les deux tiers d'un angle droit, & l'autre le tiers, c'est à dire qu'il ne soit de 60 degrez & l'autre de 30) le petit costé qui soûtient l'angle de 30 degrez & qui en est le sinus, est la moitié de l'hypothenuse de l'angle droit, qui est aussi le rayon de cet angle de 30 degrez. XXXI.

Soit le triangle *b d c* conforme à l'hypothese.

SCD LYON 1

Tirant df égale à db sur bc prolongée, l'angle dfb sera égal à l'angle dbf, & par consequent l'un & l'autre sera de 60 degrez. Donc l'angle bdf sera aussi de 60 degrez, puisque tous les trois ensemble valent deux droits, c'est à dire 180 degrez.



Donc le triangle bdf est équilateral.

Donc $bc + cf = db$.

Or $bc = cf$, les deux triangles dbc & dcf estant tout-égaux, par 18. *sup.*

Donc bc est la moitié de db. Ce qu'il falloit demonstrer.

Probleme.

XXXII. Trouver le triangle rectangle dont on a

1. Ou les deux costez comprenans l'angle droit.
2. Ou l'hypothenuse, & un des costez.
3. Ou l'hypothenuse, & la perpendiculaire du sommet de l'angle droit à cette hypothenuse.
4. Ou l'hypothenuse, & la moyenne proportionelle entre l'hypothenuse donnée, & un des costez.
5. Ou vn des costez & la moyenne proportionelle entre le costé donné & l'hypothenuse.
6. Ou l'un des costez, & la moyenne proportionelle entre ce costé donné & l'autre costé.

Premier Cas.

Mettant à l'angle droit les deux costez donnez, la ligne qui en joint les extremitez est l'hypothenuse.

Second Cas.

Décrivant la demy-circonference dont l'hypothenuse donnée est le diametre, le point de cette circonference où se terminera le costé donné sera le point du sommet de l'angle droit; ce qui determinera l'autre costé non donné.

Troisieme Cas.

Voyez IX. 34.

Quatre, Cinq et Sixieme Cas.

Trois lignes estant continuellement proportionelles,

SCD LYON 1

ayant la premiere & la seconde, qui est la moyenne, on a la 3e par le Probleme, X. 34. Et par consequent le 4e & 5e Cas se rapportent au 2e, & le 6e au 1er.

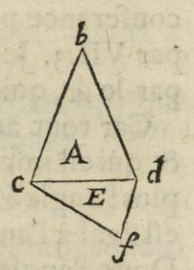
DES TRIANGLES ISOSCELES.

I. Theoreme.

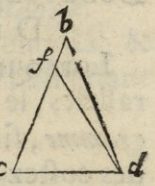
Lorsque l'angle du sommet d'un triangle Isoscele est de 36 degrez, chacun des angles sur la base est de 72, & la base est la moyenne proportionelle entre le costé entier, & le costé moins cette base (c'est à dire que la base divise le costé en moyenne & extrême raison) & la base estant ajoûtée au côte, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. Voyez XI. 68. 69. 73. XXIII.

II. Theoreme.

Deux triangles Isosceles estant semblables & inégaux, si la même ligne est la base de l'un & le costé de l'autre, cette ligne sera moyenne proportionelle entre le costé de triangle dont elle est base, & la base de celuy dont elle est costé. XXIV.



Soit l'un des triangles Isosceles *b c d*, & l'autre *c f d*, de sorte que *c d* soit la base de *b c d*, & le costé de *c f d*; Je dis que *c d* sera moyenne proportionelle entre *b c* costé du premier triangle, & *f d* base du second. Car ces triangles estant semblables, *b c* (costé du 1er) est à *c d* (costé du 2e) comme le même *c d*, entant que base du premier, est à *f d* base du second.



Donc ∴ *b c. c d. f c.* Ce qu'il falloit demonstrer.

SECONDE SECTION.

Des Quadrilateres.

Definitions.

Le quadrilatere est une figure de 4 costez qui ne se joignent qu'aux extrêmitez : & par consequent de 4 an- XXXV.

gles qui tous enſemble valent quatre droits. XII. 5.

Les coſtez qui comprennent un même angle s'appellent coſtez angulaires.

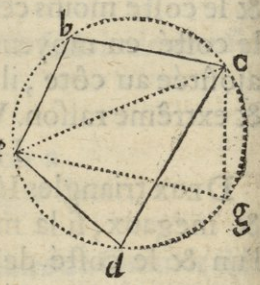
Ceux qui ne comprennent point le même angle, coſtez oppoſez.

Les angles de même ſont proches ou oppoſez.

THEOREME.

XXXVI. TOUT quadrilatere qui a ſes angles oppoſez égaux à deux droits, peut eſtre inſcrit au cercle, & nul autre n'y peut eſtre inſcrit.

Soit le quadrilatere *b c d f*, dont les angles *b* & *d* ſoient égaux à deux droits, & par conſequent auſſi les angles *f*. *c*.



Soit trouvé le cercle dont la circonference paſſe par les 3 points *f b c*. par VII. 3. Je dis qu'elle paſſera auſſi par le 4e, qui eſt *d*.

Car tout angle qui a *f c* pour baſe, & qui eſt inſcrit dans ce cercle du coſté de *d*, comme *f g c* plus l'angle *b*, vaut deux droits. IX. 26. Or l'angle *f g c* eſt égal à l'angle *d*, qui plus l'angle *b* vaut auſſi deux droits. Donc l'angle *d* eſt auſſi inſcrit dans ce cercle par IX. 30.

DIVISION ET DEFINITIONS.

XXXVII. LORSQUE les coſtez oppoſez d'un quadrilatere ſont paralleles, le 1er au 3e, & le 2e au 4e, on l'appelle *Parallelogramme*, ſinon on l'appelle *Trapeze*, quand même deux des coſtez oppoſez, comme le 1er & le 3e ſeroient paralleles, ſi le 2e & le 4e ne le ſont pas.

DES PARALLELOGRAMMES.

I. THEOREME.

XXXVIII SI les coſtez oppoſez d'un quadrilatere ſont égaux, ils ſont paralleles; & s'ils ſont paralleles, ils ſont égaux. VI. 26. & 27.

II. THEOREME.

XXXIX. SI tous les 4 angles d'un quadrilatere ſont droits, il eſt parallelogramme. VI. 23.

SCD LYON 1

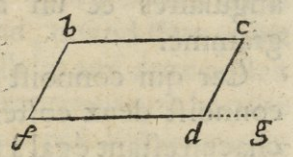
III. THEOREME.

SI deux coſtez oppoſez d'un quadrilatere ſont égaux & paralleles, les deux autres ſont auſſi égaux & paralleles. VI. 28. XL.

IV. THEOREME.

LES deux angles oppoſez d'un parallelogramme ſont égaux, & les proches ſont égaux à deux droits. XLI.

Soit le parallelogramme *b c d f*. Soit prolongé *f d* juſques à *g*, l'angle *c d g* eſt égal à l'angle *c*, par VIII. 53. & à l'angle *f*, par VIII. 54. Donc les aigus oppoſez *c* & *f* ſont égaux.



Or les deux angles vers *d*, l'un exterieur & l'autre interieur, ſont égaux à deux droits. Donc les angles interieurs vers *d* & vers *f* ſont auſſi égaux à deux droits.

Donc les deux autres vers *b* & vers *c* ſont auſſi égaux à deux droits; puiſque les 4 valent 4 droits.

Oſtant donc de part & d'autre les deux aigus *c* & *f* qui ſont égaux, les obtus oppoſez *b* & *d* ſeront égaux.

I. COROLLAIRE.

S'IL y a un angle droit dans un parallelogramme, tous les autres le ſont auſſi, & alors il eſt appellé *Rectangle*. XLII.

Car l'oppoſé eſt droit, puiſqu'il eſt égal à celuy-là; & les proches ne peuvent valoir deux droits, que l'un eſtant droit, l'autre ne le ſoit auſſi.

II. COROLLAIRE.

QUI connoiſt un angle du parallelogramme, les connoiſt tous. Car ce qui manque de la demy-circonference à l'arc qui meſure l'angle donné, eſt la meſure de l'angle proche de celuy-là, & les deux autres ſont égaux chacun à l'un de ces deux-là. XLIII.

III. COROLLAIRE.

DEUX parallelogrammes qui ont un angle égal, ſont equiangles. XLIV.

SCD LYON 1

IV. Corollaire.

XLV. Si deux costez angulaires d'un parallelogramme sont égaux, tous les 4 sont égaux entr'eux. Car chacun des angulaires est égal à son opposé.

V. Corollaire.

XLVI. Qui connoist d'un parallelogramme deux costez angulaires & un angle, connoist tout le parallelogramme.

Car qui connoist un angle, les connoist tous ; & qui connoist deux costez angulaires connoist les deux autres, chacun estant égal à son costé.

Probleme.

XLVII. Decrire un parallelogramme dont on a un angle, & la grandeur de chacun des deux costez angulaires.

Les deux costez angulaires comprenant cet angle, de l'extremité du plus petit décrire un cercle de l'intervalle du plus grand, & de l'extremité du plus grand décrire un cercle de l'intervalle du plus petit : les lignes menées de ces extremitez au point où ces cercles se couperont, acheveront la descriptionde ce parallelogramme.

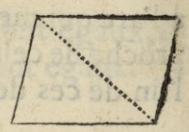
V. Theoreme.

XLVIII. Deux parallelogrammes sont semblables quand ils ont un angle égal, & les costez angulaires proportionels.

Car l'égalité d'un angle donne celle des autres ; & deux costez angulaires ne sçauroient estre proportionels, que les deux autres ne le soient aussi.

DEFINITION.

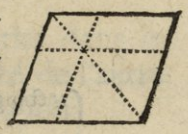
XLIX. La ligne qui joint deux angles opposez s'appelle *Diagonale*, & elle divise le parallelogramme en deux triangles tout égaux. Car les deux angles non divisez sont égaux, parce qu'ils sont opposez ; & les parties des divisez sont alternativement égales, par VIII. 53.



SCD LYON 1

VI. THEOREME.

SI on tire des paralleles aux costez angulaires qui passent par le même point de la Diagonale, les parties de ces nouvelles lignes sont proportionelles. L.



Demonstré X. 16.

DEFINITION.

ON dit qu'un parallelogramme est décrit autour de la diagonale d'un autre parallelogramme, quand d'un point de cette diagonale on tire deux paralleles aux deux costez angulaires du parallelogramme, qui se terminant chacune à l'un de ces costez fassent un nouveau parallelogramme, dont une partie de cette diagonale est encore diagonale. LI.

VII. THEOREME.

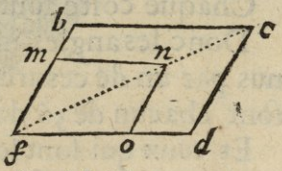
TOUT parallelogramme décrit autour de la diagonale d'un autre, luy est semblable. LII.

b c d f est semblable à *m n o f*. Car d'une part *f d c* & *f o n* sont égaux; parce que *c d* & *n o* sont paralleles.

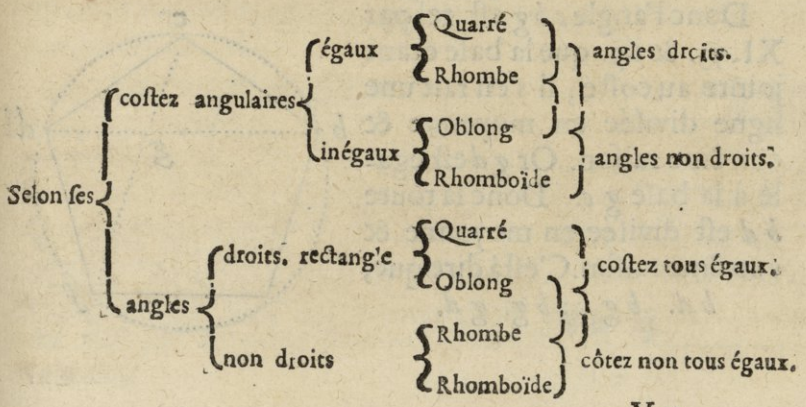
Et par la même raison *f c d*, & *f n o* sont égaux aussi.

Donc *f d. f o* :: *d c. o n.*

Donc ces parallelogrammes sont equiangles, & ont les costez angulaires proportionels. Donc ils sont semblables par le 5e Theoreme.



DIVISION DU PARALLELOGRAMME EN SES ESPECES. LIII.



SCD LYON 1

AUTREMENT.

Parallel. { rectangle { tous les costez égaux. Quarré. / les seuls opposez égaux. Oblong. } / non rectangle { tous les costez égaux. Rhombe. / les seuls opposez égaux. Rhomboïde. }

DU PENTAGONE.

THEOREME.

LIV. LORSQUE deux lignes qui soutiennent chacune un angle d'un pentagone regulier se coupent, elles se coupent mutuellement en moyenne & extrême raison, & la plus grande partie de chacune de ces lignes est égale au costé du pentagone.

Soit le pentagone inscrit dans un cercle.

Chaque costé soutient un arc de 72 degrez. XII. 21.

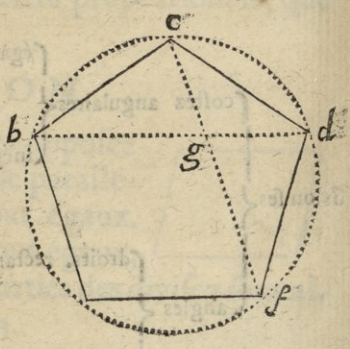
Donc les angles inscrits au même cercle qui sont soutenus par un de ces arcs (tels que sont *c b d*, *c d b*, *d c f*, *d f c*) sont chacun de 36 degrez. IX. 18.

Et ceux qui sont soutenus par deux de ces costez (comme l'angle *b c f*) sont de 72. *ibid.*

Et les angles opposez au sommet (*b g c* & *f g d*) sont chacun aussi de 72 degrez, par IX. 40. Et par consequent *b g* est égale à *b c* côté du pentagone.

Donc l'angle *c b g* est tel par XI. 73. & 69. que la base étant jointe au costé; il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. Or *g d* est égale à la base *g c*. Donc la toute *b d* est divisée en moyenne & extrême raison. C'est à dire que,

b d. b g :: b g. g d.



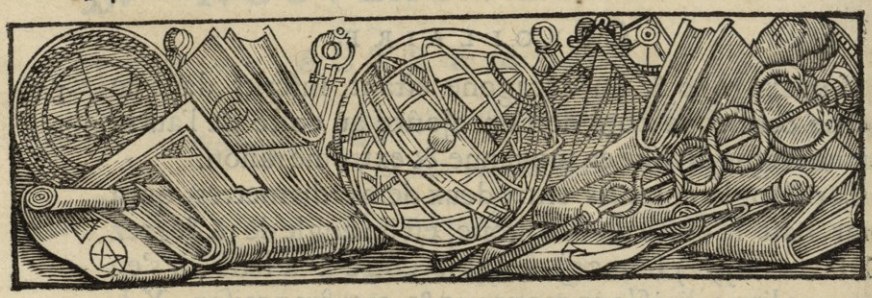
SCD LYON 1

COROLLAIRE.

UN exagone & un decagone estant inscrits dans le même cercle, le côté de l'un ajoûté au costé de l'autre fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. LV.

Car l'angle compris entre deux demy-diametres, qui a pour base le costé du decagone, est un angle de 36 degrez (XII. 21. & 39.) Donc ajoûtant le costé à la base, il s'en fait une ligne divisée en moyenne & extrême raison. XI. 73. & 69. *& sup.* 33.

Or le costé de cet angle qui est le demy-diametre, est aussi le costé de l'exagone inscrit dans ce cercle là.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QVATORZIE'ME.

DES FIGVRES PLANES considerées selon leur aire : c'est à dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent.

Et premierement des Rectangles.

IDE'E GENERALE DE LA MESURE DES SURFACES.

I. *LA surface estant une étenduë de deux dimensions, longueur & largeur, il est necessaire pour en connoistre la grandeur, de sçavoir quelle en est la longueur, & qu'elle en est la largeur.*

La longueur se mesure par une ligne droitte qui donne la distance d'un point à un point. C'est pourquoy on ne peut connoître la longueur des lignes courbes que par rapport à des lignes droites.

SCD LYON 1

La largeur consiste dans la distance entre deux lignes ; comme entre b *&* c, *qui se mesure aussi par une ligne droite. C'est pourquoy les surfaces courbes ne se peuvent mesurer que par rapport à des surfaces planes.* Voyez la figure cy-dessous.

De plus toute ligne droitte n'est pas propre à mesurer la distance d'une ligne à une ligne. Car si elle tomboit du point d'une ligne obliquement sur l'autre, elle n'en mesureroit pas la distance ; mais tombant du point d'une ligne perpendiculairement sur l'autre, elle mesure la distance de ce point à cette ligne.

Mais il ne s'ensuit pas que pour avoir mesuré la distance d'un des points de la ligne b *à la ligne* c, *elle ait mesuré la distance de tous les autres points de la ligne* b, *à moins que tous les autres points de la ligne* b *fussent également distans de la ligne* c ; *c'est à dire qu'elle luy fust parallele.*

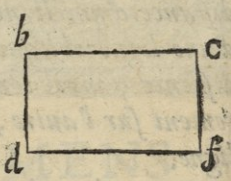
D'où il s'ensuit que si b *n'estoit pas parallele à* c, *il faudroit autant de differentes mesures pour connoistre la distance de* b *à* c, *qu'il y auroit de differens points dans* b. *Ce qui estant impossible, il paroist par là qu'afin qu'on puisse avoir distinctement la distance d'une ligne à une autre (ce qui fait la largeur) il faut que ces lignes soient paralleles.*

De plus, si ces lignes sont inégales, & que b *soit plus grande que* c, *on ne sçauroit laquelle prendre pour la longueur, parce que cette surface seroit plus longue d'un costé que de l'autre. Et ainsi afin qu'on puisse avoir exactement la mesure d'une surface, il faut que les lignes dont la distance en fait la largeur, soient non seulement paralleles ; mais aussi égales. D'où il arrivera que les autres lignes seront aussi égales & paralleles entr'elles.*

Et par consequent afin qu'une surface soit en estat d'estre exactement mesurée, il faut qu'elle soit terminée par 4 *lignes paralleles ; c'est à dire que ce soit un parallelogramme.*

Mais si les deux lignes égales & paralleles qu'on prend pour mesure de la longueur ne sont pas directement opposées, en sorte que de tous les points de l'une on puisse tirer des perpendiculaires sur tous les points de l'autre ; c'est à dire si ce parallelogramme n'est pas rectangle, mais obliquangle, on aura bien alors

dans la figure dequoy en meſurer la longueur, ſçavoir lequel on voudra de deux coſtez oppoſez. Mais l'autre coſté angulaire eſtant oblique ſur cette longueur, ne ſera pas propre à meſurer la diſtance entre les deux lignes qui font la longueur. D'où il s'enſuit qu'il n'y a que le rectangle qui ait en ſoy la meſure de ſa longueur & de ſa largeur. Car ſi d f *eſt pris pour la longueur,* d b *qui eſt la meſure de la diſtance de tous les points de* b c *à* d f, *en meſurera la largeur.*



C'eſt pourquoy nulle ſurface ne ſe meſure proprement par ſoy-même, que le rectangle.

Et dans tout rectangle l'un des coſtez angulaires à choiſir, ſe peut appeller ſa longueur, *& l'autre* ſa largeur ; *ou pour s'accommoder davantage aux termes communs, l'un* ſa baſe, *& l'autre* ſa hauteur.

Mais comme la meſure eſt d'autant plus parfaite qu'elle eſt plus ſimple, & que le quarré *qui n'a qu'une meſme meſure pour ſa longueur & pour ſa largeur, eſt plus ſimple que l'oblong qui en a deux ; il eſt arrivé de là que les hommes prennent le quarré de quelque ligne connüe, comme d'une toiſe, d'un pied, d'un pouce &c. pour la meſure commune de toutes les ſurfaces ; & qu'alors ſeulement ils en croïent connoître parfaitement la grandeur, quand ils peuvent dire qu'elle eſt de tant de toiſes quarrées, ou de tant de pieds quarrez, ou de tant de pouces quarrez &c. Et ainſi ce qu'on entend ordinairement par ces mots ; avoir l'aire d'un plan, c'eſt ſçavoir combien ce plan, de quelque figure qu'il ſoit, contient ou de toiſes quarrées, ou de pieds quarrez, ou de pouces quarrez ; & quand on parle de ſurface on ſous-entend le mot de quarré ſans l'exprimer : comme quand on dit que la place d'un logis eſt de tant de toiſes, cela s'entend de toiſes quarrées, dont chacune vaut* 36 *pieds quarrez.*

Neanmoins comme cela ne ſe peut pas toûjours connoître à cauſe des grandeurs incommenſurables, on ſe contente ſouvent en comparant des ſurfaces enſemble, de ſçavoir que ſi l'une contient tant de petits rectangles, comme 16 *fois* b c, *l'autre en contient tant auſſi ; comme* 25 *fois le même* b c.

SCD LYON 1

Tout cela nous fait voir, 1°. *Que la premiere & la plus parfaitte mesure est le quarré, & que c'est par le quarré qu'on mesure les rectangles pour en connoitre exactement la grandeur.*

2°. *Que la plus parfaite aprés le quarré, & qui est même parfaite en son genre, parce qu'elle contient en soy la mesure de la longueur & de la largeur, est le rectangle oblong; & que c'est par là que l'on mesure les autres parallelogrammes.*

3°. *Que celle d'aprés, & qui est imparfaite, ne contenant pas en soy la mesure de la longueur & de la largeur, est le parallelogramme non rectangle: & que c'est d'ordinaire par ces parallelogrammes que l'on mesure les triangles, en ce qu'on les considere comme les moitiez de ces parallelogrammes.*

4°. *Que le triangle suit aprés, & que c'est par luy qu'on mesure d'ordinaire les autres polygones en les reduisant en triangles; comme ils s'y peuvent tous reduire.*

5°. *Qu'enfin les autres polygones sont mesurez & ne servent point de mesure, comme le quarré sert de mesure & n'est point mesuré si ce n'est par d'autres plus petits; comme quand on dit que la toise quarrée contient 36 pieds quarrez. Voilà en abregé tout ce qu'a pû faire l'art des hommes pour mesurer les surfaces rectilignes, sans parler des curvilignes qui ne se peuvent mesurer que part rapport à des rectilignes.*

Mais comme toutes nos connoissances qui dependent de l'art en supposent de naturelles qu'on appelle Axiomes, voicy ceux sur lesquels est fondée toute la science de la dimension des figures planes.

I. Axiome.

Tous les quarrez de racine égale, sont égaux. C'est à dire que les espaces compris dans le quarré de la ligne *b*, & dans celuy de la ligne *m* égale à *b*, & de quelque autre ligne que ce soit égale à *b*, sont égaux. Cela est clair par la notion même de la surface, qui n'ayant que deux dimensions, longueur & largeur, il n'est par plus clair que deux lignes droittes d'une même longueur sont égales, qu'il est clair que deux surfaces de même longueur & de même largeur sont égales. Or deux quarrez sont de même lon- II.

gueur & de même largeur, si la ligne qui mesure dans l'un tant la longueur que la largeur, est égale à celle qui mesure dans l'autre tant la longueur que la largeur.

C'est pourquoy aussi par tout où une ligne d'une certaine longueur se trouve, comme de la longueur de *b*, elle peut estre marquée par le même caractere & appellée *b*. Car il ne peut y avoir de difference que de situation, ce qui n'y fait rien. Et ainsi il ne faut pas s'étonner si *bb* est par tout égal à *bb*.

II. Axiome.

III. Si les costez angulaires d'un rectangle sont égaux aux costez angulaires d'autres rectangles, chacun à chacun, tous ces rectangles sont égaux. Ou ce qui est la même chose, tous ceux dont la base est égale à la base, & la hauteur à la hauteur, sont égaux.

C'est la même chose que le precedent. Car les costez angulaires d'un rectangle en mesurent la longueur & la largeur; & on peut méme, comme nous avons dit, en appeller l'un sa longueur, & l'autre sa largeur indifferemment. Et par consequent tous les rectangles dont les costez angulaires sont égaux, chacun à chacun, ont même longueur & même largeur.

On peut encore dire que les costez angulaires d'un rectangle pouvant estre marquez par les mesmes caracteres par tout où ils se rencontrent égaux, comme par *b* & par *c*, par tout où l'un est égal à *b* & l'autre à *c*, dire qu'ils sont égaux; c'est à dire que *b c* est égal à *b c*.

Avertissement.

IV. *Ces deux axiomes nous font voir que tout ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs incomplexes & complexes; & dans le 3e de la raison entre les grandeurs planes, se peut appliquer aux quarrez & aux rectangles; & qu'il n'y a qu'à substituer des lignes au lieu des simples caracteres.*

C'est ce que nous verrons en peu de mots en commençant par la puissance des lignes.

Definition

DEFINITION.

ON appelle puissance d'une ligne le quarré de cette ligne, comme *b b* est la puissance de *b*, ou bien le rectangle de deux lignes quand il s'agit de deux lignes, comme la puissance de *b* par *c* est le rectangle *b c*. V.

DE LA PVISSANCE D'VNE LIGNE comparée avec la puissance de ses parties.

TOUT ce qu'on enseigne de la puissance d'une ligne comparée avec la puissance de ses parties, n'est que la même chose que ce que nous avons dit dans le premier livre de la multiplication des grandeurs complexes ; & se peut reduire à cet Axiome. VI.

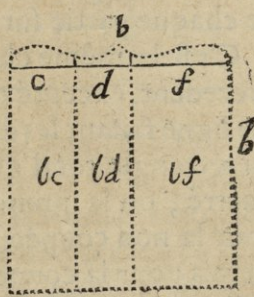
III. AXIOME.

C'est la même chose de multiplier le tout par le tout, & de multiplier le tout par chacune de ses parties, ou de multiplier chaque partie par toutes les parties, en faisant autant de multiplications partiales qu'est le produit des deux nombres des parties qu'on multiplie les unes par les autres. VII.

AVERTISSEMENT.

Ainsi le plus grand mystere pour ne se point broüiller est de nommer chaque ligne autant que l'on peut par un seul caractere, afin que deux caracteres joints ensemble puissent marquer une multiplication ; c'est à dire un rectangle, & de marquer par un même caractere les lignes égales. VIII.

Exemple : La ligne b *soit divisée en trois portions inégales que j'appelleray* c. d. f. *il est visible que c'est la même chose de multiplier* b *par* b, *ce qui donne* b b, *que de multiplier* b *par toutes ces parties ; c'est à dire par* c, *par* d, *& par* f, *ce qui donne* b c. b d. b f : *& par consequent* b b = b c + b d + b f.



Ainsi presque toutes les propositions du second livre d'Euclide ne sont que des Corollaires de cet

Axiome & de cet Avertissement. Ie ne proposer y que les principales qui sont d'usage.

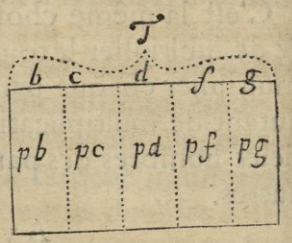
Ie suppose toûjours qu'on mette à angles droits les lignes qui doivent faire les costez angulaires des rectangles, sans que je m'amuse plus à en avertir.

Et quand je parle d'une ligne coupée en plusieurs parties, j'entens toûjours égales ou inégales, à moins que j'exprime qu'on les doive prendre égales.

I. THEOREME.

IX. AYANT deux lignes, l'une non coupée, & l'autre coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle des deux entieres est égal à tous les rectangles de la non coupée par chaque partie de la coupée. C'est à dire qu'un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

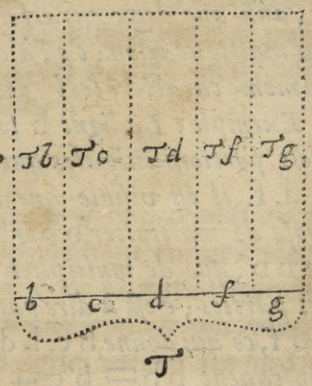
Soit p la non coupée, & T la coupée en 5 parties b, c, d, f, g; il est bien visible qu'en tirant des lignes paralleles à p, & par consequent qui luy sont égales par tous les points de division de T, elles feront pb, pc, pd, pf, pg, qui pris ensemble sont égaux à pT, puisque c'en sont toutes les parties.



II. THEOREME.

X. UNE ligne estant coupée en plusieurs parties, le quarré de la toute est égal aux rectangles de chaque partie sur la toute.

C'est la même chose que le precedent, excepté que la même ligne faisant les deux costez du rectangle total qui est alors quarré, on la prend une fois pour la non coupée, & une autrefois pour la coupée.



Il est donc clair que T estant coupé en b, c, d, f, g. TT doit estre égal à Tb, Tc, Td, Tf, Tg.

SCD LYON 1

III. THEOREME.

UNE ligne estant coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle de quelque partie que ce soit par la toute, est égal au quarré de cette partie plus les rectangles de cette partie par chacune des autres. XI.

Soit *T* comme auparavant divisé en 5 parties *b. c. d. f. g.* il est clair par le premier Theoreme, que le rectangle de *b* par la toute est êgal aux 5 rectangles de *b* par chaque partie de *T*. Or *b* est l'une de ces parties, & par consequent l'un de ces 5 rectangles sera *b b*. C'est à dire le quarré de cette partie, & les autres 4 rectangles seront le rectangle de *b* par chacune des autres parties; sçavoir *b c. b d. b f. b g.*

IV. THEOREME.

UNE ligne estant divisée en tant de parties que l'on voudra, le quarré de la toute est égal aux quarrez de chaque partie plus deux fois autant de rectangles, dont il y en a toujours deux qui sont les rectangles des mêmes deux parties. XII.

	b	*c*	*d*	*f*	*g*
b	*b b*	*b c*	*b d*	*b f*	*b g*
c	*c b*	*c c*	*c d*	*c f*	*c g*
d	*d b*	*d c*	*d d*	*d f*	*d g*
f	*f b*	*f c*	*f d*	*f f*	*f g*
g	*g b*	*g c*	*g d*	*g f*	*g g*

Ce Theoreme n'est que l'assemblage du 2e & du 3e.

Soit *T* comme auparavant divisée en *b, c, d, f, g*, par le 1er Theoreme ayant fait le quarré *T T*, & n'ayant divisé qu'un seul de ces costez par *b, c, d, f, g*, & tiré les paralleles à l'autre costé, on a 5 bandes, dont on peut appeller chacune de nom de sa partie, sçavoir *T b, T c, T d, T f, T g*. Mais divisant encore l'autre costé par les mêmes *b, c, d, f, g*, on

diviſe chacune des 5 bandes en 5, ce qui fait 25, & dans chaque bande ainſi diviſée ſe trouve un quarré de la partie dont elle eſt bande (dans *T b*, *b b*, dans *T c*, *c c*) & quatre rectangles des autres parties par celle-là. Et il eſt aiſé de voir que dans chaque bande ſe trouve toujours un rectangle de deux parties, dont le rectangle ſe trouve encore dans un autre, comme dans *T b* ſe trouve *b c*, qui ſe trouve auſſi dans *T c*, & ainſi tout le quarré contient

5 quarrez *b b. c c. d d. f f. g g.*
20 rectangles 2. *b c.* 2. *b d.* 2. *b f.* 2. *b g.*
2. *c d.* 2. *c f.* 2. *c g.*
2. *d f.* 2. *d g.*
2. *f g.*

COROLLAIRE.

XIII. LE plus grand uſage de ces Theoremes eſt quand la ligne eſt coupée en deux. C'eſt pourquoy il faut bien retenir ces trois propoſitions.

1. Le quarré de la toute eſt égal aux deux rectangles de chaque partie par la toute.

2. Le rectangle d'une partie par la toute eſt égal au quarré de cette partie, plus le rectangle des deux parties.

3. Le quarré de la toute eſt égal aux 2 quarrez de chaque partie plus deux fois le rectangle des deux parties.

DE LA PROPORTION entre les Rectangles.

PROPOSITION FONDAMENEALE.

XIV. LES rectangles qui ont un coſté égal à un coſté, & l'autre inégal, ſont entr'eux comme l'inégal.

Ou, les rectangles de même hauteur ſont comme leurs baſes.

D'égale baſe ſont comme leurs hauteurs.

Ou, d'égale longueur ſont comme leurs largeurs.

D'égale largeur ſont comme leurs longueurs.

Tout cela n'eſt que la meſme choſe, & peut paſſer pour prouvé dans le 2e Livre.

SCD LYON 1

Neanmoins en voicy encore la preuve. La theſe eſt.

b c. b d :: c. d.

L'aliquote quelconque de *c* ſoit appellée *x*.

Si par tous les points de la diviſion on tire des paralleles à *b*, il eſt clair que *b x* ſera autant de fois dans *b c*, qu'*x* dans *c*. C'eſt à dire que *b x* & *x* ſeront toûjours les aliquotes pareilles, l'une de *b c*, & l'autre de *c*. Car il eſt bien clair que toutes les *x* eſtant égales, tous les *b x* ſeront égaux.

Que ſi on applique *x* à *d*, baſe du rectangle *b d*, & qu'on tire auſſi par tous les points de la diviſion des paralleles à *b*, il eſt clair que *b x* ſera autant de fois dans *b d*, qu'*x* dans *d*, & que ſi *x* eſt preciſément tant de fois dans *d*, *b x* ſera auſſi preciſément tant de fois dans *b d*. Et ſi *x* n'eſt pas preciſément tant de fois dans *d*, mais avec quelque reſte; *b x* de meſme ne ſera pas preciſément tant de fois dans *b d*, mais avec un rectangle de reſte plus petit que *b x*.

Donc les aliquotes pareilles de *b c* & de *c* ſont également contenuës, celles de *b c* dans *b d*, & celles de *c* dans *d*.

Donc par la definition de l'égalité des raiſons *b c* & *b d* ſont en meſme raiſon que *c* & *d*; puiſque les aliquotes pareilles des antecedens *b c* & *c* ſont également contenuës dans les conſequens *b d* & *d*. Donc *b c. b d :: c. d.*

I. Corollaire.

Les rectangles ſont en raiſon compoſée de la longueur à la longueur, & de la largeur à la largeur. C'eſt la definition meſme de la raiſon compoſée. III. 2. 4. XV.

b c. mn :: b + m. c + n.

II. Corollaire.

Les rectangles ſemblables ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues, XVI.

Car les rectangles ſont ſemblables, quand la longueur eſt à la longueur, comme la largeur à la largeur.

bf & *cg* ſont ſemblables, ſi *b. c :: f. g.*

Donc la raiſon de ces deux rectangles eſt compoſée de deux raiſons égales, par le premier Corollaire.

SCD LYON 1

Donc cette raiſon eſt doublée de chacune par la definition de la raiſon doublée.

III. Corollaire.

XVII. Les quarrez ſont en raiſon doublée de leurs racines. C'eſt la meſme choſe que le precedent.

Et ainſi ſi b eſt double de d, bb eſt quadruple de dd.

IV. Corollaire.

XVIII. Les rectangles reciproques ſont égaux. Car on appelle les rectangles reciproques quand la longueur du premier eſt à la longueur du ſecond, comme la largeur du ſecond eſt à la largeur du premier.

Ainſi $b\ g$ & $c\ f$ ſont reciproques, ſi

$b\ c.\ ::\ f.\ g.$

Or la grandeur plane des deux extremes d'une proportion eſt égale à la grandeur plane des moyens.

Donc $b\ g = c\ f$.

MESMES COROLLAIRES AUTREMENT PROPOSEZ.

Si 4 lignes ſont proportionelles,

$b.\ c.\ ::\ f.\ g.$

XIX. 1. Le rectangle des antecedens $b\ f$, eſt au rectangle des conſequens $c\ g$, en raiſon doublée de la raiſon de cette proportion $b.\ c.$ ou $f.\ g.$

2. Le rectangle des deux premiers termes $b\ c$ eſt au rectangle des deux derniers $f\ g$ en raiſon doublée de la raiſon alterne de cette proportion $b.f.$ ou $c.g.$

3. Le rectangle des deux extrêmes eſt égal au rectangle des deux moyens, $b\ g = c\ f$. II. 17.

4. Les quarrez de ces quatre lignes ſont proportionels $bb.\ cc.\ ::\ ff.\ gg.$ par III. 24.

5. Si trois lignes ſont continüement proportionelles, le quarré de celle du milieu eſt égal au rectangle des extremes.

Si $\div\ b.\ c.\ d.$ $cc = b\ d$. II. 17.

SCD LYON 1

6. Les quarrez des deux premiers *bb* & *cc* sont en même raison que la premiere & la troisiéme.

b b. c c :: *b. d.* par III. 26.

V. COROLLAIRE.

UNE ligne estant divisée en deux parties, si deux autres lignes sont moyennes proportionelles, l'une entre la toute & sa plus grande partie, & l'autre entre la même toute & sa plus petite partie: les deux quarrez de ces deux lignes sont égaux au quarré de cette toute. XX.

Soit *h* divisée en *m* & *n*.
Soit *b* moyenne entre *h* & *m*.
Et *d* entre *h* & *n*.
Puisque ∴ *h. b. m. b b* = *h m*.
Et puisque ∴ *h. d. n. d d* = *h n*.
Donc *b b* + *d d* = *h m* + *h n*.
Or *h m.* + *h n.* = *h h*.
Donc *b b* + *d d* = *h h*.

AVERTISSEMENT.

On peut rapporter icy tout ce qui a esté demonstré dans le 2e & 3e livre des grandeurs planes en general. Car le rectangle est la grandeur plane en matiere d'estenduë ou espace. XXI.

APPLICATION DE CETTE DOCTRINE Generale à quelques lignes particulieres qu'on a fait voir cy-devant être proportionelles.

I. THEOREME.

SI deux lignes se coupent dans un cercle, le rectangle des portions de l'une est égal au rectangle des portions de l'autre. Voyez XI. 55. XXII.

II. THEOREME.

LE quarré de la perpendiculaire d'un point de la circonference au diametre, est égal au rectangle des portions du diametre. Voyez XI. 57. XXIII.

SCD LYON 1

III. THEOREME.

XXIV. Si d'un point hors le cercle deux lignes sont menées jusqu'à la concavité du cercle, le rectangle d'une toute & de sa portion qui est hors le cercle, est égal au rectangle de l'autre toute & de sa portion, qui est aussi hors le cercle. Voyez XI. 52.

IV. THEOREME.

XXV. Si d'un point hors le cercle on mene une ligne qui touche le cercle, & l'autre qui le coupe jusqu'à la concavité, le quarré de la tangente est égal au rectangle de l'autre toute, & de sa portion qui est hors le cercle. XI. 54.

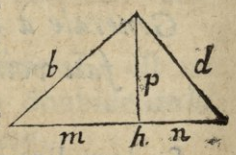
Et si on appelle la tangente p, la secante entiere t, la partie qui est hors le cercle h, & celle qui est au dedans d on aura toutes ces égalitez par ce qui a esté dit cy-devant.

$pp = ht.$
$pp = hh. + hd.$
$hh = pp. - hd.$
$tt = ht. + dt.$
$tt = pp. + dt.$

V. THEOREME.

XXVI. Si du sommet d'un angle droit on tire une perpendiculaire sur l'hypothenuse,

1. Le quarré de cette perpendiculaire est égal au rectangle des deux portions de l'hypothenuse. $pp = mn.$



2. Le quarré du grand côté de l'angle droit est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere & de sa grande portion, $bb = hm.$

3. Le quarré du petit costé est égal au rectangle de l'hypothenuse entiere, & de sa petite portion, $dd = hn.$

4. Le quarré de toute l'hypothenuse est égal aux quarrez des deux costez $bb + dd = hh.$

Les 3 premiers points sont clairs, par XI. 58.

Et le 4e par le 5e Corollaire S.

I. COROLLAIRE

I. COROLLAIRE.

LA diagonale d'un rectangle peut autant que les quarrez des deux costez. XXVII.

II. COROLLAIRE.

LA diagonale d'un quarré peut 2 fois le quarré du costé. XXVIII.

III. COROLLAIRE.

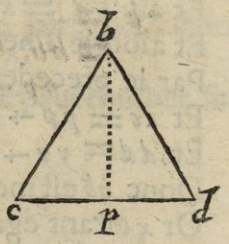
LA diagonale du quarré est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance. XI. 76. XXIX.

IV. COROLLAIRE.

LA hauteur d'un triangle equilateral (c'est à dire la perpendiculaire du sommet à la base) est incommensurable en longueur au costé, & commensurable en puissance, le quarré du costé estant au quarré de cette perpendiculaire comme 4 à 3. XXX.

La premiere partie est claire, par XI. 79.

La seconde se prouve ainsi: *p d* est la moitié de *b d*. Donc le quarré de *b d* est au quarré de *p d* comme 4 à un. Or ce même quarré de *p d*, plus celuy de *b p*. est égal au quarré de *b d*.



Donc le quarré de *b d* est à celuy de *b p* comme 4 à 3.

VI. THEOREME.

LE quarré de la base d'un angle aigu est égal aux quarrez des costez qui le comprennent moins deux fois le rectangle du costé sur lequel on mene une perpendiculaire de l'extremité opposée de la base & de la ligne compriſe entre le sommet de cet angle aigu & de cette perpendiculaire. XXXI.

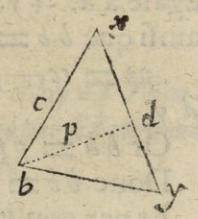
Soit la base de l'angle aigu nommé *b*.

Le costé vers lequel on ne mene point la perpendiculaire, *c*.

Celuy sur lequel on la mene, *d*.

La perpendiculaire, *p*.

La ligne compriſe entre la perpendiculaire & le sommet de l'angle aigu. *x*.



Celle qui est compriſe entre la perpendiculaire & la baſe, *y.*

Je dis que $bb = cc. + dd. - 2.dx.$

Mais il faut remarquer qu'x est quelquefois $d - y$.

Quelquefois d ſimplement.

Et quelquefois $d. + y$.

Selon que d fait ſur la baſe, ou un angle aigu, ou un droit, ou un obtus.

Mais quand d fait un angle droit ſur b, il est plus court de dire que bb baſe de l'angle aigu, est égal à cc. moins dd. comme il est clair par le precedent Theoreme. Et ainſi reſte ſeulement les deux autres cas.

PREMIER CAS.

QUAND d fait ſur la baſe un angle aigu, la perpendiculaire coupe d en deux parties.

Et ainſi $d = x + y$. & $x = d - y$.

Et alors le Theoreme ſe prouve ainſi.

Par le precedent Theoreme $bb. = pp + yy$.

Et $cc = pp + xx$.

Et $dd = yy + xx + 2.yx$.

Donc bb est moindre que $cc + dd$. de $2.xx$, & $2.yx$.

Or x eſtant égale, $d - y$. $xx = dx - xy$.

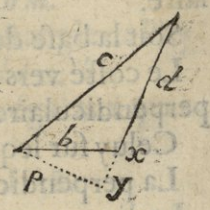
Donc $xx + xy = dx$.

Donc $2.xx + 2xy = 2.dx$.

Donc $bb. = cc. + dd. - 2.dx$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECOND CAS.

SI d fait un angle obtus ſur b, alors p ne tombe ſur d qu'eſtant prolongé, & y est une ligne ajoûtée à d. & x eſt égale à $d. + y$. Ce qui fait qu'on prouve ainſi que $bb = cc + dd - 2.dx$.



$pp = cc - xx$. c'est à dire $- dd - yy - 2.dy$.

Or $bb = pp. + yy$.

Donc $bb = cc - dd - dy$.

Et par conſequent $bb = cc + dd - 2.dd. - 2.dy$.

Or $x = d. + y.$ Donc $dd + dy = dx.$

Donc $2.\ dd + 2.\ dy = 2.\ dx.$

Donc $bb = cc + dd - 2.\ dx.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

De tout cecy il eſt aiſé de conclure que ſi des deux extremitez de la baſe d'un angle aigu, on tire des perpendiculaires à chaque coſté, le rectangle d'un coſté & de la ligne compriſe entre le ſommet de l'angle aigu; & la perpendiculaire qui tombe ſur ce coſté ſera toûjours égale au rectangle de l'autre coſté & de la ligne compriſe entre le ſommet de l'angle aigu & la perpendiculaire qui tombe ſur cet autre coſté.

VII. Theoreme.

Le quarré de la baſe de l'angle obtus eſt égal aux quarrez des coſtez, plus le rectangle du coſté vers lequel on aura mené une perpendiculaire de l'extremité de cette baſe & de la ligne compriſe entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle obtus. XXXII.

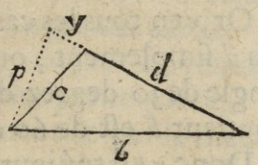
Il eſt clair que cette perpendiculaire ne peut tomber ſur aucun coſté qu'en le prolongeant.

Soit donc la baſe $b.$

Le coſté non prolongé $c.$

L'ajoûtée $y.$

La perpendiculaire $p.$



bb eſt égal au quarré de p, plus le quarré de $d + y.$ C'eſt à dire que

$bb = pp + yy + dd. + 2.\ dy.$

Or $cc = pp. + yy.$

Donc $bb = cc + dd + 2.\ dy.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

Avertissement.

On peut faire icy un Corollaire ſemblable à celuy du Theoreme precedent. Ie le laiſſe à chercher, & à prouver ſi l'on veut par les principes du livre des lignes proportionelles. XXXIII.

VIII. Theoreme.

Le quarré de la baſe d'un angle obtus, qui vaut les deux XXXIV.

tiers de deux angles droits ; c'eſt à dire qui eſt de 120 degrez, eſt égal aux quarrez des deux coſtez plus le rectangle de ces deux mêmes coſtez.

Toutes choſes eſtant faites, & les lignes nommées comme dans le precedent Theoreme, l'angle obtus ne peut valoir 120 degrez, que l'angle que fait c ſur l'ajoûtée y (qui eſt le complement de cet angle obtus) ne ſoit de 60 degrez. Or le triangle que font c y p eſt rectangle. Donc y eſt le ſinus d'un angle de 30 degrez. Donc par XIII. y eſt la moitié de c, qui en eſt le rayon.

Donc $dc = 2.dy$.

Or par le precedent Theoreme,

$bb = cc. + dd + 2.dy$.

Donc $bb = cc + dd + dc.$ égal à $2.dy$.

IX. Theoreme.

XXXV. Le quarré de la baſe d'un angle aigu de 60 degrez eſt égal aux quarrez des coſtez moins le rectangle des coſtez.

Car par le 6e Theoreme b eſtant la baſe d'un angle aigu,

$bb = cc + dd - 2.dx$.

Or x en tous les cas (c'eſt à dire ſoit qu'x ſoit ou $d-y$, ou d ſimplement, ou $d+y$.) il eſt toûjours le ſinus d'un angle de 30 degrez dont c eſt le rayon, quand l'angle que ſoutient b eſt de 60 degrez.

Donc x eſt toûjours la moitié de c, par XIII.....

Donc $dc = 2.dx$.

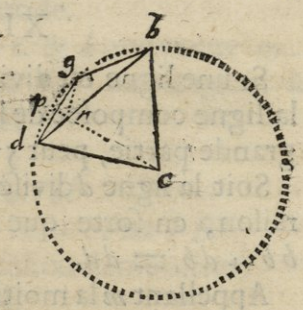
Donc $bb. = cc. + dd.$ $\left\{\begin{array}{l} = 2.dx. \\ \text{ou} \\ = dc. \end{array}\right.$

X. Theoreme.

XXXVI. Le quarré du coſté du pentagone eſt égal au quarré du coſté du decagone, plus le quarré du coſté de l'exagone inſcrits dans le même cercle.

SCD LYON 1

Soit *b d* le costé du pentagone.



c b & *c d* deux demy-diametres du cercle dans lequel il est inscrit, qui sont aussi les costez de l'exagone, par XII. 36.

d g & *g b* deux costez du decagone.

c p une ligne qui coupe perpendiculairement & par la moitié, tant le costé du decagone *d g*, que l'arc *d g* qui coupe en *r* le costé du pentagone.

Cela estant, je prouve 1°. Que *b c* (costé de l'exagone) est moyenne entre *b d* costé du pentagone, & sa partie *b r*.

Car les deux angles vers *b* & vers *d* sont chacun de 54 degrez, XII. 23.

Or l'angle *r c b* est aussi de 54 degrez, puisque l'arc *g b* est de 36 degrez, XII. & l'arc *g p* de 18, ce qui ensemble fait 54.

Donc les deux triangles *b c d*, & *b r c* sont isosceles & semblables.

Donc par (34 S. *b c* est moyenne entre *b d* & *b r*. C'est à dire entre le costé du pentagone & sa plus grande partie.

Je prouve 2°. Que *d g* coste du decagone, est moyenne entre *b d* costé du pentagone, & *d r* sa plus petite partie.

Car *r p* coupant *g d* perpendiculairement & par la moitié, *r g* est égale à *r d*. Donc les angles que chacun fait sur *g d* sont égaux.

Donc les deux triangles *d g b* & *d r g* sont isosceles & semblables. Donc par (34 S.) *d g*. (base du petit & costé du grand) est moyenne entre *b d* (base du grand) & *r d* (costé du petit.)

Donc le costé du decagone est moyenne entre le costé du decagone & sa plus petite partie.

Donc par le 5e Corollaire (20. S.) le quarré du pentagone est égal au quarré du costé de l'exagone, plus le quarre du costé du decagone inscrit dans le même cercle. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCD LYON 1

XI. THEOREME.

XXXVII. SI une ligne eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, la ligne compoſée de la moitié de cette ligne & de ſa plus grande partie, peut 5 fois le quarré de la moitié.

Soit la ligne d diviſée en b, & c en moyenne & extrême raiſon, en ſorte que $bb = dd - db$, & par conſequent $bb + db. = dd.$

Appellant m la moitié de d, je dis que le quarré de $m + b$ vaut 5 fois le quarré d'm.

Car m étant la moitié de d, $dd = 4.mm.$ Et $2\,mb. = bd.$

Et ainſi le quarré de $m + b.$

Eſtant égal à $mm + bb + 2.mb.$

Donc à $mm + bb + db.$

Donc à $mm + dd.$

Donc à $mm + 4.mm.$

Donc à $5.mm.$

XII. THEOREME.

XXXVIII. UNE ligne eſtant diviſée en moyenne & extrême raiſon, la ligne compoſée de la petite portion & de la moitié de la plus grande, peut 5 fois le quarré de la moitié de la plus grande.

Soit comme auparavant la toute d, la plus grande partie b, & ſa moitié n, la plus petite c; en ſorte que $dc = bb.$

Or $dc = cc + cb.$ Donc $cc + cb = bb.$

Cela eſtant, je dis que le quarré de $n. + c. = 5.nn.$

Car ce quarré de $n + c.$

Eſt égal à $nn + cc. + 2.nc.$ Donc à $nn + cc. + bc.$

Puiſque n eſt $\frac{1}{2}$ de $b.$

Donc à $nn + bb.$ (puiſque $bb = cc. + bc$)

Donc à $nn + 4.\ nn.$ Donc à $5.nn.$ Ce qu'il falloit demonſtrer.

XIII. THEOREME.

XXXIX. UNE ligne eſtant diviſée en moyenne & extrême raiſon, le quarré de la toute, plus le quarré de la plus petite partie,

SCD LYON 1

valent 3 fois le quarré de la plus grande.

Soit comme auparavant $d = b. + c.$ & b moyenne entre d & c, en sorte que $bb = dc$. Et par consequent à $cc + cb$. Je dis que $dd + cc. = 3. bb.$

Car $dd = bb + cc + 2. cb.$

Donc $dd + cc. = bb. + 2. cc + 2. cb.$

Or $2. cc + 2. cb = 2. bb.$ puisque $cc + cb = bb.$

Donc $dd + cc. = 3. bb.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

I. Probleme.

XL. Trouver le quarré égal à un rectangle donné.

Ou ayant l'aire d'un quarré, en trouver la racine.

Il ne faut que trouver la moyenne proportionelle entre les costez du rectangle donné.

Ou entre les deux lignes qui font l'aire donnée; comme si l'aire est supposée de 20 toises, ou pieds, ou pouces, entre un & 20, ou 2 & 10, ou 4 & 5.

II. Probleme.

XLI. Ayant le costé d'un rectangle, trouver quel doit estre l'autre, afin qu'il soit égal à un rectangle donné. Prendre le costé donné pour premier terme de la proportion, les deux costez du rectangle donné pour 2 & 3, le costé que l'on cherche se trouvera en trouvant une 4e proportionelle.

III. Probleme.

Trouver un quarré égal à deux ou plusieurs quarrez donnez.

Soient les quarrez donnez bb, cc, dd, mettant b & c à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle droit que je nomme f, sera égal à $bb + cc$. Et mettant de nouveau f & d à angle droit, le quarré de l'hypothenuse de cet angle sera égal à $ff. + dd.$ Et par consequent à $bb + cc. + dd.$ Et on peut conduire cela jusqu'à l'infini.

Corollaire.

XLII. Trouver le quarré égal à plusieurs rectangles donnez, il ne faut que trouver les quarrez égaux à chacun de ces rectangles. Et puis on trouvera le quarré égal à tous ces quarrez.

SCD LYON 1

IV. PROBLEME.

XLIII. TROUVER un quarré à qui un quarré donné ſoit en raiſon donnée.

Soit le quarré donné *bb*.

La raiſon donnée *m n*.

AYANT diſpoſé *m. n. b.* & trouvé pour 4e proportionelle *d*, en ſorte que

m. n. :: b. d.

Et trouvant auſſi la moyenne proportionelle entre *b* & *d*, que je ſuppoſe eſtre *c*, le quarré de *c* ſatisfera au Probleme. Car puiſque *b. c. d.* par le....

bb. cc. :: b. d.

Or *b. d :: m. n.*

Donc *bb. cc :: m. n.*

V. PROBLEME.

XLIV. DIVISER une ligne, en ſorte que le quarré de la plus grande portion ſoit égal au rectangle de la toute & de la plus petite portion.

Ce Probleme a eſté reſolu (XI. 68.) quand on a appris à couper une ligne en moyenne & extrême raiſon: c'eſt à dire, en ſorte que la toute ſoit à la plus grande portion, comme la plus grande portion à la plus petite.

VI. PROBLEME.

XLV. DIVISER une ligne en ſorte que le quarré de la plus grande portion ſoit au rectangle de la toute & de la plus petite portion en raiſon donnée.

Soit la ligne donnée *d*.

La raiſon donnée *m. n.*

La plus grande portion que l'on cherche *x*.

Et la plus petite qui eſt la meſme choſe que *d—x* ſoit appellée *y*.

Il n'y a qu'à trouver *x*, ce qui ſe fera en cette maniere.

1. Trouver une ligne qui ſoit à *d*, comme *m.* eſt à *n.* Je la ſuppoſe trouvée par X. 38. & je l'appele *c*.

2. Chercher la moyenne entre *c.* & *d.* Je la ſuppoſe trouvée par XI..... Et je l'appelle *p*. d'où il s'enſuivra, que *c d = pp*.

3. Faire

SCD LYON 1

3. Faire un cercle qui ait c pour diametre, & p pour tangente. Si de l'extremité de p qui eſt hors le cercle on tire une ſecante qui paſſe par le centre du cercle, la partie de cette ſecante qui eſt au dedans du cercle eſtant c, celle qui eſt au dehors ſera x. Et $d - x$ ſera y. D'où il s'enſuivra

4. Que $cd - cx$ ſera la même choſe que cy. Car y étant égal à $d - x$. c'eſt la meſme choſe de multiplier c par $d - x$, (ce qui fait $cd - cx$) que de multiplier c par y; ce qui fait cy.

Cela étant ainſi il eſt facile de prouver que

$$x\,x.\ d\,y.\ ::\ m.\ n.$$

C'eſt à dire que le quarré de la plus grande partie de d eſt au rectangle de d par l'autre partie que j'ay nommée y, en raiſon donnée.

Car (par la 3. ſupp.) p tangente eſt moyenne entre x & $x + c$.

Donc $x.\ p\ ::\ p.\ x + c.$

Donc $x\,x + cx = p\,p.$

Or $pp = cd$ (par la 2. ſupp.)

Donc $x\,x + cx = cd.$

Donc $xx = cd - cx.$

Or $cd - cx = cy$ (par la 4. ſupp.)

Donc $xx = cy.$

Et $cy.\ dy\ ::\ c.\ d\ ::\ m.\ n.$ (par la 1. ſupp.)

Donc xx (égal à cy) $dy\ ::\ m.\ n.$ ce qu'il falloit demonſtrer.

VII. Probleme.

Trouver la racine d'un quarré dont on ne ſçait autre choſe, ſinon qu'étant comparé au quarré d'une ligne donnée, & à un rectangle d'une autre ligne donnée & de cette racine inconnuë, il eſt XLVI.

Ou { 1. Egal au quarré plus le rectangle.
2. Egal au quarré moins le rectangle.
3. Egal au rectangle moins le quarré.

Ainſi la racine inconnuë eſtant nommée x ou y.

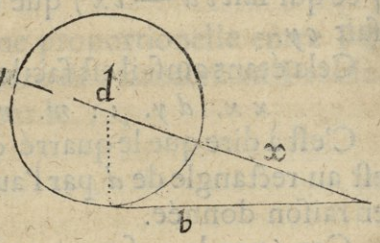
La ligne donnée qui fait le quarré b.

Et l'autre ligne donnée coſté du rectangle, d.

SCD LYON 1

Le 1er Cas sera $yy = bb + yd$.
Le 2e Cas, $xx = bb - xd$.
Et le 3e, $\begin{cases} yy = yd - bb. \\ xx = xd - bb. \end{cases}$

CONSTRVCTION COMMVNE au premier & au second Cas.



DECRIRE un cercle de l'intervale de la moitié de d, élevée perpendiculairement sur l'une des extremitez de b.

Et tirer de l'autre extremité de b une secante qui passant par le centre du cercle se termine à la circonference.

Cette secante entiere soit appelée y.

Qui sera composée de sa partie hors le cercle appellée x.

Et du diametre du cercle qui sera d par la construction.

Et b sera tangente du cercle.

PREUVE DU PREMIER CAS.

Dans le 1er Cas, c'est y (c'est à dire la secante entiere) qui est la racine que l'on cherche.

Car y estant égale à $x + d$.

$yy = yx + yd$. S. 13.

Or $bb = xy$. S. 25.

Donc $yy = bb + yd$. Ce qu'il falloit demonstrer.

PREUVE DU SECOND CAS.

Dans le 2e Cas, c'est x (c'est à dire la partie de la secante qui est hors le cercle) qui est la racine que l'on cherche.

Car $x. b :: bx + d$.

Donc $xx + xd = bb$.

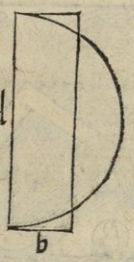
Donc $xx = bb - xd$. Ce qu'il falloit demonstrer.

CONSTRUCTION ET PREUVE DU TROISIEME CAS.

Faisant un cercle qui ait d pour diametre, & b pour tangente, il faut tirer une parallele à d de l'extremité de b qui est hors le cercle.

SCD LYON 1

Que si cette parallele ne coupe point le cercle, parce que b est aussi grande ou plus grande que la moitié de d, le Probleme est impossible.



Mais si elle le coupe tirant une tangente parallele à b de l'autre extremité de d, & prolongeant jusqu'à cette tangente la secante parallele à d, cette secante (égale à d) sera composée de trois parties; de deux hors le cercle, qui estant égales (comme il est aisé de le prouver en tirant du centre une perpendiculaire à cette secante) chacun s'appellera x, & celle de dedans le cercle plus une de dehors, c'est à dire plus x, s'appellera y.

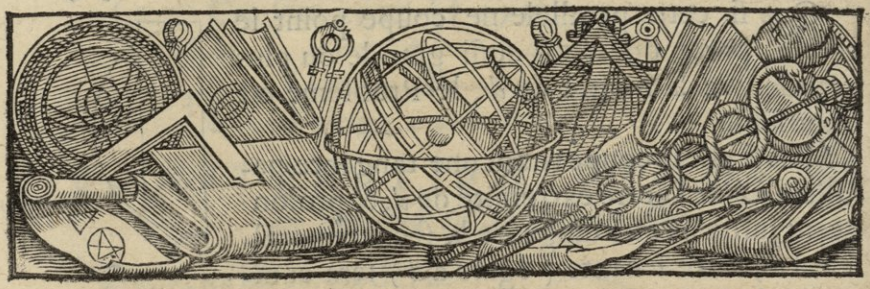
Cela estant supposé, je dis dis qu'x & y peuvent l'une & l'autre satisfaire au Probleme.

Car $xy \doteq bb$, par le 4e Theoreme, & d estant égale à $x+y$.

$xx+xy \doteq xd.$
Et $yy+xy \doteq yd.$ } par 13. S.

Donc $xx \doteq xd - xy$ égal à bb.
Et $yy \doteq yd - xy$ égal à bb.

Donc soit qu'on prenne x ou y, on satisfait au Probleme. Et le choix depend de sçavoir d'ailleurs si la racine que l'on cherche doit estre plus petite que b. Car alors c'est x, au lieu que si elle doit estre plus grande, c'est y.



NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE QUINZIE'ME.

DE LA MESVRE DE L'AIRE des Parallelogrammes, des Triangles, & autres Polygones.

DEFINITIONS.

I. QUAND on parle des costez d'un parallelogramme, on entend les costez angulaires, à moins qu'on ne marque autre chose.

On peut prendre lequel on veut de ces costez pour mesure de la longueur du parallelogramme; & alors ce costé s'appelle la base.

Et la perpendiculaire qui mesure la distance entre la base & son costé opposé s'appelle la hauteur du parallelogramme.

SCD LYON 1

FONDEMENT DE LA MESVRE des Parallelogrammes.

PAR ce que nous avons dit au commancement du livre precedent, que dans les parallelogrammes non rectangles (à qui pour abreger nous donnerons simplement le nom de parallelogrammes) on pouvoit prendre lequel on vouloit de leurs costez angulaires pour mesure de l'une de leurs dimensions, qui est la longueur; mais que l'autre costé angulaire ne pouvoit pas en mesurer la largeur, parce qu'étant oblique il ne mesuroit pas la distance entre les costez opposez qui avoient estê pris pour la longueur. Et ainsi au lieu de cet autre costé angulaire, il faut prendre la perpendiculaire qui mesure la distance entre le premier costé & son opposé, pour avoir l'autre dimension de ces parallelogrammes. 11.

Or de là il s'ensuit que le rectangle de la base & de cette perpendiculaire appellée la hauteur du parallelogramme est égal à ce parallelogramme, puisque n'ayant tous deux que deux dimensions, longueur & largeur, la longueur de l'un est égale à la longueur de l'autre, en ce qu'ils ont tous deux une base égale, & que la largeur de l'un est égale à la largeur de l'autre, puisqu'elle est mesurée par une perpendiculaire égale dans l'une & dans l'autre; quoy qu'en l'un elle soit l'un des costez de la figure, sçavoir dans le rectangle, & que dans l'autre elle n'y soit pas marquée.

Cela pourroit suffire pour ceux qui cherchent plûtost à s'assurer de la verité qu'à en pouvoir convaincre les autres.

Neanmoins pour plus grande certitude on peut employer deux voyes pour prouver cette proposition: l'une nouvelle appellée la *Geometrie des indivisibles*: & l'autre ancienne & plus commune. Nous expliquerons l'une & l'autre.

SCD LYON 1

NOUVELLE METHODE APPELLE'E LA GEOMETRIE DES INDIVISIBLES.

III. Quoique les Geometres conviennent que la ligne n'eſt pas compoſée de points, ny la ſurface de lignes, ny le ſolide de ſurfaces, neanmoins on a trouvé depuis peu de temps un art de démonſtrer une infinité de choſes, en conſiderant les ſurfaces comme ſi elles eſtoient compoſées de lignes, & les ſolides de ſurfaces.

Je n'ay rien veu de ce qui en a eſté écrit: mais voicy ce qui m'en eſt venu dans l'eſprit, en ne m'arreſtant maintenant qu'à ce qui regarde les ſurfaces.

Le fondement de cette nouvelle Geometrie eſt de prendre pour l'aire d'une ſurface la ſomme des lignes qui la rempliſſent; de ſorte que deux ſurfaces ſont eſtimées égales, quand l'une & l'autre eſt remplie par une ſomme égale de lignes égales; ſoit que chacune de celles d'une ſomme ſoit égale à chacune de celles de l'autre ſomme; ſoit qu'il ſe faſſe une compenſation; en ſorte par exemple, que deux d'une ſomme qui pourront eſtre inegales entr'elles, ſoient égales à deux priſes enſemble de l'autre ſomme qui ſeront égales entr'elles.

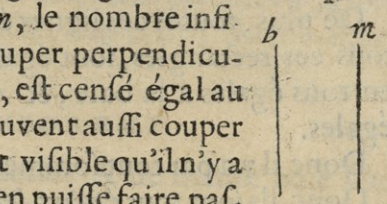
Mais pour ne pas donner lieu à beaucoup de paralogiſmes où l'on tombe aiſément en ſe ſervant de cette methode, ſi on n'y prend bien garde, il faut remarquer,

1. Qu'afin que des lignes ſoient cenſées remplir un eſpace, il faut qu'elles ſoient toutes paralleles entr'elles; ſoit qu'elles ſoient droittes pour remplir un eſpace rectiligne, ſoit qu'elles ſoient circulaires pour remplir des cercles ou des portions de cercle. Il eſt facile d'en voir la raiſon. Et ainſi il faut bien prendre garde de ne pas employer pour cela des lignes qui ne ſeroient pas paralleles en l'une ou l'autre de ces deux manieres.

2. Afin qu'une ſomme de lignes ſoit cenſée égale à une autre ſomme de lignes, il ne faut pas s'imaginer qu'on puiſſe dire le nombre qu'en contient chaque eſpace (car il n'y

SCD LYON 1

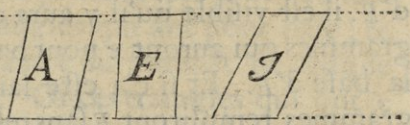
a point de si petit espace qui n'en contienne un nombre infini) mais ce qui fait qu'on appelle ces sommes égales, c'est que toutes les lignes d'un costé & d'autre coupent perpendiculairement deux lignes égales. Par exemple si la ligne *b* est égale à la ligne *m*, le nombre infini des lignes qui peuvent couper perpendiculairement *b* en tous ses points, est censé égal au nombre infini de celles qui peuvent aussi couper perpendiculairement *m*, étant visible qu'il n'y a point de raison pourquoy on en puisse faire passer davantage par l'une que par l'autre. Car les aliquotes pareilles de l'une & de l'autre étant toûjours égales jusques à l'infini, on pourra toûjours de part & d'autre tirer par tous les points de ces divisions autant de lignes paralleles entr'elles, & qui contiendront toujours de part & d'autre un espace parallele égal. Et c'est proprement delà que depend la verité de cette nouvelle methode (& non que le continu soit composé d'indivisibles) ce qui l'a fait mesme appeller par quelques-uns, la Geometrie de l'infini.



Il faut donc bien prendre garde que les lignes (par le rapport desquelles on dit qu'une somme de ces lignes paralleles qui rempliſſent un espace, est égale à une autre somme) les coupent perpendiculairement. Et c'est où il y a plus de danger de se tromper. Sur ces fondemens voicy les Theoremes que l'on établit.

I. Theoreme.

Tous les parallelogrammes de base égale & de même hauteur sont égaux entr'eux. LV.



Soient divers parallelogrammes, comme *A*, *E*, *I*, enfermez dans le même espace parallele (comme ils le peuvent éstre, puisqu'ils sont supposez de même hauteur) & ayant tous les bases égales, il est clair que toutes les paralleles qui peuvent remplir cet espace, rempliront tous ces parallelogrammes; & qu'ainsi ils seront tous rem-

plis d'une ſomme égale de lignes, cette ſomme eſtant meſurée dans tous par la perpendiculaire qui meſure la hauteur de ces rectangles, qui eſt la même en tous, puiſqu'ils ſont de même hauteur?

De plus, toutes ces lignes étant paralleles à la baſe dans tous ces rectangles, ſont égales en tous, puiſqu'elles ſont en tous égales à la baſe, & que les baſes ſont ſuppoſées égales.

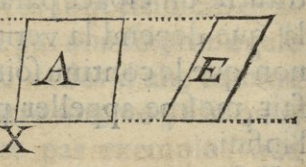
Donc il y a par tout ſomme égale de lignes égales.

Donc ils ſont tous égaux ſelon le fondement de la Geometrie des indiviſibles.

II. THEOREME.

V. Tous les parallelogrammes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes.

C'eſt une ſuite du precedent. Soient les parallelogrammes *A*, *E*, entre mêmes paralleles, & qui ayent des baſes inégales; en quelques aliquotes que je diviſe la baſe d'*A*, en tirant les paralleles au coſté par tous les points de la diviſion, il y aura dans *A* autant de parallelogrammes égaux entr'eux, que cette baſe aura de parties égales: de ſorte que ſi elle avoit eſté diviſée en 7 parties, dont j'appelleray chacune *x*, il y aura dans *A* 7 parallelogrammes qui auront chacun *x* pour baſe.



Que ſi appliquant *x* à la baſe d'*E*, il ſe trouve qu'il y ſoit trois fois, ou ſans reſte, ou avec reſte, tirant encore de tous les points de la diviſion, des lignes paralleles au coſté d'*E*, il eſt viſible qu'il y aura dans *E* autant de parallelogrammes qui auront *x* pour baſe, qu'*x* ſe ſera trouvé dans la baſe d'*E*. Et ſi ç'a eſté ſans reſte, ces trois parallelogrammes rempliront *E* ſans reſte: & ſi avec reſte, il reſtera auſſi un parallelogramme qui aura ce reſte pour baſe.

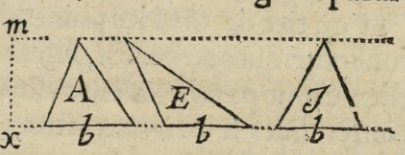
Or les paralle ogrammes qui dans *E* ont *x* pour baſe ſont égaux à ceux qui dans *A* ont auſſi *x* pour baſe; par le precedent Theoreme.

Donc

Donc par la definition de l'égalité des raisons *A* est à *E* en même raison que la base d'*A* à la base d'*E*, puisqu'autant que les aliquotes quelconques de la base d'*A* sont contenuës dans la base d'*E*, les aliquotes pareilles d'*A* sont contenuës dans *E*: si sans reste, sans reste; si avec reste, avec reste.

III. THEOREME.

LES triangles de même hauteur & de même base sont égaux. Car estant mis entre les mêmes paralleles, comme devant, & ayant tous *b* pour base, toutes les lignes paralleles qui rempliront cet espace, rempliront ces triangles; & chacune de ces lignes tirées tout le long de l'espace d'un point quelconque de la perpendiculaire *m x*, ce qui sera enfermé dans chaque triangle sera toûjours égal, comme il a esté prouvé dans le livre XIII. & X. 20. quoy que toûjours de plus petit en plus petit montant vers le sommet. VI.



Donc une somme égale de lignes égales chacune à chacune de chaque triangle, remplit tous ces triangles.

Donc ces triangles sont egaux.

IV. THEOREME.

LES triangles de même hauteur sont entr'eux comme les bases. VII.

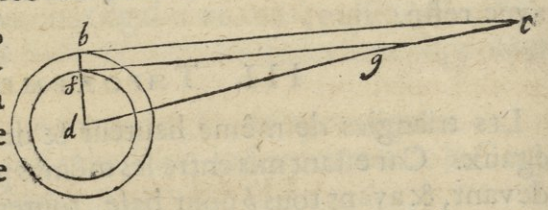
C'est la même chose que le 2e Theoreme, & qui se prouve de la même sorte, excepté qu'on employe icy au lieu de parallelogrammes des triangles qui ont pour base, & qui aboutissent de part & d'autre au sommet de chaque triangle dont ils sont parties. Or ces triangles qui ont *x* pour base dans l'un & dans l'autre triangle, sont aussi de même hauteur dans l'un & dans l'autre; & par consequent ils sont égaux. Ensuite dequoy il ne faut appliquer que ce que nous avons dit pour la demonstration du 2e Theoreme.

SCD LYON 1

V. THEOREME.

VIII. LE cercle eſt égal au triangle rectangle, qui a pour côtez de ſon angle droit le rayon du cercle, & une ligne égale à la circonference du cercle.

Soit le cercle *d*, le rayon *d b*, la tangente *b c*, égale à la circonference & l'hypothenuſe *d c*.



Si on tire de tous les points du rayon, des circonferences concentriques au cercle, elles rempliront tout le cercle, & elles ſeront paralleles entr'elles, en la maniere que les circonferences le peuvent eſtre, & coupées perpendiculairement par le rayon.

Si on tire auſſi de tous ces mêmes points du rayon par leſquels auront paſſé ces circonferences, des paralleles à *b c*, juſques en *d c*, ces paralleles rempliront le triangle. Et ainſi la ſomme de ces circonferences & de ces paralleles ſera égale, étant determinée de part & d'autre par les points du même rayon, étant clair que l'on ne ſçauroit tirer une circonference par aucun point, qu'on ne tire auſſi une parallele à *d c* par ce même point; & au contraire.

Or la circonference & la parallele tirées du même point ſont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra: par exemple celle du point *b* Car

$$bd.\ df :: \begin{cases} \text{circonf. } b. & \text{circonf. } f. \\ b\,c. & f\,g. \end{cases}$$

Donc circonf. *b*. circonf. *f* :: *b c*. *f g*.

Donc *alternando* circonf. *b*. *b c* :: circonf. *f*. *f g*.

Or par l'hypotheſe la circonference *b*, qui eſt celle du cercle, eſt égale au coſté du triangle *b c*.

Donc la circonference paſſant par le point *f*, eſt égale à *f g*, parallele à *b c*.

SCD LYON 1

AVERTISSEMENT.

Ie n'en diray pas davantage de cette nouvelle methode. Il est aisé de juger que ces 5 Theoremes sont de suffisans fondemens pour mesurer sans peine toutes les figures rectilignes, & en trouver les égalitez & les rapports, sur tout en y joignant les principes qui ont esté établis dans les 3 premiers livres. IX.

METHODE COMMUNE.

LEMME OU AXIOME.

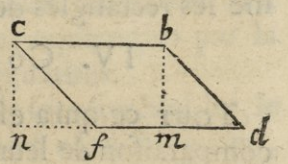
DEUX triangles tout-égaux sont égaux. C'est à dire que lorsque les angles d'un triangle sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun, & les costez égaux aussi chacun à chacun, ces deux triangles comprennent un espace égal; en quoy consiste ce qu'on appelle égalité dans les figures. X.

Cela est clair de soy-même, étant visible que deux triangles de cette sorte ne different que de position.

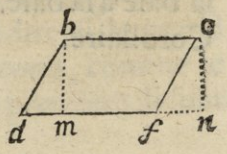
PROPOSITION FONDAMENTALE de la mesure des Parallelogrammes, & des Triangles.

TOUT parallelogramme est égal au rectangle de sa hauteur & de sa base. XI.

Soit le parallelogramme *b c d f*, tirant ses perpendiculaires *b m* & *c n* sur la base *d f*, prolongée autant qu'il est necessaire; je dis que le rectangle *b c m n*, qui est le rectangle de la base & de la hauteur de *b c d f*, est égal à *b c d f*.



Car *b c* étant égale tant à *d f* qu'à *m n*, *d f* est égale à *m n*. Donc ôtant *m f*, commune de l'une & de l'autre, *d m* demeurera égale à *f n*. Et ainsi *b d* étant égale à *c f*, & *b m* à *c n*, les triangles *b d m* & *c f n*



ſont égaux par le Lemme precedent. Et ainſi ajoûtant à l'un & à l'autre le trapeze commun *b m c f*, *b c d f* ſera égal à *b m c n*. Ce qu'il falloit demonſtrer.

I. Corollaire.

XII. Les parallelogrammes de même hauteur & de baſe égale ſont égaux.

Car ils ont tous pour leur meſure commune le même rectangle de cette hauteur & de cette baſe.

II. Corollaire.

XIII. Les parallelogrammes de même hauteur ſont comme leurs baſes ; de baſe égale, ſont comme leurs hauteurs.

Car chacun eſt égal au rectangle de ſa baſe & de ſa hauteur. Or les rectangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes. Il en faut donc dire de même des parallelogrammes qui leur ſont égaux.

On peut auſſi prouver ce 2e Corollaire par le premier de la même façon qu'on a déja fait en demonſtrant le 2e Theoreme de la premiere methode.

III. Corollaire.

XIV. La raiſon de deux parallelogrammes quelconques eſt toûjours compoſée de la raiſon de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe.

Car les parallelogrammes ſont toûjours entr'eux comme les rectangles de leur hauteur & de leur baſe.

IV. Corollaire general.

XV. Tout ce qui a eſté dit de la raiſon des rectangles par la comparaiſon de leurs coſtez angulaires, eſt vray des parallelogrammes, en comparant la hauteur à la hauteur, & la baſe à la baſe. Cela eſt clair par la raiſon du precedent Corollaire.

SCD LYON 1

DES PARALLELOGRAMMES EQUIANGLES.

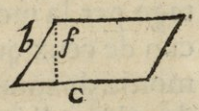
Theoreme general.

XVI. Les parallelogrammes equiangles ſont entr'eux en raiſon compoſée de leurs coſtez angulaires, de même que s'ils étoient rectangles.

Car tous les parallelogrammes ſont entr'eux en raiſon compoſée de celle de la baſe à la baſe, & de la hauteur à la hauteur.

Or quand ils ſont equiangles, la raiſon des coſtez obliques ſur la baſe de chacun eſt la même que celle de la hauteur à la hauteur. Parce que les lignes également inclinées ſont en même raiſon que leurs perpendiculaires, qui eſt ce qui meſure cette hauteur. X. 11.

Exemple. Soient *b c* & *m n* deux parallelogrammes equiangles, dont les hauteurs ſoient *f* & *p*.

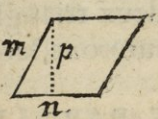


Par les precedens Corollaires,

b c. m n :: c. n. + f. p.

Or *f. p :: b. m.* par X. 11.

Donc *b c. m. n :: c. n + b. m.* Ce qu'il falloit demonſtrer.



Corollaire general.

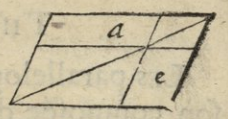
XVII. Tout ce qui a eſté dit de la raiſon des rectangles entr'eux par la comparaiſon de leurs coſtez angulaires, eſt vray auſſi des autres parallelogrammes equiangles par la même comparaiſon de leurs coſtez angulaires.

C'eſt à dire par exemple, que s'ils ſont ſemblables, le grand côté du premier étant au grand côté du ſecond, comme le petit côté du premier au petit côté du ſecond, ils ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues.

Si leurs côtez ſont reciproques (c'eſt à dire, ſi le grand côté du premier eſt au grand côté du ſecond, comme le petit côté du ſecond eſt au petit côté du premier) ils ſont égaux. Et ainſi de tout le reſte.

COROLLAIRE PARTICULIER.

XVIII. LORSQUE deux lignes paralleles chacune aux coſtez angulaires d'un parallelogramme ſe coupent en un même point de la diagonale, il ſe fait 4 parallelogrammes, dont les deux qui ne ſont point coupez par la diagonale, comme *A* & *E*, ſont égaux.



Car ils ſont equiangles, puiſqu'il y a un angle de l'un qui eſt oppoſé au ſommet à un angle de l'autre.

Et il eſt viſible par XIII. 21. que le grand côté d'*a* eſt au grand côté d'*e*, comme le petit côté d'*e* eſt au petit côté d'*a*.

Je ſçay bien que cela ſe prouve ordinairement d'une autre maniere plus palpable, qui eſt que la diagonale partage par la moitié tant le parallelogramme total, que chacun de ceux qui ſont autour de cette diagonale. Donc la moitié du total dans laquelle eſt *a* étant égale à la moitié dans laquelle eſt *e*, & ôtant de chacune de ces deux moitiez deux triangles égaux, les deux parallelogrammes qui demeureront ſeront égaux.

DES PARALLELOGRAMMES SEMBLABLES.

I. THEOREME.

XIX. DEUX parallelogrammes ſemblables (c'eſt à dire qui étant equiangles ont leurs coſtez proportionels) ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues, comme il vient d'eſtre dit S. 17.

II. THEOREME.

XX. LES coſtez homologues de deux parallelogrammes ſemblables, étant en même raiſon que les côtez homologues de deux autres parallelogrammes ſemblables entr'eux, ces 4 parallelogrammes ſont proportionels.

Soient les deux premiers ſemblables *A* & *E*, & les deux derniers *I* & *O*; ſi la raiſon d'entre les coſtez d'*A* & *E* eſt

SCD LYON 1

$x.y$, & de même entre les côtez d'I & O, je dis que

$A. E :: I. O.$

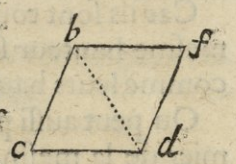
Car $\left\{\begin{matrix} A. & E. \\ I. & O. \end{matrix}\right\} :: xx. yy.$

DES TRIANGLES.

Lemme.

Tout triangle est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur. XXII.

Soit le triangle $b\,c\,d$. Si de b on tire $b\,f$, égale & parallele à la base $c\,d$, & que du point f on tire $f\,d$; je dis 1. que $b.\,c.\,d.\,f.$ est un parallelogramme. Car $c\,d$ & $b\,f$ sont paralleles & égales par la construction; & par consequent $b\,c$ & $f\,d$ sont aussi paralleles & égales, par VI. 28.



Et par consequent $b\,d$, qui est la diagonale de ce parallelogramme, le divise en deux triangles égaux $b\,c\,d$ & $b\,f\,d$. Donc $b\,c\,d$ est la moitié de ce parallelogramme.

Or il est visible que ce triangle & ce parallelogramme sont de même hauteur, puisqu'ils sont enfermez entre les mêmes paralleles $b\,f$ & $c\,d$, & qu'ils ont la même base, sçavoir $c\,d$.

Donc tout triangle est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur.

Theoreme general.

Tout triangle est égal au rectangle de la moitié de sa base, & de toute sa hauteur; ou de la moitié de sa hauteur & de toute sa base. XXIII.

Car il est la moitié d'un parallelogramme de sa base & de sa hauteur. Or ce parallelogramme est égal au rectangle de sa base & de sa hauteur.

Donc prenant la moitié de la base & toute la hauteur, ou la moitié de la hauteur & toute la base, on a un rectangle qui vaut la moitié du rectangle de toute la base & de

toute la hauteur. Donc on a un rectangle égal au triangle.

I. Corollaire.

XXIII. Les triangles de meſme hauteur & de baſe égale, ſont égaux.

Car ils ſont tous égaux au meſme rectangle, qui eſt celuy de la moitié de leur baſe & de toute leur hauteur.

II. Corollaire.

XXIV. Les triangles de meſme hauteur ſont comme leurs baſes, & d'égale baſe comme leurs hauteurs.

Car ils ſont tous égaux à des rectangles, qui eſtant de meſme hauteur ſont comme leurs baſes, & d'égale baſe comme leurs hauteurs.

On peut auſſi prouver ce ſecond Corollaire par le premier de la meſme façon qu'on a demonſtré le 4e Theoreme de la premiere methode.

III. Corollaire.

XXV. La raiſon de deux triangles quelconques eſt toûjours compoſée de la raiſon de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe. Car ces triangles ſont toûjours entr'eux comme les rectangles de la moitié de leur baſe & de toute leur hauteur, qui ont entr'eux cette raiſon compoſée.

IV. Corollaire general.

XXVI. Tout ce qui a eſté dit de la raiſon des rectangles par la comparaiſon de leurs coſtez, eſt vray des triangles par la comparaiſon de la hauteur à la hauteur, & de la baſe à la baſe.

DES TRIANGLES EQUIANGLES ou ſemblables.

I. Theoreme.

XXVII. Tous les triangles equiangles & par conſequent ſemblables, ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs côtez homologues.

Car

Car par les Corollaires precedens, les triangles ſont entr'eux en raiſon compoſée de la raiſon de la baſe à la baſe, & de la hauteur à la hauteur.

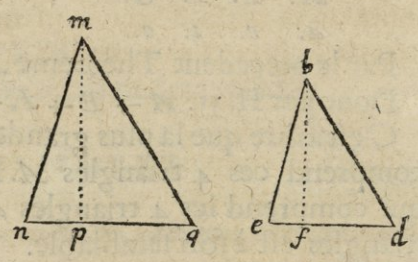
Or quand ils ſont equiangles, les côtez ſur la baſe de part & d'autre ſont chacun à chacun en même raiſon que les perpendiculaires du ſommet à la baſe qui en meſure la hauteur. X. 12.

Et par conſequent ils ſont en raiſon compoſée de celle de la baſe à la baſe ; & d'un côté à un côté.

Or étant equiangles, la baſe eſt à la baſe comme chacun des côtez à chacun des côtez.

Et par conſequent leur raiſon eſt compoſée de deux raiſons égales ; ce qui s'appelle raiſon doublée.

Exemple. Soient triangles ſemblables *b c d* & *m n o*, dont *b f* & *m p* meſurent les hauteurs.



b c d. m n o :: c d. n o.
:: b f. m p.

Or *b c. m n*
b d. m n } *:: b f. m p.*
c d. n o

Donc tous les coſtez ayant la même raiſon, chacun à chacun, & avec les perpendiculaires, la raiſon de ces triangles *b c d* & *m n o* ne peut eſtre compoſée de la raiſon de la baſe *c d* & *n o*, & de celle des hauteurs *b f*, *m p*, qu'ils ne ſoient en raiſon doublée de l'une de ces raiſons, puiſqu'elles ſont égales ; & par conſequent auſſi de la raiſon des autres coſtez homologues, qui eſt la même.

II. THEOREME.

Si les coſtez homologues de deux triangles ſemblables ſont en meſme raiſon que les coſtez homologues de deux autres triangles ſemblables entr'eux, ces 4 triangles ſont proportionels. C'eſt la meſme choſe que ce qu'on a demonſtré des parallelogrammes. S. 20. XXVIII.

DES FIGURES SEMBLABLES.

I. THEOREME.

XXIX. DEUX figures semblables quelconques sont en raison doublée de leurs costez homologues.

Car par XIII. 26. elles peuvent estre partagées chacune en autant de triangles, tels que ceux d'une part étant semblables à ceux de l'autre, chacun à chacun les costez homologues de deux semblables seront en mesme raison que ceux des deux autres quelconques semblables.

Ainsi supposant qu'elles soient partagées chacune en 4 triangles qui soient

A. E. I. O.

a. e. i. o.

Par le precedent Theoreme $A.a :: E.e :: I.i. O.o.$

Donc par II. 35. $A + E + I. + O. a + e + i + o :: A.a.$

C'est à dire que la plus grande des figures semblables qui comprend ces 4 triangles *A. E. I. O.* sera à la plus petite qui comprend les 4 triangles *a. e. i. o.* comme l'un de ces triangles est à son semblable.

Or ces triangles semblables sont entr'eux en raison doublée de leurs bases, & les bases de ces deux triangles semblables sont costez homologues de ces deux figures (comme on a veu XIII. 26.)

Donc ces figures semblables sont en raison doublée de leurs costez homologues.

COROLLAIRE.

XXX. LES figures semblables sont entr'elles comme les quarrez de leurs costez homologues.

Car par le Theoreme precedent les figures semblables sont entr'elles en raison doublée de leurs costez homologues.

Or les quarrez de ces costez homologues sont aussi entr'eux en raison doublée de ces costez qui sont leurs racines.

SCD LYON 1

II. Theoreme.

Si l'on construit sur l'hypothenuse & sur les deux costez d'un angle droit des figures semblables quelconques, celle qui sera construite sur l'hypothenuse sera égale aux deux qui seront construites sur les costez. XXXI.

Soit le grand costé de l'angle droit *b*, le petit *c*, l'hypothenuse *h*.

La figure construite sur *b* soit nommée *A*. sur *c*. *E*, & sur *h*. *I*.

Par le Theoreme precedent.

A. *bb* :: *E*. *cc* :: *I*. *h h*.

Donc $A + E, bb + cc :: I. hh.$ (par II. 44.)

Donc *alternando*,

$A + E. I. :: bb + cc. hh.$

Or $bb + cc. = hh.$ par XIV. 26.

Donc $A + E. = I.$ Ce qu'il falloit demonstrer.

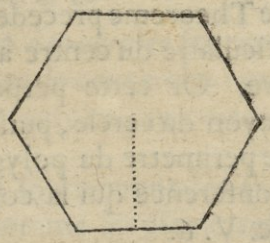
Avertissement.

On voit par là que cette proposition quoyque plus generale que celle des quarrez, n'a dû estre traitée qu'aprés celle des quarrez; parce que le quarré est la vraye & naturelle mesure de la dimension des autres figures planes. XXXII.

DES FIGURES REGULIERES.

I. Theoreme.

Tout polygone est égal au rectangle du rayon droit (qui est la perpendiculaire du centre à l'un des costez) & de la moitié de son perimetre, ou au triangle qui a pour hauteur ce rayon droit, & pour base ce perimetre. XXXIII.



Car tout polygone regulier comprend autant de triangles tout-égaux qu'il a de costez, lesquels ont tous pour

meſure de leur hauteur la perpendiculaire du centre au coſté qui leur ſert de baſe.

Donc chaque triangle eſt égal au rectangle de ce rayon droit qui eſt leur hauteur, & de la moitié de la baſe.

Or toutes ces moitiez des baſes de ces triangles priſes enſemble font la moitié du perimetre, puiſque toutes les baſes font tout le perimetre.

Donc le rectangle de cette perpendiculaire & de la moitié du perimetre eſt égal à tous ces triangles; & par conſequent au polygone.

Et c'eſt la meſme choſe du triangle qui a pour hauteur cette perpendiculaire, & pour baſe tout le perimetre, puiſqu'il eſt égal à ce rectiligne. Outre qu'il eſt aiſé de prouver qu'il eſt égal à tous les triangles que contient le polygone, eſtant de meſme hauteur que chacun, & ſa baſe étant égale à toutes les baſes des autres priſes enſemble.

II. Theoreme.

XXXIV. Par l'analogie du cercle à un polygone infini, le cercle eſt égal au rectangle du rayon & de la moitié de la circonference, ou au triangle qui a pour hauteur le rayon, & pour baſe toute la circonference.

Nous l'avons prouvé par la premiere methode, qui eſt la Geometrie des indiviſibles. On le peut auſſi prouver par la voye d'Archimede, en montrant que le rectangle du rayon & de la moitié de la circonference eſt plus grand que tout polygone inſcrit au cercle, & plus petit que tout circonſcrit.

Il eſt plus grand que tout inſcrit, parce que l'inſcrit par le Theoreme precedent eſt égal au rectangle de la perpendiculaire du centre au coſté, & de la moitié du perimetre. Or cette perpendiculaire eſt plus petite que le rayon du cercle, puiſqu'elle eſt terminée dans le cercle, & le perimetre du polygone inſcrit eſt plus petit que la circonference qui la comprend, par la maxime d'Archimede. V. 6.

Donc le rectangle du rayon du cercle & de la moitié de la circonference eſt plus grand que tout polygone inſcrit.

SCD LYON 1

Et il est plus petit que tout polygone circonscrit, parce que le polygone circonscrit est égal au rectangle du rayon du cercle (qui est alors la même chose que la perpendiculaire au costé) & de la moitié de son perimetre, lequel perimetre est plus grand que la circonferenee du cercle, puisqu'il la comprend, selon la même maxime d'Archimede. Donc &c.

III. THEOREME.

LES figures regulieres de même espece sont entr'elles en raison doublée de celle de leurs rayons droits. XXXV.

Car elles sont égales chacune au rectangle du rayon droit, & de la moitié du perimetre. Or le rayon droit est au rayon droit comme le perimetre au perimetre, par XII. 26. Donc ces rectangles (auſquels ces figures regulieres sont égales) étant semblables, sont entr'eux en raison doublée de celle du rayon droit, qui est l'un de leurs côtez.

I. COROLLAIRE.

LES cercles sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs rayons, ou de leurs diametres, ce qui est la même chose. XXXVI.

II. COROLLAIRE.

LES cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres. Car les uns & les autres sont en raison doublée de celle de leurs diametres. XXXVII.

IV. THEOREME.

LES triangles semblables inscrits en des cercles sont entr'eux en raison doublée des diametres de ces cercles : ou, ce qui est la même chose, comme les cercles, ou comme les quarrez des diametres. XXXVIII.

Car les cordes de divers cercles qui soutiennent les angles inscrits égaux, sont entr'elles comme les diametres, par X. 24. & 25.

Donc les costez de ces triangles semblables qui soutien-

nent les mêmes angles (qui sont ceux qu'on appelle homologues) sont entr'eux comme les diametres.

Or ces triangles estant semblables, sont en raison doublée de leurs costez homologues.

Donc ils sont aussi en raison doublée de ces diametres.

Donc ils sont aussi entr'eux comme les cercles & comme les quarrez des diametres.

V. THEOREME.

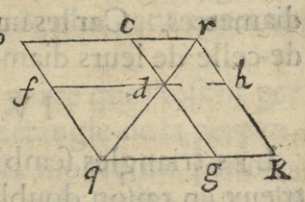
XXXIX. LES figures semblables inscrites dans les cercles sont entr'elles en raison doublée des diametres.

Car comme il a esté prouvé S. & XIII. 26. ces figures semblables se peuvent resoudre en triangles semblables, chacun d'une figure à chacun de l'autre qui seront tous inscrits dans le cercle.

Donc tous les triangles d'une figure sont à tous ceux de l'autre (& par consequent une figure est à l'autre) comme un des triangles d'une figure à un semblable de l'autre. Or par le Theoreme precedent ces deux triangles semblables sont entr'eux en raison doublée des diametres. Donc les figures semblables inscrites dans les cercles sont entr'elles en raison doublée des diametres. Donc aussi comme les cercles. Donc aussi comme les quarrez des diametres.

I. PROBLEME.

XLI. DECRIRE sur un costé donné le parallelogramme égal & equiangle à un parallelogramme donné.



Soit le parallelogramme donné *b c d f*. Soit continuée *c d* jusques à *g*, en sorte que *d g* soit égale au costé donné.

Soit aussi continuée *b f* jusques à ce que *f q* soit égale à *d g*. Soit menée de *q* par *d* une indefinie.

Soit prolongée *b c*, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *r* cette indefinie.

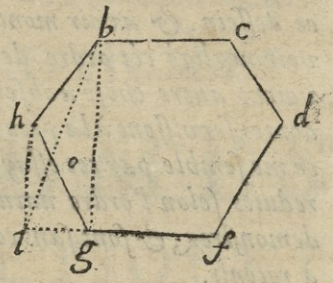
Soit prolongée *q g* jusques en *k*, en sorte que *q k* soit égale à *b r*, joignant les points *r k*, & prolongeant *f d* jusques en *h*, où elle rencontre *k*.

SCD LYON 1

Le parallelogramme *d h k g* ſera égal & equiangle au donné *b c d f*.

II. PROBLEME.

FAIRE une figure égale à une donnée qui ait moins d'un coſté que la donnée. C'eſt à dire que ſi la donnée en a 6, on en cherche une qui n'en ait que 5; & ſi elle en a 5, on en cherche une qui n'en ait que 4 : de ſorte que par là on pourra venir juſqu'au triangle. XLI.



Soit propoſé de reduire l'exagone *b c d f g h* en un pentagone qui luy ſoit égal.

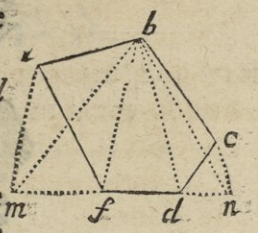
Ayant prolongé *f g*, je tire la ligne *b g*.

Puis de *h* je tire ſur *g* prolongée *h l* parallele à *b g*.

Et de *b* je tire *b l*; Je dis que le pentagone *b c d f l* eſt égal à l'exagone donné.

Car les triangles *h l b* & *h l g* ſont égaux, parce qu'ils ſont ſur la meſme baſe & entre meſmes paralleles.

Donc ôtant *h l o* commun à l'un & à l'autre, *h o b* demeurera égal à *l g o*, tout le reſte eſt commun à l'exagone & au pentagone.



On reduira de meſme le pentagone *b c d f l* à un trapeze.

Ayant mené la ligne *b f*, mener de *l* ſur *d f* prolongée *l m* parallele à *b f*.

Puis tirer *b m*.

On prouvera de la meſme maniere que l'on vient de faire, que le trapeze ſera égal au pentagone.

Que ſi de *b d* on tire une ligne.

Et de *c* ſur *f d* prolongée de ce coſté là *c n*, parallele à *b d*.

Et tirant *b n*, le triangle *b m n* ſera egal tant au trapeze *b c d m*, qu'au pentagone *b c d f l*. Et ainſi l'exagone aura eſté reduit en un pentagone, & le pentagone en un trapeze, & le trapeze en un triangle.

SCD LYON 1

AVERTISSEMENT ET CONCLUSION.

XLII. *Ie laisse d'autres Problemes qui sont tres faciles à resoudre par les principes qui ont esté établis. Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un essay de la vraye methode qui doit traitter les choses simples avant les composées, & les generales avant les particulieres, je pense avoir satisfait à ce dessein, & avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cét ordre de la nature, en s'imaginant qu'ils n'avoient autre chose à observer, sinon que les propositions precedentes servissent à la preuve des suivantes : au lieu qu'il est clair, ce me semble par cet essay, que les elemens de Geometrie estant reduits selon l'ordre naturel, peuvent estre aussi solidement demonstrez, & sont sans comparaison plus aisez à concevoir & à retenir.*

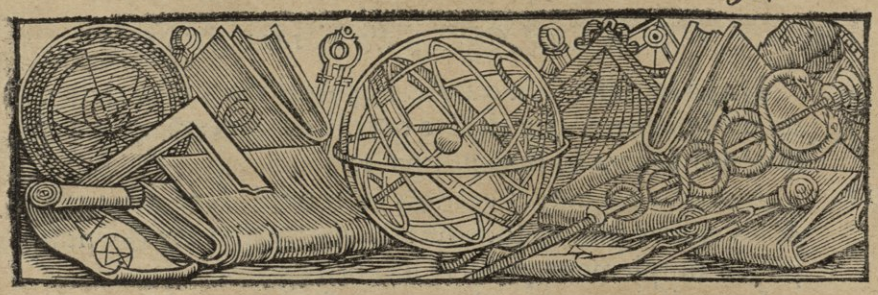
FIN.

SCD LYON 1

SOLUTION
D'UN DES PLUS CELEBRES
ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE,
APPELLE' COMMUNEMENT
LES QUARREZ
MAGIQUES.

SCD LYON 1

SCD LYON 1



SOLUTION D'UN DES PLUS CELEBRES ET DES PLUS DIFFICILES PROBLEMES D'ARITHMETIQUE, APPELLE' COMMUNEMENT LES QUARREZ MAGIQUES.

§. 1. *Ce que c'eſt que ce Probleme.*

AYANT un quarré de cellules pair ou impair. 1.
Et l'ayant remply de chiffres ou ſelon l'ordre naturel des nombres 1. 2. 3. 4. &c.

Ou de quelqu'autre progreſſion arithmetique que ce ſoit, comme 2. 5. 8. 11. 14. &c.

Diſpoſer tous ces chiffres dans un autre quarré de cellules ſemblables à celuy-là, en ſorte que tous les chiffres de chaque bande ſoit de gauche à droit, ſoit de haut en bas, ſoit meſme les deux diagonales, faſſent toûjours la meſme ſomme.

Soient pris pour exemples les quarrez d'onze pour les impairs; & de douze pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui ſont à la fin de ce Traité.

§. 2. *Conſiderations ſur les quarrez naturels.*

J'APPELLE quarrez naturels ceux où les chiffres ſont diſ- 11.
poſez en progreſſion arithmetique en commençant par les plus petits.

SCD LYON 1

Sur les Quarrez impairs.

III. Dans le milieu du quarré impair il y a une cellule qui en eſt le centre. Le chiffre qui eſt dans cette cellule ſoit nommé centre & marqué par *c*.

IV. De tous les autres chiffres la moitié ſont plus petits & les autres plus grands que le centre. Les uns ſoient appellez ſimplement *petits* & les autres *grands*.

V. Les cellules autour du centre ſoient appelées 1re enceinte.

Autour de la premiere enceinte, 2e enceinte.
Autour de la ſeconde enceinte, 3e enceinte.
Et ainſi de ſuite.

VI. Les enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. ſoient appellées *enceintes impaires*.

Les 2. 4. 6. 8. 10. &c. *enceintes paires*.

VII. Il eſt important de conſiderer dans chaque enceinte où ſont les petits chiffres, & où ſont les grands.

Les petits ſont premierement dans toute la bande d'enhaut, qui eſt de 3. dans la 1re enceinte, de 5 dans la 2e, de 7 dans la 3e &c.

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts juſqu'à celuy qui eſt vis-à-vis le centre *incluſive*.

Troiſiémement dans la bande à droits les plus hauts juſqu'à celuy qui eſt vis à vis le centre *excluſive*.

Sur les Quarrez pairs.

VIII. Il n'y a point de cellule qui ſoit au centre. Mais on doit prendre pour centre la moitié de la ſomme que font le premier & le dernier chiffre.

Et cette ſomme entiere s'appellera 2. *c*.

IX. La moitié des bandes, ſçavoir celles qui ſont les plus hautes contiennent les petits chiffres, & les plus baſſes les grands.

X. Les quatre cellules du milieu font la 1re enceinte.
Les cellules autour de ces quatre, la 2e enceinte.
Celles autour de la ſeconde, la 3e enceinte.
Et ainſi de ſuite.

SCD LYON 1

LES enceintes 1. 3. 5. 7. 9. &c. soient aussi appellées les enceintes impaires. XI.

Et les 2. 4. 6. &c. les paires.

LES petits chiffres sont, XII.

1. Dans la bande d'en haut de chaque enceinte.

2. Au costé gauche depuis la bande d'enhaut jusqu'à la bande où commencent les grands chiffres.

3. Et de même au costé droit.

§. 3. PREPARATION.

LE plus grand mystere de la solution de ce Probleme consiste à marquer par lettres quelques-uns des petits chiffres de chaque bande. XIII.

QUARREZ IMPAIRS.

DANS toutes les enceintes generalement marquer le coin à gauche de la bande d'enhaut par *e*. XIV.

Le coin à droit de la même bande par *o*.

Le milieu de cette bande par *m*.

La cellule à gauche qui est vis à vis le centre par *a*.

MARQUER de plus dans les enceintes impaires XV.

Deux cellules dans la bande d'enhaut également distantes, l'une d'*e*, l'autre d'*o*, par les mêmes lettres accentuées.

L'une par *è*.

L'autre par *ò*.

Et la cellule à gauche au dessous d'*e* par *ẽ*.

Et au costé droit celle qui est au dessus de la cellule qui est vis à vis le centre par *c*.

DANS LES QUARREZ PAIRS.

NE rien marquer dans les premieres & secondes enceintes. XVI.

DANS toutes les autres generalement marquer XVII.

Le coin à gauche d'enhaut par *e*.

A droit par *o*.

Le plus bas des petits nombres à droit par. *a*.

Le plus bas des petits nombres à gauche par *c*.

MARQUER de plus dans les enceintes impaires, à commencer par la 3e (qui est celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut.) XVIII.

SCD LYON 1

4 cellules dans la bande d'en-haut, deux par $\left\{\begin{matrix}\acute{e}.\\ \acute{o}.\end{matrix}\right.$

& deux par $\left\{\begin{matrix}\hat{e}.\\ \hat{o}.\end{matrix}\right.$

selon ce qui a esté dit S. 15.

A gauche marquer la cellule au dessous d'*e* par ω.

Et à droit celle au dessus d'α par γ.

§. 4. MAXIMES

POUR LA DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

XIX. Deux chiffres, l'un *petit*, l'autre *grand*, également distans du centre, & qui se joignent par une ligne passant par le centre font une somme égale à deux fois le centre.

XX. Quand un *petit* chiffre est marqué par une lettre, son *grand* soit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuscule de la mesme lettre, quoy qu'elle ne soit pas marquée.

Ainsi *e E* font deux fois le centre.

Et de mesme α. *A*, ou β. *B*, ou *o*. *O*.

Seconde Maxime.

XXI. Quatre chiffres dans la mesme bande, dont le premier est autant distant du 2, que le 3 du 4 sont en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme de ceux du milieu.

EXEMPLES.

XXII. *e. è* : : *ó. o.* Donc *e. o* = *è. ò.*

D'où il s'ensuit que par tout où sont ensemble *è. ò*, ou bien *ê. ô*, ou leurs majuscules *E' O'*, on peut supposer, lorsqu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'est comme si c'estoit *e. o*, *E. O*, parce que si l'égalité s'y trouve en supposant que c'est *e. o*, elle ne sera pas troublée en remettant *è. ò*, en leur place, qui valent autant que *e. o*.

XXIII. *e. m* : : *m. o.* Donc *e. o* = *m. m.*

Dans les Quarrez pairs.

XXIV. *e.* ω : : β. *A.* Donc *e. A* = ω. β.

Pour trouver *A*. voyez S. 20.

SCD LYON 1

TROISIEME MAXIME.

LORSQUE 4 cellules font un parallelogramme rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres ſont en proportion arithmetique. Et par conſequent la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme de ceux du milieu. XXV.

EXEMPLES.

DANS LES QUARREZ IMPAIRS.

$e.m :: a.c$ Donc $e.c = m.a$. XXVI.

$m.o :: a.c$ Donc $m.c = o.a$. XXVII.

$\omega.m :: c.\mathcal{C}$ Donc $\omega.\mathcal{C} = m.c$. XXVIII.

DANS LES PAIRS.

$e.o :: \mathcal{C}.a$ Donc $e.a = o.\mathcal{C}$. XXIX.

$\omega.\mathcal{C} :: o.\gamma$ Donc $\omega.\gamma = \mathcal{C}.o$ XXX.

§. 5. *Methode pour diſpoſer magiquement le le Quarré naturel.*

CETTE methode conſiſte en fort peu de regles; les unes generales, les autres particulieres, ſelon leſquelles il faut tranſpoſer les chiffres du quarré naturel dans le magique. XXXI.

PREMIERE REGLE GENERALE.

IL faut diſpoſer les chiffres par enceintes, ceux d'une enceinte en l'enceinte ſemblable, & tout le ſoin qu'on doit avoir d'abord, eſt de ſçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parce que la ſituation des *petits* donne celle des *grands* ſelon les deux regles ſuivantes. XXXII.

SECONDE REGLE GENERALE.

QUAND on a placé un *petit* chiffre dans un coin, il faut placer ſon *grand* dans le coin diagonalement oppoſé. XXXIII.

Ainſi a eſtant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre A dans le coin droit de la bande d'en bas.

TROISIEME REGLE GENERALE.

HORS les coins il faut placer les grands vis à vis des petits de la bande oppoſée. XXXIV.

SCD LYON 1

C'eſt pourquoy il faut obſerver de ne mettre jamais deux petits en des bandes oppoſées vis à vis l'un de l'autre.

Corollaire de ces Regles.

XXXV. Les chiffres eſtant diſpoſez ſelon ces regles,

Il s'enſuit, 1. Que les chiffres de deux bandes oppoſées pris enſemble, valent autant de fois *c* qu'il y a de chiffres dans les deux bandes. Car un petit & un grand valent deux fois *c*. Or il y a autant de *petits* que de *grands*. Donc

XXXVI. Il s'enſuit, 2. Que lorſqu'on a prouvé que les chiffres d'une bande aprés cette diſpoſition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande eſt égale à ſon oppoſée.

XXXVII. Il s'enſuit, 3. Que quand il y a autant de petits chiffres dans une bande que dans l'oppoſée, & que la ſomme des uns eſt égale à la ſomme des autres, c'eſt une marque aſſurée que la bande eſt égale à la bande.

La preuve en eſt facile ſans que je m'arreſte à l'expliquer.

Quatrieme Regle generale.

XXXVIII Il ne faut ſe mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui ſont marquez par des lettres : car cela fait, le reſte ſe trouve ſans peine par cette raiſon.

Dans la bande d'en haut, dans quelque quarrez & quelques enceintes que ce ſoit, outre les cellules marquées par des lettres

Ou il ne reſte rien.

Ou il reſte toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair ; C'eſt à dire 4. 8. 12. 16. &c.

Et de plus, ils ſont toûjours 4 à 4 en proportion arithmetique.

Donc prenant les extrêmes & les mettant dans une bande, & ceux du milieu dans l'oppoſée, ils ne troubleront point l'égalité qui y eſtoit déja par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en eſt de même des deux coſtez droit & gauche. Car les petits chiffres qui reſtent (s'il en reſte outre les marquez)

quez) sont toûjours en nombre pairement pair 4. 8. 12. 16. &c. & de 4 en 4 en proportion arithmetique.

Donc comme cy-dessus.

Il n'y a donc plus à se mettre en peine que de disposer les lettres. Ce qui se fait par les regles particulieres.

§. 6. *Regles particulieres pour les Quarrez impairs.*

XL. Il y a deux regles pour ces quarrez, l'une pour les enceintes impaires, & l'autre pour les paires.

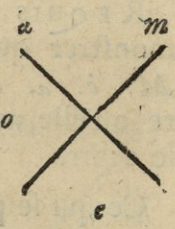
Pour les enceintes impaires.

Au coin gauche de la bande d'en haut mettre *a*.

Au coin droit de la même bande. *m*.

A la bande d'en bas en queque cellule hors les coins, *e*,

A la bande de costé du costé d'*a*, *o*.



Demonstration.

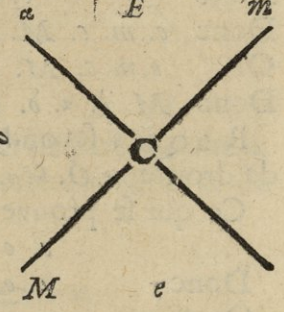
XLI. Il est requis premierement à demonstrer que dans la bande d'enhaut *a*. *E*. *m*. valent trois fois le centre. D'où il s'ensuivra qu'elle sera égale à la bande d'en bas par 36.

Or par (26.) *e*. *c*. ☰ *a*. *m*.

Donc *e*. *c*. *E* ☰ *a*. *E*. *m*.

Or *e*. *c*. *E* ☰ 3 *c*. par 20.

Donc *a*. *E*. *m* ☰ 3 *c*. Ce qu'il falloit demonstrer.



XLII. Requis secondement à demonstrer que *a*. *o*. *M*. valent 3 *c*. D'où il s'ensuivra que cette bande sera égale à l'opposée par 36.

Or par (27) *a*. *o* ☰ *m*. *c*.

Donc *m*. *c*. *M* ☰ *a*. *o*. *M*.

O *m*. *c*. *M* ☰ 3 *c*. par 20.

Donc *a*. *o*. *M* ☰ 3 *c*.

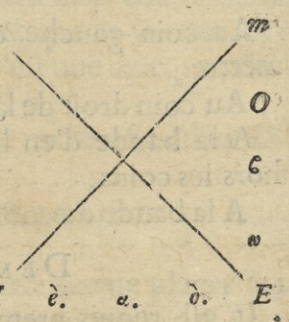
SCD LYON 1

Pour les enceintes impaires.

XLIII. Il ſuffira de les figurer tout d'un coup.

DEMONSTRATION.

XLIV. Requis premierement à demonſtrer que la bande d'en bas *M. è. α. ò. E* ≡ 5 *c.* C'eſt à dire qu'elle vaut enſemble cinq fois le centre.



Ce qui ſe prouve ainſi.

Par (27) *α. o* ≡ *m. c.*
Donc *e. α. o* ≡ *e. m. c.*
Donc *e. m. c. M. E.* ≡ *è, α. ò. M. E.* (par 22.)
Or *e. m. c. M. E* ≡ 5. *c.* par 20.
Donc *M. è. α. ò. E.* ≡ 5 *c.* Ce qu'il falloit demonſtrer

XLV. Requis ſecondement à demonſtrer que dans la bande droitte *m. O. C. ω. E* ≡ 5 *c.*

Ce qui ſe prouve ainſi.

e. o ≡ *m. m.* par (23.)
Donc *e. o. c* ≡ *m. m. c.*
Or *m. m. c* ≡ *m. ω. C.*
Parce que *m. c* ≡ *ω. C.* par 28.
Donc *e. o. c.* ≡ *m. ω. C.*
Donc *e. o. c. E. O* ≡ *m. ω. C. E. O.*
Or *e. o. c. E. O* ≡ 5 *c.* par 20.
Donc *m. O. ω. C. E* ≡ 5 *c.* Ce qu'il falloit demonſtrer.

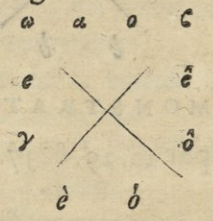
SCD LYON 1

§. 7. *Pour les Quarrez pairs.*

On laiſſe à part les deux premieres enceintes, qui ont leur regle particuliere. XLVI.

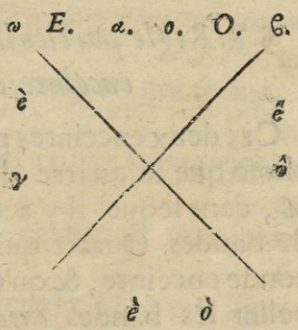
Pour les autres enceintes impaires.

La diſpoſition s'en figure ainſi. XLVII.



Demonstration.

Requis 1. à demonſtrer que les ſix chiffres de la bande d'en haut dont quatre ſont *petits*, & deux *grands* qui viennent de *è* & *ò* qu'on a mis en bas, valent ſix fois le centre. Ce qui ſe prouve ainſi. XLVIII.



$\alpha . A . o . O . e . E = 6\,c.$ par (20.)

Or ces ſix lettres ſont égales aux ſix, $\omega . E . \alpha . o . O . \epsilon$.

Car ôtant les mêmes qui ſe trouvent de part & d'autre, ſçavoir $\alpha . o . O . E$. il ne reſtera d'un coſté que $A . e$: & de l'autre que $\omega . \epsilon$.

Or par (24.) $A . e = \omega . \epsilon$.

Donc les ſix lettres $\omega . E . \alpha . o . O . \epsilon = 6\,c$.

Requis 2. à demonſtrer que $\omega . e . \gamma = \epsilon . \hat{e} . \hat{o}$. Car ſi cela eſt, les grandes ſeront auſſi égales aux grandes, & le tout au tout par (37.) XLIX.

Suppoſant donc que $\hat{e} . \hat{o}$ ſoient $e . o$. (S. 22.) & oſtant e & e de part & d'autre, reſte d'une part $\omega . \gamma$. & de l'autre $\epsilon . o$. qui ſont des ſommes égales par (30)

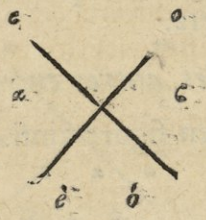
Donc $\omega . e . \gamma = \epsilon . \hat{e} . \hat{o}$.

Donc la bande égale à la bande par (30)

SCD LYON 1

Pour les enceintes paires.

L. La disposition en est tres facile, & se figure ainsi.



DEMONSTRATION.

LI. Elle est si facile par 22. 29. & 37. que je ne m'amuse pas à l'expliquer.

Cette enceinte se peut encore faire en transposant les coins &c.

§. 8. *Regle particuliere pour la premiere & seconde enceinte des Quarrez pairs.*

LII. Ces deux enceintes ne sont autre chose que le quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux sortes de bandes. Quatre qui font la seconde enceinte, & qu'on peut appeller les bandes *exterieures*. Et quatre autres qui coupent le quarré, & qu'on peut appeller *transversales* : sçavoir la 2e & la 3e de haut en bas.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Et la 2e & la 3e de gauche à droit.

LIII. Ce qui est cause que ces deux enceintes ne se peuvent pas disposer par les regles des autres, c'est que les 4 chiffres du milieu faisant en divers sens quatre bandes de deux chacune en ligne droitte, & deux en diagonale, les bandes droittes ne sçauroient faire des sommes égales, mais seulement les diagonales.

Or ces 16 chiffres se pouvant disposer en tant de manieres que cela est presque incroyable ; sçavoir en plus de 20 millions de millions.

SCD LYON 1

20:922:789:872:000.

Il n'y en a proprement que 16 qui soient magiques, c'est à dire où toutes les bandes fassent des sommes égales (car je ne compte pas pour differentes dispositions celles qui ne viennent que de la differente situation du même quarré.)

ET voicy comme on les trouve. LV.

Il faut prendre toûjours les chiffres 4 à 4 en cet ordre.

1. Les quatre du dedans ou interieurs.

2. Les quatre coins exterieurs.

3. Les deux du milieu de la bande d'en haut, avec les deux du milieu de celle d'en bas.

4. Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.

Or chacun de ces chiffres pris ainsi 4 à 4 (& qu'on nommera dans la suitte par 1. 2. 3 4.) peuvent

Ou estre laissez en leur même place; ce qui se marquera par *o.*

Ou estre transportez en croix S. André; ce qui se marquera par *c.*

Ou directement de gauche à droit; ce qui se marquera par *g.*

Ou directement de haut en bas; ce qui se marquera par *h.*

SUIVANT ces remarques, & se souvenant de ce que signifient les 4 nombres (1. 2. 3. 4.) & les 4 lettres (*o. c. h. g.*) les deux tables suivantes feront trouver sans peine les 16 dispositions magiques du quarré de 4: ou ce qui est la même chose des deux premieres enceintes de tous les quarrez pairs. LVI.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1.	*o*	*o*	*o*	*o*	*c*	*c*	*c*	*c*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*o*	*h*	*o*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

SCD LYON 1

	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.
1.	g	g	g	g	h	h	h	h
2.	o	c	g	h	o	c	g	h
3.	h	o	h	o	c	g	c	g
4.	c	h	h	c	g	o	o	g

LVII. De ces 16 disposítions magiques du quarré de 4. il y en a deux, sçavoir la 1re & la 6e, où on ne change que 8 chiffres.

Deux, sçavoir la 11e & la 16e, où on les change tous 16.

Et 12 où on en change 12.

LVIII. Voicy un exemple de la 6e disposition, & un autre de la 16e. On laisse à trouver les autres.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

DEMONSTRATION.

LIX. CHAQUE bande tant exterieure que transversale du quarré de quatre (ou du quarré composé des 2 premieres enceintes de tous les quarrez pairs) est de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

Soit donc, par exemple, la somme des extrêmes de la bande d'enhaut appellée b, la somme des moyens qui luy est égale pourra estre aussi appellée b, & ainsi toute la bande sera $b+b$.

SCD LYON 1

Et par la même raiſon la bande d'en bas pourra eſtre $f+f$.

Cela étant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1re en tranſpoſant les extrêmes de l'une à l'autre ſans changer les moyens. Car alors l'une deviendra $f+b$.

Et l'autre $b+f$. & ainſi ſeront égales.

La 2e en tranſpoſant les moyens ſans changer les extrêmes. Car alors l'une deviendra $b+f$. & l'autre $f+b$. & ainſi ſeront encore égales.

Il ne faut qu'appliquer cecy à chacune de ces 16 diſpoſitions, & l'on verra que les tranſpoſitions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. *Divers moyens de varier les Quarrez Magiques.*

DE ces moyens j'omets ceux qui ſont trop faciles à trouver, & je n'en marqueray que deux qui ſont plus importans, & qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez de quarrez magiques.

PREMIER MOYEN.

Nous avons ſuppoſé qu'on tranſporteroit les chiffres de la premiere enceinte du quarré naturel dans la premiere enceinte du quarré magique; & ceux de la 2e dans la 2e; & de la 3e dans la 3e &c. Mais cela n'eſt pas neceſſaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il ſuffit de ne les tranſporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque qui ſoit impaire, comme de la 5e à la 1re; & d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6e à la 4e. LX.

SECOND MOYEN.

ET pour tous les autres chiffres non marqvez de lettres, on les peut tranſporter de quelque enceinte que ce ſoit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvû qu'on en prenne quatre enſemble qui ſoient en proportion arithmetique, & qu'on ait ſoin de mettre les extremes dans une bande, & les moyens dans la bande oppoſée. LXI.

SCD LYON 1

CONCLUSION.

LXII. Je penſe pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'eſt pas poſſible de trouver une methode plus facile, plus abregée & plus parfaite pour faire les quarrez magiques, qui eſt un des plus beaux Problemes d'Arithmetique.

Ce qu'elle a de ſingulier, c'eſt 1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on eſt toûjours aſſuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands quarrez ne ſont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonſtration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode eſt ſi generale, que ſans y rien changer on pourroit reſoudre ſans aucune peine par la meſme voie cet autre Probleme qui paroiſt encore plus merveilleux.

Ayant mis dans un quarré naturel tous les nombres que l'on voudra en progreſſion geometrique, comme 1. 2. 4. 8. 16. *&c. les diſpoſer de telle ſorte dans un quarré ſemblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres faſſent une ſomme égale à celle que font les nombres de toute autre bande multipliez auſſi les uns par les autres.*

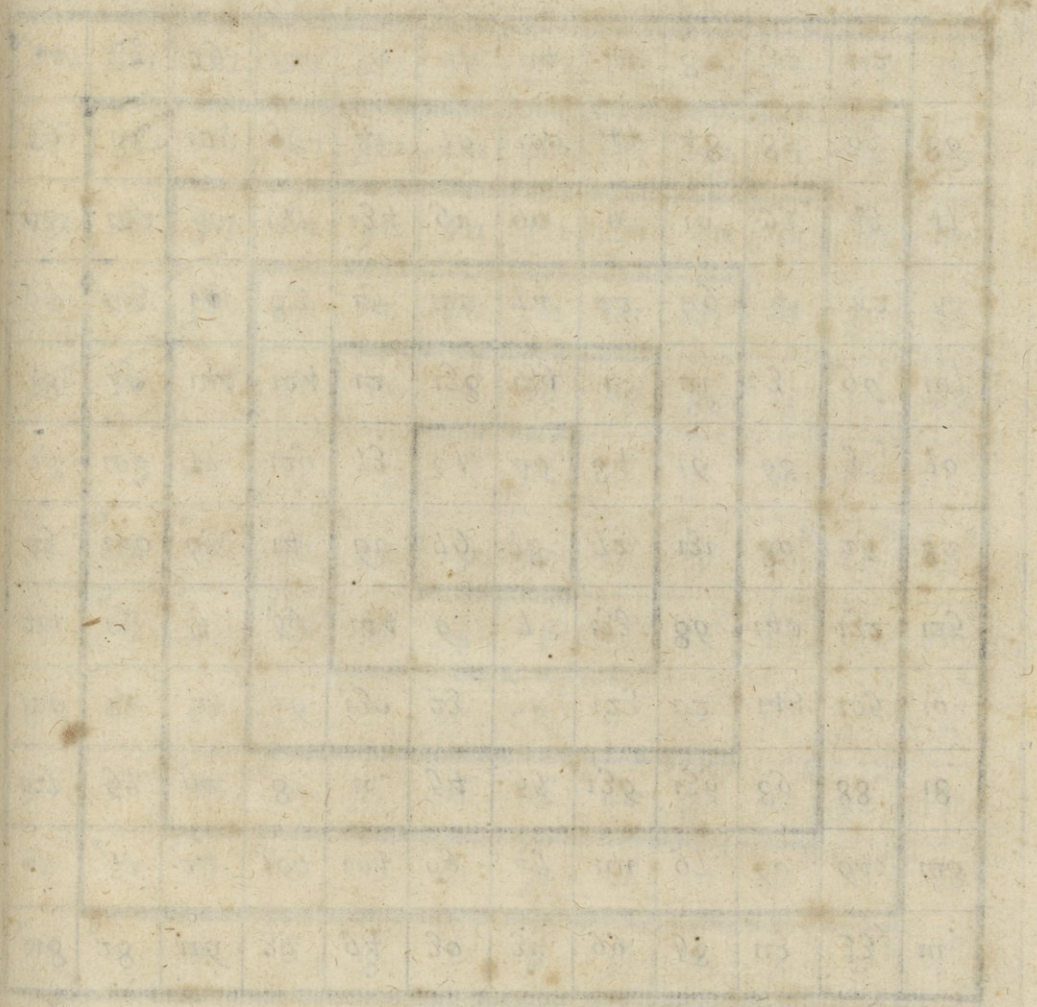
En voicy un exemple dans le quarré de trois.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Fin *de l'Explication des Quarrez Magiques.*

SCD LYON 1



SCD LYON 1

QVARRÉ MAGIQVE DE XII.

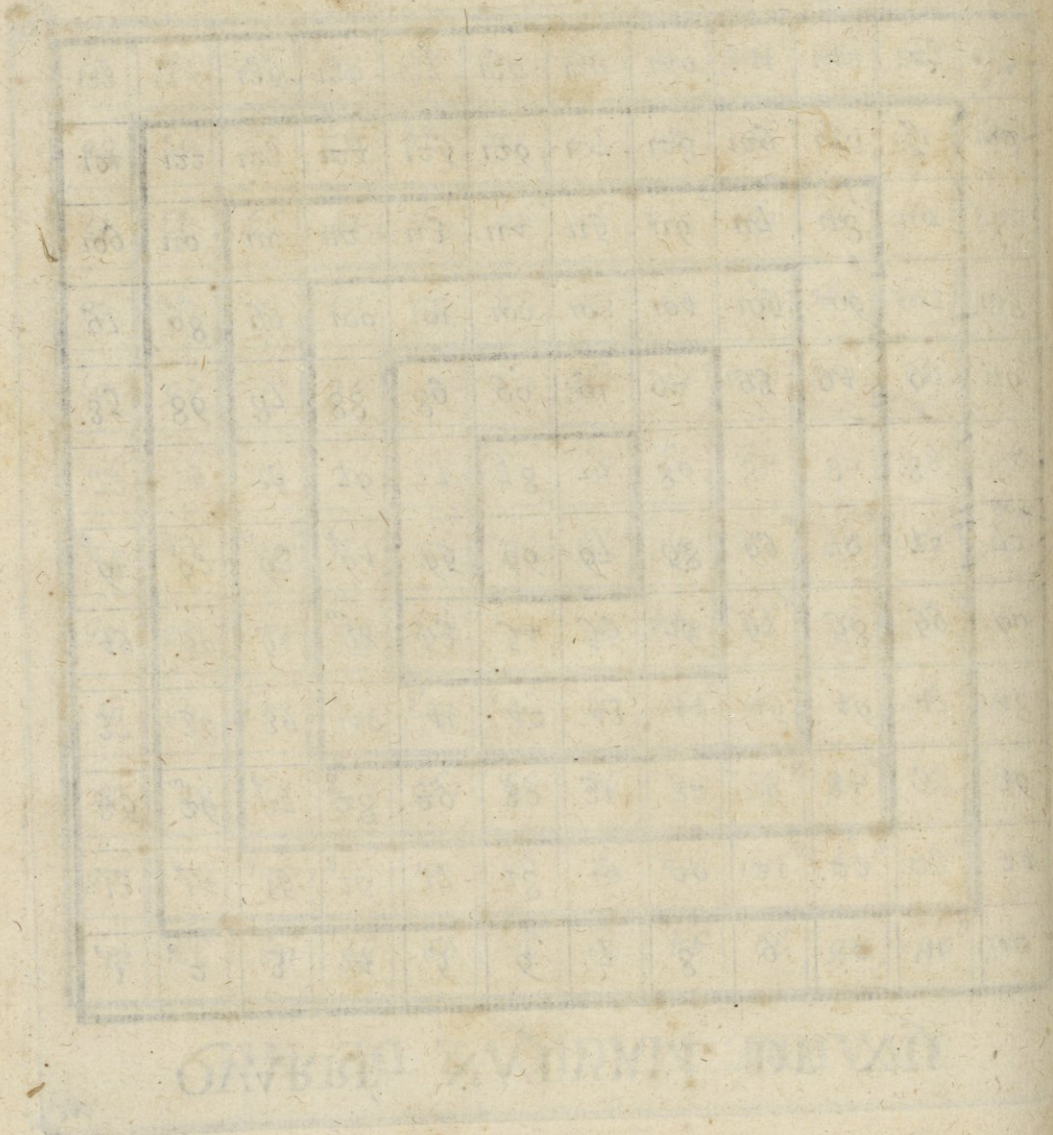
118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
98	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	47
59	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	86
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

SCD LYON 1

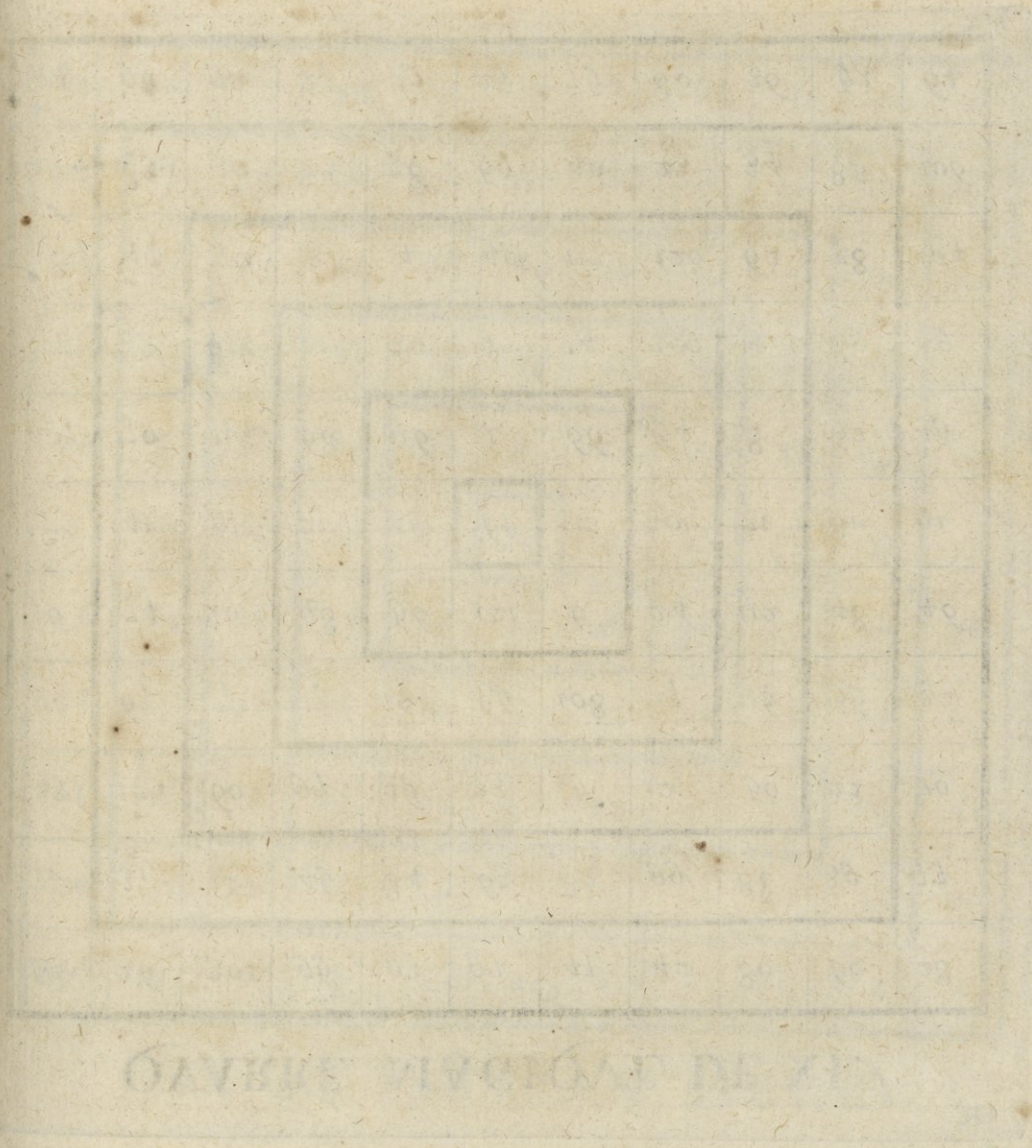
QVARRÉ NATVREL DE XII.

e 1	è 2	3	4	5	6	7	8	9	10	ù 11	o 12
13	e 14	è 15	ê 16	17	18	19	20	ô 21	ò 22	o 23	24
25	ω 26	e 27	è 28	29	30	31	32	ô 33	o 34	35	36
37	38	39	e 40	è 41	ê 42	ô 43	ò 44	o 45	46	47	48
49	50	51	ω 52	53	54	55	56	y 57	58	y 59	60
β 61	β 62	β 63	β 64	65	66	67	68	α 69	α 70	α 71	α 72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

SCD LYON 1



SCD LYON 1



SCD LYON 1

SCD LYON 1

QVARRÉ MAGIQVE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	77
43	100	60	97	96	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

QVARRÉ NATVREL DE XI.

1 e	2	3	4	5	6 m	7	8	9	10	11 o
12	13 e	14 è	15	16	17 m	18	19	20 ò	21 o	22
23	24 w	25 e	26	27	28 m	29	30	31 o	32	33
34	35	36	37 e	38 è	39 m	40 ò	41 o	42	43	44
45	46	47	48 w	49 e	50 m	51 o	52 ß	53	54 ß	55
56 α	57 α	58 α	59 α	60 α	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1