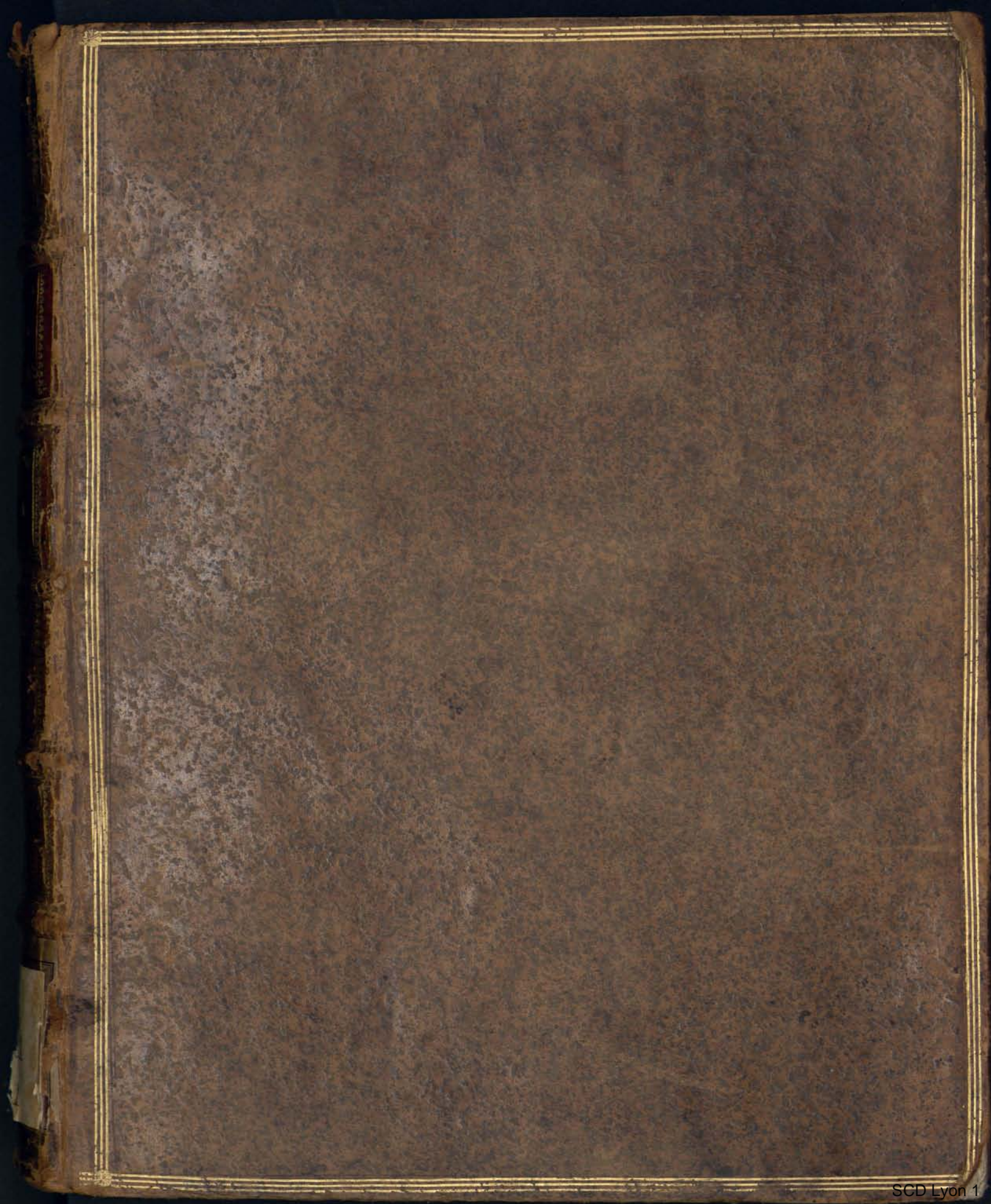


WOLFFI
ELEMEN
MATHESIS

TOM I

10.33
10.31
1







60th 52.





Andet sculp. Lugd. 1731.

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI,
FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS
NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS
ORDINARII, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII,
ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISIÆ, SOCIETATUMQUE
REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

E L E M E N T A
M A T H E S E O S

U N I V E R S Æ.

T O M U S P R I M U S,

*Qui COMMENTATIONEM DE METHODO MATHEMATICA,
ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM PLANAM,
& ANALYSIM, tam FINITORUM quam INFINITORUM complectitur.*

E D I T I O N O V I S S I M A,

M U L T O A U C T I O R E T C O R R E C T I O R.



G E N E V Æ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

M D C C X L I I I.



CHRISTIANI WOLFF

PHYSICUM UNIVERSITATIS HALLENSENSIS
MAGISTRO JOHANNI WOLFF
PHYSICUM UNIVERSITATIS HALLENSENSIS
MAGISTRO JOHANNI WOLFF
PHYSICUM UNIVERSITATIS HALLENSENSIS
MAGISTRO JOHANNI WOLFF

ELEMENTA
MATHESIOS



UNIVERSITATIS HALLENSENSIS
TOMUS PRIMUS

PHYSICUM UNIVERSITATIS HALLENSENSIS
MAGISTRO JOHANNI WOLFF
PHYSICUM UNIVERSITATIS HALLENSENSIS
MAGISTRO JOHANNI WOLFF

EDITIO NOVISSIMA

MAGISTRO JOHANNI WOLFF



GENEVAE

Apud Thesium-Albertum Casse, & Socios

MDCCLIII

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

D O M I N O,

WILHELMO,

HASSIÆ LANDGRAVIO,

PRINCIPI HERSFELDIÆ, COMITI

CATTIMELIBOCI, DECIAE, ZIEGENHAINÆ,

NIDDÆ ET SCHAUMBURGI, &c. &c.

EXERCITUS EQUESTRISSIMO FOEDERATI BELGII

GENERALI LOCUM TENENTI,

LEGIONIS PRÆTORIANÆ DESULTORIÆ CHILIARCHÆ,

NEC NON

OPPIDI TRAJECTI MOSANI SUPREMO

PRÆFECTO BELLICO, &c. &c.

PRINCIPI AC DOMINO CLEMENTISSIMO.

* 2

SERE

*SERENISSIME PRINCEPS,
DOMINE CLEMENTISSIME,*



*Cientia Mathematica Imperatoribus, Regibus
& Principibus ab omni ævo in pretio fuere,
ut non modo munificentia sua eas promove-
rint, sed & ipsimet animum ad eas excolen-
das applicaverint. Non opus est, ut de
ALPHONSO X Castella ac Legionis Rege,
& ULUGH BEIGHO, TAMERLANIS
MAGNI nepote, Astronomiæ instauratoribus, de MATTHIA
Hunga-*

DEDICATIO.

VII

*Hungaria Rege inventorum mathematicorum insigni remunera-
tore, de FRIDERICO II Dania & Norwegia Rege atque
RUDOLPHO II Imperatore TYCHONIS Mecanatibus, de
FERDINANDO, magno Etruria Duce, GALILÆI Protectore, de
CAROLO II & LUDOVICO XIV Angliæ & Gallia Regibus,
Societatum Scientiarum conditoribus, de Duce BURGUNDIÆ,
Elementorum Geometriæ scriptore, & de pluribus aliis Princi-
pibus summis dicamus: Eccur enim e longinquo petenda sunt
exempla, ubi domestica prostant? Cur ad vetusta provocan-
dum, ubi presentia intuemur? Nemo profecto ignorat, quæ
WILHELMUS IV. Hassia Landgravius successu felicissimo,
quo TYCHONI, Phœnici illi Astronomorum, iudice HEVELIO,
palmam dubiam reddidit; Astronomiæ & Mechanicæ instauran-
dæ gratia Cassellis molitus est. Et Orbis universus admiratur,
quæ Magnus Parens Tuus, CAROLUS, Sapientis cognomen
instar ALPHONSI dudum meritus, in omni Mathefi ac Phi-
losophia experimentalis præstitit, atque munificentiam tanto Prin-
cipe dignam deprædicat, quæ Artes mathematicas & Naturæ
cognitionem promovet. Tu, PRINCEPS SERENISSIME,
qui omnibus virtutibus emines, quæ Heroem in bello, Regna-
torem in pace exornant, nullis Principum in Scientiis Ma-
thematicis magno estimandis secundus. Quare cum Elemen-
ta mea Mathefeos universæ multo auctiora novoque habitu
induta, ut Opus plane novum existimari debeant, denuo
in lucem proferam, quo via plana ad omnem theoriam &
praxin sternitur, veræque methodi leges, ad accurate & uti-
liter philosophandum vitæque negotia dextre gerenda apprime
necessariæ, animo Lectoris sensim sensimque instillantur; nul-
lus dubitavi, PRINCEPS SERENISSIME, ad pedes
Tuos*

*Tuos ea deponere, certo persuasus Tibi non improbatum iri
meum in Scientiis humano generi adeo utilibus propagandis
studium. Deus Te seruet, Principum Hassia Decus!
Ita uovet,*

SERENISSIME PRINCEPS,

DOMINE CLEMENTISSIME,

SERENISSIMI NOMINIS TUI

MARBURGI d. 8.

Martii 1730.

Humillimus cultor

CHRISTIANUS WOLFIUS.

PRÆ-



PRÆFATIO.



PSI nullo tempore, quo scientiis honos fuit, defuerint Viri egregii, qui præclaris ingenii ac virtutum dotibus supra communem mortalium fortem evecti, divina illa Mathematica digna statuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici successu suspiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum Veterum monumenta palam loquuntur; ante nostram tamen ætatem ad illud fastigium non fuerunt evecta, in quo hodie constituta miramur. Neque indigna sunt, quæ in dies magis magisque excolantur & explosa loquaci sophistica in Scholas revocentur, cum neminem, nisi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis osor affectu præpeditam habuerit mentem, fore existimem, qui non eorum puritatem, evidentiam ac sublimitatem miretur, & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte nostra præclare sentiat. Mentem enim humanam valde perficit Mathesis, ad Philo-

Wolffi Elem. Mathes. Tom. I.

* *

sophiam

sophiam aliaque studiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum instruit, ad solidiorem doctrinam adminicula inexpectata suppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexpectata Mathematicum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus litteratorum ex suo ingenio alios judicans persuadere conetur ignaris, ex præpostero in Scientias mathematicas studio proficisci has laudes. Quamvis autem non ea sit penes me garrientium † autoritas, ut, quæ inscite obstrepunt, scite retundam; non tam quod plurimi institutione indignos judicent, qui convitiis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos censeant, qui modeste id desiderant, quam quod in sciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum HOROCCIO * loquar) *pulchre sibi disputare videntur, si, quod arguendo evertere non possunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dictis adpersum aliorum risui exponant*: cum tamen mearum partium esse existimem, ut generosa atque excelsa ingenia ad studia mathematica incendam atque inflammem; quid, quæso, impedit, quominus evincam, non esse Mathematicos

† Autor sum his hominibus, ut Præfationem legant, quam *Philippus MELANTHON*, vir non Mathematicis, sed elegantioribus, sed Theologicis studiis celebris, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis VOGELINI* Elementis Geometriæ præmisit. Ex ea notulas quasdam hinc inde adspargemus, consensum *Philipporum* cum nostris manifestaturas. Ita ergo generatim ad rem nostram *MELANTHON*: Scio, inquit, *has adhortationes apud eos, qui sordidis ingeniis præditi sunt, nihil proficere, qui præstantium disciplinarum dignitatem non prospiciunt, aut sectantur quasdam vendibiliores artes, quæstus gratia. Nam & mentes habent monstrosas, & magno scelere turbant proportionem geometricam, cum non tribuunt suam artibus dignitatem. Sed recta ingenia, etiam mediocria, incitari possunt ipsa artium admiratione, si admoneantur, deinde si accedat artifex, qui commode tradat. Ideo spero aliquorum studia commoveri posse.*

* In *Astronomia Kepleriana defensa atque promota*, c. 1. p. 23.

maticos (liceat mihi denuo HOROCII verbis † uti) *tam perfrieta frontis, ut absurdas quasvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris premium brevissimo inanis gloriae statu intumescant & inter inconditos plaudentium strepitus placide sibi adulentur*; multo minus ita dibuccinare laudes suas, ut apud alios merito nullam inveniant.

Agedum, ergo! quis est, qui Scientias mathematicas & rerum evidentia ac sublimitate, & demonstrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate ceteris omnibus longe superiores mentem perficere negare ausit? Qui mentis dotes ignorat; qui iudicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non distinguit; qui denique culmen perfectionum non prospicit, ad quod menti pervenire datum est. Tum demum, me iudice, ingenii acie pollebis, si non modo clara ab obscuris, distincta a confusis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus discernere valebis, sed & ipsemet fueris exactus & perspicuus in definiendo, solers & circumspectus in observando, ingeniosus & accuratus in experimentando, severus & acutus in iudicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonstrando, patiens & profundus in meditando, sagax & expeditus in inveniando. Sed quomodo, quæso, comparantur habitus tam præclari? Non nisi crebro exercitio. Multus ergo sis necesse est in notionibus evolvendis, in demonstrationibus concipiendis, in problematibus resolvendis, nec proletaria in meditando & inveniando collocanda est opera. Cum adeo disciplinas, quæ huic scopo convenient, præter mathematicas nullas noverint, qui

* * 2

Mathe.

† In *Prolegomen.* p. 8.

mathematicas & ceteras eadem diligentia pertractarunt; studium mathematicum ad acuendum iudicium apprime necessarium pronunciamus & sine eo ad solidam rerum cognitionem perveniri posse negamus. *

Equidem non ignoro, homines quosdam, cum sint in Mathesi hospites ac plane rudes; se jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus mathematicis optime, de aliis a Mathesi alienis pessime judicantes: veruntamen quod ad tam inconsiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores;) sane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, sibi rem cum Mathematico fuisse. Quid si Agrimensorem viderit, aut Architectum, aut Conspicillorum politorem, aut Instrumentorum fabrum, aut Virum, cui data est docendi quidem, sed non sciendi Mathesin potestas? Quis enim adeo insanus est, ut unumquemque censeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cæca eidem tribuit? Non insolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant Matheosos apprime peritum, quem Professores *Euclidis*, *Apollonii*, *Archimedis alterius* elogio etiam post fata mactant, idem tamen a Mathematicis summis, vere idoneis harum rerum arbitris, Matheosos imperitus appelletur. Enimvero etiamsi hoc demus, Artis nostræ oforem audivisse Mathematicum de rebus ad Mathesin non spectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim nisi judicaret qui ingenii

* MELANCHTHON, loc. cit. Si qui non totos se huic studio dedent, tamen his qd iudicia formanda --- opus est cognitione Elementorum Geometria. Idem paulo ante: Cum demonstrationes Geometria maxime sint illustres; nemo sine aliqua cognitione hujus artis perspicit, quæ sit vis demonstrationum, nemo sine ea erit artifex methodi.

ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo sapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret discrimen; nec concedendum erat, in Mathesi cum laude versatis res quaslibet profundius scrutari datum esse. Denique si vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad se non pertinentibus male judicasse; hinc saltem colliges, ipsum occasione ita ferente de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium *ἀγνομητρειούς* tantum non semper familiare, statuisse.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata sibi familiaria reddit, ceterarum quoque rerum cognitione animum inbuat, & criminationis loco habemus, si qui per malitiam affirmant, quod Mathematici gloriantur, penes se solos esse principia veritatis; sed quod Matheseos cultura reliquis studiis præmissa efficiat, ut alias disciplinas facilius, rectius & profundius percipere possis, ubi ad eas industriam atque assiduitatem attuleris, id vero est quod asseveramus. Nescio vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem sibi fidem haberi velint, quam iis, qui nisi experta non confitentur. Utinam tandem, qui Ecclesiæ ac Reipublicæ præsumunt, caverent ne ad cetera studia tractanda animum appellerent, nisi Mathematica cognitione imbuti, neque ullus dubito fore ut aliam Ecclesiæ, aliam Reipublicæ faciem contueremur †. Ut enim taceam, quæ a doctrina in Ecclesiam

* * 3 &

† MELANCHTHON, loc. cit. *Facient deserta & neglectæ Artes mathematicæ, multis jam seculis. Nam proxima atas (quidni & nostra?) juventutem ab hac vera Philosophia ad insulsum cavillationes abduxerat. Nunc, postquam hæc explosæ sunt e Scholis, annitendum erat, ut pura & nativæ Philosophia traderetur, quæ conduceret ad solidam doctrinam consequendam. Nam hæc nostra atas satis commonefacit nos, quantum opus sit Reipublicæ perfectæ doctrina, quia multi passim, tum inopia judicii, tum quia diserte explicare nihil possunt, sparserunt aut defendunt opiniones absurdas & confusaneas, ex quibus in Ecclesia magna certamina, magnæ dissensiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, nisi ad veram & eruditam studiorum rationem juvenus revocata fuerit.*

& Rempublicam redundant, emolumenta, plurimum refert, si, qui ob eruditionem utrique proficiuntur sint assidui, considerati, moderati & veritatis amantes, quos Mathematicos studium efficit, ubi ita tractetur, ut amplificet usum rationis.

Quotquot humanæ mentis vires cognoscere student earumque usum scrutari gestiunt, eos ad Mathematicam culturam invitamus. Ostendet Algebra atque Geometria sublimior, nihil esse tam abditum, quin detegatur: docebit Astronomia cum Geographia, nihil esse a sensibus hominum tam remotum, quin id satis distincte cognoscere & accurate dimetiri valeamus: testabitur Calculus astronomicus, quanta certitudine futura Cœli phænomena prædicere liceat, etsi Genius nullus motuum, quibus sidera feruntur, leges Astronomis revelaverit: Optica cum Astronomia discrimen inter repræsentationes rerum in intellectu & in imaginatione monstrabit: Arithmetica, Trigonometria & Analysis regulas generales suppeditabunt, quibus in inveniendis dirigatur intellectus & una cum sensibus compestatur imaginatio, ne meditationes turbet: Methodus denique mathematica rectum rationis usum manifestabit.

Quanta sit vis Mathematicam in Scientia naturali, ex Statica, Mechanica, Hydrostatica, Aerometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Astronomia & Geographia abunde perspicitur: quæ omnes argumenta quædam Physica solidius atque profundius pertractata exhibent, quam sine Mathematicis principiis fieri poterat. Nonne enim Physici est explicare motum, gravitationem corporum, proprietates aëris, Phænomena visus, structuram Universi, naturam &
pro.

proprietates corporum Mundi totalium? Quod si vero quæ de motu solidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydrostatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aëre in Aërometria, de visu in Optica, Catoptrica & Dioptrica, de corporibus Mundi totalibus eorumque motuum legibus in Astronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iisdem argumentis in Physicorum systematibus occurrunt, demtis præsertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus descripta sunt; quantum discriminis intercedat inter doctrinas physicas principiis mathematicis superstructas atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata quæ Mathematicorum opem adhuc desiderant, illicò constabit. Unde non miramur *Robertum BOYLIUM*, de Scientia naturali experimentando præclare meritum, ita scribentem: † *De Mathematica nonnihil tibi propositurus sum, eum inprimis in finem, ne forte (quod & mihi olim evenit) seducaris Philosophorum istorum modernorum autoritate, qui cum Physici objectum sit materia, mathematicas disciplinas, tanquam abstractis saltem quantitativis & figuris occupatas, studio naturali obesse magis, quam prodesse contendunt. Quamvis enim opinionem ipsius KEPLERI, trium Imperatorum Mathematici aliorumque Astronomorum recentium absurdam, hominibus persuadentem, quod Mathematica quempiam ad Studium naturale facilius absolvendum non omnino idoneum reddere possit, restabilire & defendere aliquando conatus fuerim; ingenue tamen confiteor, quod experimentis meis in specie Mechanicis,*

Mathe-

† In *Considerationibus circa utilitatem Philosophiæ naturalis experimentalis*, Exercitat. VI. §. 1. & 2. p. m. 483.

*Mathematica in Physica usum ingentem mihi demonstrantibus, sepe jam exoptarim, ut in Geometria theoriam & studium Algebrae speciosa, quam puer ferme addidici, majorem impendissem partem temporis & industria, quæ Planimetriae & Fortificatoria (de qua me integrum Tractatum scripsisse memini) aliisque practicis Mathematica partibus a me attributa fuit. Imo nec miramur ingenue profitentem: * Vereor, implorandam esse à Mathematicis lectoribus veniam pro iis rebus, quas, si in Mathesi magis pollerem, accuratius tractassem. Alibi nimirum ostendi †, tum demum in Scientia naturali ad certudinem seu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, si Mathesis ad Physicam applicetur.*

Nisi utilitates, quas Mathesis ad vitam affert, sponte sua occurrerent attentis; non modo Arithmeticae, Geometriae practicae, Architecturae, Mechanicae, Hydrostaticae, Hydraulicae usus in Oeconomia amplissimus facile ostendi, sed etiam evidenter demonstrari posset, maximam felicitatis humanae partem Mathesi superstructam: ut taceam comoda, quæ Mathesis præstat absolutis studiis Academicis in exteris regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, si in illa fuerint hospites ac peregrini.

Cum adeo disciplinarum mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, desiderari adhuc Matheseos universæ Elementa, quæ ad illas consequendum sufficerent; ante triennium idioma patrio Elementa Matheseos universæ publici

* In Præfat. ad *Nova Experimenta Physico-Mechanica de vi Aëris elastica.*

† In Præfat. ad *Elementa Aërometriæ*, A. 1709. seorsim edita.

blici juris feci, in quibus ea potissimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, adeoque theorias prætermisi, quarum non adeo manifestus est usus. Dum liber adhuc sub prælo sudabat, contigit ut multi eundem expeterent †: quo ipso adductus Bibliopola desiderabat, ut eundem in sermonem Latinum transfunderem. Hujus ego desiderio annuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo destinaveram, cum consultius mihi videretur, si theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus composito fieri par erat, ut Latinum scilicet etiam satisfaceret ad sublimiora tendentibus. Quæ igitur sermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt, novoque ordine digesta sunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus istiusmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod sex, minimum quinque per diem horas instituendæ juventuti Academicæ, cum in Mathesi, tum in Philosophia impendenda; varia obstacula alia impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum Bibliopola, qui aliquos jam sumptus in editionem fecerat, instabat ut opus cœptum perficerem; singulas fere propositiones typis describendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ essent, typothetis scilicet quotidie pensum semidiurnum a manu mea expectantibus. Quodsi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure displicent, ea nec mihi placere scias velim. Si totum displicet, ut meliora des hortor, gratum & mihi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce

Wolffii Elem. Mathes. Tom. I. *** utan-

† Elementa ista Germanica ab eo tempore jam quarta vice typis rescripta, & in compendium redacta, quod ter lucem adspexit.

utantur, quotquot ad solidam Mathematicum cognitionem, non sine operæ, sumptuum & temporis compendio adspirant, quamdiu desit magis fides. Theoretica & practica eadem industria exposui: Ex his unusquisque feligat, quæ ad palatum suum esse existimaverit: reliqua aliis, non sibi dicta putet. Indicem geminum subjunxi: quorum alter est rerum atque verborum, ut his Elementis etiam instar Lexici Mathematici uti possint, quorum studia eodem juvantur; alter Elementa *Euclidea* cum nostris confert, ut, quæ ex EUCLIDE passim citantur, etiam in nostris inveniri possint, nec *Euclideanis* habeant opus, qui nostra possident. Vale, Lector benevole, & his nostris utere. Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perspectivam, Trigonometriam Sphæricam, Astronomiam, Chronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum Bibliotheca Mathematica complectetur, propediem exspectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ, ipsis Calendis Octobris A. 1713.

PLATO apud *Theonem Smyrneum*, Cap. I. p. 20.

Adolescentibus eorumque ætati conveniunt Disciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipsa ad Philosophiam capeffendam idonea reddatur.

MONITUM



MONITUM AUTORIS DE EDITIONE NOVA.

NOvam horum Elementorum Editionem daturi operam dedimus, ut multo correctiora prodirent, multo etiam auctiora. Etenim in singulis disciplinis ea adjecimus, quæ adhuc desiderari posse videbantur & viam ad ulteriora sternunt : quo ipso contingit, ut disciplinæ nonnullæ novam plane formam adeptæ fuerint, & , quæ in Editione priorè per duos Tomos digesta fuerant, in hac posteriore quatuor Tomis complecti necesse fuerit. Ita in Tomo primo, qui nunc prodit, ut taceamus, quæ passim interspersa sunt, Arithmeticæ accesserunt Capita nonum & decimum integra, de fractionibus decimalibus & sexagesimalibus; Geometriæ Caput secundum partis posterioris de sectione & situ planorum; Trigonometriæ & Algebrae Problemata varia, quæ vel utilitate sese commendant, vel quædam inveniendi artificia continent per cetera nondum insinuata. Accessere etiam tum Geometriæ, tum Analyfi finitorum, tum Analyfi infinitorum figuræ novæ Tabulis æneis incisæ. Et quoniam Philosophiam certam ac utilem effecturi Mathematicum notitiam amplificamus, ut ad eam capessendam animi defæcati præparentur,

MUTINOM

*** 2

nuper-

nuperque in Opere Logico † methodum, quæ convenit doctrinæ solidæ, accuratius delineavimus, quam hactenus ab aliis factum fuerat, ac imprimis genuinam demonstrationum formam distincte exposuimus; ideo demonstrationes ita digessimus, ut exempla regulis ad amissim respondeant, & Elementa hæc manu assidua volventibus naturalis ratiocinandi modus sua veluti sponte sese insinuet, nascanturque in animo ideæ, quæ Logicæ præceptis respondent. Nulli igitur dubitamus fore, ut, qui in his Elementis attenta mente perlegendis fuerint assidui fructus eximios percipiant: id quod quemadmodum speramus, maxime optamus. Dabam Marburgi Cattorum, d. II. Martii A. 1730.

† Prodiit A. 1728. in 4°.



MONITUM



MONITUM AUTORIS

D E

EDITIONE NOVISSIMA.



ELEMENTA nostra Mathematicos universæ abunde sese commendarunt iis, qui brevi temporis spatio ac magno laboris compendio vel eos in Mathesi progressus facere decreverunt, ut ad præclara Summorum Mathematicorum inventa, quæ nostro ævo magno numero prostant & in dies augentur, pateret aditus. Quoniam vero in Editiones anteriores plurima irrepsert vitia typographica, nonnulla etiam, quæ festinanti calamo debentur; optandum omnino erat, ut correctæ extaret Editio, ne quid utilitati eorum decederet. Nemo ignorat, quam vastum sit illud reformandæ Philosophiæ opus, quod condere cœpimus. Ea jam sumus ætate, quippe in anno climacterico magno constituti, ut, si vel maxime Numen optimum vitam ac corporis animique vires diutissi-

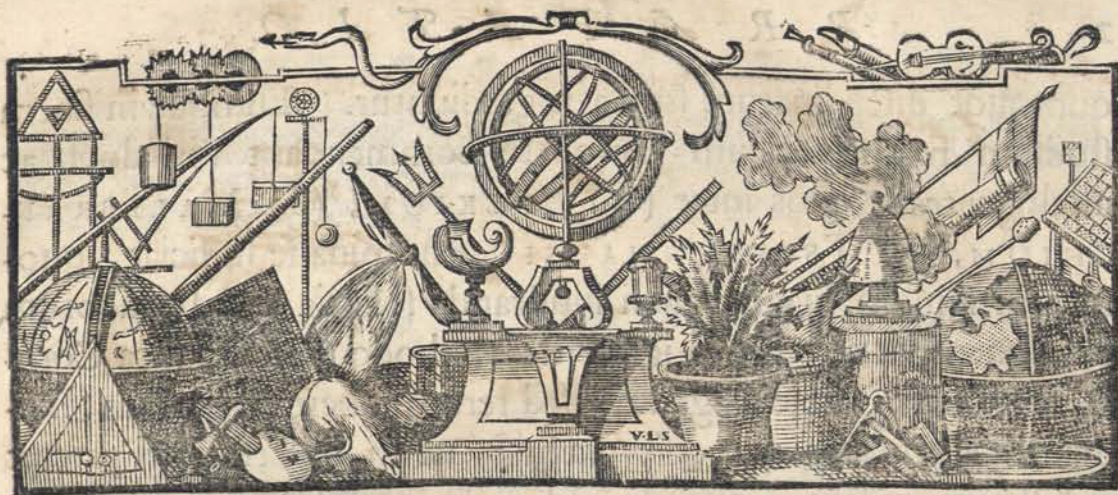
DE

me

me conservet, eidem tamen absolvendo non sufficere videatur residuum adhuc temporis spatium, præsertim cum minimam ejus partem isti labori impendere detur. Hortantur nos plurimi tam Exteri, quam Germani, ut tempus omne in Opere philosophico continuando consumamus, additis rationibus, quæ plurimum apud me valere debent. Nobis itaque concessum minime videbatur, ut correctam Elementorum Matheſeos Editionem daremus. Enimvero cum a primis, quod Græci ajunt, unguiculis statuerimus non nobis vivere, sed aliis, aliisque inserviando consumi; Elementa nostra revideri &, quæ irreperunt, errata emendare placuit, eorundemque Editorem hortati sumus ut correctionem typorum committeret Mathematicum perito & in iis corrigendis sedulo. Quodsi tamen nonnulla forsan adhuc attentionem nostram subterfugerint, ea Lector benevolus boni ac æqui consulat.



MONITUM DE



DE METHODO
 MATHEMATICA
 BREVIS COMMENTATIO.

P R Æ F A T I O.



Siquid mei iudicii est, operam non inanem sumit, qui Methodum Mathematicorum diligentissime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum potest, attendit & rationes evidentiae illorum funditus perspicit; verum ad alias etiam disciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorsus insigni, eandem transfert. Quodsi vero Mathesis non aliam, præter hanc unicam, cultoribus sui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

A

quot.

quotquot disciplinarum studia ingrediuntur. Eumque in finem studium mathematicum tantopere commendant Viri docti ac intelligentes, quos inter (a) LOCKIUM, (b) MALEBRANCHIUM, (c) TSCHIRNHAUSIUM nominasse sufficiat, quorum in Philosophia rationali illustranda solertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de Methodo mathematica Commentationem, mole exiguam, sed rerum ubertate gravem, Elementis Matheseos universæ præmisi, ne in iis desiderari paterer industriam meam, quorum ad recte philosophandum quam maxime necessaria est cognitio: (d) imprimis cum exiguus admodum sit eorum numerus, quibus interiora methodi sunt perspecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Cæterum hæc Commentatio de Methodo, singulari cum attentione perlegenda, & ubi Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa evolvuntur, præcepta methodi sunt relegenda; tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis satisfiat. Ita demum Matheseos studium vere acuet intellectum,

(a) In Tractatu *De directione ingenii* (qui inter *Opera posthuma* idiomate Anglico Londini 1706, edita habetur) p. 30.

(b) *De inquirenda veritate*, lib. 6. c. 6. & 7.

(c) In *Introductione ad Mathesin & Physicam* Germanice conscripta p. m. 17. & seqq.

(d) Uberius huc spectantia exposuimus in *Logica*, seu *Philosophia rationali*.

CONSPECTUS COMMENTATIONIS
DE
METHODO MATHEMATICA.

Methodus mathematica definitur §. 1, & ejus forma generaliter describitur §. 2. Hac ut specialius explicetur, docetur quid sint Definitiones §. 3, & harum gratia traditur explicatio Notionum, tum in genere §. 4, cum in specie clararum §. 6, obscurarum §. 7, distinctarum §. 8, confusarum §. 9, adequatarum §. 10, 11, & inadequatarum §. 12. Ostenditur, quanam notiones in numerum Definitionum admittantur §. 13, 14, 15. Definitiones dividuntur in nominales & reales §. 16, 17, 18. Exponuntur quatuor modi inveniendi Definitiones nominales §. 19, 20, 21, 22, & quatuor alii inveniendi reales §. 25, 26, 27, 28. Indicatur quomodo innotescat, quod definitiones tam nominales §. 23, 24, quam reales §. 29, possibiles sint. Declaratur indoles Axiomatum & Postulatorum §. 30, 31, 33, & abusus quidam notantur §. 32. Dissertitur quoque de Experientia §. 34, 35, 36, 37. Definitur Theorema §. 38, & distincte agitur de propositionis partibus, Thesi, atque Hypothesi §. 39, 40, 41, 42, & de Demonstratione §. 43, 45, 47; ubi etiam docetur usus citationum Mathematicis in demonstrationibus solennis §. 44. Similiter declaratur Problematum §. 48, Corollariorum §. 49, 50, Scholiorum §. 51, ratio. Afferitur Methodi mathematicæ universalitas §. 52, & ratio redditur, cur interdum Mathesis judicium acuere debeat §. 53, interdum minus §. 54. Denique respondetur ad objectiones, quæ contra Methodum mathematicam a nonnullis afferri solent §. 55, 56, 57.

DE METHODO MATHEMATICA
BREVIS COMMENTATIO.

§. 1. **P**ER *Methodum mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiantur autem Mathematici a Definitionibus: inde ad Axioma-

ta & Postulata; in Mathesi mixta, ad Experientias, seu Observationes, progrediuntur: his tandem Theoremata & Problemata superstruunt: ubique vero Corollaria & Scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur, & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente representationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus LEIBNITIUS (a): quæ quanti sit ponderis, pauci hætenus agnoverunt.

§. 6. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit; ex.gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obscura est notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est, ex.gr. plantæ, ad cuius conspectum dubitas, utrum ea sit, nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis: ex.gr. quod circulus sit figura, linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. 9. *Confusa est notio clara*, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est, ex.gr. notio coloris rubri.

§. 10. *Distincta notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris; ex.gr. notio circuli paulo ante tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se

redeuntis, puncti intermedii, distantia æqualis, & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analyfi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præfenti tamen non explicandos. Sufficit monuisse, quod notiones quædam confusæ admitti queant, quarum evolutio ad demonstrationes non apprime necessaria. Ita EUCLIDES non resolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi, & figurarum regularium ingrediatur. Propositiones enim, ad quarum demonstrationem necessaria erat, facile ipsi sine probatione concedi poterant; ex.gr. quod æqualia eidem tertio sint æqualia inter se; quod figuræ sibi mutuo congruentes sint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta sint æqualia, &c. Defectum scilicet analyseos suppleunt propositiones, quæ per experientiam satis certæ sunt.

§. 12. *Inadæquata est notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum Definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ, &, quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit, adæquata.

§. 14. Hinc in Definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde, satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia

(a) In *Actis Eruditorum*, An. 1684. P. 537.

obvia sit, necesse est, ut vel præsentem quandocunque libuerit percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est Quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesin, hoc est, modum quo fieri potest, exponens. Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Ad Definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, si ad rem præsentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Astronomis innotuit, Eclipsin Lunæ esse privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero distinguenda sunt quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim considerari, mox inter se conferri debent, ut Definitio notio distincta evadat, qualis (vi §. 13) esse debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo investigatas expendent, varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omissis generaliores evadunt. Ex. gr. Si ex definitione Trianguli quod sit spatium tribus lineis comprehensum, linearum numerus expungatur; notionem Figuræ habebis, quod sit spatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in Definitionibus obvias consideres, alias iis geminas comminisci datur: quæ ratione Definitiones aliæ inveniuntur. Ex. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem substitue, ut Definitio Figuræ quadrilateræ, aut multilateræ cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero (vi §. 20) determinationes quædam omitti, sic etiam novæ superaddi possunt. Ex. gr. in definitione trianguli, species & ratio linearum, quam inter se habent, determinari potest. Ponamus nimirum lineas esse rectas; generalis notio trianguli in notionem Trianguli rectilinei abit. Ponamus porro esse latera omnia inter se æqualia; notio trianguli generalis in notionem Trianguli æquilateri degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam posita. Quis enim, quæ actu existere cognoscit, utrum esse possint, nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ se percipere sibi conscius est: id quod valde absonum. Ex. gr. Si quis Lunam deficientem intuetur; quod Eclipsin pati possit, dubitare nequit. Idem de illis Definitionibus judicium esto, quæ a possibilibus abstrahuntur.

§. 24. Alia vero Definitionum, per methodum tertiam & quartam inventarum, est ratio. Utrobique enim arbitrium regnat; sive juxta tertiam, determinationes datas in alias similes con-

veritas; five, juxta quartam, datis alias superaddas: nostrum autem arbitrium nullam rebus existendi necessitatem imponit. Licet ex. gr. spatium tribus lineis rectis comprehendi possit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque, aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ spatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter se æquales esse possint. Tales itaque Definitiones possibiles esse demonstrandum est: id quod Geometræ circa figuras præstant, dum earum constructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales vel a priori inveniuntur, vel a posteriori innotescunt. A priori Definitiones reales investigabis, si ex plurium possibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam possibile producis; ex. gr. ex combinatione machinarum simplicium machinam quandam compositam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo casui persæpe aliquid datur. Exemplo est compositio telescopii, per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante BORELLO.

§. 26. Difficilius idem præstatur; si, ex data Definitione nominali, realis invenienda. Hoc enim in casu notiones distinctas eorum evolvere tenemur quæ in ista continentur; ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur: postea cognitiones jam ante acquisitas mente recolere debemus, visuri num talia succurrant, per quæ rei formationem concipere licet. Ex. gr.

datur in Astronomia Definitio nominalis Eclipsis Lunæ, quod scilicet sit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda est Definitio realis ejusdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi istud a Sole secundum lineas rectas in corpus lunare incidere, & tempore plenilunii ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hisce corporibus interpositam in locum Soli oppositum projicere umbram succurrit; haud difficulter innotescit, Eclipsin Lunæ oriri, si ea umbram Terræ ingrediatur.

§. 27. A posteriori Definitiones reales innotescunt, si rei formationi præsentibus attendimus. Ex. gr. Si quis videat in campo circulum describi, fane circa clavum fixum in gyrum acto; is genesin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad Definitiones reales quoque pervenitur, dum compositum totum in suas partes simplices resolvitur; quod in organicis potissimum locum habet. Hac ratione, ex. gr. structuram machinæ jam extantis assequimur.

§. 29. Circa hoc Definitionum genus duo consideranda sunt, antequam de illarum possibilitate judicare licet; nempe 1^o. utrum ea existant, aut existere possint, nec ne, quæ ad genesin rei concurrere assumimus; 2^o. num ab iis proficisci queant, quæ in formatione rei iisdem tribuimus; id quod ex natura Definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum vero certitudinem, vel experientia, vel eorum quæ per consequentias legitimas alio tempore deduximus, remi-

reminiscentia consequimur. Ita, ex. gr. in Definitione Circuli superius (§. 27.) tradita, per experientiam claret lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi posse. Ast, in Definitione Eclipsis lunaris, ratione, experientia licet stipata, assequimur Lunam Telluris umbram ingredi posse.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales, cum in se considerari, tum inter se conferri possunt. Quicquid ex consideratione eorum, quæ in una Definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, si quid rei convenire, aut non convenire enunciaret; *Postulatum* vero, si quid effici posse affirmet, vel neget. Ex. gr. Ex genesi Circuli, liquet omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter se æquales esse, cum unam eandemque lineam in diverso situ referant. Hæc adeo propositio in Axiomatum numero habetur. Ast dum per eandem Definitionem intelligitur, ex quovis puncto, quovis intervallo, circulum describi posse: id inter Postulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur Axiomatum & Postulatorum veritas per intuitum Definitionum, ex quibus fluunt, cognoscitur, demonstratione nulla indigent. Vera enim esse intelliguntur, quam primum realitas Definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *Propositiones per se notæ*, item *ex terminis manifesta* dicuntur.

§. 32. Multi hac Axiomatum proprietate abutuntur, dum præmissas syllogismorum, quas probare nesciunt, pro Axiomatibus venditant. Hinc vi-

deas in Axiomatum numerum referri propositiones, quas sine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non est ipsum EUCLIDEM, qui in demonstrando se virum præstitit, propositiones utique demonstrabiles in Axiomatum numerum retulisse, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ, aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in superioribus (§. 11.), ipsum non supposuisse nisi propositiones, quarum certitudo statim cuique patet, per recordationem vel maxime confusam eorum quæ olim sæpius experti sumus, aut etiamnum, si ita visum fuerit, denuo extemplo experiri possumus; immo quibus in iudicando tantum non quotidie utuntur omnes; quale ex. gr. est, quod eidem tertio æqualia sint æqualia inter se, item quod figuræ & lineæ rectæ sibi mutuo congruentes sint æquales. EUCLIDIS igitur exemplum abusum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri Axiomatum numerum, quo sufficientius notiones evolvuntur. Immo, si verum fateri fas est, vera Axiomata non sunt nisi propositiones identicæ.

§. 34. Cum Axiomatibus & Postulatis etiam *Experientia* nonnunquam confunduntur. Experiri autem dicimur, quicquid ad perceptiones nostras attentè cognoscimus: ex. gr. dum, accensa candela, conspicua fieri videmus quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque sunt rerum singularium, quoniam non nisi res singulares.

gulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans casum singularem in medium proferre tenetur, nisi vel sensui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Mathesi exactissime observatur. Neque enim, ex. gr. in Astronomia Solis orientis & occidentis Observationes recensentur; utpote quotidiana, ac omnibus satis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum Observationes, a diversis Astronomis, tempore diverso, diversisque instrumentis celebratæ, fideliter referuntur; cum non in cujusvis potestate existant.

§. 36. Mathematici quoque Experimentias a conclusionibus inde deductis accurate distinguunt; aliis ut plurimum has cum istis confundentibus. Ex. gr. quod, candela accensa, corpora, quæ ante non apparebant, in conspectum prodeant, per Experimentiam innotescit. Quod si vero perpendens, lumen in causa esse cur tenebris discuffis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo se habentium eundem esse effectum, infero; Quicquid lumine collustratur, videri potest: hæc propositio non in Experimentiarum, sed conclusionum per legitimam consequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Istiusmodi conclusiones, omiffis Experimentiis, commemorantur, si modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perspectus. Ex. gr. maximam Solis declinationem non immediate metimur, sed ex data elevatione æquatoris & altitudine meridiana Solis in solstitio invenimus. Pro-

prias igitur de ea observationes traditurus, non altitudinem Solis meridiana in solstitio observatam annotet opus est; sed sufficere potest, ut ipsam declinationem statim indicet. Si enim constet, quantam elevationem æquatoris assumerit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod si vero non appareat, quomodo propositio data ex prævia quadam Experimentia eliciatur; casus singularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari possit. Quod enim aliquid perceperis cum demonstrare nequeas; ut credatur jure poscis: sed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini subfit, ut fides deductis habeatur sine ratione flagitas.

§. 38. Propositio theoretica ex pluribus Definitionibus inter se collatis eruta *Theorema* appellatur. Ex. gr. Si, in Geometria, Triangulum cum Parallelogrammo super eadem basi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipsis eorundem Definitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis inferatur; Parallelogrammum esse Trianguli duplum: ea propositio in Theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem sunt, quæ in omni Theoremate attentionem merentur, *Propositio* nempe, atque *Demonstratio*. Ista quidem enunciatur, quid rei cuidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipsi convenire concipere valet.

§. 40.

§. 40. Absolute possibile non est nisi Ens a se: reliqua vero omnia tantum admissio alio possible esse intelliguntur, hoc est, nil eorum est sine quadam conditione. Hæc igitur in Propositione una exprimenda. E. gr. triangulum est dimidium parallelogrammi, si bases & altitudines fuerint figillatim æquales. In Propositione itaque, tam basium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet Propositio in *Hypothesin* & *Thesin* commode distinguitur; quarum ista conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur quod, vel affirmatur, vel negatur. Ex. gr. in Propositione allata, Hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super equali basi & ejusdem altitudinis existant*; Thesis autem, *illud hujus dimidium est*.

§. 41. Notandum vero, si in ipsa rei Definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, Hypothesin distincte non exprimi. Ex. gr. si tres in triangulo anguli 180 graduum dicantur; Hypothesi carere videtur Propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet Propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En Hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in Propositione affirmativa necessarius nexus inter Hypothesin atque Thesin; in negativa autem nullus concipi potest, sed hæc

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

illi repugnat. Quoniam scilicet in subiecto deprehenditur, quod Hypothesis involvit; ei quoque convenire debet, quod in Thesi continetur. E. gr. in hoc Theoremate, quod *triangulum sit dimidium parallelogrammi super eadem basi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus basin & altitudinem basi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein asserimus, quod sit parallelogrammi dimidium. Posterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter Thesin & Hypothesin in Propositionibus affirmativis, repugnantiam in negativis, *Demonstratio* manifestat. Eorum igitur Definitiones, quæ in Hypothesi ac Thesi continentur, eorundemque proprietates, ex istis derivatæ, aut aliunde cognitæ, Demonstrationum principia existunt. Quoniam vero in Mathesi principia non admittuntur, nisi quæ ante fuerunt evicta; Definitiones ac Propositiones, quibus Demonstrationes superstruuntur, citari solent; partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris constet, unde ipsorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes Definitionum, Axiomatum, Postulatum, Theorematum & Problematum non exiguum habent usum; nec sine ratione in Mathesi singulis cogitationum generibus singula nomina imponuntur. Demonstratio namque non convincit, nisi principiis demonstrandi extra dubitationis aleam positis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera supponenda sint, antequam

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

veritatis propositionis datæ convinci possis. Et quoniam Definitiones primi conceptus existunt, Axiomata vero ex iis immediate deducuntur, Theoremata vero, vel immediate, vel mediate, ex iisdem derivantur; ex nomine veritatis cujuslibet, ad quam in Demonstratione provocatur, statim addiscitur, utrum multa supponenda sint, nec ne, & quo ordine sit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem Definitionum, Axiomatum & Postulatorum, Theorematum & Problematum, dijudicandam peculiaribus artificiis opus sit; nomina veritatum citatarum simul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonstrandi persuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero est ratio ex principiis conclusiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis logicis, ubi de syllogismo agitur, dudum exposita. Sunt enim Demonstrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi syllogismorum concludantur, omissis saltem præmissis, quæ vel sponte meditati occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut sit Demonstratio, præmissæ syllogismorum novis syllogismis tamdiu probandæ sunt, donec perveniatur ad syllogismum, in quo præmissæ sunt, vel Definitiones, quas jam constat esse possibiles, vel Propositiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonstratu haud difficile foret, (a) genuinam Demonstrationem, quæ convictionem plena-

riam pariat, fieri non posse, nisi cogitationes nostræ juxta regulas syllogisticas dirigantur; his tamen ambagibus in præsentem opus non est. Cum enim de quæstione facti disputemus; exempla allegasse sufficit. Scilicet non ignotum est, CLAVIUM Demonstrationem Propositionis primæ Elementi primi EUCLIDIS in syllogismos resolvisse: immo HÆRLINUM atque DASIPODIUM sex priora Elementa EUCLIDIS & HENSCHIVM integram Arithmeticam per syllogismos in forma exhibitos demonstrasse.

§. 47. Equidem non ignoro esse, hac nostra præsertim ætate, non paucos qui sibi persuadent Demonstrationum mathematicarum formam a legibus syllogismorum abhorreere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; sed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, sed & attentione magis severa utentibus; quorum autoritas me permovet, ut eam in rem penitus inquirerem & sic præjudicium ex præcipitania in judicando ortum cognoscerem. Fatetur certe LEIBNITIUS (b), Vir in Mathesi & omni eruditione reliquissimus, *firmam esse demonstrationem, qua præscriptam a Logica formam servat.* Similiter Johannes WALLISIUS, Mathematicus profundus (c), agnoscit, *id, quod in Mathesi proponitur probandum, syllogismi unius pluriumve ope deduci.* Immo

(b) *Acta Erudit.* A. 1684, p. 541. Conf. *Essais de Theodicée* p. 37, 40, 41, 73. (c) *Operum Mathematicorum* Vol. 3, f. 180, hoc est *Logic. lib. 3, c. 22.*

(a) Ostendimus id in *Logica* §. 551, & seqq.

Immo ingeniosissimus etiam HUGENIUS (d) observavit, *paralogismos in Mathesi sæpius vitia forma existere*. Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus (e) pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum Virorum autoritas,) fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu scilicet in Mathesi versamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamus, ex quarum inspectione non minus quam ex aliarum propositionum citatione, multæ præmissæ syllogismorum suppleantur: ad quod si non satis attendatur, quam sancte in Demonstrationibus mathematicis leges syllogismorum custodiantur non apparet.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus constant, *Propositione* scilicet, *Resolutione*, ac *Demonstratione*. In Propositione, quid fieri debeat, indicatur. In Resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur quod erat faciendum. Denique in Demonstratione evincitur, factis iis, quæ Resolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque Problema demonstrandum, in Theorema convertitur, cujus Hypothesis Resolutio, Thesis vero Propositio constituit. Generalis enim omnium Problematum demonstrandorum (ut jam innuimus) tenor hic est; Factis iis quæ Resolutio præcipit, illud quoque efficitur quod erat faciendum. Quare non opus est, ut de Problematibus plura dicantur.

(d) *Acta Erudit. A. 1711. P. 477.*

(e) Vide eas in *Logica* §. 551, & seqq.

§. 49. Rationes subinde non desunt, cur ad casus speciales applicentur Propositiones generales, & ex quibusdam Propositiones sæpe alias prona consequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur Propositiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum Corollaridrum genus demonstratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in universum casibus demonstratum fuit, de hoc, vel isto, in specie ut denuo demonstraretur opus non est. Ex. gr. ubi de omnibus triangulis ostensum, tres angulos eorum una sumtos duobus rectis æquari; idem in specie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Ast alterum Corollariorum genus demonstrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis Propositionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. Ex. gr. Si theoremati, cujus modo mentionem feci, hoc Corollarium subjungatur; *in triangulo rectangulo unus saltem actu rectus angulus esse potest*: ratio illationis non negligenda, quod scilicet, positis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In *Scholiis* denique, tam Definitionibus, quam Propositionibus, earumque Corollariis, subjungi solitis, obscura declarantur, ad dubia responderetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, & si qua alia scitu nec injucunda nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. 52. Explicatam hæcenus methodum qui probe perpendit, ejus universalitatem haud dubie agnoscet; nec

diffitebitur sine ea ad solidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam posse. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo saepius *Geometrarum Methodus*, quia huc usque Mathematici ferè soli, in Geometria imprimis, ejus leges sanctè custodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis disciplinis applicare studuerunt; conatui tamen ipsorum eventus minime respondit. Etenim nunc notiones non satis evolverunt; nunc sine probatione assumerunt quæ maxime probari debebant; nunc per saltum ratiocinati sunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri possunt.

§. 53. Explicatæ Methodi legibus cum ex assè satisfiat, in Mathesi præsertim pura; non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant; hoc est, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognoscendam animum appellunt, accuratius, quam alii solent, judicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale Demonstrationum mathematicarum meditatio censerì debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex studio Matheseos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas, aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri solitas, addiscunt. Licet enim in vita communi utiles existant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia per §. *prac.* hæc non nisi a serâ Demonstrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Superest ut ad objectiones duas respondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre solent; præsertim cum satis prævideam non defuturos, qui easdem contra Elementa mea Matheseos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1^o. quod multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent. 2^o. quod ordinem, quo generaliora & simpliciora specialibus & compositis præponi necesse est, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco absolvant.

§. 56. Objectioni primæ ut satisfiat, explicandum est, quando Definitiones sint superflue, & quales esse debeant Propositiones ut probatione non indigeant: id quod ex fine Definitionum, atque indole Demonstrationum redditur manifestum. Definitiones nimirum hunc habent usum, ut vel subsequenti- bus aliis intelligendis inserviant, vel principia demonstrandi præbeant. Ostendant igitur adversarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, ullam dedisse Definitionem qua, nec ad subsequentes explicandas, nec in Propositionibus demonstrandis utuntur. Quamdiu vero exempla istiusmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere desinant, quod nimii sint in definiendo, & suum potius errorem agnoscant, quod Definitionibus non alium tribuant usum, nisi qui in rebus definitis agnoscendis & ab aliis distinguendis consistit. Diximus porro superius præmissas syllogismorum tamdiu conti-

nuan-

nuandas esse, donec ad Definitiones, quas jam constat esse possibles, & Propositiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur nisi Propositiones identicae, ac Experimentiæ claræ, in quibus Notiones primæ fundantur. Reliquæ Propositiones omnes sunt demonstrandæ. Ostendant igitur adversarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, Propositiones identicas, & Notiones in Experimentiis claris fundatas demonstrasse. Quamdiu vero hujusmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere desinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipsis videntur, & potius discant, quod in demonstrando nunquam nimis accurati esse

possimus; præsertim ubi extra Mathematicam versamur, nec, ut ibi, figuris ac characteribus in ratiocinando juvamus.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonstrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo sine in demonstrando accurati esse nequimus. Eo nimirum ordine singula proponenda sunt, quo unum ex altero facilius inferitur. Quare cum satis experiamur, id fieri minime posse, si in unum cumulum congerantur, quæ de subjecto eodem cognosci possunt; *Ordo scholæ* Philosophis vulgaribus relinquendus, & a Geometris aliisque, quibus res profundius meditari datum est, *Ordo naturæ* retinendus.



Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.



ELLEMEN
ELEMENTA

E L E M E N T A
A R I T H M E T I C Æ.

P R Æ F A T I O.



N ON dubito fore aliquos , qui mirabuntur
 quod Elementa Matheseos universæ conscri-
 bens MATHESIN UNIVERSALEM præ-
 termittam. Enimvero, quam perperam non-
 nulli Mathesin universalem appellant, eam ego
 ab ARITHMETICA diversam non agnosco.
 Quantitates enim, quarum affectiones & re-
 lationes in ea considerant, pro numeris indeterminatis habeo :
 quæ etiam ratio est, cur non aliæ ipsarum quam numerorum sint
 affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Mathesi universali vul-
 go tractari solent, ego in Arithmetica pertracto : quo rationum
 potissimum doctrina spectat. Calculum tamen numerorum
 indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare solent, non
 integrum trado, quia in demonstrationibus arithmeti-
 cis & geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANA-
 LYSI reservatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus so-
 lius demonstro, quia cum rigore demonstrandi, quem mihi ob-
 servandum proposui, ea demonstrandi ratio non subsistit; utpote
 in qua multa communiter sine probatione assumuntur, quæ &
 a Veteribus demonstrata, nec mihi sine probatione concedi
 posse visa sunt, ubi solidam doctrinam cordi habueris. Veram
 autem

autem *MATHESIN UNIVERSALEM* in desideratorum numero colloco; eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam mensuras convenientes præscribit: nec repertu adeo facilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda necessaria sunt; ea ad *Analysin* rejeci. Tyrones, sub initium, præses arithmeticas solas, cum definitionibus, sibi familiares reddere debent; theorematibus problematumque demonstrationibus omissis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent; ut non modo eorum sensum clare perspiciant, sed eadem quoque memoriæ firmiter infigant, quo in promptu sint, quoties iis, vel ad demonstrandum, vel ad inveniendum opus est. Iis intellectis, problematum demonstrationes expendere, ac his perceptis inoffenso pede ad theorematum demonstrationes progredi licebit. Absit autem, ut quis arbitretur omnibus calcandam esse hanc semitam. Quorum enim est major mentis acies, congenita vel aliis studiis acquisita, & facilius conservatur attentio; illi *Elementa* integra eo ordine perlegere possunt, quo conscripta sunt. *Usus Arithmeticæ* per disciplinas reliquas omnes se diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit, & ante eas cum cura addiscenda est. *Quantus Arithmeticæ* in vita civili usus sit, experientia loquitur: quantum in *Physicis* & aliis *Philosophiæ* partibus, experientur quotquot, *Mathesi* absoluta, solidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu possit, in ipsa pertractatione hinc inde annotavimus, & si quis culturam convenientem studio arithmetico non negaverit, experientia optima erit *Magistra*.

MOJUS

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Arithmeticae.

DEFINITIO I.

1. **A**RITHMETICA est Numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 junctim sumtis æqualis est.

SCHOLION.

2. Patet adeo, *Arithmetica* practicam esse methodum inveniendi specialem. Ab ea igitur, si rite meditemur, regulas inveniendi generales abstrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium consistit. Dederunt aliqua huc spectantia **CARTESIUS**, cum in *Tractatu De methodo*, tum in iis, quæ De ingenii directione inter posthuma habentur; & **R. P. MALEBRANCHIUS** in egregio opere De inquirenda veritate. Plura, quamvis paucis, nos damus infra (§. 125).

DEFINITIO II.

3. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat. Illustris **LEIBNITIUS** unum sic definit: Si A sit B, nec præterea D ponatur B, nisi A & D idem sint, ponetur B unum.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

DEFINITIO III.

4. *Unitas* est abstractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO IV.

5. *Unitates eadem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversa* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLION.

6. Ponamus ex. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium: erunt A & B unitates eadem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.

DEFINITIO V.

7. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum, D sit unum &c. nec tamen B, C, D &c. sint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura*, seu *Multa*.

DEFINITIO VI.

8. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

9. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis, dicetur A *Totum*; B vero, C, & D dicentur ejus *Partes*; & intuitu partis B, reliquas C, & D, &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

C

DEFI-

DEFINITIO VIII.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, Numerus dicitur.

SCHOLION I.

11. Nempe si pro unitate linea recta sumatur, numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in Geometria & Analyfi abunde patebit.

SCHOLION II.

12. Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros, cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales, comprehendere valeamus.

DEFINITIO IX.

13. Numerus determinatus est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. Indeterminatus est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque Quantitas.

SCHOLION.

14. In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quod si quis fueris, quanta ea sit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumit, & illius ad hanc relationem querit, ac pro diversa unitate assumpta per diversum numerum determinatam latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.

DEFINITIO X.

15. Æqualia sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. Inæqualia sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest; quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest;

alteri æquale est (§. 15); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 15): erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS I.

18. Signum æqualitatis est $=$.

SCHOLION.

19. Hoc signo primus usus est HARIOTUS Anglus (a), & hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum CARTESIO adhibent Signum sequens ∞ ; quidam etiam alia. Apud Autores HARIOTO antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.

DEFINITIO XI.

20. Majus est, cujus pars alteri toti æqualis est: Minus vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 16), & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 17); inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 20).

HYPOTHESIS II.

22. Signum majoritatis est $>$; minoritatis $<$.

SCHOLION.

23. Signis his itidem primus usus est HARIOTUS (b). Eum secuti Celeberrimus WALLISIUS (c) & R. P. LAMY (d). Aliis alia placent: plerisque nulla sunt.

DEFINITIO XII.

24. Similia sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. Dissimilia sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo Similitudo

(a) In *Artis Analytica praxi*, Sect. 1. f. 10.

(b) Loc. cit. (c) Vide *Arith.* c. 35. f. 186. Vol. II. Oper. Mathem. (d) *Element. Geometriæ* lib. 3. sect. 5. p. 177. Edit. Par. 1710.

militudo est identitas; Dissimilitudo diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

COROLLARIUM I.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero; modo sit istiusmodi ut sine alio assumpto intelligi possit.

COROLLARIUM II.

26. Cum quantitas sine alio assumpto per se non intelligi, sed tantum dari possit (§. 13, 14); Similia, salva similitudine, quantitate differre possunt (§. 25), atque adeo quantitas est discrimen internum similium.

SCHOLIUM.

27. *Similitudinis notionem distinctam primus eruit LEIBNITIUS. Dixit nempe Similia, quæ non possunt distingui, nisi per comparæntiam. Quoniam vero terminus comparæntiæ plerisque obscurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem substituere libuit. Ceterum res comparæntes fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, si in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorsus inter se similia esse. Illorum unum possideat Grachus; alterum Cajus. Quodsi Cajus in præsentia Grachi horologium suum depromat; næ is attonitus sibi persuadebit horologium suum esse, quod Cajus manu tenet; at diversum a suo agnoscet, ubi & suum depromit, hoc est horologium Caji a suo distinguit Grachus per comparæntiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed si locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia similia interjectum menti una cum ipsis exhibetur; vel si dimensiones templorum aut statuarum similia ad staturam nostram aut mensuram datam aliam referimus; similia animo comparæntia sistuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS III.

28. *Signum similitudinis est ∞.*

SCHOLIUM.

29. *Commendatur in Miscellaneis Bero-
linensibus (e). Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO XIII.

30. *Pars aliquota est, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. Pars vero aliquanta est, quæ repetita aliquoties semper vel major, vel minor est toto.*

DEFINITIO XIV.

31. *Commensurabilia sunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum est pars aliquota alterius. Incommensurabilia sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.*

DEFINITIO XV.

32. *Quantitates homogeneæ sunt; quarum una aliquoties sumpta alteram superare potest, seu quarum una ab altera vel semel, vel aliquoties ablata, tandem vel nihil, vel se minus relinquit. Heterogeneæ vero sunt, quarum una aliquoties sumpta alteram superare nequit.*

DEFINITIO XVI.

33. *Numerus numerans est, cujus unitas denotat ens in genere: Numerus vero numeratus est, cujus unitas denotat certam quandam entis speciem, vel genus quoddam determinatum.*

SCHOLIUM.

34. *Ex. gr. Si quis simpliciter dicat, sex; is non determinat, quamnam sint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur numero numerante. Contra si quis dixerit cum addito, sex globi aurei; is speciem entium de-*

C 2

termi-

(e) Part. 3. pag. 139.

terminat, quæ numerat, adeoque utitur numero numerato. Vocant nonnulli numerum numerantem abstractum; numeratum vero concretum.

DEFINITIO XVII.

35. Numeri inter se homogenei sunt, qui ad eandem; heterogenei, qui ad diversas unitates referuntur.

SCHOLION.

36. Hac divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem supponit (§. 10). Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus (§. 5). Ex. gr. ea globi proprietates est, qua ab aliis corporibus distinguitur, quod singula puncta superficiæ a centro æqualiter distent. Quodsi igitur hanc unitatis notam constituas; singula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, suntque unitates eadem, quatenus sub hac notione continentur (§. cit.). Quodsi vero globos porro distinguas, ex. gr. per materiam ex qua constant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos spectes; quæ antea eadem erant unitates, nunc diverse evadunt. Hinc tres globi aurei & sex globi aurei sunt numeri homogenei inter se; sed tres aurei & sex argentei sunt inter se heterogenei.

DEFINITIO XVIII.

37. Numerus integer est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XIX.

38. Numerus fractus est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO XX.

39. Numerus rationalis est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO XXI.

40. Numerus rationalis integer est; cujus pars aliquota est unitas.

DEFINITIO XXII.

41. Numerus rationalis fractus est, qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO XXIII.

42. Numerus rationalis mixtus est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

43. Numerus irrationalis, sive *sur-*
cus est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS IV.

44. Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una exprimatur.

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus est ad decem numeros rationales primos indig-
tandos, & præterea aliis, quibus decadam multitudo denotetur, & ita porro.

SCHOLION.

46. Lex numerandi, quam in Hypothesi tradimus, ubi vis (quantum constat) gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adsueverimus, indispensabilis necessitatis videtur. Enimvero non modo Erhardus WEIGELIUS in Arithmetica tetractyca ostendit, fieri quoque posse, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; sed & Illustris LEIBNITIUS (f) Arithmeticam binariam excogitavit, non nisi duabus notis 1 & 0 utentem, ac numerorum proprietatibus investigandis aptam: cujus aliquod specimen dedit Cl.

DANGI-

(f) Histoire de l'Académie Royale des Sciences, An. 1703. p. 175. & seqq. Edit. Amstel.

DANGICOURT circa progressionem arithmeticas (g). Nimirum quoniam Arithmetica dyadica duabus tantum notis utitur, leges progressionum numerorum dyadice expressorum facillime omnium deteguntur. Et CAROLUS XII, Rex Sueciæ, calculum sexagenarium excogitavit, referente Emanuele SUEDENBORGIO (h), novis characteribus & numeris, novisque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum satis versati.

DEFINITIO XXV.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt, *Unum, Duo, Tria, Quatuor, Quinque, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*. Idem numeri generali *Unitatum* nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur. Dicuntur etiam *Digitis*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *Viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadragesima*; quinque *Quinquagesima*; sex *Sexagesima*; septem *Septuagesima*; octo *Octoginta*; novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis *millionum Billio*; ex mille millenariis *billionum Trillio* &c. Denarius, ejusque quævis multiplica, dicuntur *Articuli*.

SCHOLIUM.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum, &c. utimur ad confusionem in numeris magnis evitandam, quorum distinctis notionibus formandis inserviunt.*

HYPOTHESIS V.

49. *Nota numerica constituentur no-*

(g) In *Miscellaneis Berolinens.* p. 336. & seqq.

(h) *Observat. miscellan.* part. 5. p. 1. & seqq.

vem sequentes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ut vero non solum unitates, sed & decades, centenarios, millenarios, &c. indigitare possimus, valor ipsis tribuatur localis; ita ut solitaria, vel in loco dextimo posita, unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra 0, quæ scilicet sit Nullitatis nota.

COROLLARIUM I.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiunt:

Unitates	} Simplicis.
Decades	
Centenarii	
Unitates	} Millenariorum.
Decades	
Centenarii	
Unitates	} Millionum.
Decades	
Centenarii	
Unitates	} Millenariorum Millionum.
Decades	
Centenarii	
Unitates	} Billionum.
Decades	
Centenarii	
Unitates	} Millenariorum Billionum.
Decades	
Centenarii	
Unitates	} Trillionum.
Decades	
Centenarii	
Unitates	} Millenariorum Trillionum &c.
Decades	
Centenarii	



SCHOLIUM I.

51. *Characterum arithmeticoꝝ electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt; ut inter alios docent Georgius HENISCHIVS in libello De numeratione multiplici, vetere & recenti, atque Guil. BEVEREGIVS in Arithmetica chronologica libro pri-*

mo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo sunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime absolvi potest. Quod autem notæ nunc usitate reliquis præsent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur subinde cyphræ, quamvis usitatus sit ut hoc nomen soli notæ nullitatis imponatur; quem morem nos sequimur. Ab Arabibus inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus WALLISIUS (i), quod ALSEPADI Arabs in Commentario ad TOGRAI poema Lamiat 'ol Ajam dictum, inventionis gloriam Indis tribuat. Idem refert (k), quod Saraceni eas in Hispaniam attulerint, & quod ex Hispania in Galliam pervenerint studio GERBERTI, monachi Floriacensis in Gallia, qui a variis dignitatibus Ecclesiasticis tandem ad Pontificatum maximum, nomine SYLVESTRI II, circa A. C. 999 evehctus, ex ipsis ejus Epistolis A. 1636 Parisiis recufis probat. Joannes Fridericus WEIDLERUS, Mathematicum apud Wittebergenses Professor clarissimus (l), ex MSC. BOETHII de Geometria, quod in Bibliotheca Academiae Altorfinae asservatur, & in quo Noster characteres numerorum arabicis similes expressos vidit, probare nititur, eos jam BOETHIO fuisse cognitos, quem A. C. 524 vitam finisse constat. WALLISIUS (m) non ignoravit, in BOETHII. BEDÆ, aliorumque antiquiorum editionibus figuras istiusmodi comparere; sed id in vetustioribus MSC. contigisse negat. Quamobrem cum WEIDLERUS MSC., cujus autoritate nititur, seculo quarto non junius existimet; criticorum est statuere, num tanta illius antiquitas admittenda sit.

SCHOLION II.

52. Ex collatione diversarum figurarum numeralium discant velim, qui Artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo

(i) Arithmet. Oper. c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math. (k) In Tract. De Algebr. c. 4. f. 11. & seqq. Vol. II. Oper. Mathem. (l) In Dissertatione De characteribus numerorum vulgaribus, & eorum atatibus, An. 1727. publice ventilata, §. 8. & seqq. p. 17. & 4eqq. (m) In Tract. De Algebr. loc. cit.

fitum sit, ut Ars characteristicæ perficiatur.

COROLLARIUM II.

53. Quodsi notis numericis substituantur litteræ ad arbitrium electæ, iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui solet (§. 49); numerum occulte scribere licet.

SCHOLION III.

54. Ex. gr. Denotent litteræ infra scriptæ in secunda serie eosdem numeros, quos designant notæ superiores supra scriptæ in prima.

I. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748 = aoci. Hoc artificio utuntur mercatores ad designanda mercium pretia in schedulis affixis.

PROBLEMA I.

55. Numerum scriptum enunciare; hoc est, cuilibet characteri valorem competentem assignare.

RESOLUTIO.

1. Numerus propositus per commata dividatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris factò.
2. Nota dextima classis tertiæ notctur lineola transversa apici adscribenda; dextima classis quintæ duabus; dextima septimæ tribus &c.
3. Comma solitarium per millenarios, lineola transversa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero sinistima classis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 50). Sic factum est, quod petebatur.

Ex. gr. Numerus sequens.

2⁰⁰, 125, 473⁰⁰, 613, 578⁰⁰, 432, 597
ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadrin-

quadringentis septuaginta tribus billionibus, sexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis septuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta septem.

SCHOLIION.

56. *Quantum conveniens terminorum usus in rebus distincte concipiendis, seu ex confusione extricandi, vires intellectus humani extendat; abunde perspicient oculatiores, si ad præsens Problema fuerint satis attenti.*

HYPOTHESIS VI.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLIION.

58. *Litteris majoribus usus est VIETA (n): minores introduxit HARIOTUS (o), quem mox imitatus est CARTESIUS (p), & nunc sequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS VII.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola subscribitur. Eorum inferior, seu Denominator, indicat unitatem, seu totum in partes divisum; superior vero, seu Numerator, numerat partes in casu proposito datas. Ex. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita scribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam esse in tres partes æquales divisam; numerator 2 vero duas istiusmodi partes assignat.*

SCHOLIION.

60. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator subscribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam par-*

(*) In variis scriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur. (o) In *Artis Analytica praxi*. (p) In *Geometria*.

tem aliquotam cum unitate communem habeat fractus (S. 41).

DEFINITIO XXVI.

61. *Additio est inventio alicujus numeri, ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur Summandi; quæsitus autem Summa, vel Aggregatum.*

COROLLARIUM.

62. *Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis, & contra.*

HYPOTHESIS VIII.

63. *Signum additionis est +, quod per plus efferrit solet. Ita 3 + 4 denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciat, 3 plus 4.*

DEFINITIO XXVII.

64. *Subtractio est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus, qui subducitur, dicitur Subtrahendus; alter, a quo subtractio fit, Minuendus; qui denique invenitur, Differentia, a nonnullis Residuum.*

HYPOTHESIS IX.

65. *Signum subtractionis est —, quod per minus efferrit solet. Ex. gr. 7 - 3 denotat Differentiam inter 3 & 7, pronunciat, 7 minus 3.*

DEFINITIO XXVIII.

66. *Multiplicatio est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quoties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur Factores, item Efficientes; quæsitus Factum, item Productum. In specie, factorum alter, qui aliquoties sumitur,*

fumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat quoties ille sumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties sumto æqualis (§. 66), istiusmodi autem inventio non est nisi iterata additio (§. 62); multiplicatio est iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

68. *Signum multiplicationis est punctum unicum (.) inter factores duos medio loco positum, quod per multiplicatum effertur.* Ex. gr. 4. 3 denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9, factum, cujus factores sunt 7, 5 & 9. *Litteræ sine ullo signo junguntur.* Ex. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*; *bcd*, factum cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO XXIX.

69. *Divisio est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas quoties datorum unus in altero.* Numerus, qui dividi debet, *Dividendus*; alter, per quem fit divisio, *Divisor*; qui denique indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLIUM.

70. *In multiplicatione & divisione opus non est, ut numeri dati sint homogenei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur (§. 61, 64).* Cum enim in additione, ex duobus vel pluribus numeris componatur unus, tanquam ex partibus totum (§. 61, 9); omnes omnino summandi ad eandem unitatem referri (§. 10), consequenter homogenei inter se esse debent (§. 35). *Quoniam vero porro liquet summam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipsis unitatem referri; consequenter iisdem*

homogeneam esse (§. cit.); in subtractione vero numerus minuendus respondet summa, subtrahendus & residuus aggregandis seu summandis (§. 61, 64): ulterius patet, in subtractione etiam minuendum, subtrahendum, & residuum numeros inter se homogeneos esse debere. In multiplicatione contra, multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, sicut in divisione, divisor ad unitatem rationem dividendi ad quotum; adeoque opus non est, ut multiplicator multiplicando & facto, divisor dividendo & quoto sit homogeneus. Quodsi divisor consideretur tanquam pars dividendi; ex dictis constat divisorem esse dividendo homogeneum: sed tum quotus, qui indicat quoties pars ista ex suo toto auferri potest, nec dividendo, nec divisoris homogeneus. Singula suo loco clarius patebunt.

HYPOTHESIS XI.

71. *Signum divisionis sunt duo puncta (:), quæ per divisum efferrî solent.* Ex. gr. 8:4 denotat quotum ex divisione 8 per 4 emergentem. Similiter *a:b* est quotus ex divisione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO XXX.

72. *Numerus par est, qui bifariam sive per 2, dividi potest; ut 4, 12, 16.*

DEFINITIO XXXI.

73. *Numerus impar est, qui a pari unitate differt; ut 3 differt unitate a 2, item a 4.*

DEFINITIO XXXII.

74. *Numerus A metiri, vel juxta alios numerare dicitur numerum B, si cum ita dividit, ut quotus sit numerus integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota.* Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFI-

DEFINITIO XXXIII.

75. Numerus primus in se est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXXIV.

76. Numerus compositus est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXV.

77. Mensura numeri est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. Mensura maxima numeri est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXXVI.

78. Mensura communis duorum plurimumve numerorum est numerus, qui singulos sigillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. Maxima dicitur, si fuerit numerus maximus qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24; 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO XXXVII.

79. Numeri primi inter se sunt, qui nullam communem mensuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

DEFINITIO XXXVIII.

80. Numeri compositi inter se sunt, qui, præter unitatem, communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.

AXIOMA I.

81. Idem est æquale sibi met ipsi.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

SCHOLIUM.

82. Hujus axiomatis amplissimus est in *Analysi* usus.

AXIOMA II.

83. Quantitates homogeneæ aut æquales sunt, aut inæquales (§. 15).

THEOREMA I.

84. Totum est majus qualibet sua parte.

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis est; id ipsum altero majus est (§. 20). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc est, sibi ipsi æqualis est (§. 81). Ergo totum qualibet sua parte majus est.

SCHOLIUM.

85. En exemplum *analyseos perfectæ*! Continetur enim demonstratio *sylogismo*, cujus altera præmissa est definitio, altera vero propositio identica. Id vero *analyseos perfectæ* indicium est (§. 45, de Meth.) Ne tyrones *Logica*, qui propositiones oblique universales ignorant, nec regulæ *Logicorum* de tribus *sylogismi* terminis vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonstrationem applicare libet. Sit itaque linea AB totum, li- Fig. 1.
nea AC ejus pars; demonstrandum erit, lineam AB esse majorem linea AC: id quod fit sequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis est, illa linea altera major est (§. 20). Sed lineæ AB pars [nempe AC] alteri lineæ AC toti [nempe sibi met ipsi] æqualis est. Ergo linea AB linea AC major [nempe totum AB parte AC majus] est. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA II.

86. Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.

DEMONSTRATIO.

Cum idem sit æquale sibi met ipsi (§. 81); quod idem est cum partibus totius simul sumtis, id iisdem æquale est.

D

Sed

Sed totum idem est cum omnibus partibus suis simul sumtis (§. 9) : ergo iisdem æquale est. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

87. *Quæ equalia sunt eidem tertio, vel equalibus equalia, ea sunt equalia inter se.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A=C$ & $B=C$; dico esse $A=B$. Quoniam enim $B=C$ per *hypotesim*, B salva quantitate substitui potest ipsi C (§. 15). Substituatur adeo B ipsi C in casu priore, ubi $A=C$: habebimus $A=B$. *Quod erat primum.*

2. Si jam porro sit $A=B$ & præterea $C=A$, $D=B$; dico esse $C=D$. Quoniam enim $A=B$ & $C=A$, per *hypotesim*, erit $B=C$, per *cas. 1.* Quare cum porro sit $D=B$, per *hypotesim*, erit quoque $C=D$, per *cas. 1.* *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

88. *Si equalibus (A & B) equalia (C & D) addas; aggregata ($A+C$ & $B+D$) sunt equalia.*

DEMONSTRATIO.

$A+C=A+C$ (§. 81). Sed quoniam $C=D$, per *hypotesim*, poterit D substitui pro C (§. 15): quo facto, habemus $A+C=A+D$. Porro $B+D=B+D$ (§. 81). Sed $A=B$, per *hypotesim*. Ergo A substitui potest pro B (§. 15): quo facto, habemus $B+D=A+D$. Quare $B+D=A+C$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

89. *Quod uno equalium majus vel*

minus est, etiam altero equalium majus vel minus est.

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A=B$ & $C > A$; dico esse $C > B$. Quoniam enim $C > A$, per *hypotesim*, A parti ipsius C æquale est (§. 20), quæ dicatur P . Porro cum sit $A=B$, per *hypotesim*, erit etiam $P=B$ (§. 87). Ergo $C > B$ (§. 20). *Quod erat unum.*

2. Sit $A=B$, & $C < A$, dico esse $C < B$. Quia $C < A$, per *hypotesim*, parti hujus æquale est (§. 20), cujus complementum ad totum dicatur P . Cum adeo sit $P+C=A$ (§. 86) & $A=B$, per *hypotesim*; erit quoque $P+C=B$ (§. 87). Est itaque C parti ipsius B æqualis (§. 9); consequenter $C < B$ (§. 20). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C), vel equalia addas; aggregatum prius ($B+C$) majus est, posterius vero ($A+C$) minus. Quod si majori (B) majus (C), & minori (A) minus (D) addas; aggregatum prius ($B+C$) majus est, posterius ($A+D$) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A > B$, per *hypotesim*, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9), quæ dicatur P , estque adeo $B=P+A$ (§. 86). Quare cum etiam sit $B+C=P+A+C$ (§. 88); erit $A+C$ pars ipsius $P+A+C$ (§. 9) & hinc $P+A+C > A+C$ (§. 84), consequenter $B+C > A+C$ (§. 89). *Quod erat unum.*

Quoniam $B > A$, per *hypotesim*, erit

$B+C$

$B+C > A+C$, per demonstrata. Similiter quia $C > D$, per hypothesim, erit $A+C > A+D$, per demonstrata. Ergo cum $A+D$ sit pars ipsius $A+C$ (§. 20); erit multo magis $B+C > A+D$ (§. 84). Quod erat alterum.

THEOREMA VII.

91. Si equalia (A & B) ab equalibus (C & D) subtrahas; quæ relinquantur ($C-A$ & $D-B$) equalia sunt.

DEMONSTRATIO.

$C-A=C-A$ (§. 81). Sed quoniam $A=B$, per hypothesim, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). Quod si ergo substituatur, habebimus $C-A=C-B$. Similiter $D-B=D-B$ (§. 81). Sed quia $C=D$, per hypothesim, salva quantitate C pro D substitui potest (§. 15). Quod si ergo substituatur, habebimus $D-B=C-B$. Quamobrem $C-A=D-B$ (§. 87).

THEOREMA VIII.

92. Si a majore (A) & minore (B) idem (C), vel equalia subtrahas; residuum prius ($A-C$) majus est, posterius ($B-C$) minus.

DEMONSTRATIO.

Quia $B < A$, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P . Itaque $A=P+B$ (§. 86), consequenter $A-C=P+B-C$ (§. 91). Sed $B-C$ est pars ipsius $P+B-C$ (§. 9), consequenter $P+B-C > B-C$ (§. 84). Ergo & $A-C > B-C$ (§. 89). Q. e. d.

THEOREMA IX.

93. Si equalia (A & B) per equalia (m & n) multiplicata; facta (mA & nB) equalia sunt.

DEMONSTRATIO.

Quia $A=B$, per hypothesim, erit etiam $A+A=B+B$, seu in genere $A+A+A+A$ &c. $=B+B+B+B$ &c. (§. 88). Jam cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67), si m & n fuerint multiplicatores, erit $A+A+A+A$ &c. $=mA$ (§. 67, 68). & $B+B+B+B$ &c. $=nB$ (§. cit.). Quare cum in eo casu, ubi $A+A+A+A$ &c. $=B+B+B+B$ &c. sit $m=n$; erit etiam $mA=nB$ (§. 87). Q. e. d.

THEOREMA X.

94. Si equalia (A & B) per equalia (C & D) dividas; quoti ($A:C$ & $B:D$) equalia sunt.

DEMONSTRATIO.

$A:C=A:C$ (§. 81). Sed quia $A=B$, per hypothesim, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). & sic $A:C=B:C$. Ob eandem rationem $B:D=B:D$. Quare $A:C=B:D$ (§. 87). Q. e. d.

SCHOLIUM.

95. Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum superfluum talia demonstrari, quorum casus singulares, in numeris præsertim rationalibus, per se evidentes videntur. Ego vero has demonstrationes maximi facio, tum quia prima & secunda (id quod supra §. 85 annotavimus) Analyseos perfectæ; tum quia reliquæ Calculi universalis idem animo ingenerant, in talium substitutione consistentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonstrando versetur (id quod hætenus fecerunt plerique omnes, qui extra Mathesin demonstrationes mathematicæ certitudinis dare conati sunt:) hic, si tandem in apicem produceretur, maximum foret intellectus humani subsidium.

CAPUT II.

De speciebus Arithmetica in numeris integris.

PROBLEMA II.

96. **N**umeros quocumque datos addere.

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei sub homogeneis scribantur, hoc est, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis, &c. respondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & summa earum ipsis subscribatur.
4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadem vero summa sub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata, habebitur summa quaesita.

Ex. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 3 & 4 sunt 7, additis 3578 A 8, prodeunt 15. Collocentur 5 sub 524 B unitatibus, & 1 decas connumeretur 63 C tur decadibus datis. Itaque 1 (sc. 4165 decas) & 6 (decades) sunt 7 (decades): additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (decades). Collocentur 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (centenarii) 6 &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (centenarii). Collocetur 1 sub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 (millenariis) datis, sum-

maque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quaesita 4165.

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum sunt partes eorundem (§. 50); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 9). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decanibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 86); adeoque summa eorundem est (§. 61). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

97. Unitates numerorum singulae tamdiu per digitos representantur & eorum ope additio absolvitur, donec memoriae infigatur, quinam numerus prodeat, si unitates quotlibet cuicumque numero addas, ex. gr. quod $3 + 2 = 5$, $9 + 5 = 14$ &c. Hoc modo talia natura docet.

COROLLARIUM I.

98. Quoniam seriei sinisteriori tot unitates accedunt, quot decades ex summatione in proxime dexteriore emergunt (§. 96); additio minore tædio absolvetur, si ex qualibet numerorum serie tot decades deleantur, quot ex iis colligi possunt, residuum infra lineam scribatur, & numerus decadem abjectarum seriei proxime sinisteriori connumeretur.

Ex. gr.

Ex. gr. Si numeri addendi fuerint A, B, C, ita procedendum : cum 7 & 3
 8763 A sint 10; residuus numerus 5 scri-
 5247 B batur infra lineam & 1 conu-
 2125 C meretur decadibus. Dic itaque
 ——— 6 & 4 sunt 10 ; 2 & 1 sunt 3.
 16135 Scribe 3 infra lineam & 1 repon-
 ne in locum centenariorum.

Quoniam vero 7 & 2 sunt 9, porro 9 & 1 sunt 10; adde 1 seriei millenariorum & residuum 1 scribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 sunt 10 millenarii, seu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero sunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadam millenariorum.

SCHOLIION II.

99. Modus hic addendi est maxime naturalis (§. 49) : nec absimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex serie nimirum speciei minoris toties colligitur valor speciei proxime majoris, quoties fieri potest, & pro unoquoque unitas reponitur in serie proxime majore. Ex. gr. sint expense :

Januarii	45 thal.	16 gross.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6

erit summa 415 5 9
 Cum enim 12 nummi conficiant grossum, in serie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9, valor grossi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur seriei grossorum. Similiter quoniam thalerus 24 grossis constat, in serie grossorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco grossorum reponuntur & 3 thaleri connumerantur. Reliqua ut in Corollario aut Problemate peraguntur.

COROLLARIUM II.

100. Si omnes numeri dati unitatum

instar considerentur, evidens est inter summandum tot novenarios omitti, quot unitates ex summa seriei dexterioris in sinisteriorem transferuntur. Sic, in exemplo Problematis, loco *quindecim* sub unitatibus scribimus 5, sub decadibus 1, quorum numerorum instar unitatum consideratorum summa est 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadam una rejicitur decas. Similiter si summa unitatum *viginti septem*, sub unitatibus collocamus 7, sub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadam in locum decadam rejiciuntur. Hinc solvitur

PROBLEMA III.

101. *Examinare additionem ; hoc est, explorare, utrum numerus inventus sit aequalis omnibus datis simul sumtis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex serie qualibet dexteriore in proxime sinisteriorem rejiciuntur, & operatione absoluta addantur, ut numerus novenariorum inter summandum omissorum innotescat (§. 100).
2. Abjiciatur praterea ex summa inventa novenarius, quoties fieri potest, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter summandum omissorum : quæ summa una cum numero residuo, si quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris summandis, qui omnes tanquam unitates spectantur, novenarius abjiciatur, quoties

ties fieri potest, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero residuo, si quis fuerit, denuo notetur.

Quod si enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis simul sumtis (§. 91), consequenter additio rite peracta (§. 61). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. in exemplo Problematis 2, inter summandum 3 novenarii omittuntur, & ex summa reperta unus adhuc deleri potest: quo facto, relinquuntur 7. Sed si ex numeris summandis 4 novenarii abjiciantur, 7 similiter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLIUM.

102. *Discrimen inter Demonstrationem & Examen haud obscurum est. Illa evincit per regulas præscriptas inveniri debere numerum quasitum; hoc docet regulas ad casum singularem rite fuisse applicatas. Unde apparet Examini utilitas, frustra obnitente RAMO (a), qui Demonstrationem cum Examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex summa quam aggregandis, notis singulis instar digitorum consideratis, abjiciatur novenarius, & ex residui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum Examen tum fallere possit, quando error novenarium vel ejus multipulum adæquat; ideo aliquantisper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia sunt Examina, etsi non omnes errores detegant, modo iisdem sese non subducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA IV.

103. *Numerum minorem e majore subtrahere.*

RESOLUTIO.

I. Numerus minor ea lege majori describatur, ut homogenei homoge-

(a) In Schol. *Mathem.* lib. 4. pag. 114.

neis respondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. 96).

2. Sub numerus hifce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur sigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & residua singula loco conveniente infra lineam scribantur, nempe residuum unitatum sub unitatibus, decadem sub decadibus, &c.
4. Quod si nota major e minore veniat subtrahenda, ex sinistro loca in dexteriore transferatur unitas, quæ (§. 50) hic 10 valebit, ut subtractio fieri queat. Numerus vero unitate multatus puncto notetur, ne ipsum multatum esse obliviscamur.
5. Si in loco sinistro cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime sequente mutuatur, puncto propterea notando, ut ipsum unitate minutum esse constet. Unitas vero illa in locum dexteriore translata decadis valorem tuebitur (§. 50). Quamobrem ubi plures cyphræ sese insequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutantur, & numerus minor, a quo subtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore subtrahere licet.

Ex. gr. Si ex 98.0.0.4.0.34.59
subtrahas 4743865263

Differentia est 5056538196

Dentis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates

tates infra lineam scribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus, & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 subducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde si 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, residui fiunt millenarii 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam si 8 ex 3 subtrahere debes, ab 8 sinisterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem subtractio facillime absolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, si unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris, ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris subducas, *vi operationis*, hoc est, si singulas partes numeri minoris a singulis partibus majoris subtrahas (§. 50). Sed singulæ partes numeri minoris simul sumtæ sunt numero minori, & partes singulæ majoris simul sumtæ sunt majori æquales (§. 86). Ergo idem relinqui debet numerus, si totum numerum minorem e toto majore subtrahas (§. 91). *Q. e. d.*

SCHOLIUM I.

104. Si numeri heterogenei fuerint a se invicem subtrahendi; unitas mutuo petita non 10, sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.

Ex. gr. 45. thal. 16. gr. 6. num.

27 23 9

17 thal. 16 gr. 9 num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 subtrahi nequeant, ex 16 grossis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 grossi ex residuis 15 auferri nequeant, ex 45 thaleris unus ablati in 24 grossos convertitur: unde si subtrahantur 23, residuus est 1 grossus 15 addendus, ut residui loco ponantur 16 grossi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLIUM II.

105. Quodsi numerus major e minore subtrahi jubeatur, evidens est id fieri non posse. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur signo —. Ex. gr. Si quis 8 thaleros solvere debet, atque 3 non nisi possidet: tribus solutis, 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.

PROBLEMA V.

106. Examinare subtractionem.

RESOLUTIO.

Residuo addatur subtrahendus (§. 96). Quodsi enim summa fuerit æqualis minuendo; subtractio rite peracta (§. 64).

Ex. gr. 9800403459	Minuendus.
4743865263	Subtrahend.
5056538196	Differentia.

9800403459

ALITER.

Quoniam in Subtractione residuum cum subtrahendo æquatur minuendo (§. 64); si minuendus sumatur pro aggregato, residuum cum subtrahendo pro aggregandis (§. 61); examen per novenarium succedet ut in additione (§. 101).

PROBLEMA VI.

107. Examinare additionem per subtractionem.

I. Describantur in continua serie multiplica

pla septenarii centenario inferiora, nempe 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, continua septenarii additione invenienda. Est enim $7 + 7 = 14$, $14 + 7 = 21$, &c.

2. In exemplo ad examinandum proposito, veluti

$$\begin{array}{r} 8259 \\ 2687 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 566 \\ 8259 \\ 526 \\ 2687 \\ \hline 3425 \\ 10946 \end{array}$$

sumantur in aggregato binæ notæ finitimæ 10 & cum multiplis septenarii conferantur.

3. Multiplum proxime inferius, aut ipse septenarius, veluti in nostro casu, ab istis notis subtrahatur & residuum 3 iisdem superscribatur.
4. Juncta huic residuo 3 nota proxime sequente 9, numerus inde resultans 39 conferatur ut ante cum septenarii multiplis; & proxime minori 35 inde subducto, residuum 4 supra scribatur.
5. Hæc operatio continuetur, donec residuum ultimum 5 super nota dextima obtineatur.
6. Singulæ aggregandorum series 2687 & 8259 eodem modo tractentur.
7. Residua super notis dextimis 6 & 6 addantur, & a summa 12 septenarius, vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodsi residuum fuerit idem cum residuo super nota dextima aggregati, velut in nostro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO.

Ad operationem attento manifestum est, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla septupli, ex. gr. in nostro casu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum sit aggregandis æquale (§. 61), omnia quoque ista multipla junctim sumta utrobique æqualia esse debent (§. 86, 87). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; residua omnino æqualia sint necesse est (§. 91). Quare si contingat, inæqualia residua fieri; id indicio erit, si examen rite institutum, errorem in operatione admissum fuisse. *Q. e. d.*

ALITER.

1. Colligantur sigillatim in unam summam singulæ series verticales, quibus constant numeri summandi, initio facto a sinistra & progrediendo versus dextram, & quidem descendendo (§. 96).
2. Summæ partiales subtrahantur a notis summæ, quæ singulis seriebus respondent (§. 103).

Quodsi in loco dextimo, qui est unitatum, relinquatur cyphra, additio rite peracta.

Ex. gr. Sit exemplum additionis

ABCD

3579

8462

5376

17417

1210

Collectis in unam summam notis in serie A, 16 subducatur ex 17, & residua 1 scribatur

batur sub 7. Similiter summa notarum in serie B 12 auferatur ex 14, residuo 2 sub 4 scripto. Summa notarum in serie C 20 tollatur ex 21 & residuum 1 ponatur sub 1. Denique si summa seriei D 17 ex 17 subtrahatur, relinquitur 0: quod indicio est, numerum 17417 esse summam quæsitam.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione patet, a millenariis summæ subtrahi omnes millenarios summatorum, & a centenariis, decadibus, unitatibus summæ omnes centenarios, decades, unitates summatorum. Quod si ergo operatione absoluta nihil relinquitur, summa tot præcise millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri summandi simul sumti continent, atque adeo summa numeris summandis simul sumtis æqualis est (§. 87); consequenter additio rite peracta (§. 61).

SCHOLIUM.

108. Examen primum adhuc procedere, si loco septenarii numerus alius sumatur ipsa Demonstratio insinuat. Solent etiam, examinis loco, additionem iterare, sed diversa ratione, ita ut una vice ascendendo, altera vero descendendo summatio perficiatur; factò tamen in utraque operatione initio a dextra & progrediendo versus sinistram.

PROBLEMA VII.

109. Abacum Pythagoricum, hoc est, Tabulam construere, in qua facta ex singulis digitis in singulos representantur.

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus singula in 9 partes æquales dividantur & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

2. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur novem notæ numericæ, seu singuli digiti.

3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur sub 4.

4. Addantur 2 & 6; aggregatum 8 ponatur sub 6; & ita porro.

4. Quod si hæc additio per reliquos digitos eadem lege continetur, Abacus Pythagoricus constructur. Q. e. f.

ABACUS PYTHAGORICUS.								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLIUM.

110. Abacum Pythagoricum memoria mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut dividis.

PROBLEMA VIII.

111. Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.

RESOLUTIO.

1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (§. 96).
2. Ducatur sub iis linea recta.
3. Infra hanc ex Abaco Pythagorico scribantur singula producía ex singulis

E

gulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris; similiter ex illis in reliquas hujus notas; ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime finisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenarium &c. scribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. 96). Dico aggregatum esse factum quaesitum.

Ex. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando
38476 scripto, duc 5 in 6, cum-
35 que factum, vi Abaci Pytha-

gorici, sit 30, scribe 0 sub
192380 5 & 3 decades annu-
115428 facto ex 5 in 7, quod est
35. Additis itaque 3 ad 35,

1346660 prodeunt 38. Pone 8 jux-
ta 0 versus sinistram & facto

ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annu-
numera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habeatur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quaeratur factum ex multiplicando in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci Pythagorici, primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 50), adeo-

que multiplicandum ipsum (§. 9), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multiplicantis unitatem, &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est (§. 61), adeoque multiplicandum toties continet, quoties singulae multiplicatoris notae, hoc est, partes (§. 50), consequenter totus multiplicator (§. 9) unitatem continet. Est igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 66).

Q. e. d.

SCHOLIION.

112. Si factoribus cyphrae adhæreant, producto invento eadem adjunguntur, ut ex sequentibus exemplis manifestum.

$$\begin{array}{r} 3578 \qquad \qquad 4760 \\ \underline{\qquad 30 \qquad \qquad} \qquad \underline{\qquad 2000} \\ 107340 \qquad \qquad 9520000 \end{array}$$

PROBLEMA IX.

113. Lamellas Neperianas parare, quarum ope multiplicationem ac divisionem facilius absolvere licet, quam per Abacum Pythagoricum.

RESOLUTIO.

1. Ex orichalco, ligno, aut charta compacta, parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula divisæ, quæ per diagonales denuo in duo triangula singula resolvantur. Fig. 2.
2. In illis quadratulis ea lege scribatur Tabula Pythagorica, ut notæ solitariae, aut dextræ, triangulum dextrum, notæ autem sinistrae sinistrum cedat. Sic factum est, quod petebatur.

SCHO-

SCHOLIION.

114. *Has lamellas sub initium seculi superioris invenit Joannes NEPERUS, Baro Merchistonii, Scotus, & peculiari libello descripsit, cui Rhabdologiæ nomen imposuit.*

PROBLEMA X.

115. *Multiplicare numerum datum per datum alium, lamellarum Neperianarum ope.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita dispone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextram multiplicatoris notam, &
4. Ipsi respondententes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exscribe, ut in unam summam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exscribe numeros reliquis multiplicatoris notis respondententes & decenter infra factores (§. 111) scribe.
6. Tandem ut ante (§. 111) facta hæc partialia in unam summam collige. *Sic f e. q. p.*

Fig. 3. Ex. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextrimæ multiplicatoris notæ 7 respondet, exscribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo versus sinistram proxime sequente 9 & 5 adde & summæ 14 notam dextram scribe juxta 6, sed 1 connumerata 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggrega-

5987
937

41846
17934
53802

5601386

tum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; sinistram vero itidem 1 adde notæ 3 in sinistro triangulo deprehensæ. Summam 4 si 1846 a sinistris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquis multiplicatoris notas 3 & 9.

PROBLEMA XI.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque, sine Abaci Pythagorici subsidio, multiplicare.*

RESOLUTIO.

Omne artificium huc redit, ut ex simplo, duplo, & decuplo, per additionem, subtractionem, & mediationem, singula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet sibimetipsi additus producit sui *duplum*. Addatur huic simplum, summa est numeri dati *triplum*. Duplum addatur sibimetipsi, aggregatum est numeri dati *quadruplum*. Mediatur decuplum, hoc est, ipse numerus datus cyphra auctus (§. 112), prodibit *quintuplum*. Quintuplo addatur simplum, vel duplum, habebitur *sextuplum*, vel *septuplum*. Ex decuplo subtrahatur duplum, vel simplum, residuum erit *octuplum*, vel *noncuplum*. Sine Abaci itaque Pythagorici subsidio multiplicaturo familiaris sit sequens a Jobo LUDOLFFO, in Academia Erfordiensis nuper Mathematicum Professore, in Arithmetica primum introducta

NOMENCLATURA.

- | | |
|----------------|---|
| 1. Simplum. | 1 <i>Simplum.</i> |
| 2. Duplum. | 1 + 1 <i>Simplum & simplum.</i> |
| 3. Triplum. | 2 + 1 <i>Duplum & simplum.</i> |
| 4. Quadruplum. | 2 + 2 <i>Dupli duplum.</i> |
| 5. Quintuplum. | $\frac{10}{2}$ <i>Decupli dimidium.</i> |
| 6. Sextuplum. | $\frac{10}{2} + 1$ <i>Decupli dimidium & simplum.</i> |
| 7. Septuplum. | $\frac{10}{2} + 2$ <i>Decupli dimidium & duplum.</i> |
| 8. Octuplum. | 10 - 2 <i>Decuplum sine duplo.</i> |
| 9. Noncuplum. | 10 - 1 <i>Decuplum sine simplio.</i> |

Ex. gr. 3894.

Simplum	Duplum	Triplum
3894	3894	3894
	3894	7788
	7788	11682
Quadruplum	Quintuplum	Sextuplum
7788		3894
7788	38940	19470
15576	19470	23364
Sextuplum	Octuplum	Noncuplum
7788	38940	38940
19470	7788	3894
27258	31152	35046

Si multiplicator ex pluribus notis constet, infra lineam scribatur multiplicandi duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla ejus erui possint, quæ desiderantur. Sub ducta igitur altera linea scri-

bantur more consueto (§. III) multiplicandi multipla.

37896 A Ex. gr. Sit multiplicans
 6874 6874, multiplicandus A

 75792 B 37896. Infra lineam scri-
 189480 C batur B ipsius A duplum
 ----- & porro C decupli ipsius
 151584 D A dimidium. Reperies er-
 265272 E go 1°. D ipsius A quadru-
 303168 F plum, sumendo duplum
 227376 G ipsius B; 2°. E septuplum
 ----- ipsius A, addendo B & C;
 260497104 3°. F octuplum ipsius A,
 B subducendo a decuplo ipsius A, hoc est ex A
 cyphra aucto; 4°. denique G, addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis constet, sæpius ex productis jam inventis, per additionem vel subtractionem, inveniri possunt quæ adhuc desiderantur; nec tum *Nomenclaturæ* propositæ strictè inhærendum, ita ut non opus sit infra lineam demum scribi duplum multiplicandi & decupli ejusdem dimidium.

895765482 } Ex. gr. fit multiplicans
 743) ----- } 743. Factum facillime
 1791530964 } invenietur, si multipli-
 3583061928 } cando subscribatur 1°
 6270358374 } duplum, 2° dupli du-
 ----- } plum, 3° summa ex
 665553753126 } simplio, duplo & dupli
 ----- } duplo, & tria hæc mul-
 tipla multiplicando addantur.

Similiter si multiplicans fuerit 789, sub multiplicando scribitur decuplum sine simplio, quod est 8061889338 noncuplum. Ex eo 7166123856 si denuo auferatur 6270358374 simplum, relinquitur octuplum. Quod 706758965298 si & ab hoc simplum subducas, residuum erit septuplum.

PRO-

PROBLEMA XII.

117. Numerum datum per alium minorem dividere.

RESOLUTIO.

Casus I. Si divisor unica fuerit nota:

1. Scribatur is sub nota dividendi finissima, aut, si ea minor fuerit sub proxime sequente, ac ope Abaci *Pythagorici* investigetur, quoties in nota vel notis superscriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram versus post lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in divisorem & productum ex nota vel notis superscriptis dividendi subtrahatur, & his deletis, si quod fuerit residuum, superscribatur.
3. Divisor ad notam subsequenter versus dexteram promoveatur, & ope Abaci *Pythagorici* denuo investigetur, quoties is in notis superscriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodsi hæc operatio per singulas dividendi notas continetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, divisor 3.

Ponantur 3 sub 7, & per Abacum *Pythagoricum* innotescit 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 post lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc est 6, subtrahatur ex 7 lineola transversa delendis, residua unitas superscribatur. Promoveatur divisor 3 sub 8, cumque, vi Abaci *Pythagorici*, 3 in 18 sexies contineatur, scribantur 6 loco quoti & factum 18

* 22
7856
3333

(2618 $\frac{2}{3}$

ex 3 in 6 ex 18 subducatur: quo in casu nihil relinquitur. Quodsi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet: id quod indicio est, numerum propositum in tres partes æquales exacte dividi non posse.

DEMONSTRATIO.

Ex ipsa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties divisor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc est, in singulis ejus partibus (§. 50), adeoque in toto dividendo (§. 9) contineatur, consequenter unitatem toties continet, quoties dividendus divisorem. Est igitur quotus (§. 69). *Q. e. d.*

Casus II. Si divisor ex notis pluribus constet.

1. Sinistima ejus nota scribatur sub nota finissima dividendi & reliquæ dexteriores sub proxime sequentibus versus dexteram.
2. Ope Abaci *Pythagorici* investigetur, quoties prima divisoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in divisorem integrum & dispiciatur, utrum factum ex numeris superscriptis subtrahi possit, nec ne.
4. Si subtractio fieri queat, scribatur is loco quoti post lunulam & subtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus subtractio fit, lineola transversa deleantur, & qui residui fuerint, superscribantur. Quodsi vero subtractio non succedat, loco quoti sumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum

E 3

tum

tum ex eo in divisorem ad notas dividendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.

5. Divisor loco uno versus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.

6. Hæc operatio continuetur, donec divisor ulterius promoveri nequeat.

Sic f. e. q. p.

Ex. gr. Sit dividendus 7856, divisor 32.

Scribantur 32 sub 78 & inquiretur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in ea contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 subtrahi potest, 2 scribantur post lunulam &, subtractione

peracta residuisque 14 superscriptis, divisor loco uno promoveatur. Quo facto investigetur quoties 3 in 14 contineantur, & factum ex 4 in 32, hoc est 128, subducatur ex 145, residuo 17 superscripto & 4 in loco quoti post lunulam repositis. Promoveatur divisor denuo loco uno & quærat, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in divisorem 32, nempe 160 subtrahatur ex 176, residuo 16 ut ante superscripto. Dico numerum inventum $246\frac{16}{32}$ esse quotum quæsitum.

Si divisor ex pluribus præsertim constet notis, præstat multipla quoti subtrahenda sub notis dividendi, ex quibus subtractio fieri debet, immediate scribi & sub subtrahendo residuum, cui continuandæ divisionis gratia jungitur nota dividendi sequens, donec nulla superfuerit, adeoque divisio absoluta.

Ex. gr. Sit dividendus 385797, divisor 8672,

quem tibi sub loco quoti notabis. Jam cum 8 in 38 quater contineatur, scribe divisoris 8672 quadruplum sub notis dividendi 38579, & residuum 3891 sub eodem, juncta eidem nota sequente 7, ut divisio continuari possit. Quoniam itaque divisor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum divisoris ut ante sub iisdem ponitur & ex ipsis auferitur. Erit $44\frac{4229}{8672}$ quotus.

Quoniam itaque divisor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum divisoris ut ante sub iisdem ponitur & ex ipsis auferitur. Erit $44\frac{4229}{8672}$ quotus.

DEMONSTRATIO.

Eadem fere est demonstratio, quæ in casu primo, hoc unice notato, quod, cum ex Abaco *Pythagorico* constare nequeat quoties divisor integer in notis dividendi superscriptis contineatur, interea supponatur toties illum in his contineri, quoties finistima divisoris nota continetur in finistima aut duabus finistimis dividendi notis. Licet enim hæc suppositio subinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox instituitur, cum factum ex divisore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pseudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLIUM.

118. Equidem hæc methodus tediousa videtur, quod raro verus quotus prima statim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod instituentium, cogitationum celeritati parere in exercitatis.

PROBLEMA XIII.

119. Divisionem per lamellas Neperianas absolvere.

RE-

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita dispone, ut in fronte referant divisorem.
2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.
3. Sub divisore descende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, disquiritur, aut numerus ipsis proxime minor ex dividendo subtrahendus.
4. Numerus in lamella unitatum respondens scribatur loco quoti.
5. Quodsi eadem ratione partes quoti reliquas investigates, divisio tota absolvetur.

Fig. 3. Ex. gr. Sit dividendus 5601386, divisor 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineatur 5978; sub divisore descendendo in infima serie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc subtrahitur, & in lamella unitatum respondens 9 loco quoti scribitur. Residuo 2211 jungitur nota dividendi sequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipsi in lamella unitatum respondens 3 scribatur loco quoti, & subtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

5601386	(937
53802..	
22118.	
17934.	
41846	
41846	
00000	

ma serie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc subtrahitur, & in lamella unitatum respondens 9 loco quoti scribitur. Residuo 2211 jungitur nota dividendi sequens 8, cumque ut ante

per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipsi in lamella unitatum respondens 3 scribatur loco quoti, & subtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

PROBLEMA XIV.

120. Sine Abaci Pythagorici subsidio, numerum datum dividere per alium datum.

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more con-

- sueti jungatur lunula & infra locum quoti ducatur linea recta.
2. Infra hanc lineam scribatur divisor, ejus duplum & decupli dimidium five quintuplum: quibus numeris a dextris 1, 2, & 5 adscribi oportet. Inde nimirum quodcunque divisoris multipulum (§. 116) elicitur.
3. Tot dividendi notæ, quot divisor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innotescet.
4. Is more solito post lunulam scribatur, ipsi vero respondens multipulum divisoris sub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his subducatur.
5. Residuo adjungatur nota dividendi proxime sequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodsi hæc operatio continuetur, sine Abaci Pythagorici subsidio quotus eruetur. Q. e. f.

Ex. gr. Sit dividendus 385724615, divisor 175. Scribantur numeri dati cum 385724615 (2204140 divisoris multipulis, ut hic

385724615	(2204140
350	
357	175 1
350	350 2
724	875 5
700	
2.46	
175	
711	
700	
115	

factum esse apparet. Cum multiplis divisoris compara 385 & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit; scribe 2 loco quoti & 350 subduc ex 385. Residuo 35 junge notam dividen-

videndi proxime sequentem 7 & 357 de-
nuo compara cum divisoris multiplis.
Quoniam vero denuo duplum 350 quam
proxime accedit, idem ex 357 subtrahe &
quoti loco rursus scribe 2. Residuo 7 junge
notam subsequenter 2. Quia dividendus
72 est divisore 175 minor, quotus erit 0.
Junge numero 72 notam dividendi 4, &
cum 724 inter duplum 350 atque quintu-
plum 875 cadant, ipsique dupli duplum,
hoc est quadruplum divisoris, 700, quam
proxime conveniat, quotus erit hoc in casu
4. Quodsi hac ratione operationem con-
tinuare libuerit, reperietur quotus integer
2204140 & residuum erit 115.

SCHOLIUM.

121. *Hæc dividendi methodus & meditan-
di difficultatem & errandi facilitatem tollit,
cui obnoxia est altera in Problemate duodeci-
mo exposita. Quamvis igitur eam serio com-
mendem, nolim tamen ut Abacus Pythagoricus
prorsus rejiciatur, quoniam subinde casus oc-
currunt, in quibus eodem minus commode ca-
remus. Fractionum reductio ad minores termi-
nos inter alia assertum nostrum confirma-
bit.*

PROBLEMA XV.

122. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplican-
dum, quotus erit multiplicans; aut
factum dividatur per multiplicantem,
quotus erit multiplicandus, si multipli-
catio rite fuerit peracta.

38476) 1346660 (35 Ex. gr. Si
115428 multiplicandus
38476, multi-
192380 plicator 35;
192380 factum est
1346660 (§.
000000 III). Si vero
1346660 per
38476 dividas, quotus est 35.

ALITER.

1. Abjiciatur ex multiplicando 857
novenarius, quoties fieri potest.
2. Residuum 2 ducatur in multiplica-
torem 4, si novenario minor fuerit,
& ex facto, ubi novenarium supera-
verit, abjiciatur itidem novenarius,
quoties fieri potest, noteturque re-
siduum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam
novenarius, quoties datur.
Quodsi residuum 8 idem fuerit cum
facto anteriore, aut ejus residuo; ope-
ratio rite peracta.
4. Si multiplicator fuerit novenario
major, residuum in multiplicando
ducatur non in ipsum multiplicato-
rem, sed in id, quod abjectis nove-
nariis relinquitur.

Ex. gr. Si multiplicandus 857, multiplica-
tor 65; factum erit 55705.
857
65

4285
5142

55705
Abjectis novenariis, in fac-
to relinquitur 4, in multi-
plicando 2, in multipli-
catore itidem 2: quorum
residuorum factum cum sit
4, id indicio est multipli-
cationem rite fuisse peractam.

DEMONSTRATIO.

Cum multiplicatio sit iterata ejusdem
numeri additio (§. 67), & factum qui-
dem summa, multiplicandus toties ite-
ratus quot multiplicator unitates ha-
bet numeris aggregandis respondeat
(§. 61, 66); ex facto & multiplicando
iterato abjiciendus est novenarius, quo-
ties fieri potest (§. 101). Quoniam
itaque novenario ex multiplicando
abjecto quoties datur, residuum
toties relinquitur quot multiplicator
unitates

unitates habet; evidens est, istud in multiplicatorem duci atque ex facto novenarium denuo exterminari debere quoties licet, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde est, sive residuum in multiplicatorem, sive multiplicator in residuum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207) independenter ab his demonstrabitur; per primum patet, etiam ex multiplicatore, si novenario major fuerit, novenarium toties exterminari debere quoties fieri potest, & residuum hoc ducendum esse in residuum ex multiplicando, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat alterum.*

SCHOLIION.

123. *Demonstratio majorem evidentiam nanciscitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunq; alia intelligendum.*

PROBLEMA XVI.

124. *Examinare divisionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.
2. Facto addatur, si quod a divisione fuerit residuum.

Quodsi hac ratione prodeat dividendus, divisio legitime peracta. (§. 212).

245	Ex. gr. Si 7856 dividas per 32,
32	quotus est 245, residuum 16.
490	Duc 245 in 32 & facto 7840
735	adde 16; habebis dividendum
7840	7856. Constat igitur divisio-
16	nem legitime fuisse peractam.

7856
Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

ALITER.

Cum, vi examinis prioris, dividendus sit factum ex divisore in quotum; examen quoque instituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex divisore & quoto, novenarium quoties datur, atque residuum in divisore multiplicando per residuum in quoto, & facto, quod inde emergit, addendo residuum ex divisione.

Ex. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem si tentetur in divisore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 residuum erit. Quodsi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur residuum ex divisione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur, ut in dividendo, residuum 8.

SCHOLIION GENERALE.

125. *Supereft ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in haftenus expositis operationibus arithmetiis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum alia imaginationem, alia intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum scriptura, linearum ac lunula ductu, notarum in divisione a subtractione peracta deletionem, &c. continentur. Scriptio numerorum varias suppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quosvis, quantumvis magnos & una varios, menti praesentes exhibet quamdiu libuerit, qui alias disparent cum vix eam subierint: quo ipso cogitationes a meditationibus alienae arcentur, domesticae autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum desiguntur. Hinc discimus*

1. Intellectum uti debere in meditando subsidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet casu particulari derivandis.

F

2. Qua

2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri potest, imaginationi præsentia fistenda esse: quod observasse in tyronibus quoque instituendis plurimum prodest, cum ad disciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum sint adsueta, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci aiunt) unguiculis familiarissimæ ipsis existant.

Ipsa vero hæc numerorum scriptio præstat, ut intellectus tum singula sigillatim meditari, tum singula cum singulis, prout commodum visum fuerit, conferre possit. Vide imprimis Cor. 1, Probl. 2, (§. 98), Probl. 4, (§. 103), Probl. 11, (§. 116), & Probl. 14, (§. 120.) Utrumque difficultates partim ex rerum meditando serie nimis longa enasci solitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet

3. Ad minuendam in meditando difficultatem, singula distincte imaginationi repræsentanda esse; ita ut objectum meditationis repræsentetur secundum omnes relationes datas, & tota totius repræsentatio ex partialibus singularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteristica* perficienda magni momenti esse, inferius in *Analyse* patebit. Eadem secundæ junctæ tyronum institutioni egregia suppeditat adjumenta. Insuper etiam confusæ cognitioni eorum, quæ sigillatim distincte cognita fuerunt: cujus usum *Demonstrationes geometricæ* inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate multiplicatis adjectum impediunt, ne eadem pro diversis aut diversa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipso docemur

4. Quæ sunt eadem in intellectu, ut eadem repræsentari debere imaginationi; quæ vero diversa sunt in intellectu, ut di-

versa quoque repræsentanda esse. Sunt eadem in intellectu, quæ sub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potissimum discavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati distinguuntur in varias classes, nempe in unitates, decades, centenarios, &c. & in hisce classibus singuli numeri singulis characteribus discernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæstio proposita in tot partes resolvenda, quot res diversæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & subtractio in singulis numerorum classibus sigillatim peragitur: nec minus, in multiplicatione ac divisione, facta & quoti particularia queruntur, ut inde componatur numerus quæsitus. Discimus adeo

2. Singula quæ in quæstione proposita involvuntur, esse sigillatim expendenda, & quæ inde deducta sunt, inter se conferenda.

In operationibus arithmetiis, vel ad notiones numerorum respicimus, vel eorum proprietates, ex. gr. ex Abaco Pythagorico, in memoriam nobis revocamus. Unde patet

3. Dum singula in se considerantur, vel notiones eorundem evolendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tempore cognitæ in memoriam revocandas esse.

Si divisor ex pluribus notis constet, ad facilitandum laborem assumitur integrum divisorem in omnibus dividendi notis superscriptis toties contineri, quoties nota divisoris prima in nota prima dividendi continetur. Sed cum hypothesis fallere queat, utrum quotus inventus sit verus nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem sit ingens, ex. gr. si in *Astronomia* multa admodum phænomena motus siderum dentur, qualis

qualis esse debeat rei natura, ex. gr. structura systematis mundani, ut quibusdam phaenomenis satisfiat, primo investigandum; dein ulterius disquirendum, utrum phaenomenis quoque reliquis satisfiat nec ne. Ita si contingat, nos in hypothesin falsam incidere, eam facilius emendare, quam ex simultanea omnium consideratione, prima statim vice, veram elicere licebit. Hæc regula in scientia naturali multum habet usum, non minus in inve- niendo, quam in aliorum hypothesibus dijudicandis.

Licet abunde constet per demonstrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum qua- situm inveniri; examina tamen non negligun- tur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberrasse. Docemur ergo

5. Consultum esse, ut dispiciamus, an ve- ritates a priori deductæ experientia respondeant.

Plura non addimus, cum hæc speciminis tan- tum loco in medium proferantur.

C A P U T III.

De Ratione ac Proportione Quantitatum.

DEFINITIO XXXIX.

126. **R**atio est ea homogeneous relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in specie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *Con- sequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION I.

127. EUCLIDES Rationem definit per habitu- dinem magnitudinum ejusdem generis se- cundum quantitatem. Sed hæc definitio incom- pleta: dantur enim & aliæ magnitudinum re- lationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis est sinus recti ad sinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit Vir summus LEIBNITIUS. Equidem & HOBBSIUS Definitionis Eu- clideæ correctionem tentavit (a); sed infel- liciter. Cum enim Rationem definiat per mag- nitudinis ad magnitudinem relationem; de-

finitio ejus non modo id vitii habet, quod Eu- clidea, quod scilicet relationis speciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod speciem magnitudinum non exprimat, quæ ra- tionem inter se habere possunt.

SCHOLION II.

128. Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad com- mensurabilia, sed etiam ad incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.

COROLLARIUM I.

129. Cum in fractionibus relatio nume- ratoris ad denominatorem sine tertio ho- mogeneo assumto intelligatur (§. 59); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

130. Si duæ quantitates inter se compa- rantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis depre- henditur (§. 83). Ratio itaque vel æqua- litatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

131. Si termini rationis fuerint inæqua-

(a) In Tractatu De principiis & ratiocinatione Geo- metrarum, c. XI. p. 22.

les, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 69).

COROLLARIUM IV.

132. Ceterum quia ratio per se intelligibilis (§. 126), iis discernendis infervire potest, quæ compræsentia non sunt (§. 27).

DEFINITIO XL.

133. Ratio majoris inæqualitatis est, quam habet majus ad minus, ex. gr. 6 ad 3. Ratio vero minoris inæqualitatis est, quam habet minus ad majus, ex. gr. 3 ad 6.

DEFINITIO XLI.

134. Ratio rationalis dicitur, quæ est ut unitas, vel numerus rationalis, ad numerum rationalem, ex. gr. ut 3 ad 4. Irrationalis vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLIUM.

135. Sint duæ quantitates A & B , sitque $A < B$. Si A & B toties subtrahas, quoties fieri poterit, ex. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo casu A erit ad B ut 1 ad 5, hoc est, A in B quinquies continetur, seu $A = \frac{1}{5} B$. Ratio ergo est rationalis. In casu posteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A , ex. gr. ter, itidemque ex B , ex. gr. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, seu $A = \frac{3}{7} B$, adeoque ratio denuo rationalis. Si posterius: ratio ipsius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc est, di-

ci nequit, quanta pars ipsius B sit A . Suo autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri possit, nec minus demonstrabitur, dari quantitates quæ rationem irrationalem habent. Hinc simul lumen affunditur Definitioni Rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, sine tertio homogeneo assumpto, ratio intelligi possit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique inest, utriusque mensura constituitur, vel, quod perinde est, minus, aut prædicta pars, pro unitate assumitur, & in casu priore majus, in posteriore majus & minus per numerot exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales esse suo loco constabit.

DEFINITIO XLII.

136. Exponentem rationis dico quatum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. Ex. gr. rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam Denominator, nec non Nomen rationis.

SCHOLIUM.

137. In Geometria demonstrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi possit linea, licet in numeris, vel rationalibus, vel irrationalibus, eundem exhibere non valeamus.

COROLLARIUM I.

138. Si consequens est unitas, antecedens ipse exponens rationis; ex. gr. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM II.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM III.

140. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 69).

COROL-

COROLLARIUM IV.

141. Rationes per exponentes discernuntur (§. 131, 136), atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A : B (§. 71).

DEFINITIO XLIII.

142. Si terminus minor est pars aliquota majoris, Ratio majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; Ratio vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3, &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$, &c. Ex. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO XLIV.

143. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; Ratio majoris inæqualitatis dicitur *superparticularis*, Ratio minoris inæqualitatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$, &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$, &c. Ex. gr. 3 ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO XLV.

144. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; Ratio majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*, Ratio minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superqua-*

dripartiens septimas, si $1\frac{6}{7}$, &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{7}{3}$; *subsupertripartiens quartas*, si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{11}$, &c. Ex. gr. 5 ad 3 est ratio superbipartiens tertias; sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XLVI.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; Ratio majoris inæqualitatis vocatur *multiplex superparticularis*; Ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$, &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{7}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{4}{13}$, &c. Ex. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO XLVII.

146. Denique si terminus major minorem aliquoties continet ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, Ratio majoris inæqualitatis dicitur *multiplex superpartiens*; Ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{6}{7}$, &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$, &c. Ex. gr. ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbipartiens tertias.

SCHOLIUM I.

147. En genera & species rationum rationalium, quarum quidem nomina apud Recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, ex. gr. pro dupla 2:1, pro sesquialtera 3:3;) non tamen ab eo ignorari possunt, qui scripta Mathematicorum evoluit. Ceterum jam CLAVIUS annotavit (a) exponentes rationis majoris inæqualitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inæqualitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, si denominatorem exponentis divides per numeratorem. Ex. gr. si exponens fuerit $\frac{5}{8}$; erit $8:5 = 1\frac{3}{5}$. Unde innotescit, rationem vocari subsupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hæcenus cogitavit.

SCHOLIUM II.

148. Nomina rationum rationalium facile memoriæ mandaturus, idemque perspecturus speciebus recensitis plures non dari, considerare debet, quorum ex divisione termini majoris per minorem emergentem, seu exponentem rationum majoris inæqualitatis, vel esse 1°. Numerum integrum, vel mixtum; hunc vero vel 2°. ex unitate & fractione, cujus numerator est unitas, vel 3°. ex unitate & fractione, cujus numerator est numerus, vel 4°. ex numero & fractione, cujus numerator est unitas, vel denique 5°. ex numero & fractione, cujus numerator numerus est, constare. Habemus ergo in casu primo rationes multiplices & submultiplices, in secundo superparticulares & subsuperparticulares, in tertio superpartientes & subsuperpartientes, in quarto multiplices superparticulares & submultiplices subsuperparticulares, in quinto denique multiplices superpartientes & submultiplices subsuperpartientes. Rationes minoris inæqualitatis per proprios quoque exponentes determinari possunt. Aut enim

(a) In Comment. ad Elem. V. EUCLIDIS. f. 179. Tom. 1^o Oper.

exponens 1°. est fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel simplum numeratoris, vel ejus multipulum denominatore minus. Si simplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel 2°. unitas est, vel 3°. unitate major. Similiter si multipulum numeratoris denominatore minus, differentia vel 4°. unitas est, vel 5°. unitate major. In casu primo ratio est submultiplex; in secundo subsuperparticularis; in tertio subsuperpartiens; in quarto submultiplex subsuperparticularis; in quinto submultiplex subsuperpartiens.

DEFINITIO XLVIII.

149. Rationes eadem sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes divisi dant exponentes æquales.

SCHOLIUM I.

150. Per hanc definitionem agnosci posse etiam identitatem rationum irrationalium patet ex Schol. Def. 42. (§. 137).

COROLLARIUM I.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis suum consequentem, vel quantam consequentis partem continet; toties antecedens alterius suum consequentem, vel tantam consequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in consequente suo continetur, toties antecedens alterius continetur in suo consequente (§. 131).

COROLLARIUM II.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit $A:B = C:D$, seu, in exemplo singulari, $8:4 = 30:15$. Et hoc modo identitatem rationum in posterum designabimus (§. 141).

SCHO-

SCHOLION II.

153. *Alii signis aliis utuntur. Communiter A. B : : C. D scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristica signa scientifica non-scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM III.

154. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§.141), in rationibus autem iisdem exponentes iisdem sint (§.149), rationes eadem sunt etiam similes (§.24), & contra.

DEFINITIO XLIX.

155. Rationum duarum identitas, vel similitudo, dicitur *Proportio*. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. Ex. gr. Si $A : B = C : D$, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO L.

156. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem est cum antecedente secundæ, ut si $3 : 6 = 6 : 12$: *Discreta* vero, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si $3 : 6 = 4 : 8$. In proportione continua *Terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 est medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius a S. VINCENTIO (a) considerat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, & Proportionalitatem vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argu-

(a) *Quadratura Circuli* lib. 8. f. 865.

mentandi in Geometria etiam a rationibus dissimilibus desumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.

DEFINITIO LI.

158. Rationum diversarum $A : B$ & $F : G$ *major* dicitur $A : B$, si fuerit $A : B > F : G$; *contra minor* $F : G$, si $F : G < A : B$. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. Ex. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam $6 : 2 (= 3) > 5 : 4 (= 1\frac{1}{4})$; sed 3 ad 6 minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO LII.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8 & 3 ad 12. In specie *dupplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similibus. Ita $48 : 3$ seu $16 : 1$ est ratio duplicata ipsarum $4 : 1$ & $12 : 3$. Unde simul intelligitur, quænam *ratio* dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata*. Nempe $4 : 1$ est ratio subduplicata ipsius $16 : 1$ vel $48 : 3$.

THEOREMA XI.

160. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commensurabilia sunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas (§. 40); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 41). Quæ igitur sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum, vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt (§. 31). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

161. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 69); si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commensurabilis unitati (§. 160), adeoque numerus rationalis (§. 39).

COROLLARIUM II.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviso (§. 134, 136); rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 161).

THEOREMA XII.

163. *Commensurabilia sunt inter se, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 31). Quod si adeo in casu priore quantitas minor, in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in priore quantitati majori, in

posteriore utriusque numerus rationalis integer (§. 40). Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer, ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 31). Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis existat (§. 39); ipsa non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

164. Commensurabilium ratio est rationalis; incommensurabilium irrationalis (§. 134).

SCHOLIUM.

165. *Dari quantitates incommensurabiles, in Geometria demonstrabitur.*

COROLLARIUM II.

166. Rationis commensurabilium exponens est numerus rationalis (§. 162).

THEOREMA XIII.

167. *Rationes A : B & C : D, similes eidem tertiæ F : G, sunt etiam similes inter se : & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiæ sunt

$$6 : 3 = 8 : 4 \text{ etiam eadem ei-}$$

$$10 : 5 = 8 : 4 \text{ dem tertiæ (§. 154).}$$

Quare cum sit Ergo $6 : 3 = 10 : 5$ $A : B = F : G$ & $C : D = F : G$ (§. 152); erit $A : B = C : D$ (§. 87); consequenter A ad B ut C ad D (§. 152). *Quod erat unum.*

Porro

Porro $A : B = C : D$, & $F : G = H : E$,
itemque $C : D = H : E$, per hypoth. Sed
 $A : B = H : E$, per demonstr. Ergo etiam
 $A : B = F : G$, per demonstr. Quod erat
alterum.

THEOREMA XIV.

168. Idem C ad equalia A & B , &
equalia A & B ad idem C , vel etiam
ad equalia C & D , eandem rationem ha-
bent.

DEMONSTRATIO.

$A = B$, per hypoth. Ergo $C : A = C : B$
(§. 71, 94); consequenter C ad A &
 B eandem rationem habet (§. 152).
Quod erat primum.

Similiter quia $A = B$, per hypoth. erit
 $A : C = B : C$ (§. 71, 94); consequen-
ter A & B ad C eandem rationem ha-
bent (§. 152). Quod erat secundum.

Sit denique $A = C$ & $B = D$, erit
 $A : B = C : D$ (§. 71, 94); consequen-
ter ratio utrobique eadem (§. 152).
Quod erat tertium.

THEOREMA XV.

169. Si fuerit $A : B = C : D$; erit
etiam invertendo $B : A = D : C$.

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per
 B emergens E , & quotus ex divisione
ipsius C per D emergens G ; erit B ad
 A ut unitas ad E , & D ad C ut eadem
unitas ad G (§. 69); consequenter $B : A$
 $= 1 : E$ & $B : C = 1 : G$ (§. 152).
Sed $A : B = C : D$, per hypoth. seu
 $E = G$ (§. 15). Ergo unitas eadem ad E
& G eandem rationem habet (§. 168);
consequenter $B : A = D : C$ (§. 167).
Q. e. d.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

THEOREMA XVI.

170. Partes similes P & p eandem
rationem habent ad tota T & t : si to-
ta ad partes eandem rationem habent,
partes sunt similes: & tota ad partes
similes eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

Habeat enim, si fieri potest, P ad T
aliam rationem quam p ad t ; partes p
& P per diversitatem rationis ad tota
se invicem distingui poterunt (§. 132):
Erunt adeo dissimiles (§. 24). Quod
cum sit absurdum, utpote contra hy-
pothesin; erit P ad T ut p ad t . Quod
erat unum.

Si $t : p = T : P$, per hypoth. erit $p : t$
 $= P : T$ (§. 169). Ergo, per demonstra-
ta, P & p sunt partes similes. Quod erat
alterum.

Si P & p sunt partes similes totorum
 T & t , erit $P : T = p : t$, per num. 1.
adeoque $T : P = t : p$ (§. 169), hoc est,
tota ad partes similes eandem rationem
habent.

THEOREMA XVII.

171. Partes similes P & p sunt in-
ter se ut tota T & t .

DEMONSTRATIO.

Cum totum sit idem cum partibus
suis simul sumtis (§. 9); quoties sumi-
tur totum, toties etiam sumitur pars
ejus quantalibet, ex. gr. quarta, vige-
sima, millesima, millionesima, aut quæ
rationem aliam quamcunque ad to-
tum habet. Quare si ponamus totum
minus t toties sumi, donec toti T
æquale fiat; quoties ipsum sumitur,
toties etiam sumenda ejus pars p ,
donec parti ipsius T simili, quæ est P ,
æqua-

G

æqua-

æqualis fiat. Toties itaque P continet p , quoties T ipsum t . Sunt ergo partes similes ut tota (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLIION.

172. Notandum est, numerum, qui indicat, quoties sumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non semper esse rationalem; sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent. Ex. gr. In Geometria demonstrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, toties sumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero est, si latus quadrati sit divisum in duas partes, quarum una est pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties sumi quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quarta diagonalis æqualis fiat.

THEOREMA XVIII.

173. Si $A : B = C : D$; erit etiam alternando seu permutando $A : C = B : D$.

DEMONSTRATIO.

- I. Si antecedentes A & C consequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 20), eæque similes (§. 170) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est antecedentes A & C eam inter se rationem habent quam consequentes B & D (§. 171).
- II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia $A : B = C : D$, per hypoth. erit $B : A = D : C$ (§. 169); consequenter $B : D = A : C$ per cas. 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

174. Ergo in divisione unitas ad divisionem ut quotus ad dividendum (§. 69).

COROLLARIUM II.

175. Si fuerit $A : B = C : D$, & $B = D$; erit etiam $A = C$. Est enim $A : C = B : D$ (§. 173). Sed $B = D$, per hypoth. Ergo $A = C$ (§. 149).

COROLLARIUM III.

176. Si fuerit $B : A = D : C$, & $B = D$; erit etiam $A = C$. Cum enim sit $A : B = C : D$ (§. 169); erit etiam $A = C$ (§. 175).

THEOREMA XIX.

177. Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia sunt.

DEMONSTRATIO.

$A : B = D : B$, per hypoth. Ergo $A : D = B : B$ (§. 173). Sed $B = B$ (§. 81). Quare $A = D$ (§. 149). Et idem eodem modo ostenditur, si $A : B = D : C$ & $B = C$. Quod erat unum.

Similiter $C : A = C : B$, per hypoth. Ergo $C : C = A : B$ (§. 173). Sed $C = C$ (§. 81). Quare $A = B$ (§. 149). Et idem eodem modo patet, si $C : A = D : B$ & $C = D$. Quod erat alterum.

THEOREMA XX.

178. Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplicet; facta D & E sunt inter se ut A & B.

DE-

DEMONSTRATIO.

6 12 Cum sit $1 : C = A :$
 $\frac{3}{18} \quad \frac{3}{36}$ $D \& 1 : C = B : E$ (§.
 66); erit $A : D = B :$
 $6 : 12 = 18 : 36$ E (§.167); consequen-
 ter $A : B = D : E$ (§.
 173). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

179. Cum C sit eadem quantitas in utroque casu, (per hypoth.) unitas quoque in utroque eadem est (§. 13); consequenter $1 : C$ eadem Ratio.

COROLLARIUM.

180. Ergo si $A > B$, etiam $AC > BC$ (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA XXI.

181. Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C divides; quoti F & G sunt inter se ut A & B .

DEMONSTRATIO.

3) $\frac{24 : 12}{8 : 4}$ Cum sit $1 : C = F :$
 $8 : 4 = 24 : 24$ $A \& 1 : C = G : B$
 (§.174); erit $F : A = G :$
 B (§.167); consequen-
 ter $F : G = A : B$ (§. 173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

182. Si $A > B$, etiam $F > G$ (§.149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia divides, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA XXII.

183. Si rationum similia $A : B$ & $C : D$ antecedentes vel consequentes per idem E divides; in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D ; in posteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

$3 : 6 = 12 : 24$ Quoniam $A : B$
 $\frac{3}{18} \quad \frac{3}{36}$ $= C : D$. per hypoth.
 $1 : 6 = 4 : 24$ erit $A : C = B : D$
 (§.173). Sed $A : E$
 $= F$, & $C : E = G$, per hypoth. Ergo
 $F : G = A : C$ (§. 181) $= B : D$
 (§. 167); consequenter $F : B = G : D$
 (§. 173). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam $A : B = C : D$ per hypoth. erit $A : C = B : D$ (§.173). Sed $B : E = H$, & $D : E = K$. per hypoth. Ergo $B : D = H : K$ (§. 181); consequenter $A : C = H : K$ (§. 167), & hinc tandem $A : H = C : K$ (§. 173). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

184. Si rationum similia $A : B$ & $C : D$ antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices; in casu priore facta AE & CE ad consequentes B & D ; in posteriore antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

$2 : 6 = 3 : 9$ Quia $A : B = C : D$,
 $\frac{6}{12} \quad \frac{6}{18}$ per hypoth. $A : C = B :$
 $12 : 6 = 18 : 9$ D (§. 173). Sed $EA :$
 $EC = A : C$ (§. 178).
 Ergo $EA : EC = B : D$ (§. 167); con-
 sequenter $EA : B = EC : D$ (§. 173).
Quod erat unum.

Eodem modo ostenditur, esse $A : BE = C : DE$, *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIV.

185. Si rationum similia $A : B$ & $C : D$ antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices aut divides; in casu priore facta, in posteriore

quoti

quoti eandem inter se rationem habent.

DEMONSTRATIO.

$3:6 = 12:24$ $A:B=C:D$, per
 $\frac{2}{3} \frac{6}{2} \frac{2}{3}$ *hypoth.* Ergo $EA:$
 $6:18 = 24:72$ $B=EC:D$ (§. 184),
 consequenter $EA:$
 $FB=EC:FD$ (§. cit.). Quod erat
unum.

$3:6 = 12:24$ Sit $A:E=G, B:F$
 $\frac{3}{1} \frac{2}{3} \frac{3}{2}$ $=H, C:E=K, & D:$
 $1:3 = 4:12$ $F=L$. Quoniam $A:B$
 $=C:D$, per *hypoth.*
 $G:B=K:D$ (§. 183). Ergo $G:H$
 $=K:L$ (§. cit.). Quod erat alterum.

THEOREMA XXV.

186. Pars antecedentis in ratione majore ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad consequentem suum. Et majus antecedente rationis minoris ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad suum consequentem.

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D; erit $A:B > C:D$ (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut minus quam A, hoc est, pars ipsius (§. 20), per B dividatur (§. 182): quæ pars si dicatur F, erit $F:B=C:D$, hoc est, in majore ratione, antecedentis pars eandem rationem habet ad consequentem, quam minoris antecedens ad suum (§. 152). Quod erat unum.

Similiter si A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit $A:B < C:D$ (§. 158). Ut igitur ratio

prior alteri æqualis evadat, necesse est ut majus quam A, cujus adeo pars est A (§. 20), per B dividatur (§. 182): quod si dicatur F, erit $F:B=C:D$, hoc est, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam majoris antecedens ad suum consequentem (§. 152). Quod erat alterum.

THEOREMA XXVI.

187. Si fuerint quotcumque rationes similes $A:B, C:D, E:F, G:H$, &c.; summa omnium antecedentium $A+C+E+G$, &c., est ad summam omnium consequentium $B+D+F+H$, &c., ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B.

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. esse $A=\frac{1}{2}B, C=\frac{1}{2}D, E=\frac{1}{2}F, G=\frac{1}{2}H$; erit $A+C+E+G=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}H$ (§. 88), hoc est summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium; consequenter ut antecedens unius rationis ad suum consequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, si alia quæcumque ratio antecedentium ad consequentes ponatur, vel etiam antecedentes sint consequentibus majores; patet propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVII.

188. Si fuerit ut totum $A+C$ ad totum $B+D$, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum $A+C$ ad totum $B+D$, vel ut ablatum C ad ablatum D.

DE-

DEMONSTRATIO.

24 : 12 Aut A : B = C : D, aut
 $\frac{6}{18} : \frac{3}{9}$ A : B > C : D, aut deni-
 que A : B < C : D (§. 21).
 Ponamus A : B > C : D.

Ergo pars ipsius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§. 186), hoc est, F : B = C : D (§. 152), consequenter F + C : B + D = C : D (§. 187). Quare cum etiam sit A + C : B + D = C : D, per hypoth. erit F + C = A + C (§. 177), adeoque F = A (§. 91). Sed F est pars ipsius A, per demonstrata. Pars igitur toti æqualis. Quod cum sit absurdum (§. 84), ut sit A : B > C : D fieri nequit.

Sit jam A : B < C : D. Ergo majus ipso A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186), hoc est, G : B = C : D (§. 152), consequenter G + C : B + D = C : D (§. 187). Quare cum etiam sit A + C : B + D = C : D, per hypoth. erit G + C = A + C (§. 177), adeoque G = A (§. 91). Sed A est pars ipsius G, per demonstrata. Ergo pars toti æqualis. Quod cum sit absurdum, ut sit A : B < C : D fieri nequit.

Quoniam itaque nec A : B > C : D, nec A : B < C : D, per demonstrata: erit utique A : B = C : D, consequenter A : B = A + C : B + D (§. 187). Q. e. d.

THEOREMA XXVIII.

189. In rationibus similibus A : B & C : D, differentia antecedentium A — C est ad differentiam consequentium B — D ut antecedens rationis utriuslibet ad suum consequentem.

DEMONSTRATIO.

Quoniam A : B = C : D per hypoth. erit A : C = B : D (§. 173). Ponamus A > C & B > D, erunt A & B tota, C & D eorum partes (§. 9, 20). Quamobrem cum sit A : B = C : D, per hypoth. erit A — C : B — D = A : B, vel = C : D (§. 188). Q. e. d.

THEOREMA XXIX.

190. Si fuerit ut antecedens prima rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam componendo, ut summa antecedentis & consequentis prima rationis ad antecedentem vel consequentem prima, ita summa antecedentis & consequentis secunda ad antecedentem vel consequentem secunda.

DEMONSTRATIO.

$\frac{4}{6} : \frac{2}{4} = \frac{10}{15} : \frac{5}{10}$ Si A : B = C : D
 per hypoth. erit A : C = B : D (§. 173).
 Sed A + B : C + D = A : C = B : D (§. 187). Ergo A + B : A = C + D : C; item A + B : B = C + D : D (§. 173). Q. e. d.

THEOREMA XXX.

191. Si fuerit A : B = a : b & A : C = a : c, &c. erit A : A + B + C = a : a + b + c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam A : B = a : b, & A : C = a : c per hypoth. erit A : a = B : b = C : c (§. 173, 167). Quare A : a = A + B + C : a + b + c (§. 187), & hinc A : A + B + C = a : a + b + c (§. 173). Q. e. d.

THEOREMA XXXI.

192. Si fuerint proportionales quotcunque similes A : B = C : D, E : F = G :

$=G:H, I:K=L:M, \&c.$; erit summa omnium antecedentium primarum rationum $A+E+I, \&c.$ ad summam omnium consequentium $B+F+K, \&c.$ ut summa omnium antecedentium secundarum rationum $C+G+L, \&c.$ ad summam omnium consequentium $D+H+M, \&c.$

DEMONSTRATIO.

Cum $A:B, E:F, I:K, \&c.$ itemque $C:D, G:H, L:M, \&c.$ sint rationes similes, per *hypoth.* erit $A+E+I, \&c.:B+F+K, \&c.=A:B, \& C+G+L, \&c.:D+H+M, \&c.=C:D$ (§.187). Est vero $A:B=C:D$, per *hypoth.* Ergo $A+E+I, \&c.:B+F+K, \&c.=C+G+L, \&c.:D+H+M, \&c.$ (§.167). *Q.e.d.*

THEOREMA XXXII.

193. Si fuerit ut antecedens prima rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam dividendo, ut differentia terminorum prima rationis ad ejus consequentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus consequentem: itemque convertendo, ut differentia terminorum prima rationis ad ejus antecedentem ita differentia terminorum secundæ ad ejus antecedentem.

DEMONSTRATIO.

$6:4=15:10$ Si fuerit $A:B=C:$
 $2:4=5:10$ D , per *hypoth.* erit $A:$
 $2:6=5:15$ $C=B:D$, (§.173),
 consequentet $A—B:$
 $C—D=B:D=A:C$ (§.189). Ergo
 $A—B:B=C—D:D, \& A—B:$
 $A=C—D:C$ (§.173). *Q.e.d.*

THEOREMA XXXIII.

194. Si fuerit ordinate ut antecedens prima rationis A ad suum consequentem B , ita antecedens secunda D ad consequentem suam E , & ut consequens prima B ad aliud quidpiam C , ita consequens secunda E ad aliud quidpiam F ; erit ex æquo antecedens prima A ad C ut antecedens secunda D ad F .

DEMONSTRATIO.

$4:2=6:3$ Quoniam $A:B$
 $2:8=3:12$ $=D:E \& B:C=E:$
 $4:8=6:12$ F , per *hypoth.* erit
 $A:D=B:E \& B:$
 $E=C:F$ (§.173); consequenter
 $A:D=C:F$ (§.167). Quare $A:C$
 $=D:F$ (§.173). *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

195. Quodsi fuerit $A:B=D:E, \& C:B=F:E$; cum etiam sit $B:C=E:F$ (§.169), erit $A:C=D:F$ (§.194).

COROLLARIUM II.

196. Similiter si fuerit $A:B=C:D, \& A:F=C:G$; cum etiam sit $B:A=D:C$ (§.169), erit $B:F=D:G$ (§.194).

COROLLARIUM III.

197. Si denique fuerit $A:B=C:D, \& F:A=G:C$, cum etiam sit $A:F=C:G$ (§.169), erit $B:E=D:G$ (§.196).

THEOREMA XXXIV.

199. Si fuerit perturbate ut antecedens prima rationis A ad suum consequentem B , ita antecedens secunda E ad suum consequentem F , & ut consequens prima B ad aliud quidpiam C , ita aliud quidpiam D ad antecedentem secundæ E ; erit etiam ex æquo antecedens prima A ad C ut D ad consequentem secundæ F .

DE-

DEMONSTRATIO.

8 : 4 = 12 : 6 Quoniam A : B
 4 : 16 = 3 : 12 = E : F, per hypoth.
 8 : 16 = 3 : 6 si ponatur B : C
 = F : G, erit A : C
 = E : G (§. 194). Est vero etiam B : C
 = D : E, per hypoth. Ergo D : E = F :
 G (§. 167), & D : F = E : G (§. 173);
 consequenter A : C = D : F (§. 167).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

199. Quodsi fuerit A : B = E : F, & C : B
 = E : D; cum etiam sit B : C = D : E
 (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

COROLLARIUM II.

200. Similiter si fuerit B : A = F : E, &
 B : C = D : E; cum etiam sit A : B = E : F
 (§. 169), erit A : C = D : F (§. 198).

COROLLARIUM III.

201. Si porro fuerit B : A = F : E, &
 C : B = E : D; cum etiam sit B : C = D : E
 (§. 169), erit A : C = D : F (§. 200).

COROLLARIUM IV.

202. Si idem C, vel æqualia, per majus
 A & minus B dividas; quotus prior F
 erit minor posteriore G. Est enim A : C
 = 1 : F, & B : C = 1 : G (§. 174); adeo-
 que C : B = G : 1 (§. 169). Ergo A : B
 = G : F (§. 198). Sed A > B, per hypoth.
 Ergo G > F (§. 149).

THEOREMA XXXV.

203. *Majus A ad idem C majorem
 rationem habet quam minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, per hypoth. erit
 A : C > B : C (§. 182), hoc est, A ad
 C majorem rationem habet, quam
 B ad C (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVI.

204. *Quod ad idem majorem habet
 rationem quam alterum, id altero ma-
 jus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat A ad C rationem majorem
 quam B ad idem C, per hypoth. Ergo
 pars ipsius A eandem ad C rationem
 habet quam B ad idem C (§. 186),
 adeoque ipsi B æqualis est (§. 177).
 Quare A > B (§. 20). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

205. *Idem C ad majus A minorem
 habet rationem quam ad minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, per hypoth. erit
 C : A < C : B (§. 202). Ergo C ad
 A minorem habet rationem quam ad
 B (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

206. *Ad quod idem majorem ratio-
 nem habet quam ad alterum, id altero
 minus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat C ad A rationem mayo-
 rem, quam ad B, per hypoth. Ergo
 pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A
 eandem rationem habet, quam ad B
 (§. 186), hoc est, D : A = C : B
 (§. 152), & hinc D : C = A : B (§. 173).
 Sed D < C (§. 20). Ergo A < B (§. 149).
Q. e. d.

THEOREMA XXXIX.

207. *Due quantitates se mutuo
 multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 2 \\ 2 \quad 4 \\ \hline 8 = 8 \end{array}$$
 Sint duo factores A & B, erit $1:A = B:AB$ & $1:B = A:BA$ (§. 66). Est vero etiam $1:A = B:BA$ (§. 173), adeoque ob unitatem eandem, per hypoth. $B:AB = B:BA$ (§. 167). Ergo $AB = BA$ (§. 177).

COROLLARIUM.

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam $AB = BA$ (§. 207); erit $CAB = CBA$ (§. 93), adeoque & $ABC = BAC$ (§. 207). Similiter quia $CB = BC$ (§. 207); erit $ACB = ABC$ (§. 93), adeoque & $CBA = BCA$ (§. 207). Quare $CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA$ (§. 87), hoc est, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLIUM.

209. Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores: sed demonstratio prolixior evadit, si plures tribus fuerint termini.

THEOREMA XL.

210. Si factum per multiplicandum dividitur; quotus est multiplicans: si per multiplicantem; quotus est multiplicandus.

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. 66). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§. 177). Quod erat unum.

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. 66); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 173).

Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 177). Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. 76).

THEOREMA XLI.

212. Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra; factum est dividendus.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§. 174). Sed si quotus per divisorem multiplicatur, erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§. 66). Ergo factum æquale est dividendo (§. 177). Quod erat unum.

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 207); erit quoque in hoc casu factum æquale dividendo. Quod erat alterum.

THEOREMA XLII.

213. Sint quatuor quæcumque quantitates proportionales $A:B = C:D$; sint totidem alie inter se quoque proportionales $E:F = G:H$: si posteriores singulas in singulas priores ducas; facta inter se proportionalia sunt, nempe $AE:FB = GC:DH$.

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Cum sit per hypoth.

$$\begin{array}{cccc} A : B = C : D & \& E : F = G : H \\ E \quad F & E \quad F & C \quad D & C \quad D \end{array}$$

erit $EA : FB = EC : FD$ & $CE : DF = CG : DH$. (§. 185). Sed $EC = CE$ & $FD = DF$ (§. 207). Ergo $EA : FB = CG : DH$ (§. 167) = $GC : HD$ (§. 207). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

214. *Rationis compositæ exponens est æqualis factò, quod producant exponentes simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ $A : B$ exponens = m ; secundæ $C : D$ exponens sit = n . Erit $m : 1 = A : B$ & $n : 1 = C : D$ (§. 140). Ergo $mn : 1 = AC : BD$ (§. 213); consequenter mn est exponens rationis $AC : BD$ (§. 140), hoc est compositæ ex $A : B$ & $C : D$ (§. 159). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

215. *Sint rationes 8 : 4 & 24 : 6. Illius exponens est 2, hujus 4. Rationem compositam datarum habent 192 & 24. Sed 192 : 24 = 8, quod est factum ex 2 in 4. Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA XLIV.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D, &c.; prima A ad tertiam C est in ratione duplicata, ad quartam D in ratione triplicata, &c. prima A ad secundam B.*

DEMONSTRATIO.

I. Quoniam $A : B = B : C$, per hypoth. AB ad BC habet rationem duplicatam. *Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.*

catam ipsius A ad B (§. 159). Sed $AB : BC = A : C$ (§. 181). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat unum.*

2. Quoniam $A : B = B : C = C : D$. per hypoth. ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 159). Sed $ABC : BCD = A : D$ (§. 178). Ergo etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat secundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonstrari possit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad sextum quintuplicatam, &c. primi ad secundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

217. *Si fuerit quacunque quantitarum A, B, C, D, E, F, &c. series; ratio prima A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitarum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiples, facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum $A : B, B : C, C : D, D : E, E : F$, &c. (§. 159). Sed $ABCDE : BCDEF = A : F$ (§. 178). Ergo etiam A ad F est in ratione composita omnium modo recensitarum (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

218. *Rationes compositæ ex rationibus, quarum singula singulis æquales sunt, inter se æquales sunt.*

H DE-

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{r}
 6:3=4:2 \\
 3:1=12:4 \\
 5:1=20:4 \\
 \hline
 90:3=960:32 \\
 =30
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Sit } A:B=C:D, \\
 E:F=G:H, I:K \\
 =L:M, \text{ per hypoth.} \\
 \text{erit } AE:BF=CG: \\
 DH (\S. 213), \text{ adeo-} \\
 \text{que \& } AEI:BFK \\
 =CGL:DHM (\S.
 \end{array}$$

cit.). Ratio vero AEI : BFK componitur ex rationibus A : B, E : F & I : K; ratio CGL : DHM ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 159). Ergo constat propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVII.

219. Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D; æquemultiplices prima atque tertia A & C, itemque secunda ac quarta B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utra-

que utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.

DEMONSTRATIO.

Denotentur æquemultiplices ipsarum A & C per m A & m C, itemque æquemultiplices ipsarum B & D, per n B & n D. Cum sit A : B = C : D, per hypoth. erit etiam m A : n B = m C : n D (§. 185); consequenter m A : m C = n B : n D (§. 173). Quamobrem si m A = m C, erit n B = n D; si m A > m C, etiam n B > n D; si m A < m C, etiam n B < n D (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

220. Hac proprietate proportionalium utitur EUCLIDES (a) in iis definiendis, ac inde ceteras demonstrat.

(a) Elem. V. def. 5.

CAPUT IV.

De speciebus Arithmetica in numeris fractis.

THEOREMA XLVIII.

221. **S**i numerator est æqualis denominatori; fractio $\frac{a}{a}$ æquivaleret integro: si minor; fractio $\frac{a}{b}$ minor est integro: si major; fractio $\frac{a}{b}$ integro seu unitate major est.

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (ex. gr. in nostro casu in 4) divisum, & numerator numerat partes istiusmo-

di in casu aliquo datas (§. 59). Quod si ergo numerator denominatori æqualis; per hypoth. tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; per hypoth. aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis; consequenter eadem minor (§. 20). *Quod erat secundum.*

Si

Si denique numerator major est denominatore; *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales sunt (§. 86). Ergo integrum parti fractionis æquale est; consequenter ipsa integro major (§. 20). *Quod erat tertium.*

SCHOLIION.

222. Fractiones integro æquales, vel eodem majores, dicuntur vulgo spurix; quia proprie loquendo fractiones non sunt nisi que integro minores (§. 38).

PROBLEMA XVII.

223. Invenire, quot integra fractio ($\frac{8}{4}$), que integro major, contineat.

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 69). Sed denominator idem est cum integro (§. 59). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

224. Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
 2. Factum scribatur loco numeratoris.
- Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Est nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 66, 169). Sed unitas & denominator datus sunt idem integrum (§. 59). Ergo fractio & numerus integer æquales sunt (§. 177). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX

225. Fractiones homogeneæ æquales sunt, quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent: major est, cujus numerator habet rationem majorem: minor vero, cujus numerator habet minorem.

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter se sint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (§. 35), adeoque ipsarum denominatores idem totum referunt (§. 59). Quare si numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent, fractiones æquales sunt (§. 177): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem suum rationem majorem habet, ea major est: cujus numerator minorem habet, ea minor est (§. 204). *Q. e. d.*

Ex. gr. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{8}$.

SCHOLIION.

226. Intelligitur adeo identitas fractionum, si numerator unius toties contineatur in denominatore suo, quoties numerator alterius in suo continetur. Fractio minor esse intelligitur, si numerator ipsius pluries contineatur in suo denominatore, quam numerator alterius in denominatore suo: id quod divisio denominatoris per numeratorem prodit.

COROLLARIUM.

227. Quodsi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{8}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in casu priore facta ($\frac{8}{12}$), in posteriore quoti ($\frac{2}{3}$) constituunt fractionem datæ ($\frac{4}{8}$) æquivalentem (§. 178, 181).

PROBLEMA XIX.

228. *Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Divisor primæ divisionis, seu numerus datus minor, denuo dividatur per residuum primæ divisionis.
3. Similiter divisor secundæ divisionis dividatur per residuum secundæ, & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, divisorem ultimum esse communem mensuram maximam numerorum datorum.

Ex. gr. Sint numeri dati 168 & 240; reperietur eorum communis mensura maxima 24 hunc in modum:

7			
182	24	7	
240 (1	168 (2	72 (3	
168	72	24	

Similiter communis mensura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Divisor ultimus 24 metitur divisorem antecedentis (in nostro quidem casu secundæ) divisionis 72, (per *hypoth.* & §. 74). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc est, in nostro casu secundæ) divisionis 168, quippe ex

dividendo ultimæ divisionis 72, aliquoties (hic quidem bis) sumto & ejus divisore 24 compositum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & residuum primæ divisionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in nostro casu semel) sumto & residuo primæ divisionis 72 compositum. Est itaque communis numerorum datorum mensura (§. 78).

Esse vero communem mensuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonstratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem esse mensuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat residuum primæ, seu divisorem secundæ divisionis 72; adeoque & residuum secundæ divisionis, seu divisorem tertiæ, hoc est, in nostro casu inventam communem mensuram 24. Sed numerus is eadem major est, *ex hyp.* Ergo communem mensuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24. Quod cum sit absurdum (§. 74), major communis mensura non datur. Est igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

229. *Qui demonstrationem uno quasi obtutu comprehendere cupiunt; illos hæc numerorum datorum resolutio juvabit.*

I. $72 = 3 \cdot 24$, per divis. tert.

II. $168 = 2 \cdot 72 + 24$, per divis. sec.
 $= 2 \cdot 3 \cdot 24 + 24$, per num. I, $= 7 \cdot 24$.

III. $240 = 1 \cdot 168 + 72$, per divis. prim.
 $= 7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$, per num. I & II
 $= 10 \cdot 24$.

SCHO-

SCHOLIUM II.

230. In lineis communis mensura maxima
 240 96 48
 168 72 24

 72 24 24

 96 48 0

*invenitur per mutua e-
 rundem a se invicem sub-
 tractionem. In numeris
 autem compendii gratia
 divisio subtractioni sub-
 stituitur; ut exemplum
 ostendit.*

PROBLEMA XX.

231. Fractionem datam ad minores
 terminos reducere; h. e. invenire frac-
 tionem datæ ($\frac{20}{48}$) æquivalentem, sed mi-
 noribus numeris expressam.

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam
 denominator 48, per eundem nume-
 rum 4, qui utrumque metitur: quoti
 5 & 12 componunt fractionem quæ-
 sitam $\frac{5}{12}$ (§. 227).

COROLLARIUM I.

232. Si ergo divisio fit per communem
 mensuram maximam numeratoris ac de-
 nominatoris (§. 228); fractio ad terminos
 minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

233. Si numeratorem ac denomi-
 natorem fractionis datæ sola unitas metitur;
 ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLIUM.

234. Molestius accidit inexercitatis com-
 munem mensuram maximam querere, quam,
 iterata per mensuras minores sponte animad-
 versas divisione, fractiones reducere.

PROBLEMA XXI.

235. Duas vel plures fractiones da-
 tas ad eandem denominationem redu-
 cere; h. e. invenire fractiones, quæ
 datis æquales sunt, & communi denomi-
 natore gaudent.

RESOLUTIO.

Casus I. Si fractiones duæ dentur,
 quælibet integra multiplicetur per de-
 nominatorem alterius.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ = $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}$ & $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3}$ = $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$.

Casus II. Si plures dentur, tam
 numerator, quam denominator unius-
 cujusque ducatur in factum ex deno-
 minatoribus reliquarum.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{4}$ = $\frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 4}$ & $\frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 3 \cdot 4}$
 & $\frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 6}$ = $\frac{48}{72}$ & $\frac{12}{72}$ & $\frac{54}{72}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere de-
 nominatorem, patet per §. 93 & §. 207,
 208. Quod vero æquivalent primum
 propositis, manifestum est per §. 227.
 Constat ergo propositum. Q. e. d.

PROBLEMA XXII.

236. Fractiones addere.

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos deno-
 minatores habuerint, reducantur ad
 eundem (§. 235).
2. Addantur numeratores (§. 96) &
 summæ subscribatur denominator
 communis.

Ex. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ = $\frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§. 235) = $\frac{22}{15}$
 = $1\frac{7}{15}$ (§. 223).

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}$ = $\frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§. 235)
 = $\frac{114}{72}$ = $1\frac{42}{72}$ (§. 223) = $1\frac{7}{12}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores sint nomina
 unitatum, ex quibus numeratores
 componuntur (§. 59); numeratores
 tantum adduntur. Quoniam vero

addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 61); ad eandem denominationem sunt reducendi (§. 35). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIII.

237. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235).
2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 103) & residuo denominator communis subscribatur.

Ex. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 231) & $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (§. 235) = $\frac{1}{10}$.

THEOREMA L.

238. *Fraçtio æquatur numeratori per denominatorem diviso; hoc est, $\frac{3}{4} = 3 : 4$.*

DEMONSTRATIO.

Est enim fraçtio $\frac{3}{4}$ ad unitatem, seu integrum, ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 38, 59). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140); si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator 4, erit fraçtio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177). Æquatur ergo fraçtio numeratori per denominatorem diviso (§. 136). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIV.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius

in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quaesitam.

Ex. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B} (\frac{2}{3}) = A : B$ (§. 238) = F, & $\frac{C}{D} (\frac{1}{2}) = C : D$ (§. cit.) = G; erit B : A = 1 : F, & D : C = 1 : G (§. 69). Ergo BD : AC = 1 : FG (§. 213), hoc est, $\frac{AC}{BD} (\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}) = \frac{FG}{1}$ (§. 169) = FG ($\frac{2}{6}$). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera divisio sit, qua multiplicatio vocatur. Ex. gr. $\frac{2}{3}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$ idem est ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION II.

241. *Hinc fractionum multiplicatio sequente modo facilius demonstratur. Si fraçtio $\frac{4}{3}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum inveniendæ. Data igitur fraçtio $\frac{4}{3}$ instar totius considerata dividenda est in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, scilicet in nostro casu in tres, & pars ista multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59).*

SCHOLION III.

242. *Vix autem opus est ut annotemus, si fraçtio per numerum integrum multiplicanda, ducendum esse solum numeratorem in integrum numerum datum. Ex. gr. factum ex $\frac{3}{2}$ in 2 est $\frac{6}{2}$.*

PROBLEMA XXV.

243. *Fractionem ($\frac{4}{3}$) per aliam fractionem ($\frac{2}{3}$) dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur. Ex. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$.
2. Divisor inversus ducatur in dividendum

dum (§. 239): quod prodit $\frac{12}{10}$, seu $1\frac{1}{5}$ (§. 223), est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 69); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 169). Quodsi fractiones ad eandem denominationem reducuntur (§. 235), cum eadem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 238); erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem dividendæ ut fractio dividenda ad fractionem dividendam (§. 181); consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad numeratorem dividendæ ut quotus ad unitatem (§. 167). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt, & numerator dividendæ per numeratorem dividendæ dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per dividendam emergens (§. 177). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in

denominatorem primæ ducto (§. 235). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus (*juxta* §. 239) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

SCHOLIION.

244. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeo, cum fractiones sint rationes (§. 141), eas dividere idem esse ac rationum rationes investigare.*

PROBLEMA XXVI.

245. *Integrum (3) per fractionem ($\frac{4}{7}$) dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur, ut in Problemate præcedente (§. 243). Ex. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer datus 3 ducatur in numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ five $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum demonstratione Problematis præcedentis (§. 243).

CAPUT V.

De Potentiis numerorum, Genesi præsertim ac Analyssi numerorum Quadratorum & Cubicorum.

DEFINITIO LIII.

246. **S**I numerus quicumque 2 in se ipsum ducatur; factum 4 Numerus Quadratus: ipse autem hujus intuitu Radix Quadrata appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum sit ut unitas ad Radicem quadratam, ita Radix ad ipsum Quadratum (§. 66, 246); erit Radix media proportionalis inter unitatem & Quadratum (§. 156).

DEFINITIO LIV.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur Numerus Cubicus seu Cubus, & radix 2 ejus intuitu Radix Cubica.

COROLLARIUM.

249. Cum sit ut unitas ad Radicem, ita Radix ad Quadratum (§. 66, 246) & ut unitas ad Radicem ita Quadratum ad Cubum (66, 248); erit etiam Radix ad Quadratum ut Quadratum ad Cubum (§. 167), hoc est, Unitas, Radix, Quadratum & Cubus in continua proportione progrediuntur (§. 156), & Radix Cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter Unitatem & Cubum.

DEFINITIO LV.

250. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali Potestatum, Potentiarum, Dignitatum nomine appellari so-

lent. VIETA eadem Magnitudines scilicet vocat.

DEFINITIO LVI.

251. Exponens dignitatis est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens Quadrati est 2, Cubi 3 (§. 246, 248).

DEFINITIO LVII.

252. Hodie tantum non omnes dignitates optime distinguunt per exponentes, ita ut Radix dicatur Dignitas prima, Quadratum secunda, Cubus tertia &c. Qui Arabes sequuntur, singulis potentiis peculiariter imponunt nomina, diversa tamen ab iis, quibus cum DIOPHANTO (a) utuntur VIETA (b) & OUGHTREDUS (c). Nomina Arabum sunt: Radix, Quadratum, Cubus, Quadratoquadratum seu Biquadratum, Surdesolidum, Quadratum Cubi, Surdesolidum secundum, Quadrati quadrati Quadratum, Cubus Cubi, Quadratum Surdesolidi, Surdesolidum tertium &c. Nomina DIOPHANTI sunt; Latus seu Radix, Quadratum, Cubus, Quadratoquadratum, Quadratoquadratum, Cubocubus, Quadratoquadratoquadratum, Quadratoquadratoquadratum &c.

SCHO-

(a) In Libris Arithmetiæ.

(b) In Isagoge in Artem Analyt. c. 3. f. m. 3.

(c) In Clave Mathem. c. 12. p. m. 34.

SCHOLIION.

253. Multi quadratum vocant Zenfum. Hinc composita: Zenfizenfus, Zenficubus, Zenfizenzenfus, Zenfurdefolidus &c.

HYPOTHESIS XII.

254. Qui Arabum denominationibus usi, Potentiarum signis sequentibus utuntur: 1. R, 2. ꝑ, 3. C, 4. ꝑꝑ, 5. ꝑꝑꝑ, 6. ꝑꝑꝑꝑ, 7. Bꝑꝑ, 8. ꝑꝑꝑꝑꝑ, 9. CC, 10. ꝑꝑꝑꝑꝑꝑ, 11. Cꝑꝑ &c. Multo commodius CARTESIUS (a), monito KEPLERI (b) obsecutus, radici superius a dextris jungit exponentem, ex. gr. si a fuerit radix, erunt Potentia ipsam sequentes, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. vel, si $a = 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ &c. ita ut sit $2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO LVIII.

255. Quantitatem ad dignitatem desideratam evehere idem est ac invenire factum ex ipsa aliquoties in se ducta emergens. Ex. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem est ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO LIX.

256. Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere idem est ac invenire numerum 2, qui aliquoties in se ipsum ductus datam potentiam (ex. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLIION.

257. Cum dignitates superiores non nisi in Analysisi usum habeant; in presenti genesin & analysisin Quadratorum & Cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum nu-

(a) In Geometria.

(b) Harmonices mundi lib. 1. f. 35, 36.

Walsi Oper. Mathem. Tom. I.

meros quadratos & cubicos nosse debet, quos sequens tabula exhibet:

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO LX.

258. Radix tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis superioris cujuscunque dicitur Binomia, si ex duabus: Trinomia, si ex tribus: Multinomia sive Polynomia, si ex pluribus, quam duabus partibus constat.

THEOREMA LI.

259. Potentia ejusdem gradus sunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem; hoc est, Quadrata habent rationem duplicatam: Cubi triplicatam: Quadrato-quadrata quadruplicatam: &c. rationem suarum radicum.

DEMONSTRATIO.

Potentia oriuntur, si radices A & B aliquoties in seipfas ducas (§. 250). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio Quadratorum componitur ex duabus, Cuborum ex tribus, Quadrato-quadratorum ex quatuor, &c. reliquarum Potentiarum ex tot rationibus similibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo Quadrata habent rationem duplicatam, Cubi triplicatam, &c. cetera Potentia rationem tantuplicatam suarum radicum, quot unitates habet exponens earundem (§. 159).

THEOREMA LII.

260. *Quantitatum proportionalium Potentiæ eadem sunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim Potentiæ eadem rationem multiplicatam ipsarum $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$ &c. vel $A : B$, $C : D$, $E : F$ &c. (§. 259). Sed hæ rationes omnes inter se eadem sunt, *per hypoth.* Ergo potentiæ istæ, v. gr. A^3 , B^3 , C^3 , D^3 , E^3 , &c. constituunt rationes compositas ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt (§. 250); consequenter eadem (§. 218); atque adeo proportionales sunt (§. 155). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

261. *Numerus quadratus radice binomia, componitur ex Quadrato partis primæ, ex Facto dupli primæ in alteram & ex Quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus Quadratus, si Radix in seipsam ducitur (§. 246). Utraque vero pars radice sigillatim ducitur in utramque simul (§. 111). Quare productum componi debet 1^o. ex facto partis primæ in seipsam, hoc est, ex Quadrato partis primæ (§. 246); 2^o. ex facto partis primæ in secundam & ex facto secundæ in primam, hoc est, ex duplo facto primæ in secundam, seu ex Facto dupli primæ in secundam (§. 207, 208); 3^o. ex facto partis secundæ in seipsam, hoc est, ex Quadrato partis secundæ (§. 246). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

262. *Demonstratio est ocularis, si, in quocunque exemplo singulari, multiplicatio non actu peragitur, sed saltem indicatur; quo in casu exempli universalis vices tuetur: id nimirum non infelicius quam figura in Geometria representant, quod singularia in universum omnia commune habent. Ex. gr. sit radix binomia 34, aut $30 + 4$; erit*

$$30 + 4 \text{ Radix binomia.}$$

$$30 + 4$$

$$\underline{16} \text{ Quadratum partis II.}$$

$$120 \text{ } \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ Facta ex I in II.}$$

$$120$$

$$\underline{900} \text{ Quadratum partis I.}$$

$$1156 \text{ Quadratum totius.}$$

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonstrationibus concipiendis, quam in propositionibus inveniendis.

COROLLARIUM I.

263. *Cum pars dextra, sive secunda, inter unitates, sinistra sive prima, inter decades locum obtineat (§. 50); Quadratum illius in loco dextimo, Factum ex unius duplo in alteram in secundo, Quadratum denique alterum in tertio a dextimo terminari debet (§. 49).*

SCHOLIUM II.

264. *Scilicet Quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo Facto ex parte una in alteram cyphra una, Quadrato autem partis sinistrae duæ adjunguntur; ut numeri solitarie positi justum locum nascantur (§. 49).*

COROLLARIUM II.

265. *Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures finistimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, Quadratum numeri cujuscunque componi ex Quadratis singularum partium & Factis ex duplo partis cujus-*

cujuslibet in omnes ipsa sinisteriores: ut adeo Theorema unum compositioni omnium numerorum Quadratorum sufficiat.

SCHOLION III.

266. Sit radix 346: sumatur 34^o pro parte una & 6 pro altera; erit (§. 261).

$$\begin{array}{r} 340 + 6 \\ 340 + 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \text{ Quadratum pars III.} \\ 2040 \} \text{ Facta ex parte III in I \&} \\ 2040 \} \text{ II simul.} \\ 1600 \text{ Quadratum partis II.} \\ 12000 \} \text{ Facta ex I in II.} \\ 12000 \} \\ 90000 \text{ Quadratum partis I.} \\ \hline \end{array}$$

$$119716 \text{ Quadratum totius.}$$

COROLLARIUM III.

267. Quonam in loco singula producta terminentur, ex Corollario primo & ejus Scholio intelligitur (§. 263, 264). Habenda nimirum est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur, ut justum nanciscantur locum (§. 49).

SCHOLION IV.

268. Extractio Radicis Quadrata, alias tædii plena, facillima evadit, ubi Quadratis per Theorema præsens componendis operam prius impenderit.

PROBLEMA XXVII.

269. Ex numero quocunque dato Radicem Quadratam extrahere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Numerus propositus distinguatur in classes, binas notas classi unicuique assignando, initio a dextra factò. Tot enim erunt partes Radicis, quot classes habentur (§. 265, 267). Notandum vero, quod classi sinistimæ interdum nonnisi nota unica relinquitur.

2. Jam cum in classe sinistima reperitur Quadratum notæ sinistimæ Radicis (§. cit.); in *Tabula Radicum* (§. 275) quærat numerus Quadratus ei, qui classem sinistimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipso subtrahatur; Radix vero ejus post lunulam scribatur.

3. Quoti inventi duplum ponatur sub nota sinistima classis subsequenti, & inde porro sinistrorsum, si ex notis pluribus constiterit. Investigetur novus quotus per Abacum *Pythagoricum* (§. 109), inventusque post lunulam scribatur: est enim pars secunda Radicis (§. 261, 210).

4. Idem quotus ponatur sub nota dextima illius classis, & factum ex numero subscripto integro in divisorem (§. 263) subducatur, ut in divisione moris est.

5. Quodsi operatio, juxta regulam tertiam & quartam, in reliquis classibus iteretur; prodibit Radix quæsitæ (§. 265, 267).

Ex. gr.	11		56	(34	11		97		16	(346
	9		::		9		::		::	
	—				—				—	
	2		56		2		97		::	
			6*				6*		::	
	2		56		2		56		::	
	—				—				—	
			0				41		16	
							6		88	
							41		16	
							—			
									0	

PROBLEMA XXVIII.

270. Radicem Quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius, & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239); Quadratum autem ex ductu ejusdem numeri in seipsum enascitur (§. 246); Radicem Quadratam extracturus, eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita Radix Quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$; ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM I.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur, & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 224); si numerus datus, qui Quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est Quadratus & ex fractione extrahatur Radix (§. 270): quæ prodit fractio Radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris Quadrati Radix indicat.

SCHOLIUM I.

272. Ex. gr. Si ex 2 extrahenda Radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio $\frac{72}{36}$, cujus Radix $\frac{6}{5}$, sive $1\frac{2}{5}$, exhibet Radicem a vera

magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam $\frac{1}{6}$.

COROLLARIUM II.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus, eidem non nisi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhaerentes adjungere teneris (§. 112); Radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans, numero qui Quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorsum & operationem continua: ita enim prodibit Radix prope vera in partibus decimis, centesimis, millesimis &c.

SCHOLIUM II.

274. Ex. gr. Sit extrahenda Radix Quadrata ex 345; prodibit $18\frac{57}{100}$.

$$\begin{array}{r}
 3 \mid 45 \quad (18\frac{57}{100}) \\
 \underline{9} \quad : : \\
 2 \mid 45 \\
 \quad (28) \\
 \quad \underline{224} \\
 \quad \quad 21.00 \\
 \quad \quad (3 \mid 68) \\
 \quad \quad \underline{1825} \\
 \quad \quad \quad 27.5.00 \\
 \quad \quad \quad (37 \mid 87) \\
 \quad \quad \quad \underline{25949} \\
 \quad \quad \quad \quad 1551
 \end{array}$$

SCHOLIUM III.

275. Si Tabulis numerorum Quadratorum pro Radicibus ab 1 usque ad 1000 utaris; in iis evolvi potest numerus Quadratus proxime minor eo, qui tres classes sinisteriores

occur-

$$\begin{array}{r}
 8697.5 \quad (294 \frac{9}{10}) \\
 86436 \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 \hline
 5390.0 \\
 (8889) \\
 53001 \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 \hline
 899
 \end{array}$$

occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notæ priores, ex. gr. in nostro casu 294. Plures notæ una inveniuntur, si Tabula longius extendantur.

THEOREMA LIV.

276. Numerus Cubicus Radicis binomia componitur ex numeris Cubicis duarum partium, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam & ex Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam.

DEMONSTRATIO.

Numerus Cubicus prodit, si Quadratum per Radicem multiplicetur (§. 248). Sed Quadratum Radicis binomiæ componitur ex Quadratis partium & Facto duplo ex parte una in alteram (§. 261). Quare Cubus componitur ex Cubo partis primæ, ex triplo Facto Quadrati partis primæ in secundam, ex triplo Facto Quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam, & Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam (§. 207), atque ex Cubo partis secundæ (§. 246, 248). *L. e. d.*

SCHOLION I.

277. Demonstrationem ocularem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit ex. gr. Radix 34 seu $30 + 4$, erit

$$\begin{array}{r}
 30 + 4 \quad \text{Radix} \\
 \hline
 16 \quad \text{Quadrat. part. II.} \\
 120 \quad \left. \vphantom{120} \right\} \text{Facta ex I in II.} \\
 120 \quad \left. \vphantom{120} \right\} \\
 \hline
 900 \quad \text{Quadrat. part. I.} \\
 \hline
 64 \quad \text{Cubus part. II.} \\
 480 \quad \left. \vphantom{480} \right\} \text{Facta ex Quadrat. II. in I.} \\
 480 \quad \left. \vphantom{480} \right\} \\
 3600 \quad \text{Factum ex Quadrat. I. in II.} \\
 480 \quad \text{Fact. ex Quadrat. II. in I.} \\
 3600 \quad \left. \vphantom{3600} \right\} \text{Facta ex Quadrat. I. in II.} \\
 3600 \quad \left. \vphantom{3600} \right\} \\
 \hline
 27000 \quad \text{Cubus part. I.} \\
 \hline
 39304 \quad \text{Cubus totius.}
 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

278. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 50); numerus Cubicus dextræ in loco dextimo, Factum ex triplo Quadrato ejus in sinistram in secundo, Factum ex triplo Quadrato sinistræ in dextram in tertio, Cubus denique partis sinistræ in quarto loco terminatur (§. 49).

COROLLARIUM II.

279. Si Radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ dextimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiantur; extemplo patet, quod Cubus quicumque componatur ex Cubis singularum partium radicis & ex Factis tripli Quadrati quarumlibet sinisteriorum in proxime dexteriores, itemque ex Factis tripli Quadrati cujuslibet dexteriores in omnes sinisteriores.

SCHOLION II.

280. Sit Radix 346. Sume 340 pro parte una radicis, erit 6 pars altera, consequenter (§. 276).

13

346

346	
346	
90000	<i>Quadrat. part. I.</i>
12000	}
12000	
1600	<i>Quadrat. part. II.</i>
115600	<i>Quadrat. I & II simul.</i>
2040	}
2040	
36	<i>Quadrat. part. III.</i>
27000000	<i>Cubus part. I.</i>
3600000	}
3600000	
480000	<i>Fact. ex Quadr. II in I.</i>
3600000	<i>Fact. ex Quadr. I in II.</i>
480000	}
480000	
64000	<i>Cubus part. II.</i>
693600	}
693600	
12240	<i>F. ex Quadr. III in I & II sim.</i>
693600	<i>F. ex Quadr. I & II sim. in III.</i>
12240	}
12240	
216	<i>Cubus part. III.</i>
41421736	<i>Cubus totius.</i>

Notandum scilicet, sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse; cumque Theorema generaliter de Radice utcumque in duas partes divisæ loquatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari posse. Ex. gr. numerus 346 non modo, stante Theoremate, in 340 & 6, vel in 300 & 46, verum etiam in 195 & 151, in 89 & 257, & in duas quasunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris Quadratis, immo in genere in Potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur.

COROLLARIUM III.

281. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex Corollario primo (§. 278) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. Vide exemplum in Schol. præc. (§. 280).

PROBLEMA XXIX.

282. Ex numero dato Radicem Cubicam extrahere.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto Etenim ex tot notis Radix componitur, quot classes emergunt (§. 278, 281). Notandum vero, non repugnare, ut classi sinistimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In *Tabula Radicum* (§. 257) quæratür numerus Cubicus eo proxime minor numero, qui in classe sinistima continetur, nisi ipse in eadem inveniatur, atque ab hoc subtrahatur; ejus vero Radix post lunulam scribatur: est enim pars prima Radicis (§. 274).
3. Quoti inventi Quadratum triplum (§. 278, 281) scribatur sub nota sinistima classis subsequenti, & inde porro sinistrorsum si ex pluribus notis constiterit: quo facto quæratür quotus, qui erit pars secunda Radicis (§. cit. & §. 210.)
4. Divisor ducatur in novum quotum, & productum sub eo deleto scribatur; sub nota vero media classis ejusdem terminetur Factum ex triplo

triplo Quadrato novi quoti in præcedentem; sub dextima denique Cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri Cubici superscriptis subtrahantur (§. cit.).

5. Quodli operatio per reliquas classes, juxta regulam tertiam & quartam continetur; prodibit Radix quæsitæ (§. 279).

Ex. gr.	47	437	928 (362
	27		
	20	437	
	Divisor (27)..		
	Eact. ex d. in q. 16	2	..
	Fac. ex 3 □ n. q. in pr. 3	24	..
	Cubus novi quoti	216	
Summa factor. 49 856			

	78x	928	
	Divisor (288) 8)..		
	Fact. ex Div. in q. n. 777	6	..
	Fact. ex 3 □ n. q. in pr. 4	32	..
	Cubus n. q.	8	

Summa factorum 78x	928	
. 000 000		

PROBLEMA XXX.

283. Radicem Cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator Cubus est.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Eodem, quo supra (§. 270), modo patet, Radicem sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM I.

284. Hinc porro eodem, quo supra, (§. 271), modo consequitur, Radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui Cubus non est, per hujus denominatoris Cubum multiplicetur, & Radici Cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subjiciatur.

SCHOLIUM I.

285. Ex. gr. Si ex 12 extrahenda Radix Cubica prope vera, defectu minore quam $\frac{1}{8}$; ducatur 12 in 512 Cubum ipsius 8, & ex facto 6144 extrahatur Radix Cubica 18, erit $\frac{18}{8}$, seu $2\frac{2}{8}$, Radix prope vera, cujus defectus est minor quam $\frac{1}{8}$.

COROLLARIUM I.

286. Immo inde ulterius eodem, quo supra (§. 273), modo fuit, Radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non Cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur, & operatio (§. 282) continetur.

SCHOLIUM II.

287. Ex. gr. Sit extrahenda Radix Cubica ex 3; eam reperies $1\frac{44}{100}$.

3 ($1\frac{44}{100}$)	
1	0.0.0
2	3. . .
1	2. . .
	48. .
	64
1 744	
256	0.0.0
58	8. . .
235	2. . .
6	72. . .
	64
241 984	

SCHOLIUM III.

288. Si Tabulis numerorum Cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod supra (§. 275) in extrahenda Radice Quadrata commendavimus.

PROBLEMA XXXI.

289. Examinare extractionem Radicis Quadratae ac Cubicae.

RESOLUTIO.

I. Radix Quadrata inventa ducatur in se ipsam, & factò residuum, si quod fuerit, addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo Radix extracta; erit numerus inventus Radix Quadrata dati, vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 246).

1857		Ex. gr. Radicem Quadrata
1857		tam prope veram ex 345
12999		supra (§. 274) reperimus
9285		18 $\frac{57}{100}$. Duc Radicem
14856		1857 in seipsam & factò
1857		3448449 adde residuum
3448449		1551: prodibit numerus
1551		345, ex quo extractio fieri
3450000		debebat, quatuor cyphris
		auctus: ut in extractione
		ad inveniendas centesimas
		factum fuerat.

II. Radix Cubica inventa ducatur in seipsam, & factum denuo in eandem. Productò posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 248).

144		Ex. gr. Superius (§. 287)
144		ex 3 extracta Radix est 1 $\frac{44}{100}$.
576		Duc hanc Radicem 144 in
576		seipsam, & factum 20736
144		denuo in 144. Productò
20736		alteri 2985984 adde, quod
144		supra residuum erat, 14016.
20736		Aggregatum est Radix 3 sex
144		cyphris aucta, ut in opera-
82944		tione factum fuerat.

82944		
82944		
20736		

2985984		
14016		
3000000		

THEOREMA LV.

290. Exponens rationis Quadratorum est Quadratum: Cuborum Cubus: & in genere Potentiarum cujuscunque gradus Potentia ejusdem gradus exponentis Radicum.

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim habent rationem duplicatam; Cubi triplicatam: & in genere Potentiæ cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum Radicum (§. 259). Quare cum exponens rationis compositæ sit æqualis factò, quod producunt exponentes simplicium (§. 214), exponens vero rationum simplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ, & in genere multiplicatæ quæcunque, idem sit (§. 159); exponens rationis duplicatæ erit Quadratum (§. 246), triplicatæ Cubus (§. 248), & in genere multiplicatæ cujuscunque Potentia exponentis Radicum (§. 250). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA LVI.

291. Si ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentia cujuscunque per aliam similem, numerus integer prodit; etiam ex divisione Radicis per Radicem integer prodire debet.

DEMONSTRATIO.

Quotus ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentia cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis Quadratorum, Cuborum; vel in genere Potentiarum similium se mutuo dividendum (§. 136), adeoque Quadratum, Cubus & in genere potentia exponentis rationis Radicum (§. 290). Quare cum idem sit numerus rationalis integer, per hypoth. erit idem numerus rationalis integer Quadratus, Cubus, vel Potentia alterius gradus: cujus quoniam Radix itidem rationalis integer esse debet (§. 250); etiam exponens Radicum numerus rationalis integer erit. Q. e. d.

COROLLARIUM.

292. Quare si Radix Radicem non metitur, nec Quadratum Quadratum, nec Cubus Cubum, nec Potentia quacunque aliam similem metitur (§. 74); consequenter fractio integro major ex istiusmodi Quadratis, Cubis, vel Potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis (§. 223).

THEOREMA LVII.

293. Si numeri integri non datur Radix in integris, nec dabitur per fractos. Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui sit Radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per seipsum produci debet numerus datus (§. 250). Sed quotiescunque fractum per seipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 239), isque in presente casu ad integrum irreducibilis (§. 292). Quare cum numerus datus sit integer, ex hypoth. fractus ejus Radix esse nequit. Q. e. d.

COROLLARIUM.

294. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio numero in se aliquoties ducto orientur (§. 75); ex numeris primis in se nulla perfecta Radix extrahi potest in integris (§. 256), adeoque nec per fractos dari potest (§. 293).

HYPOTHESIS XIII.

295. Interdum utile est, extractionem Radicis tantum indicari, presertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens ($\sqrt{\quad}$): cui in vertice jungitur exponens dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata. Ex. gr. $\sqrt[2]{\quad}$ denotat Radicem quadratam ex 2; $\sqrt[3]{\quad}$ denotat Radicem cubicam ex 3.

SCHOLIUM.

296. In Geometria & Analyti demonstrabitur, tales Radices, quae actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam; consequenter numeros (§. 10), eosque irracionales, cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri surdi: quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit (b). Et olim, & nunc interdum radicales nuncupari suserunt.

(b) Vid. STIFELIUS in Arithm. integra lib. 2. C. 12. P. 134.

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA LVIII.

297. **S**I fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur factò mediarum.

DEMONSTRATIO.

$6 : 3 = 8 : 4$ $A : B = C : D$ (per
4 3 *hypoth. & §. 152*). Er-
go $AD : BC = CD :$
 $24 = 24$ DC (§. 185). Sed CD
 $= DC$ (§. 207). Igi-
tur $AD = BC$ (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA LIX.

298. Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.

DEMONSTRATIO.

$6 : 12 = 12 : 24$ Quoniam enim
12 6 $A : B = B : C$ (per
hypoth. & §. 156,
 $144 = 144$ 152); erit AC
 $= BB$ (§. 297).

Sed BB est Quadratum ipsius B (§. 250). Ergo factum extremarum AC æquatur Quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

299. Si quantitas AD , producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D , fuerit æqualis alteri BC , ex duabus aliis B & C eodem modo producta; erit $A : B = C : D$.

DEMONSTRATIO.

$6 \cdot 8$ $AC : AD = C : D$ (§.
 $4 \cdot 3$ 178). Sed $AD = BC$,
per *hypoth.* Ergo $AC :$
 $24 = 24$ $BC = C : D$ (§. 168);
 $4 : 8 = 3 : 6$ consequenter $A : B$
 $= C : D$ (§. 181). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

300. Si ergo in serie quatuor quantitarum factum ex secunda in tertiam æquale sit factò ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA XXXII.

301. Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§. 111).
2. Ex factò 576 extrahatur Radix quadrata 24 (§. 269); quæ erit numerus quæsitus (§. 298).

PROBLEMA XXXIII.

302. Datis tribus numeris 3, 12, 5; quartum: aut duobus, tertium proportionalem invenire.

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5; aut in altero casu secundus in seipsum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 est quartus: in altero casu tertius quæsitus.

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum secundum per tertium, aut in altero casu secundum per seipsum multiplicas; factum ex primo in quartum, in casu altero ex primo in tertium prodit (§. 297, 298). Quodsi ergo hoc per primum dividis; quotus est terminus quartus, in casu altero tertius (§. 210). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

303. Data quælibet fractio converti potest in aliam æqualem datæ denominationis. Quodsi enim, per *Probl. præf.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem desideratæ quæratu numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæsitæ (§. 225).

Ex. gr. sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in $3 \text{ — } 2 \text{ — } 24$ aliam cujus denominator 24, reperietur $\frac{2}{48}$ ea $\frac{16}{24}$.

*
48 (16
33

COROLLARIUM II.

304. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. Ex. gr. Cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM III.

305. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLIUM I.

306. In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Ejus vero loco punctum (.) numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut, ex. gr. duæ cyphra præponantur, si fractio millesimis incipiat. Ita loco $\frac{23}{100}$ scribimus 0. 23; loco $5\frac{47}{10000}$ scribimus 5. 0047. Est vero harum fractionum non exiguus in Mathesi usus, quas primus in condendis Tabulis sinuum adhibuit Johannes REGIOMONTANUS.

SCHOLIUM II.

307. Resolutio hujus Problematis vulgo Regula trium appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc Regula aurea vocatur. Facile autem apparet, hac Regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum datorum proportionem constiterit. Ex. gr. Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, si aperiatur. Ponamus, intra 2 minuta prima effluere 3 congios. Inveniri debet, quanto tempore 100 congii effluent. Tres in hoc casu dantur numeri, quartus inveniendus. Enimvero vel ipsa experientia docet, aquam sub initium celerius, postea tardius effluere; consequenter quantitatem aquæ effluentis non esse tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæstio per Regulam trium solvi nequit.

SCHOLIUM III.

308. Quæ in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium solvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatæ mercis, per Regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. Ex. gr. pretium 3 librarum sunt 4 thaleri, quantum est

pretium 17 librarum? Cum sit, ut 3 libræ ad 17 libras, ita illarum pretium (quod est 4 thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:

$$\begin{array}{r} 3 \text{ L.} \text{ --- } 17 \text{ L.} \text{ --- } 4 \text{ Th.} \\ \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 2 \left(22\frac{2}{3} \text{ th.} \right. \\ \quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad 68 \\ \quad \quad \quad 68 \quad \quad \quad 33 \end{array}$$

Item: 3 libræ veneunt 4 thaleris, quot 22 $\frac{2}{3}$ thaleris? Cum sint ut 4 thaleri ad 22 $\frac{2}{3}$, ita 3 libræ ad quasitas; harum numerus ita innotescit:

$$\begin{array}{r} 4 \text{ Th.} \text{ --- } 22\frac{2}{3} \text{ Th.} \text{ --- } 3 \text{ L.} \\ \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 2 \\ \quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad 68 \text{ (17 L.} \\ \quad \quad \quad 68 \quad \quad \quad 33 \end{array}$$

Hinc simul patet, quomodo Regula trium examinetur, hoc est, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION IV.

309. Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quo labore defunguntur; etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, si æqualibus articulis æqualia pensa absolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, si pensa æqualia singuli absolvunt. Ex. gr. Intra 2 horas 6 libri folia perleguntur: Quanto horarum spatium 360 perlegi poterunt?

$$\begin{array}{r} 6 \text{ F.} \text{ --- } 360 \text{ F.} \text{ --- } 2 \text{ H.} \\ \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 1 \\ \quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad 720 \text{ (120 H.} \\ \quad \quad \quad 720 \quad \quad \quad 666 \end{array}$$

SCHOLION V.

310. Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipsis respondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in grossos, grossi in nummos, libræ in semuncias, horæ in minuta &c.

convertuntur. Ex. gr. 3 libræ & 4 semuncia veneunt 2 thaleris & 4 grossis, quanti libræ 2? Calculus talis est

$$\begin{array}{r} 3 \text{ L.} 4 \text{ S.} \text{ --- } 2 \text{ L.} \text{ --- } 2 \text{ Th.} 4 \text{ gr.} \\ 32 \quad \quad \quad 32 \quad \quad \quad 24 \\ \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \\ 100 \text{ S.} \text{ --- } 64 \text{ S.} \text{ --- } 52 \text{ gr.} \\ \quad \quad \quad 52 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ \quad \quad \quad 128 \\ \quad \quad \quad 320 \quad 3328 \left(33\frac{28}{100} \text{ seu } 7\frac{7}{25} \text{ gr.} \right. \\ \quad \quad \quad \text{---} \quad 1100 \\ \quad \quad \quad 3328 \end{array}$$

Quodsi nosse cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ grossi, ita reperies (§. 304).

$$\begin{array}{r} 25 \text{ --- } 7 \text{ --- } 12 \\ \quad \quad \quad 7 \quad 29 \left(3\frac{29}{25} \text{ num.} \right. \\ \quad \quad \quad \text{---} \quad 84 \\ \quad \quad \quad 84 \quad 28 \end{array}$$

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.

SCHOLION VI.

311. In scriptis Arithmeticoꝝ Regula trium inversa occurrit, qua terminus datorum primus duci jubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in Regula trium directa usi sumus (§. 302), quia scilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est, si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. Ex. gr. 125 milites operi exstruendo 6 menses impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 absolvatur. Evidens est, quod sit, ut spatium 2 mensium ad spatium 6 mensium, ita numerus militum, qui opus intra sex menses absolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exstruunt. Quod minore enim temporis intervallo exstruitur,

tur, eo major militum numerus requiritur.
En calculi typum:

$$\begin{array}{r} 2 \text{ M.} \quad \text{---} \quad 6 \text{ M.} \quad \text{---} \quad 125 \text{ Mil.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 6 \qquad} \\ \text{**} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 750 \\ \text{780} \text{ (375 Mil.} \\ \text{222} \end{array}$$

SCHOLION VII.

312. Interdum gemina Regula trium applicatione opus est, antequam numerus questus innotescat. Ea vulgo pro peculiari Regula venditur & ab aliis Regula de quinque, ab aliis Regula composita appellatur. Ex. gr. 300 thaleri dant intra 2 annos usuram 36 thalerorum, quantam dabunt 20000 thaleri intra 12 annos. Hic per Regulam trium primum invenitur, quanta sit usura a 20000 expectanda intra 2 annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra 12 annos existat:

$$\begin{array}{r} 300 \text{ Th.} \text{---} 20000 \text{ Th.} \text{---} 36 \text{ Uf.} \\ \text{+} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 20000 \qquad} \\ \text{720000} \text{ (2400 Uf.} \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 720000 \qquad} \\ \text{330000} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \text{ A.} \text{---} 12 \text{ A.} \text{---} 2400 \text{ Uf.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 12 \qquad} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28800 \text{ (14400 Uf.} \text{---} 4800 \\ \text{222} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 24 \qquad} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 28800 \qquad} \end{array}$$

SCHOLION VIII.

313. Exemplis istiusmodi Regula trium semel applicata satisfacere potest. Cum enim in nostro casu bis 300 thaleri eandem dent usuram intra 1 annum, quam 300 intra 2, & duodecies 20000 tantam intra 1 annum,

quanta 20000 intra 12; ommissis temporis circumstantiis ita inferatur: bis 300, id est 600 thaleri dant usuram (intra annum scilicet) 36, quantam dabunt duodecies 20000, id est 240000 thaleri (iisdem intra annum?)

$$\begin{array}{r} 600 \text{ Th.} \text{---} 240000 \text{ Th.} \text{---} 36 \text{ uf.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 36 \qquad} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 1440000 \quad 22 \qquad} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 72 \qquad} \qquad \underline{\qquad 8640000 \text{ (14400} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 6666600 \qquad} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 8640000 \qquad} \end{array}$$

Posterior hac methodus priori praefertur, quod in illa ad fractionum tedia saepe probabimur.

SCHOLION IX.

314. Dantur & alii casus, in quibus iterata Regula trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. Ex. gr. Lucrum commune trium personarum est 2000 thalerorum, collatum primi 1000, secundi 500, tertii 300: inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:

$$\begin{array}{r} \text{Collatum primi} \quad 1000 \text{ Th.} \\ \text{secundi} \quad 500 \\ \text{tertii} \quad 300 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Summa Collatorum} \quad 1800 \text{ Th.} \\ 1800 \text{ Th.} \text{---} 1000 \text{ Th.} \text{---} 2000 \text{ Th.} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 2 \quad 000 \qquad} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad 2000000 \qquad} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{***} \\ \text{****} \\ \text{*****} \\ \text{*****} \end{array} \left(1111\frac{2}{8} \text{ Lucrum primi.} \right.$$

$$\begin{array}{r} \text{***} \\ 1800 \text{ Th.} - 500 \text{ Th.} - 2000 \text{ Th.} \\ \hline 2 \quad 000 \\ \hline 1000000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{***} \\ \text{****} \\ \text{*****} \\ \text{*****} \end{array} \left(555\frac{10}{8} \text{ Lucrum secundi.} \right.$$

$$\begin{array}{r} \text{**} \\ 1800 \text{ Th.} - 300 \text{ Th.} - 2000 \text{ Th.} \\ \hline 2 \quad 000 \\ \hline 600000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{**} \\ \text{***} \\ \text{****} \\ \text{****} \end{array} \left(333\frac{6}{8} \text{ Lucrum tertii.} \right.$$

EXAMEN.

$$\begin{array}{r} 1111\frac{2}{8} \text{ Lucrum primi} \\ 555\frac{10}{8} \quad \text{secundi} \\ 333\frac{6}{8} \quad \text{tertii} \\ \hline 2000 \text{ Th. Lucrum commune.} \end{array}$$

SCHOLIION X.

315. Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum, in Medicina aut Artibus aliis, ex data ratione quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit ponderis dati. Ex. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est 4, alterius 5, tertii 2 unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit 8 librarum. En calculi typum:

$$\begin{array}{r} \text{Pondus} \left\{ \begin{array}{l} \text{primi} \\ \text{secundi} \\ \text{tertii} \end{array} \right\} \text{ simplicis} \begin{array}{r} 4 \text{ Unc.} \\ 5 \\ 2 \end{array} \\ \hline \text{Summa } 11 \text{ Unc.} \\ 11 \text{ Unc.} - 8 \text{ L.} - 4 \text{ Unc.} \\ \hline 16 \\ \hline 128 \text{ Unc.} \text{ * } \\ 4 \quad \text{***} \\ \hline 512 \quad \text{***} \left(46\frac{6}{11} \text{ Pond.} \right. \\ \quad \quad \quad \text{simp. primi} \end{array}$$

$$11 \text{ Unc.} - 128 \text{ Unc.} - 5 \text{ Unc.}$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad \text{*} \\ \hline \text{---} \quad \text{***} \\ 640 \quad \text{***} \left(58\frac{2}{11} \text{ pond. simp.} \right. \\ \quad \quad \quad \text{secund.} \end{array}$$

$$11 \text{ Unc.} - 128 \text{ Unc.} - 2 \text{ Unc.}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \text{**} \\ \hline \text{---} \quad \text{***} \\ 256 \quad \text{***} \left(23\frac{3}{11} \text{ Pond. simp.} \right. \\ \quad \quad \quad \text{tertii.} \end{array}$$

EXAMEN.

$$\begin{array}{r} \text{Pondus simplicis primi } 46\frac{6}{11} \text{ Unc.} \\ \text{secundi } 58\frac{2}{11} \\ \text{tertii } 23\frac{3}{11} \\ \hline \text{Pondus mixti } 128 \text{ Unc.} = 8 \text{ lib.} \end{array}$$

SCHOLIION XI.

316. Subinde compendiis locus datur, quæ Practicæ Italicæ nomen ferunt. Ex iis utilissima commemoramus. Nimirum quoniam per Regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis (§. 302), primus & secundus (§. 181) vel etiam primus & tertius (§. 183) per eundem, si fieri potest, numerum exacte dividantur, & quoti in ipsorum loca surrogentur: ceu ex subsequente apparet exemplo.

Pre-

Pretium 3 Lib. est 9 Thal. quantum 7 libr.
 3) 1 3 3

Fac. 21 Thal.

Pretium 14 Lib. est 26 Thal. quant. 7 libr.
 7) 2 2) — 1

Fac. 13 Thal.

SCHOLION XII.

317. Si numerus primus vel tertius fuerit 1 & alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, absque reductione in Schol. 5 (§. 310) praescripta calculus initur; ut sequens exemplum docet.

Pret. 1 Lib. est 3 th. 8 gr. 6 num. quant. 5 L.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 16 \text{ th. } 18 \text{ gr. } 6 \text{ num.} \end{array}$$

Manifestum scilicet est, bis 6 nummos conficere grossum unum, adeoque quinquies 6, grossos 2 & nummos 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur, prodibit pretium quaesitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION XIII.

318. Si terminus primus vel secundus fuerit 1, & in priore casu secundus aut tertius, in posteriore primus in factores resolvi potest; integram saepe operationem sine scriptiois subsidio mens absolvit: id quod exempla, quae sequuntur, docent.

Pretium 1 libr. est 24 th. quantum 20 libr.

$$\begin{array}{r} 4 \qquad 4 \\ 6 \qquad \hline 80 \\ 6 \end{array}$$

Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. est 18 th. quantum 1 libr.

$$\begin{array}{r} 3 \qquad 2 \\ 4 \qquad 18 \left(\frac{6}{3} \right) \left(1\frac{1}{2} \text{ th.} \right) \\ 3 \quad * \end{array}$$

Potest etiam numerus datus resolvi partim in factores, partim in partes componentes. Ex. gr. 1 libra constat 9 grossis, quodnam est pretium 35 librarum?

$$\begin{array}{r} \text{Quoniam 1 libra constat 9 grossis} \\ \text{constabunt } 3 \text{ lib. } 1 \text{ thal. } 3 \text{ gr.} \\ \hline 30 \text{ lib. } 11 \text{ thal. } 6 \text{ gr.} \\ 5 \text{ lib. } 1 \text{ thal. } 21 \text{ gr.} \\ \hline 35 \text{ lib. } 13 \text{ thal. } 9 \text{ gr.} \end{array}$$

Hic nempe numerus 35, per quem multiplicatio fieri debet, resolvitur in partes 30 & 5, pars vero altera 30 in factores 3 & 10.

SCHOLION XIV.

319. Si numerorum datorum unus fuerit 1, multa compendia similia multiplicatio & divisio, sine Abaci Pythagorici subsidio peragenda (§. 116, 120), suppeditat. Ex. gr. pretium 9 librarum est 20 thalerorum, quantum est pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium desideratum, si parti decimae illius, id est 2 thaleris, addatur pars nona hujus decimae, id est, $\frac{2}{9}$ unius thaleri, ut adeo inveniatur $2\frac{2}{9}$ thal. Item: Pretium 5 librarum est 54 thalerorum, quantum erit pretium 1 libræ? R. Quoniam pretium quaesitum est quinta pars dati, duplum partis decimae pretii dati $10\frac{2}{9}$ thal. erit quaesitum. Item: Pretium 1 libræ est 18 grossorum, quantum erit librarum 19? R. Quoniam $19 = 20 - 1$, a duplo pretii dati cyphra aucti (360) subducatur simplum (18), residuum erit pretium (342 grossorum) quaesitum.

SCHOLION XV.

320. Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. Ex. gr. Pretium 5 librarum est 30 thalerorum, quantum erit 4 librarum? R. Quoniam pretium 4 librarum una parte quinta deficere debet a pretio 5 librarum; pretium datum 30 dividatur per 5 &

5 & quotus 6 ab eodem subtrahatur, relinquitur quæsitum 24. Item? pretium 8 librarum est 24 thalerorum, quantum erit librarum 9? R. Quia pretium 9 librarum una parte octava excedit pretium 8 librarum, pretium datum 24 dividatur per 8 & quotus 3 eidem addatur, summa 27 erit quæsitum.

SCHOLIUM XVI.

321. Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur. Ex. gr.

Pret. 100 libr. est 30 th. 4 gr. quant. 50 lib.

50) 2 2) — I

Fac. 15 th. 2 gr.

It. Pret. 60 libr. est 80 th. quant. 2520 lib.

60) I 6 42

480 6

7 7

Fac. 3360 thal.

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

DEFINITIO LXI.

322. SI in serie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ secundæ ac tertiæ; eas continue Æquidifferentes voco. Si vero in serie quatuor eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ tertiæ ac quartæ, discretim Æquidifferentes appello. Ita 3, 6, 7 & 10 sunt numeri discretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLIUM.

323. Dicuntur hæ quantitates vulgo arithmetice proportionales, (& vere proportionales, de quibus ante, geometrice proportionales appellari solent, ut ab iis distinguantur :) sed minus proprie, nec ad mentem Veterum.

COROLLARIUM I.

324. Si termini semper crescunt, in continue æquidifferentibus terminus secundus

est aggregatum ex primo & differentia; tertius summa ex secundo & differentia: si decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; secundum aggregatum ex tertio & differentia (§. 106).

COROLLARIUM II.

325. Similiter in discretim æquidifferentibus si termini crescunt, secundus est aggregatum ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia: si vero decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; tertius ex quarto & differentia (§. 106).

THEOREMA LXI.

326. Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes; summa primi & tertii est medii dupla.

DEMONSTRATIO.

4. 7 10

7 4

14=14

Si enim termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, tertius ex secundo & differentia (§. 324), adeoque ex primo

mo & differentia dupla. Quare si tertio addatur primus; summa primi & tertii constabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo secundi dupla. *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si termini decrefcunt.

SCHOLIION.

327. Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:

$$\begin{array}{r} II = I + D \\ III = II + D \\ \hline \end{array}$$

Ergo $III = I + 2D$

Hinc $III + I = 2I + 2D = 2II$.

THEOREMA LXII.

328. Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes; summa primi & quarti æqualis est summa secundi & tertii.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{r} 3-5=8-10 \\ 8 \quad 3 \\ \hline 13 = 13 \end{array}$$

Si termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia (§. 325).

Quare si primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia constat: Si vero secundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo

aggregata inter se æqualia (§. 88). *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si consequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLIION.

329. Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:

$$\begin{array}{r} II = I + D \quad IV = III + D \\ III \quad III \quad I \quad I \\ II + III = III + I + D \quad IV + I = I + III + D \end{array}$$

PROBLEMA XXXIV.

330. Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam sive per 2.

Quotus II erit numerus quæsitus (§. 326).

PROBLEMA XXXV.

331. Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.

RESOLUTIO.

1. Numerus secundus 5 addatur tertio 9.
2. A summa 14 subtrahatur primus 8. Residuus 6 est quartus quæsitus. (§. 328).

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

332. **S**eries quantitatum juxta eandem rationem crescentium vel decrecentium vocatur *Progressio geometrica*. Ex. gr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO LXIII.

333. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium vel decrecentium dicitur *Progressio arithmetica*. Ex. gr. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, vel 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4.

DEFINITIO LXIV.

334. Si numeris in ratione geometrica progredientibus subscribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi*: STIFELIUS in *Arithmetica* sua (a) *Exponentes* vocat. Ex. gr. sint duæ progressiones: Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus sexti 32; 7 logarithmus octavi 128; &c.

COROLLARIUM I.

335. Si progressio arithmetica fuerit series numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi designant distantias numerorum proportionalium ab unitate.

(a) Lib. 3. c. 5. p. 249. b.

COROLLARIUM II.

336. Cumque in progressionem geometricam ab unitate incipiente termini sint dignitates ordine naturali se mutuo excipientes (§. 250, 332); si progressio arithmetica eadem sit, quæ in exemplo allato, logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 251). Ex. gr. 2 est dignitas prima, ejusque exponent 1; 64 dignitas sexta, ejusque exponent 6.

THEOREMA LXIII.

337. Si logarithmus unitatis sit 0; erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. 66). Quare logarithmus facti est æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 334); adeoque differentia inter logarithmum unitatis & summam logarithmorum efficientium (§. 332). Sed logarithmus unitatis est 0, per hypoth. Ergo summa ex logarithmis efficientium est logarithmus facti. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

338. Cum factores quadrati sint inter se æquales, hoc est, Quadratum sit factum ex Radice in seipsam (§. 246); logarithmus Quadrati est duplus logarithmi Radicis.

COROL-

COROLLARIUM II.

339. Eodem modo patet, logarithmum Cubi esse triplum (§. 248); Biquadrati quadruplum; Potentiæ quintæ quintuplum; sextæ sextuplum &c. logarithmi Radicis (§. 250).

COROLLARIUM III.

340. Est ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus Radicis ad logarithmum Potentiæ, seu ipsius Dignitatis (§. 251, 255).

COROLLARIUM IV.

341. Quare logarithmus Potentiæ prodit, si logarithmum Radicis multiplices per exponentem ejus (§. 65); adeoque logarithmus Radicis habetur, si logarithmus Dignitatis per ejus exponentem dividatur (§. 210).

SCHOLIION.

342. Ex. gr. 3 summa logarithmorum 1 & 2 est logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 summa logarithmorum 2 & 5 est logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus Radicis Quadrata 8 est dimidius logarithmi 6 Quadrati 64, & 2 logarithmus Radicis Cubica 4 est subtripulus logarithmi 6 Cubi 64.

THEOREMA LXIV.

343. Si logarithmus unitatis est 0; erit logarithmus quoti æqualis differentia logarithmorum divisoris & dividendi.

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 69). Quare logarithmus quoti est æquidifferentium quartus ad logarithmos divisoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 334), adeoque differentia inter logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331). Sed logarithmus unitatis est 0,

per hypoth. Ergo differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. Q. e. d.

SCHOLIION I.

344. Ex. gr. 2 differentia inter 7 & 5 est logarithmus quoti 4 ex 128 per 32. Similiter 5 differentia inter 8 & 3 est logarithmus quoti 32 ex 256 per 8.

SCHOLIION II.

345. Progressiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hætenus recensitas recenset, atque varios eorum usus monstrat STIFELIUS (a): qui tamen longe cedunt usui logarithmorum in Trigonometria a Justo BYRGIO primum reperto (b), sed a Johanne NEPERO supra laudato primum ostenso (c).

PROBLEMA XXXVI.

346. Numeri cujuscunque logarithmum invenire, ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus construere.

RESOLUTIO.

1. Quoniam 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. progressionem geometricam constituunt (§. 332); eorum logarithmi arbitrario assumi possunt, modo sint numeri in progressionem arithmetica progredientes (§. 334). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur

0. 00000000, 1. 00000000,
2. 00000000, 3. 00000000,
4. 00000000 &c.

L 2

2. Equi-

(a) In Arithmet. lib. 1. c. 4. p. 35. & seqq. & lib. 3. c. 5. p. 249. b. & 50. (b) KEPLERUS in Tabulis Rudolphinis c. 7. f. II. (c) In Mirifici Logarithmorum Canonis descriptione.

2. Equidem manifestum est, (§. 334) numerorum, qui in scala progressionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non posse; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, si usum spectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum esse logarithmum novenarii seu 9. Inter 1.0000000(A) & 10.0000000(B) quæraturs medius proportionalis C (§. 301) & inter eorum logarithmos 0.0000000 atque 1.0000000 medius æquidifferens (§. 330), qui erit logarithmus ipsius C (§. 334), hoc est numeri ternarium superantis $\frac{1622777}{10000000}$, adeoque a novenario multum distantis. Quæraturs inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B

& D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur 9.0000000, hoc est, $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305): qui cum a novenario ne unica quidem particula millionesima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim semper minor esse debet unica millionesima. Quæranturs itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium, & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0.95424251.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras, & convenientes logarithmos singulis assignes, inveniatur tandem logarithmus numeri 2, & ita porro.



CALCULI TYPUS.

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi.		Numerii medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.0000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.5000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.0000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.7500000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.5000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.8750000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.7500000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.0000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.9375000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.8750000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.0000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.9687500	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.9375000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.0000000	V	9.0000041	0.95424271
G	9.3057204	0.9687500	X	8.9999650	0.95424080
H	8.9768713	0.9531250	X	8.9999250	0.95423889
F	8.6596432	0.9375000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.9687500	V	9.0000041	0.95424271
I	6.1398170	0.9609375	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.9531250	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.9609375	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.9531250	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.9531250	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.9531250	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enim vero non opus est, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore investigentur: compositi enim cum per alios numeros dividi possint (§ 76), adeoque & ex aliis se mutuo multiplicantibus (§. 212) oriuntur, eorum logarithmi, per Theor. 63 & 64 (§. 337 & seqq.) inveniuntur. Ex. gr. si logarithmus numeri 9 bifecetur, prodit logarithmus 0.47712125 numeri 3 (§. 338).

COROLLARIUM.

347. Characteristica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10, est 0; pro numeris a 10 ad 100, est 1; pro numeris a 100 ad 1000, est 2; &c.

SCHOLION.

348. Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 usque ad 20000, & a 90000 ad 100000, primus construxit Henricus BRIGGIUS, Professor Geometriæ Savilianus in Academia Oxoniensi, ex consilio tamen primi inventoris NEPERI (a), & methodum construendi una exposuit in sua Arithmetica Logarithmica. Lacunam inter 20000 & 90000 mox explevit Adrianus VLACCUS (b). In libellis vulgaribus habetur tantum Canon logarithmorum pro numeris ab 1 usque ad 10000.

PROBLEMA XXXVII.

349. Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen 10000000.

RESOLUTIO.

1. Refecentur 4 notæ ad sinistram numeri dati, & earum ex Canone excerptur logarithmus.
2. Characteristicæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram residuæ (§. 347).

(a) Vide præfat. ad Arithmetica Logarithm.

(b) In altera editione Arithmetica Logarithmica. BRIGGII.

3. Logarithmus inventus subtrahatur a proxime sequente in Canone.

4. Inferatur: ut differentia numerorum in Canone evolutorum, ad differentiam tabularem logarithmorum ipsius respondentium; ita notæ residuæ numeri dati, ad differentiam logarithmicam, per Probl. 33 (§. 302) inveniendam: quæ si

5. Addatur logarithmo per n. 1 & 2 invento; summa erit logarithmus quæsitus.

Ex. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Refeca quatuor notas 9237 & characteristicam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus respondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc e. logarith. numeri 9238 = 3.9655780 subduc. log. num. 9237 = 3.9655309

relinquitur differ. tabul.	-	-	471
Inferatur: 10	—	471	—
5)	2	—	5
			1
		235	(§. 316).

Jam logarithmo	4.9655309
addatur different. inventa	235

Summa est logar. quæs.	4.9655544
------------------------	-----------

SCHOLION.

350. Differentiæ equidem logarithmorum non sunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis scrupulosi non sumus, methodus tradita sufficit, si præsertim notæ residuæ numeri dati non fuerint adeo multe. Certe in nostro casu adeo exactum reperimus, ut accuratior in Tabulis majoribus BRIGGII non occurrat.

PROBLEMA XXXVIII.

351. Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.

RESO-

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris subtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Residuo præfigatur signum subtractionis —.

Ex. gr. Quærendus est logarithmus fractionis $\frac{2}{7}$.

Logarithmus 7 = 0.8450980

Logarithmus 3 = 0.4771213

Logarithmus $\frac{2}{7}$ = — 0.3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus, ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343); adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus e minore subtrahendus, quo in casu differentia evadit negativa (§. 105). Q. e. d.

SCHOLIUM.

352. Logarithmum fractionis propriæ esse negativum, si unitatis sit 0, jam notavit STIFELIUS (a), & mirum non est. Fractio enim minor unitate (§. 221). Sed unitatis logarithmus est 0 (§. 346). Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.

COROLLARIUM I.

353. Cum in fractione spuria $\frac{2}{7}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 238, 343).

Logarithmus 9 = 0.9542425

Logarithmus 5 = 0.6989700

Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0.2552725

COROLLARIUM II.

354. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt (§. 224); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

(a) In Arithmet. integra, lib. 3. c. 5. p. 249. b.

Logarithmus 23 = 1.3617278

Logarithmus 7 = 0.8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0.5166289

PROBLEMA XXXIX.

355. Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in Tabulis accuratus non occurrit.

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 347);

1. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.

2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas per Probl. 33 (§. 302) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in Tabulis respondet addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

Ex. gr. Quæratnr numerus respondens

Logarithmo 3.7589982

Logarithmus proxime major 3.7590632

Logarithmus proxime minor 3.7589875

Differentia prima 757

Logarithmus datus 3.7589982

— proxime minor. 3.7589875

Differentia secunda 107

757 - 100 = 107 107.00 (14

100 757

10700 313.0

3028

102

Cum numerus logarithmo minori conveniens sit 5741; quaesitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, vel 2 (§. 347); characteristica mutatur

tatur in 3, & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristica unitates accessere (§. 346).

Ex. gr. Quæratür numerus logarithmo 1.9201662 conveniens. Cum in Tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime minori respondet numerus 8321. Est itaque quæsitus $83\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA XL.

356. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis qui in Tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo Tabulæ minor.
2. Quæratür numerus ei respondens (§. 355) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum est numerus quæsitus (§. 346).

Ex. gr. Quærendus est numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui respondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000 factum 57411100 erit numerus quæsitus.

SCHOLIUM.

357. *Facile apparet, subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in Tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio tediosa evadit.*

PROBLEMA XLI.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus Tabulæ, five numeri 10000, hoc est, ille ab hoc subtrahatur.
2. Logarithmo residuo conveniens numerus quæratür (§. 355).

Dico, hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

Ex. gr. Quæratür fractio respondens Logar. defectivo — 0.3679767. Hic ex 4.0000000 subd.

relinquit 3.6320233, cui convenit numerus 4285 $\frac{71}{100}$. Est ergo fractio quæsitæ $\frac{428571}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 138); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 69). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 337.66). Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 305). *Q. c. d.*

PROBLEMA XLII.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuus est logarithmus quarti quæsitæ (§. 302, 337, 343). Ex.

Ex. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.
 Logarith. 68 = 1.8325089
 Logarith. 3 = 0.4771213

 Aggregatum = 2.3096302
 Logarithm. 4 = 0.6020600

 Logarith. quæf. 1.7075702,
 cui in Tabulis respondet numerus 51.

SCHOLION.

360. Problematis hujus usus præstantissimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæsti sunt a BRIGGIO & VLACCO logarithmi, cum NEPERUS tantum Canonem, utut diversæ indolis, logarithmorum pro sinibus & tangentibus construxisset. Tyrones igitur hanc de logarithmis doctrinam tantisper seponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO LXV.

361. **F**ractio decimalis est, cujus denominator est articulus quidam primarius 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 305).

COROLLARIUM I.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION I.

363. Ex. gr. Si fuerit fractio decimalis $\frac{342857}{100000}$, eadem æquivalet huic seriei: $\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$, cujus denominatores 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 in ratione decupla progrediuntur.

COROLLARIUM II.

364. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 (§. 346); si fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ scribatur 3.42857 (§. 306), loco denominatorum numeratoribus solitarie positis opportune tanquam apices adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ scribimus 3°. 4' 2" 8" 5^{iv} 7^v.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

COROLLARIUM III.

365. Quoniam apices, qui sunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in serie numerorum naturalium progrediuntur; sufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omissis, veluti in nostro casu 3.42857^v.

COROLLARIUM IV.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 351), denominator autem fractionis decimalis sit articulus primarius (§. 361), adeoque ejus logarithmus præter characteristicam non nisi meris cyphris constet (§. 346): a characteristica logarithmi numeratoris fractionis decimalis non nisi characteristica logarithmi denominatoris subtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION II.

367. Ex. gr. Si fractio decimalis fuerit 8.735; logarithmus numeratoris 8735 est 3.9412629, denominatoris 1000 vero 3.0000000, adeoque logarithmus fractionis decimalis datae 0.9412629. Si fractio decimalis fuerit 0.324; logarithmus numeratoris est 2.5105456, denominatoris 1000 vero 3.0000000; consequenter logarithmus fractionis decimalis — 1.5105456. *Iidem ergo sunt*

M

sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant.

COROLLARIUM V.

368. Quia characteristica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem est cum apice ultimæ notæ (§. 364); logarithmus fractionis decimalis prodit, si a logarithmi numeratoris characteristica apex ultimæ notæ subducitur (§. 366).

SCHOLIUM III.

369. *Ex. gr. In fractione decimali 8.735¹¹ apex ultima notæ est 3; a logarithmi igitur numeri 8735, qui est, 3.9412629, characteristica 3 subducitur ternarius, ut prodeat logarithmus fractionis decimalis 0.9412629. Apex iste tot continet unitates, quot denominator habet cyphas, seu quot a puncto sequuntur notæ: unde patet, si nullus adscriptus fuerit apex, tot unitates a characteristica numeratoris subduci, quot denominator cyphas habet, seu quot notæ punctum sequuntur.*

DEFINITIO LXVI.

370. *Fraçtio decimalis exacta est, quæ veram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum.*

Ex. gr. $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit $8:10 = 4:5$ (§. 181).

DEFINITIO LXVII.

371. *Fraçtio decimalis approximans est, quæ rationem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram; nempe vel vera minorem, vel majorem; defectu tamen vel excessu infra unitatem notæ ultimæ convenientem existente.*

Ex. gr. $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42858 . Exprimit adeo fraçtio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem nonnisi prope veram, defectu scilicet existente minore quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXVIII.

372. *Notæ fractionum decimalium ejusdem ordinis dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.*

Ex. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0.42857 & 0.0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex¹¹: nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XLIII.

373. *Fraçtiones decimales addere, vel a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales, perinde ac numeri integri, constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 364); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis, additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 98, 103) nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 371).

Vide exempla

I. Additionis:

3.50782	0.0638
0.0003	0.00562
51.247	7.138
54.75512	7.20742

II. Subtractionis.

2.7864	0.95436
0.158	0.08512
2.6284	0.86924

PROBLEMA XLIV.

374. *Fraçtiones decimales per se invicem multiplicare.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), multiplicatio peragitur ut in integris (§. III); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 337).

Ex. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$ hoc est, 0.42857

0.42857		per 0.0047 multiplicatio peragitur communi more du-
0.0047		cendo 42857 primum in 7, & deinde in 4, sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris
299999		
171428		
0.002014279		

4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

COROLLARIUM I.

375. Quodsi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri possit, ut multipulum notæ deficientis, quæ ultimam 6 proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multipulum notæ ultimæ 6 inde augeatur (§. III); in facto numerus locorum,

2.3576+		ut multipulum notæ deficientis, quæ ultimam 6 proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multipulum notæ ultimæ 6 inde augeatur (§. III); in facto numerus locorum,
0.34		in quibus notæ sunt incertæ, numerum notarum in factore exacto unitate superat, veluti in nostro exemplo notæ tres ultimæ 584 sunt incertæ, adeoque factum sumitur 0.801.
94304		
70728		
0.801584		

in quibus notæ sunt incertæ, numerum notarum in factore exacto unitate superat, veluti in nostro exemplo notæ tres ultimæ 584 sunt incertæ, adeoque factum sumitur 0.801.

COROLLARIUM II.

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in factore incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero 6, adeoque nonnisi duæ notæ finisteriores 11 certæ sunt.

18.357		notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero 6, adeoque nonnisi duæ notæ finisteriores 11 certæ sunt.
6.34		In exemplo anteriore si factor 0.34 ponatur quoque approximans, nulla prorsus nota certa est.
73428		
55071		
110142		
116.38338		

COROLLARIUM III.

377. Quodsi nota deficiens, quæ proxime sequitur, ultimæ fuerit æqualis in multiplicando & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multipulum notæ dextimæ, ut nulla in facto nota incerta evadat.

0.6666		Ex. gr. in nostro exemplo, ubi nota deficiens est 6, facto ex 6 in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex 6 in 6 adduntur 3.
6.8		
53332		
39999		
453322		

SCHOLION.

378. Casus alios brevitatæ gratia prætermittimus.

PROBLEMA XLV.

379. Fractionem decimalem per decimalem dividere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), divisio peragitur ut in numeris integris (§. 117); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364),

apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 343), & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

Ex. gr. Si 0.002014279 dividatur per 0.0047, quotus est 0.42857 (§. 374, 210). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3, & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra. cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0.002014279 dividatur per 0.42857, quotus est 0.0047 (§. cit.). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 364), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0.0047.

COROLLARIUM I.

380. Quodsi divisor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel justo major, vel minor (§. 371); factum ex divisore in quotum duabus ultimis notis deficere potest. Quare cum a notis dividendi vel justo plus, vel minus subtrahatur; ubi divisor ad easdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. Ex. gr. Si dividendus fuerit 21.3456 & divisor 3.82 fractio approximans, nonnisi unica nota quoti 5 certa est.

COROLLARIUM II.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, divisor exactus; nonnisi notam quoti ultimam subinde incertam evadere posse patet.

COROLLARIUM III.

382. Si & divisor, & dividendus fue-

rint fractiones approximantes, evidens est porro in determinandis locis certis respiciendum esse vel dividendum, vel divisorem, prout divisoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ divisoris notæ. Ex. gr. Si divisor sit 2.5786, dividendus 3.067, adeoque cyphris augendus, ut divisio fieri possit; evidens est certitudinem expirare in nota tertia dividendi 6, consequenter junctis duabus cyphris divisionem eo usque continuari, ut prodeat quotus certus 1.1.

PROBLEMA XLV.

383. *Notas certas, in multiplicatione & divisione fractionum decimalium approximantium, accuratius determinare.*

RESOLUTIO.

Notæ factorum dextimæ sumantur nunc justo majores, nunc justo minores; in divisione nunc nota dextima in dividendo justo major, in divisore justo minor & contra: quæ in utraque multiplicatione ac divisione eadem proveniunt notæ, eæ sunt accuratæ.

Quodsi ergo in exemplo superiori multiplicationis, ubi notæ ultimæ factorum ponuntur justo minores, eorum loco sumantur 18.358 & 6, 35; factum quod obtinetur 116.57330 convenit cum superiori 116.38338 quoad tres notas dextimas 116: eæ igitur solæ certæ sunt. Patet autem certam sic fieri notam tertiam 6, quæ per superiora in dubio relinquebatur (§. 376). Similiter si in exemplo divisionis superiori (§. 382) nunc 3.068 dividas per 2.5786, nunc 3.067 per 2.5787, quotus utrobi-

$$\begin{array}{r}
 18.358 \\
 \underline{6.35} \\
 91790 \\
 55074 \\
 \hline
 110148 \\
 \hline
 116.57330
 \end{array}$$

utrobique est 1. 1: unde patet, nonnisi duas istas notas certas esse, quas superius tales agnovimus.

SCHOLION.

384. Ipsa praxis loquetur, nos subinde

posse esse contentos, quod notas certas agnoscamus, qua per superiora (§. 376, 382) tales deprehenduntur, ut adeo tadio repetita multiplicationis vel divisionis supersedere queamus.

C A P U T X.

De Fractionibus Sexagesimalibus.

DEFINITIO LXIX.

385. **F**ractiones sexagesimales sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla. Dicuntur etiam *Minutia physicales*.

SCHOLION.

386. Ex. gr. Si integrum sit 1, fractiones istiusmodi sunt $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1, 60, 3600, 216000, 12960000, &c. sunt 0, 1, 2, 3, 4, &c. (§. 334); si fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitarie positis, perinde ac in fractionibus decimalibus, tanquam apices adjiciendi sunt logarithmi. Ex. gr. $\frac{3}{4} = 3^0$, $\frac{35}{60} = 35'$, $\frac{46}{3600} = 46''$ &c.

DEFINITIO LXX.

388. Pars sexagesima integri dicitur *Minutum sive scrupulum primum*; pars sexagesima minuti primi *Minutum sive scrupulum secundum*; pars sexagesima minuti secundi *Minutum sive scrupulum tertium*, & ita porro.

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex, sive index, est 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro (§. 387).

SCHOLION.

390. Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari queant.

PROBLEMA XLVI.

391. Fractiones sexagesimales addere.

RESOLUTIO.

Additio eodem prorsus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam summam colliguntur (§. 99).

Ex. gr. $35^0 \quad 46' \quad 8'' \quad 15'''$
 $17 \quad 20 \quad 15 \quad 40$
 $14 \quad 18$

53 20 41 55

PROBLEMA XLVII.

392. Fractiones sexagesimales a se invicem subtrahere.

RESOLUTIO.

Subtrahuntur a se invicem eodem prorsus modo, quo numerorum heterogeneorum subtractio fieri solet (§. 104).

Ex. gr. $28^0 \quad 15' \quad 4'' \quad 20'''$
 $17 \quad 29 \quad 18 \quad 45$

10 45 45 35

Nimirum unitas mutuo petita a specie majore hic valet 60. Ita $1'' = 60'''$, $1' = 60''$, $1^0 = 60'$ (§. 388).

PROBLEMA XLVIII.

393. Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.

M 3

RESO-

RESOLUTIO.

Multiplicatio fractionum sexagesimalium coincidit cum multiplicatione decimalium (§. 374), nisi quod ex specie minore abjiciatur toties sexagenarius, quoties fieri potest, & tot species proxime majori addantur unitates, quoties sexagenarius fuit abjectus (§. 388): id quod divisio per 60 prodit (§. 223).

Ex.gr. Si multiplicandus $3^{\circ} 15' 38''$, multiplicator $2^{\circ} 18' 47''$. Duc singulas partes multiplicandi 1° . in 47, 2° . in 18, 3° . in 2; erit factum ex 38 in 47 = 1786 scr. quartis = $29''' 46^{iv}$. Scribuntur adeo 46 pro specie minima infra lineam cum suo apice & $29'''$ reservantur speciei proxime sequenti annumeranda. Cum igitur factum ex $47''$ in $15' = 705'''$; additis 29 prodibunt $734''' = 12'' 14'''$. Scribuntur adeo 14 infra lineam & $12''$ reservantur facto proxime sequenti ex 3° in $47''$ addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam summam (§. 391) collecta exhibent factum quæsitum $7^{\circ} 32' 30'' 38''' 46^{iv}$ aut, si prope verum quæsieris, $7^{\circ} 32' 31''$, cum species proxime major dimidium illius superet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum:

	3°	15'	38''	
	2	18	47	
	2	33	14	46 ^{iv}
	58	41	24	
	6	31	16	
	7°	32'	30''	38''' 46 ^{iv}

SCHOLION.

394. Ne tædia divisionis devoranda sint, constructus est Canon hexacontadon, qui facta in species resoluta exhibet, veluti factum ex 38 in 47 = 29. 46. Ratio constructionis ex operatione in Problemate præcepta patet; modo notetur, perinde ac in Abaco

Pythagorico (§. 109), factorum unum a latere, alterum in fronte Canonis describi.

PROBLEMA XLIX.

395. Fractiones sexagesimales per sexagesimales dividere.

RESOLUTIO.

Divisio peragitur ut in fractionibus decimalibus; nisi quod in multiplicatione quoti per divisorem tenenda sint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393), & ubi species dividendi prima fuerit minor specie divisoris prima, ista reducenda sit ad speciem proxime minorem, & sequenti addenda, ut divisioni sit locus.

Ex. gr. Si $7^{\circ} 32' 30'' 38''' 46^{iv}$ dividere jubeamur per $2^{\circ} 18' 47''$; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco scribe 3° . Duc 3° in $2^{\circ} 18' 47''$ & factum $6^{\circ} 56' 21''$ subtrahe ex $7^{\circ} 32' 30''$, ut relinquatur $36' 9''$. Junge residuo speciem sequentem 38 & divisionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit absoluta; quemadmodum ex typo exempli liquet:

$2^{\circ} 18'$	$7^{\circ} 32'$	$30''$	$38'''$	46^{iv}	($3^{\circ} 15'$	$38''$
$47''$	6	56	21	::	::	
	36	9	38	::		
	34	41	45	::		
	1	27	53	::		
	five	87	53	46		
		87	53	46		
		o				

SCHOLION.

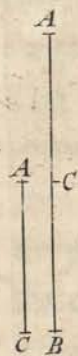
396. Non absimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque absolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, qua olim in divisione mensura linearum obtinuit.

Fig: Arithm:

Fig: 2.

1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	12
4	0	4	8	12	16
5	0	5	10	15	20
6	0	6	12	18	24
7	0	7	14	21	28
8	0	8	16	24	32
9	0	9	18	27	36

Fig: 1.



5	6	7	8	9
1	1	1	1	1
1	5	8	1	4
1	1	2	1	2
2	0	4	8	2
2	2	2	3	3
2	5	0	5	0
2	3	3	4	4
3	0	6	2	8
3	3	4	4	5
3	5	2	9	6
3	4	4	4	6
4	0	8	6	4
4	4	4	6	7
4	5	4	3	2
4	4	5	6	7
4	4	5	6	7

Fig: 3.

1	5	0	7	8
2	1	0	1	4
3	1	5	7	1
4	2	0	3	2
5	2	5	3	5
6	3	0	4	2
7	3	5	3	0
8	4	0	7	2
9	4	5	3	1

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

P R Æ F A T I O.



PREXIGUUS est eorum numerus , qui Geometriæ pretium suum statuunt : notatione enim delusi cum Arte agrimensoria eam pessime confundunt , nec ea animo ipsorum observatur idea , quam nomen tam augustum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis distinctæ fundamenta jacet Geometria cum Arithmetica , ita ut non minor in scientiis quam in artibus ejus sit usus. Equidem ob Problemata , quorum resolutionem trado , nonnisi ad locorum distantias variorumque objectorum altitudines , agrorum & camporum areas , corporumque molem dimetiendum conducere videtur ; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit , cum ad reliquas Matheseos partes inferius applicabitur. Non hic repeto , quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam superius (a) dicta sunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ studium , a rigore in demonstrando recedendum minime fuit. Hinc definitio , quæ vulgo definiri non solent , & passim demonstro , quæ sine probatione:

(a) In Commentat. de Methodo §. 52, 53.

tione ad aliis assumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic ausus; sed sufficit eum probari peritis, & quod majus est, methodum nostram præstare, ne extra Mathesin ratiocinaturi in scopulos incidamus, in quos plerumque omnes hæctenus incidisse, supra etiam (b) annotavimus. EUCLIDES & ejus exemplo hæctenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia: sed cum ingeniosissimus LEIBNITIUS similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret multum ejus in Geometria esse usum; ego vero meditatus amplissimum deprehenderem; similitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonstrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonnisi per ambages demonstrari solent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum constructiones inter principia demonstrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inserviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea similitudinis notione uti, cum *Leibnitiana* clarior sit. Tyrones, definitionibus evolutis, neglecta demonstratione Problemata solvant. Hoc labore perfuncti ex Theorematum hypothesebus figuras construunt, & demonstrationes empiricas superaddant, quarum in ipsa pertractatione fit mentio (c). Tandem eo ordine Elementa relegant, quo conscripta sunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu possunt habere attentam, difficultates non sentient, etiamsi prima statim vice ad singula animum advertant,

(b) L. c. §. 52.

(c) In Schol. Theor. 7. §. 158.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIO I.

I. **G**eometria est Scientia extensorum quatenus terminata sunt, hoc est, Linearum, Superficierum, & Solidorum.

SCHOLION.

2. Quomodo extensio ex simultanea alicujus rei per locum diffusionem oritur; ita in mente representatur, dum multa in uno continuo simul percipimus. Hinc notio extensionis non modo totius ac partium notiones involvit (§. 9 Arith.); sed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, superficies, ac solida representari possunt. Unde est, quod Geometria rebus plurimis applicari possit, ejusque adeo quam latissime pateat usus.

DEFINITIO II.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Nempe *Congruentia* est coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. Ne definitio negotium facessat, vitanda *Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.*

est vocis termini equivocatio: id quod in sequentibus satis cavetur. A termini vero definitione consulto abstinemus, ne ad demonstrationes metaphysicas dilabamur.

DEFINITIO III.

5. *Eundem situm habere* dicuntur, inter quæ idem extensum poni potest.

DEFINITIO IV.

6. *Punctum* est, quod quaquaversum seipsum terminat, seu quod non habet terminos alios a se distinctos.

COROLLARIUM I.

7. Ergo omne punctum alteri cuicumque congruit (§. 3).

COROLLARIUM II.

8. Nec ullas in eo distinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc EUCLIDES*: Punctum est, inquit, cujus pars nulla est. *Nec sine ratione punctum.*

N

punctum.

punctum ut individuum concipiunt Geometra, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipsa geometrica summo cum studio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus existit.

DEFINITIO V.

Tab. I. IO. *Linea* describitur, si punctum Fig. I. ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

11. Termini igitur lineæ secundum longitudinem sunt puncta A & B; secundum latitudinem & profunditatem ipsa sui terminus est (§. 6).

COROLLARIUM II.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8); linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

SCHOLION I.

13. *Quid ergo mirum, quod secundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a se distinctos, vi Cor. I (§. 11)?*

SCHOLION II.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una a reliquis actu separari queat; necessarium tamen ac perutile est, ut unam absque reliquis consideremus. Necessitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abstractionem divellere tenetur, quæ nexu indivulso natura conjunxit. Utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem, neglectis ceteris, cognoscere jubemur; ex. gr. altitudinem turris sine latitudine ac profunditate ipsius, latitudinem fluminis sine longitudine ac profunditate ejusdem.*

DEFINITIO VI.

15. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLION.

16. *Ita ex. gr. distantia arboris a domo est linea brevissima, qua ab illa ad hanc duci potest.*

DEFINITIO VII.

17. *Linea recta* AB est, cujus pars Tab. I. quæcumque est toti similis. Fig. I.

COROLLARIUM I.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt nisi quantitate (§. 26 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

19. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 10); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim, diversitate hujus motus, partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 24 *Arithm.*), contra definitionem (§. 17). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate, ac directione; celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio; consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM I.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.*

POSTULATUM II.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO VIII.

22. *Linea curva* est, cujus partes toti dissimiles.

DEFINITIO IX.

23. *Metiri* idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere ac aliarum

rum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, qua pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

SCHOLION.

24. *Hac Definitio latiori praxi respondet: strictius EUCLIDES mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri fit equalis: quam nos, in Arithmetica, partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO X.

25. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas*; & ita porro.

SCHOLION.

26. *Mensuræ longitudo & divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias, præter Willebrordum SNELLIUM (a), exponunt RICCIOLUS (b), MALLETTUS (c), EISENSCHMIDIUS (d), alique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat Tabula sequens in particulis istiusmodi, quælium Pes regius Parisinus est 1440. Continet is nempe 12 digitos, digitus 12 lineolas, lineola 10 particulas, adeoque Pes integer particulas 1440.*

(a) In ERATOSTHENE BATAVO, lib. 2. c. 1. usque ad 5. p. 121. & seqq.

(b) In Geogr. Reform. lib. 2. c. 7. f. 43 & seqq.

(c) Geometrie pratique, lib. 1. p. 108.

(d) In Disquisit. nova de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hebr. Sect. 3. c. 1. p. 93. & seqq.

Pes Regius		Constanti-	
Parisius	1440	nopolitanus	3120
Rhenanus	1391 $\frac{2}{10}$	Bononiensis	1682 $\frac{2}{7}$
Romanus	1320	Argentorat.	1282 $\frac{2}{4}$
Londinen.	1350	Norimberg.	1346 $\frac{2}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	1271 $\frac{1}{2}$
Danicus	1403 $\frac{2}{7}$	Halensis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION II.

27. *Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit STEVINUS, teste ipsius Geometria practica, dubio procul exemplo REGIOMONTANI. Indicem autem decempedarum constituit 0, pedum 1, digitorum 2, linearum 3 &c. tanquam denominatorum logarithmos (§. 364 Arithm.) quos circello inclusos numeris adscribit. Sed commodius Joannes BAYERUS in Logistica decimali & Stereometria logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. Ex gr. tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo lineæ ita scribuntur: 3° 5' 7" 8". Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra, sive decempedas, designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica (§. 306). Ita loco 3° 5' 7" 8" scribemus 3. 578. Admodum R. P. FRANCISCUS NOEL autor est (e), divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus Sincis adhiberi.*

DEFINITIO XI.

28. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

29. *Termini superficiei secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ; secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.*

N 2

SCHO-

(e) In Observationibus Mathematico-Physicis in India & China factis, c. 7. p. 104 & seqq.



SCHOLIUM.

30. *Nimirum in longitudine nullum assumi potest punctum, cui non respondeat aliqua linea secundum latitudinem, & contra.*

DEFINITIO XII.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XIII.

32. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLIUM.

33. *Dicitur tam de superficiebus, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt linea; in posteriori superficies.*

DEFINITIO XIV.

34. *Figura rectilinea* est, cujus perimenter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimenter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimenter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

DEFINITIO XV.

35. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO XVI.

36. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVII.

Tab. I. Fig. 2. 37. *Circulus* est figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO XVIII.

38. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XIX.

39. *Diameter* AE est chorda per Tab. I. centrum C transiens. Ejus dimidium Fig. 2. AC, five recta CD ex centro C ad peripheriam ducta, dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

40. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§. 37).

DEFINITIO XX.

41. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AFB: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet primum in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur. EUCLIDES arcum quoque *peripheriam* vocat.

COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLIUM.

43. *Scrupula graduum* sunt fractiones sexagesimales (§. 385 Arithm.) & apicibus suis notantur (§. 387 Arithm.). Gradui tanquam integro, seu unitati, cessit 0; minuto primo 1; secundo 2; tertio 3; &c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis (§. 27). Ex. gr. 3 gradus, 25 minuta, 16 secunda, ita scribes: 3° 25' 16". Etsi autem Ægyptii veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec sine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, exacte divi-

dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decrefcunt, quem 2, 3, 4, 5 & 6 metiuntur; non tamen sine ratione fuaserunt, post STEVINUM (a), OUGHTRE-
DUS (b), WALLISIUS (c), aliique, ut sepofitis fractionibus sexagesimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus est; sexagesimales vero non sine radio reducuntur. Multiplicatio quoque & divisio decimalium facilius quam sexagesimalium (§. 364, & feqq. 393, & feqq. Arithm.). Id confilium fecuti funt Henricus BRIGGIUS in Canone triangulorum artificiali apud Henricum GELLIBRAND in Trigonometria Britannica, Joannes NEWTON in Aftronomia pariter ac Trigonometria Britanica, & Nicolaus MERCATOR in Institutionibus Aftronicis. STEVINUS (d) contendit, eandem circuli divisionem antiquitus, in Seculo fapiente, quod adstruere conatur, obtiniffe.

DEFINITIO XXI.

44. Circuli concentrici funt, qui idem centrum habent: *Excentrici* vero, qui habent diverfa.

DEFINITIO XXII.

Tab. I. Fig. 2. 45. Segmentum circuli est pars ipsius AFBA, arcu AFB & chorda AB comprehenfa. Dicitur Segmentum majus, quod femicirculo majus est; minus vero, quod minus est.

DEFINITIO XXIII.

46. Sector circuli est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD, atque arcu AD comprehenfa.

DEFINITIO XXIV.

Tab. I. Fig. 3. 47. Recta HI circulum in L tangit, fi ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero cir-

culum intus tangit, fi huic occurrens totus intra hunc; extus vero tangit, fi eodem occurrens totus extra hunc cadit.

COROLLARIUM I.

48. Recta CL, ex centro C ad contactum L ducta, est radius circuli (§. 39).

COROLLARIUM II.

49. Circuli ergo fe extus tangent in L diverfa centra C & c habent, adeoque eccentrici funt (§. 44).

DEFINITIO XXV.

50. Linea AB lineam CD fecat in E, fi eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam fitas.

COROLLARIUM I.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD fitas; fi AB fecet CD in E, etiam viciffim CD fecabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM II.

52. Si recta MN circulum in O fecet, pars ejus ON intra circulum cadit.

COROLLARIUM III.

53. Si circulus circulum fecet, cum utriusque peripheria in fe redeat, pars peripheria unius circuli intra alterum cadat necesse est.

DEFINITIO XXVI.

54. Angulus est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur Crura; punctum concursus A Vertex anguli.

SCHOLIUM.

55. Angulus hic, vel unica littera A vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus litteris BAC indigitatur, ita ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sape nomen angulo imponit littera minor, veluti x, eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.

(a) In præf. ad Tract. de Logistica decimali.
(b) Clavis Mathematicæ. c. 1. p. m. 2.
(c) Algebra c. 9. f. 39. Vol. II. Oper. Math.
(d) In Cosmographia lib. 1. def. 6. f. 109. Operum Gallice editorum.

DEFINITIO XXVII.

56. *Angulus insistere* dicitur linear, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVIII.

Tab. I. Fig. 9. 57. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A, radio prorsus arbitrario AE, intra crura ejus AC & AB descriptus.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§. 41 *Geom.* & §. 132 *Arithm.*). Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLIUM.

59. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE* (§. 41).

DEFINITIO XXIX.

Tab. I. Fig. 10. 60. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt, quorum idem est vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXX.

Tab. I. Fig. 6. 61. *Rectæ linear* AE & EB in directum sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt.

DEFINITIO XXXI.

62. *Angulus deinceps positus* AEC dicitur, qui oritur anguli AED latere uno ED in C producto.

COROLLARIUM I.

63. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune, & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 61).

COROLLARIUM II.

64. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, sed non contra (§. 60).

DEFINITIO XXXII.

65. *Angulus rectus* KLM est, cui Tab. I. deinceps positus KLN æqualis est. Fig. 11.

DEFINITIO XXXIII.

66. *Angulus obliquus* AEC est, cui Tab. I. deinceps positus AED inæqualis. An. Fig. 6. *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major.

DEFINITIO XXXIV.

67. *Anguli verticales*, α & x , sunt, Tab. I. si crura unius AE & EC in directum Fig. 6. jacent cruribus alterius EB & ED.

DEFINITIO XXXV.

68. Si linear ST duæ aliæ OA & Tab. I. RB a diversis plagis in diversis punctis Fig. 12. A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, x & y , dicuntur *alterni*.

DEFINITIO XXXVI.

69. Si vero linear ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, u & y , item z & y , dicuntur *oppositi*: & quidem u dicitur *oppositus externus*, z vero *oppositus internus* ipsius y .

DEFINITIO XXXVII.

70. *Angulus ad peripheriam* est an Tab. I. gulus ABD, cujus vertex B & crura Fig. 13. BA atque BD in periphèria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*.

COROLLARIUM.

71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38 & 54), atque arcui AD infistit (§. 56).

DEFINITIO XXXVIII.

72. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in periphèria terminantur. Co-

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 13. 73. *Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur* (§. 39), atque arcui AD infistit (§. 41, 56); consequenter arcus AD ejus mensura (§. 57).

DEFINITIO XXXIX.

Tab. I. Fig. 14. 74. *Angulus extra centrum HKI est*, cujus vertex K extra centrum est, crura vero HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

75. Infistit ergo arcui HI (§. 41, 56).

DEFINITIO XL.

Tab. I. Fig. 3. 76. *Angulus contactus HLM est*, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit.

DEFINITIO XLI.

77. *Angulus segmenti MLH vel MLI est*, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DEFINITIO XLII.

Tab. I. Fig. 11. 78. *Linea KL perpendicularis aut normalis est ad alteram LM*, si cum ea efficit rectum angulum.

COROLLARIUM.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 65), & contra.

DEFINITIO XLIII.

Tab. I. Fig. 9. 80. *Linea AB est ad alteram AC obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XLIV.

Tab. I. Fig. 12. 81. *Linea OP parallela est alteri QR*, si ubique eandem ab ea distantiam servat.

COROLLARIUM.

82. *Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.*

DEFINITIO XLV.

83. *Linea convergentes TO & VQ sunt*, quarum distantia continuo fit minor. Tab. II. Fig. 15.

DEFINITIO XLVI.

84. *Linea divergentes TN & VP sunt*, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO XLVII.

85. *Opponi dicuntur*, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. *Puncta, absolute considerata, dicuntur punctis opponi, si fuerint termini ejusdem rectæ. Nimirum cum recta sit brevissima linea inter duos terminos (§. 191), qualis etiam est perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel superficiem duci possunt (§. 224); perpendicularis vicem in eo casu subit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel superficiem sumitur.*

DEFINITIO XLVIII.

87. *Triangulum est figura tribus lineis terminata.*

DEFINITIO XLIX.

88. *Triangulum æquilaterum ABC est*, Tab. I. Fig. 16. *cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere Figura æquilatera dicitur, cujus latera singula inter se æqualia.*

DEFINITIO L.

89. *Triangulum æquicrurum five Isosceles DEF est*, Tab. I. Fig. 17. *quod duo latera æqualia habet.*

DEFINITIO LI.

90. *Triangulum scalenum ACB est*, Tab. I. Fig. 18. *cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia.*

DEFI-

DEFINITIO LII.

Tab. I. 91. *Triangulum rectangulum* KML
Fig. 19. est, cujus angulus unus K rectus est.

DEFINITIO LIII.

Tab. I. 92. *Triangulum obtusangulum* PNO
Fig. 20. est, cujus angulus unus N est obtusus.

DEFINITIO LIV.

Tab. I. 93. *Triangulum acutangulum* ACB
Fig. 16. est, cujus singuli anguli sunt acuti.

DEFINITIO LV.

94. *Triangulum obliquangulum* est,
cujus singuli anguli sunt obliqui.

DEFINITIO LVI.

Tab. I. 95. *Hypothenuſa* ML est latus, in
Fig. 19. triangulo rectangulo, angulo recto K
oppositum.

DEFINITIO LVII.

96. *Catheti* sunt latera trianguli
rectanguli MK & KL angulum rectum
K intercipientes.

DEFINITIO LVIII.

97. *Figura quadrilatera* est, cujus
perimeter ex quatuor lateribus constat.
Rectangula dicitur, si anguli ejus sin-
guli fuerint recti; *obliquangula*, si obli-
qui.

DEFINITIO LIX.

Tab. I. 98. *Quadratum* ABDC est figura
Fig. 21. quadrilatera, æquilatera, rectangula.

DEFINITIO LX.

Tab. I. 99. *Rhombus* EFHG est figura qua-
Fig. 22. drilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LXI.

Tab. I. 100. *Rectangulum*, sive *oblongum*,
Fig. 23. MLKI est figura quadrilatera, rectan-
gula, latera opposita ML & IK, item
IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LXII.

101. *Rhomboides* NOPQ est figura Tab. I.
quadrilatera, obliquangula, latera op- Fig. 24.
posita OP & NQ, item ON & PQ,
æqualia habens.

DEFINITIO LXIII.

102. *Parallelogrammum* est figura
quadrilatera, cujus latera opposita sunt
parallela.

DEFINITIO LXIV.

103. *Trapezium* RTUS est figura Tab. I.
quadrilatera, non parallelogramma. Fig. 25.
Quidam *Trapezium* appellant figuram
quadrilateram, cujus duo tantum latera
opposita sunt parallela, quæ alias *Tra-
pezium parallelarum basium* dici solet:
figura vero, cujus neutrum latus alteri
parallelum, *Trapezoides* iisdem dicitur.

DEFINITIO LXV.

104. *Figura polygona*, seu *multilate-* Tab. I.
ra, ABCED, vel FGHIK, est, cujus pe- Fig. 26.
rimeter ex pluribus, quam quatuor, 27.
lateribus componitur. Quodsi latera
fuerint quinque, *Pentagonum*; si sex,
Hexagonum; si septem, *Heptagonum*;
si octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO LXVI.

105. *Figura equiangula* est, cujus
singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXVII.

106. *Figura regularis* est figura
æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVIII.

107. *Figura irregularis* est, quæ non
simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXIX.

108. *Figura inter se æquilatera* di-
cuntur,

cuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXX.

109. *Figura inter se æquiangula* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO LXXI.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servant.

DEFINITIO LXXII.

Tab. I. III. *Diagonalis* PN est recta ex Fig. 24. vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXXIII.

Tab. I. III. *Basis figura* est perimetri pars Fig. 19. ima KL.

COROLLARIUM.

113. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem, seu latus figuræ quodlibet, pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXXIV.

Tab. I. III. *Vertex figura* M est vertex Fig. 19. anguli basi KL oppositi.

DEFINITIO LXXV.

115. *Altitudo figura* est distantia verticis a basi.

DEFINITIO LXXVI.

116. *Figura* ABCDE dicitur *Circulo* Tab. VI. *inscripta*, si peripheria per vertices Fig. 107. singulorum angulorum ipsius transit; tuncque *Circulus figura* dicitur *circumscriptus*.

DEFINITIO LXXVII.

117. *Figura* abcde dicitur *Circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant; tumque *Circulus figura* dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO LXXVIII.

118. *Mensura figura* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*; & in pedes quadratos, sicut pes quadratus in digitos quadratos dividitur.

DEFINITIO LXXIX.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, & utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent; adeoque similia sunt (S. 24 Arith.)

CAPUT II.

De Propositionibus quibusdam Fundamentalibus.

PROBLEMA I.

Tab. I. 121. **A** Dato puncto A ad datam Fig. 28. punctum B lineam rectam ducere.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

RESOLUTIO.

I. In charta Tab. I. Linea recta ducitur juxta regulam Fig. 28. EF ad puncta data A & B applicatam gra-



Tab. I. graphio HI, penna, aut plumbagine.

Fig. 28. II. In ligno vel faxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum, creta vel cerussa delibutum, punctis datis A & B apprimatur, & medio digitis prehensio, sursum trahatur, moxque iterum demittatur.

III. In campo

Tab. I. Recta designatur per baculos LK in punctis datis, beneficio libellæ M, ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum summitati muccinum, aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

SCHOLION I.

122. Cum regula orichalcea & argentea chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebenina. His enim accuratam politiem inducere licet, ne sordes facile adhaerescant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nucis, & his similibus familiare vitium.

SCHOLION II.

123. Pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod, anserinis duriores, lineis subtilioribus & purioribus ducendis inserviunt. Baculi vero LK cuspidate ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra, præsertim duriore, desigi queant.

SCHOLION III.

124. Utendum vero est atramento, non communi, sed Sinico: tum quia commune ob corrosivitatem vitrioli, quod ipsum ingreditur, chalybeam graphii cuspidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiam si atrium sit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.

PROBLEMA II.

125. Duobus baculis in solo defixis, tertium, vel plures, in eadem recta cum iis infigere.

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non apparent.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in *Opticis*.

PROBLEMA III.

126. Lineam rectam metiri.

RESOLUTIO.

Ad manus sit necesse est mensura Tab. I. (§. 23). Nimirum, pro lineis in charta Fig. 30. datis, abscondantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 25). In campo; vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes, & decempedas legitime divisus utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes, & pedem ultimum in digitos dividi. Quod si ergo lineam rectam metiri jubearis;

I. In charta,

1. Ponatur crus circini unum in A & eo usque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.
2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, ex. gr. in 10 ponatur, & notetur quemnam pedem mensuræ alterum attingat, ex. gr. 5. Erit linea AB, 1° 5'.

II. In Campo,

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121), & si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125).

2. Fu-

2. Funis cannabinus, aut catena, mensuram largiens, ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 238): quod perpendiculo appenso evidens redditur.
3. Decempedæ, pedes, atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLIION I.

127. Si catena utrinque in annulos destinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hisce cum ceteris in eadem recta continuo collocatis (§. 125). Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in D eundem infigi, atque annulorum crassitiem longitudini mensuræ non accenseri debere. Quodsi tamen hæc sit pars mensuræ, eaque subdupla diametri baculi; baculus ex A ablatu in ipso B defigi poterit. Parantur autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus, earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant molestæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium crassis utendum.

SCHOLIION II.

128. Si pertica circa alterum sui extremum, tanquam centrum, per quadrantem circuli elevata, & per alterum rursus demissa lineam metitur; crassities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula crassitiei congruente imminuenda. Ceterum quia perticæ, ab inæqualitate extensionis prorsus liberæ, prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis instrui oportet, ut observantibus, quæ in Scholio præcedente diximus, tanto minus periculi supersit, ne a recta dimetienda declinetur.

SCHOLIION III.

129. Funes cannabinos humor contrahit & vires diversæ inæqualiter tendunt. SCHWENTERUS (a) autor est, cum aliquando exercitiis geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes 15 rediisse. Ut igitur hi nævi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipse autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus, & postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trabendus, tandemque cerandus. Nul- lum longitudinis decrementum notabis, etiam- si funem istiusmodi per diem integrum sub aquis demersum detineas. Ne autem su-
Tab. I. Fig. 33.
nis humum contingat, sustentaculum Z ipsi supponendum. Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenso globo, vel pondere plumbeo constat.

PROBLEMA IV.

130. Data longitudine lineæ, in mensura ex. gr. Parisina; invenire eandem in mensura alia, ex. gr. Londinensi, cujus ad priorem nota est ratio.

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. linea data 186 pedum Parisinorum, quæritur quot eadem sit pedum Londinensium? Quoniam pes Londinensis est ad Parisinum, ut 135 ad 144 (§. 26); inferatur (§. 311 Arithm.):

$$135 : 144 = 186 : x$$

$$x = \frac{186 \cdot 144}{135} = \frac{26784}{135} = 198 \frac{4}{5} \text{ ped. Londin.}$$

186	135)	135 : :	Londin.
864		1328 :	
1152		1215 :	
144		1134	
26784		1080	
		54	
	O 2		PRO-

(a) Geometr. pract. lib. 1. Tract. 1. p. 381.

PROBLEMA V.

Tab.II. 131. *Ex dato quovis centro C, dato*
 Fig.34. *radio quocunque AC, Circulum descri-*
bere.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Collocetur circini crus unum in centro dato C, & aperiatur intervallo radii dati AC.
2. Moveatur circinus circa centrum C, ita crus alterum peripheriam designabit (§. 37).

II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur; radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga, sive lignea, sive ferrea.

SCHOLION I.

Tab.II. 132. *Si fune aut filo utimur, cavendum*
 Fig.35. *est ne stylus FA, quo peripheria designatur,*
e situ perpendiculari dimoveatur: id quod impedit
filum transversum FE, si fuerit AF = 3, AE = 4 & FE = 5. Ratio patet per
Theorema Pythagoricum infra demonstrandum, (§. 417).

SCHOLION II.

Tab.II. 133. *Circini, ut instrumenta geometrica*
 Fig.37. *reliqua, ex orichalco parantur, ob durabilitatem,*
tractabilitatem, & nitorem hujus metalli. Cuspides tamen
crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut subtilius exacu-
antur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas
utimur, crura eadem sunt & invariata. Sed circini, qui
peripheriis & arcibus describendis inserviunt, crus alterum
variari potest, ut tam plumbagine, quam atramento
Sinico uti detur, prout commodum visum fuerit. Plumbagine
nempe utimur, quoties arcus delineantur absoluta
operatione rursus delendi. Longitudo vel 3, vel 6 digito-
rum esse solet.

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 119); omnes peripheriæ sunt inter se similes (§. 120). Eodem modo patet, omnes circulos & semicirculos esse inter se similes.

THEOREMA I.

135. *Diameter AE dividit tam pe-*
 Tab.I. *ripheriam, quam circulum ipsum, in*
 Fig.2. *duas partes aequales.*

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§. 131). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, segmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque similes (§. 120). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*); consequenter tum illi, tum hæc inter se æquantur (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE, [producta, si opus sit, (§. 21)] ex assumpto in ea puncto C describi potest semicirculus.

THEOREMA II.

137. *Si ex centro C duorum circulo-*
 Tab.II. *rum concentricorum ducantur radii CDA*
 Fig.34. *& CEB; tum arcus DE & BA ad*
peripherias, tum sectores DCE & ACB
ad areas suorum circulorum eandem
rationem habent.

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici, per hypoth. idem centrum C habeant (§. 44), & arcus

Tab. II. Fig. 34. arcus AB atque DE, itemque sectores ACB & DCE describantur, radii AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (§. 119); consequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes similes sunt (§. 120); adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

138. Cum arcus DE & AB, intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti, sint arcus circulorum concentricorum (§. 44); ad suas quoque peripherias eandem rationem habent; consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 173 *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 41); ipsi quoque eundem continere debent.

COROLLARIUM II.

139. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§. 58); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§. 137).

COROLLARIUM III.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, si crura producantur, siue minuantur.

THEOREMA III.

Tab. II. Fig. 46. 141. *Angulorum æqualium A & a mensura BC & de sunt arcus similes: & contra, si angulorum A & a mensura BC & de similes sunt; anguli æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuscunque A vel a quantitas æstimetur per rationem ar-

cus BC, vel de, ex vertice A, vel a intra Tab. II. Fig. 46. crura descripti, ad integram peripheriam (§. 58); si $A = a$, ratio arcuum BC & de ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet; consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§. 41), similes sunt (§. 170 *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Si arcus BC, & de, mensuræ angulorum A, & a (§. 57), fuerint similes; ad peripherias, quarum partes sunt (§. 41), eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*). Quare cum quantitas angulorum A & a per eam rationem æstimetur (§. 58), eadem omnino esse debet, hoc est, anguli æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus similes eandem rationem habeant ad peripherias, quarum sunt partes (§. 170 *Arithm.*); si fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 177 *Arithm.*). Si ergo mensuræ angulorum æqualium fuerint partes ejusdem peripheriæ, vel æqualium peripheriarum; æquales sunt (§. 141); & contra.

THEOREMA IV.

143. *Anguli recti KLM mensura est Tab. I. Fig. 11. quadrans circuli.*

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§. 21); erit $x = o$ (§. 65). Sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 136); angulorum x & o mensuræ AC & CB junctim sumptæ conficiunt semicirculum (§. 57). Ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est circuli quadrans (§. 142). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

144. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 41); angulus rectus est 90° (§. 59).

COROLLARIUM II.

145. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 141); & æqualis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM III.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66).

THEOREMA V.

Tab. I. Fig. 6. 147. Duo anguli deinceps positi, x & y , aut quotcunque ad idem punctum E super eadem recta CD constituti sunt æquales duobus rectis. Et contra, si x & y fuerint duobus rectis æquales; CE sita est in directum ipsi ED.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi, per hypoth. EC cum ED eandem rectam constituit (§. 62). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E, per hypoth. Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 136); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 57). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 142). *Quod erat unum.*

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita; recta quædam alia, veluti EA, ipsi ED in directum jacebit (§. 21), atque hinc $o + y$ & x erunt deinceps positi (§. 62), consequenter duobus rectis æquales, per demonstra-

ta, adeoque $o + y + x = y + x$ (§. 87 Tab. I. Arith. & §. 145 Geom.): quod cum sit Fig. 6. absurdum (§. 84 Arith.), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

148. Anguli, qui sunt deinceps, x & y , aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, concipiunt 180° (§. 144).

COROLLARIUM II.

149. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM III.

150. Si in campo angulum inaccessum, vel obtusum, Quadrante metiri jubemur, & eum, qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 149).

COROLLARIUM IV.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si finita operatione deinceps positos etiam metiaris, & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180° , operatio rite peracta (§. 148).

PROBLEMA VI.

152. Angulum metiri.

Tab. II.
Fig. 36.

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 57); totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope Semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta,

1. Centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri CB admovetur.

2. Gra-

Tab. II. 2. Gradus, in arcu DE inter crura
Fig. 36. anguli AC & CB intercepto, nu-
merantur.

Tab. II. II. In Campo,
Fig. 38. 1. Instrumentum goniometricum ita
collocatur, ut radius ejus CG uni
cruri anguli; centrum vero C ver-
tici ejusdem immineat. Prius obti-
netur collineando per dioptras F
& G, seu pinnulas immobiles ad
diametrum perpendiculariter ere-
ctas, versus baculum in extremo
cruris defixum; posterius vero per-
pendiculum ad centrum instrumen-
ti applicando.

2. Regula HI circa centrum mobilis
versus crus anguli alterum promove-
tur, donec per pinnulas ipsi affixas
baculus in extremo ejus defixus col-
lineanti occurrat.
3. Gradus, quem regula instrumento
indicat, notatur.

SCHOLION I.

153. Semicirculus minor, quo in charta uti-
mur, Instrumentum transportatorium vul-
go appellatur. In campo quidam circulo in-
tegro, quidam nonnisi quadrante utuntur.

SCHOLION II.

154. Diameter Transportatorii est trium
fere digitorum Rhenanorum; majorum vero
Instrumentorum goniometricorum unius pedis,
aut ad summum unius cum dimidio. Divisio
accurata fieri debet. In Transportatoriiis gra-
dus dimidii satisfaciunt; in majoribus dena
prima. Angulos in campo Instrumento ma-
jore captos, quantum fieri potest, accuratissi-
me in charta designaturi, diametrum Trans-
portatorio non multo minorem diametro ejus
Instrumenti, quo in campo usi sunt, & regu-
lam circa centrum mobilem indulgent.

PROBLEMA VII.

155. Data quantitate anguli, ipsum Tab. II.
describere. Fig. 36.

RESOLUTIO.

- I. In charta,
 1. Ducatur recta CB, &
 2. Super alterum ejus extremum C
ponatur centrum Instrumenti trans-
portatorii, ita ut radius ejus cum
recta CB coincidat.
 3. Numerentur gradus dati ab E ver-
sus D & ad gradum ultimum no-
tetur punctum D.
 4. Ducatur recta CA, per C & D.
Erit ACB angulus quaesitus (§.
141).

II. In campo, Tab. II.
Fig. 38.

1. Collocetur Instrumentum goniome-
tricum, ut in Probl. præc. (§. 152).
2. Regula HI circa centrum C ad gra-
dum datum promoveatur.
3. Baculus ita erigi jubcatur, ut per
dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VI.

156. Si recta AB alteram CD secet Tab. I.
in E; anguli verticales, x & o, item y Fig. 6.
& E, sunt aequales.

DEMONSTRATIO.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 180^\circ \\ y + o = 180^\circ \end{array} \right\} (\S. 148)$$

Ergo $x + y = y + o$ (§. 87 Arithm.)
adeoque $x = o$ (§. 91 Arithm.).
Eodem modo ostenditur esse $y = E$.
Q. e. d.

COROLLARIUM.

157. Quodsi in campo, aut alio in casu,
angulum inaccesum x metiri jubeamur;
accesum vero non neget verticalis o: hunc
ejus loco metiri licet.

SCHO-

SCHOLIUM.

158. *Cum Tyrones sub initium studii mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex assumtis deductis minus adueti; figuras, per data ex hypothesebus Theorematum assumta, construere ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinantum quantitatem explorare (§. 126, 152) iuvat: ita sensus & veritas Propositionis elucescit, & animus ad Demonstrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In Demonstratione magis acquiescunt Tyrones, examine ratiocinationis legitime sic facto; non secus ac Theoriæ physicæ magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoris consonæ deprehenduntur.*

THEOREMA VII.

Tab. I. 159. *Omnes anguli x, y, o, E , &c. circa punctum aliquod E constituti, sunt æquales quatuor rectis.*

DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto E , vertice communi angulorum x, y, o, E , &c. (§. 54) intervallo quocunque Ea circulus (§. 131); evidens est mensuras omnium angulorum simul sumtas db, bc, ca, ad &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143). Mensura ergo angulorum x, y, o, E &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 57). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 143). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 141). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

160. Omnes itaque anguli, circa idem punctum constituti, junctim 360° conficiunt (§. 144).

THEOREMA VIII.

161. *Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter æqualia sunt (§. 15 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Porro, quoniam quæ sibi mutuo congruunt eisdem terminos habere possunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 120). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IX.

162. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§. 26 *Arithm.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 15 *Arithm.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur, diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum, per demonstrata, iisdem terminis contineri debent; consequenter sibi mutuo congruunt (§. 3). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

163. *Si lineæ congruit; singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§. 3). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta; secundum latitudinem & profunditatem ipsamet sui termini existunt (§. 11). Ergo si lineæ congruunt; non modo puncta

puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

164. Si centra & radii duorum circulo-
rum congruunt; etiam peripheriæ, in qui-
bus radii terminantur (§. 39); consequen-
ter circuli ipsi congruere debent (§. 3).

COROLLARIUM II.

165. Ex uno itaque puncto, eodem ra-
dio, circulus nonnisi unicus describi po-
test.

THEOREMA XI.

Tab.II. 166. Si fuerint duo anguli BAC &
Fig.39. bac æquales, & vertex unius a ponatur
super verticem alterius A, præterea crus
illius ac super crus hujus AC; etiam
crus alterum ab super alterum AB
cadet.

DEMONSTRATIO.

Si negas; necesse est ut *ab*, vel intra
angulum BAC, vel extra eum cadat.
Ducatur ex A, radio AD, arcus Df
(§. 131): erit DE mensura anguli
BAC, De vel Df mensura anguli bac
(§. 39). Ergo, in casu priore, De men-
sura anguli bac minor; in postero-
re eadem mensura Df major foret
mensura anguli BAC (§. 20 Arithm.).
Quod utrumque cum sit absurdum
(§. 142); crus *ab* super AB cadit.
Q. e. d.

THEOREMA XII.

Tab. I. 167. Si vertex & crura anguli unius
Fig.9. DAE supra verticem & crura alterius
BAC cadant; angulus unus DAE al-
teri BAC æqualis est.

DEMONSTRATIO.

Describatur enim ex communi ver-
tice A, intra crura AD & AE, arcus
DE (§. 131); erit is mensura angu-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

li DAE (§. 57). Sed quoniam cru-
ra DA & DE supra crura alterius an-
guli AB & AC cadunt, per hypoth.
idem arcus DE inter crura AB &
AC intercipitur. Est igitur & men-
sura anguli BAC (§. cit.); conse-
quenter $DAE = BAC$ (§. 142).
Q. e. d.

THEOREMA XIII.

168. Lineæ rectæ æquales sibi mu-
tuo congrunt. Tab.II. Fig.40.

DEMONSTRATIO.

Est $ab = AB$, per hypoth. Est vero
etiam recta *ab* similis rectæ AB (§. 17).
Ergo *ab* ipsi AB congruit (§. 162).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

169. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB
ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *ab*
supra AB cadat; etiam *b* supra B cadet
(§. 3, II).

COROLLARIUM II.

170. Si rectarum extrema coincidunt;
singula puncta unius erunt in recta altera
(§. 162); atque hinc inter duo puncta
nonnisi unica recta cadit.

COROLLARIUM III.

171. Cum radii circulo-
rum fiat lineæ rectæ (§. 39), ubi æquales fuerint, sibi
mutuo congrunt (§. 168); consequenter
etiam circuli congruere debent (§. 164);
atque adeo circuli æquales sunt, quorum
æquales sunt radii (§. 161).

COROLLARIUM IV.

172. Quoniam non absimili modo pa-
tet, circulum, cujus minor est radius,
congruere parti circuli radium majorem
habentis; minor est circulus, cujus minor
radius; major vero, cujus radius major
(§. 20 Arithm.).

THEOREMA XIV.

Tab. I. 173. Si centro circuli C applicetur
Fig. 2. linea recta CD, radio AC æqualis, ex-
tremum unum; alterum peripheriam at-
tinget.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis, per hypoth. ipsi congruet (§. 168), adeoque eisdem cum eo terminos habere debet (§. 3). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 39). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. Q. e. d.

THEOREMA XV.

174. Anguli similes sunt etiam æquales.

DEMONSTRATIO.

In angulis similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 Arithm.). Quare cum anguli distinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam (§. 58); si anguli sunt similes, arcus isti ad suas peripherias eandem rationem habere, hoc est, & ipsi similes esse debent (§. 141 Geom. & §. 170 Arithm.). Sunt igitur anguli æquales (§. 141). Q. e. d.

THEOREMA XVI.

175. In figuris similibus anguli homologi sunt æquales, & latera homologa proportionalia.

DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent

(§. 24 Arithm.). Quare cum figuræ nequeant distingui nisi per angulos & latera; illi æquales (§. 174), hæc proportionalia esse debent (§. 154 Arithm.). Q. e. d.

SCHOLIION.

176. Sermo nobis tantum est de figuris rectilineis, quarum latera in se spectata omnia inter se similia sunt. Alias addendum foret, latera homologa debere esse insuper inter se similia & similiter posita, ex. gr. arcus circulorum similes convexitatem centro figuræ obvertentes.

THEOREMA XVII.

177. Figurarum sibi mutuo congruen-Tab. I.
tium RTUS & rtus anguli & latera Fig. 25.
homologa inter se æqualia sunt.

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTUS & rtus sibi mutuo congruunt, per hypoth. iidem utriusque termini esse possunt (§. 3). Quare cum termini earum sint perimetri (§. 31); una rtus supra alteram RTUS ita poni potest, ut *tu* ipsi IU, *tr* ipsi TR, *rs* ipsi RS, &c. congruat. Ergo latera homologa sunt inter se æqualia (§. 161). Quod erat unum.

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TU, TR, RS, SU, & *tu*, *tr*, *rs*, *su* crura angulorum homologorum (§. 54). Quamobrem & anguli homologi æquales sunt (§. 167). Quod erat alterum.

SCHOLIION.

178. Patet ex Scholio precedente, quomodo idem Theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.

C A P U T III.

De Linearum Rectarum & Triangulorum Symptomatis.

THEOREMA XVIII.

Tab. II. 179. Fig. 41. **S**I in duobus triangulis ABC & abc, fuerit $A=a$, $AB=ab$, $AC=ac$; erit etiam $BC=bc$, $C=c$, $B=b$, totaque triangula aequalia & similia erunt.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus triangulum abc ita poni super alterum ABC, ut punctum a super A, & recta ab super AB cadat. Quoniam $ab=AB$, $a=A$, & $ac=AC$, per hypoth. punctum b super B (§. 169), recta ac super AC (§. 166), & punctum c super C (§. 169); consequenter bc super BC (§. 170) cadit, adeoque $\triangle abc$ alteri ABC congruit (§. 3), consequenter $bc=BC$ (§. 161), $c=C$, & $b=B$ (§. 167), totaque triangula aequalia & similia sunt (§. 161). Q. e. d.

PROBLEMA VIII.

180. Datis duobus lateribus AB & AC, cum angulo intercepto A; triangulum construere.

RESOLUTIO.

1. Assumpto AB pro basi, in A constituatur angulus datus (§. 155).
2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.
3. Tandem ducatur recta BC. Erit ABC triangulum desideratum (§. 179).

SCHOLION.

181. Tyrones latera & angulos datos in numeris assumant: quod in aliquibus casibus ad Demonstrationes empiricas distinctius percipiendas proderit, quas supra (§. 158) commendavimus.

COROLLARIUM I.

182. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM II.

183. Quare si in duobus triangulis ACB Tab. II. & acb fiat $a=A$ & $ab:ac=AB:AC$; Fig. 41. triangula eodem modo determinantur (§. 119) adeoque similia sunt (§. 120); consequenter etiam $c=C$ & $b=B$, $ab:bc=AB:BC$, &c. (§. 175).

THEOREMA XIX.

184. In triangulo aequicruo DFE Tab. II. 1° anguli ad basin y & u sunt aequalis; Fig. 44. 2° recta FG, que angulum DFE bifariam secat, basin quoque DE, & 3° triangulum ipsum bifariam secat; immo 4° FG ad basin DE perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam $o=x$, per hypoth. $DF=FE$ (§. 89) & $FG=FG$ (§. 81 Arithm.). Ergo 1°, $y=u$; 2°, $DG=GE$; 3°, $\triangle DFG=\triangle GFE$ (§. 179). Et quia etiam anguli ad G aequales, (per §. cit.) 4°, FG ad DE normalis est (§. 79). Q. e. d.

COROLLARIUM.

185. Cum triangulum æquilaterum fit etiam æquicrurum (§. 88, 89); Theorema præfens de æquilatero itidem verum est.

THEOREMA XX.

Tab. I. 186. *In triangulo æquilatero ABC Fig. 16. omnes anguli sunt inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Est enim $AC = CB$ (§. 88); ergo $A = B$ (§. 184). Est vero etiam $AC = AB$ (§. 88); ergo $C = B$ (§. 184). Quare $A = C$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 105).

THEOREMA XXI.

Tab. III. 188. *Si trianguli ABC latus unum AC continuetur in D; erit angulus externus DAB major quolibet interno opposito B, vel C.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB, bifariam divisa in F, ductaque recta CF, producenda in G (§. 21) donec fiat $FG = FC$. Quoniam GC secat AB in F (§. 50), erit $z = y$ (§. 156); consequenter $o = x$ (§. 179). Sed $DAB > o$ (§. 84 *Arithm.*); ergo & $DAB > x$ (§. 89 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse DAB, aut, quod perinde est (§. 156), ejus verticalem $HAC > ACB$. *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

Tab. III. 189. *In omni triangulo ABC, latus majus AC opponitur majori angulo B; minus AB minori C; & contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB < AC$, per *hypoth.* parti hujus AD æqualis est (§. 20 *Arithm.*). Ducatur recta BD (§. 121):

erit BAD triangulum æquicrurum (§. Tab. 89), adeoque $o = x$ (§. 184). Sed $o > C$ III. (§. 188). Ergo $x > C$ (§. 89 *Arithm.*); Fig. 57. consequenter multo magis $B > C$. *Quod erat unum.*

Sit $B > C$, per *hypoth.* Si non sit $AC > AB$, erit vel $AC = AB$, vel $AC < AB$; adeoque in casu primo $B = C$ (§. 184), in altero $B < C$, per *demonst.* Sed cum utrumque hypothesis evertet, absurdum est. Consequenter si angulus $B > C$, etiam $AC > AB$. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

190. *In omni triangulo ABD, duo latera AD & BD simul sumta sunt tertio AB majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 21), donec fiat $BD = DC$, adeoque $AC = AD + DB$ (§. 88 *Arithm.*): erit $\triangle BDC$ æquicrurum (§. 89) & hinc $y = C$ (§. 184). Cum vero sit $y < x + y$ (§. 84 *Arithm.*), erit etiam $C < x + y$ (§. 89 *Arithm.*). Quare AC, seu $AD + DB > AB$ (§. 189). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

191. *Linea recta AB est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos A & B continentur.*

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB: erit $AC + CB > AB$ (§. 190). Ducantur porro rectæ AD & DC, item CE & EB: erit $AD + DC > AC$ & $CE + EB > CB$ (§. cit.), consequenter $AD + DC + CE + EB > AC + CB$ (§. 90 *Arithm.*), adeoque

Tab. I. que multo magis $AD + DC + CE + EB > AB$. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum denovo majus ipsa AB . Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidunt; erit ea major recta AB intra eodem terminos contenta. Est ergo recta AB minor curva quacunque intra eodem terminos contenta, hoc est, omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ab B duci possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15, 36): cumque inter duo puncta nonnisi unica linea recta contineri possit (§. 170); via in plano brevissima est numero unica.

COROLLARIUM II.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter distant (§. 37).

PROBLEMA IX.

Tab. II. 194. *Metiri distantiam duorum locorum A & B ex eodem tertio C accessorum.*

RESOLUTIO.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur, ope funis & catenæ, ex C in a , ita ut baculus in a defigendus sit cum C & A in eadem recta (§. 125).
3. Eadem ratione ex C in b transferatur linea CB .
4. Investigetur longitudo rectæ ab (§. 126). Dico, ab esse æqualem distantiæ quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§. 192). Quoniam vero Aa & Bb sunt lineæ rec-

tæ, per constr. & se mutuo secant in C (§. 50),

erit $x = y$ (§. 156).

Præterea $aC = CA$
 $bC = CB$ } per constr.

Ergo $ba = AB$ (§. 179). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in C , investigetur quantitas anguli x (§. 152).
2. Quærat porro longitudo rectarum AC & BC (§. 126).
3. Ex datis cruribus AC & CB , cum angulo intercepto x , construat juxta Scalæ geometricam modicam triangulum acb (§. 180).
4. Inveniatur in eadem mensura longitudo basis ab (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Est enim $acb = ACB$, & $ac : cb = AC : CB$, per constr. consequenter $cb : ab = CB : AB$ (§. 183). Ergo iidem numeri, qui respondent rectis cb & ab in mensura modica, etiam rectis CB & AB in majore respondent (§. 155 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In mensura geometrica, in D horizontaliter collocata, assumatur punctum c , & in eo acicula defigatur, ad quam
2. applicata regula cum dioptris tam diu huc illucque moveatur, donec per ea prospicienti punctum B occurrat; ducaturque in hoc regulæ situ recta cb .

Tab. II. 3. Similiter collineatio fiat in punctum Fig. 43. A, ducaturque ca .

4. Investigetur longitudo rectarum cA & cB (§. 126) &

5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex c in a & b .

6. Tandem in eadem mensura invenitur longitudo ipsius ab (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLIUM I.

Tab. II. 195. Quod si angustia spatii non permit-
Fig. 42. tit, ut integræ AC & BC in a & b transferantur; poterunt aC & bC fieri $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$ & c. ipsarum AC & BC: quo in casu, eodem modo ut in resolutione secunda, demonstrabitur, esse $ab = \frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$ & c. ipsius AB.

SCHOLIUM II.

196. Notent Tyrones artificium, quo demonstrationes geometricas non modo ad facilitam intelligentiam reducere, sed & proprio Marte invenire possunt. Nimirum quicquid, vel ex constructione Problematis, aut hypothese Theorematis, vel ex conspectu figura utramque representantis, distincte cognoscitur, per characteres distincte exprimitur; veluti in Demonstratione prima præsentis, quod $x = y$ $aC = AC$ & $bC = BC$. Quo facto, dispiciatur cujusnam Theorematis antecedentium hypothesis in iis contineatur: thesis enim illius Theorematis ostendit, quid ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo, quod $ab = AB$. Cum vero maxima Demonstrationum pars ex paucis de congruentia & similitudine triangulorum Theorematis derivetur; eorundem recordatio tandem familiarissima evadat opus est.

THEOREMA XXV.

197. Si ex punctis extremis C & O Tab. I. recta alicujus, radiis CP & PO, qui Fig. 8. junctim sumti recta CO majores sunt, describantur circuli, ii se mutuo secantur.

DEMONSTRATIO.

Sit $CP < CO$; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20 Arithm.), adeoque ipsi congruit (§. 168). Quare si ex centro C, radio CP, circulus PNQP describatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 173). Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus; fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo $CN + NO < CP + PO$, per hypoth. & $CP = CN$ (§. 40); erit $NO < PO$ (§. 92 Arithm.). Sed $PO = MO$ (§. 40 & per demonstr.). Ergo $NO < MO$ (§. 89 Arithm.). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circumulum PMRP; consequenter circuli se mutuo secant (§. 52). Quod erat unum.

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit $CP > CO$, vel $CP = CO$. Quod erat alterum.

PROBLEMA X.

198. Super data recta AB triangulum aquilaterum construere. Tab. I. Fig. 16.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro, intervallo ipsius AB, describatur arcus y , &
2. Ex B, eodem intervallo, alius x (§. 131), qui priorem in C interfecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & CB: Erit ACB triangulum æquilaterum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Etenim $AC = AB$, & $BC = AB$
 Fig. 16. (§. 40). Ergo $AC = BC$ (§. 87
Arithm.). Quare triangulum ABC est
 æquilaterum (§. 88). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

199. Data basi DE , & crure DF ,
 quod illa dimidia majus sit; triangu-
 lum æquicrurum construere.

RESOLUTIO.

- Tab. I. 1. Ex uno basis extremo D , intervallo
 Fig. 17. cruris dati DF , describatur ar-
 cus, &
 2. ex altero extremo E eodem inter-
 vallo arcus alius (§. 131), qui ob
 $DF + EF > DE$, per *hypoth.* & *constr.*
 priorem in F interfecabit (§. 197).
 3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 121).
 Dico DFE esse triangulum æqui-
 crurum.

DEMONSTRATIO.

$DF = FE$, per *constr.* Ergo EDF
 est triangulum æquicrurum (§. 89).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

200. Determinatis ergo basi DE & cru-
 re DF , totum triangulum æquicrurum de-
 terminatur.

COROLLARIUM II.

201. Duo igitur triangula æquicrura
 DFE & dfe eodem modo determinantur, si
 fiat $DF : DE = df : de$ (§. 119); conse-
 quenter similia (§. 120), adeoque sibi mu-
 tuo æquiangula sunt (§. 175 & 109).

THEOREMA XXVI.

Tab. II. 202. Duo semicirculi CLE & DGF
 Fig. 45. non nisi in puncto unico G se mutuo se-
 care possunt.

DEMONSTRATIO.

Secent enim, si fieri possit, præterea Tab. II.
 se etiam in L . Ducantur ex centrīs A Fig. 45.
 & B ad puncta intersectionum L & G
 rectæ AL , AG ; BL , BG ; puncta
 item intersectionum connectantur rec-
 ta GL (§. 121). Quoniam $BL = BG$
 (§. 40); erit $BGL = BLG$ (§. 184).
 Sed $BGL > AGL$ (§. 84 *Arithm.*):
 ergo $BLG > AGL$ (§. 89 *Arithm.*).
 Porro quia $AL = AG$ (§. 40); AGL
 $= ALG$ (§. 184). Quare BLG
 $> ALG$ (§. 89 *Arithm.*): quod cum
 sit absurdum (§. 84 *Arithm.*); duo se-
 micirculi non nisi unico in puncto se
 mutuo secare possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli non nisi
 duobus in punctis se mutuo secare possunt.

THEOREMA XXVII.

204. Si in duobus triangulis ACB Tab. II.
 & acb , fuerit $AC = ac$, $AB = ab$, Fig. 41.
 $BC = bc$; etiam $A = a$, $B = b$, C
 $= c$, totaque triangula æqualia sunt &
 similia.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A , radio AC , descriptus
 concipiatur arcus y , & ex centro B , ra-
 dio BC , alius x (§. 131). Concipia-
 mus porro $\triangle acb$ ita poni supra $\triangle ACB$,
 ut punctum a super A , & recta ab
 super AB , cadat. Quoniam $ab = AB$,
 per *hypoth.* punctum b super B cadet
 (§. 169). Et quia $ac = AC$, & bc
 $= BC$, per *hypoth.* recta ac in arcu y
 & bc in arcu x terminabitur (§. 173);
 consequenter punctum c super C cadet
 (§. 202), & rectæ ac , bc rectis AC ,
 BC congruent (§. 170). Quare $a = A$,
 $b = B$,

Tab.II. $b=B$, $c=C$ (§. 167); cumque $\triangle acb$
Fig.41. alteri $\triangle ACB$ congruat (§. 3), $\triangle acb$
 $= \& \infty \triangle ACB$ (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

Tab. I. 205. *Datis tribus lateribus AB,*
Fig.18. BC , CA , *quorum duo simul sumta AC*
& BC tercio AB majora sunt; triangulum
construere.

RESOLUTIO.

1. Assumta AB pro basi, ex A , intervallo ipsius AC , describatur arcus y , &
2. ex B , intervallo ipsius BC , arcus alius x (§. 131), qui ob $AC+BC > AB$ per *hypoth.* priorem in C secabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AB & BC (§. 121). Ita factum est, quod petebatur.

COROLLARIUM I.

206. Cum ex tribus datis rectis nonnisi unicum triangulum construi possit (§. 204); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

207. Quare si, in duobus triangulis $\triangle ACB$ & $\triangle acb$, fiat $AC : AB = ac : ab$, $AC : BC = ac : bc$; triangula eodem modo determinantur (§. 119); consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175, 109).

PROBLEMA XIII.

Tab.II. 208. *Angulo dato DAE aequalem*
Fig.46. *bac constituere.*

RESOLUTIO.

- I. In charta ,
1. Ex A , intervallo AC , describatur arcus BC , erit $AB=AC$ (§. 40).
2. Ducatur recta $ac=AC$, & ex a , intervallo ipsius AB , describatur arcus x ; item

3. Ex c , intervallo ipsius CB , alius y , Tab.II. qui ob $AB+BC > AC$ (§. 190), Fig.46. seu $ab+bc > ac$ (§. 190), priorem in b interfecabit (§. 197).

4. Ducatur recta ab (§. 121). Dico esse $a=A$.

II. In Solo,

1. Defigatur baculus in C cum A & E , itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 125).
2. In a & c defigantur baculi, ea lege ut sit $ac=AC$.
3. Ad eos funis, vel catena, ita applicetur, ut pars ipsius $ab=AB$, & altera $cb=CB$ fiat.
4. In b defigatur baculus. Dico esse $bac=BAC$.

Interdum etiam in Solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu $ac=AC$, $ab=AB$, $cb=CB$, per *construct.* Ergo $bac=BAC$ (§. 204). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

209. *Angulum datum HIK in duas* Tab.II. *partes æquales dividere.* Fig.47.

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur, radio quocunque, arcus LM (§. 131).
2. Ex L & M , intervallo dimidia LM majore, ducantur arcus se mutuo secantes in N (§. 197).
3. Ducatur recta IN (§. 121). Dico esse $HIN=NiK$.

DEMONSTRATIO.

Est enim $IL=IM$ (§. 40), $LN=MN$, per *constr.* $IN=IN$. Ergo $HIN=NiK$ (§. 204). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA XV.

Tab. II. Fig. 50. 210. Lineam rectam AB in duas partes aequales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.

RESOLUTIO.

- I. In charta ,
 1. Ex A & B, intervallo dimidia AB majore , ducantur arcus se mutuo in C secantes (§. 197).
 2. Fiat similis intersectio infra lineam in D (§. cit.).
 3. Ducatur recta DC (§. 121).
 Dico esse $AE = EB$.

DEMONSTRATIO.

Tr. ACB est æquicrurum (§. 199) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis est (§. 184). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 51. 1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiat, donec medium lineæ attingere videatur in D.

2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
 3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo ,

1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicitur, ut punctum medium inveniatur.
 2. Hęc acicula infixæ notetur & filum lineæ datæ rursus coextendatur.
 3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

SCHOLIUM.

211. Duo modi posteriores equidem secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.

PROBLEMA XVI.

212. Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI excitare.

RESOLUTIO.

- I. In charta ,
 1. Posito circino in G, arbitrario in Tab. II. intervallo refecentur utrinque partes Fig. 49. æquales GK & GH.
 2. Ex punctis K & H, intervallo dimidia KH majore, fiat intersectio in I (§. 197).
 3. Ducatur recta GI (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam $KG = GH$, & $KI = IH$, per construct. $IG = IG$. Ergo anguli ad G sunt æquales (§. 204), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79).
Q. e. d.

Aliter.

1. Normæ, hoc est, instrumenti ex Tab. II. duabus regulis ad angulum rectum Fig. 52. junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat.
 2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ est rectus, per hypoth. Sed ipsi æqualis est IGL (§. 167): ergo IGL est itidem rectus (§. 145),

Q

adeo-

adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 78).

Tab. II. II. In Solo,

Fig. 52. Norma utimur majore, & juxta crus GI filum extenditur. Aut

Tab. II. I. Filum KIH, in duas partes æquales Fig. 49. in I divisum, ex punctis K & H extenditur &

2. In I baculus defigitur, tandemque
3. KH bifariam secatur in G (§. 210). Dico esse GI ad KH perpendiculari-

DEMONSTRATIO.

Cum $KI=HI$, & $KG=GH$, per construct. & $GI=GI$; anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 204); consequenter IG ad ML normalis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. III. 213. Ex uno puncto D, super eadem Fig. 53. recta AB, nonnisi perpendicularis unica CD erigi potest in eodem plano.

DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, sit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, qua intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD, per hypoth. ADC similiter rectus est (§. cit.); consequenter $ADE=ADC$ (§. 145): quod cum sit absurdum (§. 84 Arithm.), ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

Tab. III. 214. Si recta CD perpendicularis ad Fig. 53. DB continuetur in F, erit etiam DF ad DB perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB per hypoth. angulus x rectus est (§.

78). Ergo y similiter rectus est (§. 65, Tab. 145), consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 78). *Q. e. d.* III. Fig. 53.

THEOREMA XXX.

215. Si duo puncta H & Q alicujus Tab. III. recta HI a duobus punctis K & L alterius recta MN utrinque æqualiter distent; Fig. 54. erit HI ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, per hypoth. $HK=HL$ & $QK=QL$ (§. 192). Est vero etiam $QH=QH$. Ergo $o=x$ (§. 204); consequenter cum $HI=HI$, anguli ad I æquales (§. 179), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

216. Adato puncto H ad rectam MN Tab. III. perpendiculararem HI demittere. Fig. 54.

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Posito circino in H, intervallo arbitrario, eodem tamen, interfecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat intersectio in Q (§. 197).

3. Ducatur per Q recta HI (§. 121). Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $KH=LH$ & $KQ=LQ$ per construct. puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter distant (§. 192). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

- I. Applicetur norma ad lineam datam Tab. II. ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I Fig. 52. attingat. 2. Du-

Tab. II. 2. Ducatur recta GI (§. 121), quæ ad Fig. 52. ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est quæ in casu simili Problematis 16 (§. 212).

II. In Solo,

Tab. Aut utimur norma majore, ut in Probl. III. 16, aut

Fig. 54. 1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi designantur. (§. 125).

2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 210).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KI = LI, per construct. HI = HI; anguli ad I sunt æquales (§. 204), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). Q. e. d.

THEOREMA XXXI.

Tab. 217. Ab uno puncto H, ad eandem III. rectam LM, non nisi unica perpendicularis HI duci potest. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, erit o rectus (§. 78). Quia HI ad LM perpendicularis, per hypoth. erit x quoque rectus (§. cit.). Est vero o > x (§. 188), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum sit absurdum (§. 145), a puncto H ad LM non nisi unica perpendicularis duci potest. Q. e. d.

THEOREMA XXXII.

218. In omni triangulo rectangulo HIK angulus non nisi x rectus est; reliqui H & K sunt acuti.

DEMONSTRATIO.

Angulus y rectus est (§. 79). Sed y Tab. > m, item y > H (§. 188). Ergo III. K & H sunt recto minores, adeoque Fig. 56. acuti (§. 66). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypotenusa (§. 95, 189).

THEOREMA XXXIII.

221. In triangulo obtusangulo PNO Tab. I. angulus obtusus non nisi unicus est, reliqui P & O sunt acuti. Fig. 20.

DEMONSTRATIO.

y + x = 2 rectis (§. 147). Sed y, utpote obtusus per hypoth. major recto (§. 66). Ergo x recto minor. Quoniam vero x > O, item x > P (§. 188); erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 66). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

COROLLARIUM II.

223. Ergo latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 189).

PROBLEMA XXXIV.

224. Linea perpendicularis HI est Tab. brevissima omnium, quæ a puncto H III. ad eandem rectam LM duci possunt. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM, per hypoth. angulus x rectus est (§. 78), adeoque HK hypotenusa (§. 95), consequenter HK > HI (§. 220). Q. e. d.

Q 2

Co-

COROLLARIUM I.

225. Ergo distantia puncti a linea, vel plano, est recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

COROLLARIUM II.

Tab. III. Fig. 58. 226. Quare si linea HI fuerit ipsi KL parallela, erunt perpendiculara quævis ex illa in hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia, & contra (§. 81).

COROLLARIUM III.

227. Altitudo figuræ est perpendicularum ex vertice in basin demissum (§. 115).

COROLLARIUM IV.

Tab. I. Fig. 19. 228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91), & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 78). Ergo si KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 114), adeoque MK altitudo (§. 227).

COROLLARIUM V.

Tab. I. Fig. 21. 229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 98, 100), adeoque unum ad alterum perpendicularare (§. 78). Quod si ergo latus unum CD vel IK sumatur pro basi; erit A vel L vertex (§. 114), consequenter AC vel KL altitudo (§. 227).

THEOREMA XXXV.

Tab. III. Fig. 58. 230. Si HI fuerit parallela & BA perpendicularis ad KL; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI.

DEMONSTRATIO.

Fiat $EB=BD$ & erigantur ex E & D perpendicularares EG & DC (§. 212); erit $GE=CD$ (§. 226), & $E=D$ (§. 78, 145); consequenter $BG=BC$ & $y=u$ (§. 179). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, per hypoth. ideo $u+x=o+y$ (§. 79). Ergo & $x=o$ (§. 91 Arithm.). Quare cum porro sit $AB=AB$; erit & $m=n$ (§. 179), adeo-

que BA ad HI perpendicularis (§. 79). Tab. III. Fig. 58. Q. e. d.

COROLLARIUM.

231. Sunt ergo EG, AB, CD distantiarum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 225), adeoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§. 81).

THEOREMA XXXVI.

232. Parallela AB & EF eidem ter- Tab. III. Fig. 59. tia CD sunt etiam parallela inter se, & parallelis parallela sunt inter se paralele.

DEMONSTRATIO.

Ducantur GI & KM perpendicularares ad CD (§. 216): erunt eadem perpendicularares ad AB & EF (§. 214, 230). Ergo $GH=KL$ & $HI=LM$ (§. 226); consequenter $GH+HI=KL+LM$ (§. 88 Arithm.) hoc est, $GI=KM$ (§. 86, 87 Arithm.); adeoque AB parallela ipsi EF (§. 226). Quod erat unum.

Posterius patet per prius.

THEOREMA XXXVII.

233. Si duas parallelas AB & CD Tab. III. Fig. 60. secet transversa EF in G & H; erunt 1°. anguli alterni y & u æquales; 2°. angulus externus x æquatur interno opposito u ; 3°. duo interni oppositi o & u sunt æquales duobus rectis.

DEMONSTRATIO.

Si recta EF secet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifestasunt per Theorema 35 (§. 230). Si vero oblique secet; ducantur perpendicularares GI & HK (§. 212). Producatur GI in M & HK in L (§. 21). donec fiat $IM=GI$ & $KL=HK$.

1°. Quo-

Tab. III. ad CD, per construct. erunt anguli ad I æquales (§. 79). Porro GI = IM, per constr. & HI = IH. Ergo GH = HM, & u = z (§. 179). Eodem modo ostenditur esse HG = GL, & y = t. Quamobrem & GL = HM (§. 87 Arithm.). Est vero etiam HK = GI (§. 226) & hinc HK + KL = GI + IM (§. 88 Arithm.), hoc est, HL = GM (§. 86 Arithm.) & GH = GH: Unde $t + y = u + z$ (§. 204). Cum itaque $t = y$, & $u = z$ per demonstrata: erit $y + y = u + u$ (§. 15 Arithm.), hoc est $2y = 2u$, consequenter $y = u$ (§. 94 Arithm.). Quod erat primum.

2°. $x = y$ (§. 156), & $u = y$ (per num. 1). Ergo $x = u$ (§. 87 Arithm.). Quod erat alterum.

3°. $x + o = 180^\circ$ (§. 148). Sed $x = u$ (per num. 2). Ergo $u + o = 180^\circ$ (§. 15 Arithm.). Quod erat tertium.

PROBLEMA XVIII.

Tab. II. 234. Datis duobus lateribus AB & BC, cum angulo A uni eorum BC opposito; triangulum ABC construere.

RESOLUTIO.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208), factaque AB uni datorum laterum æquali,
2. Ex B, intervallo alterius lateris dati BC, crus anguli AC interfecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121). Sic factum est, quod petebatur.

4. Quod si $BC < BA$; aut bis secabit crus AC, aut idem tangit; adeoque in casu posteriore angulus ad C rectus est (§. 309), in priore constare debet, utrum angulus ad C sit acutus, an obtusus.

COROLLARIUM I.

235. Cum ex duobus lateribus, atque angulo uni eorum opposito, triangulum construi possit; iis datis, reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare si in duobus triangulis ejusdem speciei ABC & abc, fuerit $AB = ab$, $BC = bc$, & $A = a$; erit etiam $AC = ac$, $B = b$, $C = c$, & $\triangle ABC = \triangle abc$.

SCHOLIUM.

236. In genere liquet, æqualia esse que per æqualia determinantur, seu, quod perinde est, figuras esse æquales que ex æqualibus datis eodem modo construuntur. Unde non solum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonstrari potest.

COROLLARIUM II.

237. Quod si in duobus triangulis ejusdem speciei, veluti acutangulis ABC & abc, fuerit $A = a$ & $AB : BC = ab : bc$, triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120); consequenter etiam $B = b$, $C = c$, $BC : CA = bc : ca$ & $CA : AB = ca : ab$ (§. 175).

THEOREMA XXXVIII.

238. Perpendiculara KH & GI æquales parallelarum partes KG & HI intercipiunt.

DEMONSTRATIO.

$KH = GI$ (§. 230, 226), $u = y$ (§. 233), & $GH = GH$. Ergo $KG = HI$ (§. 235). Q. e. d.

Q3

THEO-

THEOREMA XXXIX.

Tab. 239. Si trianguli cujuscunque ACB
III. latus unum BC continuetur in D; erit
Fig. 61. angulus externus DCA aequalis duobus
internis oppositis y & z simul sumtis.

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela,
erit $x=y$, & $o=z$ (§. 233); conse-
quenter $DCA=x+o=y+z$ (§. 88
Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA XL.

240. In quovis triangulo ACB tres
anguli y , u , z junctim sumti sunt equales
duobus rectis seu 180° .

DEMONSTRATIO.

Nam $o+x=y+z$ (§. 239). Ergo
 $o+x+u=y+z+u$ (§. 88 Arithm.).
Sed $o+x+u=180^\circ$ (§. 147). Ergo
 $y+z+u=180^\circ$ (§. 87 Arithm.). Q.
e. d.

COROLLARIUM I.

Tab. I. 241. In triangulo igitur rectangulo
Fig. 19. MKL, duo anguli obliqui M & L junctim
sumti efficiunt rectum seu 90° , adeoque
semirecti sunt, si triangulum fuerit æqui-
crurum (§. 184).

COROLLARIUM II.

242. Si unus angulus est obtusus; duo
reliqui simul sumti sunt recto minores
(§. 66).

COROLLARIUM III.

Tab. I. 243. In triangulo æquilatelo ACB qui-
Fig. 16. libet angulus 60° , nimirum $180 : 3$.
(§. 186).

COROLLARIUM IV.

244. Cum itaque in triangulo rectan-
gulo necessario angulus unus sit rectus
(§. 91); triangulum rectangulum æquila-
terum esse nequit.

COROLLARIUM V.

245. Si unus trianguli angulus ex 180°
subtrahitur, summa duorum reliquorum re-
linquitur; &, si summa duorum ex 180°
aufertur, residuus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

246. Si duo anguli unius trianguli
æquantur duobus alterius, sive figillatim,
sive junctim; etiam tertius unius æqualis
est tertio alterius (§. 91 Arithm.).

COROLLARIUM VII.

247. In quovis triangulo anguli ad basin Tab.
 y & z junctim sumti sunt duobus rectis mi- III.
nores. Fig. 61.

COROLLARIUM VIII.

248. Quoniam in triangulo æquicruro Tab. I.
DFE anguli ad basin y & u æquales sunt Fig. 17.
(§. 184); si angulus ad verticem F subtra-
hitur a 180° , & residuum bifecatur; unus
angulorum æqualium y vel u prodit. Simi-
liter, si duplum anguli unius ad basin y a
 180° subtrahitur, angulus ad verticem F
relinquitur.

PROBLEMA XIX.

249. In extremitate F lineæ FG per- Tab.
pendicularem FH excitare. III.
Fig. 62.

RESOLUTIO.

1. Super FG construatur Δ æquila-
terum FIG (§. 198).
2. Producat GI in H (§. 21), do-
nec fiat HI=GI.
3. Ducatur recta HF (§. 121): quæ
erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Δ FIG est æquilaterum,
per constr. $o=60^\circ$ & $u=60^\circ$ (§.
243). Ergo $y=120^\circ$ (§. 239);
consequenter ob FI=HI per constr.
 $x=30^\circ$ (§. 248). Cum adeo $x+o$
 $=90^\circ$; angulus ad F rectus (§. 144)
& HF ad FG perpendicularis est (§.
78). Q. e. d.

THEO-

THEOREMA XLI.

Tab. III. Fig. 63. 250. Si recta DE secet rectam AB in C; non alibi eandem denuo secabit.
DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, si fieri potest, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, ex. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, consequenter recta ADCE tota supra AB cadit (§. 170), atque adeo eam non secat (§. 50): quod cum hypothesei repugnet, DE non alibi, quam in C, ipsam AB secare potest. Q. e. d.

THEOREMA XLII.

Tab. II. Fig. 41. 251. Si in duobus triangulis ABC & abc, fuerit $AB=ab$, $A=a$ & $B=b$; erit etiam $AC=ac$, $BC=bc$, $C=c$, & $\triangle ACB = \triangle acb$.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus $\triangle abc$ poni supra alterum ABC, ita ut punctum a super A & recta ab super AB cadat. Quoniam $ab=AB$, $a=A$, & $b=B$, per hypoth. punctum b super B (§. 162), recta ac super AC & bc super BC (§. 166); consequenter c super C (§. 250) cadit. Cum adeo $\triangle abc$ alteri ABC congruat (§. 3); erit $ac=AC$, $bc=BC$, $c=C$ (§. 177), & $\triangle abc = \triangle ABC$ (§. 161). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

252. Si in duobus triangulis ACB & acb fuerit $A=a$, $B=b$ & $BC=bc$; erit etiam $C=c$ (§. 246), consequenter $AC=ac$, $AB=ab$ & $\triangle ACB = \triangle acb$ (§. 251).

THEOREMA XLIII.

Tab. II. Fig. 44. 253. Si in triangulo DFE anguli ad basin u & y æquales; triangulum est æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. Tab. II. 209); erit $DF=FE$ (§. 252). Est Fig. 44. ergo $\triangle DFE$ æquicrurum (§. 89). Q. e. d.

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 88).

THEOREMA XLIV.

255. Si duas lineas AB & CD secet transversa EF in G & H, ita Tab. III. Fig. 60. ut vel 1°. $y=u$; vel 2°. $x=u$; vel 3°. $o+u=180^\circ$; erunt linea ista inter se parallela.

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 212); erit $K=I$ (§. 78, 145). Est vero & $y=u$, per hypoth. & $HG=HG$. Quare $HK=GI$ (§. 252); consequenter cum HK & GI sint distantie linearum AB & CD (§. 225); lineæ AB & CD sunt inter se parallelae (§. 81). Quod erat primum.

2. $x=u$, per hypoth. $x=y$ (§. 156). Ergo $y=u$ (§. 87 Arithm.); consequenter AB & CD sunt inter se parallelae, per num. 1. Quod erat secundum.

3. $o+u=180^\circ$, per hypoth. Sed $o+x=180^\circ$ (§. 147). Ergo $u=x$ (§. 87 Arithm.), consequenter AB & CD sunt inter se parallelae, per num. 2. Quod erat tertium.

THEOREMA XLV.

256. Si dua linea EG & AB fuerint Tab. III. Fig. 58. perpendiculares ad eandem tertiam HI; erunt inter se parallela.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. III. *Fig. 58.* Fiat $AB = EG$, ducaturque recta KL ; erit HI ipsi KL parallela (§. 81); consequenter $EB = GA$ (§. 238). Quare cum etiam sit $GB = GB$; erit $EGB = ABG$ (§. 204); consequenter EG ipsi AB parallela (§. 255). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

Tab. III. *Fig. 64.* 257. Parallela DF & GA inter eadem parallelas FA & DG sunt aequales. Et contra, si DF & GA fuerint parallela & aequales; erit etiam FA ipsi DG parallela & aequalis.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 121); erit $x = y$ & $o = u$ (§. 233). Quare cum $AD = AD$, erit $DF = GA$ (§. 251). *Quod erat unum.*

$DF = AG$, per *hypoth.* & cum eadem lineæ sint parallelae per *hypoth.* $o = u$ (§. 233). Quare cum etiam sit $DA = DA$, erit $x = y$ (§. 179); consequenter FA ipsi DG parallela (§. 255), adeoque etiam aequalis, per *num.* I. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XX.

Tab. III. *Fig. 65.* 258. Per datum punctum V paralelam recta RS ducere.

RESOLUTIO.

- I. In charta,
 1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 216).
 2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis $TA = KV$ (§. 212).
 3. Per V & A ducatur recta MN , quæ erit ipsi RS parallela (§. 226).

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applicetur

& circinus intervallo VK aperiatur. Tab. III. *Fig. 65.* 2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur. Ita crus alterum per V paralellam ipsi RS describet (§. 81).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG .
2. In V fiat $o = x$ (§. 208). Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 255).

Aliter.

Ex modo præcedente enatus est Tab. III. *Fig. 66.* sequens.

1. Triangulum rectangulum AVN , ex ligno ebenino aut alio Indico paratum, ita applicetur ad rectam RS , ut basis ejus VN parti ipsius congruat.
2. Hypothenusæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG , quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat. Erit enim in quovis situ, basis VN , ob $y = x$, ipsi RS parallela (§. 255). *Q. e. d.*

Aliter.

Utimum interdum *Parallelismo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122) AB & CD composito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter se æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a se invicem distent, ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum

1. Re-

Tab. I. Regula una debite applicetur ad III. rectam RS.

Fig. 67. 2. Altera ad datum punctum V adducatur, &

3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur; quæ erit ipsi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 121). Quoniam $EG = FH$, $EF = GH$, per constr. & $EH = EH$, erit $o = x$ (§. 204), adeoque FH parallela ipsi EG (§. 255). Sed AB ipsi EG, & RS ipsi FH parallela, per constr. Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232). Q. e. d.

II. In campo,

Tab. III. Commode utimur modo primo antecedentium, vel

Fig. 68. I. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Ad V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit MV, quæ facile produci potest in N (§. 125), ipsi RS parallela (§. 255).

Aliter.

I. In punctis K & I defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Fiat $u = x$ (§. 208), & $TA = VK$.

3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125).

Erit MN parallela ipsi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x = u$, per constr. erit TA parallela ipsi KV (§. 255); consequenter $z = y$ (§. 233). Est vero etiam $TA = KV$, per construct. & $TV = TV$. Ergo $m = n$ (§. 179); consequenter MN parallela ipsi RS (§. 255). Q. e. d.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

SCHOLIION.

259. Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a reftitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo præfens remedium attulit Jacobus LEUPOLDUS, artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalocis elasticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.

THEOREMA XLVII.

260. Per idem punctum C eidem Tab. III. recta DE parallela nonnisi unica AB Fig. 69. duci potest.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim, si fieri potest, adhuc alia HG, priorem fecans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230), consequenter anguli CKL (§. 214) & CLK recti (§. 78): quod cum sit absurdum (§. 218), per C nonnisi AB ipsi DE parallela duci potest. Q. e. d.

Aliter.

Angulus NCH = NQD & NCA = NQD (§. 233). Ergo NCH = NCA (§. 87 Arithm.): quod cum sit absurdum (§. 84 Arithm.), HG & AB non sunt simul ipsi DE parallelæ. Q. e. d.

THEOREMA XLVIII.

261. Si recta NO fecet duas rectas Tab. III. alias HG & DE in C & Q, ita ut duo Fig. 69. R

Tab. III. Fig. 69. *duo anguli interni oppositi HCO & DQN fuerint simul sumti duobus rectis majores; linea GH & ED versus eam plagam divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipsi DE per C (§. 258); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed HCO & DQN simul sunt duobus rectis majores *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§. 92 *Arithm.*); consequenter AC intra spatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212): erit PR = CF (§. 226), consequenter PS > PR (§. 84 *Arithm.*) > CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CH & QD versus H & D crescunt (§. 225), adeoque lineæ CH & QD versus eam plagam divergunt (§. 84). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

262. *Si duas rectas HG & DE secet transversa NO in C & Q, ita ut anguli GCO & EQN simul sumti sint duobus rectis minores; lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG ipsi QE parallela esse nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipsi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO & EQN simul sumti sunt duobus rectis minores, *per hypoth.* Ergo GCO < BCQ, (§. 92 *Arithm.*); consequenter CB extra spatium GCQE cadit. Demittantur perpendicularares LI & CF (§. 216); erit CF = IL (§. 226); consequenter IK

< IL (§. 84 *Arithm.*) < CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CG & QE decrescunt versus G & E (§. 225), adeoque lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt (§. 83). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & EQC simul sumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipsi deinceps positi duobus rectis majores (§. 147). Quare lineæ, quæ versus unam plagam convergunt (§. 262), versus oppositam divergunt (§. 261).

PROBLEMA XXI.

264. *Datis recta AB, & angulis adjacentibus A & B, qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.* Tab. I. Fig. 18.

DEMONSTRATIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155).
2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250, 262). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM I.

265. Data ergo linea una, datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

266. Quare si in duobus triangulis fiat Tab. II. $A = a$, & $B = b$; triangula eodem modo Fig. 41. determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120).

COROLLARIUM III.

267. Si in duobus triangulis fuerit $A = a$, & $B = b$; consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 145); erit etiam $C = c$ (§. 246); hoc est, $\triangle ACB$ & $\triangle acb$ sibi mutuo æquiangula (§. 109).

(§. 109). Quare $\triangle\triangle$ fibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 296), & hinc latera homologa, seu æqualibus angulis opposita, proportionalia habent (§. 175).

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 70. 268. Si in triangulo ABC recta DE basi AC parallela ducatur; segmenta crurum cruribus proportionalia sunt; hoc est, $BA : BC = BD : BE = AD : EC$; & $BA : AC = BD : DE$; atque $\triangle BDE \sim \triangle BAC$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC, erit $x=y$, & $o=u$ (§. 233); adeoque $\triangle BDE \sim \triangle BAC$, & $BA : BC = BD : BE$, & $BA : AC = BD : DE$ (§. 267). Ergo & $BA : BD = BC : BE$ (§. 173 Arithm.); consequenter $AD : BD = EC : BE$ (§. 193 Arithm.), seu $BD : AD = BE : EC$ (§. 169 Arithm.), vel denique $BD : BE = AD : EC$ (§. 173 Arithm.). Q. e. d.

THEOREMA LI.

Tab. III. Fig. 71. 269. Recta FH, angulum GFE bifariam secans, basin GE cruribus adjacentibus EF & GF proportionaliter secat.

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 21), donec fiat $FI=FG$, erit $o+x=y+u$ (§. 239). Sed $o=x$, per hypoth. & $y=u$ (§. 184), adeoque $2y=2o$ (§. 15 Arithm.). Ergo $o=y$ (§. 94 Arithm.); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 255). Quare $EF : EH = FI : GH$ (§. 268) $= GF : GH$ (§. 168 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

270. Est ergo & $EF : GF = EH : GH$ (§. 173 Arithm.); consequenter $EF + FG : EF = GE : EH$ (§. 190 Arithm.); seu EF

$+FG : GE = EF : EH$ (§. 173 Arithm.); Tab. III. hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacentis. Q. e. d.

PROBLEMA XXII.

271. Datis tribus lineis AB, AC & BD, invenire quartam proportionalem. Tab. III. Fig. 72.

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D constituatur angulus x ipsi ABC æqualis (§. 208). Dico, esse $AB : AC = BD : CE$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o=x$, per constr. erit BC ipsi DE parallela (§. 255). Quamobrem $AB : AC = BD : CE$ (§. 268). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

272. Quodsi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum $AB : AC = AC : CE$.

COROLLARIUM II.

273. Si DB sumatur pro unitate; respondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140 Arithm.).

PROBLEMA XXIII.

274. Datam rectam AB in quotcunque partes æquales dividere. Tab. IV. Fig. 73.

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumpta refecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, ex gr. 5.

R 2

2. Super

Tab. 2. Super harum partium intervallo
IV. construatur triangulum æquilate-
Fig. 73. rum CED (§. 198).

3. Ex E in *a* transferatur recta AB, itidemque ex E in *b*.

4. Ducatur recta *ab*: ducantur itidem aliæ ex E in 1, 2, 3, &c.

Dico esse $ab = AB$, $a_1 = \frac{1}{7} AB$, $a_2 = \frac{2}{7} AB$, &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$, & $EC = ED$, per construct. erit $Ea : Eb = EC : ED$. (§. 168, 173 *Arithm.*). Quare, cum angulus E utrique triangulo ECD & Eab communis sit, erit $EC : CD = Ea : ab$, & $o = x$, (§. 183). Sed $EC = CD$, per construct. Ergo $Ea = AB = ab$ (§. 151 *Arithm.*). Quod erat unum.

Quoniam $o = x$, per demonstr. erit a_1 parallela ipsi C_1 (§. 255); consequenter $EC : C_1 = Ea : a_1$ (§. 268), hoc est, ob $EC = CD$, per construct. & $Ea = ab$, per demonstr. $CD : C_1 = ab : a_1$ (§. 168 *Arithm.*). Sed $C_1 = \frac{1}{7} CD$, per construct. Ergo $a_1 = \frac{1}{7} ab$ (§. 151 *Arithm.*). Quod erat alterum.

Eodem modo ostenditur, esse $a_2 = \frac{2}{7} AB$, consequenter $1_2 = \frac{1}{7} AB$, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. 275. Quodsi ergo CD fuerit utcumque
IV. divisa in 1 & 2; eodem modo recta *ab* secabitur in eadem ratione. Est nempe $CD : C_1 = ab : a_1$, & $CD : C_2 = ab : a_2$, &c. (§. 274).

SCHOLIUM.

276. Corollarii hujus usus amplissimus est in Architectura tam civili, quam militari; præsertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ.

PROBLEMA XXIV.

277. Scalam geometricam construere. Tab. IV. Fig. 75.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF, & in eam transferantur partes 10 æquales $B_1, 1_2, 2_3, 3_4$, &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F, &c. quoties libuerit.

2. In A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 249).

3. Per puncta divisionum 1, 2, 3, 4, 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 258).

4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.

5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7, &c. lineis transversis connectantur (§. 121).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore $B_1, 1_2, 2_3, 3_4$ &c. pedes, 99 digitum unum, 88 digitos duos, 77 tres, 66 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

$B_1 = 1_2 = 2_3$ &c. $= \frac{1}{10} AB$, per construct. Sed pes est decempedæ pars decima (§. 25). Ergo cum AB sit decempeda, per hypoth. erunt $B_1, 1_2, 2_3$ &c. pedes. Quod erat unum.

Porro quia 99 est parallela ipsi A_9 , per construct. $C_9 : CA = 99 : A_9$, (§. 268). Sed $C_9 = \frac{1}{10} CA$, per construct. Ergo $99 = \frac{1}{10} A_9$ (§. 151 *Arithm.*). Quare cum A_9 sit pes, per demonstr. erit 99 digitus (§. 25). Eodem modo ostenditur esse 88 duos, 77 tres &c. digitos. Quod erat alterum.

SCHO-

SCHOLIUM.

Tab. 278. *Quemadmodum hic linea exigua A 9*
 IV. *in 10 partes aequales dividitur; ita eadem*
 Fig.75. *in quocunque alias eodem artificio dividi*
potest. Neque opus est, ut angulus A sit rec-
tus; sed idem obliquus esse potest.

COROLLARIUM.

279. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K; erit intervallum $IK = 1^{\circ} 4' 5''$ & ita porro.

PROBLEMA XXV.

Tab. 280. *Invenire distantiam duorum lo-*
 IV. *corum AB, quorum unus B tantum ac-*
 Fig.76. *cedi potest.*

RESOLUTIO.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 125).
2. In C constituatur angulus ECF ipsi B aequalis (§. 208).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse $DC = BA$.

DEMONSTRATIO.

Nam $BE = EC$, $o = x$, per construct. & $y = u$ (§. 156). Ergo $AB = DC$ (§. 251). *Q. e. d.*

Aliter.

- Tab. 1. Defigatur baculus in I cum B & A
 IV. in eadem recta (§. 125), itidem-
 Fig.77. que alius utcunque in K.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
 3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse $MN = BA$.

DEMONSTRATIO.

$BK = KM$, & $IK = KL$, per construct. Tab. $o = u$, (§. 156). Ergo $IB = ML$, & IV. $y = x$ (§. 179). Quare cum sit $o + m = u$ Fig.77. $+ n$ (§. 156), & $IK = KL$, per constr. erit $IA = NL$ (§. 251); consequenter $AB = NM$ (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula geometrica in C collocata, Tab. per dioptras collineatur in A & B, IV. ducanturque rectae ac & cb. Fig.78.
2. Quærat distantia stationis a loco accesso AC (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica in ac transferatur (§. 277).
4. Translocetur mensula in A, ita ut punctum a ipsi A imminet, & per dioptras regulæ ad ac applicatæ baculus in prima statione C defixus conspiciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque ab.
6. Denique in Scala geometrica capiatur intervallum ipsius ab (§. 277). Ita distantia quæsitæ AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $c = C$, & $a = C$, (per construct. & §. 167), erit $ac : ab = AC : AB$ (§. 267), hoc est, iidem numeri rationes $ac : ab$ & $AC : AB$ indigitant (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Baculo in C defixo investigetur quantitas angulorum A & C (§. 152), itemque longitudo ipsius AC (§. 126).
2. Ope Instrumenti transportatorii & Scalæ geometricæ construaturs triangulum acb (§. 264).

R 3

3. Ad

Tab. 3. Ad Scalam geometricam applicetur
IV. recta ab (§. 277).
Fig. 78. Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXVI.

281. Metiri distantiam duorum locorum inaccessorum AB .

RESOLUTIO.

Tab. Sine Instrumentis tædiosior est Pro-
IV. blematis resolutio, quam ut commen-
Fig. 76. dari possit. Cui tamen volupe fuerit
eamdem experiri, is

1. Statione in E assumpta rectas BE & AE inveniat (§. 280).
2. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem (§. 194).

Aliter.

Tab. 1. Duabus stationibus in C & D electis,
IV. in prima C collocetur mensula, & per
Fig. 79. dioptras collineetur in $D, B,$ & $A,$ ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ $cd, cb, ca.$

2. Quærat distantia stationum CD (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica transferatur in cd (§. 279).
4. Baculo in C defixo, mensula collocetur in $D,$ ea lege ut punctum d ipsi $D,$ hoc est puncto in quo defigebatur ante baculus immineat, & per dioptras regulæ ad cd applicatæ respicienti baculus in C occurrat.
5. Hinc porro collineatio fiat in A & $B,$ ducanturque rectæ da & $db.$
6. Tandem distantia punctorum a & b investigetur in Scala geometrica (§. 279).

Dico esse $cd : ab = CD : AB.$

DEMONSTRATIO.

Est enim $cdb = CDB,$ & $bcd = BCD$ Tab. IV. (per construct. & §. 167). Ergo $dc : cb = DC : CB$ (§. 267). Similiter cum Fig. 79. fit $acd = ACD,$ & $adc = ADC$ (per construct. & §. 167), erit $dc : ac = DC : AC,$ adeoque $bc : ac = BC : AC$ (§. 196 *Arithm.*); consequenter, ob $acb = ACB$ (per construct. & §. 167), $ac : ab = AC : AB$ (§. 183), & ob $dc : ac = DC : AC$ (per demonstr.) $dc : ab = DC : AB$ (§. 197 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Electis duabus stationibus C & $D,$ Tab. IV. investigetur quantitas angulorum y & $x,$ item z & w (§. 152), quorum summæ dant angulos C & D (§. 86 *Arithm.*).
2. Quærat porro distantia stationum CD (§. 126), &
3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex Scala geometrica transferatur recta cd ipsi CD respondens (§. 279).
4. Super ea, ope angulorum x & $D,$ construatur triangulum $bcd,$ & ope angulorum z & $C,$ alterum acd (§. 264).
5. Tandem in Scala geometrica investigetur distantia punctorum a & b (§. 279).

Dico esse $ab : cd = AB : CD.$

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum proxime præcedente.

SCHO-

SCHOLIION I.

282. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus stationibus reperiri distantias plurium locorum.*

SCHOLIION II.

Tab. IV. Fig. 81. 283. *Nec minus manifestum est, mensuratum in istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculari Q.*

PROBLEMA XXVII.

284. *Altitudinem accessam AB metiri.*

RESOLUTIO.

- Tab. V. Fig. 82. 1. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.
2. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121).
3. Quodsi contingat, ut E & B sint cum oculo C in eadem recta; erit CA = AB; sin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit; propius cum baculo ad altitudinem AB provolvatis opus est; sin punctum superius; procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.
4. Tandem distantiam oculi C ab altitudine AB metiaris necesse est (§. 126).

Dico esse CA = AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim AB (§. 227) & ED per construct. ad AC perpendiculares, inter se parallelæ sunt (§. 256), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 268). Sed CD = DE, per hypoth. Ergo CA = AB (§. 149 Arithm.). Q. e. d.

Aliter.

1. In distantia plurium, ex. gr. 30, 40, Tab. V. & amplius, pedum defigatur perpendiculariter baculus DE, & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta.
2. Investigetur distantia baculorum GF, & baculi minoris ab altitudine quæsitæ HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126).
3. Quærat ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302 Arithm.).
4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC, vel pars AH.
- Dico summam esse altitudinem AB.

Ex. gr. Sit HF = 48', GF = 20', GE = 16', FC = 5'.

$$\begin{array}{r}
 20 : 16 = 48 \mid 5) \quad 192 \quad (38\frac{2}{5} = BH \\
 5 \quad 4 \quad 4 \mid \quad 15 \quad 5 = FC \\
 \hline
 \quad \quad \quad 192 \mid \quad 42 \quad 43\frac{2}{5} = AB \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 40 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2
 \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur, sintque BA (§. 227) & ED per construct. ad AC perpendiculares; erunt eadem perpendiculares ad HF (§. 230); adeoque GE & BH parallelæ (§. 256); consequenter GF : GE = HF : HB (§. 268). Quod erat unum.

Porro cum HA & FC sint perpendiculares inter easdem parallelas HF &

Tab.V. & AC (*per constr.* & §. 227); erit FC
Fig.83. = HA (§. 226). Quare BH = FC
= BH + HA (§. 88 *Aritlm.*) = BA
(§. 86 *Aritlm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. 1. Mensula in D verticaliter erigatur,
Fig.84. ita ut latus ipsius FE sit horizonti
Tab. parallelum: id quod obtinetur ope
IV. perpendiculi Q.
Fig.81.

2. Ducatur recta *ef* lateri mensulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur mensula, donec collineatio in altitudinem quæsitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras transpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quærat distantia stationis ab altitudine *eC* (§. 126), &
5. Ex Scala geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279):
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 212), quod
7. Ad Scalam geometricam applicatum (§. 279) partem altitudinis AC manifestat.
8. Addatur altitudo BC.
Dico, summam esse altitudinem AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227), & *Ce* ipsi BD parallela *per constr.* erit eadem AC perpendicularis ad *Ce* (§. 230). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per constr.* Ergo *bc* ipsi AC parallela (§. 256); consequenter *ec : cb = eC : CA* (§. 268).

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli *e* (§. Tab.V. 152), & distantia stationis *eC* (§. Fig.84. 126).
2. Super *ec* in Scala geometrica minore assumpta (§. 279) construatut triangulum ad *c* rectangulum *ecb* (§. 264).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Est enim *c=C*, & *e=E*, *per constr.*
Ergo *ec : cb = eC : CB* (§. 267).
Q. e. d.

SCHOLIUM.

285. In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis: que cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas, non tam Instrumenti altitudo, quam ipsa CB addenda, in altitudine accessu facile investiganda. Necesse etiam est, ut baculi, quantum fieri potest, exactissime ad horizontem perpendiculariter infigantur, & in Instrumentis præscripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: immo altitudo BC eodem modo investigari potest, quo ipsam AC invenimus.

PROBLEMA XXVIII.

286. Altitudinem inaccessibleam AB Tab.V. Fig.83. metiri.

RESOLUTIO.

Sine Instrumentis prolixa est operatio. Nimirum

1. Distantia stationis CA vel FH quaeritur, per Problema 25 (§. 280).
2. Reliqua fiunt, ut in Problemate præcedente (§. 284).

Aliter.

1. Statione in D electa, mensula collocetur ut in Problemate præcedente (§. 234).

2. Du-

- Tab.V. 2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.
 Fig.85. 3. Baculi in *G* defixi, ut sit in recta
 n. 1. *fC*, quærat distantia a puncto *f*
 (§. 126), &
 4. Ex Scala geometrica transferatur in
fe (§. 279).
 5. Sub puncto *f* in *D* defigatur baculus,
 & mensula ita collocetur in *G*, ut
 punctum *e* ipsi *G* immineat, & per
 dioptras regulæ ad *ef* applicatæ res-
 picienti baculus in *D* occurrat.
 6. Vertatur regula circa punctum *e*,
 donec per dioptras prospiciens api-
 cem *A* videat, ducaturque recta *ea*.
 7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc*
 perpendicularis (§. 216): quæ
 8. Ad Scalam geometricam (§. 279)
 applicata prodit altitudinem *AC*.
 n. 2. 9. Quodsi puncta, *B*, *G*, *D* fuerint in
 eadem recta, addatur altitudo puncti
f ut habeatur *AB*; sin minus, re-
 gula circa *e* vertatur, donec per
 dioptras despiciens videat *B*, ducatur
eb, & perpendiculum *ac* continuetur,
 donec ipsi *eb* in *b* occurrat.
 Etenim *ab* in Scalam geometricam
 translata manifestabit *AB*.

DEMONSTRATIO.

In $\triangle\triangle$ enim *fea* & *FeA*, est angulus
afe = *AFe*, & *aef* = *AeF*, per
 construct. Ergo *fe:ea* = *Fe:eA* (§.

267). Porro *AC* & *ac* perpendiculara-Tab.V.
 res ad *FC* (per §. 227 & constr.) adeo- Fig.85.
 que inter se parallelæ (§. 256). Quare
ae:ac = *Ae:AC* (§. 268), consequenter
fe:ac = *Fe:AC* (§. 194 *Arihm.*).
 Quod erat unum.

Quoniam *ab* parallela ipsi *AB*, per
 demonstrata: erit *ae:ab* = *Ae:AB* (§.
 268); consequenter *fe:ab* = *Fe:AB*
 (per demonstr. & §. 194 *Arihm.*). Quod
 erat alterum.

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli *AFC*
 in *D*, & anguli *AeC* in *G*; item-
 que *CeB* in eadem statione *G* (§.
 152).
2. Quærat distantia *Fe* (§. 126).
3. Construatur ex his datis juxta Sca-
 lam modicam triangulum *aef* (§.
 279).
4. Demittatur ex vertice *a* in basin
 continuatam perpendicularis *ac* (§.
 216) indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipsi *CeB* æqua-
 lis (§. 208), & producaturs crus *eb*,
 donec perpendiculari *ab* in *b* occur-
 rat (§. 21).

Dico esse *fe:ab* = *FC:AB*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

De Circuli Symptomatis.

THEOREMA LII.

Tab. I. 287. **C**irculi se intus tangentes sunt
Fig. 5. eccentrici.

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit, per *hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (§. 121); ea peripheriam minoris in M secabit (§. 50), eritque adeo radius minoris CM pars ipsius CN (§. 9 *Arithm.*). Quod si jam C ponatur centrum commune circulorum; erit $CL = CM$, & $CL = CN$ (§. 40), adeoque $CM = CN$ (§. 87 *Arithm.*), quod cum sit absurdum (per *demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

Tab. V. 288. Duo circuli se mutuo secantes
Fig. 86. sunt eccentrici.

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus X alterum Z secat, per *hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 53). Ducatur itaque ex C centro circuli X radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli Z secabit peripheriam illius in E (§. 50); eritque CB pars ipsius CE (§. 9 *Arithm.*). Quod si C ponatur centrum etiam circuli Z; erit $CB = AC$, & $CE = AC$ (§. 40); adeoque $CB = CE$ (§. 87 *Arithm.*). Quod cum

fit absurdum (per *demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli X & Z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIV.

289. In eodem vel in aequalibus circulis, chorda æquales AB & DE æquales arcus subtendunt: & contra. Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $AB = DE$ per *hypoth.* $BC = CE$, & $AC = CD$ (§. 40); angulus $ACB = DCE$ (§. 204); consequenter arcus AB & DE, mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57), æquales sunt (§. 142). Quod erat primum.

Arcus AB & DE æquales sunt, per *hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57): anguli igitur isti æquales sunt (§. 142). Quoniam porro $BC = CE$, & $AC = CD$ (§. 40); erit quoque $AB = DE$ (§. 179). Quod erat alterum.

THEOREMA LV.

290. Si in circulis inequalibus arcus AB & ab fuerint similes; chorda cognominæ ad suos radios AC & ac eandem rationem habent.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & ab similes sunt, per *hypoth.* iidemque mensuræ angulorum ACB & acb (§. 57); erit $ACB = acb$ (§. 141). Est vero $AC : BC = ac : bc$ (§. 40 *Geom.* & §. 149 *Arithm.*). Ergo $AB : BC = ab : bc$ (§. 183). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA LVI.

Tab.V. Fig.88. 291. Radius CE, chordam BA bifariam secans in D, etiam arcum bifariam secat in E; & ad chordam BA perpendicularis: & contra.

DEMONSTRATIO.

AD=DB, per hypoth. AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo $o=x$, & $y=u$ (§. 204); consequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 79), & arcus AE atque EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142): Quod erat primum.

Sint arcus AE & EB æquales per hypoth. cum iidem sint mensuræ angulorum u & y (§. 57); erit $y=u$ (§. 142). Est vero etiam AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo AD=DB, & $o=x$ (§. 179); consequenter CD ad AB perpendicularis (§. 79). Quod erat secundum.

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D per hypoth. erit $o=x$ (§. 79). Est vero etiam AC=CB (§. 40), & hinc $m=n$ (§. 184); consequenter $y=u$ (§. 246). Quare arcus AE & EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142), & AD=DB (§. 251). Quod erat tertium.

THEOREMA LVII.

292. Si recta NE chordam AB bifariam secet, & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum transit, & tam arcum AEB quam ANB bifariam secat.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, per hypoth. erit $o=x$ (§. 79).

Est vero etiam AD=DB, per hypoth. & Tab.V. ND=ND. Ergo AN=NB (§. 179); Fig.88. consequenter arcus cognomines æquales sunt (§. 289). Eodem modo ostenditur, arcus AE & EB æquales esse. Quod erat unum.

Arcus AN=NB, & AE=EB, per demonstr. Ergo NA + AE = NB + BE (§. 88 Arithm.); consequenter NE diameter circuli (§. 135), adeoque per centrum transit (§. 39). Quod erat alterum.

PROBLEMA XXIX.

293. Datum arcum AB in duas partes æquales dividere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 210): hæc arcum AB bifariam secabit (§. 292). Q. e. f. & d.

PROBLEMA XXX.

294. Per data tria puncta non in directum jacentia A, B & C circumulum Tab.V. Fig.89. describere.

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant intersectiones in D & E, itemque alia duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121). Dico I esse centrum circuli per A, C, & B describendi (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C, & B sunt in peripheria alicujus circuli, per hypoth. atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 38). Sed ED ad AC, GH ad EC perpendicularis; & ED ipsam AC, GH vero BC

Tab.V. BC bifariam fecat (§. 210). Ergo utra-
Fig.89. que per centrum transit (§. 292). Qua-
re, cum DE & GH tantum in I se mu-
tuo fecent (§. 250), erit I centrum cir-
culi per puncta data A, C, & B trans-
euntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

295. Assumtis in peripheria, vel arcu
circuli tribus punctis; centrum inveniri,
datusque arcus perfici potest.

COROLLARIUM II.

296. Si tria puncta unius peripheriæ
tribus punctis alterius congruant; peri-
pheriæ totæ congruunt: atque adeo cir-
culi æquales sunt (§. 161).

COROLLARIUM III.

297. Omne triangulum est circulo in-
scriptibile (§. 116).

THEOREMA LVIII.

Tab.V. 298. In eodem vel æqualibus circulis,
Fig.87. chordæ æquales AB & DE a centro C
æqualiter distant: & contra.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG sunt distantia
chordarum AB & DE a centro C, per
hypoth. erunt ad chordas perpendicula-
res (§. 225): & hinc o & x recti (§.
78), adeoque æquales (§. 145). Porro
cum $AB=DE$, per hypoth. & CF ad AB
perpendicularis, per demonstrata, ipsam
AB; CG vero perpendicularis ad DE,
per demonstrata, ipsam DE bisecet (§.
291); erit $FA=DG$ (§. 177 Arithm.).
Quare cum etiam sit $AC=CD$ (§. 40);
erit $CF=CG$ (§. 235). *Quod erat
unum.*

Quodsi distantia FC & CG fuerint
æquales, per hypoth. cum sit $o=x$ per
demonstr. & $AC=CD$ (§. 40); erit

$AF=DG$ (§. 235). Sed $AF=\frac{1}{2}AB$, Tab.V.
& $DG=\frac{1}{2}DE$ (§. 291). Ergo $AB=DE$ (§. 177 Arithm.). *Quod erat
alterum.*

THEOREMA LIX.

299. Chordarum maxima est dia-
meter AB. Tab.I.
Fig.7.

DEMONSTRATIO.

Est enim $CO=BC$ & $CN=CA$
(§. 40). Sed $CO+CN > ON$ (§. 190).
Ergo $BC+CA$, hoc est, $BA > ON$
(§. 89 Arithm.). *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

300. Si intra triangulum ACB su-
pra ejusdem basi AB construatur trian-
gulum ADB; erunt crura interioris AD
& DB simul sumta minora cruribus ex-
terioris AC & CB simul sumtis: angulus
vero ad verticem interioris D major
angulo ad verticem exterioris C. Tab.V.
Fig.90.

DEMONSTRATIO.

Quia $AE < AC+CE$ (§. 190);
 $AE+EB < AC+CE+EB$ (§. 90
Arithm.), hoc est, $AD+DE+EB$
 $< AC+CB$ (§. 86, 89 Arithm.). Sed
 $DB < DE+EB$ (§. 190). Ergo multo
magis $AD+DB < AC+CB$. *Quod erat
unum.*

Quoniam $o > x$, & $u > m$ (§. 188);
erit $o+u > x+m$ (§. 90 Arithm.).
Quod erat alterum.

THEOREMA LXI.

301. Chorda arcus majoris AB ma-
jor est; chorda minoris AD minor. Tab.V.
Fig.91.

DEMONSTRATIO.

$EB+EC > BC$ (§. 190), hoc est,
quia $DE+EC=BC$ (§. 40), EB
 $+EC$

Tab. V. $+EC > DE + EC$ (§. 89 *Arithm.*); con-
 Fig. 91. sequenter $EB > DE$ (§. 92 *Arithm.*).
 Est vero $AE + DE > DA$ (§. 190). Ergo
 multo magis $AE + EB > DA$, hoc est,
 $AB > DA$ (§. 86, 89 *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA LXII.

Tab. I. 302. *Secantium* MA, MN, ME
 Fig. 7. ex eodem puncto M ductarum maxima
 est MA, qua per centrum transit: re-
 liquae sunt tanto minores, quo a centro
 remotiores. Contra earundem portiones
 extra circulum MD, MO, MB sunt
 tanto majores, quo magis a centro distant:
 minima est MB secantis MA per centrum
 transentis.

DEMONSTRATIO.

1. $NC + MC > MN$ (§. 190). Sed
 $NC = CA$ (§. 40). Ergo $MA = CA$
 $+ CM$ (§. 86 *Arithm.*) = $NC + CM$ (§.
 88 *Arithm.*) $> MN$ (§. 89 *Arithm.*)
 Quod erat primum.

2. $MO + EO > ME$ (§. 190). Sed
 $ON > EO$ (§. 301). Ergo multo ma-
 gis $MO + ON$, hoc est, MN (§. 86
Arithm.) $> ME$. Quod erat secundum.

3. $CO + OM > MC$ (§. 190). Sed
 $CO = CB$ (§. 40). Ergo $OM > MB$
 (§. 92 *Arithm.*). Quod erat tertium.

4. $CD + DM > CO + OM$ (§. 300).
 Sed $CD = CO$ (§. 40). Ergo DM
 $> OM$ (§. 92 *Arithm.*). Quod erat
 quartum.

THEOREMA LXIII.

Tab. V. 303. Si ex puncto E intra circulum
 Fig. 92. assumpto ducantur in peripheriam rectae
 EF, EB, EG, &c. item EA, ED,

EH &c. maxima erit EF, qua per Tab. V.
 centrum C transit: reliquae EB, EG &c. Fig. 92.
 tanto majores, quo maxima propiores.
 Contra minima est EA, qua continuata
 per centrum transit: reliquae ED, EH
 &c. sunt tanto majores, quo ab ea re-
 motiores.

DEMONSTRATIO.

1. $EC + BC > EB$ (§. 190). Sed BC
 $= CF$ (§. 40). Ergo $EC + BC = EC$
 $+ CF$ (§. 88 *Arithm.*) hoc est, EF (§.
 86 *Arithm.*) $> EB$ (§. 89 *Arithm.*).
 Quod erat primum.

2. $EI + GI > GE$, & $IB + IC > BC$
 (§. 190), hoc est, ob $BC = GI + IC$
 (§. 40), $IB + IC > GI + IC$ (§. 89
Arithm.), adeoque $IB > GI$ (§. 92
Arithm.). Quare $EI + IB > EI + GI$
 (§. 90 *Arithm.*); adeoque $EI + IB$, hoc
 est, EB (§. 86 *Arithm.*) $> GE$. Quod
 erat alterum.

3. $CE + ED > CD$ (§. 190), Sed
 $CD = CE + EA$ (§. 40). Ergo CE
 $+ ED > CE + EA$ (§. 89 *Arithm.*);
 consequenter $ED > EA$ (§. 92 *Arithm.*).
 Quod erat tertium.

4. $EK + KD > ED$, & $KH + KC$
 $> CH$ (§. 190), hoc est, ob $CH = CK$
 $+ KD$ (§. 40), $KH + KC > KC + KD$
 (§. 98 *Arithm.*), adeoque $KH > KD$
 (§. 92 *Arithm.*). Quare $EK + KH > EK$
 $+ KD$ (§. 90 *Arithm.*); adeoque EK
 $+ KH$, hoc est, EH (§. 86 *Arithm.*),
 $> ED$. Quod erat quartum.

THEOREMA LXIV.

304. Recta IL radio CL perpendicu-
 lariter

Tab. I. *lariter insistens tangit circulum in unico puncto L: nec inter tangentem HL & circulum alia recta duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 121). Quoniam IL perpendicularis ad CL, per hypoth. adeoque L est rectus (§. 78); K erit acutus (§. 218). Ergo CK > CL (§. 220); consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est tota linea LI, seu HI, extra circulum cadit (§. 40); & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 47). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216); erit D rectus (§. 78), adeoque CL > CD (§. 220). Cadit itaque D intra circulum (§. 40): quod cum hypothese repugnet (§. 47), inter tangentem & circulum per contactum transiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

305. Angulus igitur contactus, tangente HL & arcu ML interceptus, est quovis rectilineo minor: angulus vero semicirculi, inter radium CL & arcum ML interceptus, est quovis rectilineo acuto major.

SCHOLIUM.

306. *Hoc paradoxum EUCLIDIS exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata est de eo controversia inter Jacobum PELETARIUM Cenomani in Gallia Matheseos Professore, & Christophorum CLAVIUM Jesuitam Bambergensem: quorum (a) hic angulum contactus rectilineo heterogeneum (§. 30 Arithm.)*

(a) In Schol. ad 16. Elem. III. f. 117. & seqq. Tom. I. Oper.

agnovit, quemadmodum linea est superficiæ heterogenea; ille vero e numero angulorum susulit & pro non quanto declaravit. *Peculiarem De angulo contactus & semicirculi Tractatum, An. 1656, conscripsit WALLISIUS, qui legitur Operum Vol. II. f. 605 & seqq. ubi, cum PELETARIO, angulum contactus omni assignabili minorem, adeoque nullius magnitudinis esse defendit.*

COROLLARIUM II.

307. Circulum in eodem puncto L non nisi unica recta HI tangere potest. Tab. I.
Fig. 3.

PROBLEMA LXV.

308. *Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 216); hæcque, utpote tangens per hypoth. extra circulum cadet (§. 47); consequenter CK > CN (§. 84 Arithm.) > CL (§. 40 Geom. & §. 89 Arithm.). Est vero etiam CK < CL (§. 220): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78).

COROLLARIUM II.

310. Si HI circulum tangat, & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXXI.

311. *Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.*

RE-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. I. 1. Ex centro circuli C ad punctum
Fig. 3. contactus L ducatur radius CL.
2. In L excitetur perpendicularis LH
(§. 249), quæ circumulum in L tanget
(§. 308). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA LXVI.

Tab. V. 312. Arcus FG & HI inter chor-
Fig. 91. das parallelas intercepti sunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230), ob FH & GI *per hypoth.* parallelas; dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291). Quare KF = KG = KH = KI, hoc est, FG = HI (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXVII.

Tab. I. 313. Angulus ad centrum ACD est
Fig. 13. duplus anguli ad peripheriam ABD, eadem arcui AD insistentis.

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258); erit EB = DF (§. 312); adeoque $o = x$ (§. 142). Sed $o = y$ (§. 156). Ergo $x = y$ (§. 87 *Arithm.*) = $\frac{1}{2}ACD$. Porro $o = u$ (§. 233). Ergo $u = y = \frac{1}{2}ACD$ (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Tab. V. II. In casu altero, $o = 2y$, & $u = 2x$,
Fig. 93. *per cas. 1.* Ergo $u + o = 2x + 2y$ (§. 88 *Arithm.*), hoc est, $ABD = \frac{1}{2}ACD$ (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Fig. 94. III. In casu tertio, $o + u = 2y + 2x$;
per cas. 1. & $o = 2y$, *per cas. 1.* Ergo

$u = 2x$ (§. 91 *Arithm.*), hoc est, $\frac{1}{2}ACD = ABD$ (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LXVIII.

314. Anguli ad peripheriam ABD Tab. I.
mensura est arcus dimidius AD, cui in- Fig. 13.
sistit.

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore segmento: insistet ergo arcui minori AD quam semicirculo (§. 70, 56); adeoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD (§. 72, 135). Sed anguli ACD mensura est arcus AD (§. 73). Ergo ipse ABD mensura dimidius arcus AD (§. 313, 142). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Tab. V.
Ducatur utcunque recta CD: erit ar- Fig. 95.
cus dimidius AD mensura anguli ACD, & $\frac{1}{2}DB$ mensura ipsius DCB, *per cas. 1.* Ergo $\frac{1}{2}ADB$ mensura anguli ACB. *Quod erat secundum.*

III. Sit denique HIK angulus in mi- Tab. V.
nore segmento. Ducatur utcunque Fig. 96.
recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}HL$ mensura anguli HIL, & $\frac{1}{2}LK$ mensura anguli LIK, *per cas. 1.* Ergo denuo $\frac{1}{2}HLK$ mensura anguli HIK. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM I.

315. Duo vel plures anguli HLI & HMI Tab. I.
eidem arcui HI, vel æqualibus arcibus in- Fig. 14.
sistentes, æquales sunt (§. 142).

COROLLARIUM II.

316. Quare cum porro sit $o = x + u$ (§. 239); erit anguli extra centrum mensura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus verticalis K insistent (§. 314).

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab.V. 317. Cum angulus in semicirculo ACB Fig.95. semicirculo insistat, per hypoth. mensura ejus est circuli quadrans (§. 314), adeoque ipse rectus est (§. 143).

COROLLARIUM IV.

Tab.V. 318. Cum angulus in majore segmento Fig.96. DIF arcui DF, minori quam est semicirculus, insistat (§. 70); mensura ejus est semiquadrante minor (§. 314); adeoque ipse recto minor (§. 143); consequenter acutus §. 66).

COROLLARIUM V.

319. Non absimili ratione liquet, angulum in minore segmento HIK esse obtusum.

COROLLARIUM VI.

Tab. 320. Quoniam $o = x + y$ (§. 239), & VI. anguli o mensura est $\frac{1}{2}LM$, anguli y vero Fig.97. $\frac{1}{2}NO$ (§. 314); anguli extra peripheriam G mensura est differentia inter dimidium arcum concavum LM cui insistit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXII.

Tab. 321. Normam examinare, utrum VI. exacta sit, nec ne. Fig.98.

RESOLUTIO.

1. Describatur intervallo arbitrario semicirculus AEF, &
2. Ducantur in eo, ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum, rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest, erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis est angulo AEF (§. 167),

adeoque rectus (§. 317), consequenter norma exacta (§. 212). *Q. e. d.*

THEOREMA LXIX.

322. Mensura anguli minoris segmenti ATB est dimidium arcus TDB; VI. anguli vero majoris segmenti BTH dimidium arcus majoris BGT. Fig.99.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308). Cum adeo ejus mensura sit arcus dimidius EBT (§. 135, 143), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 314); erit anguli ATB mensura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus EGT sit mensura anguli ETH (§. 135, 143), & dimidius arcus EB mensura anguli BTE (§. 314), esse dimidium arcum BGT mensuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

323. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D vero arcus dimidius BGT (§. 314); angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB, & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH (§. 142).

COROLLARIUM II.

324. Si chorda GT ultra circumulum continuetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus subtensorem. Nam ATF = GTH (§. 156). Ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 322). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. cit.). Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. VI. Fig. 100. 325. Si LM & MN sint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL mensura arcus dimidius LN (§. 322); consequenter anguli ipsi sunt æquales (§. 142), & ideo LM = MN (§. 253).

COROLLARIUM IV.

326. Quia angulorum L, M & N mensura est semicirculus (§. 240, 243), angulorum vero L & N junctim sumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti mensura differentia arcus intercepti LN a semicirculo.

PROBLEMA XXXIII.

Tab. VI. Fig. 101. 327. Inter duas lineas AB & BE mediam proportionalem BD invenire.

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum, dividaturque AE bifariam in C (§. 210).
2. Ex C, intervallo ipsius AC, describatur semicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212).

Dico esse AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, per construct. m & n sunt anguli recti (§. 78). Sed o+x est itidem rectus (§. 317) & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo o=z (§. 246); consequenter y=x (§. cit.); & tunc AB : BD = BD : BE (§. 267). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

328. Cum sit AB : BD = BD : BE; ex data sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302 Arithm.). Sic ex gr. AB = 80^{''}, BD = 300^{''}; erit BE = 1125^{''},

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

adeoque AB + BE = AE = 1205^{''} seu fere 12^l. Tab. VI. Fig. 101.

COROLLARIUM II.

329. Ex demonstratione una liquet, Δ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB, ex angulo recto D in hypothenusam AE demissam, resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§. 267).

COROLLARIUM III.

330. Cum adeo etiam sit AB : AD = AD : AE (§. cit.); si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transferatur, factisque reliquis, ut in resolutione Problematis, erit AD media proportionalis quæsitæ.

COROLLARIUM IV.

331. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 247 Arithm.).

THEOREMA LXX.

332. Si dua chordæ HM & LI se Tab. I. mutuo secent in K; erit HK : LK = KI : KM. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim x = x & u = u (§. 315); ideo HK : LK = KI : KM (§. 267). Q. e. d.

THEOREMA LXXI.

333. Si fuerint dua secantes GL & GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM : GL = GN : GO. Tab. VI. Fig. 97.

DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GML communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 324). Sed anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 314). Quare GNO = GML (§. 142); consequenter GM : GL = GN : GO (§. 267). Q. e. d.

T

THEO-

THEOREMA LXXII.

Tab. 334. Si ex eodem puncto A ducantur
VI. dua recte AD & AB, quarum altera
Fig. circulum tangit, altera secat; erit tan-
102. gens AD media proportionalis inter to-
tam secantem AB & ejus portionem AC
extra circulum.

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo Tab.
ACD & ABD communis. Anguli VI.
ADC & ABD æquales sunt (§. 323). Fig.
Ergo $AC:AD = AD:AB$ (§. 267). 102.
Q. e. d.

CAPUT V.

De Figurarum descriptione.

THEOREMA LXXIII.

Tab. 335. **I**N parallelogrammis latera oppo-
VI. sita sunt equalia: & si in figura
Fig. quadrilatera latera opposita fuerint equalia,
103. erint eadem parallelogrammum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogram-
mum, per hypoth. est OP parallela ipsi
NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 102);
consequenter, ducta diagonali PN,
erit $x=o$ & $n=m$ (§. 233); adeoque
 $OP=NQ$ & $ON=PQ$ (§. 251).
Quod erat unum.

Quod si $OP=NQ$ & $ON=PQ$, per
hypoth. cum etiam sit $NP=NP$; erit
 $x=o$ & $n=m$ (§. 204); consequenter
OP ipsi QN, & ON ipsi PQ parallela
(§. 255); adeoque OPQN parallelo-
grammum (§. 102). Quod erat alterum.

COROLLARIUM.

336. Cum in Quadrato, Oblongo,
Rhomboido, & Rhomboido latera opposita
æqualia sint (§. 98, 99, 100, 101); erunt
Quadratum, Oblongum, Rhombus, &
Rhomboides parallelogramma (§. 335).

THEOREMA LXXIV.

337. Diagonalis dividit parallelo-
gramma in duas partes æquales: anguli
in iis diagonaliter oppositi sunt æquales:
anguli vero ad idem latus oppositi duobus
rectis æquantur: & duo latera simul sum-
ta sunt diagonali majora.

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammis $ON=PQ$ & Tab.
 $PO=QN$ (§. 335). Sed $PN=PN$. VI.
Ergo $\triangle NOP = \triangle NQP$ (§. 204). Fig.
Quod erat unum. 103.

Quoniam in parallelogrammis OP
ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§.
103): anguli O & N, N & Q, Q &
P, P & O simul sumti æquantur duo-
bus rectis (§. 233). Quod erat secun-
dum.

Quoniam angulus $O+N=N+Q$,
per demonstrata; erit $O=Q$ (§. 91
Arithm.). Similiter quoniam $Q+P=Q$
 $+N$, per demonstrata; erit $P=N$ (§.
91 Arithm.). Quod erat tertium.

Denique $NO+PO > NP$, & PQ
 $+QN > PN$ (§. 190). Quod erat quar-
tum.

PRO-

PROBLEMA XXXIV.

Tab. VI. Fig. 104. 338. Super data recta CD Quadratum construere.

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.
2. Ex D & A, intervallo ipsius CD, fiat intersectio in B (§. 197).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD, per constr. Ducta ergo diagonali AD, patet esse C = B (§. 204). Sed C rectus est per constr. Ergo B etiam rectus (§. 145); consequenter o & x, item y & m semirecti (§. 241), adeoque o + y & x + m itidem recti. Quare figura est Quadratum (§. 98). Q. e. d.

Aliter.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD æquales (§. 249).
2. Ducatur recta AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim CA = DB = CD, per constr. & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD, per constr. anguli ad D & C sunt recti (§. 78); adeoque BA parallela ipsi DC (§. 226); consequenter anguli A & B sunt recti (§. 233); & ob parallelas AC & BC (§. 256) AB = CD (§. 238). Est igitur ABCD Quadratum (§. 98). Q. e. d.

PROBLEMA XXXV.

339. Datis duabus rectis MI & IK, Rectangulum parallelogrammum, seu Oblongum construere.

RESOLUTIO.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 249).
2. Ex M, intervallo ML = IK, describatur arcus; & ex K, intervallo KL = IM, alius priorem interfecans in L (§. 197).
3. Ducantur rectæ ML & KL.

Tab. VI. Fig. 105.

DEMONSTRATIO.

MI = KL, & ML = IK, per constr. Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 335); consequenter I = L, & I + M ac I + K, = duobus rectis (§. 337). Sed I est rectus, per constr. Ergo & L (§. 145); itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa Oblongum (§. 100). Q. e. d.

PROBLEMA XXXVI.

340. Data recta GH, una cum angulo obliquo G, Rhombum construere.

Tab. VI. Fig. 106.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (§. 208).
2. Fiat GE = GH, & reliqua peragantur ut in Probl. 34 (§. 338).

DEMONSTRATIO.

EG = EF = FH = HG, per constr. Est ergo EFHG parallelogrammum (§. 335); consequenter G = F & G + H ac G + E = duobus rectis (§. 337). Sed G est angulus obliquus ex hypothesis: Ergo & F; consequenter etiam E & H sunt obliqui. Adeoque figura constructa Rhombus est (§. 99). Q. e. d.

T 2

PRO-

PROBLEMA XXXVI.

Tab. VI. Fig. 103. 341. *Datis duabus rectis ON & OP, una cum angulo intercipiendo O, Rhomboidem construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (§. 208).
2. Reliqua peragantur ut in Probl. 35 (§. 339).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

THEOREMA LXXV.

Tab. VI. Fig. 107. 342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quocumque æquales, ducanturque subtensa AB, BC, CD, &c. figura circulo inscripta regularis est.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, per hypoth. etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289); cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcibus BCDE, CDEA, DEAB &c. insistant, ipsi quoque æquales sunt (§. 315). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 106). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVIII.

343. *Invenire summam omnium angularum in quocumque Polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360° : residuum est summa quaesita.

Ex. gr. Pentag. 180. Hexag. 180.

5	6
900	1080
360	360
540	720

DEMONSTRATIO.

Qualibet figura, ex assumpto in ea puncto F, in tot triangula AFB, BFC, CFD, &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD, &c. Si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angularum in dictis triangulis (§. 240). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos Polygones, semper efficiunt 360° (§. 159). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360° , summa angularum Polygones relinquitur. *Q. e. d.*

Aliter.

Cum numerus triangulorum ABC, CAD, & DAE, in quæ resolvitur figura polygonæ per diagonales AC & AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario multiplicatum, prodit summa omnium angularum A, B, C, D, & E (§. 240). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180

3	4
540	720

COROLLARIUM I.

344. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quoruscumque est angulus Polygones regularis (§. 106).

SCHOLIUM.

345. *En tibi Tabulam, in qua summa angularum in figuris rectilineis quibuscumque, & quantitas unius in regularibus, a Trigono usque ad Dodecagonum exhibetur (§. 343). Construitur columna secunda continua additione 180; tertia vero numeris in columna secunda per numerum angularum sive laterum.*

terum divisis (§. 344). Utimur hac Tabula tum in figuris regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet Instrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea, quæ in Tabula definitur: ex. gr. si in Heptagono superet 900.

Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	147 $\frac{2}{11}$
VII	900	128 $\frac{4}{7}$	XII	1900	150

COROLLARIUM H.

Tab. VI. Fig. 108. 346. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continentur, anguli externi, 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 147). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos quot sunt latera, demtis quatuor (§. 343). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°.

PROBLEMA XXXIX.

Tab. VI. Fig. 107. 347. Dato Polygono regulari cuicunque ABCDE circumscriptum describere.

RESOLUTIO.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 209), ob angulos FED & FDE duobus rectis minores, concursuris in F (§. 262).
2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Quoniam o & u sunt angulorum Polygones dimidii, per construct. erit $o = u$ (§. 106 Geom. & §. 94 Arithm.);

consequenter $EF = FD$ (§. 253). Circulus adeo transiens per E transit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 121). Quoniam $o = x$, per constr. $ED = EA$ (§. 106), & $EF = EF$; erit $AF = FD$ (§. 179). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 40). Porro quia $AF = EF$, per demonstr. erit $m = x$ (§. 184). Sed x dimidius angulus Polygones, per constr. Ergo & m (§. 87 Arithm.); consequenter etiam y . Quare si ducatur FB (§. 121); erit ut ante $FB = FE$, adeoque radius circuli. Eodem modo ostenditur FC, & si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, adeoque circumferentiam transire per omnes angulos Polygones, hoc est, eidem circumscriptum (§. 116). Q. e. d.

Tab. VI. Fig. 107.

COROLLARIUM.

348. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 216).

PROBLEMA XL.

349. Invenire angulum in dato Polygono regulari.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur Polygonum regulare ABCDE circulo inscriptum (§. 348). Quoniam arcus dimidius BCDE est mensura anguli quæsiti A (§. 314); arcus vero AB, qui ipsius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum divisa (§. 289); angulus Polygones A relinquitur, si arcum AB a semicirculo subtraxeris. Q. e. i. & d.

T 3

Ex.

Ex. gr. Quærat^r angulus Pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 est arcus AB, qui ex 180 subductus relinquit 108 angulum Pentagoni quæsitum.

THEOREMA LXXVI.

Tab. VI. Fig. 109. 350. *Quadrilateri circulo inscripti GHIK anguli bini oppositi H & K, item G & I efficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Insunt enim junctim summi integro circulo; ex. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56); adeoque ipsorum mensura est semicirculus (§. 314). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLI.

Tab. VI. Fig. *bere. 351. *Circulo Quadratum circumscribere.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE se mutuo in centro C ad angulos rectos secantes (§. 210).
2. Ex A, E, B, D, intervallo radii, fiant intersectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, HI, & IF. Erit FGHI Quadratum circulo circumscriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D sunt recti (§. 338); adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 304). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§. 338), & $FG = GH = HI = FI = 2AC$, per constr. Ergo FGIH est Quadratum (§. 98, idque circulo circumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

352. *Super data recta ED Polygonum regulare quodcumque describere.*

RESOLUTIO.

1. Quærat^r angulis Polyg^oni (§. 344, 349). Tab. VI. Fig. 107.
2. Fiat in E ipsi æqualis (§. 155), & $EA = ED$.
3. Per puncta A, E, D describatur circuli peripheria (§. 294).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest. Ita describetur figura quæsitæ (§. 342, 348).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo Polyg^oni sigillatim æquales (§. 155), quorum crura EF & DF se mutuo secabunt in F (§. 262).
2. Ex F tanquam centro, radio EF, describatur circulus, qui erit circulus Polyg^oni circumscriptus (§. 347).
3. Reliqua absolvantur ut ante.

PROBLEMA XLIII.

353. *Circulo dato Polygonum regulare quodcumque inscribere.*

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360 per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 59). Tab. VI. Fig. 107.
2. Construatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest. Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 342, 117). *Q. e. f. & d.*

SCHOLIUM.

354. *Resolutio Problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem Instrumento transportatorio utamur (§. 155): non tamen ideo contemnenda,*

nenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni constructionem tradunt EUCLIDES (a) & PTOLEMÆUS (b): de qua in *Analysi*. Equidem & Heptagoni, Enneagoni & Hendecagoni constructiones geometricæ passim apud Autores, practicos imprimis, occurrunt: sed a rigore demonstrationum abhorrent. Joh. Carolus RENALDINUS (c) omnium Polygonorum describendorum regulam catholicam præscribit, passim Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat, Cl. WAGNERUS, *Mathemat. in Academia Helmstad. Professor ostendit* (d), & nos inferius in *Analysi* ostendemus.

PROBLEMA XLIV.

355. Polygonum regulare quodcumque circulo circumscribere.

RESOLUTIO.

- Tab. VI. Fig. 107.
1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. Pentagonum ABCDE, si Pentagonum *abcde* circumscribendum (§. 353).
 2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam Fh ad eandem in H normalem (§. 210), quæ arcum cognominem in *h* secat.
 3. Per A & B producantur radii FA & FB.
 4. Per *h* ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit *ab* latus unum Polygoni circumscripti.

(a) *Elem.* IV. Prop. II. 16. & *Elem.* XIII. Prop. 10.
 (b) *Almag.* Lib. 1. c. 9. f. m. 8. conf. Joannes REGIOMONTANUS in *Epitome* hujus *Almag.* Lib. 1. Prop. I.
 (c) Lib. 2. *De Resolut. & composit.* *Mathem.* f. 367.
 (d) In peculiari *Dissertatione Helmstadii* 1700 habita.

5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat $Fe = Fd = Fc = Fa$ & puncta *a, e, d, c, b* connectantur rectis *ae, ed, dc, cb*: erit *abcde* Polygonum circulo circumscriptum. *Q. e. f.*

Tab. VI. Fig. 107.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB, per construct. erit angulus $Fha = FHA$ (§. 233). Sed ob FH ad AB perpendicularem, per construct. FHA rectus est (§. 78). Ergo etiam *Fha* rectus (§. 145); consequenter *ab* circulum in *h* tangit (§. 78, 304). Est vero etiam angulus $Fab = FAB$ (§. 233); adeoque dimidius angulus Polygoni (§. 347). Porro quoniam $AB = AE$, per construct. & $FA = FE = FB$ (§. 40); erit angulus $bFa = aFe$ (§. 204). Quare, cum etiam sit $Fa = Fe$ per construct. &, ob $Fab = Fba$ per demonstrata, rectos ad *h* & latus *Fh* utrique triangulo *Fah* & *Fhb* commune, $Fb = Fa$ (§. 252); erit $ae = ab$ & $Fae = Fab$ (§. 179); consequenter *a* angulus Polygoni, ex gr. in nostro casu Pentagoni. Eodem modo ostenditur, angulos quoque *e, d, c, b* esse angulos Polygoni circumscribendi, & $ed = dc = cb = ab$. Quod vero etiam *ae* circulum in *g* tangat, ita demonstratur. Demittatur ex F perpendicularis ad *ae* (§. 216); erit angulus ad *g* rectus (§. 78). Quoniam porro $Fab = Fag$, per demonstrata, & $Fa = Fa$; erit $Fb = Fg$ (§. 252). Quare cum *Fb* sit radius circuli per construct. erit etiam *Fg* radius circuli (§. 40), atque adeo *ae* circulum in *g* tangit

Tab. tangit (§. 304). Idem eodem modo
VI. ostenditur de rectis *ed, dc, bc*: Poly-
Fig. gonum itaque *abcde* circulo est cir-
107. cumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVII.

Tab. 356. *Latus Hexagoni AB æquatur*
VI. *radio circuli circumscripti AC.*
Fig.

DEMONSTRATIO.

Angulus $C = 60^\circ$ (§. 57). Ergo
 $A + B = 120^\circ$ (§. 245); consequenter,
ob $AC = BC$ (§. 40), $A = B = 60^\circ$
(§. 184). Quare $\triangle ACB$ æquilate-
rum (§. 254); consequenter $AB = AC$
(§. 88). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

357. Hexagonum regulare circulo in-
scribitur, si radius ad peripheriam sexies
applicetur.

COROLLARIUM II.

358. Si super linea data *AB* Hexago-
num describendum; triangulum æquilate-
rum *ACB* construitur (§. 198): est enim
vertex *C* centrum circuli Hexagono qua-
esito circumscribendi (§. 356).

PROBLEMA XLV.

Tab. 359. *Datis omnibus lateribus figura*
VI. *cujuscunque, & tot diagonalibus quot*
Fig. *sunt latera demtis tribus; figuram con-*
111. *struere.*

RESOLUTIO.

Cum figura quælibet *ABCDE* per
diagonales *AC* & *AD* in tot triangu-
la *BAC, CAD, DAE* resolvatur, quot
sunt latera demtis tribus; non alia re
opus est, quam ut unum triangulum
super altero excitetur (§. 205).

PROBLEMA XLVI.

360. *Datis omnibus lateribus figura,*

& tot angulis quot sunt latera demtis
tribus; figuram construere.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta *AB* uni datorum la-
terum æqualis.
2. Ad *A* & *B* excitentur anguli eidem
adjacentes (§. 155); & latera *AE*
& *BC* per data debite determinen-
tur.
3. Fiat porro in *C* angulus conve-
niens (§. 155); & determinetur la-
tus *DC*, &c.
4. Tandem ex *E* & *D* fiat intersec-
tio in *F*, intervallo laterum *EF* &
DF.

Ductis enim *DF* & *EF*, figura ter-
minabitur, eritque æqualis quaesita (§.
161, 177).

Eodem modo construi possunt figu-
ræ regulares ex latere & angulo dato
(§. 106).

COROLLARIUM.

361. Si omnes anguli præter unum *F*
dentur, duo latera *DF* & *FE* ut dentur
opus non est.

SCHOLION.

362. Tyrones ut se exercent in figuris
irregularibus describendis, lineas pro arbitrio
in pedibus ac digitis, quantitates angulorum
in gradibus, assumere debent. Quodsi con-
tingat figuram non terminari, id indicio
erit, casum esse impossibilem; adeoque vel in
angulorum, vel in linearum quantitate quedam
erunt immutanda.

PROBLEMA XLVII.

363. *Area cujusdam campestris rec-*
tilinea abcde libere permeabilis Ichno-
graphiam perficere, hoc est, figuram
arca campestri similem describere.

RESO-

Tab.
VI.
Fig.
112.

Tab.
VI.
Fig.
111.

RESOLUTIO.

- Tab. VI. Fig. III. 1. Investigetur longitudo singulorum laterum ab, bc, cd, de, ea , itemque diagonalium ac & ad (§. 126).
 2. Construatur figura ABCDEA (§. 359) juxta Scalam geometricam minorem (§. 279).
 Dico figuram ABCDE esse figuræ campi $abcde$ similem.

DEMONSTRATIO.

Est enim $AB : BC = ab : bc$ $BC : CD = bc : cd$, $CD : DE = cd : de$, &c. Etenim ex. gr. $ab, 6$, & $bc, 7$ pedum in campo existentibus, etiam $AB = 6$ & $BC = 7$ in charta, *per constr.* Quare cum porro sit $AC : AB = ac : ab$, $AC : AD = ac : ad$, $AD : AE = ad : ae$, &c. *per constr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$, $s = s$, $t = t$ (§. 207); consequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 88 *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi $abcde$ similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

- Tab. VI. Fig. III. 1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum a vertici ejus immincat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos, ducanturque lineæ indefinitæ ab, ac, ad, ae .
 2. Investigetur longitudo rectarum aB, aC, aD, aE (§. 126), &
 3. Exinde juxta Scalam modicam (§. 279) determinentur ab, ac, ad, ae .
 4. Ducantur bc, cd, de .
 Dico $abcde$ esse similem figuræ ABCDE.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in $\triangle abc$ & aBC angulus a communis & $ab : ac = aB : aC$ *per constr.* erit angulus $abc = aBC$ & $acb = aCB$, nec non $ab : bc = AB : BC$ & $ac : bc = AC : BC$ (§. 183). Similiter quoniam in $\triangle acd$ & aCD angulus a communis & $ac : ad = aC : aD$, atque in $\triangle dae$ & DaE angulus a itidem communis & $ad : ae = aD : aE$ *per construct.* erit angulus $acd = aCD$ & $adc = aDC$, nec non $ac : cd = aC : cD$ & $ad : cd = aD : cD$, itemque angulus $ade = aDE$ & $aed = aED$, nec non $ad : de = aD : DE$ & $ae : ed = aE : ED$ (§. 183). Quoniam itaque $a = a$, $b = B$, $acb + acd = aCB + aCD$, hoc est, $c = C$, $adc + ade = aDC + aDE$, hoc est, $d = D$ & denique $e = E$ *per demonstrata*; figuræ $abcde$ & $aBCDE$ inter se æquiangularæ sunt (§. 109). Porro cum sit $ac : bc = aC : BC$ & $ac : cd = aC : CD$ *per demonstr.* erit etiam $bc : cd = BC : CD$ (§. 196 *Arithm.*) & cum sit $ad : dc = aD : DC$ & $ad : de = aD : DE$ *per demonstr.* erit denuo $dc : de = DC : DE$. Quamobrem, cum quoque sit $ab : bc = aB : BC$ & $ae : ed = aE : ED$, *per demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ $abcde$ & $aBCDE$ similes (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula intra figuram posita eligatur punctum f , ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D & E

Tab. VI. Fig. III.

Tab. VI. Fig. III.

V

defi-

- Tab. VI. Fig. 114.
- defixos, ducanturque rectæ indefinitæ $fa, fb, fc, &c.$
- Investigetur longitudo rectarum fA, fB, fC, fD, fE (§. 126).
 - Inde determinetur longitudo rectarum $fa, fb, fc, &c.$ juxta Scalam modicam (§. 279).
 - Tandem ducantur $ab, bc, cd, &c.$ Dico $abcdeg$ esse figuræ $ABCDEG$ similem.

DEMONSTRATIO.

Angulus f utrique $\triangle fab$ & fAB communis, estque $fa:fb = fA:fB$, per constr. Ergo anguli ad a & A , item ad b & B æquales sunt, atque $fa:ab = fA:AB$ (§. 183). Eodem modo ostenditur esse in $\triangle fga$ & fGA angulos ad a & A æquales, atque $fa:ag = fA:AG$, consequenter $ab:ag = AB:AG$ (§. 196 Arithm.) & angulus $bag = BAG$ (§. 86 Arithm.). Quare, cum eadem ratione demonstratur esse $g=G, e=E, d=D, c=C, b=B$, & $ag:ge = AG:GE, ge:ed = GE:ED, ed:dc = ED:DC, dc:cb = DC:CB$ & $cb:ba = CB:BA$, figura $abcdeg$ est majori $ABCDEG$ similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

- Tab. VI. Fig. 111.
- Collocato Instrumento goniometrico in a , investigetur quantitas angularum x, m, r (§. 152) & longitudo rectarum ab, ac, ad & ae (§. 126).
 - Construantur juxta Scalam modicam $\triangle ABC, ACD$ & ADE (§. 180).
- Dico $ABCDE$ esse similem figuræ $abcde$.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum secunda Problematum præsentis.

Aliter.

- Tab. VI. Fig. 114.
- Collocato Instrumento goniometrico in f , investigetur quantitas angularum $AfB, BfC, CfD, DfE, EfG, GfA$ (§. 152), & longitudo rectarum fA, fB, fC, fD, fE, fG (§. 126).
 - Construantur, ut ante, juxta Scalam modicam $\triangle bfa, asg, gfe, esd, dfe$ & cfb (§. 180).
- Dico $abcdeg$ esse similem figuræ $ABCDEG$.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Problematis præsentis.

Aliter.

- Tab. VI. Fig. 111.
- Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus divisa & quæ in cardine Meridiei ac Septentrionis dioptris instructa, ita collocetur in a , ut ejus centrum ipsi a imminet, & per dioptras collineanti baculus in b defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxididis ipsi ab imminente versus ortum vel occasum.
 - Pyxididis dioptræ convertantur successive ad baculos in $c, d, & e$ defixos, notenturque, ut ante, in singulis casibus anguli declinationis.
 - Investigetur longitudo rectarum ab, ac, ad, ae (§. 126).
 - Ducatur in charta recta LM & assumpto in ea puncto A applicetur centrum Instrumenti transportatorii &

Tab.
VI.
Fig.
111.

& fiant anguli i, x, m, r angulis declinationum rectorum ab, ac, ad, ae æquales (§. 155), atque ex harum longitudine per Scalam modicam determinetur longitudo ipsarum AB, AC, AD, AE , (§. 279).

Dico figuram $ABCDE$ esse alteri $abcde$ similem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica semper eidem lineæ respondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile est, etsi diversis in pyxide successive immineat. Lineam istam designet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo descriptus est circulus. Quodsi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB , erit principium numerationis in g & acus indicabit in f quantitatem anguli i . In Instrumento transportatorio initium numerandi fit in f , & si arcus fg declinationi in campo observata æqualis assumitur, angulus i idem erit, qui ante, situsque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim fg perinde meretur declinationem ipsius AB a linea meridiana, quam monstrat acus, sive numerandi principium in f , sive in g fiat. Eodem modo liquet, arcus fb, fk, fl determinare situm rectorum AC, AD, AE respectu lineæ LM ; consequenter anguli x, m, r in figura $ABCDE$ erunt æquales totidem cognominibus in altera $abcde$. His suppositis reliqua demonstrantur ut supra in Demonstratione secunda.

Aliter.

Quodsi pyxis cum acu magnetica dio-

ptris non fuerit instructa, sed lignea regula fg ita affixa, ut linea meridiana ejusdem bd , transiens per centrum pyxidis c , sit eidem parallela:

1. Regula fg ad latus figuræ AB applicetur; quo facto, AB erit ipsi bd parallela.
2. Notetur gradus, quem indica acus magnetica ae circa centrum c libere mobilis cuspis a : dico esse angulum bca ipsi BAL æqualem, si ML ducatur acui magnetica ae in I productæ parallela.
3. Eodem modo, si regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali AE & recta ae designet situm acus, bd autem ipsi AE parallela lineam meridianam pyxidis; erit angulus acb ipsi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

DEMONSTRATIO.

Id tantummodo demonstrari debet, angulum acb esse ipsi BAL , & in altero situ pyxidis ipsi EAL æqualem. Quoniam ex resolutione patet, bd esse ipsi BA parallelam, erit angulus IHA ipsi ecd (§. 233), consequenter ejus verticali bca æqualis (§. 156 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). Similiter cum sit ML ipsi Ia parallela, per construct. erunt alterni IHA & HAL æquales (§. 233); consequenter $HAL = bca$ (§. 87 *Arithm.*). Quod erat unum.

Similiter, si pyxis ad diagonalem AE applicatur, cum sit bd ipsi EA parallela, vi solutionis; erit $NKA = ecd$ (§. 233). Quare cum porro sit $bca = ecd$ (§. 156); erit $NKA = bca$ (§.

Tab.
XI.
Fig.
174.

Tab. XI. Fig. 174. (§. 87 *Arithm.*). Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promotâ situm obtinet priori, quem habuerat, parallelum, estque adeo Na ipsi Ia parallela; ML vero parallela ipsi Ia , per construct. erit etiam ML ipsi Na parallela (§. 232); consequenter $NKA = EAL$ (§. 233), ac ideo $EAL = bca$ (§. 87 *Arithm.*). Quod erat alterum.

Aliter.

- Tab. VII. Fig. 115. 1. Charta super mensula expansa, ex centro o describatur circulus.
 2. In eodem defigatur stylus, cui inseratur regula cum dioptris.
 3. Collineetur in singulos areæ angulos A, B, C , &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter opposita a & a, b & b, c & c &c.
 4. Investigetur longitudo rectarum oA, oB, oC &c. (§. 126).
 Tab. VII. Fig. 116. 5. Charta, a mensula remota, alteri mundæ coextendatur in tabula, & Parallelismus ad aa applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipsi parallela AA commode duci possit (§. 258).
 6. Idem Parallelismus applicetur ad bb & eo usque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipsi aa parallelam in puncto commo O interfecet.
 7. Applicetur porro successive ad rectas cc, dd, ee , quæ confusionis evitandæ gratia in Schemate non omnes sunt expressæ, & aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis aa & bb parallelarum, ducanturque per idem dictis cc, dd, ee parallelæ $CC, &c.$

8. Tandem ex puncto intersectionis O Tab. VII. Fig. 116. convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis oA, oB, oC , &c. respondentium juxta Scalam modicam (§. 279). Ita enim ut supra Ichnographiam absolvere licebit.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Probl. præf. modo demonstretur, si plures lineæ aa, bb, cc &c. se interfecent in o & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. se itidem in O interfecantes; fore $y = m, x = n, z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB , donec ipsi aa occurrat in f ; continuentur etiam CC & cc , donec ipsis bb & AA occurrant in g & k . Erit, ob parallelas aa & AA , $m = f$, & ob parallelas bb & BB , $y = f$ (§. 233); adeoque $m = y$ (§. 87 *Arithm.*). Similiter, ob parallelas bb & BB , $n = g$, & ob parallelas cc & CC , $x = g$ (§. 233), adeoque $n = x$ (§. 87 *Arithm.*). Item, ob parallelas aa & AA , $z = k$, & ob parallelas cc & CC , $l = k$ (§. 233), adeoque $l = z$ (§. 87 *Arithm.*). Q. e. d.

SCHOLIUM I.

364. Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim campus in plures resolutus fuerit partes, littera initialis in singulis nota quadam numerica notanda & , ubi unum alphabetum fuerit absolutum, aliud litteris aliis usurpandum.

SCHO-

SCHOLIION II.

Tab. VII. Fig. 115.

365. Etiam sine parallelismo Ichnographiam facillime conficere datur, si puncta a & a, item b, c, d & c. subtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo inclusus trajiciatur. Puncta enim a & a dabunt rectam, qua bifariam divisa determinatur centrum O: reliqua puncta b, c, d & c. situm angulorum figura respectu hujus centri determinant.

SCHOLIION III.

366. Acus magnetica ex optima chalybe cudenta, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne superet, ne sphaeram magnetis excedat; a duobus ne deficiat. Praestat major minore, ut angulus, quo in usu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innotescat. Communiter utuntur acu duorum vel ad summum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari sufficit: affricanda autem est pars acus, quae septentrionem respicere debet, polo australi, nec ductu contrario destruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemisphaerio septentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis post contactum magnetis ponderosior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet australi. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; stylus, cui capitellum acus ex aere, cupro, vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam styli apicem chalybeum faciunt.

PROBLEMA XLVIII.

Tab. VII. Fig. 117.

367. Ichnographiam areae ABCDE ex duabus stationibus A & B perspicere.

RESOLUTIO.

1. Posita mensula in A, collineatio

fiat in singulos areae angulos B, C, D, & E; ducanturque rectae versus eos ex a.

Tab. VII. Fig. 117.

2. Quæraturs distantia stationum AB (§. 126), & in mensulam ex Scala geometrica (§. 279) transferatur in ab.
 3. Mensula ex A deferatur in B; ita ut punctum cognomine b in ea designatum ipsi B respondeat, & regula ad lineam ba applicata, per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
 4. Ex puncto b in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectae ducantur, quæ priores in e, d, c, interfecant.
 5. Denique jungantur puncta a & e, e & d, d & c, rectis ae, ed, dc.
- Dico, Ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam 1°. ABC = abc, & CAB = cab, per constr. erit AB: BC = ab: bc, & AB: AC = ab: ac (§. 267). Similiter 2°. quia EAB: eab, & EBA = eba, per constr. erit AEB = aeb, itemque EA: AB = ea: ab & EB: AB = eb: ab (§. cit.). Porro 3°. cum sit DAB = dab & DBA = dba; erit etiam DA: AB = da: ab & DB: AB = db: ab (§. cit.). 4°. DBC = dbc, per constr. & quoniam DB: AB = db: ab (per num. 3), atque AB: BC = ab: bc (per num. 1); DB: BC = db: bc (§. 194 Arithm.). Ergo CDB = cdb, atque BCD = bcd, & BC: CD = bc: cd, nec non BD: CD = bd: cd (§. 183). 5°. DB: BC = db: bc (per demonstra-

Tab. VII. Fig. 117. *ta n. 4.*) & $AB : BC = ab : bc$ (per num. 1). Ergo $DB : AB = db : ab$ (§. 195 *Arithm.*). Est vero etiam $EB : AB = eb : ab$ (per num. 2). Ergo $DB : EB = db : eb$ (§. cit.). Quare cum etiam sit $DBE = dbe$, per construct. erit $BDE = bde$ & $DEB = deb$, nec non $DB : DE = db : de$ & $DE : EB = de : eb$ (§. 183). 6°. $BD : CD = bd : cd$ (per num. 4) & $DB : DE = db : de$ (per num. 5). Ergo $CD : DE = cd : de$ (§. 196 *Arithm.*). 7°. $EB : AB = eb : ab$ (per num. 2) & $DE : EB = de : eb$ (per num. 5). Ergo $DE : AB = de : ab$ (§. 197 *Arithm.*). Quare cum porro sit $EA : AB = ea : ab$ (per num. 2) erit $DE : EA = de : ea$ (§. 195 *Arithm.*). 8°. Quia $CDB = cdb$ (per num. 4) & $BDE = bde$ (per num. 5); erit $CDE = cde$ (§. 88 *Arithm.*). 9°. Similiter quia $AEB = aeb$ (per num. 2) & $DEB = deb$ (per num. 5) erit $DEA = dea$ (§. 88 *Arithm.*). Cum itaque sit $EAB = eab$, & $ABC = abc$, per constr. $BCD = bcd$ (per num. 4), $CDE = cde$ (per num. 8), & $DEA = dea$ (per num. 9); atque præterea $AB : BC = ab : bc$ (per num. 1), $BC : CD = bc : cd$ (per num. 4), $CD : DE = cd : de$ (per num. 6), $DE : EA = de : ea$ (per num. 7), tandemque $EA : AB = ea : ab$ (per num. 2); figuræ $ABCDE$ altera $abcde$ similis est (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In A investigetur quantitas angulorum EAD , DAC , & CAB , itemque ex B quantitas angulorum ABE , EBD , & DBC (§. 152); quæraturre stationum distantia AB (§. 126).
2. Ducta in charta recta ab per Scalam

modicam distantia stationum AB convenienter determinetur (§. 279).
 3. In a constituentur angulis EAD , DAC , CAB æquales ead , dac , cab ; in b vero ipsis ABE , EBD & DBC æquales abe , ebd & dbc (§. 155).
 4. Tandem puncta intersectionum b , c , d , e , a , rectis connectantur. Dico $abcde$ esse similem areæ $ABCDE$.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticæ observentur, ut in Probl. præc. ex duabus stationibus A & B declinationes linearum AB , AC , AD , AE , itemque BC , BD , BE a linea meridiana acus.
2. Quæraturre distantia stationum (§. 126).
3. In charta eodem modo, quo in Probl. præc. determinetur situs rectorum ab , ac , ad , &c. ac puncta intersectionum c , d , e rectis connectantur. Ita Ichnographia erit absoluta.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonstratione penultima Problematis præcedentis dicta sunt.

PROBLEMA XLIX.

368. Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 117.

1. Mensula in A collocata, collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem designari possit.
2. Longitudo utriusque rectæ AB & AE (§. 126) explorata ex Scala minore transferatur in mensulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279).
3. Mensula in B translocetur, ita ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat, & visus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo factò,
4. Idem dirigatur per eandem in C, quo sicut ante, angulo ABC æqualis *abc* & rectæ BC proportionalis *bc* in mensula designari possint.
5. Quodsi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in mensula delineata areæ propositæ similis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in mensula delineatæ sunt æquales singulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sunt, per *constr.* Figura igitur delineata est areæ similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Queratur longitudo omnium laterum (§. 126), & quantitas tot angulorum quot sunt latera demtis tribus (§. 152). His enim datis Ichnographia per *Probl.* 46 (§. 360), vi demonstrationis præcedentis absolvetur.

Aliter.

1. Notetur in singulis angulis figuræ A, B, C, D, E, laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ, ut in *Probl.* 47 (§. 363).
2. Queratur simul longitudo laterum (§. 126).
3. In charta designetur linea *ab*, & in eam transferatur ex Scala modica longitudo lateris AB (§. 279).
4. Ad rectam *ab* applicetur latus pyxidis lineæ ejusdem meridianæ parallelum, ita tamen ut extremum ipsius septentrionale septentrionem respiciat, & charta cum pyxide huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monstret.
5. Charta immota, idem latus pyxidis collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri AE indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per Scalam modicam ipsi AE proportionalem determinare licet.
6. Quodsi hæc operatio continuetur; Ichnographia tandem absolvetur.

Tab. VII. Fig. 118. n. 1.

n. 2.

DEMONSTRATIO.

Non aliud hic demonstrandum est, quam angulum *bae*, ope pyxidis magneticæ in charta sic designatum, esse alteri BAE in campo æqualem. Superius usum pyxidis magneticæ nullis dioptris instructæ exponentes demonstravimus, pyxide ad latus figuræ AB in campo ita applicata ut linea meridiana ejusdem sit huic parallela, angulum declinationis

Tab. VII. Fig. 118. nis acus esse ipsi BAM æqualem, si ML ita ducatur, ope pyxidis, ut ejusdem lineæ meridianæ parallela existat (§. 363). Eodem modo ex ibidem demonstratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ AE applicata, esse angulum EAL angulo declinationis acus in hoc situ æqualem. His jam datis, si latus pyxidis lineæ meridianæ ejusdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur, & charta cum pyxide vertatur, donec acus, in conveniente situ, angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus BA, monstret; erit perinde *baK* eidem angulo declinationis æqualis. Similiter, si eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris AE convenientem monstret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *eal* angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe, rectam *KI* per *a* ea lege esse ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili respondeat, centro in *a* collocato. Est igitur $1 = I$ & $6 = VI$, per *constr.* Sed $1 + 7 + 6 = 180^\circ$, & $I + VII + VI = 180^\circ$ (§. 147); consequenter $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§. 87 *Arithm.*). Quare $7 = VII$ (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Vel:

- Tab. VII. Fig. 118. n. 2.
1. In charta ducantur lineæ quotcumque parallelæ.
 2. Instrumentum transportatorium Parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in *a*, radius vero ipsi *aK*

respondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria Instrumenti gradum declinationis acus a linea meridianæ pyxidis in campo ad punctum A.

3. Ab *a* per *z* ducatur recta, & ex *a* in *b* transferatur ex Scala modica longitudo rectæ *AB* in campo mensurata.
4. Regula Parallelismi solitaria unam parallelarum stringente, altera cui cohæret Instrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipsum *b* attingat & ad gradum declinationis in B observatæ designetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.
5. Hac operatione continuata, integra areæ Ichnographia tandem absolvetur.

DEMONSTRATIO.

$1 = I$, $2 = II$, $3 = III$, $4 = IV$ & $5 = V$, per *constr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum Instrumenti transportatorii refert) ipsi *aK* parallela, per *constr.* acus vero magnetica in B est parallela situi in A; erit $1 = 8$, & $I = VIII$ (§. 233), consequenter $8 = VIII$ (§. 87 *Arithm.*). Simili modo ostenditur esse $6 = VI$. Quare cum sit $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit $7 = VII$ (§. 91 *Arithm.*). Porro $2 = II$, per *constr.* & $8 = VIII$, per *demonstr.* Ergo $8 + 2 = VIII + II$ (§. 88 *Arithm.*). Similiter $12 = 2$ & $XII = II$ (§. 233) & $3 = III$, per *constr.* Quare cum sit

fit $12 + 9 + 3 = XII + IX + III$ (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); crit $9 = IX$ (§. 91 *Arithm.*). Porro $4 = IV$, per *constr.* & hinc, cum sit $10 = 3 + X = III$ (§. 233), adeoque ob $3 = III$, per *demonstr.* $10 = X$ (§. 87 *Arithm.*), $4 + 10 = IV + X$ (§. 88 *Arithm.*). Denique $5 = V$, per *constr.* & $4 + 11 = IV + XI$ (§. 233 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). adeoque ob $4 = IV$, per *constr.* $11 = XI$ (§. 91 *Arithm.*). Quare $5 + 11 = V + XI$ (§. 88 *Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* sunt æquales singulis angulis areæ *ABCDE*. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sint, per *constr.* figura *abcde* areæ *ABCDE* similis (§. 175). *Q. e. d.*

PROBLEMA L.

369. *Figura in charta delineata similem in campo designare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc Problema est inversum alterius, quo Ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus Problematum inmediate præcedentium intelligitur. Ex. gr. Si semicirculo, vel mensula & pertica utimur: anguli singuli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti, &c. in Solo designantur per *Probl.* 7 (§. 155), & latera, vel diagonales, &c. per mensuram majorem decenter determinantur.

C A P U T VI.

De Figurarum Dimensione ac Divisione.

PROBLEMA LI.

370. **I**nvenire aream Quadrati.

RESOLUTIO.

1. Quæraturo longitudo lateris (§. 126).
2. Hæc ducatur in seipsam.

Factum exprimit aream Quadrati.

Sit ex. gr. Latus Quadrati = 345

$$\begin{array}{r}
 345 \\
 \hline
 1725 \\
 1380 \\
 \hline
 1035
 \end{array}$$

erit Area = 119025

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit, *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. I.

quot digiti quadrati, hoc est, quot quadratula digitorum longa & lata in eodem contineantur (§. 118). Evidens vero est, si latus Quadrati *AB* concipiatur in quocunque partes æquales & Quadratum ipsum per rectas puncta divisionum in lateribus oppositis connectentes in Quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum series, quot partes habet latus *AB*, & in qualibet serie tot reperiri quadratula, quot latus *BC*, vel idem *AB*, habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q. e. d.*

Tab. VII. Fig. 119.

X

COROL-

COROLLARIUM I.

371. Si latus Quadrati fuerit 10, Area erit 100. Cum igitur decempeda sit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25): pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos, &c. continet (§. 118).

COROLLARIUM II.

372. Si latus Quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c. (§. 118).

COROLLARIUM III.

373. Datus igitur numerus in priori casu facile in digitos, pedes, & perticas quadratas resolvitur, si scilicet a dextra sinistram versus duæ notæ digitis, duæ pedibus refectentur: quæ enim sinistram versus residuæ fiunt, perticis cedunt. Ex. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM IV.

374. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 159 *Arithm.*). Ex. gr. Quadratum lateris dupli est quadruplum Quadrati lateris simpli. Et Quadrata æqualia sunt, quorum latera æqualia sunt.

PROBLEMA LII.

Tab. VII. *375. Invenire aream Rectanguli ABCD.*

Fig. 120.

RESOLUTIO.

1. Investigetur longitudo laterum AB & AC (§. 126).

2. Ducatur AB in AC.

Factum erit area Rectanguli.

Ex. gr. Sit $AB = 345$

$AC = 123$

$\underline{1035}$

690

$\underline{345}$

crit Area = 42435

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

COROLLARIUM I.

376. Rectangula sunt in ratione composita suorum laterum AB & AC (§. 159 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, Quadratum mediæ Rectangulo extremarum æquale est (§. 298 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; Rectangulum sub extremis æquatur Rectangulo sub mediis (§. 297 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

379. Quare si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB secat; erit Quadratum tangentis AD Rectangulo sub secante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 334 & 377). Tab. VI. Fig. 102.

COROLLARIUM V.

380. Si duæ vel plures secantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur, erunt Rectangula sub totis & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 333 & 379). Tab. VI. Fig. 97.

COROLLARIUM VI.

381. Si duæ chordæ HM & LI se mutuo fecent in K; erunt Rectangula sub segmentis inter se æqualia (§. 332 & 378). Tab. I. Fig. 14.

COROLLARIUM VII.

382. Cum orgya, qua lignorum strues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area per *Probl. præc. vel præf.* inveniri potest. Per hanc itaque si factum ex longitudo in latitudinem struis dividatur; quotus indicat, quot ipsa orgyas contineat (§. 69 *Arithm.*).

THEOREMA LXXVIII.

383. Duo Parallelogramma ABDC

Tab. VII. Fig. 121. *ECDF super eadem basi CD & inter easdem parallelas AF & CD constituta sunt inter se equalia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi per hypoth. erit $AB=CD$ & $EF=CD$ (§. 335); consequenter $AB=EF$ (§. 87 *Arithm.*) & hinc porro $AE=BF$ (§. 88 *Arithm.*). Quoniam porro $AC=BD$ & $CE=DF$ (§. 335); erit $\triangle ACE=\triangle BDF$ (§. 204); adeoque $ABGC=FEGD$ (§. 91 *Arithm.*); consequenter $ABDC=EFDC$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

384. Quoniam AF & CD sunt parallelæ, per hypoth. erunt perpendiculara inter eas intercepta equalia (§. 226): quæ cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227); parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Pater adeo Parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis equalia esse (§. 383).

COROLLARIUM II.

385. Ergo & Triangula super eadem basi & ejusdem altitudinis equalia sunt. Nam $Parall. ACDB=Parall. ECDF$ (§. 384), sed $\triangle ACD=\frac{1}{2}Parall. ACDB$ & $\triangle FCD=\frac{1}{2}Parall. ECDF$ (§. 337). Ergo $\triangle ACD=\triangle FCD$ (§. 94 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

386. Quodcunque adeo Triangulum CFD est dimidium Parallelogrammi ACDB super eadem vel equali basi CD, & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam $\triangle CFD=\triangle ACD$ (§. 385). Sed $\triangle ACD=\frac{1}{2}Parall. ACDB$ (§. 337). Ergo $\triangle CFD=\frac{1}{2}Parall. ACDB$ (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA LIII.

387. *Invenire aream Rhombi & Rhomboidis, seu Parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendicularum AE (§. 216), quod erit altitudo parallelogrammi (§. 227).
2. Multiplicetur basis per altitudinem.

Ex. gr. Sit $CD=4^{\circ}5'6''$

$$\begin{array}{r} AE=234 \\ \underline{1824} \\ 1368 \\ \underline{912} \end{array}$$

Erit Area = $10^{\circ}6'04''$

Tab. VII. Fig. 122.

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis CE (§. 384). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 375 & 229). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

388. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 159 *Arithm.*), adeoque & Triangula eorum dimidia (§. 386) in eadem existunt (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

389. Ergo si altitudines sunt æquales, basium; si bases sunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

390. Parallelogramma equalia bases & altitudines reciprocant (§. 299 *Arithm.*).

THEOREMA LXXIX.

391. *Triangulum est equalis Parallelogrammo super eadem basi sed dimidia altitudinis; itemque Parallelogrammo super dimidia basi & ejusdem altitudinis.*

Tab. VII. Fig. 123.

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicumque super eadem basi AB & intra eadem

Tab. VII. Fig. 123. basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 383) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 15 *Arithm.*). Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, assumpta AD pro basi, erit CD altitudo; sumpta vero DC pro basi, erit AD altitudo (§. 228). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE (§. 229) sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis, *per hypo.* & angulus ad D sit rectus (§. 91), adeoque, ob EF & AB parallelas (§. 102), is ad G similiter rectus (§. 233), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100); & hinc G=E (§. 145); sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156): erit $\triangle CGH = \triangle EHA$ (§. 252); consequenter $EGDA = \triangle ACD$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendicularum DC in duo rectangula ADC & CDB resolvetur (§. 78, 91). Ergo si fiat FB=DC dimidiæ altitudini; erit DGFB= $\triangle DCB$ & AEGD= $\triangle ACD$, *per cas. 1.* Ergo AEFB= $\triangle ACB$ (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 124. Sit DK=KB= $\frac{1}{2}$ DB & DG=GA= $\frac{1}{2}$ DA; erit GK= $\frac{1}{2}$ AB, adeoque dimidia basis. Jam CFKD= $\triangle DCB$ & GECD= $\triangle ACD$, *per cas. 1.* Quare EGKF= $\triangle ACB$ (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LIV.

Tab. VIII. Fig. 124. 392. *Invenire aream Trianguli.*
RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.
1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli

eiusdem baseos & altitudinis (§. 387). Tab. VIII. Fig. 125. 2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area Trianguli ABC (§. 386).

Aliter.

Basis dimidia $\frac{1}{2}$ AB multiplicetur per altitudinem CD; vel basis AB per altitudinem dimidiam $\frac{1}{2}$ CD. Factum erit area Trianguli (§. 391, 387).

Ex. gr. AB = 3° 4' 2'' AB = 3° 4' 2''
CD = 2 3 4 $\frac{1}{2}$ CD = 1 1 7

1 3 6 8	2 3 9 4
1 0 2 6	3 4 2
6 8 4	3 4 2
8 0 0 2 8	$\triangle = 4 0 0 1 4$

2) $\triangle ACB, 4 0 0 1 4$

$\frac{1}{2}$ AB = 1° 7' 1''
CD = 2 3 4
6 8 4
5 1 3
3 4 2
$\triangle = 4 0 0 1 4$

COROLLARIUM I.

393. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 299 *Arithm.*); consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 178 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

394. Si area Trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 210 *Arithm.*).

PROBLEMA LV.

395. *Invenire latus Quadrati Parallelogrammo, vel Triangulo dato æqualis.*

RESOLUTIO.

Quærat inter basin & altitudinem Parallelogrammi, vel inter dimidiam basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem Trianguli media proportionalis, *per* §. 327, aut in numeris *per* §. 301 *Arithm.* Ita prodit latus Quadrati quæsitum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375, 387); & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 392). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperi sit in utroque casu factio isti æquale (§. 298 Arithm.); erit Quadratum istud in priori casu Parallelogrammo, in posteriori Triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

396. In Parallelogrammis & Triangulis similibus, altitudines sunt lateribus homologis proportionales; & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 122. Cum altitudines AE & ae sint ad bases CD & cd perpendiculares (§. 227); erunt E & e anguli recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Et quia parallelogrammum ABDC ipsi *abdc*, triangulum CAD ipsi *cad* simile, *per hypoth.* erit $C = c$ (§. 175). Quare $AC:AE = ac:ae$ (§. 267). Est vero etiam $AC:CD = ac:cd$ (§. 175). Ergo $AE:CD = ae:cd$ (§. 196 Arithm.). *Quod erat unum.*

Quoniam $E = e$ & $C = c$, *per demonstr.* erit $AC:CE = ac:ce$ (§. 267). Est vero etiam $AC:CD = ac:cd$ (§. 175). Ergo $CE:CD = ce:cd$ (§. 196 Arithm.); adeoque $ED:CE = ed:ce$ (§. 193 Arithm.). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

397. Patet quoque a priori. Quoniam enim $ABDC \sim abdc$ & $\triangle ACD \sim \triangle acd$, *per hypoth.* perpendiculara AE & ae, pariterque seg-

menta basium CE & ce, itidemque ED & ed eodem modo determinantur (§. 119, 216), adeoque similia sunt (§. 120). Cum adeo ea eadem sint, per que a se invicem discerni debebant (§. 24 Arithm.), lineæ autem rectæ, utpote similes (§. 17), non aliter nisi ratione discerni possint (§. 132 Arithm.); tam perpendiculara, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent (§. 149 Arithm.). Eodem modo generaliter patet, rectas quasunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.

COROLLARIUM I.

398. Quoniam Parallelogramma & Triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 388); similia vero habent bases altitudinibus proportionales (§. 396); igitur Parallelogramma & Triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159 Arithm.). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 397).

COROLLARIUM II.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & segmentorum basium homologorum, necnon linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 374).

PROBLEMA LV.

400. Invenire aream Polygoni irregularis, ac Trapezii. Tab. VIII. Fig. 126. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 392) &
3. Addantur. Erit summa area quaesita (§. 86 Arithm.).

Tab. VIII. Ex. gr. $\frac{1}{2}AD = 43'$ $\frac{1}{2}AD = 43'$ $\frac{1}{2}AC = 42'$
 EF = 35 GC = 45 BH = 30

Fig. 126. $\frac{215}{129}$ $\frac{215}{172}$ $\triangle ABC, 1260$

n. 1. $\triangle AED, 1505$ $\triangle DAC, 1935$
 $\triangle AED, 1505$
 $\triangle ABC, 1260$

Area Polygoni irreg. 47°00'

Quod si $\frac{1}{2}AD$ multiplicetur per summam altitudinum EF + GC, vel integra AD per $\frac{1}{2}(EF + GC)$; prodibit area Trapezii AEDC.

Ex. gr. EF = 35 $\frac{1}{2}AD = 43$
 GC = 45 EF + GC = 80
 EF + GC = 80 AEDC = 3440
 $\frac{1}{2}(EF + GC) = 40$
 AD = 86
 AEDC = 3440

Tab. VIII. Similiter si in Trapezio fuerit AB ipsi
 Fig. 127. CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 226, 227); consequenter Trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 392).

Ex. gr. Sit AB 246'', CD = 378'', BF = 195''

erit $\frac{1}{2}(AB + CD) = 312$
 BF = 195
 1560
 2808
 312

Area Trapezii 60840

THEOREMA LXXXI.

Tab. VI. 401. Figura regularis ABCDE ex
 Fig. 107. centro circuli circumscripti F in triangula equalia atque similia resolvitur, & area ejus æquatur Triangulo, cujus basis peripheria totius Polygoni AB + BC + CD, &c. altitudo perpendicularum FG ex centro F in latus unum AB demissum. Idem va-

let de area circumscripti abcde, nisi quod altitudo sit radius FG.

Tab. IV. Fig. 107.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = BC = CD = DE = EA (§. 106), & FA = FB = FC = FD = FE (§. 40); triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA æqualia & similia sunt (§. 204). Quod erat unum.

Constituatur triangula AFB, BFC, CFD, &c. in quæ resolutum est Polygonum ABCDE, super eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis Af (§. 249) ipsi altitudini triangulorum æqualis. Erit AfB = AFB, BfC = BFC, CfD = CFD, &c. (§. 385); consequenter AfA = AFB + BFC + CFD &c. (§. 88 Arithm.) æqualis est area Polygoni regularis (§. 86, 87 Arithm.). Quod erat secundum.

Tab. VIII. Fig. 128.

Cum recta Fg ex centro F ad contactum g ducta sit radius & ad latus æ perpendicularis (§. 308); erit ea altitudo trianguli aFe (§. 227). Reliqua patent ut ante. Quod erat tertium.

Tab. VI. Fig. 107.

PROBLEMA LVI.

402. Invenire aream Polygoni regularis.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Latus Polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum; ex. gr. latus Hexagoni per 3.
 2. Factum porro ducatur in perpendicularum GF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.
- Ita prodit area quæsitæ (§. 392, 401).

Ex.

Tab. VI. Fig. 107.

Ex. gr.	AB = 5°4'
dimidius Numer. later.	$2\frac{1}{2}$
	27
	108
Semiperimeter =	135
FG =	29
	1215
	270
Area Pentagoni	39°15'

THEOREMA LXXXII.

Tab. VI. Fig. 111.

403. *Quadrilatera & Polygona similia ABCDE & abcde per diagonales AC, AD & ac, ad in similia triangula ABC & abc, ACD & acd, ADE & ade dividuntur, & inter se & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABCDE \sim abcde, per hypoth. erit $o = o$ & $AB : BC = ab : bc$ (§. 175). Ergo $\triangle bac \sim \triangle BAC$, $y = y$ atque $bc : ca = BC : CA$ (§. 183). Est vero etiam $bc : cd = BC : CD$, & $n + y = n + y$ (§. 175). Ergo $ca : cd = CA : CD$ (§. 196 Arithm.) & $n = n$ (§. 91 Arith.); consequenter $\triangle cad \sim \triangle CAD$, $cd : da = CD : DA$, & $u = u$ (§. 183). Est vero etiam $u + s = u + s$, & $cd : de = CD : DE$ (§. 175). Ergo $s = s$ (§. 91 Arithm.) & $da : de = DA : DE$ (§. 196 Arithm.); consequenter $\triangle dea \sim \triangle DEA$ (§. 183), *Quod erat primum.*

Quoniam $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle DAC \sim \triangle dac$ & $\triangle DAE \sim \triangle dae$, per demonstrata; erit $\triangle ABC : \triangle abc = CA^2 : ca^2$, $\triangle DAC : \triangle dac = CA^2 : ca^2 = DA^2 : da^2$ & $\triangle DAE : \triangle dae = DA^2 : da^2$ (§. 398); consequenter $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle DAC : \triangle dac$ & $\triangle DAC : \triangle dac = \triangle DAE : \triangle dae$ (§. 167 A-

arith.); adeoque etiam $\triangle DAE : \triangle dae = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. cit.). Sunt igitur $\triangle\triangle ABC, ACD, ADE, \& abc, acd, ade$ inter se proportionalia. *Quod erat secundum.*

Tab. VI. Fig. 111.

Quoniam denique $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca = \triangle DEA : \triangle dea$, per secundum hujus; erit $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA : \triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. 192 Arithm.). Sed $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA =$ polygono ABCDE & $\triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = abcde$ (§. 86 Arithm.). Ergo $ABCDE : abcde = \triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca, \&c.$ (§. 168 Arithm.); consequenter $ABCDE : \triangle ABC = abcde : \triangle abc$, & $ABCDE : \triangle DCA = abcde : \triangle dca$ &c. (§. 173 Arithm.). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

404. Cum Polygona regularia sint æquilatera & æquiangula (§. 106), tum etiam fibi mutuo æquiangula (§. 344); Polygona regularia ejusdem ordinis, veluti omnia Pentagona, omnia Hexagona, &c. regularia, inter se similia sunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejusdem ordinis per diagonales in triangula similia dividuntur & inter se, & totis proportionalia.

SCHOLIUM.

405. Poterat Theorema præsens ex notione determinationis facilius demonstrari. Nimirum cum figura ABCDE & abcde sint similes, per hypoth. adeoque anguli A & a æquales (§. 175), atque præterea diagonales AC, AD & ac, ad ex angulis hisce æqualibus A & a ducantur; $\triangle\triangle ABC$ & abc, CAD & cad DAE & dae eodem modo determinantur (§. 119); consequenter & inter se similia sunt & similes partes figurarum existunt (§. 120); eandem adeo ad figuras tanquam tota rationem (§. 170 Arithm.), immo eandem inter se rationem,

Tab. tionem quam Polygona aut Quadrilatera ha-
VI. bent (§. 171 Arithm.).

Fig. THEOREMA LXXXIII.

III. 406. *Figura, tam regulares quam similes irregulares, habent rationem duplicatam homologorum laterum.*

DEMONSTRATIO.

Sint figuræ ABCDE & abcde, five regulares, five irregulares similes, eaque five quadrilateræ, five polygonæ quæcunque ejusdem ordinis; erit ABCDE : abcde = $\triangle ABC$: $\triangle abc$ = $\triangle ACD$: $\triangle acd$ = $\triangle ADE$: $\triangle ade$ (§. 403, 404). Sed $\triangle ABC$: $\triangle abc$ = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 ; $\triangle ADC$: $\triangle adc$ = CD^2 : cd^2 & $\triangle ADE$: $\triangle ade$ = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2 (§. 398). Ergo ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2 (§. 167 Arithm.). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

407. Eodem modo ostenditur, figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis equalibus A & a ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum (§. 405).

THEOREMA LXXXIV.

408. *Circuli & figura similes ipsis inscriptæ vel circumscriptæ sunt inter se ut Quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus describi duos circulos & iis circumscribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 119 & 357). Sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. 120). Cum adeo utrobique eadem sint, per quæ distinguuntur (§. 24 Arithm.); quadrata circulis circumscripta ad suos circulos

eandem rationem habere debent (§. 132 Arithm.). Quamobrem Circuli inter se sunt ut Quadrata diametrorum (§. 173 Arithm.). Quod erat unum.

Eodem modo ostenditur, figuras similes circulis inscriptas vel circumscriptas esse ut circulos, quibus inscribuntur vel circumscribuntur. Sed circuli sunt ut quadrata diametrorum, per demonstrata. Ergo Figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes sunt ut Quadrata diametrorum (§. 167 Arithm.). Quod erat alterum.

Aliter.

Resolvantur Polygona circulis inscripta ABCDE & abcde ex centris F & f in $\triangle\triangle$ AFB, BFC, CFD, & afb, bfc, cfd, &c. erit angulus FAB = fab & FBA = fba, &c. (§. 344, 347); consequenter $\triangle AFB \sim \triangle afb$ (§. 267). Eodem modo patet, esse $\triangle BFC \sim \triangle bfc$, $\triangle CFD \sim \triangle cfd$ &c. Habemus itaque $\triangle AFB$: $\triangle afb$ = BF^2 : bf^2 , $\triangle BFC$: $\triangle bfc$ = BF^2 : bf^2 &c. (§. 398). Ergo ABCDE : abcde = BF^2 : bf^2 (§. 187 Arithm.); consequenter cum radii BF & bf sint ut diametri (§. 39 Geom. & 178 Arithm.), Polygona similia circulo inscripta sunt ut Quadrata diametrorum (§. 260 Arithm.). Et idem eodem modo ostenditur de Polygonis circulo circumscriptis, cum triangula similia etiam sint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quæ resolvitur polygonum circulo circumscriptum, sint radii circulorum (§. 355).

Quodsi

Tab. VI. Fig. 107.

Tab. VIII. Fig. 119.

Quod si jam Polygonum circulo inscriptum tot sumatur laterum, donec subtensa a peripheria magnitudine inassignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam Circuli erunt inter se ut diametrorum Quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo Circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374): adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 39 Geom. & §. 181 Arithm.), & radiorum (§. 260, 259 Arithm.).

THEOREMA LXXXV.

410. *Circulus equalis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius equalis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 129. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non differant a recto (§. 240); consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 228). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero junctim sumtæ sunt peripheriæ circuli æquales, *per demonstrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401).
Q. e. d.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

SCHOLIUM.

411. *Hac demonstrandi methodo primus usus est KEPLERUS (a). Eam exemplo ejus excitatus sub nomine Methodi indivisibilium magis excoluit CAVALERIUS (b). Demonstrationem indirectam dedit ARCHIMEDES (c) non contemnendam, quoniam ipsius demonstrandi methodo principia methodi infinitesimalis rigendantur.*

COROLLARIUM I.

412. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 388). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 159 Arithm.)

COROLLARIUM II.

413. Cum adeo sit, ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 173 Arith.); ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 39 Geom. & §. 181 Arithm.) in omnibus circulis eadem.

SCHOLIUM.

414. *Idem etiam hoc modo ostenditur. Cum omnes circuli inter se similes sint (§. 134); per quæ distingui possent, ea eadem sunt (§. 24 Arithm.). Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros distingui possent, siquidem ea in diversis circulis diversa foret (§. 132 Arithm.); ratio in omnibus eadem esse debet. Q. e. d.*

THEOREMA LXXXVI.

415. *Sector circuli ACD equalis est triangulo, cujus basis arcus AD, altitudo radius AC.*

Tab. VIII. Fig. 133.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Theorematis præcedentis (§. 410).

Y

THEO-

(a) In Nova Stereometria solidorum vinariorum Part. 1. Theor. 2. f. B. 2.

(b) Vide præfat. ad Geometriam indivisibilium continuorum nova ratione promotam. p. b. 2.

(c) In libello De circuli dimensione, prop. 1.

THEOREMA LXXXVII.

416. Polygonum inscriptum minus; circumscriptum majus est Circulo. Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major est peripheria Circuli.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 107. Latera AB, BC, CD &c. polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 342). Sed chordæ sunt arcibus minores (§. 191). Ergo singula polygoni latera AB, BC, CD &c. sunt singulis arcibus eisdem respondentibus minora; consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheria minor (§. 90 Arithm.). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt. area polygoni parti circuli congruit (§. 9 Arithm. & §. 3 Geom.), adeoque ipsi æqualis est (§. 161); consequenter Polygonum inscriptum Circulo minus (§. 20 Arithm.). *Quod erat primum & secundum.*

Latera polygoni circumscripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355), adeoque totæ extra eum cadunt (§. 47); consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 Arithm. & §. 3 Geom.). Hinc ipsi æqualis (§. 161), hoc est, Circulus Polygono circumscripto minor est (§. 20 Arithm.). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita radii circuli & perimetrorum (§. 401, 410, 388); consequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 Arithm.). Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 Arithm.). Sed polygonum majus cir-

per demonstr. Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 Arithm.). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXXXVIII.

417. In Triangulo rectangulo ABC, quadratum hypotenuse AC æquale est quadratis laterum AHIB & BCED simul sumtis. Tab. VIII. Fig. 130.

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF (§. 121), itemque BK ipsi CF parallela (§. 258). Quoniam $\triangle ACE$ cum quadrato CEDB super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 336) existit; hujus dimidium est (§. 391). Ex eadem ratione $\triangle BCF$ est dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x=0$ (§. 98, 145), adeoque $x+y=0+y$ (§. 88 Arithm.), $BC=CE$ & $AC=CF$ (§. 98); ideo $\triangle ACE = \triangle BCF$ (§. 179); consequenter $BCED = LCFK$ (§. 93 Arithm.). Eodem modo ostenditur, esse $AHIB = ALKG$. Quamobrem $BCED + AHIB = LCFK + ALKG$ (§. 88 Arithm.) = $ACFG$ (§. 86 Arithm.). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

418. Hoc Theorema PYTHAGORAS invenit: unde Pythagoricum dicitur, Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus Hecatombe, hoc est, centum boum sacrificio redemptum fertur.

COROLLARIUM I.

419. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1°. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249); 2°. super ducta hypotenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. cit.), ducaturque hypotenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2 + BD^2$ Tab. VIII. Fig. 131.

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 417). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. Fig. 132. 420. Quodsi AB fuerit = 1, & AC = 1; erit CB = $\sqrt{2}$. Si porro fiat AD = CB = $\sqrt{2}$; erit DB = $\sqrt{3}$. Si fiat AE = 2; erit BE = $\sqrt{5}$. Si fiat AF = EB = $\sqrt{5}$; erit FB = $\sqrt{6}$, & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratæ surdæ sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam; consequenter numeri (§. 10 *Arithm.*) iique irrationales (§. 43, 295 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

421. Cum CB sit diagonalis quadrati (§. 111); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420), adeoque unitati incommensurabilis (§. 43 *Arithm.*); consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

COROLLARIUM IV.

422. Dantur adeo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 *Arithm.*); consequenter rationes irrationales (§. 164 *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæc numeris irrationalibus exprimentur (§. 419).

PROBLEMA LVII.

Tab. VIII. Fig. 133. 423. Datis chorda AB & radio AC, invenire chordam arcus dimidii AD.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bifecat in D, per *hypoth.* etiam chordam AB bifecat & ad eam perpendicularis est (§. 291); adeoque anguli ad E recti sunt (§. 78). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 417).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix

quadrata (§. 269 *Arithm.*), quæ Tab. VIII. Fig. 133. erit EC.

3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 417).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

Ex. gr. Sit radius AC = 10000, & AB latus Hexagoni: erit AB itidem 10000 (§. 356), & AE = 5000.

Quare

$AC^2 = 100000000$	$AE^2 = 25000000$
$AE^2 = 25000000$	$ED^2 = 1795600$
$CE^2 = 75000000$	$DA^2 = 26795600$
$CE = 8660$	$DA = 5176$
$DC = 10000$	
$DE = 1340$	

PROBLEMA LVIII.

424. Dato latere Polygoni regularis inscripti AB, invenire latus circumscripti FG. Tab. VIII. Fig. 134.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB, & DC chordam AB bifariam dividit (§. 355); erit $AE = \frac{1}{2} AB$ & CE: EA = CD: DG (§. 268). Quare si, ob angulum rectum ad E (§. 291), EC investigetur ut in Problemate præcedente; reperietur DG (§. 302 *Arithm.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim CE: CD = EA: DG, & CE: CD = EB: DF (§. 268). Cum adeo sit EA: DG = EB: DF (§. 167 *Arithm.*), & EA = EB, per

Tab. *demonstrata*: erit etiam $DG = DF$ (§. VIII. 177 *Arihm.*); adeoque $FG = 2DG$.

Fig. *Q. e. i. & d.*
134.

Ex. gr. Sit $CD = AB = 10000$; erit $AE = 5000$ & $EC = 8660$ (§. 423); adeoque $DG = 5773$. Hinc $FG = 11546$.

PROBLEMA LIX.

425. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 423), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invenio hoc latere, quæratum porro latus polygoni similis circumscripti (§. 424).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimenter polygoni, tam inscripti, quam circumscripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumscripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 416 *Geom.* & §. 205 *Arihm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita, haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit ex. gr. radius circuli 1, seu (ut latera Polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1.000,000,000,000,000,000,000,000,000; reperietur, continua a Quadrato bisectione, latus Polygoni 1,073,741,824 laterum inscripti vero proxime minus 0.0000000058516723170686387122; circumscripti autem latus vero itidem proxime majus 0.000000

000585167231706863873784. Hinc perimenter circumscripta 6.28318530717958649156537 vero proxime major; inscripta autem 6.28318530717958645093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; posita diametro 2.0000000000000000, erit peripheria minor quam 6.2831853071795865, major vero quam 6.2831853071795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 10000000000000000 ad 31415926535897932. Compendia calculi tradit Ludolphus A CEULEN (a).

SCHOLIUM I.

426. *In quadrando Circulo ab omni ævo, quo Geometria exalta, desiderantur ingenia præstantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, ut ut nostra præsertim atate ars inveniendi egregie promotæ fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi: ARCHIMEDES (b) ea fini excogitavit methodum quadrandi Circulum per Polygonum regularia inscripta & circumscripta, & Polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter 1, perimenter Polygoni inscripti reperitur $3\frac{10}{71}$; perimenter vero circumscripti $3\frac{1}{7}$. Ejus vestigiis insistentes posterius rationes propiores investigarunt. Nemo autem plus opera impendit Ludolpho A CEULEN (c), qui tandem reperit, posita diametro 1, peripheriam esse minorem quam 3.14159265358979323846264338327950, sed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam*

(a) In libro De circulo & adscriptis. Conf. *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* lib. 6. probl. 1. p. m. 241. & seqq.

(b) In libello De circuli dimensione prop. 2.

(c) In *Zetematurn Geometricorum Epilogismo*. Zetemat. 1. p. 92.

pheriam ut 100 ad 314, vel in circulis majoribus ut 10000 ad 31415: in qua proportione, PTOLEMÆUS, VIETA, HUGENIUS cum LUDOLPHO consentiunt. HUGENIUS (a) compendiosorem monstravit viam; sed pluribus Theorematis nixam, quæ in hisce Elementis non demonstrantur.

COROLLARIUM.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria 113. 31415: 10000 (§. 272 Arith.) hoc est 355 quam proxime.

SCHOLIUM II.

428. Hæc proportio, quam Adrianus METIUS tradit (b) a parente suo inventam & demonstratam (c), inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima. Quod si enim numerum 355 septem cybris ad obtinendas fractiones decimales autem per 113 divides; quotus cum proportione Ludolphina collatus ostendet eam ne quidem $\frac{1}{10000000}$ a vera differre.

PROBLEMA LX.

429. Data diametro Circuli, invenire peripheriam & aream ejus; & data peripheria diametrum.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426, 427); una data, invenietur altera (§. 302 Arithm.)
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410, 392).

Ex. gr. Sit diameter 56: erit

100 - 314 - 56	Periph.	17584 ¹¹
56	$\frac{1}{4}$ Diam.	1400
<hr/>		
1884		7033600
1570		17584

Per. 17° 5' 18¹¹ 4¹¹ Area 24° 61' 76¹¹ 00¹¹

(a) In Inventis de circuli magnitudine prop. 10. p. 15. & prop. 20. p. 40.
 (b) In Geometria practica, part. 1. c. 10. s. 3. p. m. 89.
 (c) In libello adversus quadraturam circuli Simonis A QUERCU conscripto.

COROLLARIUM I.

430. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 426), adeoque area circuli 7850 (§. 429). Est vero Quadratum diametri 10000 (§. 370): ergo hoc ad aream Circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 181 Arithm.) quam proxime.

COROLLARIUM II.

431. Similiter si diameter 113, peripheria 355 (§. 427), adeoque area Circuli 10028 $\frac{1}{2}$ (§. 429). Est vero Quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad 10028 $\frac{1}{2}$ hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178 Arithm.); consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 Arithm.), quæ Metiana proportio priori accuratior.

COROLLARIUM III.

432. Area igitur Circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 & Quadratum diametri; vel ad 452, 355 & Quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæritur (§. 302 Arithm.).

Sit ex. gr. diameter 560¹¹, erit quadratum ejus 31° 36' 00¹¹. Quare

$$1000 - 31^{\circ} 36' 00'' - 785$$

$$\begin{array}{r} 785 \\ \hline 1568000 \\ 25088 \\ 21952 \\ \hline 24^{\circ} 61' 76'' \end{array}$$

Area Circuli.

COROLLARIUM IV.

433. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBCGEHF.

Tab. VIII. Fig. 135.

PROBLEMA LXI.

434. Data area Circuli, invenire diametrum.

RESOLUTIO.

1. Quæritur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus

Y 3

quar-

quartus proportionalis 313600 (§. 302 *Arithm.*): qui est quadratum diametri (§. 430).

2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (§. 269 *Arithm.*), quæ est diameter (§. 236 *Arithm.* & §. 370 *Geom.*)

PROBLEMA LXII.

Tab. VIII. Fig. 133. 435. Dato radio circuli AC, una cum ratione arcus AB ad peripheriam; invenire aream Sectoris ACB.

RESOLUTIO.

1. Quærat ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui est semiperipheria (§. 436 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*).
2. Quærat porro ad 180°, arcum datum AB, & semiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem mensura, in qua radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in semiradium.

Factum exprimet aream Sectoris (§. 415, 392).

Ex. gr. Sit radius 6'; arcus 60°.

$$\begin{array}{r} 100 - 314 - 600'' \\ \hline 600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Semiperiph. } 1884|00 \\ 180 - 1884 - 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60) \quad 3 \text{ ————— } 1 \\ \quad \quad 628'' = AB \\ \quad \quad 300 = \frac{1}{2} AC. \end{array}$$

$$\text{Area } 18'84''|00 = ACB$$

PROBLEMA LXIII.

Tab. VIII. Fig. 133. 436. Datis altitudine Segmenti DE & dimidia basi EA; invenire aream eius.

RESOLUTIO.

1. Quærat diameter (§. 328). Tab. VIII. Fig. 133.
2. Describatur circulus (§. 131), & in eo applicetur basis segmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC, & ope Instrumenti transportatorii investigetur numerus graduum arcus ADB.
4. Dato jam radio AC, una cum arcus ADB ad peripheriam ratione, investigetur area sectoris ACB, &
5. Ex chorda AB atque altitudinis segmenti DE complemento ad radium EC, area trianguli ACB (§. 392).
6. Hoc denique ex illo auferatur: residuum erit Segmentum ADBEA.

Ex. gr. Sit $AB = 600''$, $DE = 80''$; erit $DF = 1205''$ (§. 328), arcus $AB = 60^\circ$ (§. 152). Ergo area sectoris $ADBC = 18'84''$ (§. 435). Jam $EC = 522\frac{1}{2}''$, $AE = 300''$. Quare $\triangle ACB = 156750''$; consequenter segmentum $AEBDA = 31650''$.

COROLLARIUM.

437. Quodsi Segmentum majus BFA quærat; triangulum BCA sectori BFACB addendum.

SCHOLION.

438. Ne pro inveniendâ area Sectoris atque Segmenti, peripheriam investigare opus sit; arcuum gradus atque scrupula, tam prima quam secunda, istiusmodi particulis expressa in Tabula subsequente exhibere placet, quælium diameter est 100000. Constructio Tabule intelligitur ex resolutione Problematis 61 (§. 435). Usus talis est. Sit ex. gr. ut in casu Problematis citati, diameter 1200'', arcus 60°. Cum 60 gradibus in Tabula respondeant 52359 particule diametri; inferatur:

100000

100000 - 52359 - 1200
 1200
 10471800
 52359
 628130800

Est ergo arcus 628^{III}, ut supra (§. cit.) eundem reperimus.

Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Sec.	Part. per.
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

PROBLEMA LXIV.

439. Parallelogrammum ABEC ex Tab. VIII. dato puncto D in duas partes aequales Fig. 136. dividere.

RESOLUTIO.

Fiat EF=AD, & ducatur recta DF: erit ADFC=DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE: erit $o = x$ (§. 156) &, ob parallelas AB & EC (§. 102), $y = u$ (§. 233). Sed AD=FE, per const. Ergo $\triangle ADG = \triangle FGE$ (§. 252). Est vero $\triangle ACE = \triangle AEB$ (§. 337). Quare ACFG=DBEG (§. 91 Arithm.); consequenter ADFC=DBEF (§. 88 Arithm.). Q. e. d.

PROBLEMA LXV.

440. Parallelogrammum atque Triangulum in partes quotcunque aequales dividere. Tab. VIII. Fig. 137, 138.

RESOLUTIO.

1. Dividatur basis CD in tot partes aequales, in quot figura dividenda (§. 274).
2. In Parallelogrammo ducantur rectae 11, 22; in Triangulo A1, A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 102); eandem altitudinem habent (§. 226, 227). Sunt itaque in basium ratione (§. 389); consequenter, ob C1=12=2D, per const. aequales. Quod erat unum.

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonnisi unica duci possit (§. 213); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem (§.

(§. 228), adeoque basium rationem habent (§. 389). Sed bases æquales sunt, *per constr.* Ergo & Triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LXVI.

Tab. VIII. 441. *Figuram rectilineam quamcunque ABCDE in partes æquales dividere.*
Fig. RESOLUTIO.

139. 1. Quærat^r area figuræ (§. 400), & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, ex.gr. in 3.
2. Area partis, in nostro casu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED subtrahatur a parte tertia, & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI sit pars tertia figuræ (§. 394).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi AD (§. 258), quæ secabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abscindentem.
5. Pars tertia dimidia, sive sexta totius figuræ, dividatur per $\frac{1}{2}$ DI, quotus erit altitudo trianguli IKD sextam figuræ partem constituentis (§. 394).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 258).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$ KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD sextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 394).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi KD parallela (§. 258), ut punctum L determinetur ducatur-

que recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL refecabit.

9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

Ex. gr. Sit AD = 516'', AC = 580'', EH = 154'', DG = 315'', BF = 375''; erit AED = 39732'' ADC = 91350'' & ABC = 108750'' (§. 392); adeoque area figuræ 239832 (§. 400); ejus pars tertia 79944; pars sexta 39972.

$$\text{Pars III} = 79944$$

$$\text{AED} = 39732$$

$$\text{AID} = 40212 \quad (155 +, \text{ sed } 156 \text{ fere} = \text{IM})$$

$$\frac{1}{2} \text{AD} = 258 \quad \begin{array}{r} 258 \\ 1441 \\ 1290 \\ 1512 \\ 1290 \end{array}$$

$$1441$$

$$1290$$

$$1512$$

$$1290$$

$$222$$

$$\text{Pars VI} = 39972 \quad (151'' = \text{KN})$$

$$\frac{1}{2} \text{DI} = 264 \quad \begin{array}{r} 264 \\ 1357 \\ 1320 \\ 372 \\ 264 \end{array}$$

$$1357$$

$$1320$$

$$372$$

$$264$$

$$108$$

$$\text{Pars VI} = 39972 \quad (139'' = \text{LO})$$

$$\frac{1}{2} \text{DK} = 287 \quad \begin{array}{r} 287 \\ 1127 \\ 861 \\ 2662 \\ 2583 \\ 79 \end{array}$$

$$1127$$

$$861$$

$$2662$$

$$2583$$

$$79$$

SCHOLIUM.

442. Si AED majus tertia ex.gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo AED auferendum, ut tertia parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars AEDI per duo triangula uti cetera determinetur.

SCHOLIUM II.

443. Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta I, K, L per quantitatem rectarum AI, IK & DL facile determinantur (§. 126).

Finis Partis Prioris.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriae solidæ.

DEFINITIO I.

444. **S**olidum, sive Corpus, est magnitudo tribus dimensionibus prædita, seu extensum in longitudinem, latitudinem, atque profunditatem.

DEFINITIO II.

Tab. VIII. Fig. 141. 445. *Angulus solidus B* est pluriusquam duarum linearum BA, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano constitutarum ad omnes inclinatio. Dicuntur autem *Anguli solidi æquales*, qui inter se invicem positi congruunt.

COROLLARIUM I.

446. Ergo angulus solidus B pluriusquam duobus planis in eodem plano non constitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

447. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum solidum constituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad solidum constituendum necessarii.

SCHOLIUM I.

448. Unde etiam Angulus solidus definitur *Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.*

tur, quod sit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non consistentibus, ad idem tamen punctum constitutis, continetur.

COROLLARIUM III.

449. Ut anguli solidi sint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine dispositis contineri debent, ut scilicet plana angulos planos æquales contentia æqualiter ad se invicem inclinentur.

SCHOLIUM II.

450. Bene nimirum TAQUETUS observat, de angulis solidis, qui ex planorum inclinatione oriuntur, eodem modo ratiocinandum esse, quo de planis, qui oriuntur ex linearum ad se invicem inclinatione.

COROLLARIUM IV.

451. Cum anguli solidi distingui nequeant nisi per planos, quibus continentur (§. 445), ubi plani & numero, & magnitudine æquales, & planorum eos continentium eadem fuerit inclinatio, ea coincidunt per quæ a se invicem distingui debent. Sunt ergo similes (§. 24 *Arithm.*); consequenter anguli solidi similes sunt æquales & contra (§. 449).

Z

COROL-

COROLLARIUM V.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant summam 360 graduum; planum circuli sternunt (§. 41, 57), adeoque solidum angulum non constituunt (§. 446). Quare summa eorum, qui ultra solidum non assurgunt, quatuor rectis seu 360° (§. 144) minor esse debet.

DEFINITIO III.

453. *Corpus regulare* est solidum planis regularibus & inter se æqualibus terminatum, totidem numero ad angulos constituendos concurrentibus. Reliqua corpora dicuntur *irregularia*.

SCHOLIUM.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam Platonica, propterea quod PLATO in Timæo corpora, qua statuit, simplicia, celum puta, ignem, aerem, aquam, atque terram cum iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453), omnes anguli corporis cujuscumque regularis æquales sunt (§. 449).

DEFINITIO IV.

Tab. VIII. Fig. 140. 456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Prisma ABCDFEA* describit: & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis, seu in nullam partem inclinatur; *obliquum* vero, si ea ad idem fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare* siue *trigonum*, si planum describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit figura quadrilatera, & ita porro.

COROLLARIUM I.

457. Quodlibet adeo prisma habet duas

bases oppositas ABC & EDF æquales, & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot basis latera habet. Est enim AC ipsi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 257); consequenter ACDE est parallelogrammum (§. 102). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus ostenditur.

COROLLARIUM II.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se æqualia. Æquantur enim plano describenti ACB (§. 456 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); ergo & inter se æqualia sunt (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO V.

459. Si planum describens ABCD fuerit quadratum, & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE & DAE rectus; *Cubus* describitur.

COROLLARIUM I.

460. Cubus terminatur sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD = EFGH (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*). Cumque ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallele, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230); consequenter ABFE quadratum (§. 338) ipsi ABCD æquale (§. 374). Eodem modo ostenditur, reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

461. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); consequenter etiam æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

462. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur.

COROLLARIUM I.

463. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 462)

(§. 462 *Geom.* & §. 81 *Ariithm.*); adeoque & æqualia inter se (§. 87 *Ariithm.*).

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. Fig. 142. 464. Cum LM & NO sint æquales & inter se parallelæ (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Ariithm.*); etiam MO & LN æquales sunt & parallelæ (§. 257); consequenter LMNO parallelogrammum (§. 102). Eodem modo ostenditur, plana terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEFINITIO VII.

Tab. VIII. Fig. 143. 465. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD, motu sibi semper parallelo, deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus* quidem, si recta CF quam punctum C in descensu describit, centra basium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum DE perpendicularis; *scalenus* vero, si ad angulos obliquos eidem insistat. Quodsi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur; *Cylindrum* describit *rectum*.

COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo bases cylindri AB & DE æquales; verum etiam sectiones basibus parallelæ sunt circuli iisdem & inter se æquales.

DEFINITIO VIII.

Tab. IX. Fig. 144. 467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut constanter inhæreat puncto fixo K; describetur *Conus* NKM. Recta ex puncto K, qui *vertex* conii dicitur, ad centrum basis L ducta dicitur *Axis Conii*: qui si ad circulum basim conii NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insistat, *scalenus*. Linea describens KM, seu recta

ex vertice in peripheriam basis ducta, vocatur *Latus Conii*. Possumus quoque *Conii* genesis ita concipere, ut circellus infinite parvus, dum motu sibi semper parallelo ita deorsum fertur, ut centrum continuo sit in axe KL, radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur: *Conus* describitur *rectus*. Tab. IX. Fig. 144.

COROLLARIUM.

468. Quodsi PQ ipsi LM parallela, per ultimam conii genesis erit KL : KP = LM : PQ. Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum; planum sectionis basi conii parallele factæ circulus est eadem minor.

SCHOLIUM.

469. Ex genesis ultima conii apparet, in definitionibus geometricis genericis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Et quoniam in cono obliquo latus conii non ejusdem longitudinis in quovis peripheriæ puncto; patet lineam describentem KM, quæ altero sui extremo peripheriæ NM constanter adheret, per punctum fixum K aliqua sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri debere.

DEFINITIO IX.

470. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* describitur: diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphære*, centrum C etiam *Centrum Sphære*. Tab. IX. Fig. 145.

COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectæ ex sphære superficie in centrum ductæ sunt inter se æquales (§. 40).

DEFINITIO X.

472. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, CDB & BDA in uno puncto D Tab. IX. Fig. 146.

Tab. IX. Fig. 146. coëuntibus, quot basis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

473. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC: DC = CA: *ca* = CB: *cb* (§. 268); adeoque CA: *ca* = CB: *cb* (§. 167 *Arithm.*); consequenter cum eodem modo ostendi possit esse CA: *ca* = AB: *ab*, erit triangulum *acb* simile triangulo ACB (§. 207). Quare si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM II.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres, &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 473); consequenter cum vi demonstrationis primæ Problematis 47 (§. 363) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis simili-

bus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO XI.

475. *Tetraëdrum* est solidum quatuor; *Octaëdrum* est solidum octo; *Icosædrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum; *Dodecaëdrum* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum.

Tab. IX. Fig. 147. 148. 149. 150.

DEFINITIO XII.

476. *Inclinatio plani* KEGL ad planum ACDB est angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG perpendiculares.

Tab. XI. Fig. 151.

DEFINITIO XIII.

477. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica*. Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De Sectione & Situ Planorum.

THEOREMA I.

Tab. XI. Fig. 175. 478. **R**ectæ linea pars quadam AB non est in subjecto plano DE, pars vero BC in sublimi.

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta

terminata utrinque produci possit (§. 21); producatu AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ ABC, per *hypoth.* Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum & versus F, & versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum

Tab. XI. Fig. 175.

Tab. XI. Fig. 175. furdum (§. 19), rectæ lineæ quædam pars AB non potest esse in subjecto plano DE, pars vero quædam BC in sublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. XI. Fig. 176. 479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF segmentum commune DE habere nequeunt (§. 478); consequenter duæ rectæ AB & CF se mutuo non intersecant nisi in uno puncto D.

COROLLARIUM II.

Tab. XI. Fig. 177. 480. Cumque pars rectæ AD esset in subjecto plano, pars vero BD in sublimi, si trianguli ABC pars ADE esset in subjecto plano, pars vero DBCE in sublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.

COROLLARIUM III.

Tab. XI. Fig. 178. 481. Et quoniam rectarum BE & DC se mutuo secantium in A partes AB & AC sunt crura trianguli ABC; erunt eadem in eodem plano (§. 480). Sed in eodem plano est EA, in quo est AB, & AD in eodem est, in quo est AC (§. 478). Ergo lineæ se mutuo secantes EB & DC in eodem sunt plano.

THEOREMA II.

Tab. XI. Fig. 179. 482. Si duo plana ABCD & EFHG se mutuo secant; erit communis sectio recta IK.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectæ AB & EF se mutuo non intersecant nisi in puncto I, nec rectæ DC & GH nisi in puncto K (§. 479); si communis planorum sectio non est recta unica, sed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK & in plano ABCD recta IMK, quod fieri posse patet, si sectio communis planorum ABCD & EFHG non est recta unica IK, utut planum sectionis lineis curvis in punctis I & K coeuntibus

terminari sumas (§. 191). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidunt, totæ in punctis omnibus coincidere debent (§. 170); consequenter communis sectio esse nequit nisi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

483. Si duæ rectæ AB & CD fuerint in eodem plano; recta EF eas secans in G & H erit in eodem plano.

DEMONSTRATIO.

Secet planum aliud planum datum, in quo positæ sunt rectæ AB & CD, in punctis G & H; recta transiens per G & H est communis sectio planorum (§. 482). Sed eadem est pars lineæ EF (§. 170), quæ duas AB & CD secat, *per hypoth.* Recta igitur EF est in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

484. Si recta IE fuerit perpendicularis ad duas rectas KL & MN in plano ABCD ductas S, & se mutuo in puncto E secantes; erit ea perpendicularis ad rectam quamvis aliam OP, quæ per punctum E ducitur in eodem plano.

DEMONSTRATIO.

Fiat ME=EN & EL=EK. Quoniam MEL=KEN (§. 156), erit ML=KN, & angulus EMO=ENP (§. 179). Quare cum etiam sit MEO=PEN (§. 156), erit MO=PN & EO=EP (§. 251). Quia IE perpendicularis ad MN, *per hypoth.* erit angulus IEM=IEN (§. 79); consequenter, cum sit ME=EN, *per constr.* & IE=IE, etiam IM=IN. Eodem modo

Tab. XI. Fig. 179.

Tab. XI. Fig. 180.

Tab. XI. Fig. 181.

Tab. ostenditur esse $IL=IK$. Quoniam itaque $ML=KN$, per demonstr.; angulus $INP=IMO$, adeoque, ob $IN=IM$ & $PN=OM$, per demonstr., $IP=IO$ (§. 179). Est vero etiam $EP=EO$, per demonstr., & $IE=IE$. Quamobrem angulus $IEP=IEO$ (§. 204); consequenter IE ad OP perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE , ad duas rectas KL & MN in plano $ABCD$ perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78).

SCHOLIUM.

486. Hinc linea recta IE ad planum $ABCD$ perpendicularis definitur, quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.

THEOREMA V.

Tab. 487. Si recta IE fuerit ad planum $ABCD$ perpendicularis, & ex E , tanquam centro, in eodem plano descriptus sit circulus; erunt recte IG , IE , &c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ducte inter se aequales.

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F , G , &c. radii EF , EG , &c. erit $EF=EG$ (§. 40); cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 485), etiam $FEI=GEI$ (§. 145). Quare cum porro sit $EI=EI$; erit $FI=GI$ (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Tab. 488. Ex eodem puncto E ad planum $ABCD$ nonnisi unica perpendicularis EI duci potest.

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc

alia EQ , & per punctum E transiens in plano recta OP sit cum rectis EI & EQ in eodem plano: erit cum EQ , tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 213), ex eodem puncto E nonnisi unica perpendicularis ad planum EI erigi potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

489. Ab eodem puncto I in sublimi dato ad idem planum $ABCD$ perpendicularis nonnisi unica IE demitti potest.

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia IG . Jungantur puncta E & G in plano recta EG ; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480). Duo igitur in triangulo ad basin anguli E & G recti sunt (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 218), a puncto I ad planum $ABCD$ nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

490. Linea perpendicularis IE est brevissima, qua a puncto extra planum dato ad idem duci potest.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG ; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480), & angulus ad E rectus (§. 486). Est igitur $IE < IG$ (§. 220). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

491. Si recta LE tribus rectis FE , HE , IE , vel etiam pluribus in eodem puncto E concurrentibus perpendiculariter insistat; erunt tres illæ recte FE , HE & IE vel etiam plures in eodem plano $ABCD$.

DE-

Tab. XI. Fig. 182.

Tab. XI. Fig. 182.

Tab. XI. Fig. 183.

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 183. Sit enim, si fieri potest, recta EF in plano LEGK, quod secat planum ABCD, in quo sunt duæ reliquæ EH & EI, in recta EG (§. 482) Quoniam LE perpendiculariter insistit duabus rectis EH & EI in plano ABCD, per hypoth. eadem quoque ad angulos rectos insistit rectæ EG (§. 485). Sed cum LE etiam perpendicularis sit ad EF, per hypoth. erit etiam angulus LEF rectus (§. 78); consequenter angulus LEF ipsi LEG æqualis (§. 145), pars nempe toti (§. 9 Arithm.): quod cum sit absurdum (§. 84 Arithm.), rectæ FE, HE, & IE, quibus LE perpendiculariter insistit, in eodem sunt plano ABCD. *Quod erat unum.*

Quod si lineæ in puncto E concurrentes fuerint quatuor, quibus LE perpendiculariter insistit, cum sit tertia cum prima & secunda in eodem plano, per demonstrata, erit etiam quarta cum secunda & tertia in eodem plano, & ita porro. *Quod erat alterum.*

THEOREMA X.

Tab. XI. Fig. 184. 492. Linea recta GE & HF eidem plano ABCD perpendiculares sunt inter se parallela; & si una parallelarum GE & HF fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta EF & EL = EF. Cum GE perpendicularis sit ad planum ABDC, per hypoth. insistet ea rectis EF & EL in plano isto ductis ad angulos rectos (§. 486). Moveatur GE juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut ad planum semper sit recta,

describet ea planum GELI, eritque LI, tum ad planum, tum ad EL perpendicularis; consequenter ipsi GE parallela (§. 256). Moveatur planum GELI circa rectam quiescentem GE, donec EL ipsi EF congruat (§. 168); cadet planum GELI in planum, in quo sunt rectæ EG & EF: quoniam itaque tam HF, per hypoth., quam LI ad planum ABCD in puncto F perpendicularis, per demonstr.; ad idem vero punctum F non nisi unica recta plano perpendicularis esse potest (§. 488); etiam recta LI cadet in FH; consequenter FH erit parallela ipsi GE. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter se parallela & GE ad planum perpendicularis. Quod si reliqua ponantur ut ante; dum planum GELI incidit in planum GEFH, rectæ EG parallela LI cadet in rectam eidem parallelam FH (§. 260); consequenter cum LI sit ad planum perpendicularis, etiam FH ad idem perpendicularis erit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares sunt.

SCHOLIUM.

494. Hinc EUCLIDES Planum definit ad planum rectum sive perpendiculare, cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABDC & GEFH sectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectæ sunt alteri plano ABDC.

THEOREMA XI.

495. Rectæ AB & EF, quæ sunt eidem rectæ CD parallela, non tamen in eodem cum ipsa plano, sunt inter se parallela.

Tab. XI. Fig. 185.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. Ducatur in plano parallelarum AB
XI. & CD recta GH ad CD perpendicula-
Fig. ris, & ex H perpendicularis HI ad
185. CD in plano parallelarum CD & EF.
Jungantur puncta G & I recta GI;
erit triangulum GHI in eodem plano
(§. 480). Quoniam CH ad planum
GHI perpendicularis (§. 484); erunt
etiam AG & EI ipsi CH parallelæ, *per*
hypoth. ad idem planum perpendicula-
res (§. 492); consequenter inter se
parallelæ (§. cit.). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. 496. Si dua rectæ AC & CB fuerint
X. parallela duabus rectis DF & FE, etiam-
Fig. si non sint in eodem plano, anguli, quos
167. comprehendunt, æquales sunt.

DEMONSTRATIO.

Fiat $CB=FE$ & $CA=FD$: quoniam CB parallela ipsi FE & CA parallela ipsi FD, *per hypothesein*; erit BE ipsi CF & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257); consequenter BE parallela (§. 495) & æqualis (§. 87 *Arithm.*) ipsi AD; ac ideo AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 257). Est igitur $\text{angulus DFE} = \text{ACB}$ (§. 204). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

Tab. 497. Si recta IK duobus planis ABCD
XI. & EFGH fuerit perpendicularis, erunt
Fig. plana inter se parallela.
186.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IL in plano ABCD, & ponatur ML ad istud perpendicularis, quæ plano EFGH in M occurrit, cumque IK ad planum EG recta sit, *per*

hypoth. ad IK parallela est (§. 492). Quamobrem si puncta M & K jungantur recta MK, erit angulus K perinde ac I rectus (§. 486), consequenter $LM=K$ (§. 238). Cum eodem modo demonstretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipsi IK parallelam eidem æqualem esse; plana ABCD & EFGH ubivis a se invicem eodem intervallo distare (§. 490, 15) patet. Sunt igitur inter se parallela.

SCHOLIUM.

498. Nimirum Planum ABCD alteri EFGH dicitur parallelum, perinde ac recta alteri recta parallela est (§. 81), si ubivis eandem ab eadem distantiam servat.

THEOREMA XIV.

499. Si planum ADCB secet duo plana parallela EFGH & IKLM; erunt sectiones AD & BC inter se parallelae. Tab. XI. Fig. 187.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim sectiones AD & BC non esse inter se parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81, 83). Cum igitur, si plana cum ipsis continuantur, totæ in iisdem sint (§. 478); ipsa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non sunt (§. 498): quod cum sit absurdum, sectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

500. Si dua rectæ linea se mutuo tangentibus AC & AB duabus aliis se mutuo tangentibus EG & EF fuerint parallela, etiam plana ACDB & EGLF per ipsas ducta erunt parallela. Tab. XI. Fig. 188.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 188. Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258); erunt eadem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495) & AH ad HK & HI perpendicularis (§. 486). Perpendicularis igitur AH etiam perpendicularis est ad AB & AC (§. 230) adeoque ad planum ABCD (§. 484, 486); consequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (§. 497). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

Tab. XI. Fig. 189. 501. Dux linea recta NR & OS a planis parallelis ABDC, EFHG, IKLM proportionaliter secantur, ut nempe sit PR : PN = TS : IO.

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta sectionum N & O, R & S, rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & similiter triangulum OSR in eodem plano (§. 480), & PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§. 499.). Est igitur RQ : QO = RP : PN, & QR : QO = TS : TO (§. 268); consequenter RP : PN = TS : TO (§. 167 Arithm.). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

Tab. XI. Fig. 182. 502. Ad datum planum ABDC in dato puncto E erigere perpendicularem EI.

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuscunque F & G æqualiter distet, quod mechanice præstatur ope

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

filorum æqualium ex dictis punctis extensorum: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 487). Tab. XI. Fig. 182.

COROLLARIUM I.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum, veluti EIF, sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare: ut adeo pateat normæ usus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLION.

504. Neesse est ut normæ crura non desinant in aciem tenuem, sed aliquam habeant latitudinem, ut norma ad rectam EG applicata sit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.

COROLLARIUM II.

505. Quodsi punctum I extra planum detur, norma super plano erecta huc illucve promovenda, donec crus erectum idem attingat, si e puncto I perpendicularis IE demittenda. Quodsi crus normæ brevius sit, quam ut punctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso idem coincidere debet.

THEOREMA XVII.

506. Si recta IK sit ad planum ABCD perpendicularis; planum quodcunque, veluti EHGF, quod per eam ducitur, ad idem planum ABCD perpendiculare est.

DEMONSTRATIO.

Ducatur LM ad sectionem communem planorum HG perpendicularis. Cum etiam sit IK ad HG perpendicularis, (*per hypoth.* & §. 468) erit LM ipsi IK parallela (§. 256). Enimvero IK perpendicularis est ad planum ABCD, *per hypoth.* Ergo etiam LM (§. 492).

A a

Est

Tab. XI. Fig. 190.

Est igitur planum EHGF ad planum ABCD rectum (§. 494). *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

507. *Nemo non videt demonstrationem subsistere eandem, etiamsi in locum plani EFGH planum quodcumque aliud surrogetur, quod per IK ducitur.*

Tab. XI.

T H E O R E M A XVIII.

Fig.

191.

508. *Sectio NO duorum planorum EFGH & IKLM ad idem tertium ADCB perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.*

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendicularare, *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 502). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendiculararem. Quare cum ad idem punctum O eodem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§. 488), communis autem planorum IKLM & EFGH sectio NO nonnisi unica recta

fit (§. 482); sectio illa communis NO erit illa perpendicularis, quæ in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci potest. *Q. e. d.*

T H E O R E M A XIX.

509. *Plani KLGE ad planum ABDC in omnibus punctis F, f &c. inclinatio eadem.*

Tab. IX. Fig. 151.

D E M O N S T R A T I O.

Erigantur ex punctis F & f perpendiculares FH & fh in plano ABDC & alia FI & fi in plano EKLGE (§. 212); fiatque HF = hf & FI = fi, erunt HF & hf, itemque FI & fi parallelæ (§. 256); consequenter etiam Hb & Ii parallelæ ipsi Ff & Hb = Ff, itemque Ii = Ff (§. 257), adeoque etiam Hb parallela ipsi Ii (§. 495) & Hb = Ii (§. 87 *Arithm.*). Quoniam itaque HI & hi inter se parallelæ atque æquales sunt (§. 257): erunt anguli F & f æquales (§. 204), atque adeo inclinatio plani ad idem planum in singulis punctis eadem (§. 476). *Q. e. d.*

C A P U T III.

De Solidorum Constructione.

P R O B L E M A II.

Tab. VIII.

Fig.

141,

142.

510. **C**ubum ADCBFEHG, vel Parallelepipedum IKMLNOPQ in plano describere.

R E S O L U T I O.

1. Construat pro cubo rhombus DABC (§. 340); pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§. 341).

2. Construantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 338, 340); pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini æquale & rhomboides MKOP (§. 339, 341).

Tab. VIII. Fig.

141,

142.

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis construantur;

ut

Tab. VIII. ut plana lateralia FBCG & MKPO videri possint; erit solidum AG cubus Fig. (§. 459); solidum vero LP parallelepipedum (§. 462).
141.
142.

PROBLEMA III.

511. Prisma ACBFDE in plano describere.

RESOLUTIO.

- Tab. VIII. 1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si prisma fuerit triangulare. Fig. 2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 249). 149.
3. Construantur parallelogramma ACED, BCDF (§. 341).
Erit ACBFDE prisma triangulare (§. 456, 457).

PROBLEMA IV.

Tab. IX. 512. Pyramidem DACB in plano describere. Fig. 146.

RESOLUTIO.

1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si triangularis fuerit; ita tamen ut latus AB, tanquam a facie aversum, non exprimatur.
2. Super AC & CB construantur triangula ADC & CDB in puncto D coëuntia: seu, assumpto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit AD BC pyramis triangularis (§. 472).

PROBLEMA V.

Tab. IX. 513. Rete describere, ex quo Cubus construi possit. Fig. 152.

RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.
2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249), &

parallelogrammum ACBD compleatur (§. 339). Tab. IX. Fig. 152.

3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M, & O.
4. Denique ducantur rectæ IK, LM, & NO, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH, & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares sunt, per constr. & AI = CK = AC, per constr. Ergo ACKI quadratum (§. 338). Non absimili modo ostenditur esse IKML, MLNO, &c. quadrata ipsi AK æqualia. Est itaque ADFG rete, ex quo cubus construi potest (§. 460). Q. e. d.

PROBLEMA VI.

514. Rete describere, ex quo Parallelepipedum construi potest.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedum.
2. Super his lineis tanquam basibus construantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallelepipedum æqualis.
3. Super EF vero & HI construantur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallelepipedum æqualis (§. 339).

Quoniam AEBH = GFIK, EHIF = GCKD, ELMF = HNOI (§. 383); ex hoc reti parallelepipedum construere licet (§. 463, 464). Q. e. f. & d.

PROBLEMA VII.

515. Rete pro Prismate describere.

RESOLUTIO.

- Tab. IX. Fig. 154.
1. Construatur basis prismatis, ex. gr. pro triangulâri triangulum KBD.
 2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat $AB=BK$ & $DE=DK$.
 3. Super AB, BD & DE construatur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini prismatis æqualis (§. 339).
 4. Denique fiat super GH triangulum GIH, ipsi BKD æquale (§. 205). Ex hoc reti prisma triangulare, nec ab simili modo multangulare quodcunque constructur (§. 457).

THEOREMA XX.

Tab. IX. Fig. 155.

516. Superficies Cylindri recti, secta-
tis basis, æqualis est rectangulo sub pe-
ripheria & altitudine Cylindri.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi possit, du-
canturque rectæ EG & FH inter se pa-
rallæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipsi GH paralle-
lus (§. 465); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera
rectangula, ipsi EFHG æqualia, resol-
vitur, quorum communis altitudo est
EG seu altitudo cylindri (§. 229), ba-
ses vero junctim sumtæ peripheriæ
æquantur. Ergo eadem æqualis est
rectangulo sub peripheria & altitudine
cylindri (§. 389). Q. e. d.

SCHOLIUM.

517. Nimirum arculus in quolibet casu
tam exiguus assumitur, ut, si ejus differen-
tia multiplicari supponatur per numerum par-

tium, in quas peripheria concipitur divisa,
prodeat particula in dato casu inassignabilis,
adeoque contemptibilis parvitas: quod fieri
posse patet, quod polygonum circulo inscrip-
tum continuo appropinquat ad peripheriam.
Et idem tenendum est in aliis casibus, ubi de
infinite parvo sermo fuerit. Sed ex instituto
ea de re dicimus in Philosophia prima.

PROBLEMA VIII.

518. Rete pro Cylindro describere.

RESOLUTIO.

1. Eadem diametro describantur cir-
culi AB & CD.
2. Inveniatur horum peripheria (§.
429).
3. Super BC altitudini cylindri æqua-
li construatur rectangulum (§. 339),
ita ut CD sit peripheriæ inventæ
æqualis.

Ex hoc reti construi potest cylindrus
(§. 510).

THEOREMA XXI.

519. Superficies Coni recti seclusa basi,
æqualis est triangulo, cujus basis peri-
pheria, altitudo latus Coni.

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeo-
que a recta non differens; triangulum
KLM pro rectilineo recte habetur:
cumque angulus K sit infinite parvus;
anguli L & M a rectis non differunt
(§. 240), estque adeo KM ad LM
perpendicularis (§. 78), consequenter
trianguli KML altitudo (§. 228). Sed
coni recti superficies in innumera istius-
modi triangula inter se æqualia resolvi-
tur (§. 467, 251). Ergo integra coni
recti superficies æqualis est triangulo,
cujus altitudo lateri, basis peripheriæ
coni æqualis (§. 389). Q. e. d.

COROL-

COROLLARIUM.

520. Superficies conii recti æquatur sectori circuli latere conii tanquam radio descripti, cujus arcus peripheriæ conii æqualis (§. 415), adeoque ad suam peripheriam eam rationem habet, quam diameter basis ad latus conii (§. 412 *Geom.* & §. 167 *Arithm.*).

PROBLEMA IX.

521. Rete pro Pyramide describere.

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 158. Sit ex gr. construenda pyramis triangularis.

1. Radio AB describatur arcus BE, & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter se æquales.
2. Super DC construatur triangulum æquilaterum DFC, ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis construi potest (§. 472).

SCHOLIUM.

522. Si latera basis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens est fieri debere $ED = DF$ & $CB = CF$. Nec adeo latet, quid factu opus sit, si basis fuerit polygonum, sive regulare, sive irregulare.

PROBLEMA X.

523. Rete pro Cono recto describere.

RESOLUTIO.

- Tab. IX. Fig. 159.
1. Diametro basis AB describatur circulus, & diameter producat in C, donec AC lateri conii æqualis fiat.
 2. Quærat ad 2 AC & AB, in numeris determinatas, atque 360° , numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).
 3. Radio CA, ex centro C describatur arcus DE, & ope Instrumenti trans-

portatorii fiat angulus DCE, consequenter arcus DE (§. 54) numero graduum invento æqualis.

Erit sector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 520).

Tab. IX. Fig. 159.

COROLLARIUM.

524. Quodsi ex A in F transferatur latus conii truncati & radio CF arcus GH describatur, tandemque ad 360° , numerum graduum arcus GH, atque FC, numerus quartus proportionalis quærat, & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Est enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abscisso (§. 523): ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA XI.

525. Rete pro Tetraëdro describere.

RESOLUTIO.

1. Construatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198).
2. Super singulis ejus lateribus construantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (§. cit.)

Ex hoc reti tetraëdram construi potest (§. 475).

Tab. IX. Fig. 160.

COROLLARIUM.

526. Quodsi BC continuetur in H, donec fiat $CH = FC$, & ut in resolutione Problematis construantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 198); ex reti Octaëdram construi potest (§. 475).

Tab. IX. Fig. 161.

PROBLEMA XII.

527. Rete pro Icosaëdro describere.

RESOLUTIO.

1. Construatur triangulum æquilaterum ABC (§. 198).
2. In basi AB continuata fiat $AB = BF = FG = GH = HD$.
3. Per C agatur ipsi AB parallela CE (§. 258), & fiat $AB = CI = IK = KL = LM = ME$.

Tab. X. Fig. 162.

- Tab. X. Fig. 162.
4. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G, &c.
 5. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L, &c.

Dico ex hoc reti construi posse ico-
 pædram.

DEMONSTRATIO.

Demonstrandum est, viginti triangu-
 la ACB, ABY, CBI, CIN, BSF, BIF,
 IOK &c. æquilatera & inter se æqua-
 lia esse (§. 475): id quod sequenti ra-
 tione patefeit. Quoniam CI parallela
 & æqualis ipsi AB, *per construct.* & AC
 æqualis & parallela ipsi BI (§. 257);
 erit $o = x$ & $m = n$ (§. 233); conse-
 quenter $CAB = \sphericalangle CBI$ (§. 251).
 Eodem modo ostenditur esse $CB! = \sphericalangle$
 & $\sphericalangle BIF = \sphericalangle FIK$, &c. Porro quon-
 iam CI & BF sunt inter se æquales at-
 que parallele, *per constr.* erit NT pa-
 rallela ipsi CS (§. 257), adeoque $y = u$
 & $t = o$ (§. 233); consequenter CIN
 = & $\sphericalangle CBI$ (§. 251). Eodem modo
 ostenditur esse $CBI = \sphericalangle IOK = \sphericalangle$
 & $\sphericalangle KPL$, &c. = & $\sphericalangle ABY = \sphericalangle$
 & $\sphericalangle BSF = \sphericalangle FTG$, &c. Sunt ita-
 que omnia triangula inter se æqualia
 & æquilatera. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

- Tab. X. Fig. 163.
528. Rete pro Dodecaëdro describere.

RESOLUTIO.

1. Describatur pentagonum regulare (§. 352).
2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DF ipsi AB æquales.
3. Eodem modo ducantur AI & CH, BL, & DK, BN & EM, &c.

- Tab. X. Fig. 163.
4. Intervallo lateris pentagoni fiat in-
 tersectio in Q ex G & L, in R ex
 N & O, in S ex H & F, &c. ducan-
 turque GQ & QL, NR & OR, HS
 & FS, &c.

5. Eodem modo construantur penta-
 gona reliqua a, b, c, d, e, f.

DEMONSTRATIO.

Demonstrandum est pentagona om-
 nia esse regularia ipsique ABCDE
 æqualia (§. 475). Nimirum $AB = GA$
 = $BL = GQ = QL$, *per constr.* Cum-
 que anguli x mensura sit arcus dimidius
 ABCD (§. 324), anguli vero pentago-
 ni E similiter sit mensura dimidius arcus
 ABCD (§. 314); erit angulus x angu-
 lo pentagoni E æqualis (§. 141). Et
 quoniam eodem modo ostenditur, esse
 quoque angulum u angulo pentagoni
 æqualem; erit ABLQG pentagonum
 regulare (§. 352), idque, ob latus com-
 mune AB, ipsi AEDCB æquale (§.
 177, 161). Eadem demonstratio cum
 de reliquis pentagonis valeat; evidens
 est, omnia & regularia, & inter se
 æqualia esse. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

529. Corpora geometrica construere.

RESOLUTIO.

1. Delineentur retia in charta ex pluri-
 bus foliis compacta (§. 513, & seqq.).
2. Delineata excindantur, resecta char-
 ta superflua juxta eorum perimetros.
3. Excisissa agglutinentur chartæ co-
 loratæ.
4. Hujus superfluum ita resecetur, ut
 partibus perimetri alternis margines
 quidam relinquantur, quemadmo-
 dum in reti tetraëdri indicavimus.

5. Sin-

Tab. IX. Fig. 160.

5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, ex. gr. EF, FD & DE in reti tetraëdri, scalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant latera perimetri solidi.
6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA XXII.

530. Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum, & Icosaëdrum sunt corpora regularia; nec præter hæc quinque aliud possibile.

DEMONSTRATIO.

Cubus sex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icosaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 460, 475). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 453). Quod erat unum.

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icosaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad solidum effi-

ciendum concurrunt (§. 525, 526, 527). Quoniam vero summa sex istiusmodi angulorum est 360° (§. 243); triangulis regularibus nullum corpus, præter illa tria, contineri potest (§. 452). In cubo tres anguli quadrati solidum efficiunt (§. 513). Quare cum summa quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 98, 144); quadratis nullum corpus continetur nisi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis solidum constituunt (§. 528). Quia vero summa quatuor est 432°, & summa trium in hexagono regulari 360°, atque in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 345), ad angulum vero solidum constituendum minimum tres plani requiruntur (§. 447); pentagonis regularibus non nisi dodecaëdrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari potest. Corpora igitur regularia non nisi quinque sunt. Quod erat alterum.

C A P U T IV.

De Dimensione Solidorum.

PROBLEMA XV.

531. Superficiem ac soliditatem Cubi determinare.

RESOLUTIO.

- I. Cum superficies cubi ex sex quadratis æqualibus componatur (§. 460); latus cubi in seipsum ducatur, & factum per 6 multiplicetur (§. 370).
- II. Quod si idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.

Sit ex. gr. latus cubi AB 2° 7' 4".

AB = 274	Basis = 75076
274	AB = 274
1096	300304
1918	525532
548	150152
ABDC = 75076	Solidit. 20° 57' 08" 24"
6	
Superfic. 45° 04' 56"	

Tab. X. Fig. 164.

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Tab.
X.
Fig.
164.

Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 477); soliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodsi jam latus in partes quotcunque æquales divisum concipiamus, tot erunt cuborum ordines quot in latere AB partes, & in quolibet ordine totidem existent quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§. 370), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

532. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est 20° 570' 824". Similiter cum pertica *Rhenana* sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotus erit 11904' & 712". Quodsi 11904' porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536', adeoque habebis 6°, 1536' & 712".

SCHOLIUM.

533. Patet adeo, quantum divisio mensuræ in 10 partes præstet divisione in 12.

COROLLARIUM II.

534. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 259 *Arithm.*), & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA XXIII.

535. Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exigua. Quoniam altitudines æquantur, per *hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 463, 458, 466); bases vero illorum corporum inter se æquales sunt, per *hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 87 *Arithm.*); consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

536. Metiri superficiem ac soliditatem Parallelepipedi.

RESOLUTIO.

1. Quærat arca parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375, 387).
2. Addantur in unam summam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 464).
3. Quodsi basis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

Sit ex. gr. LM = 36', MK = 15', MO = 12' & parallelepipedium rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIK 540	LMON 432	MOKP 180
MO = 12	LIK 540	
1080	MOKP 180	
54	1152	
	2	

Solid. 6° 480' 23° 04' Superficies.

Tab.
VIII.
Fig.
142.

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in Probl. 15 (§. 531) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 535); ducta basi in altitudinem habetur quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

Tab. X. Fig. 165. 537. *Planum diagonale AHFD dividit Parallelepipedum ABCDEFG in duo Prismata ADCEFH & ADBFGH inter se equalia.*

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum DF perpendicularis ad planum ACDB (§. 462), sit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC (§. 486); eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 227), & ipsa itidem æqualia sunt (§. 535). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

538. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedum super dupla basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XVII.

539. *Metiri superficiem ac soliditatem Prismatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæraturs basis (§. 392, 400, 402) & multiplicetur per 2.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium, & earum summa addatur factæ antecedenti.

Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 457).

3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas.

Ex. gr. Sit $BC = 4^{\circ} 3' 2''$, $AG = 3^{\circ} 5' 7''$
 $CD = 8^{\circ} 6' 9''$.

$\frac{1}{2}BC = 216''$	$AC = 432''$
$AG = 357$	$CD = 869$
<hr/>	<hr/>
1512	3888
1080	2592
648	3456
<hr/>	<hr/>
Basis 77112''	ACDE 375408
$CD = 869$	<hr/>
<hr/>	3
694008	1126224
462672	2 ABC 154224
616896	<hr/>
<hr/>	Superfic. 128°04'48''
67°010'328''	Solidit.

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedum super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 539). Quodsi vero dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicetur per altitudinem, soliditas parallelepipedum prodit (§. 536). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedum dimidium, hoc est prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque

B b

foli-

Tab. VIII. Fig. 140.

soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

540. In exemplo nostro assumimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quod si vero basis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inæqualia sunt, adeoque area uniuscujusque sigillatim invenienda.

P R O B L E M A XVIII.

Tab. VIII. Fig. 143. 541. Data diametro AB & altitudine Cylindri CF; invenire superficiem ac soliditatem ejus.

R E S O L U T T I O.

1. Quærat peripheria baseos & basis ipsa (§. 429), hæcque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies, seclusis basibus (§. 516).
3. Quare si eidem addatur factum antecessens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

Ex. gr. Sit AB = 5° 6', CF = 24° 6'; erit peripheria = 17° 58 4

$$CF = 24° 6' 00''$$

$$\hline 10550400$$

$$70336$$

$$\hline 35168$$

Sup. absque Bas. 43 2° 56' 6 4'' 00

Dupl. Bas. 49 2352

Superfic. 48 1° 8' 0 1 6''

Basis = 24° 6' 17 6''

CF = 2460

$$\hline 14770560$$

$$984704$$

$$\hline 492352$$

Solidit. 605° 59 2' 9 60 4''

D E M O N S T R A T I O.

Cum circulus æqualis sit triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius (§. 410); cylindrus æqualis erit prismati triangulæ eandem cum ipso altitudinem & basin æqualem habenti (§. 535). Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 539). *Q. e. d.*

T H E O R E M A XXV.

542. Pyramides & Coni super eadem basi & ejusdem altitudinis sunt æquales. Tab. X. Fig. 166.

D E M O N S T R A T I O.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 258), erit IK = LM (§. 226); adeoque ob CK = DM, per hypoth. CI = DL (§. 91 Arithm.): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit $\triangle CEF \sim \triangle CAB$, & $\triangle DGH \sim \triangle DAB$ (§. 268); erit CI : CK = EF : AB, & DL : DM = GH : AB (§. 396). Sed CI = DL & CK = DM, per demonstr. Ergo EF : AB = GH : AB (§. 167 Arithm.); consequenter EF = GH (§. 177 Arithm.). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 474); consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF² ad AB²; & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH² ad AB² (§. 406). Quare cum EF² = GH², per demonstr. planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168 Arithm.); consequenter plana

Tab. X. Fig. 166. plana ista inter se æqualia sunt (§. 177 *Arithm.*). Igitur & disci, quantumlibet exiguæ crassitiei, in eadem a basi distantia inter se æquantur. Quoniam itaque, ob æquales altitudines per *hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt quot ex altera; pyramis una alteri æqualis sit necesse est (§. 88 *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 468). Cum adeo circuli isti æquales sint (§. 171); eodem quo ante modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

543. *Prisma triangulare in tres Pyramides æquales dividi potest.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 167. Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 456), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498), atque bases ACB & DFE æquales (§. 457). Sunt ergo æquales (§. 542). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 457), $\triangle CFB = \triangle BFE$ (§. 337) Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem in A habent; ab eodem vero puncto sublimi A ad idem planum BEFC non nisi unica perpendicularis duci potest (§. 489); pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent; consequenter æquales sunt (§. 542). Quamobrem tres istæ

pyramides inter se æquantur (§. 87 *Arithm.*) *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

544. *Si ex ligno paretur prisma & debita ratione secetur; demonstratio captui tyronum magis accommodatur. Immo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi potest.*

COROLLARIUM I.

545. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM II.

546. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest; quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 187 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

547. Quia Conus pro pyramide infinitangula haberi potest, & Cylindrus pro prismate infinitangulo; Conus pars tertia est Cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XIX.

548. *Metiri superficiem ac soliditatem Pyramidis & Coni.*

RESOLUTIO.

Quæratu soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin habentis (§. 539, 541), inventaque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel cono (§. 546, 547).

Ex. gr. Si soliditas prismatis fuerit 67010328'', ut in Probl. 17 (§. 539); erit soliditas pyramidis 22336776''. Si soliditas cylindri fuerit 605592960'' ut in Probl. 18 (§. 541); erit soliditas cono 201864320''.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ investigentur (§. 392), atque in unam summam colligantur.

Bb 2

Coni

Tab. IX. Fig. 146.

Coni denique recti superficies pro-
dit, periphæria bascos in latus ejus di-
midium ducta (§. 519), & basi, qui
circulus est, eidem addita.

Tab. IX. Ex. gr. Sit diameter coni NM = 56';
erit periphæria 17584'', basi 246176'' (§.
Fig. 429). Sit altitudo KL = 246'. Quoniam
144. LM = $\frac{1}{2}$ NM = 28' & KM² = KL² + LM²
= 60516 + 784 = 61300 (§. 417); erit
KM = 2475'' (§. 269 *Arithm.*), consequen-
ter superficies coni, seclusa basi, 2176020''
& hinc integra 2422196''.

PROBLEMA XX.

Tab. X. 549. Metiri superficiem ac solidita-
tem Coni truncati: datis ejus altitudine
Fig. CH & diametris basium AB & CD.
168. n. i.

RESOLUTIO.

1. Datis diametris basium CD & AB
inveniantur periphæriæ (§. 429).
2. Ad quadratum altitudinis CH ad-
datur quadratum differentiæ ra-
diorum AH, & ex aggregato extra-
hatur radix (§. 269 *Arithm.*), ut
habeatur latus AC. (§. 417).
3. Semisumma periphæriarum multi-
plicetur per latus AC.

Productum erit superficies coni truncati.

Sit ex. gr. AB = 8', CD = 6', CH = 10',
erit AH = 1/.

$$\begin{array}{r} 100 - 314 - 8' \\ \hline 8 \end{array}$$

$$2512''' \text{ periph. maj.}$$

$$CH^2 = 100'$$

$$AH^2 = 1$$

$$AC^2 = 101$$

Ergo AC = 1005''' fere,

$$\begin{array}{r} 100 - 314 - 6' \\ \hline 6 \end{array}$$

$$1884''' \text{ Periph. min.}$$

$$\begin{array}{r} 2512 \text{ Periph. maj.} \\ 1884 \text{ min.} \\ \hline \end{array}$$

$$4396 \text{ Summa.}$$

$$\begin{array}{r} 2198 \text{ Semisumma.} \\ 1005 \text{ AC} \\ \hline \end{array}$$

$$10990$$

$$219800$$

$$2020'89''90''' \text{ Superfic. coni trunc.}$$

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris ECD a superficie majoris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis HI periphæria diametro CD descripta, altitudo MK, latus EC; superficies majoris vero triangulo, cujus basis NO periphæria diametro AB descripta, altitudo ML, latus AE (§. 519). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie coni truncati trapezium parallelarum basium HION, cujus quidem bases HI & NO periphæriis diametris CD atque AB descriptis æquales sunt, altitudo KL vero latus AC existit. Habetur igitur superficies coni truncati semisumma dictarum periphæriarum in AC ducta (§. 400).
Q. e. d.

II. Demissa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam sit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (§. 467), erunt CH & EF parallelæ (§. 492). Quamobrem cum triangulum EAF secet duo plana parallela CD & AB, per *hypoth.* erunt semidiametri CG & AF parallelæ (§. 499); conse-

Tab. X.
Fig. 168.
n. 1.
n. 2.

consequenter $CG = HF$ (§. 226), & $CH = FG$ (§. 238). Soliditatem adeo conii truncati inventurus.

1. Inferat (§. 268): ut differentia semidiametrorum AH ad altitudinem conii truncati CH, ita semidiameter major AF ad altitudinem conii integri FE, per Probl. 33 Arithm. (§. 302 Arithm.) inveniendam.
2. Ex hac inventa subducatur altitudinem conii truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat soliditatem conorum CED & AEB (§. 548).
4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas conii truncati ACDB.

Ex. gr. Sint omnia, ut ante: erit $FE = 40'$, & hinc $EG = 30'$.

Periph. major 2512''

$\frac{1}{4}$ AB	200
<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>	
Basis maj. EF	502400
	4000
	<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
	2009600000
	<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
3	
Conus AEB	669866666 $\frac{2}{3}$
Periph. min. $\frac{1}{4}$ CD	1884''
	1 $\frac{1}{2}$ 00
	<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
	94200
	1884
Bas. min. $\frac{1}{3}$ EG	<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
	282600
	1000
	<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
Con. CED	282600000
Con. AEB	669866666 $\frac{2}{3}$
Con. trunc.	<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>
	387266666 $\frac{2}{3}$

THEOREMA XXVII.

550. Sphæra æquatur pyramidi cujus basis æqualis superficiæ, altitudo autem radio sphære.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphære in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius dissident, & ex centro concipiuntur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quarum altitudines a radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumptæ superficiæ sphære æquantur. Tota igitur sphæra recte habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphære. Q. c. d.

THEOREMA XXVIII.

551. Sphæra est ad Cylindrum super æquali basi & ejusdem altitudinis ut 2 ad 3.

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur, quadratum quidem cylindrum (§. 465), quadrans hemisphærium (§. 470), triangulum conum (§. 467) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit nempe DC (§. 227); si ea in discos quantumlibet exiguæ crassitie secentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci cylindri; erit EG semidiameter disci respondentis in hemisphærio, EF semidiameter disci in cono. Cum vero hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 131); erunt ipsi inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408), hoc est, cum sit, ob parallelismum EH & CB, per hypoth. $EH = CB$ (§. 238) = CG (§. 40), atque ob $CD : DA = CE : EF$ (§. 268) & $CD = DA$ (§. 98), $EC = EF$, ut quadrata

Tab. X. Fig. 169.

B b 3

recta-

rectarum CG, EG & EC. Quare si discum conii a disco cylindri subtrahas, relinquitur discus sphaeræ (§ 417). Idem cum valeat de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus, soliditas sphaeræ relinquetur soliditate conii ex soliditate cylindri subducta. Est vero conus triens cylindri (§ 547). Ergo sphaera duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

552. *Cubus diametri est ad Sphaeram propemodum ut 300 ad 157.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter sphaeræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 531) & cylindrus eandem cum sphaera basin & altitudinem habens 785000 (§. 541); consequenter sphaera 1570000 : 3. (§. 551). Est itaque cubus diametri ad sphaeram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc est, ut 300 ad 157 (§. 181, 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

553. *Dico cubum diametri esse ad sphaeram propemodum ut 300 ad 157. In Demonstratione enim assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam 100 : 314 (§. 426).*

THEOREMA XXX.

554. *Superficies Sphaerae est quadrupla circuli radio Sphaerae descripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphaera æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitudo radius sphaeræ (§. 550); superficies ejus habetur, si soliditas per tertiam semidiametri aut sextam diametri partem dividitur (§. 548). Est vero soliditas sphaeræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 551, 541). Quare si hoc

factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividatur, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphaeræ descripti, (§. 210 *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208, 210 *Arithm.*); erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243 *Arithm.*), hoc est quadruplus circuli maximi (§. 223 *Arithm.*). Sed idem est superficies sphaeræ, *per demonstrata.* Ergo sphaeræ superficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphaeræ habetur, peripheria in diametrum ducta; consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis peripheria circuli radio sphaeræ descripti, altitudo diameter sphaeræ (§. 375).

PROBLEMA XXI.

556. *Data diametro Sphaerae, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quærat peripheria circuli radio sphaeræ describendi (§. 429).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphaeræ (§. 555).
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphaeræ soliditas (§. 550, 548).

Ex. gr. Sit diameter 5600^{!!!}, erit

Periph. Circuli 17584^{!!!}

Diam. 5600

10550400

87920

Superf. sphaer. 98470400^{!!!}

Superf.

Superf. Sphær.	984704 ¹¹ 00
Diamet.	560 ¹¹
	<hr/>
	59082240
	4923520
	<hr/>
	551434240

4
~~8888888888~~ (91905706²/₃ Sol. Sphær.
~~8888888888~~

Aliter.

1. Quærat^r cubus diametri 175616000" (§. 531).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000" numerus quartus proportionalis 91905706²/₃ (§. 302 *Aritm.*), qui erit soliditas sphaeræ (§. 552).

SCHOLIION.

557. Segmenta sphaeræ ac sectores inferius in *Analyfi* facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.

PROBLEMA XXII.

558. Metiri soliditatem ac superficiem quinque Corporum regularium.

RESOLUTIO.

Cubi soliditas investigatur per Probl. 15 (§. 539). Tetraëd^rum cum sit pyramis, & Octaëd^rum pyramis geminata, Icosaëd^rum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaëd^rum ex duodecim quinquangularibus constet, quarum bases in superficie Icosaëdri & Dodecaëdri sunt, vertices in centro coeunt (§. 472. 475); horum corporum soliditas habetur per Probl. 19 (§. 548). Superficies eorundem prodit, si arca figuræ unius ex terminantibus ipsa quærat^r (§. 392 & 402) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe

pro tetraëd^ro per 4, pro hexaëd^ro seu cubo per 6, pro octaëd^ro per 8, pro dodecaëd^ro per 12, pro ico^ssaëd^ro per 20 (§. 475).

PROBLEMA XXIII.

559. Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire. Tab. X. Fig. 17^o.

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo, eique aqua aut arena superfundatur, & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur de novo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis ECGF, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per Probl. 16 (§. 536). Sit ex. gr. AB 8', AC 5', erit BC 3'. Sit porro DB 12', BE 4'; erit soliditas corporis 144'.

SCHOLIION I.

560. Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, ex. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.

COROLLARIUM.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, metallum, aut materia aliqua quæcunque pendens libram unam.

SCHOLIION II.

562. Hinc in usus futuros construi potest Tabula gravitatem diversorum corporum ostendens secundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydrostaticas aliis

aliis adhuc modis fieri potest, uti suo loco ostendetur.

PROBLEMA XXIV.

563. Invenire soliditatem corporis cavi.

RESOLUTIO.

Casus I. Si corpus cavum in numero geometricorum non contineatur, resolutio eadem, quæ Problematis præcedentis (§. 559).

Casus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, prisma, cylindrus, sphaera, pyramis, vel conus; soliditas primum totius corporis cavitate inclu-

fa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas (§. 536, 539, 541, 548, 556) inveniatur: hac enim ex ista subducta, relinquitur soliditas corporis cavi.

Sit ex. gr. soliditas cylindri cavi ABCD invenienda, sitque diameter totius corporis AB 56⁹, longitudo AC 2^o 4¹ 6¹¹, erit soliditas cylindri inclusa cavitate 605' 592¹¹ 960¹¹¹. Sit diameter cavitatis 500¹¹; erit soliditas 482' 775¹¹ 000¹¹¹: quæ ex supra inventa subducta relinquit soliditatem corporis cavi 122' 817¹¹ 960¹¹¹.

Tab.
X.
Fig.
171.

CAPUT V.

De Similitudine ac Ratione Solidorum.

THEOREMA XXXI.

564. Corpora similia sunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & similia existunt.

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concursu gigni posse concipiamus; eodem modo determinantur, si plana terminantia & numero æqualia fuerint & similia (§. 119). Sunt igitur & ipsa similia (§. 120). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

565. Cum in planis similibus anguli homologici sint æquales (§. 175), anguli vero solidi homologici ex concursu planorum homologorum (§. 446) & in corporibus similibus multitudine æqualium orientur (§. 564); in corporibus similibus anguli solidi homologici æquales sunt (§. 449).

COROLLARIUM II.

566. Quoniam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia (§. 175); si ex. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud simile *abdcebgf* (quod in Tabula non expressimus) poni imagine-mur, erit $AB : BD = ab : bd$, & $DB : BG = db : bg$. Quamobrem ex æquo $AB : BG = ab : bg$ (§. 194 *Arithm.*). Cum adeo fit $AB : ab = BD : bd$, & $AB : ab = BG : bg$ (§. 173 *Arithm.*); corporum similibus longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione existunt.

Tab.
X.
Fig.
165.

COROLLARIUM III.

567. Cubus sex quadratis æqualibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia similia (§. 98, 175). Ergo cubi omnes sunt similes (§. 564).

COROLLARIUM IV.

568. Quoniam corpora regularia planis regu-

regularibus, adeoque similibus (§. 106, 175) & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 475) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564).

COROLLARIUM V.

569. Omnia igitur Tetraëdra, omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icosaëdra similia sunt (§. 475).

THEOREMA XXXII.

570. *Cylindrorum & Conorum similiarum altitudines sunt ut radii basium; axes sunt itidem ut radii basium & iis sub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Si coni & cylindri similes sunt, ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 24 *Arith.*). Fig. 143. Patet vero conos & cylindros non posse Tab. IX. distingui, nisi per rationem axis CF vel Fig. 144. KL ad diametrum basis DE vel NM, atque angulum CFE vel KLM, quem efficit axis cum diametro (§. 465, 467). Axes igitur in conis & cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent, & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistant. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis, perinde ac in planis (§. 227), altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in conis & cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465, 467), adeoque patet. *per demonstrata*, altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eisdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

axibus (§. 267), consequenter etiam diametris basium (§. 167 *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXIII.

571. *Omnis Sphæra est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione Theorematis I Part. I (§. 135). Sed sphæra describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 470): omnes igitur sphærae eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similes sunt (§. 120). *Q. e. d.*

Tab. IX. Fig. 145.

THEOREMA XXXIV.

572. *Omnia Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides & Coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536, 539, 541, 548, *Geom.* & §. 178 *Arithm.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

573. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum, si altitudines, basium rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

574. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 465, 467). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409). Ergo cylindri & coni quicumque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572); & si fuerint æque alti, sunt ut quadrata diametrorum (§. 573).

C c

COROL-

COROLLARIUM III.

575. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 159 *Arithm.*).

PROBLEMA XXV.

576. *Invenire Cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, æqualem; vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, ex. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Ex ea, vel ejus multiplo aut submultiplo desiderato, ex. gr. triplo aut subquadruplo, extrahatur radix cubica (§. 282 *Arithm.*), quæ erit latus cubi desiderati (§. 531 *Geom.* & §. 248 *Arithm.*).

Ex. gr. Sit soliditas cylindri $107^{\circ} 171' 875''$ reperietur latus cubi æqualis $4^{\circ} 7' 5''$.

PROBLEMA XXVI.

577. *Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest; invenire dimensiones alterius ipsi æqualis dati generis & altitudinis vel baseos data.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & cylindris (§. 536, 539, 541 *Geom.* & §. 210 *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 *Geom.* & §. *cit.* *Arithm.*).
3. Si altitudo detur, soliditas corporis

inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. *cit.*)

4. Pro parallelepipedis & prismatis triangularibus & quadrangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387, 392, 402, 456, 462), quorum alteruter pro basi triangularis prismatis per 2 multiplicanda (§. 392); & insuper pro multangularis basi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402).
5. Pro cylindro & cono ex basi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 434).

Ex. gr. Sit soliditas alicujus corporis $3^{\circ} 45' 6'' 978''$. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo $2^{\circ} 4' 6''$. Reperietur basis $1^{\circ} 40' 53''$ fere; diameter $134''$.

THEOREMA XXXV.

578. *Corpora similia, Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides, atque Coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 572). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406, 409) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 566). Ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, existunt (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XXXVI.

579. *Sphæra sunt ut Cubi diametro- rum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig.* Sit circulo DAEB quadratum GFH circumscriptum (§. 351). Quodsi semicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille sphæram, hoc cylindrum describet, cujus altitudo AB diametro basis IH æqualis (§. 470, 465). Quare si ponamus circulum adhuc alium cum quadrato similiter circumscripto; quoniam ex Theorematis I Part. I. demonstratione constat (§. 135), omnem semicirculum esse alteri similem, & AB ad BH utrobique est ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri simile (§. 175); inde generabitur sphæra & cylindrus alteri similis (§. 119, 120). Cum adeo ea utrobique coincident, per quæ a se invicem distingui debebat, quod in utroque casu gignitur (§. 24 *Arithm.*); erit cylindrus unus ad suam sphæram ut alter ad suam sphæram (§. 132 *Arithm.*); consequenter sphæra sunt inter se ut isti cylindri (§. 173 *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575), hoc est, ut cubi earundem existunt (§. 259 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

580. *Æqualia Parallelepipedæ, Prismata, Cylindri, Coni & Pyramides reciprocant bases & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex basibus in altitudinem æqualia sunt (§. 536, &c.). Quamobrem altitudo corporis A est ad altitudinem alterius B uti reciproce basis ipsius B ad basin ipsius A (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

581. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis est diametro baseos, est ad Cubum diametri ut 785 ad 1000.*

Tab. X. Fig. 172. n. 1.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit basis 7850 (§. 429). Et quoniam altitudo DC = AB, per *hypoth.* soliditas cylindri 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT VI.

De Stereometria Doliorum.

PROBLEMA XXVII.

582. **V**irgulam construere, cujus ope
haud difficulter invenitur nu-
merus mensurarum fluidi alicujus, ex.
gr. vini, cerevisiæ, &c. in vase cylin-
drico contenti.

RESOLUTIO.

- Tab. X. Fig. 172. Tab. I. 2.
1. Diameter vasis cylindrici ABDE, uni mensuræ qua ad fluida mensuranda utimur æqualis, AB jungatur lineæ indefinitæ A 7 ad angulos rectos (§. 249).
 2. Ex A transferatur in I recta AI rectæ AB æqualis; erit BI diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.
 3. Fiat $A_2 = BI$, erit B₂ diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. Eodem modoveniuntur diametri vasorum capaciorum A₃, A₄, A₅, A₆, A₇ &c.
 4. In unum virgulæ latus transferantur divisiones inventæ AI, A₂, A₃, A₄ &c. in alterum vero altitudo cylindri uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

Aliter.

Diametri A₂, A₃, A₄, A₅, A₆, A₇, &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri AB per modum Scalæ geometricæ divisæ (§. 277) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter AB=1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269 *Aritbm.*) erit A₂. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A₃, A₄, A₅ &c. quem in usum constructa est Tabula sequens: Tab. X. Fig. 172.

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 172. Cylindri eandem altitudinem habentes sunt inter se ut quadrata diametrorum (§. 574). Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram nonnisi unam capientis. Quare si inde radices extrahantur, habebuntur in resolutione altera diametri ipsæ (§. 246 *Arithm.*). Quoniam vero in prima $AB = A_1$, erit ipsius B_1 quadratum duplum, quadratum ipsius B_2 triplum, quadratum ipsius B_3 quadruplum &c. quadrati ipsius A_1 (§. 417). Unde denuo patet esse rectas A_2, A_3, A_4 &c. diametros vasorum quæsitæ. Quodsi itaque has divisiones ad diametrum vasis cylindrici applices; illico constabit, quot mensuras capiat vas cylindricum eandem cum isto basin, sed altitudinem illius habens, quod unam mensuram capit. Quare si porro, ope alterius divisionis in virgula factæ, investiges quoties altitudo unius mensuræ in altitudine vasis dati contineatur, & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus mensurarum cavitatem vasis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

583. Ex. gr. Sit diameter vasis cylindrici 8, altitudo 12; erit numerus mensurarum, quas capit 96.

SCHOLION II.

584. Altitudo cylindri mensuram unam capientis quo minor assumitur, eo diameter basis fit major. Unde tam ipsa, quam dia-

metri cylindrorum plures mensuras capientium postea facilius in suas minutias subdividuntur. BAYERUS (a) suadet, ut altitudo nonnisi unius digiti assumatur.

SCHOLION III.

585. Inveniuntur autem diametri vasorum unam vel plures partes decimas mensuræ capientium, si decima vel plures decimæ partes vasis unam mensuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur basis cylindri circularis (§. 541): etenim hac data diameter habetur per Probl. 58 (§. 434). Eodem modo inveniuntur diametri pro scrupulis vasorum duas & plures mensuras capientium.

SCHOLION IV.

586. Quodsi altitudo vasis constanter eadem retineatur, diametri pro mensuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit ex. gr. diameter unius mensuræ 1 seu 1000 partium decimalium; erit ejus quadratum 1000000: cujus pars decima 100000. Inde extracta radix quadrata 316 continet partes decimales diametri unius mensuræ, quæ conveniunt diametro cylindri decimam mensuræ partem continentis, ejusdem tamen cum cylindro integram mensuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ, nempe 200000, radix extrahatur; prodit diameter basis duas decimas unius mensuræ capientis 447, & ita porro. Quodsi quadrato diametri unius mensuræ 1000000 adjicias partem decimam 100000 & ex summa extrahas radicem quadratam 1.049; erit ea diameter vasis, quæ capit $1\frac{1}{10}$ mensuræ. Ratio patet per Demonstrationem Problematis præsentis. Atque sic patet, quomodo Virgula pitbometrica accuratius construi possit, ut intervalla inter mensuras integras subdividantur in partes decimales.

(a) In der vollkommenen Visier-Kunst, c. 25. p. 126.

Diametri pro mensuris integris & earum partibus decimalibus.

		3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
0.1	316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.489	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.509	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

SCHOLIUM V.

587. Ceterum me non monente patet, cylindrorum mensuram hic constitui cylindrum, quemadmodum supra solidorum omnium mensura assumtus est cubus. Unde & Virgula pithometrica sic constructa Virga cylindrica appellatur. Similiter hic circularum mensura constituitur circulus, sicuti supra omnium superficierum mensura quadratum.

PROBLEMA XXVIII.

588. Invenire soliditatem Dolii, hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.

RESOLUTIO.

1. Virga pithometrica vi Probl. præc. (S. 582) decenter applicata, exploretur tam longitudo Dolii AC, quam utraque diameter GH & AB.
2. Cum, experientia non invita, rigore licet geometrico repugnante, Dolium pro cylindro habeatur, cujus basis inter fundum & ventrem Dolii media æquidifferens; inter AB & GH quærat numerus medius æquidifferens (S. 330 *Arithm.*), qui Diameter æquata dici solet.
3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem Dolii AC, erit factum, vi demonstrationis Problem. præced. (S. 582) numerus mensurarum, quas capit Dolium.

Sit ex. gr. AB = 8	AC = 15
GH = 12	$\frac{1}{2}(AB + GH) = 10$
erit AB + GH = 20	capac. dolii 150
$\frac{1}{2}(AB + GH) = 10.$	mens.

SCHOLIUM I.

589. Quodsi contingat, fundum non esse perfecte circulare, sed unam diametrum esse altera longiorem; utramque diametrum metiri & earum semisummam pro diametro circuli fundo Dolii equalis assumere solent.

SCHOLIUM II.

590. Tabula, ex quibus inter se coassatis Dolia construi solent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur Dolii non assumenda est recta FE, sed AC, que habetur, si quantitas prominentiæ tabularum, una

Tab.
X.
Fig.
173.

Tab.
X.
Fig.
173.

una cum ejus dimidio cui fundi crassities equalis supponitur, a recta FE utrinque subtrahitur. Solent autem quantitates subtrahendas creta notare utrinque in ipsa superficie Doli, ex. gr. in K, si quantitas subtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem Virgulam parant, in partes minutas aequales divisam.

SCHOLIUM III.

591. Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema crassis & orbibus ligneis pariter crassis Dolium construunt: quæ fraus non facile detegitur.

SCHOLIUM IV.

592. Possemus equidem soliditatem cavitatis Doli eodem modo explorare, quo supra corpora cava metiri docuimus (§. 563): si enim per soliditatem unius mensuræ divideretur, prodiret Doli capacitatis. Enimvero prolixitas calculi obstat, quo minus ea methodo utantur.

SCHOLIUM V.

593. Prostat etiam methodus, qua sine ullo calculo capacitatis Doli invenitur. Utuntur ea in Batavia & variis Germaniæ locis. Sed cum supponat, omnia Dolia esse inter se similia & longitudinem duplam diametri æquata, hoc est, semisummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur. KEPLERUS (a) illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas mensorum in se continet. Virga enim, inquit, introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, circulorum qui vincula sunt, viminumque quibus circuli lignei stringuntur. Eliminat excessum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia mensurandi una eademque opera præstare nulla potest. Unde ad privatorum securitatem fraudesque eliminandas suadet, ut lex illa Doli construendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum, magistratum autoritate diligentiaque conservetur, pœnisque & proscriptio vasorum, quæ hanc figuram non

(a) In *Stereometria doliiorum vinariorum*, Part. 3. art. 3. f. n. 3.

habent, vindicetur. Ea nimirum proportio in Doliis Austriacis observatur.

SCHOLIUM VI.

594. Sunt, qui assumunt, Dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus soliditatem per Probl. 20 (§. 549) quarunt. Alii cum aliis corporibus geometricis id comparant. CLAVIUS (b) alia pro duobus conis truncatis, alia pro frusto spheroidis Archimedææ habet, quoad prius consentiente, quoad posterius vero contradicente KEPLERO (c). CLAVIUS tamen assentitur OUGHTREDUS, eumque in finem regulam a se inventam proposuit (d). WALLISIUS pro frusto fusi parabolici habet (e). Enimvero cum methodus proposita praxi satis respondeat, reliquæ vero quæ ab Anglis potissimum proponuntur (f), utut ex profundiori Geometria derivata, molestiores sint, nec ex Elementis Geometriæ demonstrari possint; illa contenti esse possumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ mensoria a KEPLERO tantopere deprecata fabrica.

PROBLEMA XXIX.

595. Construere Virgulam pithometricam, qua sine calculo capacitatem Doli explorare licet.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum vasa pro quibus Virga hæc paratur, esse debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB, si fiat ut 785 ad 1000 ita soliditas unius mensuræ ad numerum quartum proportionalem, per Probl. 33 (§. 302 *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam mensuram capientis (§. 581).
2. In-

Tab.
X.
Fig.
172.
n. I.

(b) *Geom. præc.* lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145.

(c) In *Stereometria* part. 2. fol. H. 3.

(d) In *Clave mathematica* c. 19. p. m. 103.

(e) In *Algebra* c. 81. Vol. II. Oper. f. 350.

(f) Vid. *The general Gauger* by Mr. DOWGHARTY p. 141 & seqq.

Tab.
X.
Fig.
172.
n. 1.

2. Inde ergo si extrahitur radix cubica (§. 282 *Arithm.*); prodibit diameter vasis cylindrici mensuram unam capientis.
3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem, & diagonalis BE assumatur pro indice capacitatis, *per hypoth.* si ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269 *Arith.*); prodibit index vasis BE mensuram unam capientis (§. 417).
4. Ut porro inveniantur diagonales similium vasorum, quæ capiunt mensuras duas, tres, quatuor &c. tenendum est, ea esse ut cubos diametrorum (§. 578), consequenter etiam, ob similitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183), ut cubos diagonalium (§. *cit.* & §. 260 *Arithm.*). Quare si diagonalis vasis unam mensuram capientis concipiatur in 1000 partes divisa, & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000, quadruplo 4000000000, &c. extrahantur radices cubicæ (§. 282 *Arithm.*); prodibunt diagonales vasorum, quæ duas, tres, quatuor, &c. mensuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in Virgulam, & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277): ita enim ex parata hac Scala particulas millesimas diagonalibus reliquis competentes in Virgulam transferre licet.

Quoniam itaque Dolium in præsentem casu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis est semisumma dia-

metrorum orbis AB & ventris GH, est- que $FB = \frac{1}{2}(AB + GH)$, adeoque GB diagonalis in cylindro, cujus diameter semisumma diametrorum AB & GH; capacitas ejus statim innotescit, si per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.*

SCHOLIUM I.

596. *Constructioni Virgula itaque inseruit Tabula sequens.*

Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

SCHOLIUM II.

597. *Virgula hæc cubica appellari solet, quemadmodum præcedens cylindrica. Et facile ad alia Dolia similia construitur, in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.*

PRO-

Tab.
X.
Fig.
173.

PROBLEMA XXX.

598. *Virgampithometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur Dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, & numerus mensurarum ex. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.
2. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, Virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum Dolii attingat.
3. Ea quantitate fluidi ex Dolio emissa, quæ numero mensurarum per divisionem paulo ante n. 1. invento respondet, in Virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.
4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi in Dolio contenti respondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una Virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas, ex. gr. in 200 aut plures. Ita Virga pro Dolio non pleno metiendo constructa est.

Tab. IV. Fig. 81.

SCHOLIUM.

599. *Quodsi in usum domesticum pro eodem Dolio istiusmodi Virgulam parare volueris, sufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus est faciei alterius in partes æquales divisione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex Dolio emissa respondent, ex. gr. si integrum Dolium capiat 64 mensuras & una effluerit, in fine decrementi altitudinis scribitur 63.*

PROBLEMA XXXI.

600. *Determinare quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur capacitas totius Dolii per *Probl. 28* (§. 588).
2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in una Dolii parte altius sit, quam in altera, Virga per Problema præcedens (§. 598) parata per orificium Dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.
3. Ea rursus extracta, notetur quot partes in facie æqualium vino madidæ sint.
4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera Virgulæ facie profunditati totius Dolii GH respondentium ad numerum similium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem per *Probl. 33 Arithm.* (§. 302) inveniendum.

Tab. X. Fig. 173.

Tab. X. Fig. 173. 5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in Virga, quot numerus inventus exprimit, & transferatur in Scalam scrupulorum vigesimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipsi congruunt.

6. Per hunc dividatur numerus mensurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus mensurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere potest. *Q. e. i.*

Ex. gr. fit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro scrupulorum vigesimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique Dolii 128 mensurarum.

$$\begin{array}{r} \text{Fiat: } 160 - 58 - 120 \quad \text{r2} \\ 40) \quad 4 \quad \underline{3} \quad 3 \quad \text{r7*} \quad (43\frac{1}{4} \\ \quad \quad \quad 174 \quad \quad \quad \text{**} \end{array}$$

Ponamus partibus $43\frac{1}{2}$ æqualibus respondere in Scala inæqualium $\frac{4}{20}$ sive $\frac{1}{5}$. Quodsi

itaque 128 per 5 dividas, quotus $25\frac{3}{5}$ numerum mensurarum indicabit, quas fluidum in Dolio contentum replere potest.

SCHOLI ON.

601. Si Dolia omnia essent similia per methodum propositam satis accurate inveniretur quantitas fluidi in Dolio non pleno: sed in dissimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa est methodus, & rigori geometrico satisfaciens & praxi respondens. Quam enim KEPLERUS dedit (a), ea nec demonstrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipsi satisfacit. Et quamvis aliam postea eidem substituerit (b): satis tamen intricata est. Intricatiores adhuc sunt, quas BAYERUS (c) & DOUGHARTY (d) tradunt.

(a) In Stereometria Doliorum, f. O. 2. b.

(b) In dem Auszuge der ubralten Messe - Kunst ARCHIMEDIS S. 88. f. 95.

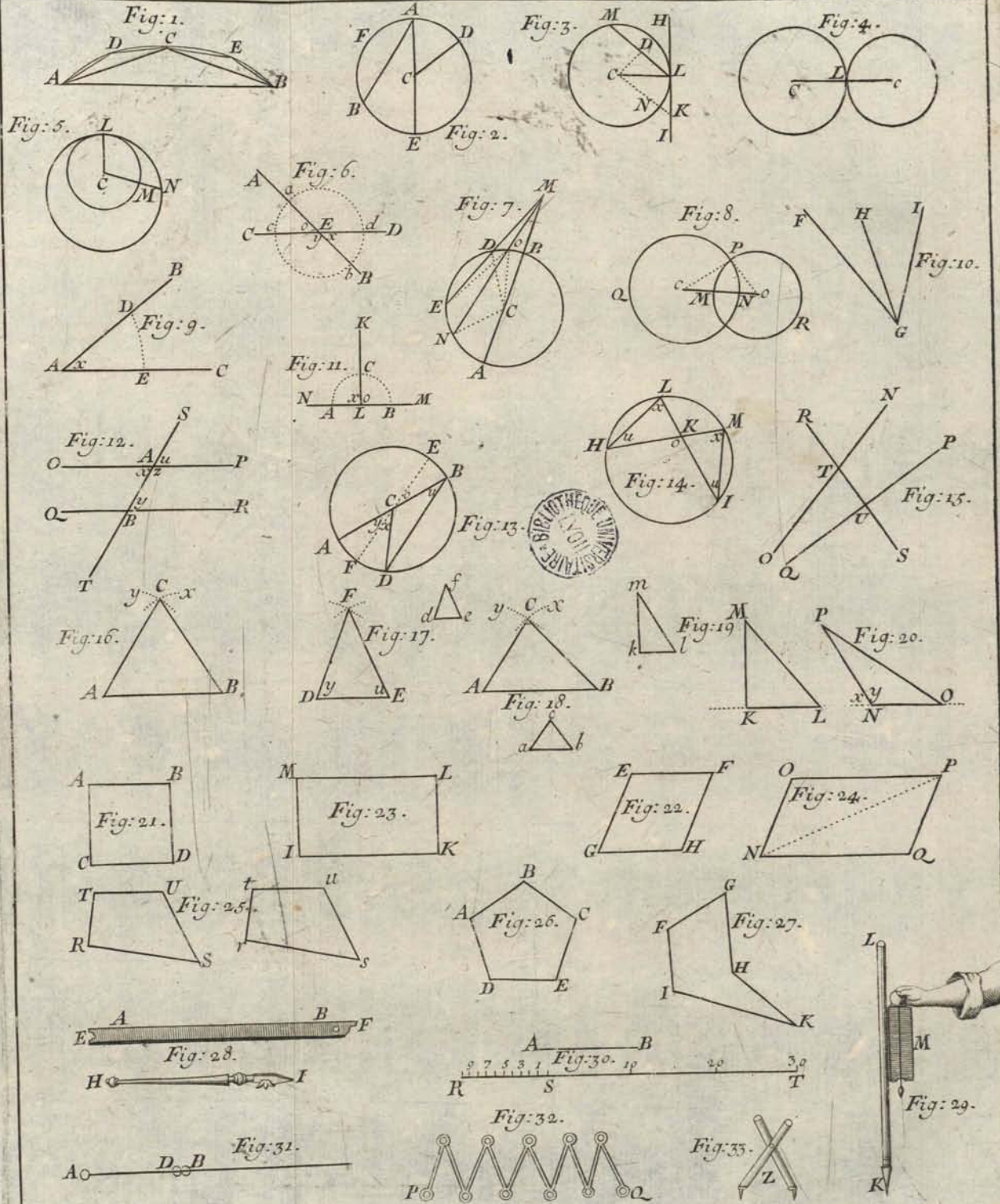
(c) In Conometria Mauritanica c. 9. p. 102. & seqq.

(d) The General Gauger p. 164. & seqq.

Finis Elementorum Geometriae.



Fig: Geom: Tab: I.



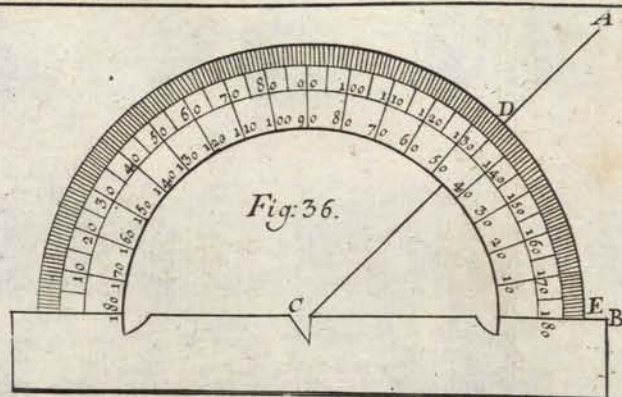
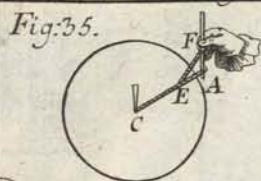
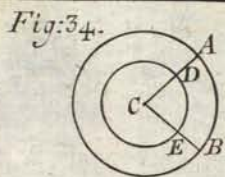


Fig: 37.

Fig: 36.

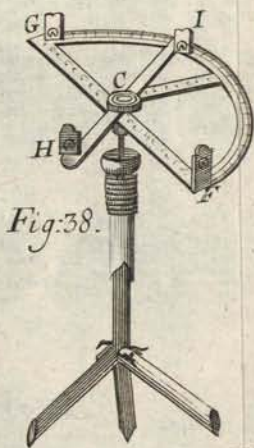


Fig: 38.

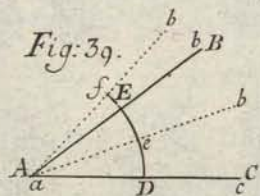


Fig: 39.

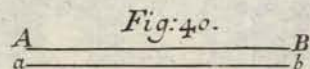


Fig: 40.

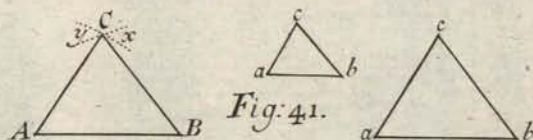


Fig: 41.

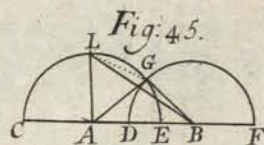


Fig: 45.

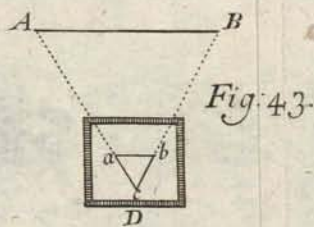


Fig: 43.

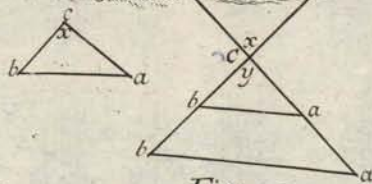


Fig: 42.

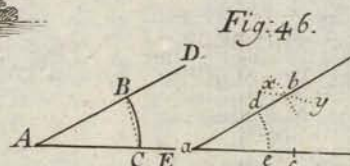


Fig: 46.

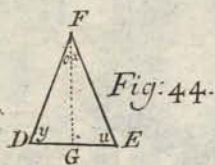


Fig: 44.

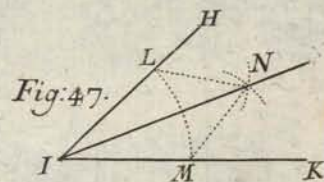


Fig: 47.



Fig: 52.

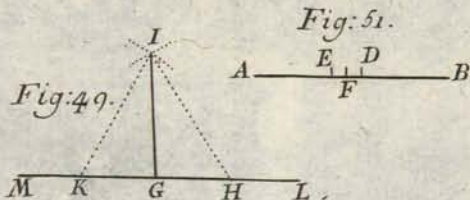


Fig: 49.

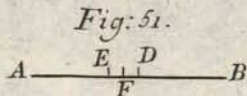


Fig: 51.

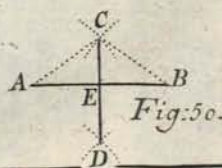


Fig: 50.

Fig. Geom. Tab. III.

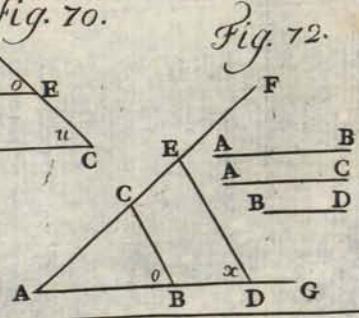
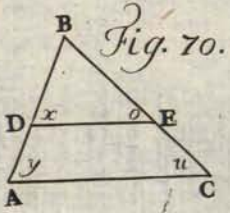
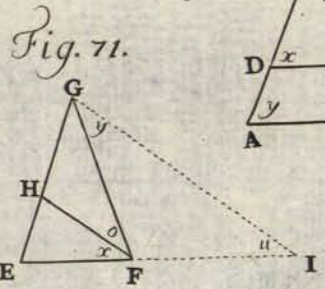
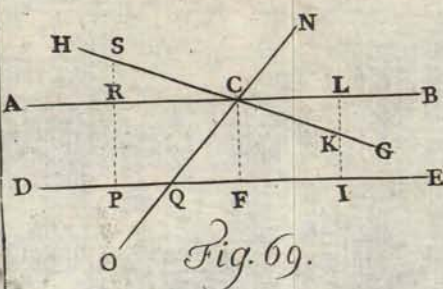
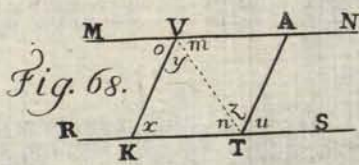
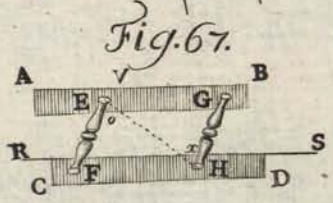
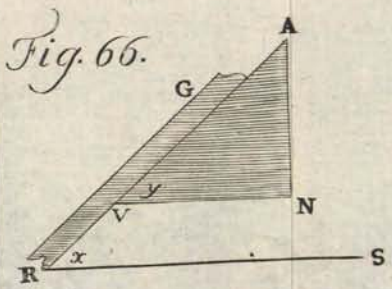
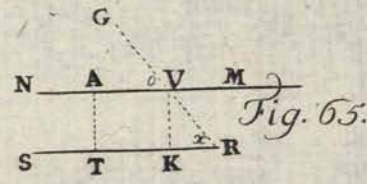
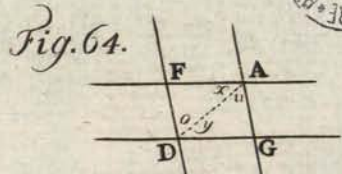
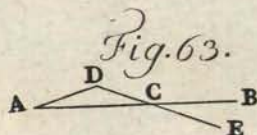
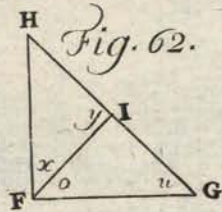
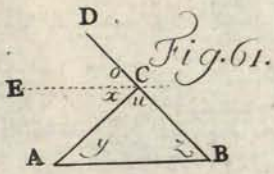
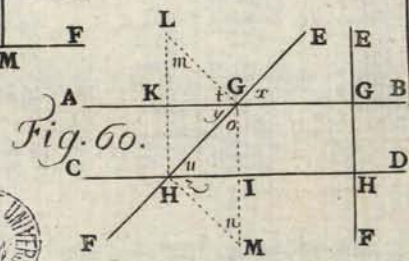
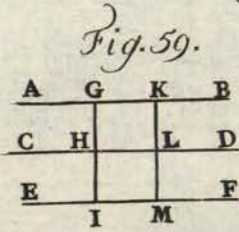
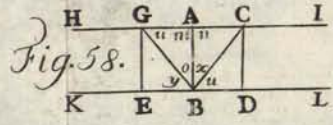
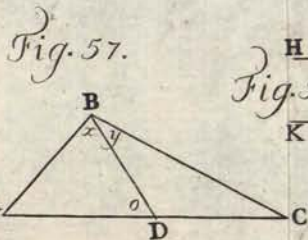
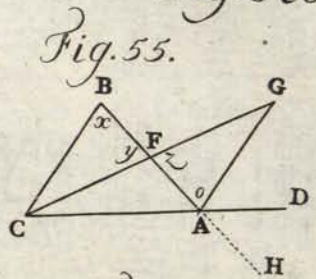
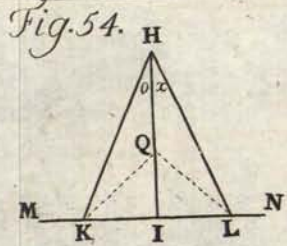
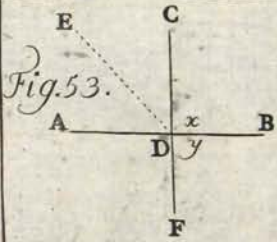
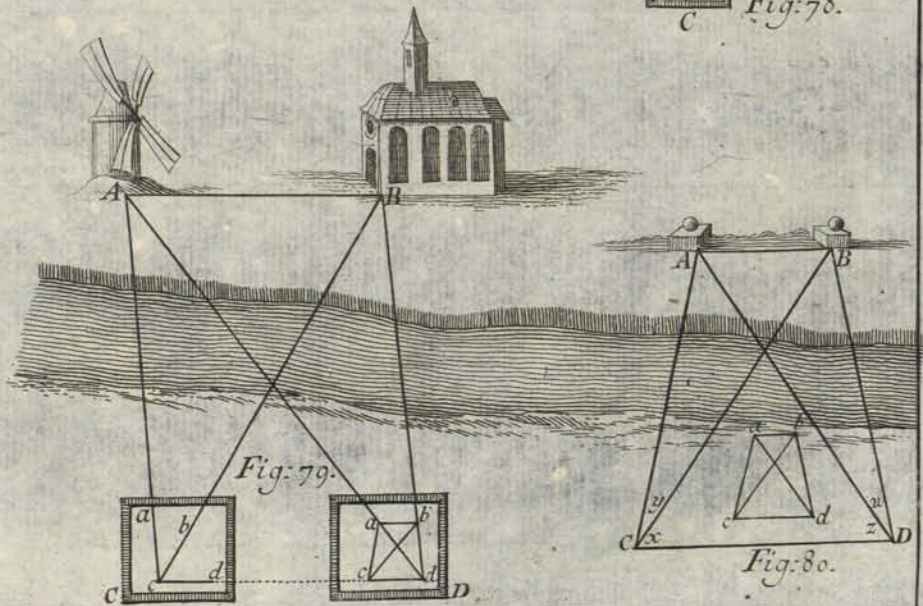
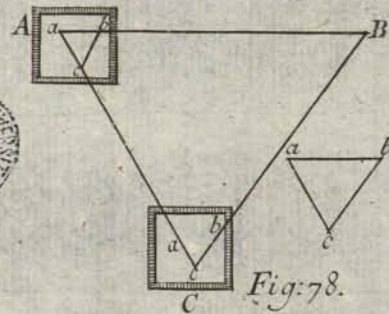
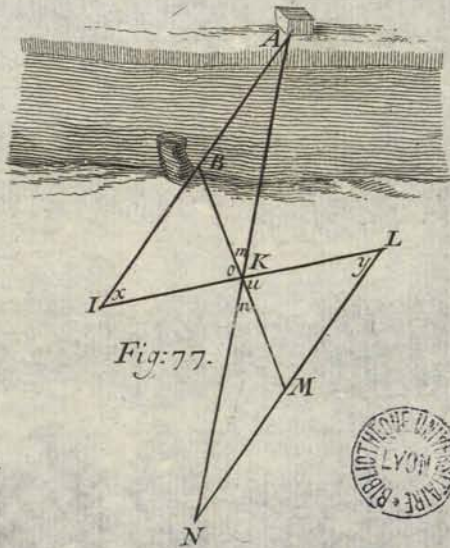
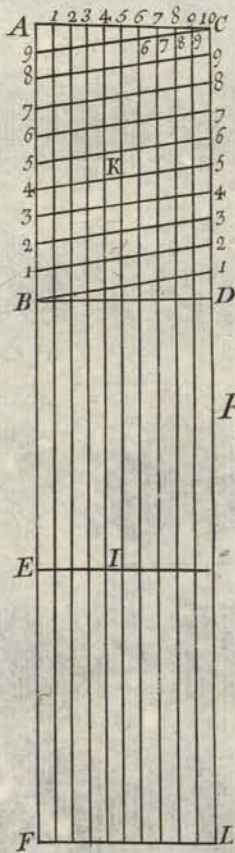
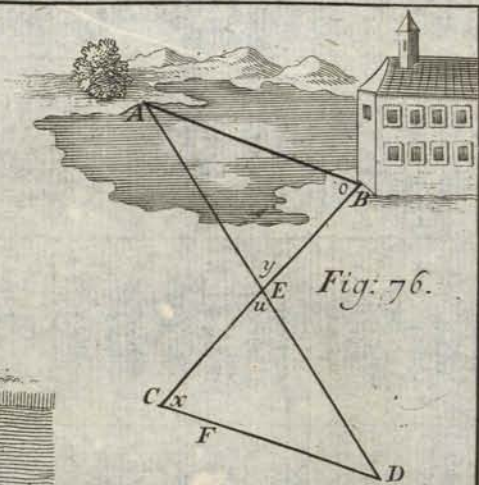
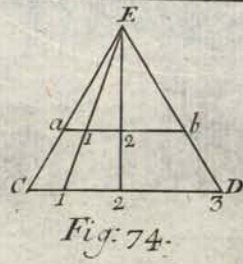
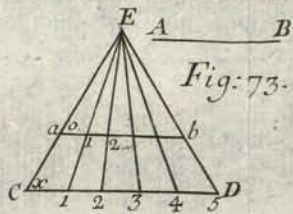


Fig: Geom: Tab: IV.



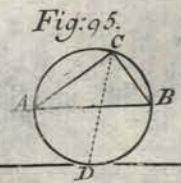
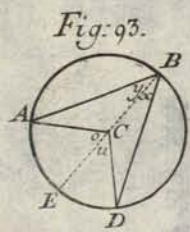
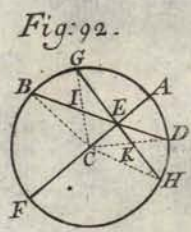
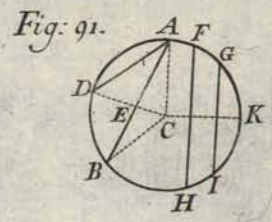
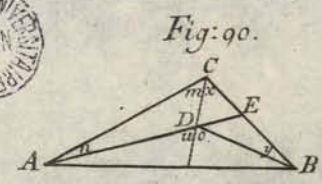
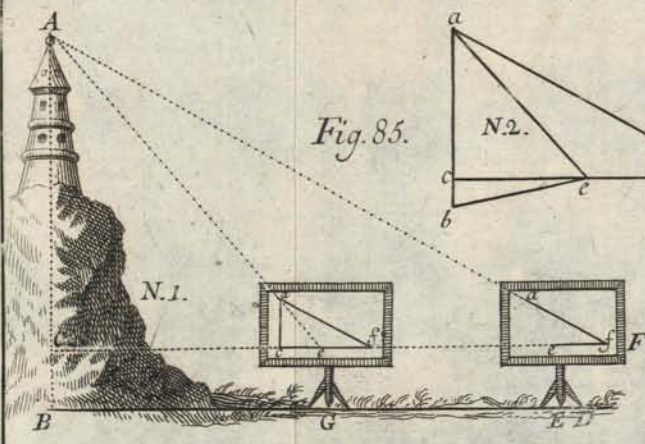
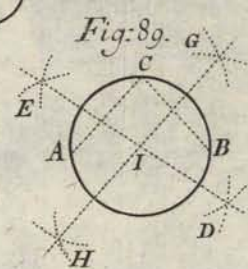
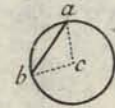
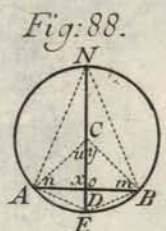
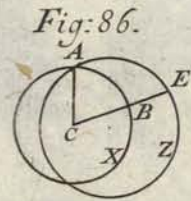
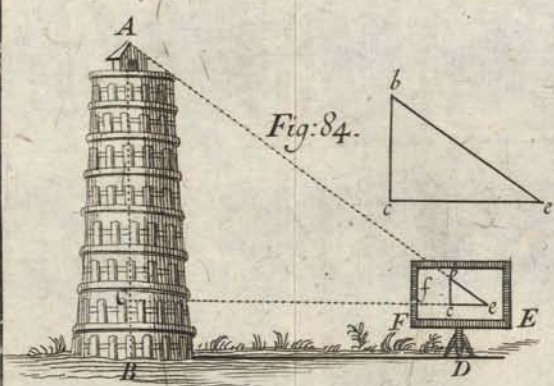
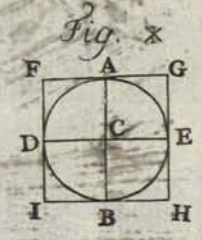
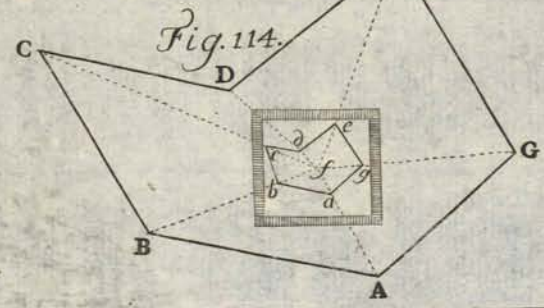
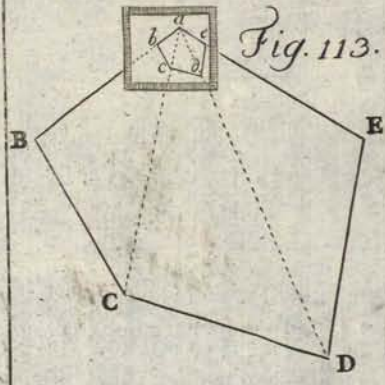
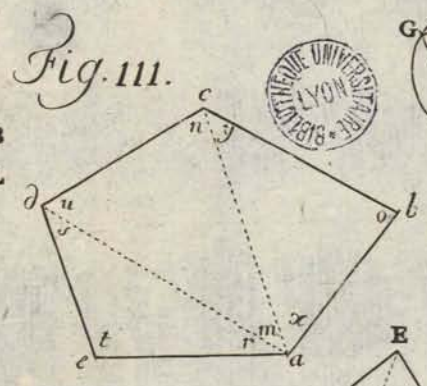
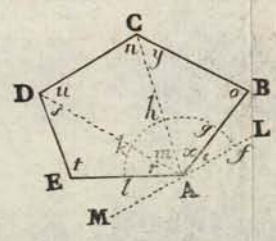
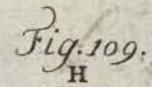
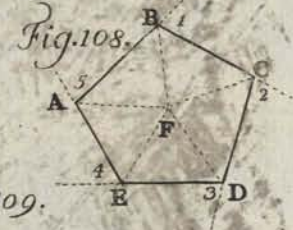
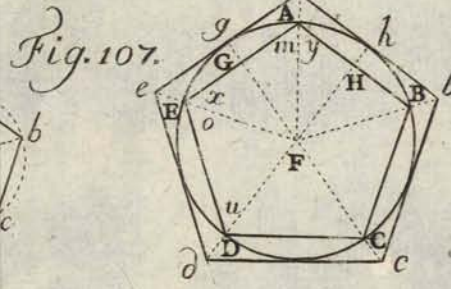
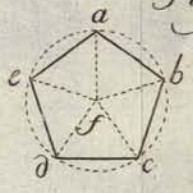
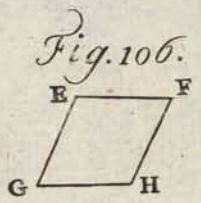
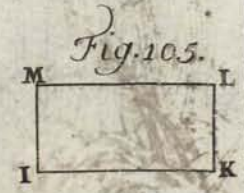
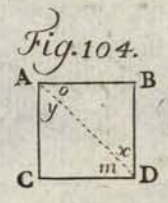
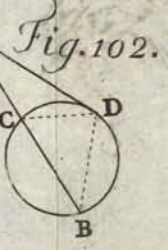
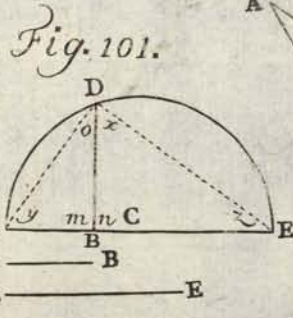
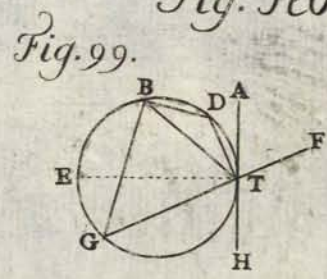
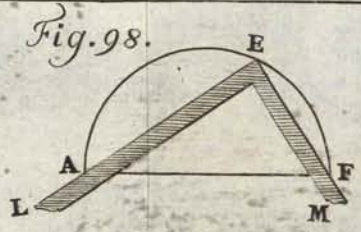
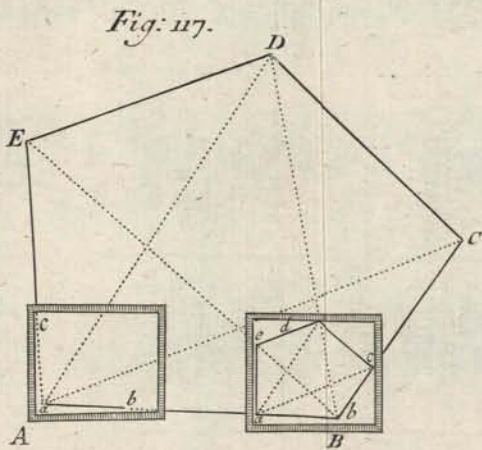
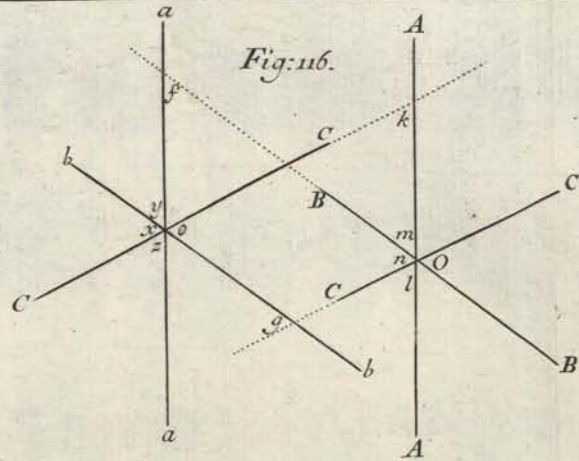
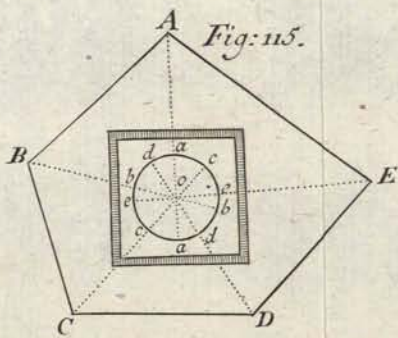


Fig. Geom. Tab. VI





Pyxis magnetica.

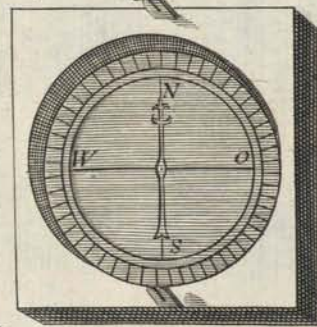


Fig: 122.

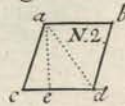


Fig: 120.

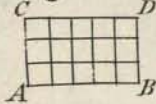


Fig: 122.

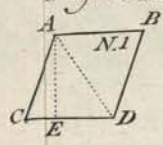


Fig: 119.

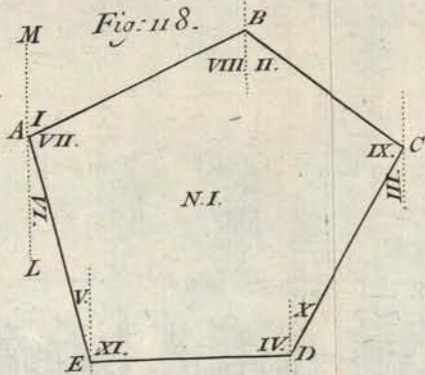
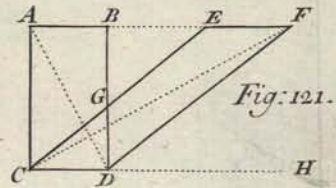
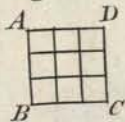
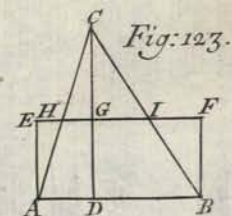
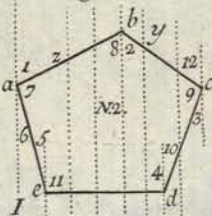


Fig: 118.



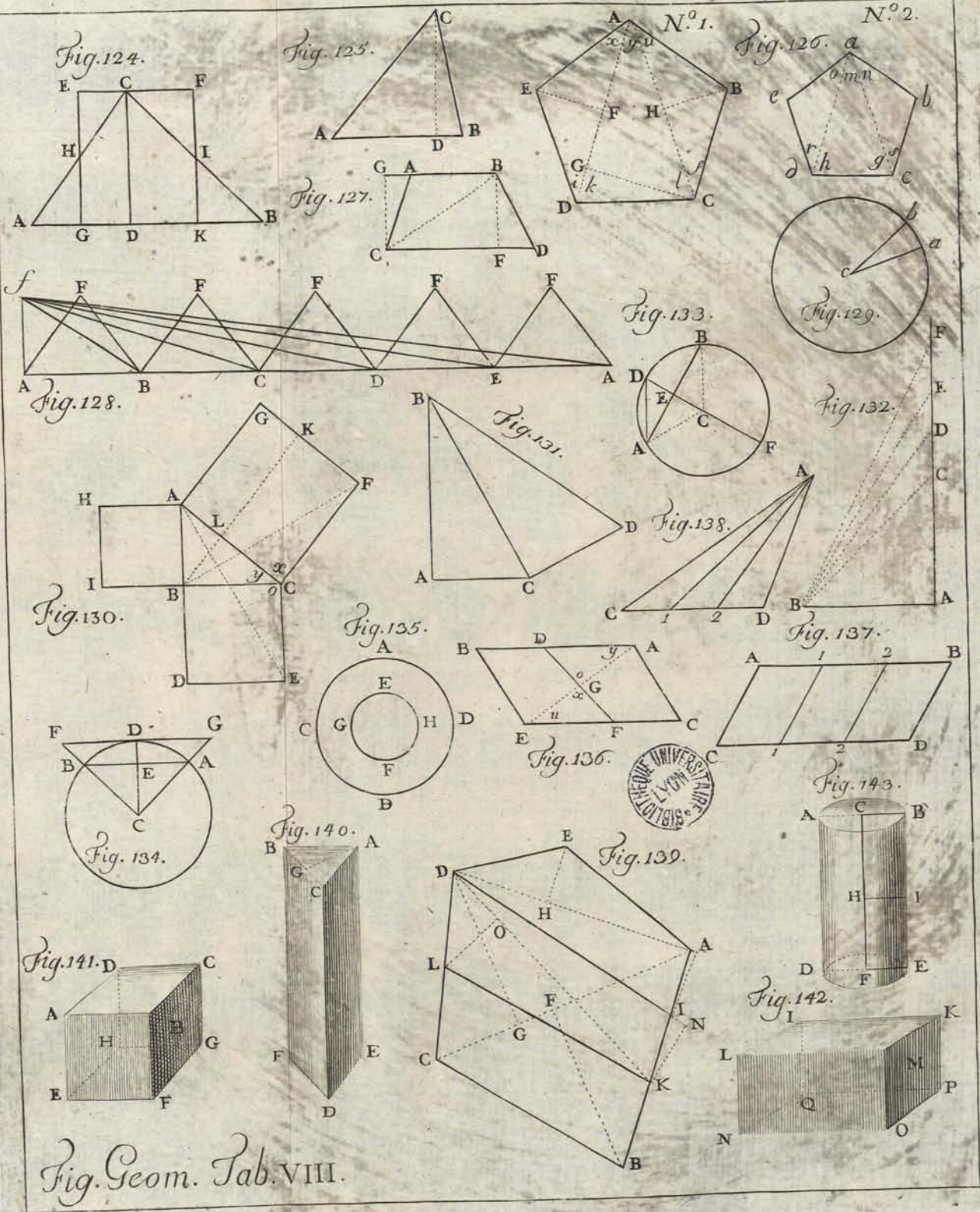


Fig. Geom. Tab. VIII.



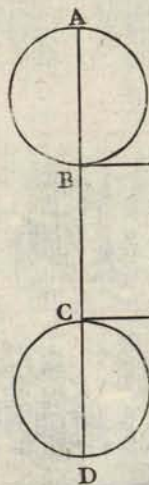
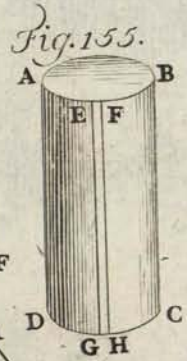
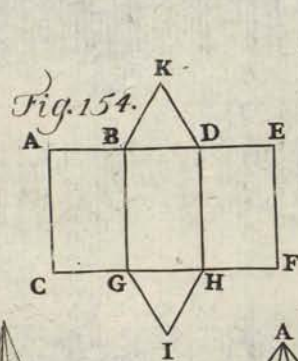
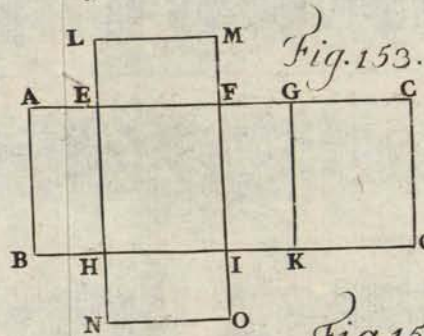
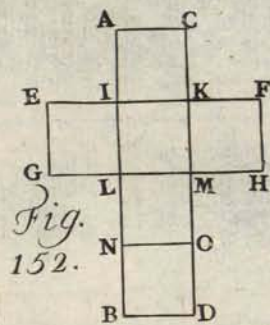
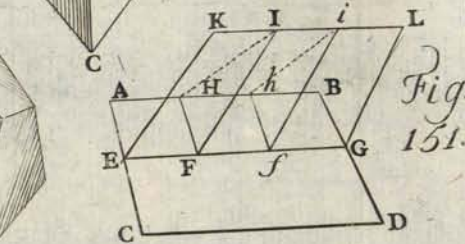
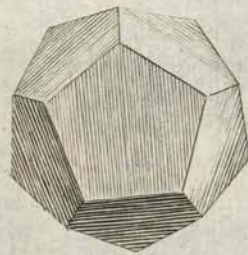
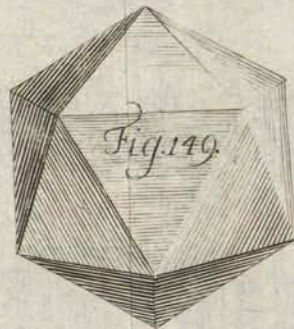
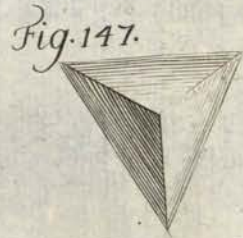
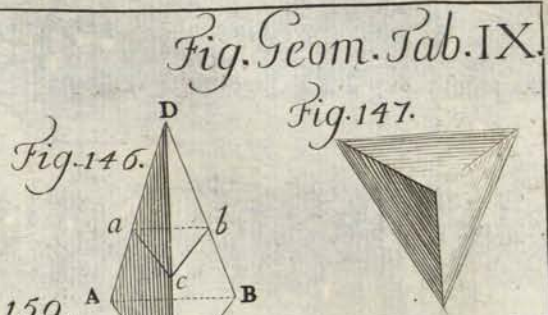
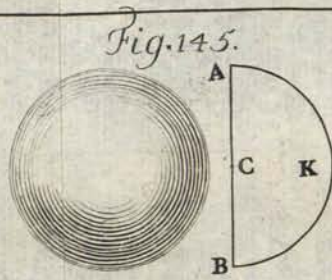
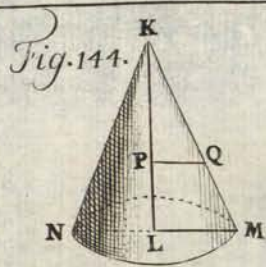


Fig. 156.

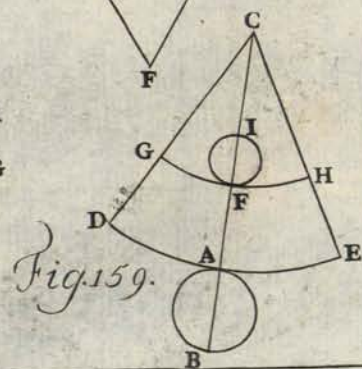
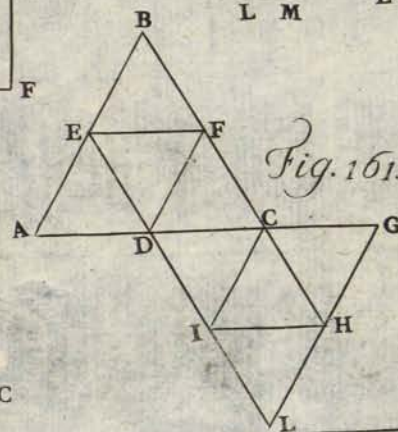
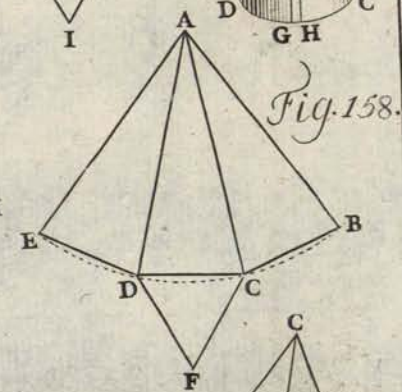
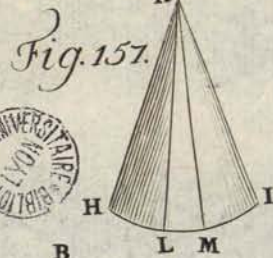


Fig. Geom. Tab. X

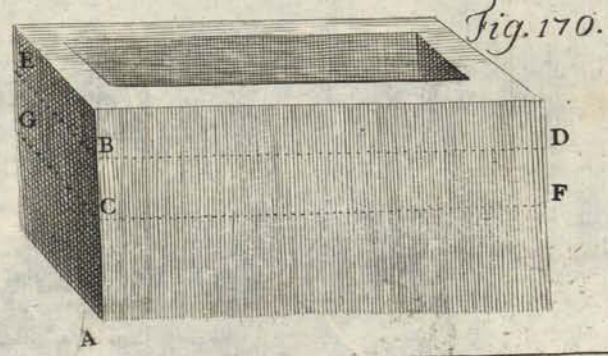
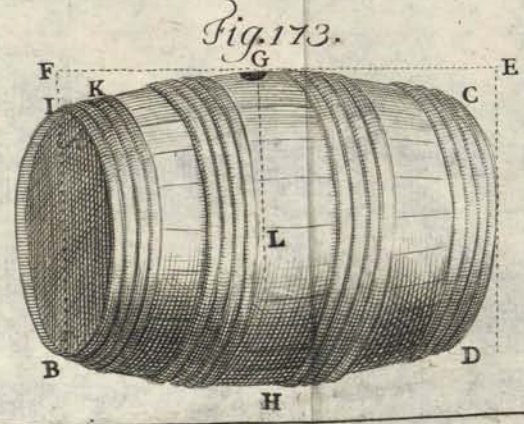
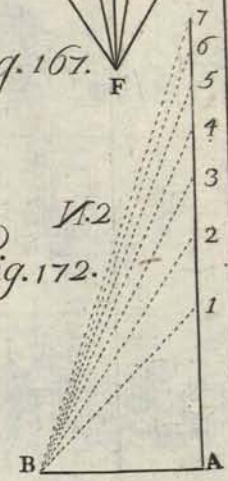
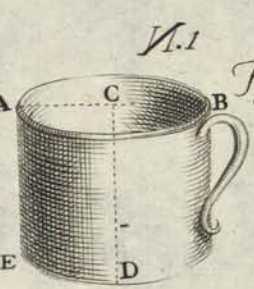
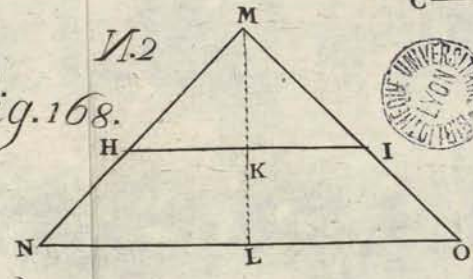
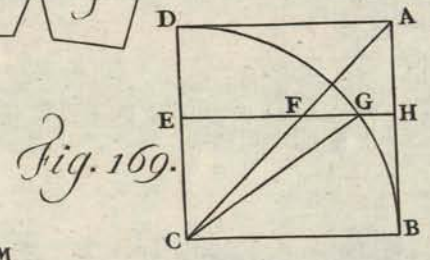
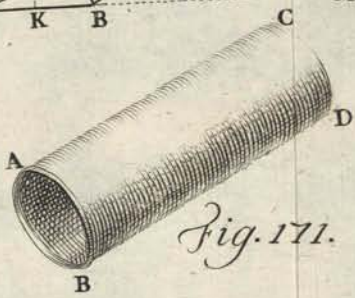
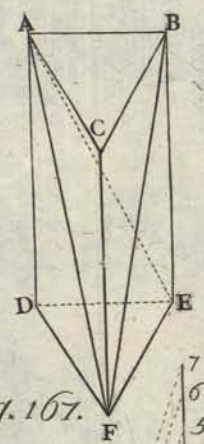
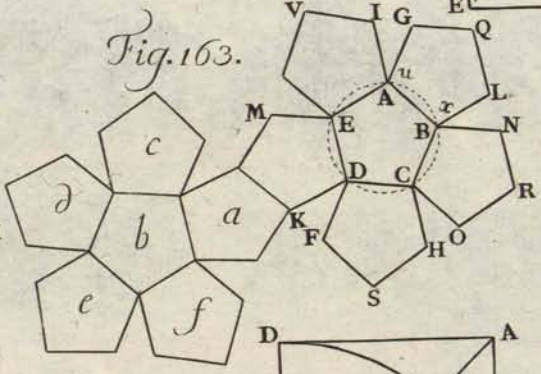
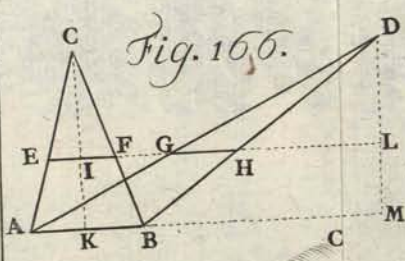
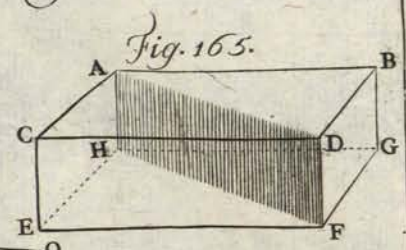
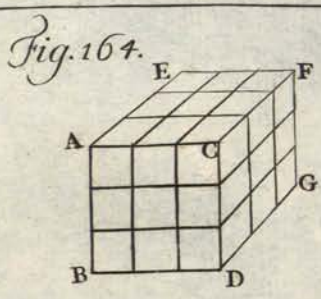
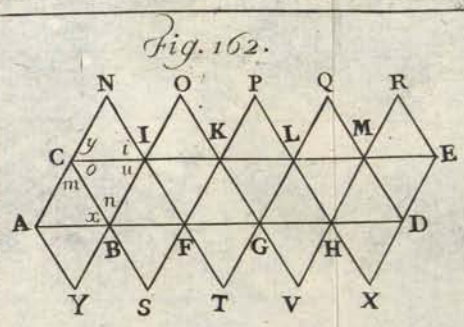
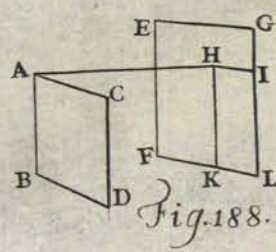
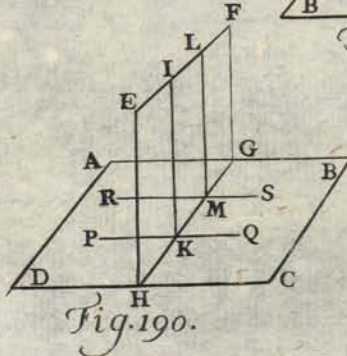
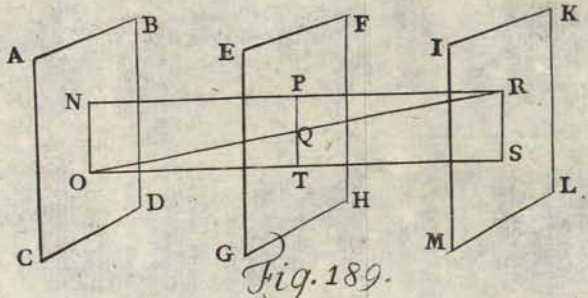
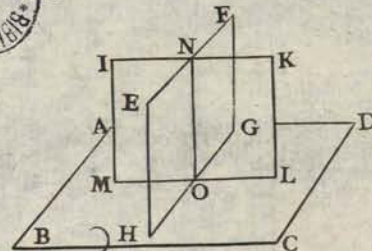
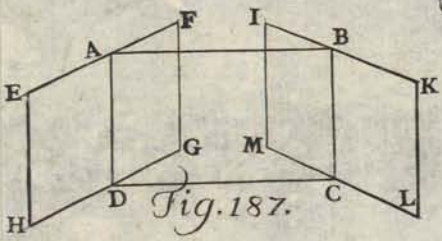
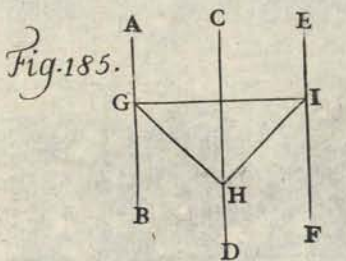
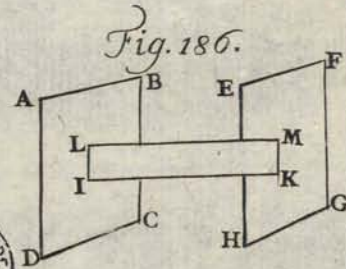
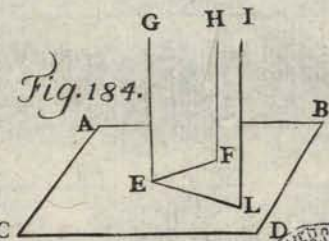
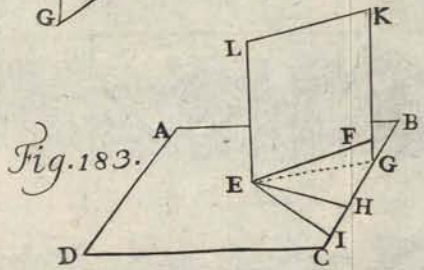
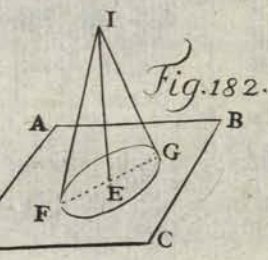
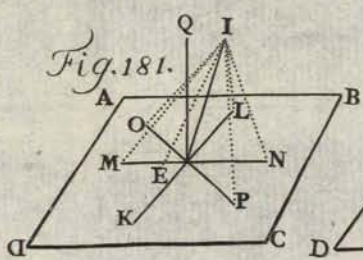
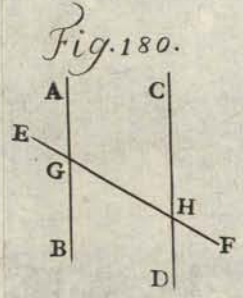
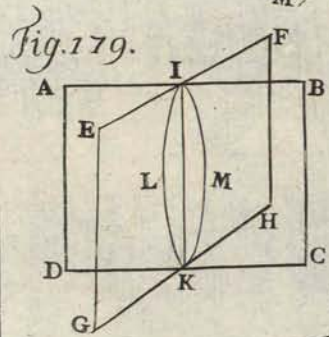
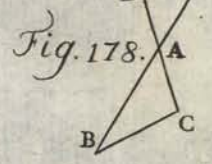
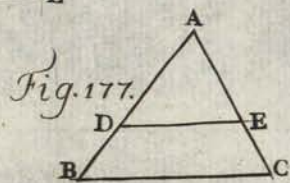
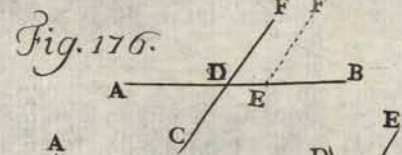
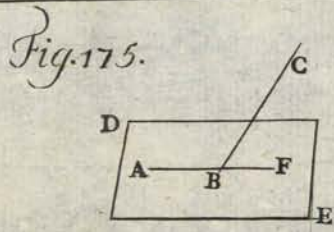
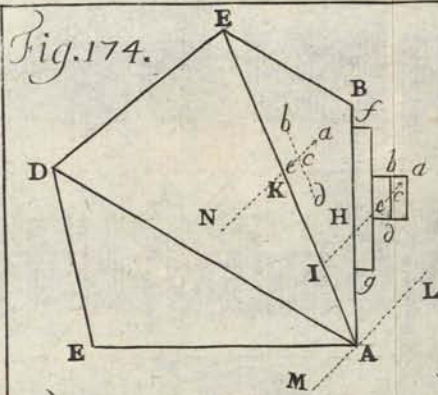


Fig. Geom. Tab. XI.





ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

P R Æ F A T I O.

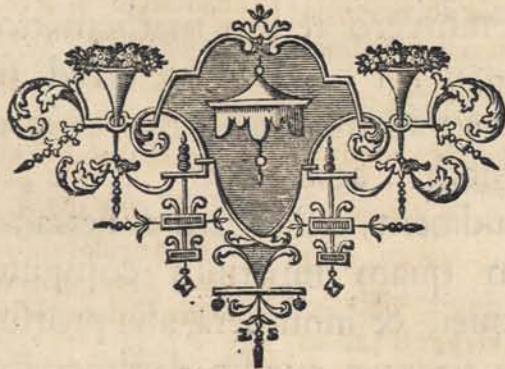


OMENTI perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria, utilitatis prorsus nullius. Enimvero rerum mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, sublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Mathesi admiramur. Certe Stellarum magnitudinem, distantiam a Terra, motum, Eclipsium tam solarium quam lunarium computum, magnitudinem Globi terraquei, & innumera alia prorsus ignoraremus, si nobilissimæ hujus scientiæ auxilio destitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abscondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui nescit, non magnos in Mathesi mixta sentiet progressus: sæpius ipsi in Philosophia naturali hærebit aqua, ex gr. Iridis phænomena ad rationes suas revocaturus aliaque meteora emphatica explicaturus. Studium igitur Trigonometriæ addiscendæ afferatur indefessum, nec impatiens sit mora, donec in partibus Matheseos subsequenter ineffabilis ejusdem

D d 2

usus

usus ex his ipsis etiam Elementis pateſcat. Fides oculata impediet, quo minus in poſterum judicia de rerum uſu (quod vulgo plerumque fieri ſolet) præcipitemus. Paucis Problematibus comprehendendi, quæ alias per caſus plures diſtribuuntur: In Elementis enim præter neceſſitatem multiplicanda non ſunt, quæ ſpinofa videntur tyronibus; nec culpatur brevitatis, quæ perſpicuitati non officit, memoriæ levamen certiffimum exiſtit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica uſum habeat, quam cum Theoretica conjungi conſultum duximus; ideo hunc uſum ſub finem annectere placuit.





ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.



CAPUT PRIMUM.

De Constructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium, tam naturalium, quam artificialium.

DEFINITIO I.

Tab. I. I. **T**rigonometria plana est Scientia
Fig. 1. ex tribus trianguli rectilinei
partibus inveniendi reliquas.

Ex. gr. Ex duobus lateribus AB & AC
atque angulo B inveniuntur anguli reliqui
A & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO II.

Tab. I. 2. *Sinus rectus* AD arcus AE vel AI
Fig. 2. est chordæ AB arcus dupli AEB vel
AIB dimidium. *Sinus totus* est radius
HC, seu sinus quadrantis HE. *Sinus*
versus est pars radii ED inter sinum
rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC per-
pendicularis (§. 291 *Geom.*): consequenter
sinus omnes eidem radio insistentes inter
se paralleli (§. 256 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

4. Quoniam arcus AE est mensura an-
guli ACE, & AI ejus contigui ACI
(§. 57 *Geom.*); quadrans vero HE men-
sura anguli recti (§. 143 *Geom.*): AD

etiam sinus rectus & ED sinus versus est Tab. I.
angulorum ACE & ACI; sinus vero totus Fig. 2.
est sinus anguli recti.

COROLLARIUM III.

5. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps,
eundem habent sinum.

COROLLARIUM IV.

6. Angulorum adeo obtusorum sinus
iidem sunt, quos habent eorum comple-
menta ad duos rectos (§. 147 *Geom.*).

DEFINITIO III.

7. *Tangens* arcus EA est portio
rectæ tangentis circulum EF inter rec-
tas ex centro C per extrema arcus E &
A ductas interceptæ. Recta FC dicitur
Secans ejusdem arcus.

COROLLARIUM I.

8. Tangens EF ad radium EC perpen-
dicularis est (§. 308 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

9. Est etiam FE tangens, & FC secans
anguli ACE, itemque ACI (§. 57 *Geom.*).

D d 3

COROL-

COROLLARIUM III.

10. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eandem habent tangentem atque secantem.

DEFINITIO IV.

Tab. I. II. *Cosinus* est sinus, *Cotangens* tan-
Fig. 2. gens, *Cosecans* secans arcus AH, qui est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita ex. gr. AG sinus arcus AH dicitur *cosinus* arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes*, atque *Secantes complementi*.

THEOREMA I.

12. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 290 *Geom.*). Sed sinus sunt chordarum dimidia (§. 2). Ergo & hi ad radios eandem rationem habent (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate; & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas sinuum, tangentium, atque secantium.*

SCHOLION.

14. Ex PTOLEMÆI *Almagesto* discimus, *Veteres* radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse, & inde chordas per minuta prima, secunda, tertia &c. hoc est, fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in *analisi* triangulorum utebantur. Dimidiis chordis seu sinibus primum usi sunt, quantum constat, Saraceni. Johannes REGIOMONTANUS primum radio cum *Veteribus* tribuit 60 gradus, & sinus singulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero

postea animadvertit, commodius fore, si radius sumatur pro unitate, ac ideo hypotesin presentem in *Trigonometriam* introduxit. In *Tabulis sinuum & tangentium* ordinariis radius concipitur in 10000000 partes divisus, & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. Qui tamen *Tabulas* istas construxerunt, ad fractiones multo minores descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. *Secantibus* hodie opus non habemus, cum omnia *Trigonometriae* *Problemata* absque illarum ope solvi possint.

COROLLARIUM.

15. Cum latus Hexagoni regularis sextam circuli partem subtendat (§. 104, 342 *Geom.*) atque radio æquale fit (§. 356 *Geom.*); sinus graduum triginta est 5000000 (§. 2 *Trigon.* & §. 41 *Geom.*).

PROBLEMA I.

16. *Dato sinu AD; invenire cosinum AG.*

Tab. I.
Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam EC sinus ipsius EH (§. 2) ad HC, & AG sinus arcus AH (§. 2) perpendicularis ad eandem HC (§. 3); erit AG parallela ipsi DC (§. 256 *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 78 *Geom.*), adeoque $\triangle AGC$ rectangulum (§. 91 *Geom.*). Quare cum AD & HC sint ad EC perpendiculares (§. 3); erit $GC = AD$ (§. 226 *Geom.*). Si ergo

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC; relinquetur quadratum cosinus AG (§. 417 *Geom.*). Unde si
2. Radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*); prodibit cosinus AG.

Ex. gr. Sit AC 10000000, AD 5000000: reperitur AG 8660254, sinus 60° .

PRO-

PROBLEMA II.

Tab.I. 17. Dato sinu AD arcus AE; inve-
Fig.2. nire sinum arcus dimidii $\frac{1}{2}$ AE.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§.423 Geom.). Hujus enim dimidium est ejus sinus (§. 2).

Ex. gr. Sint AC & AD ut in Probl. præc. reperietur sinus arcus $\frac{1}{2}$ AE, seu sinus $15^\circ = 2588190$.

PROBLEMA III.

Tab.I. 18. Dato sinu DG arcus DF; inve-
Fig.3. nire sinum DE arcus dupli DB.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§. 3) & angulus B utrique triangulo BCG & BDE communis; erit BC : CG = BD : DE (§. 267 Geom.). Quare cum CG inveniri possit, dato sinu DG (§. 16), & BD sit duplum ipsius DG (§. 2): invenietur quoque DE (§.302 Arithm.). Q. e. f. & d.

PROBLEMA IV.

Tab.I. 19. Datis sinibus FG & DE arcuum
Fig.4. FA & DA, quorum differentia DF 45' major non est; invenire sinum quemcunque intermedium IL.

RESOLUTIO.

1. Quærat ad differentiam FD arcuum quorum sinus dantur, differentiam IF arcus AI cujus sinus quæritur atque arcus AF sinui dato minori respondentis, & differentiam finuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§.302 Arithm.).
2. Is addatur sinui dato minori FG. Erit aggregatum sinus quæsitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum sint Tab.I. minutorum, per hypoth. pro lineis rectis Fig.4. citra errorem sensibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ sunt (§. 3). Quare si ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 216 Geom.); erit HE=FG (§.226 Geom.); adeoque DH differentia finuum datorum FG & DE (§. 64 Arithm.) Unde ob parallelas IK & DH, per demonstrata; FD : FI = DH : IK (§. 268 Geom.). Q. e. d.

PROBLEMA V.

20. Datis sinibus BD & FE duo- Tab.I. rum arcuum quorumcunque AB & AF; Fig.5. invenire sinum arcus semidifferentiæ eorundem $\frac{1}{2}$ BF.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD subtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis sinibus BD & FE inveniantur cosinus BI & FH (§. 16).
3. Cosinus minor FH subtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex summa quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§. 269 Arithm.); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§. 2). Q. e. i.

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter se parallelæ, & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3), consequenter FH=KI & BD=EK (§. 226 Geom.) & angulus BKF rectus (§.230, 78 Geom.) Quamobrem FK differentia finuum

Tab.I. sinuum BD & FE, BK vero differen-
Fig.5. tia cosinum FH & BI, atque FKB
triangulum rectangulum (§.91 *Geom.*).
Ergo cum sit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§.417
Geom.); reperietur chorda BF, si ex
summa quadratorum differentie si-
nuum FK & cosinum BK radix qua-
drata extrahitur (§.246 *Arithm.*). *Q.e.d.*

PROBLEMA VI.

21. Invenire sinum 45 graduum.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab.I. Sit HI circuli quadrans; erit HCI
Fig.2. angulus rectus (§.143 *Geom.*), adeo-
que Δ cognomine rectangulum (§.91
Geom.), consequenter $HI^2 = HC^2$
 $+ CI^2$ (§.417 *Geom.*) $= 2 HC^2$ (§.40,
374 *Geom.*). Quare cum HC sinus to-
tus (§.2) sit 10000000 (§.14); si ex
 $2HC^2$ quadrato 2000000000000000
extrahatur radix 14142136 (§.269
Arithm.); prodibit chorda HI (§.246
Arithm.), cujus dimidium 7071068
sinus 45° desideratus. *Q.e.i. & d.*

SCHOLIUM.

22. Inferius in *Analysi* docebimus, quo-
modo ex dato radio latus Pentagoni regularis,
hoc est, chorda 72° (§.342 *Geom.*), conse-
quenter sinus 36° (§.2) inveniatur.

PROBLEMA VII.

Tab.I. 23. Dato sinu unius minuti seu 60"
Fig.4. FG; invenire sinum unius vel aliquot
secundorum MN.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF sunt ad-
modum exigui, AMF pro linea recta
haberi potest citra errorem in fractio-
nibus radii decimalibus, quibus sinus
exprimimus, assignabilem, hoc est,
arcus AM & AF sinibus eorum pro-

portionales assumere licet. Quare cum Tab.I.
MN sit ipsi FG parallela (§.3) erit Fig.4.
 $AF:FG = AM:MN$ (§.268 *Geom.*).
Datis ergo AF, FG & AM, per *hypoth.*
invenitur MN (§.302 *Arithm.*). *Q.*
e.i. & d.

SCHOLIUM.

24. Eadem ratione, si opus foret, inve-
niri posset sinus aliquot scrupulorum tertio-
rum.

PROBLEMA VIII.

25. Datis sinibus 30 (§.15), 15
(§.17), 45 (§.21) & 36 graduum
(§.22); Canonem omnium Sinuum con-
struere, nonnisi unico minuto, aut denis
secundis, immo unico secundo inter se
differentibus.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex sinu 36 graduum inveniatur
sinus 18°, 9°, 4° 30', 2° 15' (§.17);
sinus 54°, 72°, 81°, 85° 30', 87° 45'
(§.16); porro sinus 27°, 13° 30',
6° 45'; 40° 30', 20° 15'; 42° 45'
(§.17); inde sinus 63°, 76° 30',
83° 15', 49° 30', 69° 45', 47° 15'
(§.16); ulterius sinus 31° 30', 15° 45';
38° 15'; 24° 45' (§.17); hinc sinus
58° 30', 74° 15', 51° 45', 65° 15';
(§.16); denique sinus 29° 15' (§.17)
& ejus cosinus 60° 45' (§.16).
2. Ex sinu 45° inveniuntur sinus 22°
30' & 11° 15' (§.17), sinus 67° 30'
& 78° 45' (§.16), sinus denique 33°
45' (§.17) & 56° 15' (§.16).
3. Ex sinu 30° & sinu 54° inveniatur
sinus 12° (§.20).
4. Ex sinu 12° inveniuntur sinus 6°
3', 1° 30', 45' (§.17), sinus 78°
84', 87°, 88° 30', 89° 15' (§.16);
por-

porro sinus 39° , $19^{\circ} 30'$, $9^{\circ} 45'$; 42° , 21° , $10^{\circ} 30'$, $5^{\circ} 15'$; $43^{\circ} 30'$, $21^{\circ} 45'$; $44^{\circ} 15'$ (§.17): ulterius sinus 51° , $70^{\circ} 30'$, $80^{\circ} 15'$, 48° , 69° , $79^{\circ} 30'$, $84^{\circ} 45'$, $46^{\circ} 30'$, $68^{\circ} 15'$, $45^{\circ} 45'$, (§.16): inde sinus $25^{\circ} 30'$, $12^{\circ} 45'$; $35^{\circ} 15'$; 24° ; $34^{\circ} 30'$, $17^{\circ} 15'$; $39^{\circ} 45'$; $23^{\circ} 15'$ (§.17): hinc sinus $64^{\circ} 30'$, $77^{\circ} 15'$, $54^{\circ} 45'$, 66° , $55^{\circ} 30'$, $72^{\circ} 45'$, $50^{\circ} 15'$, $66^{\circ} 45'$ (§.16): hinc porro sinus $32^{\circ} 15'$; 33° , $16^{\circ} 30'$, $8^{\circ} 15'$; $27^{\circ} 45'$ (§.17): inde ulterius sinus $57^{\circ} 45'$, 57° , $73^{\circ} 30'$, $81^{\circ} 45'$, $62^{\circ} 15'$ (§.16): porro sinus $28^{\circ} 30'$, $14^{\circ} 15'$; $36^{\circ} 45'$ (§.17) & horum cosinus $61^{\circ} 30'$, $75^{\circ} 45'$, $53^{\circ} 45'$ (§.16): denique sinus

$30^{\circ} 45'$ (§.17) & ejus cosinus $59^{\circ} 15'$ (§.16).
 5. Ex sinu 15° inveniuntur sinus $7^{\circ} 30'$ & $3^{\circ} 45'$ (§.17): hinc sinus 75° , $82^{\circ} 30'$, $86^{\circ} 15'$ (§.16): inde $37^{\circ} 30'$, $18^{\circ} 45'$, $41^{\circ} 15'$ (§.17) & horum cosinus $52^{\circ} 30'$, $71^{\circ} 15'$, $48^{\circ} 45'$ (§.16): denique sinus $26^{\circ} 15'$ (§.17) & ejus cosinus $63^{\circ} 45'$ (§.16).
 6. Quodsi sinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate sibi mutuo succedentes $45'$ deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quam cum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet.

1	0° 45'	21	15° 45'	41	30° 45'	61	45° 45'	81	60° 45'	101	75° 45'
2	1.30	22	16.30	42	31.30	62	46.30	82	61.30	102	76.30
3	2.15	23	17.15	43	32.15	63	47.15	83	62.15	103	77.15
4	3. 0	24	18. 0	44	33. 0	64	48. 0	84	63. 0	104	78. 0
5	3.45	25	18.45	45	33.45	65	48.45	85	63.45	105	78.45
6	4.30	26	19.30	46	34.30	66	49.30	86	64.30	106	79.30
7	5.15	27	20.15	47	35.15	67	50.15	87	65.15	107	80.15
8	6. 0	28	21. 0	48	36. 0	68	51. 0	88	66. 0	108	81. 0
9	6.45	29	21.45	49	36.45	69	51.45	89	66.45	109	81.45
10	7.30	30	22.30	50	37.30	70	52.30	90	67.30	110	82.30
11	8.15	31	23.15	51	38.15	71	53.15	91	68.15	111	83.15
12	9. 0	32	24. 0	52	39. 0	72	54. 0	92	69. 0	112	84. 0
13	9.45	33	24.45	53	39.45	73	54.45	93	69.45	113	84.45
14	10.30	34	25.30	54	40.30	74	55.30	94	70.30	114	85.30
15	11.15	35	26.15	55	41.15	75	56.15	95	71.15	115	86.15
16	12. 0	36	27. 0	56	42. 0	76	57. 0	96	72. 0	116	87. 0
17	12.45	37	27.45	57	42.45	77	57.45	97	72.45	117	87.45
18	13.30	38	28.30	58	43.30	78	58.30	98	73.30	118	88.30
19	14.15	39	29.15	59	44.15	79	59.15	99	74.15	119	89.15
20	15. 0	40	30. 0	60	45. 0	80	60. 0	100	75. 0	120	90. 0

Inveniantur ergo sinus intermedii per
Probl. 4. (§. 19).

7. Denique sinus scrupulorum secundorum ab 1 usque ad 60 inveniantur per Probl. præc. (§. 23).

Ita Canon sinuum erit constructus.

Q. e. f.

PROBLEMA IX.

Tab. I. Fig. 2. 26. Dato sinu AD arcus AE, invenire tangentem EF & secantem FC ejusdem arcus.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia sinus AD & tangens EF ad radium EC perpendicularis (§. 3, 8); erit ille huic parallelus (§. 256 *Geom.*). Quare ut cosinus DC ad sinum AD, ita sinus totus ad tangentem EF: item ut cosinus DC ad sinum totum AC, ita sinus totus EC ad secantem CF (§. 268 *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram secans FC (§. 302 *Arithm.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLIUM.

27. Constructo igitur Canone sinuum (§. 25), haud difficilis est constructio Canonis tangentium atque secantium. Uterque junctim sumtus Canon triangulorum naturalis dici solet, quia triangulorum analysi inservit. Equidem passim apud Autores Theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi sinus facilius inveniuntur, quam exposita hactenus methodo. URSINUS (a) præsertim docet, quomodo ex sinu Canonis omnium primi, e. gr. unius secundi, per solam quasi additionem & subtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis dudum constructus sit; sufficit utcumque ostendisse, quomodo construi potuerit.

(a) *Trigon.* lib. 2. c. 5. p. 164.

PROBLEMA X.

28. Invenire sinus cujuscunque dati logarithmum.

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur, assumendi sunt sinus ad radium 10000000000 constructi. Mulstantur nempe sinus in Canone PITISCI majore 4 ultimis notis. Cum adeo sinus sint numeri 10 ut plurimum notis constantes, in canone autem logarithmorum qui prostat maximo, numeri naturales ultra 5 notas non ascendunt; logarithmi eorum inveniuntur per *Probl. 37 Arithm.* (§. 349). Utendum vero est Canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus sinus 23°, qui apud PITISCUM 3907311284. Refectis versus sinistram quinque notis 39073, ipsis respondens logarithmus est 4.5918768, consequenter logarithmus numeri 3907300000 est 9.5918768. Differentia tabularis est III. Quare infertur: ut 100000 ad III ita notæ residuæ sinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12: qui si addatur logarithmo 9.5918768, prodit logarithmus quaesitus 9.5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA XI.

29. Invenire logarithmum tangentis; dato logarithmo sinus & cosinus.

RESOLUTIO.

1. Logarithmus sinus addatur logarithmo sinus totius.
2. A summa subtrahatur logarithmus cosinus. Residuum est logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & §. 359 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23° .

Addantur Log. sin. $23^\circ = 9.5918780$
 Log. sin. tot. = 1.0000000

a summa = 195918780
 subtrahatur Log. cos. = 99640261

relinquitur Log. tang. = 96278519

PROBLEMA XII.

30. Invenire logarithmum secantis arcus cujuscunque; dato sinu complementi ejusdem.

1. Logarithmus sinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo subtrahatur sinus complementi datus. Residuum fiet logarithmus secantis (§. 26 Trigon. & 359 Arithm.).

Ex. gr. Quærendus est logarithmus secantis arcum 23° . Calculi typus talis est:

Log. sin. tot. = 100000000

Ejus duplum = 200000000

Log. sin. compl. = 99640261

Log. secant. $23^\circ = 10.0359739$

SCHOLIUM.

31. Johannes NEPERUS, qui primus logarithmos in Trigonometriam introduxit, sinus totius logarithmum facit 0. Hinc crescunt logarithmi sinuum, sinibus decrefcentibus, & tangentium atque secantium sinu toto majorum logarithmi sunt defectivi, seu nihilo mireres. NEPERUS logarithmos cosinum Antilogarithmos, logarithmos vero tangentium differentiales, KEPLERUS etiam Mesologarithmos vocat. Dicuntur quoque hi logarithmi Sinus & tangentes artificiales.

CAPUT II.

De Analyfi Triangulorum.

THEOREMA II.

Tab.I. 32. **T** Angens 45° EF æquatur radio EC.
 Fig. 2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45° . per hypoth. erit quoque angulus ACE 45° (§. 59 Geom.); consequenter angulus F 45° (§. 241 Geom.). Quare EF = CE (§. 253 Geom.). Q. e. d.

THEOREMA III.

Tab.I. 33. In omni triangulo ABC latera sunt ut sinus oppositorum angulorum.
 Fig. 1.

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inscriptibile sit (§. 297 Geom.); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 38 Geom.); consequenter latera dimidia sinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii sunt mensuræ angulorum oppositorum B, A & C (§. 314 Geom.). Ergo ut latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B; ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A, ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C. Q. e. d.

E e 2

SCHO-

SCHOLIUM.

34. Ut vero evidentius appareat, in triangulo obtusangulo pro sinu anguli obtusi utendum esse sinu anguli acuti, qui eidem deinceps ponitur, & quem esse etiam sinum anguli obtusi supra annotavimus (§. 6), sequens addere lubet theorema.

THEOREMA IV.

Tab.I. 35. In triangulo obtusangulo AGC Fig.8. est ut latus angulo obtuso G oppositum AC ad sinum anguli acuti AGE eidem deinceps positi, ita latus angulo obtuso adjacens GA ad sinum anguli eidem oppositi C.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex A in basin continuatam GC perpendicularis AE; erunt AEG & AEC triangula rectangula (§.78, 91 Geom.). Cum itaque sit ut sinus totus ad AC ita sinus anguli C ad AE & ut AG ad sinum totum ita AE ad sinum anguli AGE (§. 33); erit etiam ut AG ad AC ita sinus anguli C ad sinum anguli AGE (§. 201 Arithm.); consequenter latus angulo obtuso adjacens GA est ad sinum anguli eidem oppositi C, sicuti latus angulo obtuso oppositum AC ad sinum anguli acuti eidem deinceps positi AGE (§. 173 Arithm.). Q. e. d.

PROBLEMA XIII.

Tab.I. 36. Datis duobus angulis A & C, Fig.1. una cum latere uni eorum C opposito AB; invenire latus alteri A oppositum BC.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 33):
ut sinus anguli C
ad latus sibi oppositum datum
AB;

Ita sinus anguli alterius A
ad latus quaesitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC, per Probl. 42 Arithm. (§. 359).

Ex. gr. Sit C = $48^{\circ} 35'$, A = $57^{\circ} 28'$, AB = $74'$. Calculus talis erit:

Log. sin. C	9. 8750142
Log. AB	1. 8692317
Log. sin. A	9. 9258681

Sum. log. AB & sin. A 11. 7950998

Log. BC 1.9200856

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent $83'$. Cum vero logarithmus in Tabulis non exactus reperiat; inveniri possunt numeri inventi $83'$ fractiones decimales, hoc est, in casu nostro digiti, si sub characteristica 2 post $830''$ denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxime respondet numerus $831''$. Quod si præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post $8310'''$, & ei quam proxime respondere deprehendes $8319''$. Immo si Canon major ad manus sit, ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post $83190''''$ evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192 . Est ergo BC $8^{\circ} 3' 1'' 9''' 2''''$ (§. 355 Arithm.).

SCHOLIUM.

37. Quid factu opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.

PROBLEMA XIV.

38. Datis duobus lateribus AB & BC, una cum angulo C uni eorum opposito; invenire angulos reliquos A & B.

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 33):
ut latus unum AB
ad sinum anguli dati sibi oppositi C;

Ita

Tab.I.
Fig.1.

Tab.I. Ita latus alterum BC
Fig.1. ad sinum anguli quaesiti sibi oppo-
fiti A.

Invenietur adeo logarithmus sinus anguli A utendo logarithmis per *Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359.)

Tab.I. II. Quodsi latus AG vel AB dato angulo C oppositum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quaesito, quaesitus angulus & obtusus esse potest G, & acutus B (§. 234 *Geom.*); adeoque constare debet, utrum triangulum datum sit obtusangulum, an acutangulum. In casu posteriori satisfacit numerus graduum, qui sinui reperto respondet; in priori pro angulo obtuso sumitur ejus complementum ad 180° (§. 35).

III. Quodsi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtusus, & datis praeterea cruribus AG & AC quaeratur acutus, in solutione pro sinu obtusi anguli AGC sumitur deinceps positi acuti AGE sinus (§. 35).

Tab.I. Ex. gr. Sit AB = 94', BC = 69', C = 72° 15'.

Fig.1.

Log.	AB	1. 9731279
Log. sin.	C	9. 9788175
Log.	BC	1. 8388491

Sum. Log. sin. C & BC 11. 8176666

Log. sin. A. 9. 8445387,

cui in Canone proxime respondent 44° 21'.
Quodsi Canon major non fuerit ad manus, & praeter scrupula prima etiam secunda desiderentur, *vi Probl.* 4 (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento 98445387 subtrahe Tab.I.
Tabul. prox. min. 98445018 Fig.1.

& notetur Differ. I. 369
Simil. ex prox. maj. 98446310 subduc
prox. min. 98445018

& notetur Diff. II. 1292
Inferatur, 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30 30
646) 11070 (17
646
4610
4522

Est ergo angulus A = 44° 21' 17"
Sed C = 72 15 0

Quare A + C = 116 36 17
Quon. A + C + B = 179 59 60

erit B = 63° 23' 43"

Similiter dentur in triangulo rectangulo, praeter rectum A, hypotenusa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49' AC 36'. Calculus talis erit: Tab.I. Fig.6.

Log. BC	1. 6901961
Log. sin. tot.	10. 0000000
Log. AC	1. 5563025

Log. sin. B 9. 8661064, cui in Canone proxime respondent 47° 16'.
Ergo C = 42° 44' (§. 241 *Geom.*).

Quodsi AG = 349'', AC = 382'', angulus A = 57° 25'; erit Tab.I. Fig.8.

Log. AG	2. 5428254
Log. sin. C	9. 9256261
Log. AC	2. 5820634

Sum. Log. sin. C & AC 12. 50716895

Log. sin. G 9. 9648641,

cui in Canone proxime respondent 67° 15'.
Est igitur angulus acutus G in triangulo AEG 67° 15': quem si subtraxeris ex 180°, relinquetur pro obtuso AGC 112° 45'.

Ee 3 De-

Tab.I. Detur denique in triangulo obtufan-
Fig.8. gulo AGC angulus obtufus G 165° 17',
una cum cruribus AG=179" & AC 223":
Pro acuto C inferatur (§. 35).

Log. AC	2. 3483049
Log. fin. AGE	9. 4049009
Log. AG	2. 2528530

Sum. Log. fin. G & AG 11. 6577539
Log. fin. C 9. 3094490
cui in Canone respondent quam proxime
11° 46'.

LEMMA.

39. Si a femisumma duarum quanti-
tatum subtrahatur semidifferentia, relin-
quitur quantitas minor: Si vero illi
hec addatur, prodit major.

DEMONSTRATIO.

Numerus major componitur ex mi-
nore & differentia (§. 64 Arithm.):
ergo summa ex minore bis sumta &
differentia, consequenter femisumma
ex minore & semidifferentia. Quare si
a femisumma semidifferentia subtraha-
tur, minor quantitas relinquitur (§. cit.
Arithm.). Quod erat unum.

Quodsi vero femisummæ semidiffe-
rentia addatur, aggregatum erit com-
positum ex quantitate minore & diffe-
rentia (§. 61 Arithm.), adeoque nu-
merus major, per demonstr. Quod erat
alterum.

PROBLEMA XV.

Tab.I. 40. Datis duobus lateribus BA &
Fig.6. AC, cum angulo intercepto A; invenire
angulos reliquos.

RESOLUTIO.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangu-
lum; assumpto crure uno circa rec-
tum AB pro radio, erit alterum CA
tangens anguli oppositi B (§. 7, 8)
Inferatur ergo:

ut crus unum AB
ad alterum AC;

Ita sinus totus

ad tangentem anguli B.

Ex. gr. Sit BA 79', AC 54': erit

Log. BA	1. 8976271
Log. AC	1. 7323938
Log. fin. tot.	10. 0000000

Log. tang. B, 9. 8347667, cui in
Canone respondent quam proxime 34° 21'.
Ergo angulus C 55° 39' (§. 241 Geom.).

II. Si angulus A fuerit obliquus;

1. Inferatur:

ut summa laterum datorum AB
& AC
ad differentiam eorundem;
Ita tangens femisummæ angulo-
rum quæditorum C & B
ad tangentem semidifferentiæ eo-
rundem.

2. Addatur semidifferentia ad femi-
summam; aggregatum erit angu-
lus major C. Eadem a femisum-
ma subtrahatur, residuus fiet an-
gulus minor B.

Ex. gr. Sit AB 75', AC 58', A 108° 24',
erit

AB 75	AB 75	A + B + C	179° 60'
AC 58	AC 58	A	108 24

Sum. 133 Diff. 17 B + C 71 36

$\frac{1}{2}(B + C)$ 35 48

Log. (AB + AC) --- 2. 1238516

Log. (AB - AC) --- 1. 2304489

Log. tang. $\frac{1}{2}(B + C)$ 9. 8580694

Summa Logg. 11. 0885183

Log. Tang. $\frac{1}{2}(C - B)$, 8. 9646667, cui
in Tabulis proxime respondent 5° 16'.

$\frac{1}{2}(B + C) = 35° 48'$ $\frac{1}{2}(B + C) = 35° 48'$

$\frac{1}{2}(C - B) = 5 16$ $\frac{1}{2}(C - B) = 5 16$

C = 41° 4' B = 30° 32'

DE-

Tab.I.
Fig.6.

Tab.I.
Fig.7.

DEMONSTRATIO.

Tab.I. Crure majore dato AB, ex vertice
 Fig.7. anguli dati A describatur circulus (§. 131 Geom.), & crus minus AC utrinque continetur (§. 21 Geom.), donec circulo in E & D occurrat. Erit, ob $AE=AB=AD$ (§. 40 Geom.), CE summa laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. 39 Geom.); erit EBD semicirculus (§. 135 Geom.); consequenter angulus EBD rectus (§. 317 Geom.), adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 78 Geom.). Quare si BD sumatur pro sinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 7.8). Est vero $o=x+y$ (§. 239 Geom.), & inde ob $u=\frac{1}{2}o$ (§. 313 Geom.), $u=\frac{1}{2}(x+y)$. Ergo EB tangens semisummæ angulorum quæsiturum x & y . Quoniam $x=u+n$ (§. 239 Geom.); erit n semidifferentia angulorum x & y (§. 39). Sumto itaque DB denuo pro radio, si describatur arcus DG (§. 131 Geom.) & in D excutur perpendicularis DF (§. 249 Geom.); erit DF tangens anguli n (§. 7,8), hoc est, semidifferentiæ angulorum quæsiturum x & y , per demonstr. Jam cum anguli EBD & FDB sint recti, per demonstr. & hinc FD & EB paralleleæ (§. 256 Geom.), adeoque BED & FDE æquales (§. 233 Geom.), item verticales ad C æquales (§. 156 Geom.): erit $CE:EB=CD:DF$ (§. 267 Geom.), consequenter & $CE:CD=EB:DF$ (§. 173 Arithm.). Data itaque per tangentem DF angulorum quæsiturum semidifferentia, reliqua in resolutione

manifesta sunt, per Lemma præcedens (§. 39). Q. e. d.

PROBLEMA XVI.

41. Datis tribus lateribus AB, BC, Tab.I. & CA; invenire angulos A, B & C. Fig.8.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A, latere minimo AB, describatur circulus (§. 131 Geom.); erit ob $AD=AB$ (§. 40 Geom.) CD summa crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 333 Geom.); ut basis BC ad summam crurum CD; Ita differentia crurum CF ad segmentum basis CG.
2. Inventum adeo segmentum CG (§. 302 Arithm.) si subtrahatur a basi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 216 Geom.), erit $BE=EG=\frac{1}{2}GB$ (§. 291 Geom.). Datis adeo, in triangulo rectangulo AEB, lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque A (§. 38). Q. e. f. & d.

E. gr. Sit $AB=36'$, $AC=45'$, $BC=40'$:

erit	$AC=45'$	$AC=45'$
	$AB=36$	$AB=36$
<hr/>		<hr/>
AC + AB =	81	FC = 9
<hr/>		
Log. BC	=	1.6020600
Log. AC + AB	=	1.9084850
Log. FC	=	0.9542425
<hr/>		
Logg. summa	=	2.8627275
<hr/>		
Log. CG	=	1.2606675

cui

cui in Tabulis quam proxime respondent

18' 2" 3''' (§. 355 *Arithm.*).

BC = 4000''' EG = 1089'''

CG = 1822 CG = 1822

BG = 2178 CE = 2911

BE = 1089

Log. AB = 3.5563025

Log. fin. tot. = 10.0000000

Log. EB = 3.0370279

Log. fin. EAB = 9.4807254,

cui in Tabulis quam proxime respondent

17° 36', adeoque angulus ABE 72° 24' (§. 241 *Geom.*).

Log. AC = 3.6532125

Log. fin. tot. = 10.0000000

Log. CE = 3.4640422

Log. fin. EAC = 9.8108297, cui in Tabulis quam proxime respondent 40° 18'.

Ergo ACE 49° 42' (§. 241 *Geom.*), & CAB 57° 54' (§. 86 *Arithm.*).

C A P U T III.

De usu Trigonometriae plane in Geometria practica.

PROBLEMA XVII.

42. **C**onstruere Instrumentum transportatorium rectilinum; hoc est Scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensa arcuum ad radium.

RESOLUTIO.

1. Ex communi Canone finuum excerpantur sinus arcuum 2° 30', 5°, 7° 30', 10°, 12° 30' &c. nempe in progressionem arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est 2½ gr. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2): ut hic in Tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 249 *Fig. 9. Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel par-

Tab.I.
Fig.9.

- partes quartas &c. indicare debent subtenſa.
3. Per ſingula diſiſionum puncta agantur rectæ ipſi AD parallelæ (§. 258 *Geom.*).
 4. In lineam AD, incipiendo ſemper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35°, &c. respondententes ex Scala geometrica in particulas minutiffimas diſiſa (§. 277 *Geom.*): in linea vero ſuperiori BC eodem modo deſignentur particulæ chordarum respondententes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodſi Scala geometrica non continet particulas adeo minutas, quales deſiderantur; utendum eſt chordis dimidiis: quod perinde ac ſi particulæ in Scala bifariam dividerentur. Negligenda autem eſt nota puncto a reliquis ſeparata, vel ſi major fuerit, ejus loco addenda eſt unitas ultimæ earum, quæ retinentur; ex. gr. loco 258. 8 aſſume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.
 - 5 Ducantur tranſverſæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25, &c.
- Cum enim A 5, B 10 &c. ſint chordæ 5, 10 &c. graduum, & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcibus proportionaliter creſcant; erit c_1 ſubtenſa arcus 1°, d_2 ſubtenſa 2 &c. graduum (§. 268 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

43. Quia ſubtenſa 60° eſt radius (§. *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. I.

356 *Geom.*); anguli quantitatem inveſtigaturus intervallo B 60 deſcribat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui eſt menſura ipſius (§. 57 *Geom.*), & ejus chordam ad Scalam applicet, quæ, ſi ex. gr. ex d in 42 pertingat, oſtendit angulum eſſe 42°.

Tab.I.
Fig.9.

COROLLARIUM II.

44. Angulus datæ quantitatis conſtruetur, ſi radio B60 deſcribatur, ex centro B, arcus CF, & ſubtenſa gradus dati, ex. gr. 23, in Scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC menſura anguli B (§. 57 *Geom.*); adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 59 *Geom.*).

Tab.I.
Fig.10.

SCHOLIUM.

45. Hujus Inſtrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in ſcrupulis ſatis accurate explorari experientia loquitur.

PROBLEMA XVIII.

46. Circulo Polygonum regulare inſcribere & circumſcribere.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Aſſumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere ſupponitur, inde excerpatur ſinus ejus arcus, qui prodit peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde eſt) ſemiperipheria, hoc eſt 180°, per numerum laterum polygoni diſiſa. Illius enim duplum eſt chorda arcus dupli (§. 2), adeoque latus AB polygoni circulo inſcribendi (§. 342 *Geom.*).
2. Quodſi radius circuli, cui ex. gr. pentagonum inſcribendum, detur juxta certam aliquam menſuram, ex. gr. 345^u; latus polygoni in eadem

Tab.I.
Fig.11.

F f men-

mensura invenitur per regulam trium (§. 302 *Arithm.*), inferendo nempe

$$\begin{array}{r}
 10000 - 1176 - 3450'' \\
 \underline{\quad\quad\quad 3450''} \\
 \quad 58800 \\
 \quad 4704 \\
 \underline{\quad 3528} \\
 4057200 \text{ (} 4^\circ 0' 5'' 7''' \text{ lat.} \\
 1 \quad 0000 \text{ Pentag.}
 \end{array}$$

3. Dato radio, describatur circulus, & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri potest (§. 342 *Geom.*).
4. Polygono regulari circulo inscripto simile circumscribetur (§. 355 *Geom.*).

SCHOLION.

47. *Ne molesta sit rationis lateris Polygomi ad radium ex Canone sinuum investigatio, in Tabula hic exhibemus latera Polygonorum istiusmodi particulis expressa, qualium radius habet 10000000. In praxi tot nota versus dextram refecantur, quot per circumstantias singulares superflue judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris	Num. Later.	Quantitas Lateris
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

Tab.I. Fig.II. PROBLEMA XIX. 48. *Super data recta AB Polygonum regulare describere: & dato Polygono regulari ABCDE Circulum circumscribere.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut ratione lateris ad radium ex Tabula præcedente assumpta quærat^{Tab.I.}ur radius in ea mensura, in qua datur latus AB (§. 302 *Arithm.*): dato enim latere AB & radio AL, Polygonum describi potest (§. 342 *Geom.*). Si vero intervallo radii, ex A & B super latere Polygomi uno fiat intersectio in L; habebitur centrum L circumscribendi circuli (§. 37 *Geom.*). Fig.11.

PROBLEMA XX.

49. *Datis sinu verso AB & sinu BC, in mensura communi, non in particulis radii decimalibus; invenire arcum FAC in gradibus.* Tab.I. Fig.12.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quærat^{Tab.I.}ur ex his datis semidiameter AD (§. 328 *Geom.*).
2. Datis jam in triangulo DBC, præter rectum B (§. 3), lateribus BC & DC; invenitur angulus ADC (§. 38): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 59 *Geom.*), cujus duplex est arcus FC (§. 291 *Geom.*). Q. e. i. & d.

SCHOLION.

50. *Hujus Problematis usus est in inveni^{Tab.I.}endo segmento circuli (§. 436 *Geom.*).*

PROBLEMA XXI.

51. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA, & angulis o & y; invenire diagonales.* Tab.I. Fig.13.

RESOLUTIO.

1. In $\triangle ABE$, datis duobus lateribus AB & AE, una cum angulo o; invenitur primum angulus A (§. 38); dein diagonalis BE (§. 36).

2. Eo-

Tab.I. Fig.13. 2. Eodem modo resoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. Q. e. f.

PROBLEMA XXII.

52. Datis in figura rectilinea quacunq; duobus lateribus AB & BC, una cum diagonalibus BE & BD, atque angulis o , x & y ; invenire latera reliqua CD, DE & EA.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE, cum angulo intercepto o , invenitur primum angulus u (§. 40), & deinde porro AE (§. 36).
2. Eodem prorsus modo in triangulis reliquis BED & BCD investigantur latera ED & DC. Q. e. f.

PROBLEMA XXIII.

53. Datis in figura rectilinea quacunq; omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA, & tot angulis quot sunt latera demtis tribus, C & D; invenire diagonales BD & BE.

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD, datis lateribus BC & CD, cum angulo intercepto C, investigetur angulus m (§. 40), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus n , atque porro diagonalis BD (§. 36).
2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE, cum angulo intercepto n ; eodem prorsus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. Q. e. f.

PROBLEMA XXIV.

54. Datis in figura rectilinea quacunq; latere AB, una cum angulis

o , x , y , e , u & n ; invenire diagonales AC, AD, BD & BE, una cum lateribus BC & AE. Tab.II. Fig.22.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis o & B ($=e+u+n$), una cum latere AB,veniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 36).
2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o+x$ & $e+u$, una cum latere AB,veniuntur diagonales BD & AD (§. cit.).
3. Denique datis in triangulo ABE angulis A ($=o+x+y$) & e , una cum latere AB,veniuntur latus AE & diagonalis BE. Q. e. f.

SCHOLION.

55. Cum Ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus (§. 363 Geom.); horum Problematum in Planimetria usus est non contemnendus. Qui tamen praxi operam dant molestias calculi fugiunt; lucro magis quam accuratiõni intenti.

PROBLEMA XXV.

56. Metiri distantiam duorum locorum BC, ex eodem tertio A accessorum, Tab.I. Fig.14.

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumpto (§. 152 Geom.), nec non rectarum AB & AC (§. 126 Geom.).
2. Datis in Δ BAC duobus lateribus AB & AC, cum angulo intercepto A,veniatur primum angulus B (§. 40), & hinc porro distantia BC (§. 36). Q. e. f.

SCHOLIUM.

Tab. I. 57. *Exempla non addimus, cum Proble-*
Fig. 14 mata, quibus triangula in hac Trigonometria
applicatione solvuntur, jam in superioribus
fuissent exemplis illustrata. Ut tamen de com-
moda stationis electione A judicari possit, que-
dam adhuc addenda sunt. Nimirum lineas AB
& AC, quæ sunt latera trianguli resolvendi
BAC satis accurate in campo metiri licet
(§. 126 Geom.): sed in metiendo angulo fa-
cile aliquot scrupulis primis vel in excessu, vel
in defectu peccamus: cum tamen hoc angulo
erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri
omnino non potest quin distantia erronea ob-
vineatur. Quamobrem de quantitate erroris ad-
mittendi hic nobis dispiciendum.

THEOREMA V.

Tab. II. 58. *Si error aliquot scrupulorum in*
Fig. 15. quantitate anguli A admittatur, late-
rum vero BA & AC magnitudo fuerit
accurata; erit arcus CD errorem CAD
metientis quantitas, ad DE differentiam
distantiæ veræ EC ab erronea per calcu-
lum producta BD; ut sinus totus, ad
sinum anguli BCA, qui lateri AB
opponitur.

DEMONSTRATIO.

Etenim si in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillo major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem, per *hypothesis* triangulum BAC degenerat in alterum BAD. Describatur ex A, intervallo AC tanquam radio, arcus CD, qui per punctum D, ob $AC=AD$ (§. 40 Geom.), necessario transit. Quoniam angulus CAD non nisi aliquot scrupulorum est, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§. 57 Geom.), pro recta haberi, & si ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem mensura determinari potest, in qua datur latus AC (§. 435 Geom.). Def-

cribatur similiter ex centro B, inter-Tab. II.
 vallo BC, arcus CE, qui ex eadem Fig. 15.
 ratione pro recta haberi poterit, crit-
 que, ob $BC=BE$ (§. 40 Geom.), ED
 differentia inter distantiam veram BC
 & erroneam BD: anguli vero ACD,
 BCE & CED sunt recti (§. 309 Geom.);
 consequenter $BCE=ACD$ (§. 145
 Geom.), atque adeo $BCA=ECD$
 (§. 91 Arithm.). Est vero ut sinus to-
 tus ad CD, ita sinus anguli ECD sive
 BCA, per *demonstr.* ad ED (§. 33):
 ergo etiam ut sinus totus ad sinum an-
 guli BCA, ita CD ad ED (§. 173
 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

59. Eodem ergo manente errore CD in
 Angulo A metiendo admissio, error in dis-
 tantia admissus ED major est, si angulus
 BCA major fuerit; minor autem, si hic
 quoque minor fuerit (§. 205, 206 Arith.).

COROLLARIUM II.

60. Statio itaque in A ea eligenda, quæ
 acutum valde efficit angulum BCA (§. 59):
 quod obtinetur, si angulus A fuerit major
 recto (§. 240 Geom.) & latus $AC > AB$
 (§. 189 Geom.).

COROLLARIUM III.

61. Cum angulus BAD major sit angulo
 BMD (§. 188 Geom.); præstat eligi sta-
 tionem A viciniorē, quam remotiorē
 (§. 59).

SCHOLIUM.

62. *Supponimus hic parti lateris AB con-*
gruere semidiametrum Instrumenti goniome-
trici, dum angulum metimur, lateri vero AC
respondere regulam mobilem (§. 152 Geom.).

COROLLARIUM IV.

63. Quoniam error ED in distantia defi-
 nienda admissus major est, si quantitas ar-
 cus CD major fuerit (§. 58), quantitas
 autem

Tab. II. autem arcus CD major prodeat, eodem errore CAD admissio, si latus AC longius, quam si brevius fuerit, ideo hinc quoque patet, stationem viciniorē præstare remotiori.

SCHOLIUM.

64. Ceterum hinc apparet, praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur, ubi in earum positione ob errorem in angulorum quantitate commissum aberrari nequit. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut ostenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfectè addiscendam excitemus, qui olim praxi operam daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent, per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum demum observandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuse observantur; per theoriam vero accurate determinantur.

PROBLEMA XXVI.

Tab. I. 65. Invenire distantiam duorum locorum AC, quorum unus A tantum accessibilis.

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas angulorum A & B, statione in B electa (§. 152 Geom.), itemque rectæ AB (§. 126 Geom.).
2. Inveniatur AC (§. 36). Q. e. f.

THEOREMA VI.

Tab. II. 66. Si in distantia AB ex duobus angulis A & ACB, una cum latere AC, investiganda, nonnisi in angulo uno ACB metiendo aberratur; arcus BE, qui errorem in angulo BCD admissio metitur, erit ad BD differentiam inter distantiam veram AB & erroneam AD, ut sinus anguli tertii o distantie stationum AC oppositi ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet in hoc casu distantiam erroneam calculo productam AD continuo in directum jacere veræ AB; consequenter latus CD terminans angulum erroneum ACD secare distantiam veram in præsentem casu productam in D. Describatur ergo, ex centro C, radio CB, arcus BE, qui est mensura erroris BCD (§. 57 Geom.), cumque nonnisi paucorum minorum sit, ex hypothesi, pro recta haberi potest. Quamobrem cum anguli BED & CBE sint recti (§. 309 Geom.), erunt anguli o & u (§. 147 Geom.), itemque u & x æquales recto (§. 241 Geom.); consequenter $o + u = x + u$ (§. 145 Geom.), atque ideo $o = x$ (§. 91 Arithm.). Est vero ut sinus anguli x (sive o, per demonstr.) ad arcum BE; ita sinus totus ad BD (§. 33). Ergo BE est ad BD ut sinus anguli o ad sinum totum (§. 173 Arithm.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

67. Cum sinus anguli o majorem habeat ad sinum totum rationem, si major, quam ubi minor fuerit (§. 203 Arithm.); eodem errore in metiendo angulo ACB admissio, hoc est, arcu BE existente eodem, minor erit error in distantia determinanda admissus BD, ubi angulus o major, quam ubi minor fuerit (§. 206 Arithm.).

COROLLARIUM II.

68. Unde consequitur, talem hoc in casu fieri debere stationum A & C electionem, ut anguli A & C sint admodum obliqui, angulus vero o evadat recto proximus: id quod obtinetur si anguli A & C junctim sumti tantillo excedant rectum (§. 240 Geom.).

COROLLARIUM III.

Tab. II. Fig. 23. 69. Anguli obtusi eundem sinum habent cum acutis, qui ipsis deinceps ponuntur (§. 5). Quamobrem si recto fuerint multo majores, perinde est in præfenti casu, ac si angulus o esset valde acutus. Quod si autem angulum o in electione stationum obtusum desideres, tantillo rectum excedere debet, consequenter anguli A & C simul a recto tantillo deficient necesse est.

COROLLARIUM IV.

70. Si angulus o fuerit rectus, arcus BE cum ipsa BD coincidit, atque adeo errori in distantia admissio æqualis reperitur, ubi in eadem mensura determinatur, in qua datur distantia stationum AC ex radio nempe CB (§. 435 Geom.).

COROLLARIUM V.

71. Errore adeo in angulo C existente eodem, qui in distantia admittitur minimus omnium est, ubi angulus o fuerit rectus.

THEOREMA VII.

72. Si in dimetienda distantia locorum AB, ex duobus angulis A & C & uno latere AC, error etiam in altero angulo metiendo A admittatur, præter eum qui in angulo C committitur; erit errorem in angulo A commissum metiens arcus DI, distantia uno errore implicita AD tanquam radio descriptus, ad errorem inde in distantia productum IH, ut sinus anguli tertii o quantitate erroris primi m diminuti ad ejus cosinum.

DEMONSTRATIO.

Etenim si AH fuerit recta positione data, in quam ob errorem in angulo A metiendo admissum promovetur distantia AB, recta errorem primum m terminans CD continuanda, donec

illi in H occurrat, eritque AH distantia ex duplici errore m & k admissio. Jam, distantia uno errore implicita AD tanquam radio, describatur arcus DI mensura erroris k (§. 57 Geom.); erit is tum ad AD, tum ad AI perpendicularis (§. 308 Geom.); consequenter anguli DIH & ADI recti (§. 78 Geom.), cumque arcus DI sit paucorum minorum (§. 59 Geom.) pro recta haberi potest. Hinc porro ut in Demonstratione præcedente colligitur esse $y = x = o - m$ (§. 239 Geom.). Est vero ut sinus anguli y ad DI, ita sinus anguli z ad IH (§. 33). Ergo DI ad IH ut sinus anguli y ad sinum anguli z (§. 173 Arithm.), sive cosinum anguli y (§. 241 Geom. & §. 11. Trig.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

73. Si in dimetiendo angulo peccetur in defectu, error in distantia admissus eodem modo determinatur, nisi quod tum fiat subtractivus, atque adeo unus alterum imminuere, immo prorsus compensare possit, ubi alter additivus, alter subtractivus fuerit. Sed plura non addimus, ob rationem paulo ante dictam.

PROBLEMA XXVII.

74. Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum AB. Tab. II. Fig. 17.

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 152 Geom.), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 125 Geom.).
2. Investigetur etiam quantitas rectorum DC & CE (§. 126 Geom.).

3. Sum-

- Tab. II. Fig. 17.
- Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180° , ut relinquantur anguli ACD (§. 148 *Geom.*) & CBE (§. 245 *Geom.*): eodemque modo invenitur angulus DAC.
 - Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 36), & hinc porro angulus CAB (§. 40), tandemque AB (§. 36).

PROBLEMA XXVIII.

Tab. II. Fig. 18. AB. 75. *Invenire altitudinem accessibilem*

RESOLUTIO.

- Statione in E electa, Instrumentoque (§. 284 *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 152 *Geom.*).
- Quærat porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 126 *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 227 *Geom.*).
- Cum adeo C sit rectus (§. 78 *Geom.*), in triangulo ACD inveniatur AC (§. 36).
- Huic si addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

THEOREMA VIII.

Tab. II. Fig. 19. 76. *Si in quantitate anguli A investiganda aberretur, erit altitudo vera BD ad falsam BC, ut tangens anguli veri DAB ad tangentem anguli erronei CAB.*

DEMONSTRATIO.

Affumto AB pro sinu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli CAB (§. 7). Sunt itaque

altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Eodem modo se habet Demonstratio, si angulus erroneus sit minor vero.

COROLLARIUM I.

77. Quoniam, posita eadem quantitate anguli veri atque erronei, eadem est ratio altitudinis veræ ad erroneam (§. 76); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM II.

78. Quia tangentes arcuum majorum & valde exiguorum, seu recto vel minuto proximorum, minorem rationem inter se habent quam tangentes mediocrium seu semirecto vicinorum, minore nempe ad majorem relata, Canone tangentium teste; si idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo, & mediocri; error in altitudine admissus major erit in casu priore, quam in posteriore.

SCHOLIUM.

79. Sit ex. gr. angulus verus BAD 30° , AB $67'$: erit altitudo vera $3^\circ 8' 6''$. Ponamus assumi angulum erroneum BAC 31° : is producet altitudinem erroneam BC $4^\circ 0' 2''$ (§. 36). Sit in distantia minore BE angulus DEB recto proximus 86° , & assumatur per errorem angulus 87° : reperietur altitudo erronea $5^\circ 1' 6''$, quæ erroneam supra inventam excedit $1^\circ 1' 4''$.

COROLLARIUM III.

80. Quoniam itaque in distantia minore EB angulus E major est quam DAB in majore AB (§. 188 *Geom.*), in distantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a semirecto.

THEO-

THEOREMA IX.

Tab. II. Fig. 20. 81. Si Instrumentum in A non fuerit horizontaliter collocatum, sed vel quantitate anguli BAD versus horizontem inclinatum, vel quantitate anguli EAB ab eodem reclinatum; erit altitudo vera ad falsam ut tangens anguli veri CAB ad tangentem erronei CAD vel CAE.

DEMONSTRATIO.

Sumto enim AB pro radio, CB est tangens anguli veri CAB (§. 7). Inferendum ergo: ut sinus totus ad tangentem CAB, ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut sinus totus ad tangentem CAD, ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§. 196 *Arihm.*). Quod erat primum.

Idem eodem modo ostenditur, si instrumentum quantitate anguli EAB a situ horizontali reclinetur. Quod erat alterum.

SCHOLIUM.

82. Eadem ergo hic locum habent Corollaria, qua modo Theoremati precedenti subiecimus. Ceterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vi-

tioso nempe situ tam lineæ AC, quam AB commissum.

PROBLEMA XXIX.

83. Metiri altitudinem inaccessam AB. Tab. II. Fig. 21.

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ stationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 284 *Geom.*), tanto intervallo DF distantes, ut angulus FAD non sit nimis exiguus, nec altera statio G nimis vicina altitudini AB (§. 78, 80).
2. Investigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 152 *Geom.*), itemque distantia FD longitudo (§. 126 *Geom.*).
3. Inveniatur primum in triangulo AFD, ex datis angulo D, per observationem, & angulo AFD (§. 239 *Geom.*) & latere FD, latus AF (§. 36); dein, ex notis in triangulo ACF, præter rectum C, angulo F & latere AF, latus AC, itemque CF (§. 36); tandem, ex cognitis in triangulo FCB, præter rectum C, angulo CFB & latere CF, latus CB (§. 36).
4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quaesita AB (§. 86 *Arihm.*).

Finis Trigonometriae plana.

Fig: Trigonometr. Tab: I.

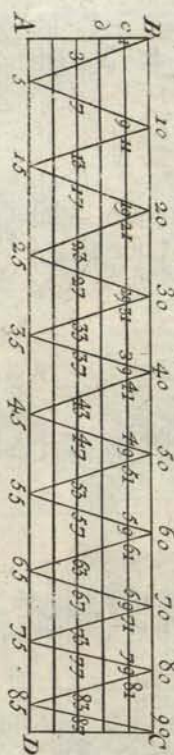


Fig: 9.

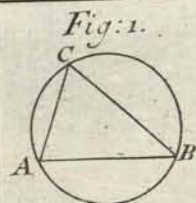


Fig: 1.

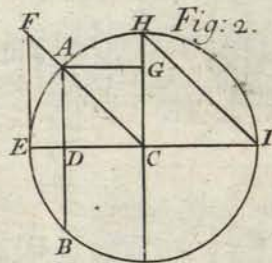


Fig: 2.

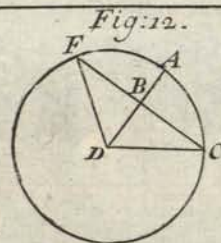


Fig: 12.

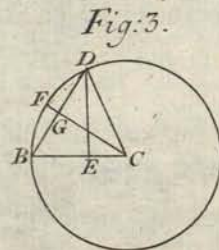


Fig: 3.

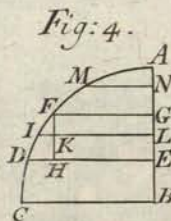


Fig: 4.

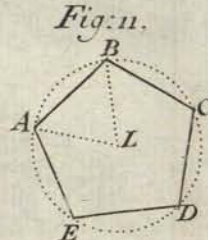


Fig: 11.

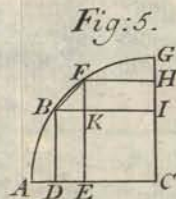


Fig: 5.

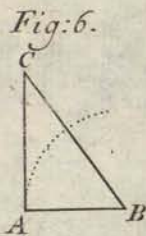


Fig: 6.

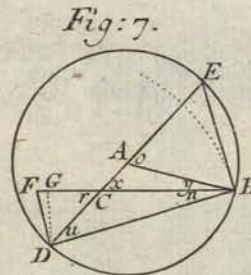


Fig: 7.

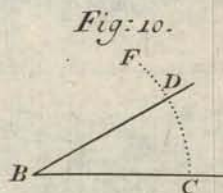


Fig: 10.

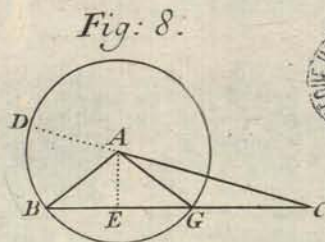


Fig: 8.

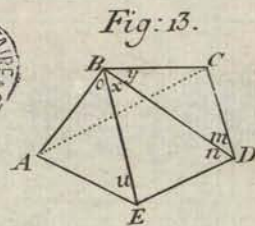


Fig: 13.

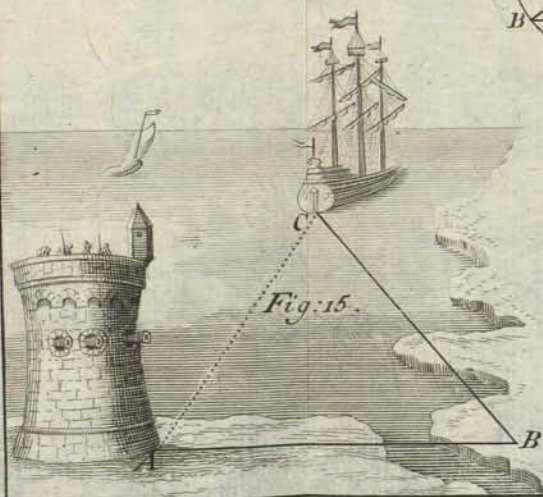


Fig: 15.

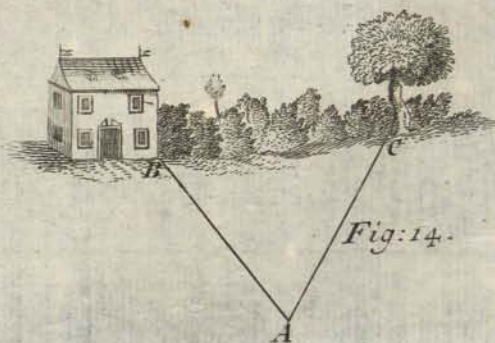
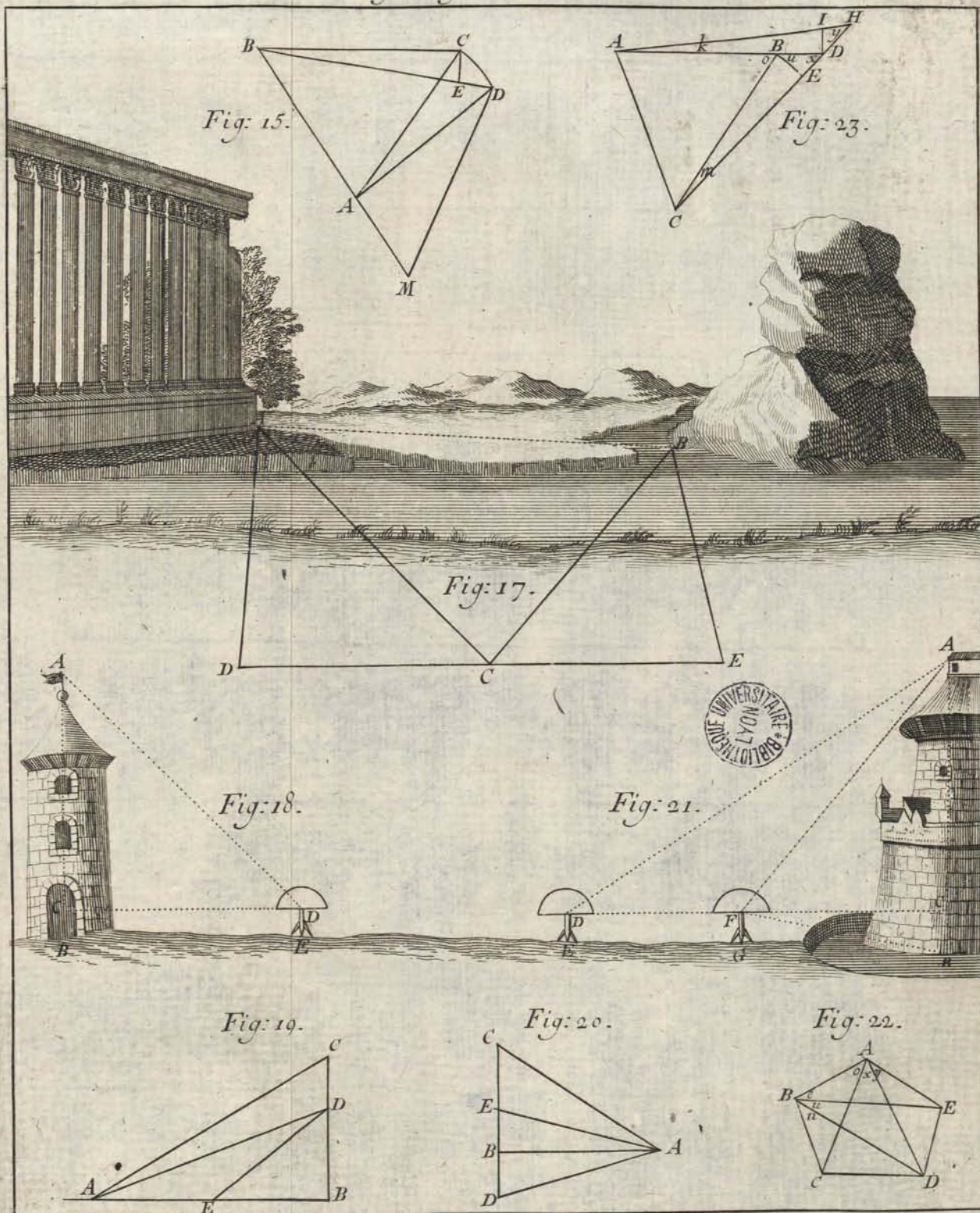


Fig: 14.

Fig: Trigonometr: Tab: II.



E L E M E N T A
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
TAM FINITORUM QUAM INFINITORUM.

P R Æ F A T I O.



PICEM totius Eruditionis humanæ conscendi-
mus Analysin tradituri: est enim Ars, per cal-
culum quantitatum generalem, proprio Marte
inveniendi veritates in Mathesi non minus
pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ
communis atque Geometriæ hæctenus expositis
instructus, & Analyfi adjutus, multa inveniet,
quæ ex aliorum scriptis non sine tædio alias haurire deberet;
immo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectissima
est studiorum nostrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis
aptos reddit ad inveniendum quodlibet, eo maxime tempore,
quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio
concepitur promptitudine ex datis quibusdam alia incognita
eliciendi. Accedit, in moderna Analyfi, Artis ratiocinandi per-
fectissima occurrere exempla. Notiones enim signis expressæ
imaginationi præsentia sistunt, quæ alias ultra ejus spheram
ascenderent: longa ratiociniorum series, quibus non sine multa
attentione ac circumspectione notionum nexus detegitur, in
Artem signorum combinatoriam convertitur, constanter ean-
dem & principiis paucis ac manifestis superstructam. Illud
autem prorsus mirabile existit, ope Analyseos unica sæpius
linea tot veritates exprimi, quas juxta communem methodum
exponendas ac demonstrandas volumina integra non caperent.
Hinc, unius lineæ intuitu, integras fere disciplinas, paucorum

minutorum spatio, addiscere licet, quibus, juxta communem methodum comprehendendis, anni complures vix sufficerent. Solidam ergo in Mathesi eruditionem consecuturus Analyfi studeat opus est. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla est), quam novitate rei deterritus a præstantissimo studiorum genere arceatur; Arithmeticam speciosam familiarem sibi reddat, neglectis sub initium regularum rationibus, sicubi difficultatem facebant, & exemplis numericis in locum earundem substitutis. Ubi ad exempla algebraïca pervenerit, non inutile judicamus, ut Tyrones data per numeros variis modis explicent, & idem Problema in casibus specialibus aliquoties solvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adsuescant & ejus rationes simplices perspiciant. Neque vero putandum est, integram Analyfin jamdum esse inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc subsidia deesse posterorum industria detegenda. Certe quæ in Elementis Geometriæ docuimus, per modernam Analyfin non omnia eruuntur, imprimis si a linearum & superficierum situ pendent. Quamobrem LEIBNITIUS, Vir in omni eruditione summus, pro ea, quæ ipsi est, ingenii perspicacitate novam quandam *Analyfin situs* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *calculus situs* appellat) superstructam, a calculo magnitudinum, quibus in nostra Analyfi utimur, toto cælo differentis. Immo, qui hætenus reperta animo comprehenderit & ad solvenda Problemata cum cura adhibuerit, pluribus regulis inveniendi artem ipse locupletabit. Ceterum, quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari, studio prætermissa, ea per Analyfin eruimus, ex Geometria quoque sublimiori investigantes, quæ præ reliquis scitu necessaria.

E L E M E N T A
 ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

P A R S P R I M A,
 E L E M E N T A A N A L Y S E O S
 F I N I T O R U M T R A D I T.

S E C T I O P R I M A,
 D E A R I T H M E T I C A S P E C I O S A.

C A P U T P R I M U M.

De Arithmetica Rationalium.

DEFINITIO I.

1. **A**NALYSIS *mathematica* est Methodus resolvendi Problemata mathematica.

DEFINITIO II.

2. *Arithmetica speciosa* est, quæ computum quantitatum seu numerorum indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logistica speciosa*.

HYPOTHESIS I.

3. *Quantitatum datarum signa sint littera alphabeti priores, a, b, c, d &c. quæstarum postrema z, y, x &c. Quantitates æquales eadem littera indigentur.*

SCHOLION I.

4. Nempe cum quantitates data ac quæsitæ tanquam distinctæ intellectui represententur per diversas notiones; eadem quoque tanquam distinctæ representandæ sunt imaginationi per signa diversa.

SCHOLION II.

5. Nos CARTESIUM sequimur in Geometria. Angli nonnulli, exemplo HARRIOTI in Artis Analyticæ praxi, incognitas quantitates vocalibus; cognitæ consonantibus designant. VIETA hujus Logisticæ inventor usus est literis majoribus; qui eam primus perfecit HARRIOTUS & ipsum secutus CARTESIUS literas minores substituerunt.

HYPOTHESIS II.

6. Si quantitatum denominandarum quedam relationes mutue dantur, aut aliunde tanquam cognita supponi possunt; eas quoque in denominatione exprimi consuetum est.

Ex. gr. Si fuerint duæ quantitates quæsitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x , major rectius dicetur $3x$, quam y . Similiter cum quantitas major sit aggregatum ex semisumma duarum quantitatum & earundem semidifferentia, minor vero differentia inter semisummam & semidifferentiam earundem quantitatum (§. 39 Trigonom.); consuetum sæpius est, ut semisumma dicatur x & semidifferentia y , atque hinc quantitas major $x + y$, minor $x - y$, quam ut ipsa major x & minor y vocetur.

SCHOLIUM.

7. Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione expectandi, ex subsequentibus patebit. Breviatur calculus, idemque facilitatur; resolutiones Problematum sæpe magis genuinae inveniuntur. Alii suo loco sese offerent. Plura circa denominationem moneri possent, nisi consultius iudicarem ea per exemplum, quam per præcepta doceri.

HYPOTHESIS III.

8. Signa operationum arithmeticarum retineantur, quæ in Arithmetica communi tradidimus (§. 63, 65, 68, 71, 254, 295.); nisi quod quantitates se mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, instar fractionum scribantur.

Ex. gr. $\frac{a}{b} = a : b$; $\frac{2}{4} = 3 : 4$.

SCHOLIUM.

9. Vulgo multiplicationis signum est \times . Ex. gr. ab scribitur $a \times b$. Sed cum hoc sig-

num facile cum litera x a typhotetis confundatur, usus ejus merito improbat.

HYPOTHESIS IV.

10. Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compositi parenthesi () includuntur.

Ex. gr. factum ex $a + b - c$ in d ita scribitur: $(a + b - c)d$. Similiter factum ex $a + b - c$ in $d - g$ hunc in modum effertur, $(a + b - c)(d - g)$.

SCHOLIUM.

11. Vulgo hæc facta ita scribunt:

$d \times a + b - c$ & $a + b - c \times d - g$. Sed cum hæc scriptio typhotetis molestias creet, imprimis si ex alio capite linearum supra literas ducendarum numerus multiplicatur, signis Leibnitianis utendum esse iudicamus, quæ non inutiliter in Actis Eruditorum Lipsiensibus usurpantur & ab admodum R. P. Guidone GRANDO (a) in Italia primum introducta.

HYPOTHESIS V.

12. Si quantitatum se mutuo dividendum una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; signo parenthesicos () similiter utimur, nisi circumstantiæ singulares suadeant, eas fractionum instar scribi.

Ex. gr. Quotus ex $a + b$ per c ita scribitur, $(a + b) : c$. Quotus vero ex $a + b$ per $c - d$ ita exprimitur, $(a + b) : (c - d)$. Similiter $a : (a + b)$ designat quotum ipsius a per $a + b$ divisi. Idem quoti communitè ita scribantur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

HYPO-

(a) In Quadratura Circuli & Hyperbola, Part. 2. P. m. 58.

HYPOTHESIS VI.

13. Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per m, n, r, s, t &c.

Ex. gr. x^m, y^n, z^r &c. designant potentias indeterminatas diversi generis (§. 254 Arithm.); mx, ny, rz multipla vel submultipla diversa quantitatum x, y, z , prout m, n, r vel numeros integros, vel fractos designant (§. 136 Arithm.).

HYPOTHESIS VII.

14. Si radix ex pluribus literis componitur; parenthesi includitur & exponens ipsi suffigitur, ut ante.

Ex. gr. $(a + b - c)^2$ designat quadratum ex $a + b - c$; $(a + b - c)^m$ potentiam quamlibet, seu indeterminatam ipsius $a + b - c$.

SCHOLION.

15. Communiter ita scribunt $\frac{a+b-c}{a+b-c}^2$
 $\frac{a+b-c}{a+b-c}^m$.

DEFINITIO III.

16. Quantitas signo $+$ affecta dicitur *positiva*, item *affirmativa*, atque *nihilo major*: quæ vero signo $-$ afficitur, *privativa*, item *negativa*, atque *nihilo minor*; a nonnullis absurda.

COROLLARIUM I.

17. Quoniam $+$ est signum additionis (§. 63 Arithm.); $-$ vero signum subtractionis (§. 65 Arithm.): quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0 + 3 = +3, 0 + a = +a$; privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahitur; ex. gr. $0 - 3 = -3, 0 - a = -a$.

SCHOLION I.

18. Ponamus, te habere nummorum nihil, tibi que donari 100; habebis ergo 100 nummos, adeoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem positivam constituunt. Ponamus, e contrario, te nihil habentem solvere debere 100 nummos;

100 ergo nummorum debitum contrahes, adeoque, antequam solutio fiat, minus nihilo habebis. Solvendi enim sunt 100 nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas negativa est. Notandum vero quantitates positivas initio vel solitarie positas signo nullo affici. Cur vero positivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex Corollario patet.

COROLLARIUM II.

19. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; consequenter non quantitates veræ.

SCHOLION II.

20. Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & sic intelligibilis evadit.

COROLLARIUM III.

21. Si residuo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua subtractio facta (§. 106 Arithm.). Ergo $-a + a = 0, -3 + 3 = 0$ (§. 17): hoc est, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ se mutuo destruant.

COROLLARIUM IV.

22. Quoniam defectus unus alterum excedere potest (ex. gr. si 7 deficiunt, plura desunt, quam ubi 3 deficiunt), quantitates vero privativæ sunt verarum defectus (§. 19); ideo quantitas una privativa aliquoties sumta alteram superare potest. Quamobrem quantitates privativæ inter se homogeneæ sunt (§. 32 Arithm.).

COROLLARIUM V.

23. Sed quia defectus positivæ quantitatis aliquoties sumtus positivam superare nequit, cum potius multo magis ab eâ deficiat (§. 17); quantitates privativæ positivis heterogeneæ sunt (§. 32 Arithm.).

COROLLARIUM VI.

24. Cum adeo quantitates privativæ positivis heterogeneæ (§. 23), privativis homogeneæ sint, (§. 22); inter privativam & positivam ratio intercedere nequit, inter privativas vero ratio datur (§. 126 Arithm.). Ex. gr. $-3a : -5a = 3 : 5$.

SCHOLIUM III.

25. Non mirum videri debet inter quantitates privativas $-3a$ & $-5a$ eandem esse rationem, quæ est inter positivas $+3a$ & $+5a$. Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogenæ sunt, proportionales esse possint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifestum est, in qua eandem rationem inter lineas esse demonstravimus, quæ inter superficies datur. Ex. gr. Parallelogramma æqualium basium rationem altitudinum habent (§. 389 Geom.) & in praxi regulæ trium pretia sumuntur ut mercium quantitates; licet pretia mercibus heterogenea sint. Falluntur autem, qui inter 1 & -1 , atque inter -1 & 1 rationem eandem esse sibi persuadent (§. 24).

THEOREMA I.

26. Quantitas qualibet pro unitate assumi potest.

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (§. 3 Arithm.), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§. 13 Arithm.). Ergo ipsa pro unitate assumi potest (§. 4 Arithm.). Q. e. d.

PROBLEMA I.

27. Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas addere.

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur, ut in Arithmetica communi.
2. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem & residuo præfigitur signum majoris.
4. Quantitates diversis literis notatæ junguntur mediante signo $+$ (§. 8).

$$\begin{array}{r} 4a + 2b - 2c - 5d - g \quad a - b \\ 5a - 2b + 6c + 2d - 3g \quad \quad \quad c \\ \hline 9a \quad \quad + 4c - 3d - 4g \quad a - b + c \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (§. 26); erit $a + a + a + a = 4a$; consequenter $4a + 5a = 9a$ (§. 96 Arithm.). Eodem modo patet esse $-g - 3g = -4g$. Quod erat unum.

Quoniam $6c = 4c + 2c$, per demonstr. erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (§. 91 Arithm.). Sed $2c - 2c = 0$ (§. 21). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$, per demonstr. Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 88 Arithm.) & $-2d + 2d = 0$ (§. 21). Ergo $-5d + 2d = -3d$. Quod erat alterum.

Tertium per se patet (§. 8).

SCHOLIUM.

28. Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus a denotare thalerum, b grossum, c nummum; habebimus

$$\begin{array}{r} 7a - 9b + 5c = 7 \text{ th.} - 9 \text{ gr.} + 5 \text{ num.} \\ 3a + 5b - 9c = 3 \quad + 5 \quad - 9 \end{array}$$

$$10a - 4b - 4c = 10 \text{ th.} - 4 \text{ gr.} - 4 \text{ num.}$$

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 thalerorum deficiunt 9 grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad 4 reducitur. Quoniam vero non 5 grossi integri, sed demittis 9 nummis, summae adjiciendi; summa 10 th. - 4 gr. excedit genuinam 9 nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in

numero superiori, cui inferior additur, occurrant 5 nummi, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc desiderantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo Inventore detecta.

THEOREMA II.

29. In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahenda mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.

DEMONSTRATIO.

Si $c + d$ fuerit subtrahenda ex $a + b$; differentiam esse debere $a + b - c - d$, adeoque signa + in quantitate subtrahenda in — mutari, ex *hypoth.* 3 (§.8) patet. Sed si $c - d$ subtrahenda ex $a + b$, & integrum c subtrahitur; quantitas major subducta quam fieri debebat. Ergo quod plus justo subtractum est d , iterum addendum. Prodit ergo $a + b - c + d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

30. Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas a se invicem subtrahere.

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ signa eadem habent, & minor e majore subtrahenda; subtractio ut in Arithmetica communi (§. 103 *Arithm.*) absolvitur.
2. Si vero major e minori subducenda; contraria ratione minor e majore subtrahitur & residuo præfigitur signum —, si quantitates signo + afficiuntur; signum vero +, si signo — gaudent.
3. Si quantitates diversa signa habent; in additionem mutatur subtractio & aggregato præfigitur signum ejus

quantitatis, ex qua subtractio facta est.

4. Si quantitates diversis literis notatæ, signa subtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$8a - 5c + 9d = 8th. - 5gr. + 9num.$$

$$6a - 8c - 7d = 6 - 8 - 7$$

$$2a + 3c + 16d = 2th. + 3gr. + 16num.$$

$$9b + 15c - 7d + 8e - f$$

$$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$$

$$3b - 5c + 2d + 17e - 8f$$

$$a + b - c \qquad a + d$$

$$d - e + f \qquad c - e - g$$

$$a + b - c - d + e - f \qquad a + d - c + e + g$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ sint vel unitates eadem, vel ejusdem unitatis multiplæ aut submultiplæ (§. 26); erit $8a - 6a = 2a$ (§.35, 103 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ subtrahenda; erit residuum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§.29). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§.27). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $-9e + 7f$ subtrahi debent ex $8e - f$; erit residuum $8e - f + 9e - 7f$ (§.29). Sed $-f - 7f = -8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§.27). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per Theor. 2 (§.29).

Aliter.

1. Signa quantitatis subtrahendæ mutantur in contraria (§.29): quo facto
2. Additio fiat (§.27), seu quæ se mutuo destruunt deleantur.

Ex. gr.

Ex.gr. Si ex $9b + 15c - 7d + 8e - f$ subtrahi debet $6b + 20c - 9d - 9e + f$ fiat (§. 29) $- 6b - 20c + 9d + 9e - f$; erit (§. 27) residuum $3b - 5c + 2d + 17e - 2f$. Nimirum $+ 6b - 6b$, $+ 15c - 15c$, $- 7d + 7d$, se mutuo destruunt (§. 21).

SCHOLIUM.

31. Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativa positivis heterogeneae sint (§. 23), heterogeneae autem nec addi (§. 61 Arithm.), nec a se invicem subtrahi possunt (§. 64 Arithm.), privativa tamen positivis addantur & ab iis subtrahantur. Enim vero rem curatius perpendens animadvertes, proprie loquendo privativam nunquam addi positivae, nec ab eadem subtrahi: sed in additione subtrahi, quod plus justo fuerat additum (§. 27); in subtractione addi, quod plus justo fuerat subductum (§. 30).

THEOREMA III.

32. Si quantitas positiva per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit positiva.

DEMONSTRATIO.

Est enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 66 Arithm.). Sed uterque factor est positivus, per hypoth. Ergo & factum positivum esse debet (§. 24). Quod erat unum.

Si $+ a$ ducitur in $+ b$, factum est $+ ab$, per demonstr. Ergo si $+ ab$ dividitur per $+ a$, quotus erit $+ b$; si per $+ b$, quotus $+ a$ (§. 210 Arithm.). Quod erat alterum.

THEOREMA IV.

33. Si quantitas negativa per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit negativa.

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem est hac quantitate aliquam aliquoties sibimetipsum addere (§. 67 Arithm.). Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 27). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. Quod erat unum.

Factum ex $- a$ in $+ b$ est $- ab$ per demonstr. Ergo si $- ab$ dividitur per $+ b$, quotus est $- a$ (§. 210 Arithm.). Quod erat alterum.

THEOREMA V.

34. Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur; quantitas positiva prodit.

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 66 Arithm.): id quod ipsa notio quantitatis privativae insinuat (§. 19), utpote quae repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 67 Arithm.). Quare haec multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativae positivis junguntur, ita ut addi rursus debeat, quod plus justo fuerat subtractum: id quod evidentissime ita demonstramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum, & in eo $AC = a$, $CD = b$. Ducatur EF ipsi CD parallela (§. 258 Geom.); erit ob rectos ad E & F (§. 230 Geom.) & $EF = AB$, itemque $AE = BF$ (§. 238 Geom.), ABFE rectangulum (§. 100 Geom.). Eodem modo ostenditur, ducta HG ipsi BD parallela; fore

Tab.I. re GHBD & BHIF, consequenter
 Fig.I. AEIH rectangula. Sit ergo $AE=c$,
 $GD=d$: erit $EC=a-c$, $CG=b$
 $-d$, atque hinc $ACDB=ab$,
 $AEIH=bc-dc$ & $HGDB=ad$
 (§.375 Geom. & §.33 *Analys.*). Quodsi
 areas rectangulorum AI, & HD sub-
 trahas ab area rectanguli AD; relin-
 quitur area rectanguli ECGI, hoc est,
 factum ex $a-c$ in $b-d$ (§. 375
Geom.). Reperitur adeo $(a-c)$
 $(b-d)=ab-ad-bc+cd$ (§. 30).
 Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$
 esse $+cd$. *Quod erat unum.*

In divisione quarimus, quoties
 quantitas una in altera contineatur
 (§. 69 *Arithm.*). Divisurus ergo quan-
 titatem privativam per privativam
 querit, quoties defectus unus in al-
 tero contineatur (§. 19): quotus adeo
 qui idem indicat (§. 69 *Arithm.*), uti-
 que quantitas positiva esse debet. *Quod*
erat alterum.

SCHOLIUM.

35. Possunt etiam Theorema 3 & 4 ope
 rectanguli demonstrari.

THEOREMA VI.

36. Si quantitas positiva per negati-
 vam multiplicatur aut dividitur; quan-
 titas privativa prodit.

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas
 multiplicanda toties sibimetipsi adda-
 tur, quoties multiplicans unitatem con-
 tinet (§. 66 *Arithm.*); quantitas vero
 privativa sit defectus alicujus quanti-
 tatis (§. 19); proprie loquendo posi-
 tiva per privativam multiplicari ne-
 quit. Hinc denuo multiplicatio tan-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

tum locum habet, ubi privativæ posi-
 tivis junguntur, ita ut subtrahatur,
 quod plus justo fuit additum: id quod
 ita demonstramus.

Sint LMON & PMOQ rectangula, Tab.I.
 & in iis $NO=a$, $MO=b$, $QO=c$, Fig.2.
 erit $NQ=a-c$, area PQOM = bc ,
 $LNOM=ab$, (§. 375 *Geom.*), conse-
 quenter $LNQP=b(a-c)=ab-bc$.
 Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$.
Quod erat unum.

Factum ex $-c$ in $-d$ est $+cd$
 (§. 34). Ergo si $+cd$ dividis per $-c$,
 quotus esse debet $-d$ (§. 210 *Arithm.*).
Quod erat alterum.

THEOREMA VII.

37. In multiplicatione ac divisione
 eadem signa efficiunt +, diversa —.

DEMONSTRATIO.

Si quantitates se mutuo multipli-
 cantes aut dividentes fuerint positivæ
 vel privativæ; quantitas prodit in utro-
 que casu positiva (§. 32, 34): si vero
 altera privativa, altera positiva; quan-
 titas prodit privativa (33, 36). Ergo
 eadem signa efficiunt +, diversa —.
Q. e. d.

PROBLEMA III.

38. Quantitates tam eodem, quam
 diversis signis affectas in se invicem
 ducere.

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica
 communi (§. III *Arithm.*), nisi quod
 notetur regula: eadem signa faciunt +,
 diversa — (§. 37).

Hh

a+c

$$\begin{array}{r}
 a + c \\
 b + d \\
 \hline
 + ad + cd \\
 ab + bc \\
 \hline
 ab + ad + bc + cd \\
 \hline
 - ad - bd + dd \\
 - ab - bb + bd \\
 aa + ab - ad \\
 \hline
 aa * - bb - 2ad * + dd
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10 = 8 + 4 - 2 \\
 2 = 8 - 4 - 2 \\
 \hline
 - 16 - 8 + 4 \\
 - 32 - 16 + 8 \\
 64 + 32 - 16 \\
 \hline
 20 = 64 * - 48 * + 4
 \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{r}
 8 = 10 - 2 \\
 7 = 10 - 3 \\
 \hline
 - 30 + 6 \\
 100 - 20 \\
 \hline
 56 = 100 - 50 + 6 = 50 + 6
 \end{array}$$

SCHOLIUM.

39. Exemplum posterius demonstrationem exhibet ocularem multiplicationis per digitos. Nimirum 2 & 3 sunt distantia factorum a denario per digitos in utraque manu erectos representari solita; quod relinquitur, factis ex distantis istis in denarium a 100 subductis, indicatur digitis residuis in utraque manu &, ut ab erectis distinguantur, depressis, singulis nempe pro totidem denariis sumtis. Ita in nostro casu in altera manu deprimuntur digiti 2, in altera 3, simul 5, adeoque quinque numerantur decades. Summae adjicitur factum ex digitis in utraque manu erectis in se invicem.

PROBLEMA IV.

40. Quantitates compositas dividere.

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi potest, orta nempe ex divisore

in aliam (§. 210 *Arithm.*); divisio instituitur ut in numeris (§. 117 *Arithm.*), notata tamen regula: eadem signa faciunt +, diversa — (§. 37).

In aliis casibus tantum observanda, quæ supra præcepimus (§. 8).

Ex. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$.

$$\begin{array}{r}
 a - b - d \) \ aa - bb - 2ad + dd \\
 \underline{aa - ab - ad} \\
 ab - bb - ad + dd
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + ab - bb - ad + dd \\
 + ab - bb - bd \\
 \hline
 - ad + bd + dd \\
 - ad + bd + dd \\
 \hline
 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

PROBLEMA V.

41. Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 236, 237 *Arithm.*).

Ex. gr. sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 235 *Arithm.*). Ergo summa $\frac{ad + bc}{bd}$ (§. 27).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex $\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc - ad}{bd}$ (§. 30).

PROBLEMA VI.

42. Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 239, 243 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Sint fractiones se mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones se mutuo divisuræ $\frac{ac}{db}$ & $\frac{a}{b}$: erit quotus $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{acb}{abd} = \frac{c}{d}$ (§.231 *Arithm.*).

COROLLARIUM I.

43. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§.59 *Arithm.*); erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc est, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} = \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum esse per integram, si fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in *Arithmetica* communi (§.242 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

44. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a , hoc est, ex quantitate fracta per integram divisa, $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem dividendi multiplicandum esse per divisorem, & factum subscribendum numeratori immutato, si fractio per integrum dividenda.

PROBLEMA VII.

45. *Quantitatem quamcunque per divisorem compositum dividere, utut divisionem exactam non admittat.*

RESOLUTIO.

Divisio instituat ut in *Arithmetica* communi (§.117 *Arithm.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifestet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur; observata subtractionis, itemque multiplicationis ac divisionis lege de signorum mutatione (§.29, 37).

Ex. gr. Si quantitas dividenda b , dividens $a+c$, erit:

$$\begin{array}{r}
 a+c) b \quad \left(\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} \text{ \&c. in} \right. \\
 \underline{b + \frac{bc}{a}} \quad \text{infin.} \\
 \frac{bc}{a} \\
 \underline{\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}} \\
 + \frac{bc^2}{a^2} \\
 \underline{+ \frac{bc^2}{a^2} + \frac{bc^3}{a^3}} \\
 \frac{bc^3}{a^3} \text{ \&c. in infin.}
 \end{array}$$

Nimirum si b per a dividitur, quotus est $\frac{b}{a}$ (§.8). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a+c$ est $\frac{ab}{a} + \frac{bc}{a}$ (§.43), hoc est, $b + \frac{bc}{a}$ (§.223 *Arithm.*): quod ex dividenda b subductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§.30). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur, erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§.44). Factum ergo ex $a+c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc est, $-\frac{abc}{a^2} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§.43, 37), seu $-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§.231 *Arithm.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ subtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§.30). Unde patet quomodo divisio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipsa divisionis ratio insinuat, quorum constare ex infinita terminorum serie, quorum numeratores sunt potentia ipsius c , quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicata; denominatores vero potentia ipsius a , quarum exponentes

nentes æquantur numero ordinis terminorum. Ex. gr. in termino tertio potentia ipsius c in numeratore secunda est, potentia vero ipsius a in denominatore tertia.

COROLLARIUM I.

46. Si $b = 1$ & $a = 1$, substituto valore hoc in quoto, prodit $1 = c + c^2 - c^3$ &c. in infin. Quare $1 : (1 + c) = 1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin.

COROLLARIUM II.

47. Quodsi termini in quoto continuo decrescant, series dat quotum vero quantumlibet propinquum. Ex. gr. si $b = 1$, $c = 1$ & $a = 2$; valoribus his substitutis in serie generali, aut divisione ut in exemplo universali instituta, reperietur $\frac{1}{2} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam seriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, sed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in sexto; denuo peccabitur in defectu, sed qui minor $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

SCHOLION.

48. Similiter invenietur $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. En legem constantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per series infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ series progressionis geometricæ decrescantes, ita quidem ut numerator semper sit unitas, denominator termini primi idemque exponens rationis unitate differat a denominatore fractionis resolvenda.

COROLLARIUM III.

49. Si termini in quoto continuo crescant, series a quoto tanto magis discedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis fit, nisi terminetur, ultimumque residuum sub signo suo adjiciatur. Ex. gr.

Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128$ &c. Terminus unus 1 superat $\frac{1}{3}$ excessu $\frac{2}{3}$; termini duo deficient $\frac{4}{3}$; termini tres excedunt $\frac{8}{3}$; quatuor deficient $\frac{16}{3}$; & ita porro. Ponamus seriem terminari in -8 ; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$. Similiter si sit $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; reperietur quotus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. ubi termini numero pares, $= 0$, deficient continuo $\frac{1}{2}$; termini autem numero impares conficiunt 1 ; consequenter excessus $= \frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$, vel $= 0 + \frac{1}{2}$. Ponamus seriem universalem (§.46) terminari in $-c^3$; erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = (1 + c - c - c^2 + c^2 + c^3 - c^3 - c^4 + c^4) : (1 + c)$ (§.235 Arithm.) $= \frac{1}{1+c}$ (§.21).

SCHOLION I.

50. Tyrones hoc Problema cum suis Corollariis sub initium prætermittere possunt, donec inferius ad illud provocetur.

SCHOLION II.

51. Quoniam si $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ in seriem resolvitur, quotus a fractione proposita, quantumlibet continuatus, continuo differt $\frac{1}{2}$ (§.49), resolutio in presenti casu irrita evadit. Unde patet fons erroris, quem commisit Guido GRANDUS in Tractatu De quadratura circuli & hyperbolæ, Cor. 3, Prop. 7, Part. I, p. m. 29, ubi infert, ob $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. in infinitum $= 0$, summam infinitarum nullitatum esse $\frac{1}{2}$. Nec veritatem attingisse liquet LEIBNITIUM in Actis Eruditorum Tom. 5, Supplement. p. 264, & seqq.

DEFINITIO IV.

52. Series, quæ ad verum valorem continuo appropinquant, dicuntur convergentes: quæ ab eodem continuo recedunt, divergentes.

COROL-

COROLLARIUM I.

53. Ergo series fractionum continuo de-
 crescentium (§.47, 48) sunt convergentes:
 ceteræ vero, quarum termini continuo
 crescunt (§.49), divergentes.

PROBLEMA VIII.

54. Potentiam quamcunque per aliam
 ejusdem radicis multiplicare vel dividere.

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur expo-
 nentes, summa est exponens facti.

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & y^m & y^n & a^m & x^n \\ x^4 & y^m & y^n & a^r & x^i \end{array}$$

$$x^7 \quad y^{2m} \quad y^{m+n} \quad a^{m+r} \quad x^{n+i}$$

II. In divisione exponens dignitatis
 dividendi subtrahatur ab exponen-
 te dividendæ; residuum est expo-
 nens quoti

$$x^7 \left(x^3 \quad y^{m+n} \right) \left(y^m \quad a^m x^n \right) \left(a^{m-r} x^{n-i} \right)$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in
 progressionem arithmetica (§. 251, 333
Arithm.), dignitates in geometrica
 (§. 250, 332 *Arithm.*) progrediantur;
 illi pro harum logarithmis recte ha-
 bentur (§. 334 *Arithm.*). Ergo sum-
 ma exponentium, quos habent digni-
 tates se mutuo multiplicantes, est ex-
 ponens facti (§. 337 *Arithm.*); diffe-
 rentia exponentium, quos habent dig-
 nitates se mutuo dividentes, est expo-
 nens quoti (§. 343 *Arithm.*). Q. e. d.

SCHOLIUM.

55. Progressiones istæ hæc sunt:
 $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, \&c.$
 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \&c.$
 Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 54).
 Sed $x : x = 1$ (§. 69 *Arithm.*). Ergo
 $x^0 = 1$ (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA IX.

56. Potentiam quamcunque datam ad
 aliam dati exponentis evehere; aut ex
 eadem dati similiter exponentis radicem
 extrahere.

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data, intuitu ejus
 ad quam evehenda, radix est (§.
 246 *Arithm.*) & exponentes loga-
 rithmi dignitatum existunt, per
 demonstr. in *Probl. præc.* (§. 54):
 exponens potentia novæ habebi-
 tur, potentia datæ exponente in
 exponentem ejus, ad quam evehi
 debet, ducto (341 *Arithm.*).

Ex. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem
 n est x^{mn} . Potentia y^3 evecta ad dignita-
 tem 2 est y^6 .

II. Non absimili modo liquet, expo-
 nentem radicis haberi, si exponens
 dignitatis datæ dividatur per ex-
 ponentem radicis datum (§. 341
Arithm.).

Ex. gr. Radix quadrata ex x^6 est x^3 : radix n
 ex x^{mn} est x^m : radix n ex x^m est $x^{m/n}$.

COROLLARIUM.

57. Est itaque $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$
 $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ (§. 341 *Arithm.*); consequen-
 ter quantitates irrationales ad expressio-
 nem rationalem reduci possunt.

SCHOLIUM.

58. Quantum in *Analysi cammodi* asserat
 hæc reductio ex capite subsequente elucescet.
 Etenim si quantitates irrationales ad formam
 rationalium reducantur; peculiari pro iis cal-
 culo opus non est, sed rationalium instar tra-
 ctari possunt: quemadmodum primi docuerunt
 LEIBNITIUS atque NEWTONUS.

CAPUT II.

De Arithmetica Irrationalium.

PROBLEMA X.

59. **Q**uantitates irrationales diversæ denominationis reducuntur ad eandem.

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[r]{y^s}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[r]{y^s} = y^{s:r}$ (§. 57), diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 235 *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{n:r:m}$ & $y^{s:r} = y^{m:r:m}$ seu $x^{n:m} = \sqrt[m]{x^{nr}}$ & $y^{s:r} = \sqrt[r]{y^{ms}}$ (§. 57).

Ex.gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 57); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 235 *Arithm.*), hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 57); seu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad secundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

SCHOLION.

60. Quodsi quis ægre admiserit reductionem ad eandem denominationem in exponentibus quantitarum irrationalium factam; is easdem formulas, quas ejus ope eliciimus, per Algebram investigare potest, quemadmodum inferius docebitur.

PROBLEMA XI.

61. Quantitates irrationales ad simpliciorum expressionem reducere.

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^n x^m$ (§. 57), & $x^m = x^{m:m}$ (§. 56.), erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

Ex.gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2 \sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2 \sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3 \sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2 \sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM I.

62. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad simpliciorum expressionem reductæ sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter se ut quantitates rationales signis præfixæ (§. 178 *Arithm.*); consequenter quantitates irrationales inter se commensurabiles esse possunt (§. 160 *Arithm.*).

Ex.gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2 \sqrt{2}$, & $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3 \sqrt{2}$. Ergo $2 \sqrt{2} : 3 \sqrt{2} = 2 : 3$; hoc est, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$. In casu reliquo sunt incommensurabiles.

SCHOLION I.

63. Istud quantitarum irrationalium genus communicantium nomine venire solet.

COROL-

COROLLARIUM II.

64. Per præfens adeo Problema invenitur ratio rationalis irrationalium, si quæ datur.

COROLLARIUM III.

65. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x \sqrt[m]{a^n}$ (§. 61); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, si quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens signo radicali præfixus, & dignitas per quantitatem sub signo radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$, & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

SCHOLIUM II.

66. Quodsi quasiveris, quomodo in resolutione innotescat, utrum quantitas sub signo radicali posita per potentiam aliquam requisitam sit divisibilis, nec ne; & quenam sit ista potentia; in divisores resolvenda est, inter quos locum obtineant necesse est omnes potentia a prima usque ad requisitam, si cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Queritur an $\sqrt[4]{368}$ sit divisibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Resoluturus numerum 368 in suos divisores, reperiet tentando

2	184
4	92
8	46
16	23

nempe divisionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 potentiam primi gradus, 4 potentiam secundi, 8 potentiam tertii & 16 potentiam quarti. Ergo 16 est divisor quasitus, consequenter $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

PROBLEMA XII.

67. Quantitates irrationales addere, aut unam ex altera subtrahere.

RESOLUTIO.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ

(§. 61) fuerint commensurabiles (§. 63); quantitates rationales extra vinculum adduntur & a se invicem subtrahuntur; ibique summa, hic differentia denuo præfigitur signo radicali. Reliqua omnia sunt ut in additione & subtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 61) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 65) & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum sint incommensurabiles (§. 62); summa erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 27), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 30).

Hinc & intelliguntur exempla in compositis tum in additione:

$$4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5}$$

$$\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}$$

$5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5}$ summa; hoc est $\sqrt{3.25} + \sqrt{2.16} + \sqrt{7.100} + \sqrt{5.16}$ feu $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$

tum in subtractione

$$5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10}$$

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10}$$

$2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10}$ different. hoc est $\sqrt{2.4} - \sqrt{3.144} + \sqrt{10.289}$ feu $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{28900}$

DEMONSTRATIO.

Omnia manifesta sunt ex demonstratione Probl. 1 & 2 (§. 27, 30).

PROBLEMA XIII.

68. Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.

RESO-

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates sub signo radicali; ibi factò, hic quoto præfigatur signum idem radicale cum suo exponente. Quodsi radicales quantitates fuerint diversæ denominationis ante omnia reducantur ad eandem (§. 59).

Ex. gr. in multiplicatione $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$
& $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in compositis

$$\begin{array}{r} \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{6} - 2 \quad +\sqrt{6} + 3 \\ 3 + \sqrt{6} \quad 2 + \sqrt{6} \\ \hline 3 - 2 = 1 \quad 2\sqrt{6} + 5 \\ 7\sqrt{3} - 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{8} + 3\sqrt{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} \\ 35\sqrt{24} - 100 \end{array}$$

$35\sqrt{24} + 21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} - 100$
hoc est $70\sqrt{6} + 63\sqrt{2} - 30\sqrt{3} - 100$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{32} \\ \sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{32} \\ \hline +16 + 8 + 32 \\ +4 + 2 + 8 \\ 8 + 4 + 16 \end{array}$$

98

Similiter in divisione $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$
& $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. Item in compositis;
 $\sqrt{3}) \sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{12}$ ($\sqrt{5} - \sqrt{2} + 2$)

$$\begin{array}{r} \sqrt{15} \\ -\sqrt{6} + \sqrt{12} \\ -\sqrt{6} \\ \hline +\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

SCHOLIION I.

69. Interdum etiam divisio locum habet, si divisor compositus est. Sed cum rarissimus sit ejus usus & ea divisione ignorata maxime præclaros in Analyfi progressus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponi superfluum judicamus. Docet ipsam OZANAMUS in Novis Elementis Algebræ (a).

SCHOLIION II.

70. Ceterum ex tradito hætenus calculo liquet, si quantitatem duplici signo radicali affici contingat, ex. gr. si fuerit $(3 + \sqrt{2})\sqrt{2}$, operationes omnes eodem modo peragi, modo notetur, quantitatem sub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus. Ex. gr.

$$\begin{array}{l} \sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})} \text{ (§. 61)} \\ \sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(2 \cdot 9\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{(8\sqrt{3})} + \sqrt{(9\sqrt{12})} = 5\sqrt{(2\sqrt{3})} \\ = \sqrt{(50\sqrt{3})} \\ = \sqrt{7500}. \end{array}$$

Similiter in multiplicatione

$$\begin{array}{r} 3 + \sqrt{2} \quad \sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2}} \quad \sqrt{(5\sqrt{5})} \\ 3\sqrt{\sqrt{2}} + \sqrt{(2\sqrt{2})} \quad 5 + \sqrt{(5\sqrt{10})} \\ \text{hoc est } \sqrt{(9\sqrt{2})} + \sqrt{(2\sqrt{2})} \quad \text{seu } 5 + \sqrt{\sqrt{250}} \\ \text{seu } \sqrt{\sqrt{162}} + \sqrt{\sqrt{8}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{(3 + \sqrt{2})} \quad \sqrt{(3 + \sqrt{2})} \\ \sqrt{(5 - \sqrt{3})} \quad \sqrt{(3 - \sqrt{2})} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3\sqrt{2} - 2 \\ 9 + 3\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{7} \\ \sqrt{(15 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - \sqrt{6})} \end{array}$$

Dicuntur istiusmodi Radices, qualis est $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$, universales.

(a) Nouveaux Elémens d'Algebre, Lib. I. Probl. 4 & seqq. p. 7. & seqq.

SCHOLIION III.

71. Radices vero imaginariæ dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti $\sqrt{-2}$, cum quadratum -2 sit quantitas impossibilis, propterea quod omne quadratum sit positivum (§. 246 Arithm. & §. 37 Anal.). Facile autem patet additionem & subtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium. Ita $\sqrt{-18} + \sqrt{-8} = 3\sqrt{-2} + 2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2} = \sqrt{-50}$ & $\sqrt{-18} - \sqrt{-8} = \sqrt{-2}$. Quoniam vero quantitas privativa sub signo radicali consideratur instar positiva, in multiplicatione signum non mutatur, sed factò perinde ac factoribus præfigitur signum $-$: alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum. Quamobrem regula de signis tantummodo observatur respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali positarum.

$$\begin{array}{r}
 \text{Ex. gr. } \sqrt{-5} - \sqrt{-7} \quad \sqrt{-3} + \sqrt{-2} \\
 \hline
 \sqrt{-3} \qquad \qquad \qquad + \sqrt{-3} \\
 \hline
 \sqrt{-15} - \sqrt{-21} \qquad \qquad -3 + \sqrt{-6} \\
 \qquad \qquad \qquad \sqrt{-8} + \sqrt{-2} \\
 \qquad \qquad \qquad \sqrt{-8} - \sqrt{-2} \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad + 4 + 2 \\
 \qquad \qquad \qquad - 8 - 4 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad - 6 \\
 \\
 \text{Nimirum } \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = -2, \text{ \& } +1 \cdot -1 = \\
 -1. \text{ Ergo } -1 \cdot -2 = +2 \\
 \qquad \qquad \qquad 3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3} \\
 \qquad \qquad \qquad 3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2} \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad - 6\sqrt{-10} - 4\sqrt{-6} \\
 -45 + 6\sqrt{-15} \\
 \hline
 -45 - 6\sqrt{-10} + 6\sqrt{-15} - 4\sqrt{-6}
 \end{array}$$

C A P U T III.

De usu Calculi litteralis in inveniendis Theorematis.

PROBLEMA XIV.

72. **I**nvenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, subtractione, ac multiplicatione.

Quoniam numerus par per 2 dividi potest (§. 72 Arithm.), dicatur $2a$. Similiter alius numerus par fit $= 2c$. Erit

$$\begin{array}{r}
 2a \qquad \qquad 2a \qquad \qquad 2a \\
 2c \qquad \qquad 2c \qquad \qquad 2c
 \end{array}$$

Summa $2a + 2c$ Diff. $2a - 2c$ Fact. $4ac$

Theorema: Summa, item differentia, atque factum duorum numerorum parium est numerus par.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

PROBLEMA XV.

73. Invenire, qualis numerus prodeat, si parem impari addas, vel parem ab impari subtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.

Numerus par sit $2a$ (§. 72 Arithm.), impar $2c + 1$ (§. 73 Arithm.). Erit

$$\begin{array}{r}
 2c + 1 \qquad \qquad 2c + 1 \\
 2a \qquad \qquad \qquad 2a
 \end{array}$$

$2a + 2c + 1$ Summa: $2c + 1 - 2a$ Diff.

$$\begin{array}{r}
 2c + 1 \\
 2a
 \end{array}$$

$4ac + 2a$ Factum.

I i

Theo-

Theorema. Si parem impari addas, aut unum ex altero subtrahas; ibi aggregatum, hic differentia est numerus impar. Si vero numerus par & impar se mutuo multiplicent, factum est numerus par.

PROBLEMA XVI.

74. *Invenire, qualis prodeat numerus, si impar impari addatur, aut unus ex altero subtrahatur, aut si impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 73 *Arithm.*): erit

$$\begin{array}{r}
 2a+1 \\
 2b+1 \\
 \hline
 2a+2b+2 \text{ Summa.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2a+1 \\
 2b+1 \\
 \hline
 2a-2b \text{ Differ.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2a+1 \\
 2b+1 \\
 \hline
 4ab+2a+2b+1 \text{ Factum.}
 \end{array}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur, aut ab eo subtrahitur; ibi summa, hic differentia est numerus par. Si vero impar imparem multiplicet, factum est numerus impar.

PROBLEMA XVII.

75. *Invenire, qualis numerus prodeat, si meros numeros pares, aut numeros impares multitudine pari, aut denique numeros impares multitudine impari addas.*

Sint numeri pares $2a, 2b, 2c, 2d,$ &c. erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. numerus par (§. 72 *Arithm.*).

Theorema: Summa numerorum parium quotcumque est numerus par.

Sint numeri impares $2a+1, 2b+1, 2c+1, 2d+1$ &c. (§. 73 *Arithm.*) numerus eorundem par $2m$ (§. 72 *Arithm.*). Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 72 *Arithm.*). Tot scilicet sunt unitates, quot termini.

Theorema. Summa numerorum imparium quotcumque, multitudine pari, est numerus par.

Sint numeri impares, ut ante, $2a+1, 2b+1, 2c+1, 2d+1,$ &c. numerus eorundem impar $2m+1$. Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 73 *Arithm.*).

Theorema. Summa numerorum imparium quotcumque, si numero impares fuerint, numerus est impar.

SCHOLIUM.

76. *Notetur in his Problematibus denominandi artificium, quod consistit in analytica expressione numeri paris & imparis, quae eorum definitiones representat.*

PROBLEMA XVIII.

77. *Invenire, qualis sit numerus per quem impar parem metitur.*

Quodsi numerus impar parem metitur, erit par factum ex impari per parem, (§. 74 *Arithm.* & 73 *Anal.*), adeoque $(2a+1)2b=4ab+2b$. Est igitur $(4ab+2b) : (2a+1) = 2b$ (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens parem eum metitur per parem.

COROLLARIUM I.

78. Patet simul, numerum, qui metitur parem per imparem, esse parem.

COROLLARIUM II.

79. Et quoniam $(2ab+b) : (2a+1) = b$; liquet porro, si impar metiatur parem, illum quoque hujus dimidium metiri.

PRO-

PROBLEMA XIX.

80. *Invenire, qualis sit numerus, per quem impar imparem metitur.*

Quodsi impar imparem metitur, erit hic factum ex impari in imparem (§. 74 *Arith.* & §. 74 *Anal.*), adeoque $(2a+1)(2b+1)$ seu $4ab+2a+2b+1$. Est igitur $(4ab+2a+2b+1):(2a+1)=2b+1$ numerus impar (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens imparem eum metitur per imparem.

PROBLEMA XX.

81. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $= n$, erit altera $n+1$: quadratum majoris n^2+2n+1 (§. 246 *Arithm.*)
minoris n^2

Differentia $2n+1$

Theorema. Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, est numerus impar duplo radice minoris unitate aucto æqualis, seu summa radicum.

COROLLARIUM I.

82. Facillime ergo construuntur Tabulæ numerorum quadratorum, pro radicibus in serie naturali progredientibus. Summa nempe radice antecedentis & consequentis continuo additur quadrato antecedenti, ut prodeat consequens.

COROLLARIUM II.

83. Si $n=1$, erit $2n+1=3$: si $n=2$, erit $2n+1=5$: si $n=3$, erit $2n+1=7$: si $n=4$, erit $2n+1=9$ &c. Differentiæ itaque numerorum quadratorum sunt numeri impares in continua serie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione nascuntur numeri quadrati.

Radic.	Num. impar.	Num. Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PROBLEMA XXI.

84. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt.*

Sint radices n & $n+1$: erit
Cubus major n^3+3n^2+3n+1 (§. 248 *Arithm.*)
minor n^3

Differentia $3n^2+3n+1$,
hoc est, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed
 $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+n$.

Theorema. Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum radices unitate differunt, est aggregatum ex quadrato radice majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

Sit jam radix tertia $n+2$
erit cubus $n^3+6n^2+12n+8$
præced. n^3+3n^2+3n+1

Differ. $3n^2+9n+7$
Differ. præc. $3n^2+3n+1$

Differ. 2. $6n+6$

Theorema 2. Differentia secunda trium cuborum in serie naturali est aggregatum ex sextuplo radicis primæ & senario, seu factum ex radice secunda in senarium.

Quod si jam $n=1$, erit $6n+6=6+6=12$; si $n=2$, erit $6n+6=12+6=18$; si $n=3$, $6n+6=18+6=24$; si $n=4$, $6n+6=24+6=30$, &c.

Theorema 3. Differentiæ secundæ cuborum in serie naturali progredientium est progressio arithmetica, cujus terminus primus 12, differentia terminorum 6.

COROLLARIUM.

85. Constructo itaque numerorum quadratorum Canone (§. 82), per solam additionem inde porro construitur Canon numerorum cubicorum, per Theorema primum; nondum constructo, per tertium, quemadmodum ex sequente Tabula liquet.

Rad.	Cubi	Diff. 1.	Diff. 2.
1	1	7	12
2	8	19	18
3	27	37	24
4	64	61	30
5	125	91	36
6	216	127	42
7	343	169	48
8	512	217	54
9	729	271	
10	1000		

PROBLEMA XXII.

86. Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam earundem.

Sit quantitas major Q , minor q : erit summa $Q+q$, differentia $Q-q$. Hinc (§. 375 *Geom.*)

$$\begin{array}{r} Q+q \\ Q \end{array} \quad \begin{array}{r} Q+q \\ q \end{array} \quad \begin{array}{r} Q+q \\ Q-q \end{array}$$

$$\begin{array}{r} Q^2+Qq \\ Qq+q^2 \\ -Qq-q^2 \\ \hline Q^2+Qq \\ \hline Q^2 \quad -q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum quantitatum (ex. gr. linearum) in alterutram æquatur rectangulo partis unius in alteram atque quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex summa in differentiam æquale est differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

87. Quodsi rectangula Q^2+Qq & $Qq+q^2$ addantur; prodit $Q^2+2Qq+q^2$ quadratum ipsius $Q+q$ (§. 261 *Arithm.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram simul æquantur quadrato totius.

PROBLEMA XXIII.

88. Si totum sit divisum in duas partes æquales & in duas inæquales, determinare rectangulum partium inæqualium.

Sint partes æquales a & a , differentia inter partem æqualem & inæqualem b ; erit inæqualium major $a+b$, minor $a-b$; consequenter $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Ergo si addatur b^2 , habebitur a^2 .

Theorema. Si totum sit divisum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentie partis æqualis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROL-

COROLLARIUM.

89. Quoniam $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
& $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (§. 261 Arith.);
erit summa $2a^2 + 2b^2$, hoc est, summa
quadratorum partium inæqualium æqualis
est duplo quadrato partis dimidiæ & du-
plo quadrato differentiæ partis æqualis ab
inæquali.

PROBLEMA XXIV.

90. Determinare alia rectangula ex
partibus duabus, in quas totum aliquod
divisum.

Sint partes Q & q : erit totum $Q+q$,
hujus quadratum $Q^2 + 2Qq + q^2$.
Quodsi Q^2 addas; prodibit $2Q^2 +$
 $2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$.

Theorema. Quadratum totius, una cum
quadrato partis unius, æquale est rectan-
gulo ex duplo ejusdem partis in totum
atque quadrato partis alterius.

Quodsi $2Q+q$ in seipsum ducas;
prodibit $4Q^2 + 4Qq + q^2$.

Theorema. Quadratum ex toto & parte
una æquatur quadrato partis alterius, una
cum quadruplo quadrato partis illius &
quadruplo rectangulo partium in se in-
vicem.

PROBLEMA XXV.

91. Determinare quantitatem rec-
tanguli ex toto in partes tres inæqua-
les divisio atque parte una.

Sit totum $a+b+c$; erit $(a+b+c)c$
 $= ac + bc + c^2$.

Theorema. Rectangulum ex toto in tres
partes inæquales divisio in partem unam
æquatur quadrato ejusdem partis, atque
rectangulo ex eadem in summam duarum
reli quarum.

PROBLEMA XXVI.

92. Determinare quantitatem rectan-
guli ex linea in partes quotcunque di-
visa & infecta altera.

Sint partes lineæ sectæ $a, b, c, \&c.$
erit linea secta $= a+b+c, \&c.$ Sit
porro linea infecta $= d$: erit $(a+b+c,$
&c.) $d = ad + bd + cd, \&c.$

Theorema. Si linea recta fuerit in partes
quotcunque divisa & præterea alia infecta,
erit rectangulum sub iis comprehensum
æquale rectangulis sub infecta & singulis
sectæ partibus contentis.

PROBLEMA XXVII.

93. Determinare quantitatem rectan-
gulorum ex toto in duas partes divisio in
partes singulas.

Sit totum $= a+b$, erit $(a+b)a$
 $= a^2 + ab$ & $(a+b)b = ab + b^2$. Ergo
summa $= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
(§. 261 Arithm.),

Theorema. Si recta secta sit utcunque,
erunt rectangula sub tota & partibus com-
prehensa quadrato totius æqualia.

PROBLEMA XXVIII.

94. Determinare quantitatem rectan-
guli ex toto in duas partes æquales di-
visio & adjecto in adjectum.

Sit totum in duas partes æquales di-
visum $= 2a$ & adjectum $= c$; erit com-
positum $= 2a+c$; consequenter $(2a+c)c$
 $= 2ac + c^2$. Sed $(a+c)^2 = a^2 + 2ac$
 $+ c^2$. Ergo differentia $= a^2$.

Theorema. Rectangulum sub toto & ad-
jecto in adjectum, una cum quadrato par-
tis dimidiæ, est æquale quadrato compo-
siti ex dimidio & adjecto.

PROBLEMA XXIX.

95. Invenire Theorema generale pro
binomio ad dignitatem quamcunque eve-
hendo.

Sit $a+b$ radix binomia. Ducatur ea in se ipsam, erit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b$

+ $3ab^2 + b^3$, &c. (§. 250 *Aritbm.*):
ceu videre est ex Tabula, quam hic
exhibemus.

$1a$	$1b$																		
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$																	
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$																
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$															
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$														
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$													
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$												
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$											
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$										
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$									

Ex Tabulæ hujus consideratione manifestum est, terminos potentiarum componi ex quibusdam factis litteralibus, & numeris præfixis, quos *Uncias* cum OUGHTREDO (a) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, si fiant duæ progressionæ geometricæ, quarum prima a potentia desiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate definat, altera vero ab unitate incipiat & in desiderata potentia partis secundæ radicis definat, atque termini ejusdem ordinis in utraque serie in se invicem ducantur. Ex. gr. quærenda potentia sexta: scribe

$a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$. Series I.

$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Series II.

erunt $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5$

+ b^6 facta, ex quibus componitur potentia sexta ipsius $a+b$.

Apparet denique, uncias reperiri, si exponentes potentiarum secundæ seriei seu ipsius b sub exponentibus potestatum primæ seriei seu ipsius a scribantur, & nota prima ex serie superiore sumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem subit uncia termini secundi potestatis; similiter factum ex nota prima in secundam ex serie superiore sumatur pro numeratore, factum ex prima in secundam ex serie inferiori pro denominatore fractionis, quæ uncia termini tertii potentia æqualis &c. Ex. gr. pro potentia sexta erit:

(a) *Clavis Mathematica*, c. 12. §. 6. p. m. 38.

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Hinc $\frac{6}{1} = 6$, uncia termini secundi potentia sextæ; $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{30}{2} = 15$, uncia termini tertii; $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{120}{6} = 20$, uncia termini quarti; $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$, uncia termini quinti; $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6}{1} = 6$, uncia termini sexti; $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$, uncia termini ultimi.

Habemus adeo methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quod si vero regulam pro potentia indeterminata desideres, non alia re opus est, quam ut exponentes dicatur m : ita habebimus

$$a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4}, a^{m-5}$$

$$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, \&c.$$

adeoque $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5, \&c.$ quæ sunt facta pro terminis potentia indeterminata in infinitum continuandæ. Similiter inveniuntur uncia, ut ante. Cum enim exponentes sint:

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \&c.$$

erit $\frac{m}{1}$, uncia termini secundi potentia;

$$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}, \text{ uncia tertii;}$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ uncia quarti;}$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ uncia quinti;}$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \text{ uncia sexti;}$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \text{ uncia septimi \&c.}$$

Quare si has uncias in facta ipsis respondentia & paulo ante reperta

ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati;

$$a^m$$

$$+ \frac{m}{1} a^{m-1} b$$

$$+ \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{m-6} b^6$$

&c. in infinitum

Quoniam vero $a^{m-1} = a^m : a$;
 $a^{m-2} = a^m : a^2$; $a^{m-3} = a^m : a^3$;
 $a^{m-4} = a^m : a^4$; $a^{m-5} = a^m : a^5$;
&c. in infinit. (§. 54) his valoribus substitutis (§. 15 *Arithm.*) formula in sequentem degenerat:

$$a^m$$

$$+ \frac{m \cdot a^m b}{1 \cdot a}$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot a^m b^2}{1 \cdot 2 \cdot a^2}$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot a^m b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3}$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot a^m b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^4}$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot a^m b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^5}$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot a^m b^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot a^6}$$

&c. in infinitum.

Quod si jam porro cum viro summo *Isaaco NEWTONO* (*a*) ponamus $a = P$ & $b : a = Q$; erit $a^m = P^m$; $b^2 : a^2 = Q^2$; $b^3 : a^3 = Q^3$; $b^4 : a^4 = Q^4$; $b^5 : a^5 = Q^5$ &c.

(a) In Epistola A. 1676 ad LEIBNITUM data, apud WALLISIUM, Operum Vol. III. f. 622.

&c. consequenter his valoribus substitutis formula :

$$\begin{aligned}
 & P^m \\
 & + \frac{m}{1} P^m Q \\
 & + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2 \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} P^m Q^4 \text{ \&c.} \\
 & \text{Ponatur porro } P^m = A; \text{ erit } \frac{m}{1} P^m Q \\
 & = \frac{m}{1} A Q.
 \end{aligned}$$

Sit $\frac{m}{1} P^m Q = B$: erit $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} B Q$.

Sit $\frac{m-1}{2} B Q = C$; erit $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} C Q$.

Sit $\frac{m-2}{3} C Q = D$; erit $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} P^m Q^4 = \frac{m-3}{4} D Q$.

Sit $\frac{m-3}{4} D Q = E$; erit $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot m - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} P^m Q^5 = \frac{m-4}{5} E Q$.

Sit $\frac{m-4}{5} E Q = F$; erit $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot m - 4 \cdot m - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} P^m Q^6 = \frac{m-5}{6} F Q$.

&c. in infinitum.

Habetur ergo tandem

$$\begin{aligned}
 (a+b)^m &= (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} A Q \\
 &+ \frac{m-1}{2} B Q + \frac{m-2}{3} C Q + \frac{m-3}{4} D Q \\
 &+ \frac{m-4}{5} E Q + \frac{m-5}{6} F Q \text{ \&c. in infinit.}
 \end{aligned}$$

SCHOLION I.

96. Equidem hoc Theorema nonnisi per inductionem eruimus, quæ inter demonstrandi methodos locum minime habet: sed cum hæc inductio fundetur in observatione legis constantis atque necessariæ, in inveniendò tuto

adhibetur; etsi consultum sit, reperta alio postea modo demonstrari.

SCHOLION II.

97. Ut vero Theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illustrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis 18 seu 10 + 8: erit $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8$: $10 = \frac{4}{\frac{4}{5}}$, consequenter

$$\begin{aligned}
 P^m &= 10^4 = 10000 = A \\
 m A Q &= 4 \cdot 10000 \cdot \frac{4}{5} = \frac{160000}{5} = \\
 &32000 = B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m-1}{2} B Q &= \frac{3}{2} \cdot 32000 \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \cdot 32000 = \\
 &6.6400 = 38400 = C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m-2}{3} C Q &= \frac{2}{3} \cdot 38400 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot 38400 \\
 &\frac{307200}{15} = 20480 = D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m-3}{4} D Q &= \frac{1}{4} \cdot 20480 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \cdot 20480 \\
 &= \frac{20480}{5} = 4096 = E
 \end{aligned}$$

$$\frac{m-4}{5} E Q = 0 \cdot 4096 \cdot \frac{4}{5} = 0.$$

- 10000 = A
- 32000 = B
- 38400 = C
- 20480 = D
- 4096 = E

104976 Dignitas quarta ipsius 18.

Eadem dignitas invenitur, si 18 in duas quascunque partes alias, ex. gr. in 6 & 12 secetur: quo in casu erit $P = 6$ & $Q = 12$: 6 = 2, consequenter

$$\begin{aligned}
 P^m &= 6^4 = 1296 = A \\
 m A Q &= 4 \cdot 1296 \cdot 2 = 8 \cdot 1296 = \\
 &10368 = B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m-1}{2} B Q &= \frac{3}{2} \cdot 10368 \cdot 2 = 3 \cdot 10368 = \\
 &31104 = C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m-2}{3} C Q &= \frac{2}{3} \cdot 31104 \cdot 2 = \frac{4}{3} \cdot 31104 = \\
 &\frac{124416}{3} = 41472 = D
 \end{aligned}$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4} \cdot 41472 \cdot 2 = \frac{2}{4} \cdot 41472 = \frac{41472}{2} = 20736 = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = 0.20736 \cdot 2 = 0.$$

- 1296 = A
- 10368 = B
- 31104 = C
- 41472 = D
- 20736 = E

104976 Dignitas quarta ipsius 18.

Patet adeo seriem terminari, si m explicetur per numerum determinatum.

COROLLARIUM I.

98. Si m explicetur per numerum fractum, series $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipsius $P + PQ$ (§. 57), adeoque idem Theorema extractioni radicis inservit. Ex.gr. Sit ex $aa - xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m = \frac{1}{2}$ (§. cit.), $P = x^2$ & $Q = -x^2 : a^2$.

Unde

$$P^m = a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a = A$$

$$\frac{m}{1} AQ = \frac{1}{2} a \cdot \frac{-x^2 : a^2}{1} = \frac{-x^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \cdot \frac{-x^2}{2a} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-2}{4} \cdot \frac{x^4}{2a^3} = \frac{-x^4}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \cdot \frac{-x^4}{8a^3} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-4}{6} \cdot \frac{x^6}{8a^5} = \frac{-3}{6} \cdot \frac{x^6}{8a^5} = \frac{-x^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4} \cdot \frac{-x^6}{16a^5} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-6}{8} \cdot \frac{x^8}{16a^7} = \frac{-5x^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5} \cdot \frac{-5x^8}{128a^7} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-8}{10} \cdot \frac{5x^{10}}{128a^9} = \frac{-7x^{10}}{256a^9} \text{ \&c. in inf.}$$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Est adeo $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infin.

SCHOLIUM III.

99. Si cui molestus evadit fractionum calculus, is cum NEWTONO in formula generali substituat pro m exponentem fractum $m : n$, formulam sequentem obtenturus :

$$(P + PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ$$

&c. Hac vero formula ubi utetur, quantitates ad potentiam evecturus, pro n assumet 1.

SCHOLIUM IV.

100. Ex numerorum determinantum potentis radicem extracturus adhibeat formulam

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b \text{ \&c. } \text{quam in dato casu deter-$$

minet, numero pro m substituto. Ex. gr. Sit ex 104976 extrahenda radix quartana; erit $m = 4$: unde habetur $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, & juxta hoc Theorema extractio radicis quartanae eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam (§. 269, 282 Arithm.). inquisivimus. Nimirum, cum praeter a^4 seu quadratoquadratum partis primae radicis, quatuor auferri debeant facta; rescetur versus dexteram nota quatuor & potentia quarta proxime accedens ad 10 nempe 1, erit a^4 . En calculi typum:

104976 (18	$4a^3 = 4$
1	$b = 8$
9 976	$4a^2b = 32$
$4a^3 = 4 \dots$	$b^2 = 64$
$4a^2b = 32 \dots$	$a^2 = 1$
$6a^2b^2 = 384 \dots$	$a^2b^2 = 64$
$4ab^3 = 2048 \dots$	6
$b^4 = 4096$	$6a^2b^2 = 384$
9 976	$b^3 = 512$
0	$4a = 4$
	$4ab^3 = 2048$

Si radix plures quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (S. cit. Arithm.). Quodsi numerus, ex quo radix extrahenda, non sit dignitas perfecta; dignitas proxime minor sit = P, & residuum post extractionem more vulgari institutam per eandem divisum = Q, m = 1, & n exponens dignitatis, cujus radix desideratur. Ita ope Theorematis in Schol. præc. obtinetur series infinita certa progressionis lege residuam partem radice exhibens.

Ex. gr. Queratur $\sqrt[2]{2}$. Quoniam quadratum proxime minus = 1, & residuum hoc ex 2 subducto = 1; erit P = 1, Q = 1. Præterea m = 1, & n = 2. Hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{2.4} = +\frac{1.3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1.3}{2.4.6} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} =$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \text{ \&c.}$$

$$\text{Est ergo } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \text{\&c.}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$$

$$\text{\&c. in infinitum.}$$

Ubi series fractionum denotat partem radice unitate minorem. Ceterum cum $\sqrt[2]{2}$ sit diagonalis quadrati, posito ejus latere = 1 (S. 420 Geom.); habetur jam valor diagonalis in terminis rationalibus, unde rationes prope vera ad praxin quantumlibet sufficientes duci possunt. Ex. gr. si pro diagonali sumatur $1 + \frac{1}{2}$, erit ratio $1 + \frac{1}{2} : 1$ [= 3 : 2] justo major quam diagonalis ad latus, sed excessus consistet infra $\frac{1}{8}$. Si pro diagonali sumatur $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ seu $\frac{11}{8}$; erit ratio $\frac{11}{8} : 1$ [= 11 : 8] justo minor quam diagonalis ad latus, sed defectu infra $\frac{1}{16}$ existente: & ita porro.

COROLLARIUM II.

101. Quoniam polynomium pro binomio haberi potest, sumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inservis.

Ex. gr. Si trinomium $c + d + g$ ad dignitatem aliquam, ex. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m +$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} b \text{ \&c. } c = a \text{ \& } d + g = b: \text{ erit}$$

$$(c + d + g)^4 = c^4 + 4c^3(d + g) + 6c^2(d + g)^2 + 4c(d + g)^3 + (d + g)^4.$$

Nempe $a^m = c^4$, $ma^{m-1}b = 4c^3(d + g)$,

$$\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 = 6c^2(d + g)^2,$$

$$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 = 4c(d + g)^3,$$

$$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 = (d+g)^4.$$

Est vero, vi ejusdem Theorematis $(d+g)^2 = d^2 + 2dg + g^2$; $(d+g)^3 = d^3 + 3d^2g + 3dg^2 + g^3$; $(d+g)^4 = d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$. Ergo $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3d + 4c^2g + 6c^2d^2 + 12c^2dg + 6c^2g^2 + 4cd^3 + 12cd^2g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$.

COROLLARIUM III.

102. Quare si infinitinomium fuerit $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. & in formula pro a substituat^{ur} a , pro b autem $by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendo aut ex eadem radicem extrahendo. Est enim

$$\begin{aligned} b^2 &= b^2y^2 + 2bcy^3 + c^2y^4 + 2cdy^5 + d^2y^6 \text{ \&c.} \\ &\quad + 2bdy^4 + 2bey^5 + 2cey^6 \text{ \&c.} \\ &\quad + 2bfy^6 \text{ \&c.} \\ b^3 &= b^3y^3 + 3b^2cy^4 + 3bc^2y^5 + c^3y^6 \text{ \&c.} \\ &\quad + 3b^2dy^5 + 6bcdy^6 \text{ \&c.} \\ &\quad + 3b^2ey^6 \text{ \&c.} \\ b^4 &= b^4y^4 + 4b^3cy^5 + 6b^2c^2y^6 \text{ \&c.} \\ &\quad + 4b^3dy^6 \text{ \&c.} \\ b^5 &= b^5y^5 + 5b^4cy^6 \text{ \&c.} \\ b^6 &= b^6y^6 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Hos ergo valores si in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$ &c. substituas, & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipsius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

$$\begin{aligned} &+ a^{m-1} by \\ &+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} c \\ &+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \\ &+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bc \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} d \\ &+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \\ &+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2c \\ &+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} c^2 \\ &+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bd \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} e \\ &+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot m - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 \\ &+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4} b^3c \\ &+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2d \\ &+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} bc^2 \\ &+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} cd \\ &+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bc \\ &+ \frac{m}{1} a^{m-1} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{m-6} b^6 \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} a^{m-5} b^4 c \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-4} b^2 c^2 \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4} b^3 d \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} c^3 \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-3} bcd \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2 e \\
 &+ \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} d^2 \\
 &+ \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} ce \\
 &+ \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bf \\
 &+ \frac{m}{1} a^{m-1} g
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} \right\} y^5$$

&c. &c. in infinit.

COROLLARIUM IV.

103. Eodem modo patet, si infinitinomialium fuerit $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6$ &c. ad dignitatem m evehendum; in serie antecedente tantum omnes terminos multiplicandos esse per y^m , ita ut uncia retineantur eadem iidemque coefficientes, dignitates vero ipsius y sint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION V.

104. Constat adeo idem Theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomialio ad dignitatem desideratam evehendo sufficere. Tyrone illud sub initium studii analytici prater-

mittant, donec inferius in Analyfi infinitorum eodem opus habuerint. Immo infinitinomialium ad potestatem determinatam facile evehitur per formulas speciales superius allatas. Ex. gr. Sit $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 + \&c.$ evehenda ad dignitatem secundam: cum $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, erit $h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4$

$$\begin{aligned}
 &+ 2hix^3 + i^2x^4 \\
 &+ 2hix^4 + 2ikx^5 + k^2x^6 \&c. \\
 &+ 2hix^5 + 2ilx^6 \&c. \\
 &+ 2hmix^6 \&c.
 \end{aligned}$$

(S. 265 Arithm.). Nimirum primo sumuntur duo tantummodo termini, veluti hic $hx + ix^2$, & queritur ejus potentia desiderata, veluti hic secunda. Deinde $hx + ix^2$, habentur pro termino uno, kx^3 pro altero, atque sic denuo per formulam binomii determinatur potentia desiderata, veluti hic secunda. Porro $hx + ix^2 + kx^3$ sumuntur pro termino uno & lx^4 pro altero, & ita porro. Quae eadem series invenitur, si in generali (S. 102) fiat $m = 2$, $y = x$, $a = h$, $b = i$, $c = k$, $d = l$, $e = m$, &c. Est enim:

$$a^m y^m = h^2 x^2$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} b y^{m+1} = 2hix^3$$

$$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 y^{m+2} = \frac{2}{2} h^2 i^2 x^4 = i^2 x^4.$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} c y^{m+2} = 2hix^4 \&c.$$

SCHOLION VI.

105. Ceterum notetur artificium, quo casus infiniti, immo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.

PROBLEMA XXIX.

106. Determinare summam termini primi & ultimi in progressionem arithmetica.

Sit

§. 21). Patet adeo numeros quadratos pro-
dure continua numerorum imparium ad-
ditione; consequenter differentias nume-
rorum quadratorum esse numeros impa-
res: id quod supra alia ratione fuit de-
monstratum (§. 83).

COROLLARIUM IV.

III. Sit $a = n = \frac{1}{2}d$, erit summa $= n^2 +$
 $n^2 - n^2$ (§. 108) $= n^2$ (§. 21). Quili-
bet adeo cubus resolvitur in progressionem
arithmeticam, cujus terminus primus, se-
midifferentia & numerus terminorum sunt
radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 =$
 $3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

SCHOLION.

112. Patet modus ex formulis algebraicis
eruenti Theoremata specialia, qui continetur
sub Problemate logico de specierum notioni-
bus ex notione generis formandis (§. 712
Log.).

DEFINITIO IV.

113. Denominator rationis est quo-
tus ex divisione termini majoris per
minorem emergens.

COROLLARIUM I.

114. Major ergo prodit, minore per
denominatorem multiplicato (§. 212
Arithm.): minor vero habetur, majore per
denominatorem diviso (§. 210 Arithm.).
Unde si terminus minor a , denominator
 m , erit major ma ; si terminus major a ,
minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : m$ a exprimit ratio-
nem minoris inæqualitatis; $a : \frac{a}{m}$ vero ratio-
nem majoris (§. 133 Arithm.) Immo quo-
niam $\frac{a}{m} = a \cdot \frac{1}{m}$ (§. 43); si m explicetur per
fractionem, cujus numerator unitas, deno-

minator idem cum denominatore rationis,
 $a : ma$ rationem quacunque designat.

COROLLARIUM II.

115. Quia in ratione majoris inæquali-
tatis antecedens major consequente (§. 133
Arithm.); ejus denominator idem est
cum exponente (§. 136 Arithm.).

COROLLARIUM III.

116. In ratione minoris inæqualitatis ex-
ponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 136 Arithm. & §.
114 Analys.): hoc est, $\frac{1}{m}$ (§. 231 Arithm.).
Æquatur ergo fractioni, cujus numerator
unitas, denominator idem cum denomi-
nate rationis.

SCHOLION.

117. Exponens & denominator rationis
Autoribus voces synonymæ sunt. Aliter ve-
ro Veteres, aliter Recentiores exponentem
definiunt. Nos Veterum definitionem retinui-
mus in Arithmetica (§. 136), tum quod na-
turam rationum clare explicet, tum quod ad
demonstrandum utilis. Etenim si rationis $2 : 3$
exponens dicatur $\frac{2}{3}$; inde intelligitur an-
tecedentem terminum esse æqualem duabus
tertiis consequentis, adeoque pro mensura,
qua utrumque metimur, assumi tertiam con-
sequentis partem. Hinc vero clarius cognos-
citur rationis hujus natura, quam si cum Re-
centioribus nonnullis dicas exponentem esse
 $1\frac{1}{2}$: quod innuit, antecedentem in consequen-
te contineri $1\frac{1}{2}$. Recentiores vero exponen-
tem rationis eodem modo definiunt, quo
denominatorem definimus, ideo eundem expo-
nentem constituunt rationum majoris & mino-
ris inæqualitatis (§. 115), quod nomen etiam
in casu posteriori suggerat (§. 147 Arithm.) &
demonstrationibus analyticis commodior videat-
ur: quem in finem nos exponentis loco nunc
denominatorem assumimus.

PRO-

PROBLEMA XXX.

118. Determinare factum ex termino primo in ultimum progressionis geometricæ.

Sit terminus primus a , denominator m ; erit progressio (§. 332 Arithm. & §. 114 Analys.).

$$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, m^5a, m^6a$$

$$\frac{m^5a}{m^5a} = \frac{m^6a}{m^5a} = \frac{m^7a}{m^6a} = \frac{m^8a}{m^7a}$$

Theorema. In progressionem geometricam factum extremorum æquatur facto mediolorum ab extremis æquidistantium, itemque medii quadrato, si numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{r}
 m-1) m^{n-1}a - a \quad (m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a, \&c. \\
 \underline{m^{n-1}a - 1m^{n-2}a} \\
 \quad + m^{n-2}a - a \\
 \quad + \underline{m^{n-2}a - m^{n-3}a} \\
 \qquad \quad + m^{n-3}a - a \\
 \qquad \quad + \underline{m^{n-3}a - m^{n-4}a} \\
 \qquad \qquad \quad + m^{n-4}a - a \\
 \qquad \qquad \quad + \underline{m^{n-4}a - m^{n-5}a} \\
 \qquad \qquad \qquad \quad + m^{n-5}a - a \\
 \qquad \qquad \qquad \quad + \underline{m^{n-5}a - m^{n-6}a} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \quad + m^{n-6}a - a, \&c.
 \end{array}$$

Quod si n determinetur, ex.gr. per 7, erit $n-7=0$; consequenter $m^{n-7}a = m^0a = a$, adeoque divisio terminatur. Unde patet

Theorema 1. Si differentia termini primi & ultimi progressionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate multiplicatum, quotus est summa omnium terminorum excepto maximo.

Ex. gr. 3, 6, 12, 24, 48, 96

$$\begin{array}{r}
 12 \quad 6 \quad 3 \\
 \hline
 288 = 288 = 288
 \end{array}$$

PROBLEMA XXXI.

119. Determinare quotum ex divisione differentia terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate multiplicatum emergentem.

Sit terminus primus a , denominator m , numerus terminorum n ; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi, $m^{n-1}a - a$. Hæc si dividatur per $m-1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

Et cum sit $m-1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a$ &c. $+ a$ (§. 174, 169 Arithm.); patet porro

Theorema 2. In progressionem geometricam factum ut denominator unitate multiplicatus ad unitatem, ita differentia termini maximi & minimi ad summam omnium terminorum excepto maximo.

COROL.

COROLLARIUM I.

120. Quodsi ergo quoto ex divisione differentia termini maximi & minimi per denominatorem unitate multiplicatum emergenti maximus addatur; summa totius progressionis habetur.

COROLLARIUM II.

121. Sit adeo terminus primus a , denominator m , numerus terminorum n , erit terminus ultimus seu maximus $m^{n-1}a$, adeoque summa $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1) = (m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ (§. 235 *Arithm.*) $= (m^n a - a) : (m - 1)$ (§. 21); consequenter si eadem summa dicatur s , $m - 1 : m^n - 1 = a : s$, (§. 302 *Arithm.*). Est adeo terminus primus (seu minimus) progressionis ad ejus summam ut denominator unitate multiplicatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem multiplicatus. Sit ex. gr. $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, erit summa $(256 - 1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM III.

122. Quoniam si terminus primus a , denominator m ; terminus ultimus $m^{n-1}a$, summa $(m^n a - a) : (m - 1)$ (§. 121): erit differentia inter terminum ultimum & summam $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ & differentia inter primum & summam $\frac{m^n a - a}{m - 1} - a = \frac{m^n a - a - ma + a}{m - 1}$ (§. 235 *Arithm.*) $= \frac{m^n a - ma}{m - 1}$. Est ergo differentia prior ad posteriorem ut $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$ ad $(m^n a - ma) : (m - 1)$, hoc est, ut $m^{n-1}a - a$ ad $m^n a - ma$ (§. 178 *Arithm.*), hoc est, ut 1 ad m (§. 181 *Arithm.*), seu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM IV.

123. Quare si differentia inter terminum primum & summam dividatur per differentiam inter summam & terminum ultimum; quotus est denominator (§. 69 *Arithm.*).

PROBLEMA XXXII.

124. Investigare rationum symptomatica.

Non alia re opus est, quam ut termini analytice exprimentur (§. 114), & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes sint æquales, nec ne (§. 149 *Arithm.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma ; erit

I. $a : ma$

II. $a : ma$

$\frac{c}{c} : \frac{c}{c}$

$\frac{c}{c} : \frac{c}{c}$

$ac : mac = a : ma$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$

III. $a : ma$

$b : mb$

$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb$

IV. $a : ma$

$b : mb$

$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb$

Sit porro

$a : ma = b : mb$

erit alternatim

$a : b = ma : mb$

inverſe

$ma : a = mb : b$

converſim $a + ma : a = b + mb : b$

compoſite $a + ma : ma = b + mb : mb$

diviſim

$ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb$

Item :

$a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$

$a : mac = b : mbc$

$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$

$ac : ma = bc : mb$

$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$

$ac : mac = b : mb$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$

$ac : mac = bd : mbd$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mac = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mac = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mac = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mad$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

erit ex æquo $a : mna = b : mnb$.

Sit perturbate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipsæ nimirum expressiones, si quoti reducantur per regulas fractionum, rationum similitudinem in omnibus loquantur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

COROLLARIUM.

125. Cum sit in progressionem geometricam $m-1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a \&c. + a$ (Th. 2. §. 119); sit vero $m-1 : 1 = ma - a : a$ (§. 124 n. 1); erit $ma - a : a = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a \&c. + a$, hoc est, excessus termini secundi supra primum est ad primum, ut excessus ultimi sive maximi supra primum ad summam omnium terminorum dempto maximo.

PROBLEMA XXXIII.

126. Investigare symptomata progressionum geometricarum ab unitate incipientium.

Si terminus primus est unitas, secundus idem est cum denominatore rationis (§. 114). Est vero terminus secundus vel numerus primus, vel compositus; & in casu altero vel quadratus, vel potentia alia cujuscunque ordinis, vel nulla.

Cum numerus primus in se non possit

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

dividi nisi per unitatem solam (§. 75 Arithm.), caractere primitivo m recte exprimitur. Unde emergit series in ratione geometrica progredientium:

$1, m^1, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, \&c.$

Quoniam termini omnes prodeunt continuata multiplicatione secundi in seipsum (§. 332 Arith.); per nullum quoque numerum primum dividi possunt exacte, nisi per secundum, seu nullus numerus primus terminos metitur præter secundum. In formula generali idem ad oculum patet: etenim $m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, \&c.$ non posse dividi nisi per m , patet (§. 54). Et cum terminus secundus in hoc casu sit potentia prima, termini sequentes sint potentia continuo ordine progredientes ejusdem numeri (§. 254 Arith.); terminus quilibet major dividi potest per quemlibet minorem, sed per nullum alium (§. 54). Habemus adeo

Theorema 1. Si numerorum ab unitate continue proportionalium proximus unitati primus est; maximum nullus alius metitur, præter eos qui sunt in serie; consequenter nec primus alius, nisi secundus, seu ab unitate proximus.

Et quoniam, in omni casu numerorum ab unitate continue proportionalium, termini ultra secundum sunt potentia continuo ordine progredientes ejusdem termini secundi, qui communis omnium radix est (§. 332, 250 Arith.); igitur in genere patet

Theorema 2. In serie numerorum ab unitate continue proportionalium, minor quilibet quemlibet majorem metitur per aliquem numerum, qui est in serie.

L1

Cum

Cum terminus compositus exacte dividi possit per numerum alium præter unitatem (§. 76 *Arith.*); exprimetur idem per mn . Quare si in progressionem geometricam ab unitate incipiente terminus secundus sit mn ; erit series

$$1, mn, m^2 n^2, m^3 n^3, m^4 n^4, m^5 n^5, m^6 n^6, \&c.$$

atque adeo patet numeros primos m & n , qui metiuntur secundum terminum, metiri quoque ceteros omnes, nec præter eos alium quendam numerum primum ceterorum quemcunque metiri. Unde habemus

Theorema 3. Si ab unitate fuerint numeri quotcunque continue proportionales, primus numerus, qui metitur ultimum, metietur & unitati proximum ac omnes intermedios.

In utraque serie exponentes termini secundi est 1, tertii 2, quarti 3, quinti 4 &c. consequenter exponentes in loco impari est numerus par, in loco pari est impar, & quidem in loco quarto, seu a secundo tertio, exponentes est ternarius, & duobus locis intermissis sequitur continuo numerus per ternarium divisibilis, seu quem ternarius metitur. Similiter in loco septimo, seu a secundo sexto, exponentes senarius est, & quinque locis intermissis continuo sequitur exponentes quem senarius metitur. Singula hinc intuitive patent, quod exponentes ex continua unitatis additione nascantur. Hisce vero notatis prodit

Theorema 4. Si numeri quotcunque fuerint ab unitate continue proportionales, secundus (unitate seclusa) quadratus erit, & uno intermisso omnes: tertius autem cubus est, & duobus intermissis omnes: sextus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermissis omnes.

Si terminus primus fuerit unitas, secundus numerus quadratus, vel cubus, vel potentia cujuscunque gradus, erunt series

$$1, m^2, m^4, m^6, m^8, m^{10}, m^{12} \&c.$$

$$1, m^3, m^6, m^9, m^{12}, m^{15}, m^{18} \&c.$$

$$1, m^n, m^{2n}, m^{3n}, m^{4n}, m^{5n}, m^{6n} \&c.$$

Quoniam in qualibet serie termini continuo prodeunt multiplicatione per secundum, exponentes secundi continuo additur exponenti termini cujuscunque dati, ut prodeat proxime sequens (§. 54); consequenter cum exponentes omnium terminorum, qui a secundo sequuntur, sint multipli exponentis termini secundi, per secundi quoque termini exponentem dividi possunt; consequenter omnes termini sunt dignitates ejus gradus, cujus dignitas est secundus (§. 56). Habemus itaque

Theorema 5. Si in serie continue proportionalium ab unitate numerorum, terminus secundus, seu ab unitate primus, est quadratus, reliqui omnes quadrati erunt; si idem fuerit cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt; si idem fuerit dignitas cujuscunque gradus, quarti, quinti, sexti &c. reliqui etiam omnes erunt dignitates ejusdem gradus, quarti, quinti, sexti &c.

SCHO-

SCHOLIION.

127. Patet adeo, per calculum literalem facillime symptomata rationum & progressionum geometricarum ab unitate incipientium, vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.

PROBLEMA XXXIV.

128. Invenire rationem superficierum atque corporum in Geometria elementari explicatorum.

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a , bases sint b & c : erunt illorum areae ab & ac (§. 375, 387 Geom.), horum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 392 Geom.). Sunt ergo ut ab ad ac , hoc est, ut b ad c (§. 181 Arithm.).

Theorema 1. Parallelogramma & triangula æque-alta basium rationem habent.

Eodem modo invenitur

Theorema 2. Parallelogramma & triangula æqualium basium sunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a , peripheria ma (§. 114): erit quadratum diametri a^2 , area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 429 Geom.). Est ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc est, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 181 Arithm.).

Theorema 3. Quadratum diametri est ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint bases parallelogrammorum & triangulorum similium a & b , altitudines ma & mb (§. 114 Anal. & §. 396 Geom.): erunt areae ut ma^2 ad mb^2 (§. 375, 387, 392 Geom.), hoc est, ut a^2 ad b^2 (§. 124).

Theorema 4. Parallelogramma & triangula similia sunt ut quadrata basium; seu (quia quodlibet latus pro basi assumi po-

test (§. 113 Geom.) ut quadrata laterum homologorum.

Sint bases parallelepipedorum, prismatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b , altitudo communis c : erunt corpora ista ut ac ad bc (§. 536, 539, 541, 548 Geom.), hoc est, ut a ad b (§. 181 Arithm.). Eodem modo c assumi potest pro basi communi, ita ut a & b sint altitudines.

Theorema 5. Parallelepipeda, prismata, cylindri, pyramides & conij ejusdem altitudinis basium rationem habent; eandem vero basium habentes sunt in ratione altitudinum.

Non absimili modo alia hujus generis Theoremata investigantur.

PROBLEMA XXXV.

129. Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc est, ordo earum variari possit.

Sint quantitates duæ a & b . Cum aut scribi possit ab , aut ba ; patet esse numerum variationum $2 = 2 \cdot 1$.

Sint tres quantitates a, b, c . Ordines earum erunt

$c a b$

$a c b$

$a b c$

$c b a$

$b c a$

$b a c$

id quod patet, c primum cum ab , dein cum ba combinando. Unde numerus variationum $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Quodsi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combi-

Fig: Anal: infin: Tab: I.

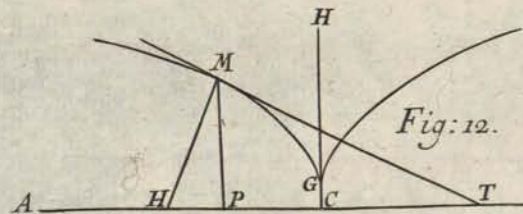
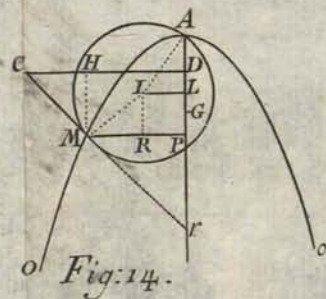
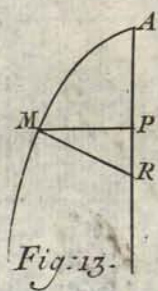
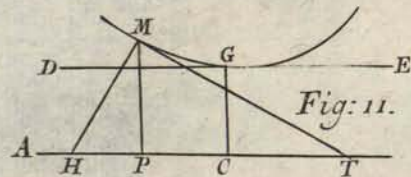
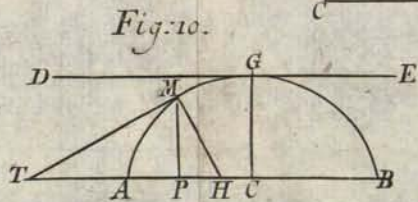
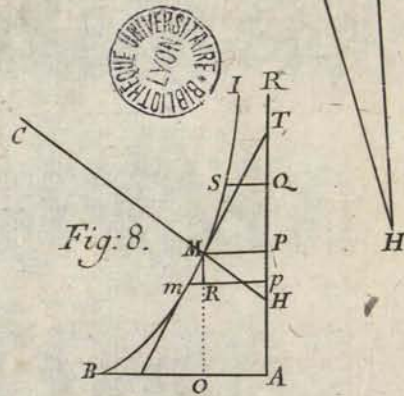
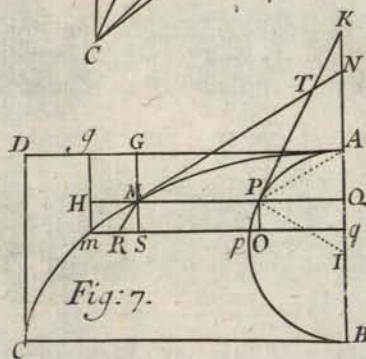
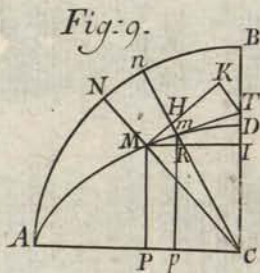
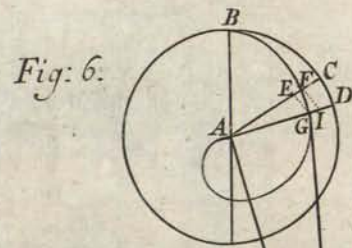
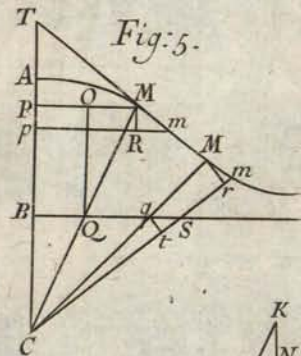
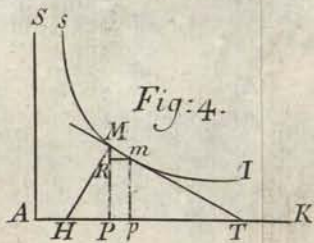
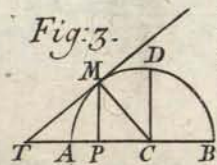
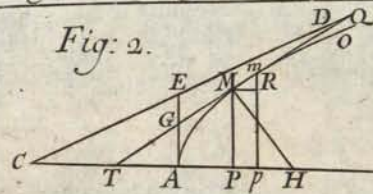
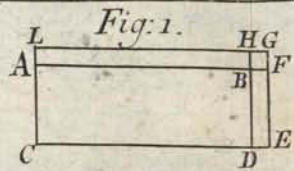


Fig: Anal: infin: Tab: II.

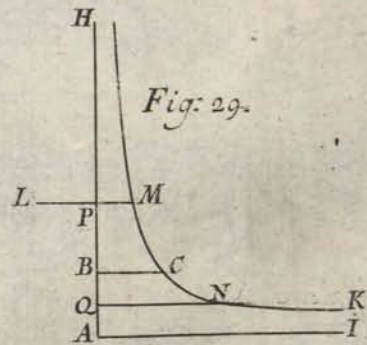
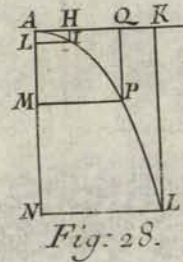
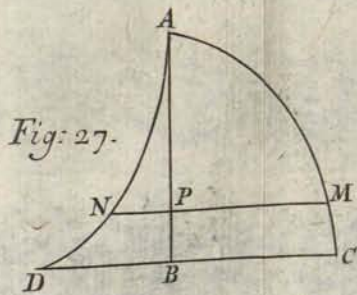
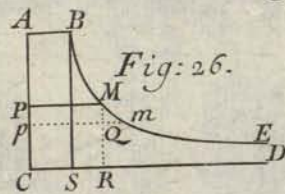
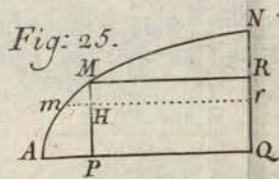
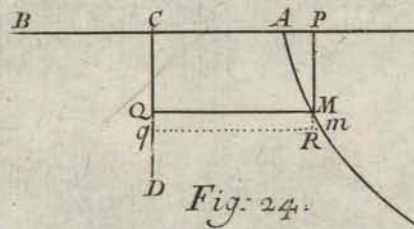
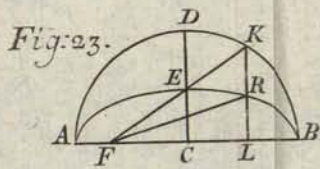
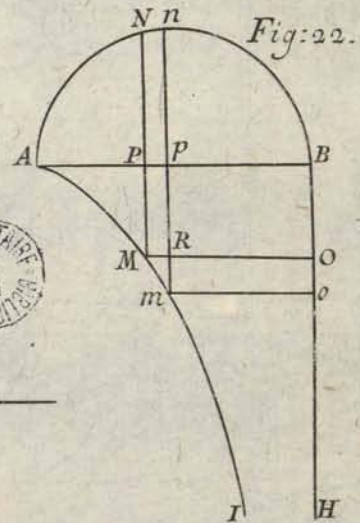
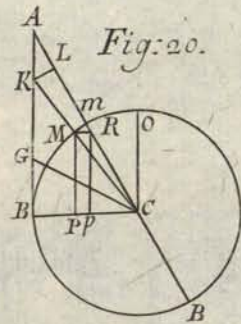
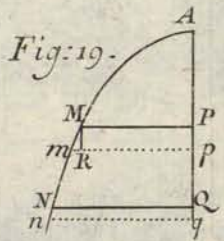
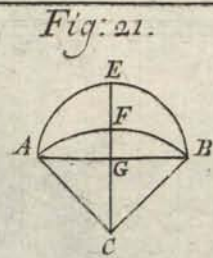
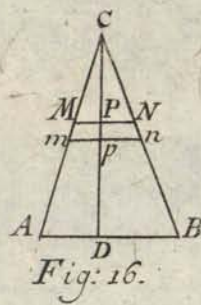
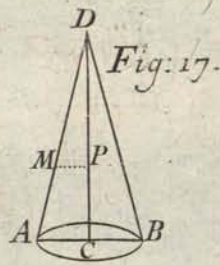
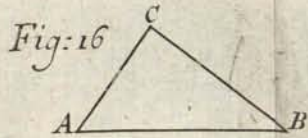
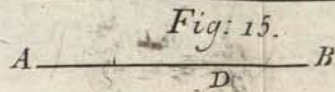


Fig. 30.

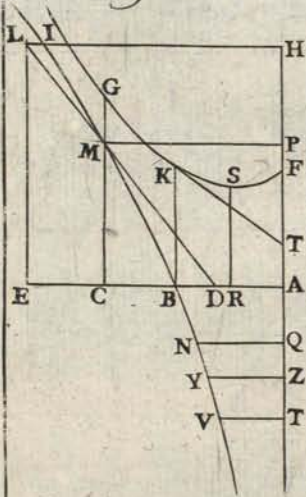


Fig. 31.

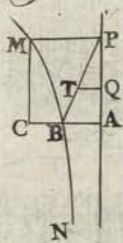
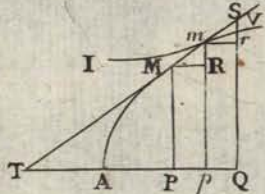


Fig. 32.



Fig. 33.

N.1.



N.2.

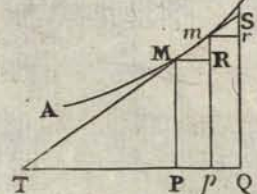
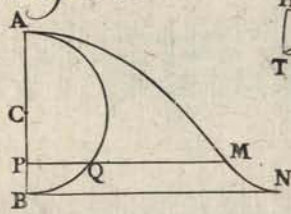
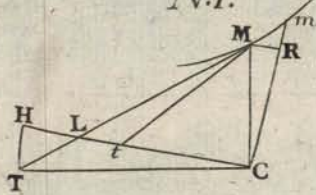


Fig. 34.



N.1.



N.2.

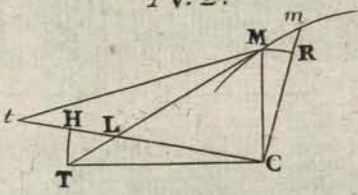


Fig. 36.

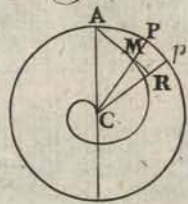


Fig. 37.

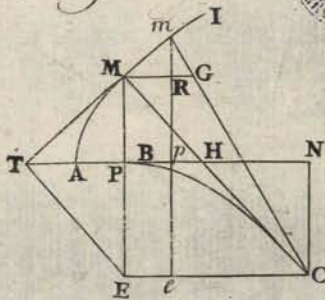


Fig. 38.

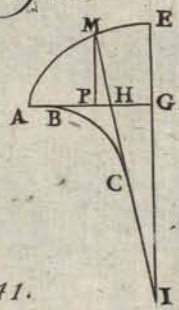


Fig. 39.

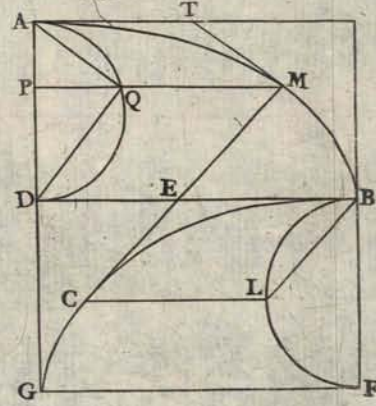


Fig. 40.

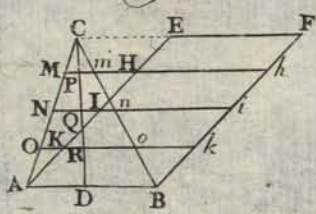


Fig. 41.

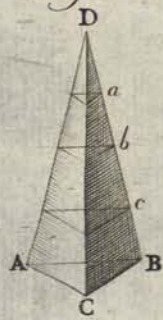


Fig. 42.

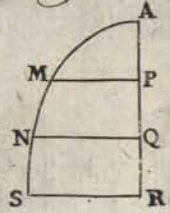
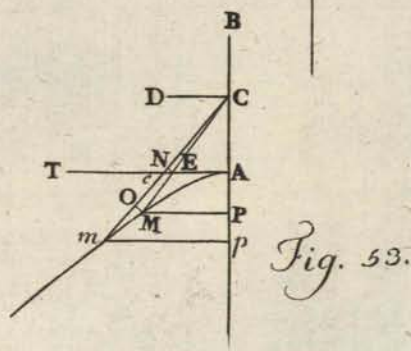
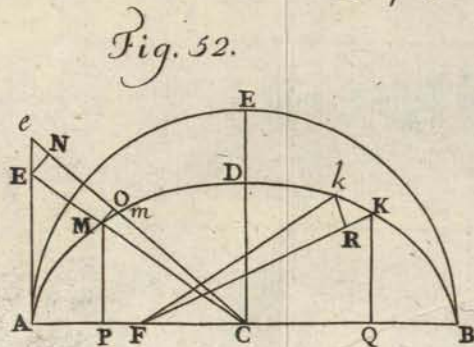
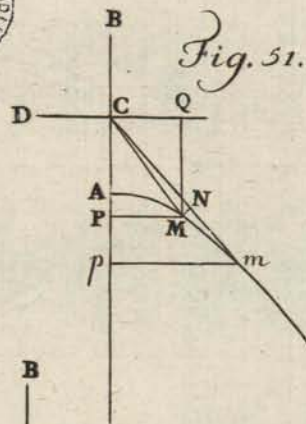
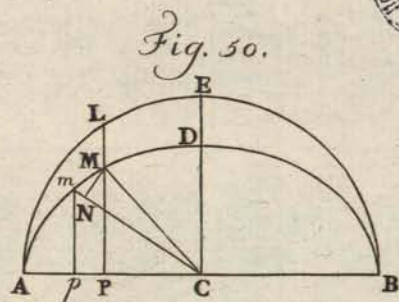
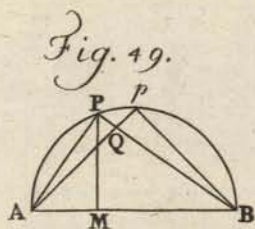
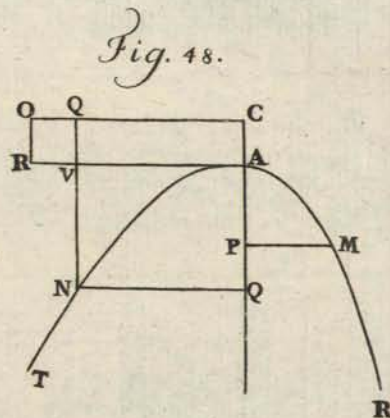
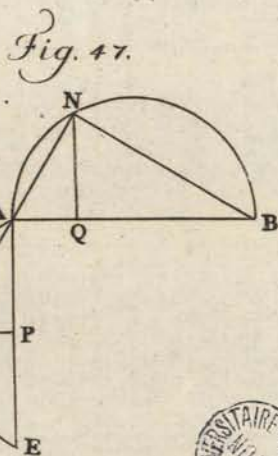
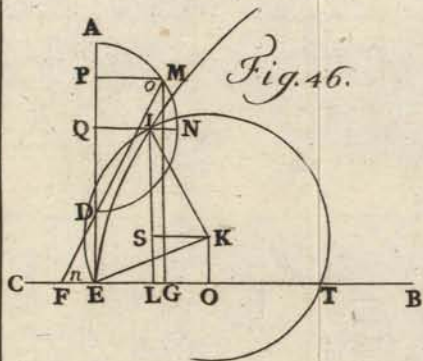
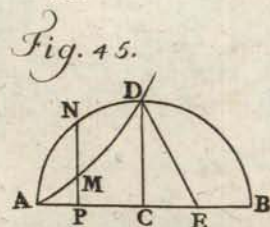
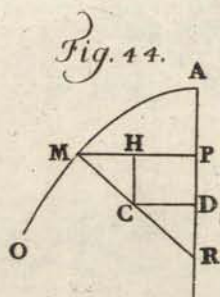
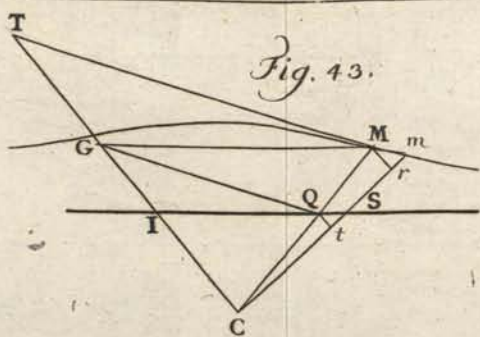


Fig. Anal. infin Tab. IV.



SCHOLIION I.

130. Ponamus mensæ assidere 13 personas. Quodsi quaratur, quoties loca permutare possint; reperietur numerus variationum 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 6, 227, 020, 800.

SCHOLIION II.

131. Si vox aliqua ex literis non nimis multis componatur; eadem methodo, qua in resolutione problematis usi sumus, inveniri possunt sine meditatione omnia anagrammata

in omnibus linguis possibile. Ex. gr. inveniri debent anagrammata vocis amor. Erunt variationes possibile.

amor	mora	oram	ramo
amro	moar	orma	raom
aomr	mroa	oarm	rmao
aorm	mrao	oamr	rmoa
armo	maor	omra	roam
arom	maro	omar	roma

Sunt adeo anagrammata vocis amor in lingua latina Roma, mora, Maro, oram, ramo, armo.

SECTIO SECUNDA.
DE ALGEBRA.

CAPUT PRIMUM.

De Algebra ad Problemata arithmetica, eaque determinata, applicata.

DEFINITIO V.

132. **A**lgebra est methodus resolvendi Problemata per æquationes.

DEFINITIO VI.

133. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales; ex. gr. $2 \cdot 3 = 2 + 4$. STIFELIUS (a) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diversimode denominatos.

(a) In *Arithmet. integra* lib. 3. c. 1. p. 228. b.

DEFINITIO VII.

134. *Radix æquationis* est valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. Ex. gr. si fuerit $a^2 + b^2 = x^2$; radix erit $\sqrt{a^2 + b^2}$.

DEFINITIO VIII.

135. Si valor ipsius x fuerit positivus; ex. gr. $x = 3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO IX.

136. Si valor ipsius x fuerit negativus; ex. gr. $x = -5$; *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO X.

137. Si valor ipsius x fuerit radix quantitatis negativæ, ex. gr. $\sqrt{-5}$; *Radix imaginaria* appellatur (§. 71).

DEFINITIO XI.

138. *Æquatio* dicitur *simplex*, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis; ex. gr. si $x = (a + b)$: 2.

DEFINITIO XII.

139. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones affurgit, ut $x^2 = a^2 + b^2$: *cubica*, si ad tres, ut $x^3 = a^3 - b^3$ &c.

SCHOLIUM.

140. In hac sectione tantum de æquatione simplici & quadratica agimus.

PROBLEMA XXXVI.

141. *Problema datum algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur; & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 3).
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *Problema non esse determinatum*, sed unam vel plures quæsitæ pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem æquationes, nisi in ipso Problemate contineantur, per Theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitæ sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ

cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 88, 91, 93, 94, 255, 256 *Arithm.*).

SCHOLIUM.

142. *Hæc sufficiunt pro æquationibus simplicibus reducendis; sed ad altiores aliis adhuc subsidiis opus est, quæ suo loco exponemus, nunc nonnisi extractionem radices ex æquatione quadratica addituri.*

PROBLEMA XXXVII.

143. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

- I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2 = ab$; evidens est esse $x = \sqrt{ab}$.
- II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x + ax = + b^2$; tum x assumatur pro una parte radices, erit a quantitas cognita secundi termini duplum partis alterius (§. 261 *Arithm.*), adeoque $\frac{1}{2} a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, si addatur $\frac{1}{4} aa$ (§. cit.): quo factò, radix extrahi potest, ut hic factum esse apparet:

Casus I.

$$x^2 + ax = b^2$$

$$\frac{1}{4} aa \quad \frac{1}{4} aa \text{ add.}$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 + b^2$$

$$x + \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 + b^2\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 + b^2\right)} - \frac{1}{2} a$$

Casus

Casus 2.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - ax = b^2 \\
 \hline
 x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \\
 \hline
 \left. \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{array} \right\} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)} \\
 \hline
 x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)} \\
 \text{vel } x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}
 \end{array}$$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)} > \frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§. 136), atque adeo solus valor $\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}$ est radix vera (§. 135).

Casus 3.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - ax = -b^2 \\
 \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2 \text{ add.} \\
 \hline
 x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2 \\
 \hline
 \left. \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{array} \right\} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)} \\
 \hline
 x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)} \\
 \& x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}
 \end{array}$$

Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)} < \frac{1}{2}a$, erit $\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - b^2\right)}$ valor ipsius x positivus; consequenter radix vera (§. 135). Habet adeo in presente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post exemplis parebit.

Ceterum ex multiplicatione patet esse $\left(\frac{1}{2}a - x\right)^2$ perinde ac $\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA XXXVIII.

144. Invenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia & quarta, numerum integrum unitate superat.

Sit numerus quæsitus x , erit per conditionem Problematis

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1 \\
 \text{hoc est } (12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1 \\
 \text{feu } \frac{26}{24}x = x + 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{26x}{24x} = \frac{24x + 24}{24x} \\
 \hline
 26x = 24x + 24 \\
 \hline
 2x = 24 \\
 \hline
 x = 12
 \end{array}$$

24 mult.
Subtr.
2 div.

Exam. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1$

PROBLEMA XXXIX.

145. Invenire numerum, cujus partes aliquotæ, qualescunque & quotcunque, simul sumtæ ipsum superant numero dato.

Sit numerus datus f , quæsitus x , partes aliquotæ $\frac{a}{b}x$, $\frac{c}{d}x$, $\frac{e}{g}x$, &c. Erit per conditionem Problematis

$$\begin{array}{l}
 \frac{a}{b}x + \frac{c}{d}x + \frac{e}{g}x \&c. = f + x \\
 (adg + bdc + bde)x \quad (\S. 235) \\
 \text{h.c. } \frac{bdg}{(adg + bdc + bde)x} = \frac{fdbg + bdcx}{bdgx} \text{ Aritb.)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{bdg}{(adg + bdc + bde)x} = \frac{fdbg + bdcx}{bdgx} \\
 \hline
 (adg + bdc + bde - bdg)x = fbdg \\
 \hline
 x = fbdg : (adg + bdc + bde - bdg) \\
 \text{feu } adg + bdc + bde - bdg : bdg = f : x. \\
 \text{Æquatio ultima hanc suppeditat}
 \end{array}$$

Regulam: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A summa numeratorum subtrahatur denominator communis. 3. Per residuum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus est numerus quæsitus.

Ex.

Ex. gr. Sit $a:b = \frac{1}{2}; c:d = \frac{1}{3}, e:g = \frac{1}{4}, f=1$; erit $x = 24: (12 + 8 + 6 - 24) = 24:2 = 12$.

In analogia, in quam æquationem resolvimus, continetur hoc

Theorema. Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur, erit numerus integer, cujus partes sunt fractiones istæ, ad harum supra illum excessum, ut communis denominator ad differentiam ejus a summa numeratorum.

PROBLEMA XL.

146. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates irrationales reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[y]{y^r}$, quemadmodum supra (§. 59). Fiat

$$\begin{array}{l} \sqrt[m]{x^n} = t \\ x^n = t^m \\ x^m = t^{ms} \\ \sqrt[ms]{x^{sn}} = t \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt[y]{y^r} = v \\ y^r = v^s \\ y^{rm} = v^{sm} \\ \sqrt[sm]{y^{rm}} = v \end{array}$$

Habemus adeo $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[ms]{x^{sn}}$ & $\sqrt[y]{y^r} = \sqrt[sm]{y^{rm}}$, ut supra (§. cit.); quo ipso patet, quod dubium videri poterat (§. 60), in exponentibus quantitatum irrationalium locum habere reductionem ad eandem denominationem, si iidem fuerint fractiones diversæ denominationis.

SCHOLIUM.

147. *Hoc artificio reductionis uti possumus in aliis casibus similibus. Ita multiplicationem ac divisionem fractionum atque irrationalium eadem methodo investigare licet.*

PROBLEMA XLI.

148. *Datis summa duarum quantitatum, & earundem facti; invenire numeros.*

Sit summa = a Semidiffer. = x
Fact. = b ; erit quant. maj. = $\frac{1}{2}a + x$
min. = $\frac{1}{2}a - x$ (§. 6).

Ergo per conditionem Probl.

$$\frac{\frac{1}{4}aa - xx = b}{xx \quad xx \quad \text{add.}} \quad (\S. 38).$$

$$\frac{\frac{1}{4}aa = b + xx}{b \quad b \quad \text{Subtr.}}$$

$$\frac{\frac{1}{4}aa - b = xx}{\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x}$$

Regula I. A quadrato semisummae duarum quantitatum subtrahatur factum earundem. 2. Ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem.

Sit ex. gr. $a = 14, b = 48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Adeoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$; $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt adeo numeri quæsitæ 8 & 6. Nam $8 \cdot 6 = 48$, & $8 + 6 = 14$.

COROLLARIUM.

149. *Quoniam $\frac{1}{2}a$ est dimidium totius a , x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium, æquatio secunda hoc continet*

Theorema: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales; quadratum partis æqualis æquale est rectangulo inæqualium, una cum quadrato differentia partis æqualis ab inæquali.

SCHOLIUM.

150. *Patet adeo, quod sæpius casu in Theoremata incidamus, dum Problemata algebraice resolvimus; qualia subinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet proprio Marte ex ultima æquatione eruere valet, in posterum prætermitemus.*

PROBLEMA XLII.

151. *Data summa dignitatum similibus duarum quantitatum, & differentia earundem; invenire quantitatem utramque.*

Sit

Sit summa = a Quantit. maj. = y
 differentia = b min. = x
 erit per conditionem probl.

$$\begin{array}{r} x^m + y^m = a \\ x^m \quad x^m \text{ subtr.} \end{array} \quad \begin{array}{r} y^m - x^m = b \\ x^m \quad x^m \text{ add.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y^m = a - x^m \\ y^m = b + x^m \end{array}$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$\begin{array}{r} a - x^m = b + x^m \\ + x^m \quad + x^m \text{ add.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = b + 2x^m \\ b \quad b \quad \text{subtr.} \end{array}$$

$$a - b = 2x^m$$

$$(a - b) : 2 = x^m \quad (2 \text{ div.})$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)} = x$$

Sit $m = 2$, $a = 97$, $b = 65$: erit $x = \sqrt{48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$, & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.

Examen: $y^2 + x^2 = 81 + 16 = 97$ &
 $y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$.

Æquatio antepenultima resolvitur in hanc analogiam,

$a - b : x^m = 2 : 1$ (§. 299 *Arithm.*),
 quæ sequens suppeditat

Theorema. Excessus summæ duarum dignitatum similium supra differentiam earundem, est ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA XLIII.

152. Dato itinere diurno viatoris alicujus, una cum itinere diurno alterius ipsum dato tempore sequentis; invenire tempus, quo illum hic assequetur.

Sit iter diurnum primi = a
 secundi = b
 tempus datum = c
 tempus quæs. = x,

erit iter intra tempus datum a primo confectum = ac; quod vero idem

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

intra quæsitum emensus est = ax: iter posterioris intra tempus quæsitum reperietur = bx (§. 302 *Arithm.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} ac + ax = bx \\ ax \quad ax \text{ subtr. quia } bx > ax \end{array}$$

$$ac = bx - ax$$

$$ac : (b - a) = x$$

Sit $a = 6$, $b = 8$, $6 = 4$: erit $x = 24 : 2 = 12$.

Examen. Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies antequam conveniunt, & iter diurnum primi est 6, secundi 8; via primi est 6. $16 = 96$, secundi 8. $12 = 96$

Æquatio penultima in hanc analogiam resolvitur (§. 299 *Arithm.*).

$$b - a : a = c : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum insequitur, tempore aliquo elapso, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emittitur, est ad viam primi quem alter insequitur, ut tempus ab itinere primi usque ad initium itineris secundi elapsum ad tempus quo alter ipsum assequitur.

SCHOLIUM.

153. Facile apparet, cum viatoris notio Problematis resolutionem non ingrediatur, Problema universalius de mobilibus quibuscunque concipi posse.

PROBLEMA XLIV.

154. Dato itinere diurno alicujus viatoris, una cum tempore ab initio itineris elapso; invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum assequatur.

M m

Sit

Sit iter diurnum primi $= a$
 tempus elapsum $= b$
 tempus datum $= c$
 iter diurnum alterius $= x$.

Erit, per conditionem Problematis, ut
 in Probl. præced.

$$\begin{array}{r} ab + ac = cx \\ \hline c \text{ div.} \\ (ab + ac) : c = x \end{array}$$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam (§. 299 Arithm.)

$$c : b + c = a : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema. Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso, erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

PROBLEMA XLV.

155. Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet; invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent.

Sit intervallum locorum $= a$

iter diurnum primi $= b$

secundi $= c$

tempus occurfus $= x$,

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via quam alter eodem tempore emittitur $= cx$ (§. 302 Arithm.). Quare cum ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum unde egrediebantur; habebimus

$$\begin{array}{r} bx + cx = a \\ \hline b + c \text{ div.} \\ x = a : (b + c) \end{array}$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

SCHOLIUM.

156. Problemata istiusmodi specialia sub initium difficiliora sunt soluta, quam abstracta; quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex Theorematis arithmetici facile eruitur; in illis autem ex circumstantiis Problematis elicienda. Quodsi enim plures circumstantiæ occurrunt, Tyrones non statim eas pervident, quæ æquationem suppeditant. Discant igitur consultius esse ut Problematis abstractis solvendis primas studii Algebraici partes consecrent: insuperque notent velim, facilius Problemata specialia ad abstracta, seu generalia, quam vice versa abstracta ad specialia revocari; quia ista conditiones generales, unde solutio pendet, actu continent, in his vero circumstantiæ speciales, quæ ad solutionem nil conferunt, minime comparent. Ex. gr. Problema præsens in abstracto istiusmodi est. Invenire numerum, qui in summam duorum datorum ductus producit numerum datum. Similiter Problema (§. 152) in abstracto tale est: Datis tribus quantitibus, invenire quartam, ita ut factum ex quarta in secundam æquale sit factum ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. Hinc apparet ratio, cur Theorematum usus non statim in oculos occurrat. Nocent igitur, qui inveniri ac addisci prohibent ea quorum usus nondum constat, vel non statim primo intuitu in oculos occurrat.

PROBLEMA XLVI.

157. Data summa duarum quantitatum, & differentia quadratorum; invenire quantitates.

Sit summa quantitatum $= a$

differentia quadratorum $= b$

Semidiff. quantitatum $= y$

erit quantitas major $= \frac{1}{2}a + y$

minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 5).

Qua-

Quare

$$\begin{array}{l} \text{quadratum maj. } \frac{1}{4}a^2 + ay + y^2 \\ \text{min. } \frac{1}{4}a^2 - ay + y^2 \end{array}$$

differ. (§. 30) $2ay = b$ per condit.
 $2a$ div. $\frac{2ay}{2a} = \frac{b}{2a}$ Probl.

$$y = b : 2a$$

Sit $b = 40, a = 10$: erit $y = 40 : 20 = 2$.
 Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 - 9 = 40$.

PROBLEMA XLVII.

158. Data summa duarum quantita-
 tum, una cum summa quadratorum; in-
 venire quantitatem utramque.

Sit summa = a

Summa quadratorum = b

Semidiff. quantitarum = y

$$\begin{array}{l} \text{erit major} = \frac{1}{2}a + y \\ \text{minor} = \frac{1}{2}a - y \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (\text{§. 6.})$$

Quare

$$\begin{array}{l} \text{quadrat. maj. } \frac{1}{4}a^2 + ay + y^2 \\ \text{minoris } \frac{1}{4}a^2 - ay + y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{summa } \frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b \\ \frac{1}{2}a^2 \qquad \qquad \frac{1}{2}a^2 \text{ Subtr.} \\ \hline 2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2 \end{array}$$

$$\frac{2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2}{2} \quad 2 \text{ div.}$$

$$\frac{y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2}{\sqrt{\quad}} \quad \text{Ext. Rad.}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2\right)}$$

Sit $a = 10, b = 58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)}$
 $= \sqrt{4} = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$
 & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7 + 3 = 10$, & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA XLVIII.

159. Invenire duos numeros ejus con-
 ditionis, ut factum ex unoquoque in ra-
 dicem quadratam alterius sit aequale nu-
 mero dato.

Sit factum unum = a

alterum = b

numerus unus = x

alter = y

erit, per conditionem Problematis,

$$\frac{x \sqrt{y} = a}{\text{Quad.}} \quad \frac{y \sqrt{x} = b}{\text{Quad.}}$$

$$\frac{x^2 y = a^2}{y \text{ div.}} \quad \frac{y^2 x = b^2}{y^2 \text{ div.}}$$

$$\frac{x^2 = a^2 : y}{\text{Quad.}} \quad \frac{x = b^2 : y^2}{\text{Quad.}}$$

$$x^2 = b^4 : y^4$$

$$\frac{a^2 : y = b^4 : y^4}{y^4 \text{ mult.}}$$

$$\frac{a^2 y^3 = b^4}{a^2 \text{ div.}}$$

$$\frac{y^3 = b^4 : a^2}{\sqrt{\quad}}$$

$$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$$

Sit $a = 18, b = 12$: erit $y = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9 \sqrt{4} = 18$, &
 $4 \sqrt{9} = 12$.

PROBLEMA XLIX.

160. Invenire duos numeros, quorum
 factum aequale est numero dato, qua-
 dratum vero summae ad quadratum diffe-
 rentiae habet rationem datam.

Sit factum = a Summa = $2x$
 ratio = $b : c$ different. = $2y$

erit major = $x + y$

minor = $x - y$

Ergo, per conditiones Problematis,

$$\begin{array}{r} xx - yy = a \\ yy \quad yy \text{ add.} \\ \hline xx = a + yy \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} b : c = 4x^2 : 4y^2 (\text{§. 297}) \\ 4cx^2 = 4by^2 \text{ Arithm.} \\ \hline x^2 = by^2 : c \quad (4c \text{ div.}) \end{array} \right\}$$

Mm 2

Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$a + y^2 = by^2 : c$$

c mult.

$$ac + cy^2 = by^2$$

cy^2 cy^2 subtr.

$$ac = by^2 - cy^2$$

$b - c$ div.

$$ac : (b - c) = y^2$$

$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b - c)} = y$$

Sit $a = 96$, $b : c = 25 : 1$. Erit $y = \sqrt{96}$;
 $\sqrt{(25 - 1)} = \sqrt{4} = 2$, & $x = \sqrt{(a + y^2)}$
 $= \sqrt{(96 + 4)} = \sqrt{100} = 10$, consequenter
 numerus major $x + y = 10 + 2 = 12$,
 & minor $x - y = 10 - 2 = 8$.

Examen. 12. 8 = 96 & 100 : 4 = 25 : 1.

PROBLEMA L.

161. Dato pretio unius mensuræ vini;
 invenire quantitatem aquæ commiscen-
 dæ, ut una mensura dato alio pretio mi-
 nore vendi queat.

Sit pretium majus = a

minus = b

quantitas aquæ = x .

Cum aquæ pretium nullum sit; erit
 $1 + x : 1 = a : b$; consequenter

$$b + bx = a \quad (\text{§. 297 } \textit{Arithm.})$$

b subtr.

$$bx = a - b$$

b div.

$$x = (a - b) : b = a : b - 1$$

Sit $a = 16$, $b = 10$: erit $x = 1 \frac{6}{10} - 1$
 $= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Theorema. Si vino pretiosiori aqua com-
 miscenda, ut viliori pretio constet; quan-
 titas aquæ commiscendæ est ad quantita-
 tem vini, ut differentia pretiorum ad pre-
 tium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ x :
 $1 = a - b : b$.

Examen. Etenim si integra mensura ve-
 neat 10 grossis, tres ipsius quintæ veneunt
 6 grossis (§. 302 *Arithm.*); quos si addas
 pretio unius mensuræ, quod est 10 gros-
 sorum, prodibunt 16 grossi pretium unius
 mensuræ vini generosioris.

PROBLEMA LI.

162. Dato pretio vini generosi &
 pretio vilioris; determinare quantita-
 tem vini vilioris generoso commiscendi,
 ut dato aliquo pretio medio venire queat.

Sit pretium unius mensuræ vini

generosi = a

vilioris = b

medium = c

quantitas unius mensuræ = 1

quantitas vilioris commiscendi = x

erit pretium ejus = bx

quantitas generosi commiscendi = $1 - x$

erit ejus pretium = $a - ax$

Quare, per conditionem Probl.

$$a - ax + bx = c$$

ax ax add. ob $ax > bx$

$$a + bx = c + ax$$

bx bx subtr.

$$a = c + ax - bx$$

c c subtr.

$$a - c = ax - bx$$

$a - b$ div.

$$(a - c) : (a - b) = x$$

Sit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; erit $x = (16$
 $- 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris = $6 \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ ge-
 nerosi = $5 \frac{1}{3}$, adeoque mensuræ mixtæ
 $= 6 \frac{2}{3} + 5 \frac{1}{3} = 12$.

Sit terminus primus = a
 differentia = d
 summa = c
 ultimus = y
 terminorum numerus = x
 erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)
 $\frac{1}{2}x(a+y) = c \quad a+dx-d=y$

$$\frac{ax+xy}{ax} = \frac{2c}{ax} \quad \text{Subtr.}$$

$$\frac{xy}{ax} = \frac{2c-ax}{ax} \quad x \text{ div.}$$

$$y = \frac{(2c-ax):x}{x} \quad \text{Ergo (§. 87 *Arithm.*)}$$

$$(2c-ax):x = a+dx-d \quad x \text{ mult.}$$

$$\frac{2c-ax}{ax} = \frac{ax+dx^2-dx}{ax} \quad \text{add.}$$

$$\frac{2c}{ax} = \frac{dx^2+2ax-dx}{ax} \quad d \text{ div.}$$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a-d}{d}x$$

hoc est, si fiat $(2a-d):d = m$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + mx \quad \frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2 \quad \text{add.}$$

$$\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d} = x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}\right)} = x + \frac{1}{2}m \quad \frac{1}{2}m \quad \frac{1}{2}m \quad \text{subtr.}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{2c}{d}\right)} - \frac{1}{2}m = x$$

Sit $a = 2, d = 3, c = 57$: erit $m = (4-3):3 = \frac{1}{3}$; consequenter $x = \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{114}{3}\right)} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{136}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} - \frac{1}{6} = \frac{16}{6} = 6$, & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA LV.

166. *Datis termino primo & ultimo, una cum summa progressionis arithmetica; invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus = a
 ultimus = b
 summa = c
 differentia = y
 numerus terminorum = x
 erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)
 $\frac{1}{2}x(a+b) = c \quad a+xy-y=b$

$$\frac{x(a+b)}{xy-y} = \frac{2c}{b-a} \quad \text{Subtr.}$$

$$\frac{x-1}{a+b} = \frac{2c}{a+b} - 1 = \frac{(b+a)(b-a)}{2c-a-b}$$

Sit $a = 2, b = 17, c = 57$: erit $x = 114:19 = 6$, & $y = (19.15):(114-19) = 285:95 = 3$.

Theorema. In progressionem arithmetica, est ut differentia summae ex termino primo & ultimo a duplo summae progressionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita summa termini primi & ultimi ad differentiam progressionalem.

PROBLEMA LVI.

167. *Datis differentia & numero terminorum, una cum summa progressionis arithmetica; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum = n
 differentia = d
 summa = c
 term. primus = x
 ultimus = y

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)
 $\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}ny = c \quad x+nd-d=y$

$$\text{h. c. } \frac{nx + \frac{1}{2}n^2 d - \frac{1}{2}nd}{\frac{1}{2}n} = \frac{c}{\frac{1}{2}n} \quad \frac{1}{2}n \text{ div.}$$

$$\frac{2x + nd - d}{nd - d} = \frac{2c}{n} \quad nd - d \text{ subtr.}$$

$$\frac{2x}{nd - d} = \frac{2c}{n} - \frac{nd + d}{nd - d} \quad 2 \text{ div.}$$

$$x = c : n - \frac{1}{2}nd + \frac{1}{2}d$$

Sit

Sit $n=6, d=3, c=57$: erit $x=9\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 9 = 2$, & $y=2 + 18 - 3 = 17$.

PROBLEMA LVII.

168. Datis differentia terminorum, termino ultimo, & summa progressionis arithmetica; invenire terminum primum & numerum terminorum.

Sit terminus ultimus = b

terminorum differ. = d

summa = c

terminus primus = x

numerus termin. = y

erit (§. 333 Arithm. & §. 107 Anal.)

$$\frac{1}{2}y(b+x) = c \quad b = x + dy - d$$

$$y(b+x) = 2c \quad b + d - x = dy$$

$$y = 2c : (b+x) \quad (b+d-x) : d = y$$

Quamobrem (§. 87 Arithm.)

$$2c : (b+x) = (b+d-x) : d$$

$$2cd : (b+x) = b+d-x$$

$b+x$ mult.

$$2cd = b^2 + bd - bx + bx + dx - x^2$$

$$x^2 - dx = b^2 + bd - 2cd$$

$$\frac{1}{4}d^2 \quad \frac{1}{4}d^2 (\text{§. 143}).$$

$$x^2 - dx + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd$$

$$x - \frac{1}{2}d \left. \vphantom{x} \right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$$

$$x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$$

Quodsi $\frac{1}{2}d > x$, erit $\frac{1}{2}d - x$ quantitas positiva, adeoque $x = \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$: si vero $\frac{1}{2}d < x$, quantitas $\frac{1}{2}d - x$ æquivaleret privativo, sed $x - \frac{1}{2}d$ positivo; adeoque $x = \frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$.

Sit $b=17, d=3, c=57$: erit $x=2 +$

$$\sqrt{(\frac{9}{4} + 289 + 51 - 342)} = \frac{3}{2} + \sqrt{(2\frac{1}{4} - 2)} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \text{ \& } y = (17 + 3 - 2) : 3 = \frac{18}{3} = 6.$$

PROBLEMA LVIII.

169. Datis summa progressionis arithmetica, numero terminorum, & facto ex primo in ultimum; invenire terminos singulos.

Sit factum = a

numerus terminorum = n

summa = c

terminus primus = x

ultimus = y

erit (§. 107 & per condit. Probl.)

$$\frac{1}{2}n(x+y) = c \quad xy = a$$

$$x + y = 2c : n \quad y = a : x$$

$$\text{h. e. } x + \frac{a}{x} = \frac{2c}{n}$$

x mult.

$$x^2 + a = 2cx : n$$

$$x^2 - 2cx : n = -a$$

$$+ c^2 : n^2 + c^2 : n^2 \text{ add.}$$

$$x^2 - 2cx : n + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a$$

$$\left. \begin{array}{l} x - c : n \\ c : n - x \end{array} \right\} = \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}$$

$$x = \frac{c}{n} \pm \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}$$

Signum + valet pro termino ultimo; signum autem - pro primo.

Sit $c=57, n=6, a=34$: erit $x = \frac{57}{6} - \sqrt{(\frac{57^2}{36} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{(90\frac{1}{4} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{56\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{22\frac{2}{4}} = 9\frac{1}{2} - \frac{15}{2} = 2$, & $y = 9\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 17$.

PROBLEMA LIX.

170. Invenire numerum terminorum in serie imparium summatorum, ut prodeat potentia data numeri dati.

RESO-

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
 erit dignitas ejus $= n^m$
 terminus prim. progr. $= 1$
 differenti term. $= 2.$
 Sit num. term. $= x$
 erit summa progress. $= x^2$ (§. 108).
 Ergo, per conditionem Probl.

$$\frac{x^2 = n^m}{x = n^{m:2}} \text{Ext. Rad.}$$

Patet adeo, Problema non esse possibile nisi in iis casibus, ubi exponens dignitatis m est numerus par, ut per 2 dividi possit.

Ex. gr. Sit $m = 2$, erit $x = n$, hoc est, numerus terminorum est idem cum radice quadrata, quemadmodum supra reperimus (§. 110). Sit $m = 4$; erit $x = n^2$, hoc est, numerus terminorum summandorum est radicis quadratus, si potentia quarti gradus desideretur, veluti si $n = 2$, erit $2^4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

PROBLEMA LX.

171. Invenire numeros impares totidem numero, quos numerus datus habet unitates, & quorum additione prodit potentia data numeri hujus dati.

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
 dignitas ejus $= n^m$
 terminus primus $= x$

Quoniam in serie numerorum imparium differentia terminorum $= 2$, & numerus terminorum est n per hypoth. erit summa progressionis $= nx + n^2 - n$ (§. 108); consequenter, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} nx + n^2 - n = n^m \\ x + n - 1 = n^{m-1} \quad n \text{ div.} \\ \hline n - 1 \quad n - 1 \text{ subtr.} \\ \hline x = n^{m-1} - n + 1 \end{array}$$

Patet adeo Problema esse possibile in omni casu.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $x = n - n + 1 = 1$, ut supra (§. 110).

Sit $m = 3$, erit $x = n^2 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 4 - 1 = 3$, adeoque $2^3 = 3 + 5 = 8$. Sit $n = 3$; erit $x = 9 - 2 = 7$, adeoque $3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Patet adeo quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Sit $m = 4$, erit $x = n^3 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 8 - 1 = 7$, adeoque $2^4 = 7 + 9 = 16$. Sit $n = 3$, erit $x = 27 - 2 = 25$, adeoque $3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Sit $m = 5$, erit $x = n^4 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 16 - 1 = 15$, adeoque $2^5 = 15 + 17 = 32$. Sit $n = 3$, erit $x = 81 - 2 = 79$, adeoque $3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$.

SCHOLIUM.

172. Mira igitur facilitate ostendimus ad captum Tyronum, quomodo potentia cujuscunque gradus ex additione numerorum imparium procreentur, quod imperfectius multoque intricatius proponitur in Miscellaneis Berolinensibus p. 327. & seqq.

PROBLEMA LXI.

173. Invenire tres numeros continue proportionales; dato facto ex quadrato tertii in primum, una cum denominatore rationis.

Sit factum $= a$
 denominator $= m$
 terminus primus $= x$
 erit secundus $= mx$
 tertius $= m^2x$ (§. 114).

Quare, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} a = m^4 x^3 \\ \hline m^4 \text{ div.} \\ \hline a : m^4 = x^3 \\ \hline \sqrt[3]{(a : m^4)} = x \end{array}$$

Sit

Sit ex. gr. $a = 648$, $m = 3$: erit $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Æquatio 1^a resolvitur in hanc analogiam $1 : m^4 = x^3 : a$ (§. 299. *Arithm.*)

Quare cum $1 : m^4$ sit ratio quadruplicata $1 : m$ (§. 159 *Arithm.*); sequens enascitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione geometrica continua est ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad secundum.

PROBLEMA LXII.

174. Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.

Sit numerus datus = a
 denominator = b
 pars prima = x
 erit secunda = bx
 tertia = b^2x (§. 114)

&, per conditionem Problematis,

$$b^2x + bx + x = a$$

$$x = a : (b^2 + b + 1) \text{ div.}$$

Sit $b = 4$, $a = 42$: erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$.

PROBLEMA LXIII.

175. Numerum datum in terminos quotcunque proportionales resolvere, dato denominatore rationis.

Sit numerus datus = a
 denominator = m
 terminus primus = x
 erit secundus = mx
 tertius = m^2x
 quartus = m^3x &c.

Ergo, per conditionem Problematis,
 $x + mx + m^2x + m^3x + m^4x$ &c. = a
 $x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4$ &c.)

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini sint numero sex: erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1, 3, 9, 27, 81, 243 est series proportionalium quaesita.

PROBLEMA LXIV.

176. Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.

RESOLUTIO.

Sit primus datorum = a
 ultimus = b
 mediorum primus = x
 numerus mediorum = m

erit, per conditionem Problematis (§. 302 *Arithm.*)

$$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \text{ \&c. } \frac{x^m}{a^{m-1}}, b$$

consequenter (§. 118)

$$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$$

$$x^{m+1} = a^m b$$

$$x = \sqrt[m+1]{a^m b} \text{ Ext. Rad.}$$

Sit $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$: erit $m + 1 = 5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$; consequenter termini intermedii sunt 3, 9, 27, 81.

SCHOLIUM.

177. Ad manus esse debet Tabula dignitatum superiorum pro digitis singulis, qualis extat pro quadratis & cubis (§. 257 *Arithm.*).

COROLLARIUM.

178. Quodsi numerus, qui exprimit terminum desideratum, fuerit n ; erit medius proportionalis $= x^n : a^{n-1}$. Quare, si pro x substituatur valor modo inventus

$$\sqrt[m+1]{a^m b} = a^{m:(m+1)} b^{1:(m+1)}; \text{ prodibit numerus quaesitus } = a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{n-1} \\ = a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{(mn-m+n-1):(m+1)} \\ = a^{(m-n+1):(m+1)} b^{n:(m+1)}.$$

SCHOLIUM.

179. Cadant, ex. gr. inter 1 & 243 quatuor medii proportionales continue, & quaratur eorum secundus: erit $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$, $n = 2$, adeoque $(m-n+1):(m+1) = \frac{3}{5}$, $n:(m+1) = \frac{2}{5}$, consequenter numerus quaesitus $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{59049} = 9$.

PROBLEMA LXV.

180. Data summa termini primi & ultimi, itemque summa secundi & tertii, in proportione sive continua, sive discreta, una cum denominatore rationis; invenire terminos singulos.

$$\begin{aligned} \text{Sit summa prima} &= a \\ \text{secunda} &= b \\ \text{denominator} &= m \\ \text{terminus primus} &= x, \\ \text{erit quartus} &= a - x \\ \text{secundus} &= mx \\ \text{tertius} &= b - mx \end{aligned}$$

Quare, per conditionem Problematis,

$$x : mx = b - mx : a - x$$

$$\text{Hinc } \frac{ax - x^2 = mbx - m^2 x^2}{\text{-----}} \quad x \text{ div.}$$

$$\frac{a - x = mb - m^2 x}{m^2 x - x = mb - a}$$

$$\text{-----} \quad m^2 - 1$$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$: erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

PROBLEMA LXVI.

* 180. Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & secundi aequetur numero dato, & differentia secundi atque tertii aequalis sit iidem numero dato.

Sit differ. prima $= a$

differ. secunda $= b$

terminus I $= x$

erit II $= x + a$

III $= x + a + b$

Per conditionem Problematis,

$$x : x + a = x + a : x + a + b$$

$$\frac{x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2}{x^2 + ax \quad x^2 + ax \quad \text{subt.}}$$

$$\frac{bx = ax + a^2}{bx - ax = a^2}$$

$$\text{-----} \quad (b-a) \text{ div.}$$

$$x = a^2 : (b-a)$$

Sit $a = 8$, $b = 24$: erit $x = 64 : (24 - 8) = 64 : 16 = 4$.

Analogia, in quam resolvitur aequatio antepenultima, $b - a : a = a : x$, sequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & secundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiae termini primi & secundi a differentia secundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA LXVII.

181. Datis in progressionem geometricam termino primo & ultimo, atque terminorum numero; invenire denominatorem rationis.

Sit

Sit terminus primus = a
ultimus = b

numerus terminorum = n
denominator = x

Erit (§. 121)

$$b = x^{n-1} a$$

$$\frac{b}{a} = x^{n-1} \quad a \text{ div.}$$

$$b : a :: x^{n-1} : 1 = x.$$

Sit $a = 2, b = 486, n = 6$: erit $x = \sqrt[6]{(486:2)} = \sqrt[6]{243} = 3.$

PROBLEMA LXVIII.

182. Datis denominatore rationis, terminorum numero, & summa progressionis geometricæ; invenire terminum primum.

Sit denominator = m
numerus terminorum = n
summa progress. = c
terminus primus = x

erit ultimus = $m^{n-1} x$

consequenter (§. 121)

$$c = (m^n x - x) : (m - 1)$$

$$\frac{c}{m-1} = m^n x - x$$

$$mc - c = m^n x - x$$

$$\frac{mc - c}{m^n - 1} = x$$

Sit $m = 3, n = 6, c = 728$: erit $x = 2. 728 : 728 = 2.$

Analogia, in quam æquatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, suppeditat hoc

Theorema: Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum, ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponentis numero terminorum æqualis est, unitate multiplicata ad denominatorem ipsum unitate imminutum.

PROBLEMA LXIX.

183. Datis, in progressionem geometricam, termino primo & ultimo, una

cum denominatore rationis; invenire numerum terminorum.

Sit terminus primus = a
ultimus = b

denominator rationis = m

numerus terminorum = x

erit (§. 121)

$m^{x-1} a = b$, hoc est, si logarithmus ipsius a ponatur la , logarithmus ipsius $m = lm$, & logarithmus ipsius $b = lb$, $xlm - lm + la = lb$ (§. 341, 337 Arith.)

$$xlm = lb - la + lm$$

$$\frac{xlm}{lm} = \frac{lb - la + lm}{lm} \quad lm \text{ div.}$$

$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2, b = 486, m = 3$, erit

$$lb = 2. 6866363$$

$$la = 0. 3010300$$

$$lb - la = 2. 3856063$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad x \quad 1 \\ lb - la = 23856063 \quad (5 \\ lm = 4771223 \quad (1 \\ \hline 6 = x \end{array}$$

PROBLEMA LXX.

184. Datis summa progressionis geometricæ, termino primo, atque ultimo; invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.

Sit summa = c

terminus primus = a

ultimus = b

denominator rationis = y

numerus terminorum = x

erit (§. 121)

$$c = (by - a) : (y - 1) \quad b = y^{x-1} a$$

$$cy - c = by - a$$

$$cy - by = c - a$$

$$\frac{cy - by}{c - b} = \frac{c - a}{c - b}$$

$$y = (c - a) : (c - b)$$

Nn 2

Æqua-

Æquatio altera, adhibitis logarithmis, in sequentem degenerat (§. 341, 337 *Arithm.*).

$$\begin{array}{r} lb = xly - ly + la \\ \hline lb + ly - la = xly \\ \hline ly \text{ div.} \\ \hline (lb - la) : ly + 1 = x \end{array}$$

Quodsi substituatur valor ipsius ly paulo ante inventus, qui est, $l(c - a) - l(c - b)$; habebimus.

$$\begin{array}{r} lb - la \\ \hline l(c - a) - l(c - b) + 1 = x \end{array}$$

Sit $c = 728, a = 2, b = 486$: erit

$lb = 2.6866363$	$c = 728$
$la = 0.3010300$	$b = 486$
$lb - la = 2.3856063$	$c - b = 242$
$l(c - a) = 2.8609366$	$c = 728$
$l(c - b) = 2.3838154$	$a = 2$
Differ. = 4771212	$c - a = 726$
23856063	(5 1
4771212	
6 = x	

PROBLEMA LXXI.

185. Datis, in progressionem geometricam, facto ex primo in ultimum, numero terminorum, & denominatore rationis; invenire terminum primum & ultimum.

Sit factum = f
 numerus termin. = n
 denominator = m
 terminus primus = x
 ultimus = y

erit, per condiciones Problematis,
 $xy = f$ $m^{n-1} x = y$

$$\frac{xy = f}{m^{n-1} x = y} \quad x \text{ div.}$$

$$y = f : x$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$\begin{array}{r} f : x = m^{n-1} x \\ \hline f = m^{n-1} x^2 \quad \times \text{ mult.} \\ \hline \phantom{f = m^{n-1} x^2} m^{n-1} \text{ div.} \\ \hline f : m^{n-1} = x^2 \\ \hline \phantom{f : m^{n-1} = x^2} \text{Ext. Rad.} \\ \hline \sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x \end{array}$$

Sit $m = 3, n = 6, f = 972$: erit $x = \sqrt[6]{972} : \sqrt[6]{243} = \sqrt[6]{4} = 2$.

DEFINITIO XIII.

186. Tres vel quatuor quantitates dicuntur *Harmonice proportionales*, si, in priore casu, differentia primi & secundi fuerit ad differentiam secundi atque tertii, ut primus ad tertium; in casu posteriore, differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum:

Ex. gr. 10, 16 & 40 sunt in proportione harmonica: est enim $6 : 24 = 10 : 40$.

Si termini proportionales in casu priore continentur; oritur *Progressio Harmonica*.

PROBLEMA LXXII.

187. Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.

Sit prima = a
 secunda = b
 tertia = x
 erit (§. 186)

$$\begin{array}{r} b - a : x - b = a : x \\ \hline ax - ab = bx - ax \quad (\text{§. 297 } \textit{Arith.}) \\ \hline 2ax - bx = ab \\ \hline (2a - b) \text{ div.} \\ \hline x = ab : (2a - b) \end{array}$$

Ex. gr. Sit $a = 10, b = 16$: erit $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$, unde sequens enascitur

Theo-

Theorema. Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

188. Si $2a = b$; erit $x = ab : 0$, consequenter $1 : 0 = x : ab$ (§. 174 *Arithm.*). Quare cum non sit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. Ex. gr. si $a = 12$, $b = 24$: juxta regulam $x = 12. 24 : (24 - 24) = 12. 24 : 0$. Sed non licet $12. 24$ seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12 : 264 = 12 : 288$ (§. 186): Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b > 2a$.

COROLLARIUM II.

189. Quodsi ex tribus proportionalibus 6, 8, 12, terminus secundus sumatur pro a , tertius pro b , invenietur quartus continue proportionalis $= 8. 12 : (16 - 12) = 8. 12 : 4 = 8. 3 = 24$.

COROLLARIUM III.

190. Cum eodem modo, si tertius pro a , quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat, & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 188), continuatur per regulam inventam. Ex. gr. si $a = 10$, $b = 12$, erit tertius $12. 10 : (20 - 12) = 15$. Inde quartus $12. 15 : (24 - 15) = 20$; quintus $15. 20 : (30 - 20) = 30$; sextus $20. 30 : (40 - 30) = 60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60 = 2. 30$ (§. 188).

PROBLEMA LXXIII.

191. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
 secunda $= x$
 tertia $= b$

erit $x - a : b - x = a : b$ (§. 186)

$\frac{bx - ab = ab - ax}{ax + bx = 2ab}$ (§. 297 *Arithm.*)

$\frac{ax + bx = 2ab}{a + b \text{ div.}}$
 $x = 2ab : (a + b)$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 40$: erit $x = 800 : 50 = 16$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam, $a + b : 2a = b : x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit summa primi & ultimi ad primi duplum, ut ultimus ad medium.

PROBLEMA LXXIV.

192. *Datis tribus quantitatibus; invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
 secunda $= b$
 tertia $= c$
 quarta $= x$
 erit (§. 186)

$\frac{b - a : x - c = a : x}{bx - ax = ax - ac}$ (§. 297 *Arithm.*)

$\frac{ac = 2ax - bx}{(2a - b) \text{ div.}}$

$ac : (2a - b) = x$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$: erit $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam: $2a - b : a = c : x$.

Theorema. Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales, erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO XIV.

193. *Proportio Contraharmonica* est ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad

Nn 3 diffe-

differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum.

Ex. gr. 3, 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales: est enim 2 : 1 = 6 : 3.

PROBLEMA LXXV.

194. Datis duabus quantitibus; invenire tertiam contraharmonice proportionalem.

Sit prima = a

secunda = b

tertia = x

erit (§. 193)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \quad (\text{§. 297 Arithm.})$$

$$\frac{1}{4}b^2 \quad \frac{1}{4}b^2 \text{ add.} \quad (\text{§. 143})$$

$$\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2\right)} = x - \frac{1}{2}b, \text{ ob } x > b \quad \text{Ext. Rad.}$$

$$\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2\right)} = x$$

Ex. gr. Sit $a = 3, b = 5$: erit $x = \frac{5}{2} +$

$$\sqrt{\left(\frac{25}{4} + 15 - 9\right)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

PROBLEMA LXXVI.

195. Datis duabus quantitibus; invenire mediam contraharmonice proportionalem.

Sit prima = a media = x

tertia = b

erit (§. 193)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \quad (\text{§. 297 Arithm.})$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$

$$\frac{ax + bx}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{a + b} \text{ div.}$$

$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

Ex. gr. fit $a = 3, b = 6$: erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si summa duorum quadratorum dividitur per summam radicum, quo-

tus est inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO XV.

196. Numerus pronicus est, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem æqualis.

COROLLARIUM I.

197. Si in progressionem arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum = n ; erit summa progressionis = $2n + \frac{1}{2}(n^2 - n)2$ (§. 108), = $2n + n^2 - n = n^2 + n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

COROLLARIUM II.

198. Patet adeo numeros pronicos prodire per summationem progressionis numerorum parium. Sit enim progressio 2, 4, 6, 8, 10, &c. erunt pronicus 2, 6, 12, 20, 30, &c.

PROBLEMA LXXVII.

199. Ex dato numero radicem pronicam extrahere.

RESOLUTIO.

Sit numerus datus = a , radix pronica = x

erit (§. 196)

$$x^2 + x = a$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad (\text{§. 143})$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4a + 1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)} - \frac{1}{2}$$

Theorema. Si quadruplo numeri pronicus addatur unitas, & radix unitate multiplicata bifariam dividatur, quotus est radix pronica.

Sit $a = 72$, erit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(4 \cdot 72 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{289} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$.

Examen. Nam $64 + 8 = 72$.

PRO-

PROBLEMA LXXVIII.

200. Invenire summam Quadratorum & Cuborum, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur.

Sit $0+1+1+1+1+1$ &c. $=f_n^0$
 $0+1+2+3+4+5$ &c. $=f_n^1$
 $0+1+4+9+16+25$ &c. $=f_n^2$
 $0+1+8+27+64+125$ &c. $=f_n^3$
 &c. &c.

$1+1+1+1+1+1$ &c. $=f_{(n+1)}^0$
 $1+2+3+4+5+6$ &c. $=f_{(n+1)}^1$
 $1+4+9+16+25+36$ &c. $=f_{(n+1)}^2$
 $1+8+27+64+125+216$ &c. $=f_{(n+1)}^3$
 &c. &c.

Nimirum f_n^0 denotat summam quotlibet unitatum seriei a cyphra incipientis; $f_{(n+1)}^0$ summam quotlibet unitatum seriei ab unitate incipientis, quia 0 est exponens unitatis (§. 55). Sed n representat unamquamque unitatem in serie prima; $n+1$ in altera. Ergo, si numerus terminorum in utraque serie idem; erit $f_{(n+1)}^0 - f_n^0 = (n+1)^0 = 1$. Similiter f_n^1 denotat summam seriei numerorum naturalium a cyphra incipientis, & n quemlibet ejus terminum: $f_{(n+1)}^1$ summam seriei eorundem numerorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quia 1 est exponens radicem, seu dignitatis primæ (§. cit.). Quare si in utraque serie fuerit idem terminorum numerus, erit $f_{(n+1)}^1 - f_n^1 = (n+1)^1$, ubi $n+1$ terminum ultimum seriei ab unitate incipientis denotat, quo scilicet ea differt a serie, quæ a cyphra inchoatur. Eodem modo patet, esse $f_{(n+1)}^2 - f_n^2 = (n+1)^2$, $f_{(n+1)}^3 - f_n^3 =$

$$(n+1)^3, f_{(n+1)}^4 - f_n^4 = (n+1)^4$$

&c. & in genere $f_{(n+1)}^{m+1} - f_n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (§. 81)
 $f_{(n+1)}^2 = f_n^2 + 2f_n^1 + f_n^0 + 1$
 $f_{(n+1)}^2 - f_n^2 - f_n^0 - 1 = 2f_n^1$

hoc est, ob $f_{(n+1)}^2 - f_n^2 = (n+1)^2$ per
 $(n+1)^2 - f_n^0 - 1 = 2f_n^1$ (dem.)

$$\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}f_n^0 - \frac{1}{2} = f_n^1 \quad 2 \text{ div.}$$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{36}{2} = 18$,
 $\frac{1}{2}f_n^0 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, adeoque f_n^1 summa omnium radicum ab 0 usque ad 5 $= 18 - 3 = 15$. Similiter, sit $n = 3$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = 8$, $\frac{1}{2}f_n^0 = 1\frac{1}{2}$, adeoque $f_n^1 = 6$.

Est porro

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
 (§. 84)

$$f_{(n+1)}^3 = f_n^3 + 3f_n^2 + 3f_n^1 + f_n^0 + 1$$

$$f_{(n+1)}^3 - f_n^3 - 3f_n^2 - 3f_n^1 - f_n^0 - 1 = 3f_n^2$$

h.e. ob $f_{(n+1)}^3 - f_n^3 = (n+1)^3$ per dem.
 $(n+1)^3 - 3f_n^2 - 3f_n^1 - f_n^0 - 1 = 3f_n^2$ (monst.)

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 - f_n^1 - \frac{1}{3}f_n^0 - \frac{1}{3} = f_n^2 \quad 3 \text{ div.}$$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{216}{3} = 72$,
 $f_n^1 = 15$, $\frac{1}{3}f_n^0 = 1\frac{2}{3}$, adeoque $f_n^2 = 72 - 17 = 55$.
 Similiter sit $n = 3$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = 21\frac{1}{3}$,
 $f_n^1 = 6$, $\frac{1}{3}f_n^0 = 1$, adeoque $f_n^2 = 21\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 14$.

Sit denique

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$f_{(n+1)}^4 = f_n^4 + 4f_n^3 + 6f_n^2 + 4f_n^1 + f_n^0 + 1$$

$$f_{(n+1)}^4 - f_n^4 - 4f_n^3 - 6f_n^2 - 4f_n^1 - f_n^0 - 1 = 4f_n^3$$

h.e. ob $f_{(n+1)}^4 - f_n^4 = (n+1)^4$ per dem.
 $(n+1)^4 - 4f_n^3 - 6f_n^2 - 4f_n^1 - f_n^0 - 1 = 4f_n^3$ (demonst.)

$$\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}f_n^2 - f_n^1 - \frac{1}{4}f_n^0 - \frac{1}{4} = f_n^3 \quad 4 \text{ div.}$$

Sit ex. gr. $n = 5$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4 = 324$,
 $\frac{3}{2}f_n^2 = 82\frac{1}{2}$, $f_n^1 = 15$, $\frac{1}{4}f_n^0 = 1\frac{1}{4}$,
 adeoque $f_n^3 = 324 - 99 = 225$.

SCHO-

SCHOLIUM I.

201. Quod in summationibus, quibus in resolutione Problematis usi sumus, semper addenda sit unitas, exempla singularia palam loquuntur. Si enim in equatione $f(n+1)^2 = sn^2 + 2sn + sn^0 + 1$ fuerit $n = 4$ erit:

$$\begin{aligned} sn^0 &= 0 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ sn^1 &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \\ sn^2 &= 0 + 1 + 4 + 9 + 16 \end{aligned}$$

$$f(n+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

Unde cum differentia inter $f(n+1)^2$ & sn^2 sit 25, & $2sn^1 + sn^0$ tantum 24; patet, ad conservandam aequalitatem, addendam esse unitatem.

SCHOLIUM II.

202. Eadem methodo, qua numerorum naturalium Quadrata & Cubos summare docuimus, altiores quoque dignitates summantur. Sed cum potentia in infinitum assurgant, ideo Problema generale pro casibus infinitis inveniendum.

PROBLEMA LXXIX.

203. Summare Potentias quascunque numerorum naturalium.

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1}n^m + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2}n^{m-1} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}n^{m-2} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}n^{m-3}$ &c. in infinit. (§. 95); erit

$$\begin{aligned} f(n+1)^{m+1} &= f n^{m+1} + \frac{m+1}{1} f n^m \\ &+ \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} f n^{m-1} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f n^{m-2} \\ &+ \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f n^{m-3} \text{ \&c. in inf. } + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hinc } f(n+1)^{m+1} &= f n^{m+1} \\ &+ \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} f n^{m-1} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f n^{m-2} \\ &+ \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f n^{m-3} \text{ \&c. } - 1 \\ &= \frac{m+1}{1} f n^m. \end{aligned}$$

Sed $f(n+1)^{m+1} - f n^{m+1} = (n+1)^{m+1} - n^{m+1}$
 (§. 200): Ergo $(n+1)^{m+1} - n^{m+1} = \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} f n^{m-1} - \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f n^{m-2} + \frac{m+1 \cdot m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f n^{m-3}$ &c. in infin. $- 1 = \frac{m+1}{1} f n^m$:
 consequenter $f n^m = \frac{1}{m+1} (n+1)^{m+1} - \frac{m}{1 \cdot 2} f n^{m-1} - \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f n^{m-2} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f n^{m-3}$ &c. in infinit. $- \frac{1}{m+1}$.

Ex. gr. fit $m = 3$, erit $m+1 = 4$, $m-1 = 2$, $m-2 = 1$, $m-3 = 0$, adeoque $\frac{1}{4} (n+1)^4 - \frac{3}{2} f n^2 - f n^1 - \frac{1}{4} f n^0 = \frac{1}{4} = f n^3$, ut ante (§. 200).

SCHOLIUM.

204. Theorema generale terminis quidem constat infinitis; in casibus tamen specialibus numerus terminorum finitus evadit, quia reliqui evanescent, quando numerus ab m subtrahendus sit ipsi m aequalis: quemadmodum ex allato exemplo speciali apparet. Ita vero summationem Potentiarum via vere analytica eruimus, eaque perfacili, ad captum Tyronum. Semper tamen utendum est termino ultimo $\frac{1}{m+1}$: cujus ratio ante allata (§. 201).

COROLLARIUM.

205. Cum summatio Potentiarum superiorum a summatione omnium inferiorum pendat; si in formulis altioribus pro $f n^{m-1}$, $f n^{m-2}$, $f n^{m-3}$ &c. valores ex inferioribus substituantur, prodibunt formulæ per solum n summas Potentiarum determinantes, non præsuppositis summationibus anterioribus: Ex. gr.

 $f n^0$

$$\begin{aligned} f n^0 &= n. (\S. 200) \\ 2f n^1 &= (n+1)^2 - f n^0 - 1 (\S. 200). \\ &= nn + 2n + 1 \\ &\quad - n \\ &\quad - 1 \\ \hline &= nn + n \end{aligned}$$

Hinc $f n^1 = (nn + n) : 2.$

$$\begin{aligned} 3f n^2 &= (n+1)^3 - 3f n^1 - f n^0 - 1 (\S. 200) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\quad - \frac{3}{2} n^2 - \frac{3}{2} n \\ &\quad - n \\ &\quad - 1 \\ \hline &= n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{3}{2} n \end{aligned}$$

Hinc $f n^2 = (n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{3}{2} n) : 3 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6.$

$$\begin{aligned} 4f n^3 &= (n+1)^4 - 6f n^2 - 4f n^1 - f n^0 - 1 (\S. 200) \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ &\quad - 2n^3 - 3n^2 - n \\ &\quad - 2n^2 - 2n \\ &\quad - n \\ &\quad - 1 \\ \hline &= n^4 + 2n^3 + n^2 \end{aligned}$$

Hinc $f n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4.$

$$\begin{aligned} 5f n^4 &= (n+1)^5 - 10f n^3 - 10f n^2 - 5f n^1 - f n^0 - 1 \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \\ &\quad - \frac{10}{4} n^4 - \frac{10}{4} n^3 - \frac{10}{4} n^2 \\ &\quad - \frac{20}{8} n^3 - \frac{30}{8} n^2 - \frac{10}{6} n \\ &\quad - \frac{5}{2} n^2 - \frac{5}{2} n \\ &\quad - n \\ &\quad - 1 \\ \hline &= n^5 + \frac{5}{2} n^4 + \frac{10}{6} n^3 - \frac{1}{6} n \end{aligned}$$

Hinc $f n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) : 30$
&c. &c. &c.

DEFINITIO XVI.

206. Numeri Polygони sunt summæ progressionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie Triangulares, si differentia terminorum fuerit 1; Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Quadrati, si 2; Pentagoni, si 3; Hexagoni, si 4; Heptagoni, si 5; Octogoni, si 6 &c.

Progr. Arithm. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Num. Triang. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36

Progr. Arithm. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
Num. Quadr. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64

Progr. Arithm. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
Num. Pentag. 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92

Progr. Arithm. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29
Num. Hexag. 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120

SCHOLIION.

207. Numeri Polygони nomina sortiuntur a figuris geometricis, in quas puncta unitatibus respondentia disponi possunt. Ex. gr. Triapuncta numeri triangularis 3 unitatibus respondentia disponuntur in triangulum: & idem tenendum est de reliquis numeris triangularibus.

DEFINITIO XVII.

208. Latus numeri Polygони est numerus terminorum progressionis arithmeticæ, qui summantur. Numerus vero angulorum est, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus Polygonus nomen suum fortitur.

COROLLARIUM.

209. Numerus adeo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. consequenter differentiam terminorum, qui sumantur, excedit duabus unitatibus (§. 206).

PROBLEMA LXXX.

210. Dato latere numeri Polygони, & numero angulorum; invenire numerum Polygonum.

Sit latus = n
 numerus angulorum = a
 terminus primus progressionis = 1 (§. 206).
 differentia terminorum = $a - 2$ (§. 209).
 terminus ultimus $1 + (a - 2)(n - 1)$
 primus 1 (§. 333 Arith.)

Summa primi & ult. $2 + (a - 2)(n - 1)$
 hoc est $4 + na - 2n - a$
 dimid. term. num. $\frac{1}{2}n$

Q o Num.

Num. Polyg. $2n + \frac{1}{2}n^2 a - n^2 - \frac{1}{2}an$
 (§.206, 107)
 $= (n^2 a - 2n^2 - an + 4n) : 2$
 $= (n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$

Theorema. Numerus Polygonus est semi-differentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus multatum, & ex ipso latere in numerum angulorum quaternario multatum.

COROLLARIUM I.

211. Sit $n=3$, erit triangularis, $= \frac{1n^2 + 1n}{2}$
 Sit $a=4$, erit quadratus $= \frac{2n^2 - 0n}{2} = n^2$
 Sit $a=5$, erit pentagonus $= \frac{3n^2 - 1n}{2}$
 Sit $a=6$, erit hexagonus $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$
 Sit $a=7$, erit heptagonus $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$
 Sit $a=8$, erit octogon. $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$
 &c. &c.

COROLLARIUM II.

212. Quoniam numerus Polygonus (§.210).
 $(n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$, erit summa seriei cujuscunque numerorum polygonorum
 $((a-2)sn^2 - (a-4)sn^1) : 2$. Nempe quia $a-2$
 & $a-4$ sunt numeri constantes, qui in casu speciali sunt determinati, non summantur.
 Sed $sn^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ & $sn^1 = \frac{n^2 + n}{2}$
 $= \frac{3n^2 + 3n}{2}$ (§.205). Ergo summa polygonorum
 $((a-2)(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-4)(3n^2 + 3n)) : 12 = (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n - 3an^2 - 3an + 12n^2 + 12n) : 12$
 $= (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = ((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ unde porro Theoremata specialia eliciuntur, determinato numero angulorum a . Nempe summa triangularium $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$
 pentagonorum $(n^3 + n^2) : 2$
 hexagonorum $(4n^3 + 3n^2 - n) : 6$
 heptagonorum $(5n^3 + 3n^2 - 2n) : 6$
 octogonorum $(2n^3 + n^2 - n) : 2$ &c. &c.

Est enim pro triangularibus $a=3$, pro pentagonis $a=5$, pro hexagonis $a=6$, pro heptagonis $a=7$, pro octogonis $a=8$, &c. (§.208).

PROBLEMA LXXXI.

213. Dato numero Polygono, & numero angulorum; invenire latus.

Sit numerus Polygonus $= p$, latus $= x$
 erit differentia terminor. $= a-2$ (§.209)
 terminus primus $= 1$ (§.206)
 adeoque ultimus $= 1 + (x-1)(a-2)$
 hoc est $3 + ax - 2x - a$ (§.333)
 terminus primus 1 *Arithm.*
 summa pr. & ult. $4 + ax - 2x - a$
 dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$
 numerus Polygon. $2x + \frac{1}{2}ax^2 - x^2 - \frac{1}{2}ax$
 (§.107).

Quare $\frac{1}{2}ax^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}ax = p$
 $ax^2 - 2x^2 + 4x - ax = 2p$

$x^2 + \frac{4-a}{a-2}x = \frac{2p}{a-2}$

hoc est, si fiat $(a-4) : (a-2) = m$
 $x^2 - mx = 2p : (a-2)$
 $\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2$

$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2)$
 $x - \frac{1}{2}m \quad m - \frac{1}{2}x \quad \left. \vphantom{x - \frac{1}{2}m} \right\} = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$

$x = \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$
 hoc est, substituto valore ipsius m ,
 $x = \frac{a-4}{2a-4} + \sqrt{(\frac{a^2 - 8a + 16}{4a^2 - 16a + 16} + \frac{4p}{2a-4})}$
 $a-4 + \sqrt{(8ap - 16p + a^2 - 8a + 16)}$
 $2a-4$
 $= \frac{a-4 + \sqrt{(8(a-2)p + (a-4)^2)}}{2a-4}$

obti-

obtinere nimirum signum +, quia radix major est quam $a - 4$

Sit ex. gr. $a = 3$, erit latus numeri triangularis $\frac{-1 + \sqrt{8p + 1}}{2}$

Sit $a = 5$, erit latus pentagoni $\frac{1 + \sqrt{24p + 1}}{6}$

Sit $a = 6$, erit latus hexagoni $\frac{2 + \sqrt{32p + 4}}{8}$

Sit $a = 7$, erit latus heptag. $\frac{3 + \sqrt{40p + 9}}{10}$

&c. &c.

DEFINITIO XVIII.

214. Summæ numerorum Polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progressionibus arithmeticis ipsi Polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: Summæ Pyramidaliū primorum *Pyramidales secundi*: summæ Pyramidaliū secundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, si ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, si ex pentagonis oriuntur &c.

Ex. gr. Num. triang. = 1, 3, 6, 10, 15, 21

Pyram. triang. pr. = 1, 4, 10, 20, 35, 56

secundi = 1, 5, 15, 35, 70, 126

tertiū = 1, 6, 21, 56, 126, 252

&c. &c.

COROLLARIUM.

215. Cum igitur summare docuerimus numeros Polygonos (§. 212), evidens jam est, quomodo numeri pyramidales primi inveniuntur. Nempe $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ exprimit numeros pyramidales primos, *vi* §. cit.

PROBLEMA LXXXII.

216. *Invenire summam numerorum Pyramidaliū superioris ordinis cujuscunque, seu dato quolibet inferiore proxime superiorem.*

Non alia re opus est, quam ut juxta methodum superius traditam (§. 200) numeri Pyramidales proxime inferioris ordinis summentur: ita enim habentur eorum summæ. Quare cum numerus Pyramidalis primi ordinis sit $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ (§. 215): erit summa Pyramidaliū primi ordinis $((a-2)sn^3 + 3sn^2 - (a-5)sn) : 6$. Sed $sn^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$, $sn^2 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$, $sn = (n^2 + n) : 2$, (§. 205). Ergo summa Pyramidaliū primi ordinis, seu numerus Pyramidalis secundi ordinis $= ((a-2)(n^4 + 2n^3 + n^2) + 2(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-5)(2n^2 + 2n)) : 24 = (an^4 + 2an^3 - an^2 - 2an - 2n^4 + 14n^2 + 12n) : 24 = ((a-2)n^4 + 2an^3 - (a+14)n^2 - (2a+12)n) : 24$.

Sit ex. gr. $a = 3$, hoc est quærat summa Pyramidaliū triangularium primi ordinis; erit ea $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$. Quoniam vero summa inventa generalis exprimit numerum quemcunque Pyramidalem secundi ordinis (§. 214); si ea porro eundem in modum summetur, prodibit summa Pyramidaliū secundi ordinis, seu numerus Pyramidalis ordinis tertii (§. cit.). Et ita progredi licet, quousque libet.

COROLLARIUM I.

217. Cum summa unitatum sit n , summa laterum $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}$ (§. 205), summa triangularium $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (§. 215), summa Pyramidaliū primi

O o 2 ordi-

Ex. gr. Sit numerus quantitatum combinandarum = 6, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1}{1}$.

$$\frac{6-4+2}{2} \cdot \frac{6-4+3}{3} \cdot \frac{6-4+4}{4} = \frac{6-3}{1} \cdot \frac{6-2}{2} \cdot \frac{6-1}{3} \cdot \frac{6+0}{4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

COROLLARIUM.

220. Quodsi quantitatum datarum omnes combinationes possibiles scire desideres, incipiendo nempe a combinationibus singularum binarum; addi oportet $\frac{q-1}{1} \cdot \frac{q+0}{2}$,

$$\frac{q-2}{1} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q+0}{3}, \frac{q-3}{1} \cdot \frac{q-2}{2} \cdot \frac{q-1}{3} \cdot \frac{q+0}{4}$$

&c. Unde numerus omnium combinationum possibilium erit $\frac{q \cdot q-1}{1 \cdot 2} + \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$$+ \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3 \cdot q-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

&c. Quæ est summa unciarum binomii ad dignitatem q evecti, multiplicata exponents dignitatis unitate aucto $q+1$ (§. 95). Quare cum hæ unciæ prodeant $1+1$ ad dignitatem q evehendo per *Probl. 29.* (§. cit.) fit vero $1+1=2$; erit $2^q - q - 1$ numerus omnium combinationum possibilium. Ex. gr. Si numerus quantitatum 5, erit numerus combinationum possibilium $2^5 - 6 = 32 - 6 = 26$.

SCHOLIUM.

221. Uncias prodire debere, pro binomio $x+1$ ad eam dignitatem elevando, ad quam elevatur binomium $a+b$; patet exinde, quod uncia partium a & b sit 1, atque adeo ut facta litteralia ex a & b , ita unciæ ex 1 & 1 in se invicem ductis prodire debeant. Vide calculum:

$$\begin{array}{r} 1+1 \text{ Unc. Rad.} \\ \hline 1+1 \\ \hline +1+1 \\ \hline 1+1 \\ \hline 1+2+1 \text{ Unc. Quadr.} \\ \hline 1+1 \text{ Unc. Rad.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1+2+1 \\ \hline 1+2+1 \\ \hline 1+3+3+1 \text{ Unc. Cubi.} \\ \hline \text{\&c. \&c.} \end{array}$$

PROBLEMA LXXXIV.

222. Dato numero quantitatum; invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis possibilibus combinatae ac permutatae subire possunt.

Sint quantitates duæ a & b , erunt variationes permutationum 2 (§. 129), consequenter cum earum qualibet etiam cum seipsa combinari possit, istis addendæ adhuc sunt variationes 2. Ergo numerus omnium est, $2+2=4$.

Quodsi tres fuerint & exponens variationis 2, combinationes erunt 3 & permutationes 3, nempe ab, ac, bc , & ba, ca, cb (§. 129): quibus si addas combinationes tres uniuscujusque quantitatis cum seipsa, aa, bb, cc ; habebis numerum variationum $3+3+3=9$.

Eodem modo patet, si quantitates fuerint quatuor, & exponens 2, numerum combinationum fore 6, & numerum permutationum itidem 6, numerum combinationum cum seipsa 4, adeoque numerum variationum 16. Si manente exponents, quantitates fuerint quinque, numerum variationum fore 25, &c. & in genere si numerus quantitatum fuerit n , numerum variationum fore n^2 .

Sint quantitates tres & exponens variationis 3; reperitur numerus variationum $27=3^3$, nempe $aaa, aab, aba, baa, aac, aca, caa, abb, bab, bba, abc, bac, bca, acb, cab, cba, acc, cac, cca, bbb, lbb, cbb, bcb, bcc, cbc, ccb, ccc$.

Oo 3. Nec

Nec ab simili modo constabit, si quantitates fuerint quatuor & exponents 3; fore numerum variationum $64 = 4^3$: & in genere, si fuerit quantitatum numerus $= n$, exponents 3, fore numerum variationum n^3 .

Quod si ita progredi libuerit, reperietur tandem, si quantitatum numerus fuerit n , & exponents n , fore numerum variationum n^n .

Quare si antecedentes omnes addas, ubi exponents minor; reperietur numerus omnium variationum possibilem $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + n^{n-5} + n^{n-6}$ &c. donec numerus ex n subtractus relinquat 1,

quia initium fit a quantitatibus singulis semel positis.

Cum adeo numerus omnium variationum possibilem fit progressio geometrica, cujus terminus primus seu minimus n^1 , maximus n^n , denominator n (§. 332 *Arithm.* & 113 *Analyf.*); erit is $= (n^n + 1 - n) : (n - 1)$, (§. 122).

Sit ex. gr. $n = 4$; erit numerus variationum possibilem $(4^5 - 4) : (4 - 1) = 1020 : 3 = 340$. Sit $n = 24$, erit numerus omnium variationum possibilem $(24^25 - 24) : (24 - 1) = 32009658644406818986777955348250600 : 23 = 1391724288887252999425128493402200$. Tot ergo modis 24 literæ inter se componi possunt.

C A P U T II.

De Algebra ad Problemata Arithmetica indeterminata applicata.

PROBLEMA LXXXV.

223. **I**nvenire duos numeros, quorum summa, una cum factore eorundem, æquatur numero dato.

Sit numerus datus $= a$, quæstorum unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis

$$xy + x + y = a$$

$$\text{— } y \text{ sub.}$$

$$xy + x = a - y$$

$$\text{— } y + 1 \text{ div.}$$

$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$; erit $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$; erit $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Sit numerus datus $= a$, quæstorum unus $= x + y$, alter $= x - y$ (§. 6), erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 - y^2 + 2x = a$$

$$\text{— } y^2 \text{ add.}$$

$$x^2 + 2x = y^2 + a$$

$$\text{— } 1 \quad \text{— } 1 \quad (\text{§. 143})$$

$$x^2 + 2x + 1 = y^2 + a + 1$$

$$\text{— Ext. Rad.}$$

$$x + 1 = \sqrt{y^2 + a + 1}$$

$$\text{— sub.}$$

$$x = \sqrt{y^2 + a + 1} - 1$$

Unde apparet, ut ex $y^2 + a + 1$ radix extrahi possit, $a + 1$ esse debere differentiam duorum quadratorum, quorum unum est y^2 .

Ex. gr.

Ex. gr. Sit $a = 19$, $y = \frac{1}{2}$; erit $x = \sqrt{(\frac{1}{4} + 19 + 1) - 1} = \sqrt{\frac{81}{4} - 1} = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Ergo $x + y = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, & $x - y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = \sqrt{(4 + 20 + 1) - 1} = \sqrt{25 - 1} = 5 - 1 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 2 = 6$, & $x - y = 4 - 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVI.

224. Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi aequetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$, tertius $= z$, quartus $= t$; erit, per conditiones Problematis,

$$\begin{array}{r} y + x = z \\ \hline y \text{ sub.} \end{array} \quad \begin{array}{r} x - y = t \\ \hline y \text{ add.} \end{array}$$

$$x = z - y \quad x = t + y$$

Quare (§. 87 Aritbm.)

$$\begin{array}{r} t + y = z - y \\ \hline y \text{ add.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} t + 2y = z \\ \hline t \text{ sub.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2y = z - t \\ \hline 2 \text{ div.} \end{array}$$

$$y = (z - t) : 2$$

Ergo $x = (z - t) : 2 + t = (z + t) : 2$.

Unde apparet, si numeri integri considerentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum impari (§. 72, 74).

Sit $z = 8$, $t = 2$: erit $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$, & $x = (8 + 2) : 2 = 4 + 1 = 5$. Similiter sit $z = 5$, $t = 1$: erit $x = (5 + 1) : 2 = 3$, & $y = (5 - 1) : 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVII.

225. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unusquisque cum partibus suis aliquotis efficiat unam summam.

Sit unus $= mx$, alter $= ny$; erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} 1 + m + mx + x = 1 + n + ny + y \\ \hline mx + x = 1 + n + (n + 1)y - (1 + m) \\ \hline x = (1 + n + (n + 1)y - 1 - m) : (m + 1) \end{array}$$

Apparet ergo, $1 + n$ denotare summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius y , & $1 + m$ summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius x : posse autem non modo y , sed & utrumque denominatorem pro arbitrio assumi, sed ut y sit numerus impar, isque primus.

Sit ex. gr. $m = 1$, $n = 2$, $y = 3$. Erunt partes aliquotæ ipsius n , 1 & 2, ipsius m autem 1: consequenter $x = 2 + 1 + (2 + 1)y - 1 = 2 + 3y = 2 + 9 = 11$. Sit $m = 4$, $n = 8$, $y = 13$: erit $1 + n = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, & $1 + m = 1 + 2 + 4 = 7$; consequenter $x = (15 + 15y - 7) : 7 = (210 - 7) : 7 = 203 : 7 = 29$.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. Invenire duos numeros, quorum summa aequetur quadrato minoris.

Sit numerus major $= x$, minor $= y$; erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} x + y = y^2 \\ \hline y \text{ sub.} \end{array}$$

$$x = y^2 - y = (y - 1)y$$

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate multiplicatum.

Sit $y = 3$; erit $x = 2$. $3 = 6$. Sit $y = 5$; erit $x = 4$. $5 = 20$. Sit $y = 9$; erit $x = 8$. $9 = 72$.

PROBLEMA LXXXIX.

227. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum aequetur cubo minoris.

Sit numerus major $= x$, minor $= y$; erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 +$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + y^2 = y^3 \\
 \hline
 + y^2 = y^3 \quad y^2 \text{ subtr.} \\
 \hline
 x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y - 1) \\
 \hline
 x = y\sqrt{y - 1}
 \end{array}$$

Apparet adeo, pro y assumendum esse numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc est, quadratum quodlibet unitate auctum.

Ex. gr. Sit $y = 5$, erit $x = 5\sqrt{5-1} = 5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$. Sit $y = 17$, erit $x = 17\sqrt{17-1} = 17\sqrt{16} = 17 \cdot 4 = 68$.

PROBLEMA XC.

228. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum aequale sit cubo, cujus radix facta ex numero primo in quadratum secundi aequatur.

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$, radix cubica $= v$; erit, per conditiones Problematis,

$$\begin{array}{r}
 v = xy^2 \quad xy = v^3 \\
 \hline
 = y^2 \quad y \text{ div.} \quad = v^3 \quad y \text{ div.} \\
 \hline
 v : y^2 = x \quad x = v^3 : y \\
 \hline
 v : y^2 = v^3 : y \\
 \hline
 = yv^3 \quad y^2 \text{ mult.} \\
 \hline
 v = yv^3 \quad v \text{ div.} \\
 \hline
 1 = yv^2 \\
 \hline
 = v^2 \quad v^2 \text{ div.} \\
 \hline
 1 : v^2 = y
 \end{array}$$

Ergo $x = v^3 : (1 : v^2) = v^5$
 Sit $v = 2$; erit $x = 32, y = \frac{1}{4}$. Sit $v = 3$; erit $x = 243, y = \frac{1}{9}$.

PROBLEMA XCI.

220. Invenire duos numeros quorum quadrata differunt quadrato.

Sit numerus unus $= x + y$, alter $= x - y$; erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2xy + y^2 \\
 x^2 - 2xy + y^2 \text{ subtr.} \\
 \hline
 4xy = v^2 \\
 \hline
 x = v^2 : 4y
 \end{array}$$

Patet adeo, pro y assumendum esse numerum per cujus quadruplum dividi potest quadratum aliquod.

Sit ex. gr. $v^2 = 16, y = 1$; erit $x = 16 : 4 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 1 = 5$ & $x - y = 4 - 1 = 3$. Sit $v^2 = 36, y = 3$; erit $x = 36 : 12 = 3$. Ergo $x + y = 6$ & $x - y = 0$. Sit $v^2 = 36, y = 9$; erit $x = 36 : 36 = 1$. Ergo $x + y = 10$ & $x - y = 8$.

PROBLEMA XCII.

230. Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.

Sit latus quadrati majoris $= a$, minoris $= b$. Sit porro latus quadrati unius ex quaesitis minus quam a , adeoque $a - z$; erit quadrati alterius latus majus quam b . Poterat itaque dici $y - b$. Enimvero, ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz - b$. Quare per conditionem Problematis.

$$\begin{array}{r}
 a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2 \\
 \hline
 z^2 + y^2z^2 - 2az - 2byz = 0 \quad a^2 + b^2 \text{ sub.} \\
 \hline
 z + y^2z - 2a - 2by = 0 \quad z \text{ div.} \\
 \hline
 y^2z + z = 2a + 2by \quad 2a + 2by \text{ add.} \\
 \hline
 z = (2a + 2by) : (y^2 + 1) \quad (y^2 + 1) \text{ div.}
 \end{array}$$

Sit ex. gr. $a = 3, b = 2, y = 2$; erit $z = (6 + 8) : (4 + 1) = 14 : 5 = 2\frac{4}{5}$. Ergo $a - z = 3 - 2\frac{4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$ & $yz - b = 2\frac{8}{5} - 2 = \frac{28}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

SCHOLIUM.

231. Dum quadratorum quaesitorum latera assumuntur, valores eorum quantitates a & b in-

ingredi debent, ut in utroque æquationis membro sit $a^2 + b^2$. Porro vero in valore lateris alterius, y multiplicari debet per z , ut sublato utrinque $a^2 + b^2$ residuum sit divisibile per z . Ita enim z reducitur ad unam dimensionem, sicque æquatio in terminis rationalibus est reducibilis.

PROBLEMA XCIII.

232. Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.

Sit latus quadrati minoris = x , majoris = $y + x$, differentia quadratorum = d : erit quadratum majus = $x^2 + 2xy + y^2$, minus = x^2 , consequenter per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} 2xy + y^2 = d \\ 2xy = d - y^2 \quad y^2 \text{ sub.} \\ x = (d - y^2) : 2y \quad 2y \text{ div.} \end{array}$$

Unde apparet, pro y assumi debere numerum, qui sit minor quam \sqrt{d} .

Sit ex. gr. $d = 10, y = 3$: erit $x = (10 - 9) : 6 = \frac{1}{6}$, & $x + y = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Sit $d = 11, y = 1$: erit $x = (11 - 1) : 2 = 10 : 2 = 5$, & $x + y = 5 + 1 = 6$. Sit $d = 48, y = 4$: erit $x = (48 - 16) : 8 = 6 - 2 = 4$, & $x + y = 4 + 4 = 8$.

PROBLEMA XCIV.

233. Numerum datum dividere, in duos alios, quorum factum est numerus quadratus.

Sit numerus datus = $2a$, differentia = $2y$: erit major $a + y$, minor $a - y$ (§. 5), factum = $aa - yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati assumendus est valor, quem ingreditur y & qui diversis gaudet signis. Sit ergo = $xy - a$: erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} aa - y^2 = aa - 2axy + x^2 y^2 \quad a^2 \text{ sub.} \\ -y^2 = -2axy + x^2 y^2 \\ -y = -2ax + x^2 y \quad y \text{ div.} \\ 2ax = x^2 y + y \quad y + 2ax \text{ add.} \\ 2ax : (x^2 + 1) = y \quad x^2 + 1 \text{ div.} \end{array}$$

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

Sit ex. gr. $2a = 10, x = 2$: erit $y = 20 : (4 + 1) = 20 : 5 = 4$. Ergo $a + y = 5 + 4 = 9$; $a - y = 5 - 4 = 1$. Sit $2a = 10, x = 3$: erit $y = 30 : (9 + 1) = 30 : 10 = 3$. Ergo $a + y = 8, a - y = 2$.

PROBLEMA XCV.

234. Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia est numerus quadratus.

Sit numerus datus = a , quæsitum major = x , minor = y : erit, per conditiones Problematis,

$$\begin{array}{r} x + y = a \quad x - y = v^2 \\ \hline y \text{ sub.} \quad \hline x = a - y \quad x = v^2 + y \\ a - y = v^2 + y \quad y \text{ add.} \\ \hline a = v^2 + 2y \quad v^2 \text{ subtr.} \\ \hline a - v^2 = 2y \quad 2 \text{ div.} \\ (a - v^2) : 2 = y \end{array}$$

Pro v^2 itaque assumendus est numerus quadratus, qui ex numero dato a subductus parem relinquit.

Sit ex. gr. $a = 40, v^2 = 16$: erit $y = (40 - 16) : 2 = 24 : 2 = 12$. Ergo $x = 40 - 12 = 28$. Sit $a = 40, v^2 = 4$: erit $y = (40 - 4) : 2 = 36 : 2 = 18$. Ergo $x = 40 - 18 = 22$. Sit $a = 35, v^2 = 9$: erit $y = (35 - 9) : 2 = 26 : 2 = 13$, & $x = 35 - 13 = 22$.

PROBLEMA XCVI.

235. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alterius efficiat numerum quadratum, cujus radix æquatur summa numerorum.

Sit numerus unus = x , alter = y : erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2 \quad x^2 \text{ sub.} \\ y = 2xy + y^2 \\ 1 = 2x + y \quad y \text{ div.} \\ 1 - y = 2x \quad y \text{ subtr.} \\ \hline 1 - y = 2x \quad 2 \text{ div.} \\ (1 - y) : 2 = x \end{array}$$

P p

Nume

Numeri adeo quæsi unitate minores, consequenter fracti esse debent, & y numerus quilibet fractus esse potest.

Sit $y = \frac{1}{2}$; erit $x = (1 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Sit $y = \frac{1}{3}$; erit $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$. Sit $y = \frac{1}{4}$; erit $x = (1 - \frac{1}{4}) : 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

PROBLEMA XCVII.

236. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipsorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.

Sit numerus major $= x$, minor $= y$, ratio data $= a : b$; erit, per conditionem Problematis,

$$x - y : x^2 - y^2 = a : b$$

hoc est $x + y = a : b$ (§. 124).

$$\frac{ax + ay = b}{a \text{ div.}}$$

$$\frac{x + y = b : a}{y \text{ sub.}}$$

$$x = b : a - y$$

Sit $b : a = 9$, $y = 4$; erit $x = 5$. Vel sit $y = 3$; erit $x = 6$.

PROBLEMA XCVIII.

237. Invenire numerum, qui, si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.

Sit numerus datus unus $= a$, alter $= b$, quæsitus $= x$, erit, per conditiones Problematis,

$$\frac{ax = y^2}{a \text{ div.}} \quad \frac{bx = v^2}{b \text{ div.}}$$

$$x = y^2 : a \quad x = v^2 : b$$

$$\frac{y^2 : a = v^2 : b}{a \text{ mult.}}$$

$$\frac{y^2 = av^2 : b}{\text{ext. Rad.}}$$

$$y = v \sqrt{(a : b)}$$

Quod si ergo numerus rationalis desideretur, $a : b$ quadratum esse debet.

Sit $a = 32$, $b = 8$; erit $\sqrt{(a : b)} = 2$. Sit porro $v = 5$, erit $y = 10$, consequenter $x = \frac{25}{8}$.

PROBLEMA XCIX.

238. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus quadrato alterius addatur, summa sit latus quadrati aggregato numerorum æquale.

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$; erit

$$\frac{x^2 + y = \sqrt{(x + y)}}{\text{quadr.}}$$

$$\frac{x^4 + 2yx^2 + y^2 = x + y}{x^4 + y \text{ sub.}}$$

$$2x^2y - y + y^2 = x - x^4$$

h. e. $yy + (2x^2 - 1)y = x - x^4$

$$\frac{(x^2 - \frac{1}{2})^2}{x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} \text{ ad.}$$

$$\frac{y^2 + (2x^2 - 1)y + (x^2 - \frac{1}{2})^2 = x - x^2 + \frac{1}{4}}{\text{ext. Rad.}}$$

$$\frac{y + x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{(x + \frac{1}{4} - x^2)}}{x^2 - \frac{1}{2} \text{ sub.}}$$

$$y = \sqrt{(x + \frac{1}{4} - x^2)} + \frac{1}{2} - x^2$$

Quod si numerus rationalis desideratur; $\frac{1}{4} + x - x^2$ numerus quadratus esse debet. Sit itaque hujus latus, ob rationes in Schol. Probl. 92 (§. 231) allatas, $= zx - \frac{1}{2}$; erit

$$\frac{z^2x^2 - zx + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2}{\frac{1}{4} \text{ sub.}}$$

$$\frac{z^2x^2 - zx = x - x^2}{x \text{ div.}}$$

$$\frac{z^2x - z = 1 - x}{x + z \text{ add.}}$$

$$\frac{z^2x + x = 1 + z}{z^2 + 1 \text{ div.}}$$

$$x = (1 + z) : (z^2 + 1)$$

Sit $z = 2$, erit $x = (1 + 2) : (4 + 1) = \frac{3}{5}$, consequenter $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{9}{25})}$

$$= \frac{25 - 18}{50} + \sqrt{\frac{(60 + 25 - 36)}{100}} = \frac{7}{50} + \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{7 + 35}{50} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$$

PRO-

PROBLEMA C.

239. Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, si unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque sit numerus quadratus.

Sit numerus quadratus unus = x^2 , alter = y^2 , erit factum = x^2y^2 . Quare $x^2y^2 + x^2$ & $x^2y^2 + y^2$ sunt numeri quadrati; consequenter & $y^2 + 1$ & $x^2 + 1$ sunt numeri quadrati: numerus enim quadratus efficit quadratum, si in quadratum ducitur. Sit latus quadrati primi $z - y$; secundi $t - x$: erit

$$\frac{y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2}{y^2 \text{ subtr.}}$$

$$\frac{1 = z^2 - 2zy}{2zy = z^2 - 1} \quad 2zy - 1 \text{ add.}$$

$$\frac{2zy = z^2 - 1}{2z \text{ div.}}$$

$$y = (z^2 - 1) : 2z$$

$$\frac{x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2}{x^2 \text{ subtr.}}$$

$$\frac{1 = t^2 - 2tx}{2tx = t^2 - 1} \quad 2tx - 1 \text{ add.}$$

$$\frac{2tx = t^2 - 1}{2t \text{ div.}}$$

$$x = (t^2 - 1) : 2t$$

Sit $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (4 - 1) : 4 = \frac{3}{4}$ & $x = (9 - 1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Sit $z = 3$, $t = 4$; erit $y = (9 - 1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ & $x = (16 - 1) : 8 = \frac{15}{8}$.

PROBLEMA CI.

240. Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut summa addita facto efficiat quadratum.

Sit quadratus numerus unus = x^2 , alter = y^2 : erit $x^2y^2 + x^2 + y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero $x^2y^2 + x^2 = x^2(y^2 + 1)$: fiat primum $y^2 + 1$ æquale quadrato, cujus latus $t - y$, ut ablato ex utroque æquationis mem-

bro y^2 perveniatur ad unam ipsius y dimensionem, cum valor rationalis desideretur, nempe

$$\frac{t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1}{y^2 \text{ sub.}}$$

$$\frac{t^2 - 2ty = 1}{2ty - 1 \text{ add.}}$$

$$\frac{t^2 - 1 = 2ty}{2t \text{ div.}}$$

$$(t^2 - 1) : 2t = y$$

Ponatur porro $\sqrt{(y^2 + 1)} = t - y = t - (t^2 - 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t = v$; erit $x^2y^2 + x^2 + y^2 = v^2x^2 + y^2$. Atque adeo Problema præfens reductum est ad casum similem præcedentis.

Sit ergo quadrati, cui $v^2x^2 + y^2$ æquale esse debet, latus = $z - vx$, erit

$$\frac{v^2x^2 + y^2 = z^2 - 2zvx + v^2x^2}{v^2x^2 \text{ f.}}$$

$$\frac{y^2 = z^2 - 2zvx}{2zvx - y^2 \text{ add.}}$$

$$\frac{2zvx = z^2 - y^2}{2zv \text{ div.}}$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari possunt.

Sit ex. gr. $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, & hinc $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9 - 4}{3} = \frac{5}{3}$, consequenter $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{20 - 16}{9} : \frac{20}{3} = \frac{4}{9} : \frac{20}{3} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA CII.

241. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum addatur aggregato quadratorum, numerus quadratus prodeat.

Sit summa numerorum quæfitorum = $2x$, differentia = $2y$, erit major $x + y$, minor $x - y$ (§. 6). Sit latus quadrati ipsi $3x^2 + y^2$ æqualis = $t + y$:

Pp 2 erit,

erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 \\ \hline x^2 \quad - y^2 \\ \hline 3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2 \\ \hline y^2 \text{ sub.} \\ \hline 3x^2 = t^2 + 2ty \\ \hline t^2 \text{ sub.} \\ \hline 3x^2 - t^2 = 2ty \\ \hline 2t \text{ div.} \\ \hline (3x^2 - t^2) : 2t = y \end{array}$$

Sit $x = 4, t = 6$, erit $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, consequenter $x + y = 4 + 1 = 5, x - y = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA CIII.

242. Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.

Sint numeri quadrati quaesiti x^2 & y^2 ; latus quadrati, cui isti junctim summi æquantur, $vx - y$: erit

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = v^2 x^2 - 2vxy + y^2 \\ \hline x^2 = v^2 x^2 - 2vxy \\ \hline x = v^2 x - 2vy \\ \hline 2vy = v^2 x - x \\ \hline 2vy : (v^2 - 1) = x \\ \hline v^2 - 1 \text{ div.} \end{array}$$

Sit $v = 2, y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA CIV.

243. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus ducatur in cubum alterius, productum sit numerus quadratus.

Sint duo numeri x & y : erit, per conditionem Problematis; xy^3 , consequenter etiam xy numerus quadratus. Habemus ergo

$$\begin{array}{r} xy = z^2 \\ \hline x = z^2 : y \\ \hline y \text{ div.} \end{array}$$

Pro z itaque assumendum est quadratum per y divisibile, si numeri integri desiderentur.

Sit ex.gr. $z = 6, y = 3$: erit $x = 36 : 3 = 12$.

PROBLEMA CV.

244. Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum quadratorum addatur factò ex cubo unius in alterum, summa sit numerus quadratus.

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$, erit $xy^3 + x^2 y^2$, consequenter & $xy + x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $= yv - x$: erit

$$\begin{array}{r} xy + x^2 = y^2 v^2 - 2xyv + x^2 \\ \hline xy = y^2 v^2 - 2xyv \\ \hline x = yv^2 - 2xv \\ \hline 2xv + x = yv^2 \\ \hline 2v + 1 \text{ div.} \\ \hline x = yv^2 : (2v + 1) \end{array}$$

Sit ex.gr. $y = 6, v = 1$: erit $x = 6 : 3 = 2$.

Sit $y = 15, v = 2$: erit $x = 15. 4 : (4 + 1) = 15. 4 : 5 = 3. 4 = 12$.

PROBLEMA CVI.

245. Invenire duos numeros, quorum unus subductus ex factò eorundem relinquat cubum.

Sit numerus unus x , alter y : erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} xy - y = v^3 \\ \hline y = v^3 : (x - 1) \\ \hline x - 1 \text{ div.} \end{array}$$

Assumendus ergo est cubus, qui sit per $x - 1$ divisibilis.

Ex.gr. Sit $x = 6, v = 10$; erit $y = 1000 : 5 = 200$. Sit $x = 3, v = 6$; erit $y = 216 : 2 = 108$.

PROBLEMA CVII.

246. Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.

Sit numerus unus y , alter x ; erit, per conditionem Problematis,

$$\begin{array}{r} yx^2 = z^3 x^3 : v^3 \\ \hline y = z^3 x : v^3 \\ \hline v^3 \text{ mult.} \\ \hline yv^3 = z^3 x \\ \hline zv^3 : z^3 = x \\ \hline z^3 \text{ div.} \end{array}$$

Si

Si adeo numeri integri desiderantur, assumendus est valor ipsius y per cubum aliquem z^3 divisibilis, seu cubi multiplus.

Sit ex. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16 \cdot 27 : 8 = 2 \cdot 27 = 54$.

PROBLEMA CVIII.

247. Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum aequale sit cubo radice sua multato.

Sit numerus datus $= a$, pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ aequatur, $yx - 1$: erit cubus $= y^3 x^3 - 3y^2 x^2 + 3yx - 1$, unde si subtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3 x^3 - 3y^2 x^2 + 2yx = ax - x^2$$

$$\frac{y^3 x^3 - 3y^2 x^2 + 2yx}{x} = \frac{ax - x^2}{x} \quad x \text{ div.}$$

$$y^3 x^2 - 3y^2 x + 2y = a - x$$

$$\frac{y^3 x^2 - 3y^2 x + 2y}{x - 2y} = \frac{a - x}{x - 2y} \quad x - 2y \text{ add.}$$

$$y^3 x^2 - 3y^2 x + x = a - 2y$$

Facile jam apparet, si valor ipsius x rationalis desideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3 x^2}{8} - \frac{3a^2 x}{4} + x = 0$$

$$\frac{a^3 x^2 - 6a^2 x + 8x}{8} = 0 \quad 8 \text{ mult.}$$

$$a^3 x^2 - 6a^2 x + 8x = 0$$

$$\frac{a^3 x - 6a^2 + 8}{x} = 0 \quad x \text{ div.}$$

$$a^3 x - 6a^2 + 8 = 0$$

$$\frac{a^3 x = 6a^2 - 8}{a^3} \quad 6a^2 - 8 \text{ add.}$$

$$a^3 x = 6a^2 - 8 \quad a \text{ div.}$$

$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet adeo, si numeri rationales desiderentur, Problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$, erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = \frac{26}{27}$, & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA CIX.

248. Invenire numerum perfectum, hoc est, omnibus suis partibus aliquotis aequalem.

Sit numerus quaesitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas seu factores resolvi possit: erunt partes aliquotae $1, y, y^2, y^3$ &c. donec exponens evadat $= n$, & $x, yx, y^2 x, y^3 x$, &c. donec exponens fiat $= n - 1$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$\begin{array}{r} 1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} + x + yx + y^2 x \\ + y^3 x \text{ \&c.} = y^n x \\ \hline 1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} = y^n x - x - yx \\ - y^2 x - y^3 x \text{ \&c.} \\ \hline 1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} \\ \hline \hline = x \end{array}$$

$$y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.}$$

Jam ut x sit numerus integer, nec in casu speciali, si y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diversus sit a numero earundem in formula generali; necesse est ut $y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.} = 1$: quod cum non alio in casu contingat, nisi cum $y = 2$ (§. 121); erit $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \text{ \&c.} = 1 + 2 + 4 + 8 \text{ \&c.}$ & numerus perfectus $2^n x$. Quoniam vero x est numerus primus, necesse est ut $1 + 2 + 2^2 + 2^3 \text{ \&c.}$ in omni casu sit numerus primus; consequenter series terminetur prope terminum, qui unitate multatus est numerus primus (§. cit.), & n notat numerum terminorum, qui istiusmodi terminum praecedunt. Quare Problema, quod speciem indeterminati mentiebatur, determinatum est.

Patet autem simul

P.p 3 Theo.

Theorema 1. Si numerorum series in ratione dupla ab unitate continue proportionalium continuetur, donec eorum summa sit numerus primus; summa in maximum multiplicata faciet numerum perfectum.

Theorema 2. Si in numerorum serie in ratione dupla ab unitate continue proportionalium occurrat terminus, qui unitate mulctatus est numerus primus; numerus iste primus in proxime præcedentem ductus efficit numerum perfectum.

In serie numerorum ab unitate in ratione dupla continue proportionalium

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,
1024, 2048, 4096.

$4 - 1 = 3$, $8 - 1 = 7$, $32 - 1 = 31$, $128 - 1 = 127$, $2048 - 1 = 2047$ &c. sunt

numeri primi. Ergo $2 \cdot 3 = 6$; $4 \cdot 7 = 28$; $31 \cdot 16 = 496$; $127 \cdot 64 = 8128$; $2047 \cdot 1024 = 2096128$; &c. &c. sunt numeri perfecti.

SCHOLIUM.

249. *Problemata indeterminata, qualia plurima solvit DIOPHANTUS, difficiliora sunt determinatis, nisi simplicia fuerint. Unde Tyriones sub initium ea prætermittere possunt, quæ difficultatem creant, ad sequentia pedem promoventes. Non tamen prorsus negligenda sunt, cum maximus eorum sæpe sit usus in Problematibus Geometriae sublimioris solvendis. Ceterum Ars resolvendi Problemata indeterminata numerica Analyfis Diophantea appellari solet.*

C A P U T III.

De Algebra ad Geometriam elementarem applicata.

PROBLEMA CX.

250. **P**roblema geometricum algebraice resolvere:

RESOLUTIO.

1. Observentur ea omnia, quæ in Probl. 36 (§. 141) fieri præcepimus.
2. Cum vero rarissime ad æquationem eodem modo in Problematis geometricis perveniatur, quo in numericis usi sumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda sunt. Nempe
 - a) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.
 - β) Omnium linearum in schemate depictarum relationes, nullo habito

discrimine inter cognitæ & incognitæ, excutiantur; ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, seu quibus datis, aliæ una dentur, sive per triangula similia (§. 175 *Geom.*), sive per rectangula (§. 417 *Geom.*); sive per alia (quod tamen raro fieri solet) Theoremata.

- γ) Ut igitur triangula similia & rectangula obtineas, sæpius producendæ sunt lineæ, donec vel directe vel indirecte datis fiant æquales, vel alias secent; sæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ; sæpius puncta quædam connectenda; sæpius anguli

anguli datis æquales construendi ; quæ fieri posse, ex Geometria elementari manifestum est. Eum in finem probe tenenda sunt Theoremata de æqualitate angulorum & similitudine triangulorum (§. 156, 183, 201, 207, 233, 267, 268, 269, 329 *Geom.*)

2) Quodsi in æquationem non satis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ sunt linearum relationes; ac interdum sufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

3. Reductione æquationis facta, ex ultima, quæ prodit, elicienda est constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

SCHOLIUM.

251. Quoniam nunc tantum simplicissimos regulæ Algebræ casus exemplis geometricis illustramus; suffecerit nobis ostendisse, quomodo æquationes simplices & quadraticæ construantur.

PROBLEMA CXI.

252. Æquationem simplicem construere.

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 302 *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 271 *Geom.*).

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 271 *Geom.*) dicatur g ; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in casu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa-bb}{c}$. Quoniam $aa-bb = (a+b)(a-b)$, (§. 86); erit $c : a + b = a - b : x$ (§. 302 *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2b-bcc}{ad}$. Invenitur per casum 1. $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut sit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a}$; denique, per casum 1, $i = \frac{bc}{a}$: erit $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i . Brevius. Fiat $a : a + c = a - c : g$, per casum 3, & $d : g = b : \frac{bg}{d}$, per cas. 1, quæ erit x .

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniat, ut in casu præcedente, $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$: erit $x = g + f$, summa linearum g & f .

6. Sit $x = \frac{a^2b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg} = \frac{(a + d)b}{f + cg}$. Quærat $\frac{cg}{a}$ & fiat $\frac{cg}{a} = b$; erit $f + b : a + d = b : x$; consequenter $x = \frac{(a + d)b}{f + b}$. Reductus adeo est casus præfens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2b - bad}{af + bc}$. Quærat $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = b$, erit $x = \frac{a(a-d)}{b + c}$; consequenter $b + c : a - d = a : x$.

8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$. Construatur triangulum ABC, cujus crus AB = a , BC = b , Tab.I. Fig.3. (§. 180 *Geom.*); erit AC = $\sqrt{a^2 + b^2}$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur AC = m , erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c : m = m : x$.

9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super AB = a describa- Tab.I. Fig.4. tur semicirculus & in eo applicetur AC = b . Cum triangulum ACB sit rectangulum (§. 317 *Geom.*); erit CB = $\sqrt{a^2 - b^2}$.

$\sqrt{(a^2 - b^2)}$, (§. 417 Geom.). Dicatur $CB = m$: erit $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$.

Tab.I. 10. Sit $x = \frac{a \cdot b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur
Fig. 5.

$$b : a = f : \frac{fa}{b} \text{ \& fiat } \frac{fa}{b} = b : \text{ erit } x = \frac{a^2 + cd}{b + c}.$$

Quaratur inter $AC = c$ & $CB = d$ media proportionalis $CD = \sqrt{cd}$, (§. 327 Geom.). Fiat $CE = a$; erit $DE = \sqrt{(a^2 + cd)}$.

Dicatur hac m : erit $x = \frac{m^2}{b + c}$; consequenter $b + c : m = m : x$.

PROBLEMA CXII.

253. *Æquationem quadraticam geometricè construere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (§. 143); ipsas quoque, per *Probl. præced.* (§. 252) construere licet.

Tab.I. Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (§. 299 Arithm.). Invenitur adeo $x = \sqrt{ab}$, si inter $AC = a$ & $CB = b$ quaratur media proportionalis DC (§. 327 Geom.). Si æquatio affecta $x^2 + ax = b^2$; erit $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, hoc est, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, vel $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$. Omne igitur artificium construendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, itemque ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$.

Tab.I. Utrumque vero jam docuimus in Problemate præcedente. Nimirum si in triangulo rectangulo fiat $AB = \frac{1}{2}a$ & $BC = b$; erit $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ (§. 417 Geom.). Sed

Fig. 4. si super $AB = \frac{1}{2}a$, describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = b$; erit $CB = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, ut in Problemate præcedente demonstratum.

SCHOLIUM.

254. *Quamvis omnes æquationes simplices & quadraticæ eum in modum construere possint,*

quo eas construere docuimus: minime tamen consultum est, ut iis stricte inhereamus. Hac enim ratione in construtiones parum commodas sepe incidere, cum singulares Problematis specialis circumstantia multo concinniores medianti insinuent. Immo in genere notandum est, ex calculo analytico difficillime erui construtiones concinnas, cum tamen in iis unice ingenium spectetur, solutione arithmetica ad praxin sufficiente. Ratio hac est, quod in algebraica solutione Problema tanquam unicum in rerum possibilium regione consideretur, independens ab omnibus reliquis; cum tamen ex Veterum methodo appareat & ipsa ratio suadeat, solutionem unius a solutione alterius pendere.

PROBLEMA CXIII.

255. *Data perimetro $AB + BC + CA$, Tab. I. & area trianguli rectanguli; invenire hypotenusem.* Fig. 3.

Sit $AB + BC + CA = a$, $AC = x$,
area $= b^2$, erit $BC + BA = a - x$.

Jam cum sit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 Geom.) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$ (§. 261 Arithm.): erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC$ (§. 87 Arithm.). Est vero $AC^2 = x^2$ & $(AB + BC)^2 = a^2 - 2ax + x^2$, $2AB \cdot BC = 4b^2$ (§. 392 Geom.). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$

$$2ax = a^2 - 4b^2$$

$$x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quodsi triangulum construi debet, dicatur altitudo BD , hoc est perpendicularum in hypotenusem AC demissum (§. 227 Geom.), y ; erit (§. 392 Geom.).

$$\frac{1}{2}xy = b^2$$

$$y = b^2 : \frac{1}{2}x$$

Constructio. Erigatur ad $BD = a$ perpendicularis $AB = 2b$, fiatque $BC = b$ & quaratur

Tab. XII. Fig. 113.

Tab. XII. Fig. 113.

ratur (§. 271 Geom.) quarta proportionalis BH = 2b² : a. Fiat CB = ½a, & CI = BH; erit BI = ½a - 2b² : a = x. Dividatur BI bifariam in O, quæratque ad BO = ½x, & BE = BG = b tertia proportionalis BK, quæ erit altitudo trianguli quæsitæ = b² : ½x. Quare, si super BI describatur semicirculus, & ex K agatur eidem parallela KL secans semicirculum in L; ductis rectis BL & LI erit BLI triangulum quæsitum.

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

seu ½a : ½a + b = ½a - b : x (§. 185 Arith.). habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo est ut dimidia perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypothenusam.

SCHOLIION.

256. Cum areas figurarum in Geometria metiamur investigando earum rationem ad quadratum aliquod datum (§. 118 Geom.); ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipsis æquale.

PROBLEMA CXIV.

Tab. I. Fig. 3. 257. Data area trianguli rectanguli, cujus latera AC, AB, & BC in proportione continua; invenire latera.

Sit area = a²	BC = x
	AB = y
erit	AC = y² : x
Ergo	
(§. 417 Geom.)	(§. 392 Geom.)
y² : x² = y² + x²	½xy = a²
----- x²	-----

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

y⁴ = x⁴ + x²y²	xy = 2a²	Tab. I.
y⁴ = $\frac{16a^8}{y^4} + 4a^4$	x = 2a² : y	Fig. 3.

----- y⁴	-----
y⁸ = 16a⁸ + 4a⁴y⁴	x² = 4a⁴ : y²
-----	x⁴ = 16a⁸ : y⁴
y⁸ - 4a⁴y⁴ = 16a⁸	x²y² = 4a⁴
+ 4a⁸ + 4a⁸	

y⁸ - 4a⁴y⁴ + 4a⁸ = 20a⁸	

$$\left. \begin{array}{l} y^4 - 2a^4 \\ 2a^4 - y^4 \end{array} \right\} = 2a^4 \sqrt{5}$$

$$y^4 = 2a^4 + 2a^4 \sqrt{5} = a^4 (2 + 2\sqrt{5})$$

$$y = a \sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$$

Nempe quia 2a⁴ < 2a⁴√5, radix 2a⁴ - y⁴ est falsa.

Similiter reperitur valor ipsius x. Est enim, vi æquationis xy = 2a², y = 2a² : x, adeoque y⁴ = 16a⁸ : x⁴, & hinc ob y⁴ = x²y² + x⁴ porro

16a⁸ : x⁴ = 4a⁴ + x⁴

16a⁸ = 4a⁴x⁴ + x⁸

20a⁸ = 4a⁸ + 4a⁴x⁴ + x⁸

2a⁴√5 = 2a⁴ + x⁴

x⁴ = 2a⁴√5 - 2a⁴

x = a \sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}

Constructio. Jungantur AB = a & AC = 2a ad angulos rectos, erit BC = a√5. Tab. XII. Fiat BD = AB, erit DC = a√5 - a. Fiat Fig. 114. porro CE = CD, & ducta per C recta NL ad AK perpendiculari describatur super AE semicirculus; erit CN = √(2a²√5 - 2a²) = a√(2√5 - 2). Factis CH = a & CG = CN, descriptoque semicirculo super HG; erit CI = √(a²√(2√5 - 2)) = a√√(2√5 - 2) = a \sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}.

Qq

Simi-

Tab. XII. Similiter fiat $CK = CB + CH = a + a\sqrt{5}$; erit, descripto super AK semicirculo, $CL = \sqrt{(2a^2 + 2a^2\sqrt{5})} = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$.
 Fig. 114. Fiat porro $CO = CL$; erit descripto super HO semicirculo $CM = \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5}))} = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$.

Quodsi itaque tandem fiat $CF = CI$; ducta FM erit CMF triangulum quæsitum.

Quodsi exponens rationis $= y$, $BC = x$, erit $AB = xy$, $AC = xy^2$, adeoque (§.417 Geom.):

$$\frac{x^2y^4 = x^2y^2 + x^2}{x^2 \text{ div.}}$$

$$\frac{y^4 = y^2 + 1}{y^2 \text{ subtr.}}$$

$$\frac{y^4 - y^2 = 1}{\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \text{add.}}$$

$$\frac{y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}}$$

$$\frac{y^2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - y^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\frac{y^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$$

$$y = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})}$$

Patet adeo rationem laterum esse constantem.

PROBLEMA CXV.

Tab. I. Fig. 6. 258. *Datam rectam AB media & extrema ratione secare in C, hoc est, ut sit $AB : AC = AC : CB$.*

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $CB = a - x$; consequenter, per conditionem Problematis,

$$\frac{a : x = x : a - x}{x^2 = a^2 - ax \text{ (§.297 Arithm.)}}$$

$$\frac{x^2 + ax = a^2}{\frac{1}{4}a^2 \text{ add.}}$$

$$\frac{x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2}{\text{Ext. Rad.}}$$

$$\frac{x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}}{x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a}$$

Constructio. 1°. Jungantur $AB = a$ & $BD = \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $AD = \sqrt{\frac{5}{2}a^2}$.
 2°. Fiat $DF = \frac{1}{2}a$ & $AF = AC$; erit $AC = x$.

Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Nimirum radio $AC = \frac{1}{2}a$ describatur circulus, & in A erigatur perpendicularis $= a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit $ED = a$ & $BE = x$. Quare si fiat $BF = BE$; recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim $BD = a + x$, adeoque $BE \cdot BD = ax + x^2$; consequenter $ax + x^2 = a^2$ (§.379 Geom.).

PROBLEMA CXVI.

259. *Rectam datam AC, utcumque divisam in B, iterum secare in D, ita ut sit $AD : DC = DC : BD$.*

Sit $AB = a$, $BD = x$,
 $BC = b$, erit $DC = b - x$,
 $AD = a + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$\frac{a + x : b - x = b - x : x}{ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2}$$

$$\frac{ax + 2bx = b^2}{a + 2b, \text{ div.}}$$

$$x = \frac{b^2}{a + 2b}$$

Invenitur adeo x ob analogiam $a + 2b : b = b : x$ (§.272 Geom.).

Aliter.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci potest, a qua constructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$

erit $a + b : b - x = b : x$ (§.190 Arithm.)

$$a + b : b = b - x : x \text{ (§.173 Arithm.)}$$

$$a + 2b : b = b : x \text{ (§.190 Arithm.)}$$

PRO-

PROBLEMA CXVII.

Tab. I. Fig. 8. 260. *Datam rectam AC divisam in B denuo secare in D, ita ut sit CB: DB=DA: BA.*

Sit $CB=a$, $DB=x$,
 $BA=b$, erit $DA=b+x$.
 Quare, per conditionem Problematis,
 $a : x = b + x : b$

$$\begin{aligned} ab &= bx + x^2 \\ \frac{1}{4}b^2 \quad \frac{1}{4}b^2 \text{ add. } (\S. 143). \\ \frac{1}{4}b^2 + ab &= \frac{1}{4}b^2 + bx + x^2 \\ \text{Ext. Rad.} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab\right)} &= \frac{1}{2}b + x \\ \frac{1}{2}b \text{ subt.} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab\right)} - \frac{1}{2}b &= x \end{aligned}$$

Tab. I. Fig. 9. *Constructio.* Inter $EG=b$ & $GE=a$ quaeratur media proportionalis HG , quaerit $=\sqrt{ab}$. Fiat $GI=\frac{1}{2}b$, & ducatur HI ; erit $HI=\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab\right)}$. Fiat denique $KI=GI$; erit $KH=\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + ab\right)} - \frac{1}{2}b$. Invenitur etiam $\sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + ab\right)}$, si inter $\frac{1}{4}b + a$ & b quaeratur media proportionalis ($\S. 327, 330$ *Geom.*).

Tab. I. Fig. 4. *Item*, quia $\frac{1}{4}bb + ab$ est differentia quadratorum $\frac{1}{4}bb + ab + a^2$ & a^2 ; super $AB = \frac{1}{2}b + a$ describatur semicirculus & in eo applicetur $AC=a$; erit $CB=\sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + ab\right)}$, ($\S. 317, 417$ *Geom.*).

DEFINITIO XIX.

261. Si quatuor fuerint *linea* proportionales, extremae mediis, mediae extremis *reciproca* dicuntur.

PROBLEMA CXVIII.

Tab. I. Fig. 10. 262. *Datam rectam AB ita secare in C, ut partes AC & CB sint duabus datis DE & FG reciproca.*

Sit $AB=a$, $AC=x$,
 $DE=b$, $CB=a-x$.
 $FG=c$,

Ergo ($\S. 261$).

$$\begin{aligned} x : b &= c : a - x \\ \hline ax - x^2 &= cb \\ \hline \text{mut. fig.} \\ cb &= x^2 - ax \\ \frac{1}{4}aa \quad \frac{1}{4}aa \text{ add. } (\S. 143). \\ \hline \frac{1}{4}aa - cb &= \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 \\ \hline \text{Ext. Rad.} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - cb\right)} &\left(\begin{array}{l} = \frac{1}{2}a - x \\ = x - \frac{1}{2}a \end{array} \right) \\ x &= \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - cb\right)} \end{aligned}$$

Constructio. Quaeratur inter $HI=b$ & $IK=c$ media proportionalis $MI=\sqrt{cb}$ ($\S. 327$ *Geom.*). Radio $IL=\frac{1}{2}a$ describatur arcus, & ducatur PM ipsi IK parallela ($\S. 258$ *Geom.*); erit $NM=x$ & $MP=a-x$. Nam demisso ex centro L perpendicularo LO , erit $NO=OP$ ($\S. 291$ *Geom.*) & $OL=MI=\sqrt{cb}$ ($\S. 226$ *Geom.*). Sed $NL=LI$ ($\S. 40$ *Geom.*) $=\frac{1}{2}a$. Ergo $NO=\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - cb\right)}$ ($\S. 417$ *Geom.*); consequenter, ob $MO=IL$ ($\S. 238$ *Geom.*) $=\frac{1}{2}a$, $MN=\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - cb\right)} = x$, & $PM=\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - cb\right)} = a-x$.

COROLLARIUM.

263. Construere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$, idem est, ac datis duabus rectis c & b , vel si $c=b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a-x$ invenire.

PROBLEMA CXIX.

264. *Datis duabus rectis DE & FG reciprocas invenire, quarum differentia sit data recte AC aequalis.*

Sit $DE=a$, reciproca minor
 $FG=b$, $=x$,
 $AC=c$, erit major $=c+x$.

Q 2 Ergo

Ergo (§. 261)

$$x : a = b : c + x$$

$$ab = cx + x^2$$

$$\frac{1}{4}cc \quad \frac{1}{4}cc$$

$$\frac{1}{4}cc + ab = \frac{1}{4}cc + cx + x^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + ab\right)} = \frac{1}{2}c + x$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + ab\right)} - \frac{1}{2}c = x$$

Tab.I. *Constructio.* Quærat inter AC = b & Fig. 5. CB = a media proportionalis DC. Fiat CE = $\frac{1}{2}c$; erit DE = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + ab\right)}$. Unde si subtrahitur $\frac{1}{2}c = EF$, relinquitur DF = x.

Tab.I. Alia magis ingeniosa ex æquatione ab Fig. 12. = $cx + x^2$ eruitur. Describatur nimirum ex centro C, radio arbitrario, majori tamen quam $\frac{1}{2}c$ & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, circulus. In eo applicentur chordæ IQ = c & IP = a - b. Prolongetur PI in O, donec PO = b. Tandem per O describatur circulus priori concentricus: erit HI = x. Demissa enim ex centro C perpendiculari CL; erit LI = LQ & LH = LM (§. 291 *Geom.*), adeoque QM = IH (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse NI = PO = b. Ergo NI. IO = ab; consequenter ab = HI. IM = HI. (c + HI) (§. 381 *Geom.*). Est vero etiam ab = x(c + x). Ergo HI = x.

Sint omnia ut ante, & pars major = x, erit minor x - c; consequenter (§. 261)

$$x : a = b : x - c$$

$$x^2 - cx = ab.$$

Constructio. Eadem est, quæ precedens. Sed hic MI = x, ita enim HI = QM = x - c, consequenter NI. NO = ab & HI. IM = $x^2 - cx$.

COROLLARIUM.

265. Construere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$, idem est ac datis duabus rectis a & b, vel, si a = b, eidem rectæ b reciprocas ibi x & x + c, hic x & x - c reperire.

PROBLEMA CXX.

266. Datam rectam AB ita secare in Tab.I. C, ut rectangulum sub toua AB & seg-Fig. 10. mento minore AC æquale sit rectangulo sub majore CB & differentia utriusque CB - AC.

$$\text{Sit } AB = a, AC = x,$$

$$\text{erit } CB = a - x,$$

$$CB - AC = a - 2x.$$

Quare, per conditionem Problematis,

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$

$$- a^2 = - 4ax + 2x^2$$

$$- \frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$

$$+ a^2 \quad + a^2$$

$$\frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a - x$$

$$x + \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a$$

$$x = a - \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$$

Constructio. Quærat inter $\frac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major a - x, adeoque subducta ex a relinquit minorem x.

Aliter.

Quoniam, per conditionem Problematis,

$$ax = (a - x)(a - 2x)$$

erit a : a - 2x = a - x : x (§. 299 *Arithm.*)

$$2a - 2x : a = a : a - x$$

$$a - x : \frac{1}{2}a = a : a - x$$

$$\frac{1}{2}a : a - x = a - x : a$$

SCHOLIUM.

267. His resolutionibus per analogias, & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus est, si geometricas more Veterum mediteris demonstrationes.

PRO-

PROBLEMA CXXI.

Tab.I. 268. Dato radio circuli ED; inve-
Fig.13. nire latus Trigoni regularis ipsi inscri-
n. 1. bendi AB.

Ducatur latus Hexagoni EB, & sit
BD=BE (§. 356 Geom.)=a, AB=x;
erit BF= $\frac{1}{2}x$ (§. 291 Geom.). Et quo-
niam anguli ad F recti (per §. cit.) BE
=BD, per demonstr. BF=BF: erit EF
=FD (§. 235 Geom.)= $\frac{1}{2}a$. Quare
(§. 417 Geom.) $BD^2 - DF^2 = FB^2$,
hoc est

$$\frac{\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2}{3aa = x^2}$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Est ergo x media proportionalis inter 3a
& a. Et si fiat a=1, erit = $x\sqrt{3}$.

Tab.I. Constructio. Concinnior hæc est: Super
Fig.13. diametro AB construatur triangulum æqui-
n. 2. laterum AFB, & centrum C cum puncto F
connectatur recta CF; erit CF latus trigoni.
Cum enim FCB sit triangulum rectangulum
(§. 184 Geom.) & FB=2a, CB=a; erit
FC= $\sqrt{3aa}$ (§. 417 Geom.)=x.

Theorema. Quadratum lateris Trigoni est
ad quadratum radii ut 3 ad 1.

Aliter.

$$\frac{\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2}{\frac{3}{4}a : \frac{1}{4}x = x : a}$$

$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM I.

269. Si, dato latere Trigoni regularis b,
inveniri debet radius circuli circumscriben-
di y; erit $3y^2 = b^2$, consequenter $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$,
quæ est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

COROLLARIUM II.

270. Quoniam dimidium latus Trigoni
regularis est sinus 60° (§. 2 Trigoni), per
Problema præsens invenitur sinus 60°.

SCHOLION.

271. Hujus Problematissolutio usum po-
tius respicit arithmeticum, quam geometricum.
Geometrica enim constructio ex Elementis fa-
cilior & elegantior deducitur, quamvis ea-
dem ex calculo etiam pateat. Est enim dia-
meter AB=2a. Quare si fiat AD=a, Tab.I.
ducaturque DB, cum angulus ad D rectus sit Fig.13.
(§. 317 Geom.), adeoque $AB^2 - AD^2 = n. 2.$
 DB^2 (§. 417 Geom.) erit $DB = \sqrt{3a^2}$.

PROBLEMA CXXII.

272. Dato radio circuli AE; inve- Tab.I.
nire latus Octogoni regularis circulo in- Fig.17.
scribendi.

Sit AE=r, AF=y; erit latus qua-
drati AB= $\sqrt{2r^2}$ (§. 21 Trig.) & AG
= $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 291 Geom.). Porro cum
AEF=45° (§. 342 Geom.), & angu-
lus ad G rectus (§. 291 Geom.); erit
quoque EAG=45° (§. 241 Geom.);
consequenter EG=AG (§. 253 Geom.)
= $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc FG=r- $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Qua-
re (§. 417 Geom.)

$$yy = \frac{1}{2}r^2 + 1\frac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc est $yy = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quod si fiat r=1; erit $y = \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$.

COROLLARIUM.

273. Cum dimidium latus Octogoni sit
sinus 22° 30' (§. 2 Trigoni); per hoc ipsum
Problema invenitur sinus 22° 30'.

PROBLEMA CXXIII.

274. Dato latere Octogoni AF; in- Tab.I.
venire radium circuli circumscribendi Fig.17.
AE.

Tab.I. Sit $AF=b$, $AE=y$, erit (§. 272)
Fig.17.

$$\begin{aligned} b^2 &= 2y^2 - \sqrt{2y^4} \\ \sqrt{2y^4} &= 2y^2 - b^2 \\ 2y^4 &= 4y^2 - 4b^2y^2 + b^4 \\ 0 &= 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4 \\ 0 &= y^4 - 2b^2y^2 + \frac{1}{2}b^4 \\ \frac{1}{2}b^4 & & \frac{1}{2}b^4 & (\text{§. 261}) \\ \frac{1}{2}b^4 &= y^4 - 2b^2y^2 + b^4 & \text{Arith.)} \\ b\sqrt{\frac{1}{2}b^2} &= y^2 - b^2 \\ b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2} &= y^2 \\ \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})} &= y \end{aligned}$$

Erit igitur $b : y = y : b + \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$
conseq. $\frac{1}{2}b : y = y : 2b + 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$.

Hinc elicitur sequens geometrica

Constructio. Super latere Octogoni $AB=b$
Tab. describatur semicirculus, & ex centro C eri-
XII. gatur perpendicularis indefinita CF, erit
Fig. recta $DB = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ (§. 417 *Geom.*). Fiat AE
115. $= 2b + 2b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, descriptoque semicirculo
AFE, erit $AF = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})}$, (§. 330
Geom.); consequenter radius circuli Octo-
gono circumscribendi: quod adeo super
recta AB construatur, si radio AF describa-
tur circulus transiens per A & B.

PROBLEMA CXXIV.

Tab.I. 275. Dato radio circuli AC; inveni-
Fig.14. re latus Decagoni regularis inscribendi
AB.

Quoniam AB est $\frac{1}{10}$ totius periph-
erix, angulus $ACB = 36^\circ$ (§. 57, 59
Geom.); consequenter, ob $AC=BC$
(§. 40 *Geom.*), $ABC=CAB=72^\circ$
(§. 248 *Geom.*); adeoque $DAC=$
 108 (§. 149 *Geom.*). Fiat $AD=AC$,
erit $ADC=ACD=36^\circ$ (§. 248
Geom.); consequenter $DCB=72^\circ$.

Sunt ergo triangula ABC & BDC Tab.I.
æquiangula & hinc $BD : BC = BC : AB$ (Fig. 14)
(§. 267 *Geom.*).

Sit jam $AC=BC=a$, $AB=x$;
erit $BD=a+x$; consequenter per
demonstrata,

$$\begin{aligned} a+x : a &= a : x \\ \hline ax + x^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Erit ergo a media & extrema ratione se-
canda, cujus pars major x (§. 258). Vel
radio a quærenda sunt reciproca $a+x$ &
 x (§. 265).

Theorema. Latus Decagoni regularis cir- Tab.I.
culo inscripti est pars major radii media & Fig.15.
extrema ratione secti.

Constructio. Quoniam $x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$
(§. 258); radio a describatur circulus & in
centro E erigatur perpendicularis $IE=a$.
Fiat $EF = \frac{1}{2}a$; erit $FI = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Quare si
ex F, radio IF, describatur arcus KI, erit
 $KE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

SCHOLIUM.

276. Hanc ipsam constructionem tradit
PTOLEMÆUS in suo Almagesto.

COROLLARIUM.

277. Invenitur ergo per Problema præ-
sens sinus 18° (§. 2. *Trigon.*).

PROBLEMA CXXV.

278. Dato latere Decagoni regularis Tab.I.
circulo inscribendi AB; invenire ra- Fig.14+
dium AC.

Sit $AB=a$, $AC=x$; erit $BD=$
 $a+x$, & per *demonstrata* in *Probl. præc.*
 $a+$

$$a + x : x = x : a$$

$$ax + a^2 = x^2$$

$$a^2 = x^2 - ax$$

$$\frac{5}{4}a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = x - \frac{1}{2}a, \text{ ob } x > \frac{1}{2}a \text{ (§. 275).}$$

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = x.$$

Tab.I.
Fig.16.

Constructio. Construat^r triangulum re-
ctangulum MLN, in quo ML = a & MN
= $\frac{1}{2}a$: erit LN = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 417 Geom.).
Producatur MN in O, donec NO = LN;
erit MO = x. Ex centro itaque O per M
circulus describi potest.

Aliter.

$$a + x : x = x : a$$

$$a : x = x - a : a$$

Quarendæ adeo sunt ipsi a recipro-
cæ x & x - a.

PROBLEMA CXXVI.

Tab.I.
Fig.17. 279. Dato radio circuli AE & la-
tere Decagoni AF; invenire latus Pen-
tagoni AB.

Sit AE = a, AB = x,

AF = b, AG = $\frac{1}{2}x$, (§. 291

GE = $\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ Geom.)

FG = $a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

Quare (§. 417 Geom.)

$$b^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + a^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$

$$2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 2a^2 - b^2$$

$$4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$-a^2x^2 = -4a^2b^2 + b^4$$

$$4a^2b^2 - b^4 = a^2x^2$$

$$4b^2 - b^4 : a^2 = x^2$$

Est vero $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 275)

$$b^2 = \frac{5}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$b^4 = \frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Ergo

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - (\frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}) : a^2 \\ &= \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{14}{4}a^2 + 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \\ &= \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + \frac{5}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Constructio: Queratur latus Decagoni EK Tab.I.
(§. 275); erit KI latus Pentagoni. Fig.15.

Theorema. Latus Pentagoni regularis po-
test latera Hexagoni & Decagoni eidem cir-
culo inscriptorum simul.

SCHOLIUM.

280. Eandem prorsus constructionem dedit
PTOLEMÆUS.

COROLLARIUM.

281. Per præsens adeo Problema inve-
niri potest sinus 36° (§. 2 Trigon.).

PROBLEMA CXXVII.

282. Datis summa crurum Trian- Tab.I.
guli rectanguli AB + BC, una cum per- Fig.3.
pendiculo BD ex angulo recto B in
hypothensam AC demisso; invenire
latera.

Sit AB + BC = a, BD = b, AB - BC
= y, AC = x; erit AB = $\frac{1}{2}(a + y)$,
BC = $\frac{1}{2}(a - y)$; consequenter
(§. 417 Geom.) (§. 330 Geom.)
 $x^2 = \frac{1}{2}(aa + yy)$ BA : BD = AC : BC

$$2x^2 = aa + yy$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$\frac{1}{2}(a + y) : b = x : \frac{1}{2}(a - y)$$

$$\frac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$$

$$a^2 - y^2 = 4bx$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

Quare

Quare (§. 87 *Arihm.*).

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$\frac{2x^2 + 4bx = 2a^2}{\hline}$$

$$\frac{x^2 + 2bx = a^2}{\hline}$$

$$\frac{x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2}{\hline}$$

$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$$

Tab.
XII.
Fig.
116.

Constructio nihil difficultatis habet. Quod si enim triangulum construi debet, ad $AB = a$ excitetur in A perpendicularis $AC = b$ (§. 249 *Geom.*), erit $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Quare si fiat $CD = AC$, erit $DB = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Fiat jam porro $BE = BD$, &, descripto super EB semicirculo ex C , ducatur CH ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*) secans semicirculum in F . Ductis enim rectis EF & FB , erit EFB triangulum quaesitum.

PROBLEMA CXXVIII.

Tab.I. 283. *Datis, pro triangulo reſtanguſo Fig. 18. BAC, hypotenuſa BC & differentia crurum DC; invenire crura.*

Sit $BC = c$, $DC = f$, $\frac{1}{2}(AB + AC) = x$; erit $AC = x + \frac{1}{2}f$, $AB = x - \frac{1}{2}f$ (§. 6); conſequenter (§. 417 *Geom.*).

$$2x^2 + \frac{1}{2}f^2 = c^2$$

$$\frac{2x^2 = c^2 - \frac{1}{2}f^2}{\hline}$$

$$\frac{x^2 = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}f^2}{\hline}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}f^2\right)}$$

Constructio. Conſtruatur reſtanguſum triangulum AFE , in quo $AF = FE = \frac{1}{2}c$, erit $AE = \sqrt{\frac{1}{2}cc}$. Super AE deſcribatur ſemicirculus, ob $AF = FE$, tranſiturus per F , & in eo applicetur $EG = \frac{1}{2}f$; erit $AG = x$; conſequenter ſi fiat $GD = GC = GE$, crus majus AC , minus $AB = AD$.

PROBLEMA CXXIX.

Tab.I. 284. *In dato circulo aptare reſtam da- Fig. 19. tam KL, qua producta tranſeat per datum punctum H tangentis HI.*

Sit $LK = m$, $HI = n$, $LH = y$; erit Tab.I. (§. 379 *Geom.*) Fig. 19.

$$y^2 + my = n^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2}{\hline}$$

$$\frac{y^2 + my + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + n^2}{\hline}$$

$$y + \frac{1}{2}m = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + n^2\right)}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + n^2\right)} - \frac{1}{2}m$$

Constructio. In puncto tangentis I erigatur perpendicularis $MI = \frac{1}{2}m$; erit $HM = \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 + n^2\right)}$. Fiat $NM = MI = \frac{1}{2}m$; erit $HN = y$. Quare ſi ex centro H , radio HN , deſcribatur arcus LN ; erit L punctum, per quod reſta HK ducenda, ut LK fit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA CXXX.

285. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum ſumma aequatur quadrato dato.*

Sint quadrata data bb , cc , dd , quaesita yy & $dd - yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : bb = cc : dd - yy$$

$$\frac{ddy^2 - y^4 = bbcc}{\hline}$$

$$\frac{y^4 - ddy^2 + \frac{1}{4}d^4 = \frac{1}{4}d^4 - bbcc}{\hline}$$

$$\frac{\frac{1}{2}dd - y^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^4 - bbcc\right)}}{\hline}$$

$$\frac{y^2 = \frac{1}{2}dd - \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^4 - bbcc\right)}}{\hline}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}dd - \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^4 - bbcc\right)}\right)}$$

Constructio. Queratur ad $AB = d$, $AC = b$, & $BD = c$ quarta proportionalis $CE = bc : d$. Deſcribatur ſemicirculus ſuper $CF = \frac{1}{2}d$, & in eo applicetur $CG = CE$; erit $FG = \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^4 - bbcc\right)} : d$. Fiat $HC = d$ & $CI = \frac{1}{2}d - \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^4 - bbcc\right)} : d$; erit media proportionalis $CK = y$. Denique ſuper $CH = d$ deſcribatur ſemicirculus, & in eo applicetur $CL = CK$, erit $LH = \sqrt{(d^2 - y^2)}$ latus alterius quadrati quaesiti.

PRO-

PROBLEMA CXXXI.

286. Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.

Sint quadrata data ff, gg, hh , quæ sita yy & $hh + yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : ff = gg : hh + yy.$$

$$y^4 + hbyy = \frac{ffgg}{\frac{1}{4}b^4}$$

$$y^4 + hbyy + \frac{1}{4}b^4 = \frac{ffgg + \frac{1}{4}b^4}{\frac{1}{4}b^4}$$

$$y^2 + \frac{1}{2}hb = \sqrt{\frac{ffgg + \frac{1}{4}b^4}{\frac{1}{4}b^4}}$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}hb + \sqrt{\frac{ffgg + \frac{1}{4}b^4}{\frac{1}{4}b^4}}$$

$$y = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}hb + \sqrt{\frac{ffgg + \frac{1}{4}b^4}{\frac{1}{4}b^4}}\right)}$$

Constructio. Eadem fere, quæ Problematis præcedentis.

PROBLEMA CXXXII.

Tab. II. Fig. 21. n. 1. 287. Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque HL, LI & IH; invenire altitudinem ML.

Sit $HL = c, LI = d, HI = g, HM = z$, erit $ML = g - z$. Quare (§. 417 Geom.) bis invento valore ipsius ML^2

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$

$$cc = dd - gg + 2gz$$

$$cc - dd = 2gz - gg$$

$$cc + gg - dd = 2gz$$

$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica constructio non desideratur, utpote ex Elementis manifesta; sed tantum regula arithmetica.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

COROLLARIUM.

288. Vi æquationis tertiæ $dd - cc = gg - 2gz$ Tab. II. Sed $gg - 2gz$ est differentia inter zz & Fig. 21. $gg - 2gz + zz$. Ergo in omni triangulo differentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum segmentorum basis HM & MI. n. 1.

PROBLEMA CXXXIII.

289. Triangulo dato HLI æquale & Tab. II. alteri dato NOP simile construere. Fig. 21. n. 1. & 2.

Sit $HI = f, LM = e, NP = m, QQ = n$, basis trianguli quæ sita $= y$, altitudo $= z$: erit

$$(\S. 396 Geom.) \quad (\S. 392 Geom.)$$

$$m : n = y : z$$

$$fe = zy$$

$$mz = ny$$

$$fe : y = mz$$

$$ny = mfe : y$$

$$ny^2 = mfe$$

$$y^2 = mfe : n$$

$$y = \sqrt{(mfe : n)}$$

Constructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela: erit $RS = me : n$. Quærat inter RS & SI $= f$ media proportionalis TS $= \sqrt{(mfe : n)}$, super qua, ob angulos N & P datos, triangulum TSV construi potest (§. 264 Geom.).

Aliter.

$$n : m = z : y \quad fe = zy$$

Fiat $n : m = e : r \quad f : z = y : e$ (§. 299 Arithm.)

erit $z : y = e : r$ (§. 167 Arithm.)

Ergo $f : y = y : r$ (§. 194 Arithm.).

Est ergo y media proportionalis inter f & r , seu inter f & $em : n$, ut ante.

R r

PRO-

PROBLEMA CXXXIV.

Tab. II. 290. Ex angulo C rhombi dati ABDC
Fig. 22. ducere rectam CG lateri AB continuato
occurrentem in G, ita ut EG sit equalis
lineæ datæ.

Ducatur diagonalis CB & in E con-
stituatur angulus CEF = CBG (§. 208
Geom.), cujus latus EF producat, do-
nec diagonali continuatæ in F occurrat.

Sit AB = b, CB = c, EG = d,
BG = z, CF = y: erit BF = y - c.
BG : GE = AB : EC (§. 268 Geom.).
Unde reperitur EC = bd : z. Quo-
niam angulus CEF = CBG per con-
struct. erit ob angulum communem C
(§. 267 Geom.) CB : BG = CE : EF.
Unde reperitur EF = zbd : cz = bd : c.
Porro o = x (§. 156 Geom.) & x = u
(§. 99, 204 Geom.). Ergo o = u
(§. 87 Arithm.); consequenter CBG
= EBF (§. 88 Arithm.) = CEF (§.
87 Arithm.). Ergo, ob angulum com-
munem F (§. 267 Geom.),

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$cy : bd = bd : cy - cc$$

$$ccy^2 - c^3 y = b b d d$$

$$y^2 - cy = b b d d : cc$$

$$y^2 - cy + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}cc + b b d d : cc$$

$$y - \frac{1}{2}c = \sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + b b d d : cc\right)}$$

$$y = \frac{1}{2}c + \sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + b b d d : cc\right)}$$

Ex æquatione prima statim liquet,
inveniendas esse ipsi bd : c reciprocas
y & y - c. Ex ultima autem hæc
elicitur

Constructio. Fiat BM = EG = d, & ducatur
LM ipsi AC parallela; erit LM = bd : c (§. 268

Geom.). Dividatur BC bifariam in N & in
C erigatur perpendicularis CO = LM; erit
ON = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + b b d d : cc\right)}$ (§. 417 Geom.).
Translata ergo ON ex N in F; erit CF = y.
Denique cum EF = bd : c = LM; ex puncto
F, intervallo EF, determinetur punctum E.
Quodsi jam ex C ducatur recta per E oc-
currens ipsi AB continuatæ in G, erit EG
equalis lineæ datæ.

PROBLEMA CXXXV.

291. A dato puncto E ducere rectam, Tab. II.
quæ circum datum tangat. Fig. 23.

Quia punctum E positione, circu-
lus GDFG & positione & magnitudine
datur; dantur etiam EG & GC. Sit
iraque EG = a, GC = b, ED = x;
erit EF = a + 2b & (§. 379 Geom.)

$$\frac{aa + 2ab = x^2}{\sqrt{aa + 2ab} = x}$$

Constructio. Connectantur centrum cir-
culi C & punctum datum E recta EC. Super
ea describatur semicirculus CDE, ducan-
turque chordæ CD & DE; erit D rectus
(§. 317 Geom.). Est vero CE² = aa + 2ab
+ bb, CD² = bb; ergo DE = $\sqrt{2ab + aa}$
= x (§. 417 Geom.).

PROBLEMA CXXXVI.

292. Examinare regulam Renaldi-Tab. II.
niam, Polygonum regulare quodcumque Fig. 24.
circulo inscribendi.

Regula Caroli RENALDINI (a) hæc
est. Dividatur diameter AB in tot par-
tes æquales, in quot peripheria dividi
debet. Super AB construatur trian-
gulum æquilaterum AFB. Ex F per se-
cundum divisionis punctum D ducatur
recta FG. Erit ex ipsius mente BG la-
tus Polygoni.

Fal-

(a) De Resolutione & Compositione Mathe-
matica lib. 2. f. 367.

Tab. II. Falſitatem Regulæ una inſtantia Fig. 24. oſtendiſſe ſufficit.

Sit BG latus Octogoni, & fiat BH = BG; erit HG latus Quadrati. Sit porro CB = 1, EG = x; erit CD = $\frac{1}{2}$, per Regulam RENALDINI, FC = $\sqrt{3}$ (§. 417 Geom.). Quoniam angulus ad C rectus (§. 184 Geom.) & is ad E itidem rectus (§. 291 Geom.), præterea verticaleſ ad D æquales (§. 156 Geom.); erit (§. 267 Geom.) FC : CD = EG : DE, hoc eſt, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}$. Hinc

CE = $\frac{\sqrt{3} + x}{2\sqrt{3}}$. Unde tandem ob CE² + EG² = CG² (§. 417 Geom.) reperitur

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{12} + x^2 = 1$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$2x\sqrt{3} + 13x^2 = 9$$

$$\frac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13}$$

$$\frac{3}{13.13} \qquad \frac{3}{13.13} \quad \text{add.}$$

$$\frac{3}{13.13} + \frac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \frac{9}{13} + \frac{7}{13.13} = \frac{120}{13.13}$$

$$\frac{1}{13}\sqrt{3} + x = \frac{1}{13}\sqrt{120}$$

$$x = \frac{1}{13}\sqrt{120} - \frac{1}{13}\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{13}\sqrt{30} - \frac{1}{13}\sqrt{3}$$

Foret adeo ſemilatus Quadrati, ſi vera eſſet Regula RENALDINI, ($2\sqrt{30} - \sqrt{3}$): 13. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21 Trigon.) = $\sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diverſum a Renaldiniano eſſe extractio radicis probat. Fallit ergo regula RENALDINI in Octogono, adeoque non univerſalis.

SCHOLIUM.

293. Eodem proſus modo oſtenditur, quod etiam fallat in aliis Polygonis.

PROBLEMA CXXXVII.

294. Data diagonali Pentagoni regularis AD; invenire latus Pentagoni AE.

Sit AE = x, AD = a. Quoniam Tab. II. anguli AEC meſura eſt arcus AB Fig. 25. (§. 314 Geom.) & ipſius EFA ſemiſumma arcuum AE & CD (§. 316 Geom.), hoc eſt, arcus AE (§. 342 Geom.), eſt vero AB = AE (§. cit. Geom.); erit AEF = AFE (§. 142 Geom.), conſequenter AF = AE (§. 253 Geom.) = x, adeoque FD = a - x. Porro anguli AED meſura eſt AB + $\frac{1}{2}$ BC (§. 314 Geom.) & ipſius EFD meſura itidem AB + $\frac{1}{2}$ BC (§. 316 Geom.) & angulus ADE utriſque triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 267 Geom.)

$$AD : ED = ED : FD$$

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Eſt adeo x pars major ipſius a media & extrema ratione ſectæ (§. 258).

COROLLARIUM.

295. Quod ſi AD = x, ED = a, reperietur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA CXXXVIII.

296. Invenire circumſcripti Cylindri æqualem.

Sit ratio radii ad peripheriam r : p; peripheria Cylindri = p; altitudo a; erit ſuperficies = ap (§. 516 Geom.).

R r 2

Sit

Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ est ejusdem peripheria (§. 425 Geom.). Unde habemus (§. 429 Geom.)

$$\begin{array}{r} px^2 : 2r = ap \\ \hline px^2 = 2rap \quad 2r \text{ mult.} \\ \hline x^2 = 2ar \quad p \text{ div.} \\ \hline x = \sqrt{2ar} \end{array}$$

Theorema. Superficies Cylindri æquatur circulo, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum & altitudinem Cylindri.

PROBLEMA CXXXIX.

297. *Invenire Cylindrum, cujus superficies sit circulo dato æqualis:*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo Cylindri $= x$, radius basis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§. 425 Geom.), consequenter (§. 516 Geom.).

$$\begin{array}{r} pyx : r = \frac{1}{2}pr \\ \hline pyx = \frac{1}{2}pr^2 \\ \hline yx = \frac{1}{2}r^2 \\ \hline x = r^2 : 2y \end{array}$$

Est adeo Problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio assumi possit vel, quod perinde est, altitudo.

PROBLEMA CXL.

298. *Data diametro Sphære & altitudine Cylindri ipsi æqualis; invenire diametrum Cylindri.*

Sit diameter Sphære $= d$, altitudo Cylindri $= a$, diameter ejus $= x$, ratio diametri ad peripheriam $b : c$; erit soliditas Sphære $cd^3 : 6b$ (§. 556 Geom.), & soliditas Cylindri $acx^2 : 4b$ (§. 541 Geom.). Quare, per conditionem Problematis,

$$cd^3 : 6b = acx^2 : 4b$$

$$4d^3 = 6ax^2$$

$$2d^3 : 3a = x^2$$

$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x.$$

Æquatio penultima in hanc analogiam $3a : 2d = d^2 : x^2$ resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri Sphære est ad quadratum diametri Cylindri ipsi æqualis, ut tripla Cylindri altitudo ad diametrum Sphære duplam.

PROBLEMA CXLI.

299. *Data diametro Sphære AB; invenire latus Tetraëdri ipsi inscribendi AD.* Fig. 26.

Sit diameter Sphære $AB = a$, latus Tetraëdri $AD = x$, erit CD radius circuli, cui unum e triangulis Tetraëdri inscribi potest $= \sqrt{\frac{1}{3}}x^2$ (§. 269). Sit $AC = y$, erit $CB = a - y$; consequenter (§. 327 Geom.)

$$AC : CD = CD : CB$$

$$(\text{§. 417 Geom.}) \quad y : \sqrt{\frac{1}{3}}x^2 = \sqrt{\frac{1}{3}}x^2 : a - y$$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \quad ay - y^2 = \frac{1}{3}x^2$$

$$x^2 = y^2 + \frac{1}{3}x^2 \quad ay - \frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{3}x^2$$

$$\frac{2}{3}x^2 = y^2 \quad ay = x^2$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}x^2 = y \quad a\sqrt{\frac{2}{3}}x^2 = x^2$$

$$\frac{2}{3}a^2 x^2 = x^4$$

$$\frac{2}{3}a^2 = x^2$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}a^2 = x$$

Est ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema. Quadratum lateris Tetraëdri est ad quadratum diametri Sphære, cui inscribi potest, in ratione subsesquialtera.

COROL-

COROLLARIUM I.

300. Est ergo latus Tetraëdri ad diametrum Sphæræ, cui inscribitur, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, consequenter huic incommensurable.

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 27. 301. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}ay$, erit $y = \frac{2}{3}a$. Patet adeo Tetraëdram sphæræ inscribi, si diameter AB in tres partes æquales dividatur, fiatque $AC = \frac{2}{3}AB$.

PROBLEMA CXLII.

Tab. II. Fig. 28. 302. Data diametro Sphæræ; invenire latus Cubi seu Hexaëdri ipsi inscribendi FG.

Sit diameter Sphæræ, quæ diagonali Cubi FH æquatur, $= a$, latus Cubi $= x$; erit (§. 417 Geom.) $FI^2 = 2x^2$, & $FH^2 = 3x^2$; consequenter

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$$

Theorema. Quadratum lateris Hexaëdri est ad quadratum diametri Sphæræ circumscriptæ in ratione subtriplici.

COROLLARIUM I.

303. Est ergo latus Hexaëdri ad diametrum Sphæræ cui inscribitur, ut 1 ad $\sqrt{3}$; consequenter huic incommensurable.

COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 27. & 304. Sit in diametro Sphæræ $AC = \frac{2}{3}a$, & $CB = \frac{1}{3}a$; erit $AD = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$; consequenter $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, seu latus Hexaëdri.

PROBLEMA CXLIII.

Tab. II. Fig. 29. 305. Data diametro Sphæræ; invenire latus Octaëdri inscripti ML.

Sit $LM = x$, diameter Sphæræ circumscriptæ $HL = b$. Quoniam ML quadrantem subtendit (§. 342, 475 Geom.); erit (§. 417 Geom.)

$$\frac{2}{4}bb \text{ seu } \frac{1}{2}bb = x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}b^2} = x$$

Theorema. Quadratum lateris Octaëdri est ad quadratum diametri Sphæræ circumscriptæ in ratione subdupla.

COROLLARIUM I.

306. Est ergo latus Octaëdri ML ad diametrum Sphæræ circumscriptæ ut 1 ad $\sqrt{2}$; adeoque huic incommensurable.

COROLLARIUM II.

307. Si ex centro Sphæræ E erigatur perpendicularis EF, erit $FA = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, adeoque latus Octaëdri inscribendi; id quod in ipso calculo supposuimus, in futuros tamen usus sigillatim enunciandum.

PROBLEMA CXLIV.

308. Data diametro Sphæræ; invenire latus Dodecaëdri AB. Tab. II. Fig. 30.

Quoniam puncta A, C, F, H sunt in Sphæra: planum per ea transiens est circulus, ut inferius in Sphæricis independenter a Dodecaëdro demonstrabitur. Quoniam anguli B, M, G & L, itemque latera AB, BC, CM, MF, FG, GH, HL & LA inter se æquantur (§. 475, 106 Geom.); $AC = CF = HF = HA$ (§. 179 Geom.) adeoque AHFC Quadratum (§. 342 & 98 Geom.). Jam cum Pentagona 12 in 36 triangula resolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonnisi 6 subtendat; omnia ista triangula a sex quadratis subtendantur necesse est; consequenter diagonalis AC est lateri Hexaëdri sive Cubi eidem Sphæra inscripti æqualis (§. 460 Geom.).

Sit latus Dodecaëdri $AB = x$, diameter Sphæræ $= d$, erit $AC = \sqrt{\frac{1}{3}d^2}$ (§. 302), consequenter

Rr 3

AC:

Tab.II. AC : AB = AB : AC — AB
 Fig.30. $\sqrt{\frac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\frac{1}{3}d^2} - x$ (§.294).

$$\frac{\frac{1}{3}d^2 - x \sqrt{\frac{1}{3}d^2} = x^2}{\frac{1}{3}d^2 = x^2 + x \sqrt{\frac{1}{3}d^2}}$$

$$\frac{\frac{1}{12}d^2}{\frac{1}{12}d^2} = \frac{x^2 + x \sqrt{\frac{1}{3}d^2}}{\frac{1}{12}d^2}$$

$$\frac{\frac{5}{12}d^2}{\sqrt{\frac{5}{12}d^2}} = \frac{x^2 + x \sqrt{\frac{1}{3}d^2}}{x + \sqrt{\frac{1}{12}d^2}}$$

h. e. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}d^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}d^2} = x$.

Æquatio altera hoc suppeditat
Theorema. Quadratum diametri Sphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris Dodecaëdri & Hexaëdri eidem inscriptorum in triplum latus Dodecaëdri.

COROLLARIUM I.

309. Si diameter Sphæræ fuerit 1, erit latus Dodecaëdri inscripti $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}$; consequenter illa ad hoc, ut 2 ad $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$, & quadratum illius ad quadratum hujus ut 6 ad 3 — $\sqrt{5}$. Est ergo diameter Sphæræ lateri Dodecaëdri inscripti tum in se, tum potentia incommensurabilis.

COROLLARIUM II.

Tab.II. 310. Latus Dodecaëdri est portio major
 Fig.27. BG lateris Hexaëdri DB eidem Sphæræ inscripti media & extrema ratione secti in G (§. 258).

PROBLEMA CXLV.

Tab.II. 311. Data diametro Sphæræ HM; in
 Fig.31. venire latus Icosaëdri inscripti.

Sit ABCDEA circulus subtendens angulum solidum Icosaëdri H; erit latus Icosaëdri æquale lateri Pentagoni AB huic circulo inscripti (§. 475 *Geom.*). Concipiatur eidem circulo inscriptum Decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui isti pa-

rallelus & ab eo distat intervallo radii Tab.II. CG; erit DN = DC (§.279). Quodsi Fig.31. ergo anguli Pentagonorum lineis transversis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera juncta decem aliis, quorum quinque a circulo superiore, quinque ab inferiore subtenduntur.

Sit HM = b, HC = x, GC = y. Quoniam GC est latus Hexagoni; erit HG latus Decagoni (§. 279) adeoque $= \sqrt{\frac{5}{4}y^2} - \frac{1}{2}y$, (§. 275). Habemus ergo $2HG + BC = HM$ $HC^2 = HG^2 + GE^2$
 h. e. $2\sqrt{\frac{5}{4}y^2} - y + y = b$ $x^2 = y^2 + \frac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\frac{5}{4}y^2}$
 $2\sqrt{\frac{5}{4}y^2} = b$ $+ \frac{1}{4}y^2$

$$\frac{5y^2 = b^2}{y^2 = \frac{1}{5}b^2}$$

$$\frac{x^2 = \frac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\frac{5}{4}y^2}}{x^2 = \frac{1}{2}b^2 - \sqrt{\frac{1}{20}}b^4}$$

$$\text{feu } \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{1}{5}b^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{1}{5}b^2})}$$

Constructio. Fiat AH = AB = b, erit Tab.II. EH = $\sqrt{\frac{5}{4}b^2}$ (§. 417 *Geom.*) & ob EH : Fig.27. AH = EK : IK, hoc est, $\frac{1}{2}b \sqrt{5} : b = \frac{1}{2}b : \frac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 268 *Geom.*) IK = $b : \sqrt{5}$. Est ergo IK radius circuli, cui Pentagonum Icosaëdri inscribitur. Porro EI = $b : 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{5}b^2}$ (§. cit. *Geom.*) & hinc AI = $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{5}b^2}$. Unde tandem AK = $\sqrt{(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{1}{5}b^2})} = x$ (§. 330 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

312. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri Sphæræ est in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum solidum Icosaëdri subtendentis.

COROLLARIUM II.

313. Liqueet etiam, latus Icosaëdri diametro Sphæræ circumscriptæ tum in se, tum potentia incommensurabile esse.

SCHO-

SCHOLIION I.

314. Si diameter Sphæræ fuerit 100000 erit (§. 299, 305, 302, 311, 308) latus Tetraëdri inscripti 81649, Octaëdri 70710, Hexaëdri 57736, Icosaëdri 52573, Dodecaëdri 35682 (a).

SCHOLIION II.

315. Cum ex diametro Sphæræ corpori-

bus regularibus circumscriptæ invenire possimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum superficies, tum soliditates eorundem, easque tum inter se, tum cum Quadrato & Cubo diametri Sphæræ conferre: sed quoniam hæc doctrina rarissimi est usus, eam præmittendam esse iudicamus.

CAPUT IV.

De Algebra ad Trigonometriam planam applicata.

PROBLEMA CXLVI.

316. Datis basi HI trianguli cujuscunque, & angulis ad basin H & I; invenire altitudinem.

Tab. II. Sit HI = a, LM = x, finus anguli Fig. 21. MIL = s, ejus cosinus = c; finus anguli LHM = p, ejus cosinus = q. Erit (§. 33 Trigon.) s : x = c : MI & p : x = q : HM. Unde reperitur MI = cx : s & HM = qx : p (§. 302 Arithm.). Quare (§. 87 Arithm.).

$$\begin{array}{l} cx : s + qx : p = a \\ \hline pcx + sqx = asp \\ \hline pc + sq \\ x = asp : (pc + sq). \end{array}$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc + sq : sp = a : x$$

resoluta sequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL basis HI est ad altitudinem ML, ut summa rectorum ex sinu anguli obliqui ad basin unius in cosinum alterius se habet ad rectorum ex sinibus angulorum ad basin.

(a) HERIGONIUS. *Curs. Mathem.* Tom. I. p. 779.

Aliter.

Sumatur ML pro sinu toto; erunt Tab. II. HM & MI tangentibus angulorum HLM & MLI, seu cotangentibus datorum H & I. Sint sinus totus = t, cotangentibus = m & n, LM = x, HI = a; erit t : m = x : HM, & t : n = x : MI (§. 40 Trigon.); consequenter HM = mx : t, MI = nx : t, adeoque (§. 87 Arithm.).

$$\begin{array}{l} a = (mx + nx) : t \\ \hline at = mx + nx \\ \hline m + n \\ at : (m + n) = x \end{array}$$

Theorema. Basis trianguli est ad altitudinem ut summa cotangentium angulorum ad basin ad sinum totum.

PROBLEMA CXLVII.

317. Datis summa crurum HL + LI, una cum angulis ad basin H & I; invenire crura HL & LI.

Sit HL + LI = a, finus H = m, finus I = n, HL = x, erit IL = a - x. Quare (§. 33 Trigon.).

Tab. II.
Fig. 2 I.
n. I.

$$\begin{array}{r} x : n = a - x : m \\ \hline mx = na - nx \\ \hline mx + nx = na \\ \hline \hline x = na : (m + n) \end{array} \quad m + n \text{ div.}$$

$$a - x = (ma + na - na) : (m + n) = ma : (m + n)$$

Theorema. Summa crurum trianguli HL + LI est ad crus unum HL ut summa finium angulorum ad basin H & I ad finum anguli I cruri isti HL oppositum.

PROBLEMA CXLVIII.

318. *Datis angulis ad basin H & I, una cum segmento baseos uno HM; invenire segmentum alterum MI.*

Sit $HM = a$, $MI = x$, finus anguli H $= m$, ejus cosinus $= n$; finus anguli I $= p$, ejus cosinus $= q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $n : a = m : ML$. Reperitur adeo $ML = am : n$. Porro, *vi* § *cit.* $q : x = p : ML$. Reperitur itaque $ML = px : q$. Quare (§. 81 *Aritm.*),

$$\begin{array}{r} px : q = am : n \\ \hline \hline pnx = amq \\ \hline \hline x = amq : pn \end{array}$$

$$\text{Est adeo } pn : mq = a : x.$$

Theorema. Si ex vertice trianguli L in basin HI perpendicularum demittitur; segmentum unum HM est ad alterum MI ut rectangulum ex finu anguli segmento MI adjacentis in cosinum anguli segmento HM adjacentis ad rectangulum ex finu anguli H in cosinum anguli I.

PROBLEMA CXLIX.

Tab. I. Fig. 3. 319. *Datis area trianguli rectanguli ABC, una cum angulo C; invenire crura AB & BC.*

$$\text{Sit area} = b^2 \quad BC = x$$

$$\text{Sinus totus} = r, \text{ erit } BA = 2b^2 : x \text{ (§. 394}$$

$$\text{Tangens anguli C} = t \quad \text{Geom.)}$$

Quare (§. 40 *Trigon.*)

$$x : \frac{2b^2}{x} = r : t$$

$$x^2 : 2b^2 = r : t$$

$$x^2 = 2rb^2 : t$$

$$x = \sqrt{(2rb^2 : t)}$$

Theorema: Area trianguli rectanguli est ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad finum totum.

Constructio: Intra crura anguli dati ADM erigatur perpendicularis FE, puncto E pro lubitu assumpto, erit $DE = r$ & $FE = t$ (§. 7 *Trigon.*). Fiat $DG = FE$, $DH = b$, & agatur ipsi EG parallela HI: erit $DI = br : t$ (§. 271 *Geom.*). Fiat $MI = 2b$ & quaeratur inter MI & DI media proportionalis IK (§. 327 *Geom.*), quae erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat $IN = LI$, ducaturque NC ipsi MK parallela, erit $IO = 2b^2 : x$ (§. 271 *Geom.*), adeoque crus alterum, consequenter KOI, triangulum quaesitum.

Aliter. Sit EDA angulus datus. Fiat $DA = 2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA: erit simul $DA = r$ & $AE = t$ (§. 7 *Trigon.*). Producaturs EA in infinitum, & in D erigatur ad ED perpendicularis DG, erit $AG = \frac{2br}{t}$ (§. 327 *Geom.*). Fiat $AH = AG$, & $AI = \frac{1}{2}AD = b$, erit, descripto super IH semicirculo, $AL = \sqrt{2b^2r}$. Fiat denique $AB = AL$, & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quaesitum.

PROBLEMA CL.

320. *Data subtensa arcus AB quadrante minoris, una cum radio circuli CE; invenire subtensam CB arcus compositi ex arcu AB & ejus complemento dimidio ad semicircularem.*

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat $DF = AB$, ducanturque

rec-

Tab. I.
Fig. 3.

Tab. II.
Fig. 32.

Tab. XII.
Fig. 117.

Tab. III.
Fig. 33.

Tab. III. rectæ EB, AD & BF. Quoniam $x = o$ (§. 315 Geom.), & ob parallelismum linearum AD & BF (§. 257 Geom.) $x = y$ (§. 233 Geom.); erit $o = y$ (§. 87 Arithm.). Est vero etiam, ob $CE = EB$ (§. 40 Geom.) $u = o$ (§. 184 Geom.) $= y$; consequenter $CF : CB = CB : CE$ (§. 267 Geom.). Sit jam $AB = a$, $CE = r$, $CB = x$; erit $CF = a + 2r$; consequenter

$$\frac{a + 2r : x = x : r}{ar + 2r^2 = x^2}$$

$$\sqrt{(ar + 2r^2)} = x$$

COROLLARIUM I.

321. Cum angulus CBD sit rectus (§. 317 Geom.); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 417 Geom.); consequenter BD subtensa dimidii complementi ad semicirculum arcus $AB = \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM II.

322. Quadratum ergo chordæ DB arcum quadrante minorem subtendentis æquatur rectangulo ex radio CE in differentiam chordæ diametro parallelæ ex puncto B ductæ AB a diametro CD.

COROLLARIUM III.

323. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ambæ simul semicirculum subtendunt, sunt inter se ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 320, 321), hoc est, ut $2r + a$ ad $2r - a$ (§. 181 Arithm.), hoc est, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concursus B eidem parallela ducta, ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA CLI.

Tab. II. Fig. 34. 324. Datis in quadrilatero circulo inscripto lateribus AE, EB, BC & AC, una cum diagonali EC; invenire diagonalem AB.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Sit $AE = a$, $EB = b$, $BC = c$, $AC = d$, $EC = f$, $AB = y$. Ducatur EF, ita ut sit $o = x$ (§. 208 Geom.). Quoniam præterea $ACE = ABE$ (§. 315 Geom.); erit $EC : AC = EB : BF$, hoc est, $f : d = b : BF$ (§. 267 Geom.). Reperitur ergo $BF = bd : f$. Quoniam porro $EAB = ECB$ (§. 315 Geom.), & $AEF = CEB$ (§. 88 Arithm.); erit $EC (f) : CB (c) = EA (a) : AF (ac : f)$ (§. 267 Geom.). Quare (§. 86 Arithm.)

$$\frac{(bd + ac) : f = y}{bd + ac = fy}$$

Theorema. In quadrilatero circulo inscripto AEB C rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB in AC & EA in BC.

PROBLEMA CLII.

325. Dato sinu anguli simpli, invenire sinus & cosinus angulorum multiplosum.

Sit angulus quicumque A, fiat $AB = BD = DF = FH = HL = LM = MP = PQ = QT = TV$; erit $A = ADB$ (§. 184 Geom.), $EBD = A + ADB$ (§. 239 Geom.) $= 2A$, per demonstr. Eodem modo ostenditur, esse $FDH = A + DFA = 3A$; $HFL = A + AHF = 4A$; $LHK = A + ALH = 5A$; $PLM = A + AML = 6A$ &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, IH, LK, MN &c. Quod si AB sumatur pro sinu toto; erit BC sinus, AC cosinus anguli simpli A; ED sinus, BE cosinus anguli dupli; FG sinus, DG cosinus anguli tripli, &c. (§. 2, 11 Trigon.).

Sit $AB = r$, $BC = b$, $AC = a$, erit, ob angulum A utriusque $\triangle BAC$

$$Sf \quad \&$$

& EAD communem, & rectos ad C & E æquales (§. 267 *Geom.*):

$$AB: BC = AD: DE$$

$$r: b = 2a: \frac{2ab}{r}$$

$$AB: AC = AD: AE$$

$$r: a = 2a: \frac{2a^2}{r}$$

$$\text{Ergo } BE = AE - AB = 2a^2: r - r =$$

$$(2a^2 - r^2): r. \text{ Est vero } r^2 = a^2 + b^2 (\text{§. 417}$$

$$\text{Geom.}). \text{ Ergo } BE = (2a^2 - a^2 - b^2): r =$$

$$(a^2 - b^2): r \text{ \& } AF = AE + EF = (3a^2 - b^2): r.$$

$$AB: BC = AF: FG (\text{§. 268 } \textit{Geom.})$$

$$r: b = \frac{3a^2 - b^2}{r}: \frac{3ab^2 - b^3}{r^2}$$

$$AB: AC = AF: AG$$

$$r: a = \frac{3a^2 - b^2}{r}: \frac{3a^3 - ab^2}{r^2}$$

$$\text{Ergo } DG = AG - AD = (3a^3 - ab^2): r^2 - 2a$$

$$= (3a^3 - ab^2 - 2ar^2): r^2 = (\text{substi}$$

$$\text{tuto valore ipsius } r^2 = a^2 + b^2),$$

$$(a^3 - 3ab^2): r^2; \text{ consequenter } AH =$$

$$AG + GH = (4a^3 - 4ab^2): r^2$$

$$AB: BC = AH: HI$$

$$r: b = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2}: \frac{4a^3b - 4ab^3}{r^3}$$

$$AB: AC = AH: AI$$

$$r: a = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2}: \frac{4a^4 - 4a^2b^2}{r^3}$$

$$\text{Quia } FA = (3a^2 - b^2): r = (3a^2 - b^2)r^2: r^3$$

$$= (3a^2 - b^2)(a^2 + b^2): r^3 = (3a^4 + 2a^2b^2 - b^4): r^3$$

$$\text{ideo erit } FI = AI - AF = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4): r^3.$$

Eodem prorsus modo reperitur

$$KL = (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5): r^4$$

$$\text{\& } HK = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4): r^4;$$

$$MN = (6a^5b - 20a^3b^3 + 6ab^5): r^5$$

$$\text{\& } LN = (a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6): r^5;$$

$$PO = (7a^6b - 35a^4b^3 + 21a^2b^5 - b^7): r^6$$

$$\text{\& } QR = (a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6): r^6$$

Si itaque radius seu sinus totus = r ,
erit sinus anguli

simplici b

dupli $2ba: r$

triplici $(3ba^2 - b^3): r^2$

quadruplici $(4ba^3 - 4b^3a): r^3$

quintuplici $(5ba^4 - 10b^3a^2 + b^5): r^4$

sextuplici $(6ba^5 - 20b^3a^3 + 6b^5a): r^5$

septuplici $(7ba^6 - 35b^3a^4 + 21b^5a^2 - b^7): r^6$

&c.

Hinc patet lex progressionis in infinitum. Componitur nimirum formula pro sinu anguli multipli ex termino secundo, quarto, sexto, octavo &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simplici b compositi ad eam dignitatem evedti, cujus exponens idem est cum exponente multipli, signis + & — alternantibus (§. 95).

Hinc formula generalis in casu indefinito emergit

$$\frac{m}{1 \cdot r^{m-1}} ba^{m-1} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^{m-1}} b^3 a^{m-3} \\ + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot r^{m-1}} b^5 a^{m-5} - \\ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \cdot m-6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot r^{m-1}} b^7 a^{m-7} \text{ \&c.}$$

Similiter si sinus totus = r , erit cosinus anguli

simplici a

dupli $(a^2 - b^2): r$

triplici $(a^3 - 3ab^2): r^2$

quadruplici $(a^4 - 6a^2b^2 + b^4): r^3$

quintuplici $(a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4): r^4$

sextuplici $(a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6): r^5$

septuplici $(a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6): r^6$

&c.

Unde denuo patet lex progressionis in infinitum. Nimirum formulæ componentur ex terminis primo, tertio, quinto, septimo, nono &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simplici b compositi ad eam

eam dignitatem evecti, cujus ex-
ponens est idem cum exponente multipli
anguli desiderati, signis + & — alter-
nantibus (§. 95). Erit ergo formula
generalis in casu indefinito

$$\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}} b^2 a^{m-2}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.r^{m-1}} b^4 a^{m-4}$$

$$- \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.r^{m-1}} b^6 a^{m-6} +$$

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7}{1.2.3.4.5.6.7.8.r^{m-1}} b^8 a^{m-8}$$

&c. Quoniam $b^2 = r^2 - a^2$ (§. 16
Trig.) & ipsius b^2 potentia sunt etiam
rationales; substituto hoc valore, sive
in formula generali, sive in specialibus,
prodit cosinus anguli multipli per so-
lum cosinum simpli & radium deter-
minatus. Ita reperietur cosinus anguli

dapli, $\frac{a^2 - b^2}{r} = \frac{a^2 - r^2 + a^2}{r} = \frac{2a^2}{r} - r$

triplici, $\frac{a^3 - 3ar^2 + 3a^3}{r^2} = \frac{4a^3}{r^2} - 3a$

quadrup. $\frac{a^4 - 6a^2r^2 + 6a^4 + r^4 - 2a^2r^2 + a^4}{r^3}$
 $= \frac{8a^4}{r^3} - \frac{8a^2}{r} + r$

quint. $\frac{a^5 - 10a^3r^2 + 10a^5 + 5ar^4 - 10a^3r^2 + 5a^4}{r^4}$
 $= \frac{16a^5}{r^4} - \frac{20a^3}{r^2} + 5a.$

Similiter ex sinuum formula exclu-
ditur cosinus, si valor ipsius $a =$
 $\sqrt{(r^2 - b^2)}$ substituitur: quamvis ea non
sit ab irrationalitate libera.

COROLLARIUM

326. Cum sinus sit chordæ dimidium
(§. 2 Trig.), si chorda arcus simpli di-
catur b , & chorda ejus complementi ad
quadrantem a , & diameter r ; per easdem for-

mulas chordæ arcuum multorum deter-
minantur. Quoniam vero data chorda datur
etiam arcus; per easdem formulas arcus per
datum numerum multiplicari potest.

PROBLEMA CLIII.

327. Data tangente arcus simpli, in-
venire tangentem arcus multipli.

Cum sit ut colinus $\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}} b^2 a^{m-2}$

+ &c. ad sin. $\frac{m}{r^{m-1}} b a^{m-1} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}} b^3 a^{m-3}$

&c. ita radius r ad tangentem (§. 26
Trigon.); erit tangens (assumptis ad ab-
breviandum calculum pro coefficienti-
bus cosinum A, B, C, D, E, pro coeffi-
cientibus sinuum P, Q, R, S, T, excluso
tamen in divisoribus r^{m-1}) =

$$\frac{Prba^{m-1} - Qrb^3a^{m-3} + Rb^5a^{m-5} - Srb^7a^{m-7}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6}}$$
 &c.

Sit tangens anguli simpli t , erit (§. cit.
Trigon.) $a : b = r : t$, consequenter $a =$
 $br : t$. Quodsi hic valor in locum ipsius a
substituatur, prodit formula tangentis

$$\frac{Pb^m r^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^m r^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^m r^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^m r^{m-6}}{t^{m-7}}$$
 &c.
$$\frac{b^m r^m}{t^m} - \frac{Ab^m r^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^m r^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^m r^{m-6}}{t^{m-6}}$$
 &c.

Quodsi ulterius hæc formula divi-
datur per b^m & multiplicetur per t^m ,
prodit tangens indefinita

$$\frac{Pr^m t - Qr^{m-2} t^3 + Rr^{m-4} t^5 - Sr^{m-6} t^7}{r^m - Ar^{m-2} t^2 + Br^{m-4} t^4 - Cr^{m-6} t^6}$$
 &c.

Substitutis tandem valoribus P, Q, R, S
& A, B, C, &c. tangentium formula erit

$$\left(\frac{m}{1} r^m t - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} r^{m-2} t^3 + \right.$$

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} r^{m-4} t^5 -$$

$$\left. \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7} r^{m-6} t^7 \right) \&c.$$

Sf 2 : (r^m)

$$: \left(r^m - \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} r^{m-2} t^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{m-4} t^4 \right. \\ \left. + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot m - 4 \cdot m - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{m-6} t^6 \text{ \&c.} \right)$$

Apparet adeo, si binomium ex radio & tangente $r + t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 95), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, sed per radium multiplicatis & utrobique signis + atque — alternantibus.

PROBLEMA CLIV.

328. *Data secante arcus simpli, invenire secantem multipli.*

Quoniam secans est tertia proportionalis ad cosinum & radium (§. 26 *Trigon.*), erit (§. 325) assumtis pro coefficientibus cosinus (excluso tamen in divisoribus r^{m-1}) A, B, C, D &c. secans indeterminata.

$$\frac{r^{m+1}}{a^m - Ab^2 a^{m-2} + Bb^4 a^{m-4} - Cb^6 a^{m-6} \text{ \&c.}}$$

Est vero $r : b = f : t$ (§. cit. *Trig.*): unde eruitur $r = b f : t$. Hoc valore in formula secantis substituto, mutatur ea in sequentem:

$$\frac{rb^m f^m}{a^m t^m - Ab^2 a^{m-2} t^m + Bb^4 a^{m-4} t^m \text{ \&c.}}$$

Porro $a : b = r : t$ (§. cit. *Trigon.*), adeoque $a = br : t$. Substituto itaque valore ipsius a in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m f^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2} t^2 + Bb^m r^{m-4} t^4 \text{ \&c.}}$$

Si tandem hæc formula dividatur per rb^m , determinabitur valor secantis indefinitæ ex tangente & secante anguli simpli

$$\frac{f^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3} t^2 + Br^{m-5} t^4 - Cr^{m-7} t^6 \text{ \&c.}}$$

CAPUT V.

De Extractione Radicum ex Aequationibus altioribus.

PROBLEMA CLV.

329. **E**xplicare naturam æquationum.

1. Assumantur tot valores quantitatis incognitæ, quot libuerit; formanturque inde simplices æquationes, sed nihilo æquales.

2. Aequationes simplices in se invicem ducantur; ita prodibunt æquationes altiores, quarum consideratio

earum proprietates manifestabit.

Sit $x = 2$ $x = a$

$x = 3$ $x = b$

$x = 4$ $x = c$

erit $x - 2 = 0$. I $x - a = 0$

$x + 3 = 0$. II $x + b = 0$

$x - 4 = 0$. III $x - c = 0$

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II, & factum denuo per æquationem III.

$x - 2$

$$\begin{array}{r}
 x - 2 = 0 \quad x - a = 0 \\
 x + 3 = 0 \quad x + b = 0 \\
 \hline
 + 3x - 6 \quad x^2 + bx - ab = 0 \\
 x^2 - 2x \quad - ax \\
 \hline
 x^2 + x - 6 = 0 \quad x - c = 0 \\
 x - 4 = 0 \\
 \hline
 x^3 - cx^2 - bcx + abc = 0 \\
 - 4x^2 - 4x + 24 + bx^2 + acx \\
 x^3 + x^2 - 6x - ax^2 - abx \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0
 \end{array}$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad superiores gradus evahi possunt) sequentia observabit.

- I. *Quantitatem cognitam secundi termini esse summam radicum, sed signo contrario affectarum; quantitatem cognitam tertii esse summam productorum ex singulis binis; quantitatem cognitam quarti esse summam productorum ex singulis ternis &c terminum denique ultimum esse factum omnium radicum.* Ex gr. in æquatione quadratica termini secundi quantitas cognita $1 = 3 - 2$. Radices vero sunt $+ 2$ & $- 3$. Similiter in cubica quantitas cognita secundi termini $- 3 = + 3 - 4 - 2$. Radices sunt $- 3, + 4$ & $+ 2$. Quantitas cognita termini tertii in æquatione cubica $- 10 = - 6 + 8 - 12$. Radices sunt, $+ 2, - 3$ & $+ 4$. In eadem terminus ultimus $+ 24 = 2.3.4$.
2. *Quantilibet æquationem tot habere radices, quot quantitas incognita primi termini dimensiones, seu exponens unitates.* Ex. gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimensiones: radices duæ sunt $+ 2$ & $- 3$. In æquatione cubica x^3 tres habet dimensiones, radices tres sunt $+ 2, - 3$ & $+ 4$.

3. *In qualibet æquatione tot esse radices veras, quot sunt signorum permutationes; tot esse falsas, quot eorundem successiones.* Ex. gr. in æquatione quadratica $+ x^2 + x - 6 = 0$, una est signorum successio $++$, una permutatio $+-$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+ 2$, alteram falsam $- 3$. In æquatione cubica $+ x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ sunt signorum permutationes $+-$ & $-+$; una successio $---$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+ 2$ & $+ 4$, unam falsam $- 3$.

SCHOLIUM I.

330. Theoremata duo priora ex ipsa æquationum genesi haud difficulter demonstrantur: tertium vero, quod HARRIOTUS per inductionem invenit, nemo hactenus demonstrare potuit.

SCHOLIUM II.

331. Ceterum non est, quod miremur, unam æquationem multas habere posse radices. Unius enim ejusdemque Problematis varii esse possunt casus & in singulis casibus ad eandem pervenitur æquationem: quemadmodum exempla in Quadraticis supra habuimus (§. 269, 262). Quoniam tamen casus quidam interdum impossibiles sunt; radices quoque impossibiles esse debent.

COROLLARIUM.

332. Radices veræ mutantur in falsas & falsæ in veras, si signa terminorum alternorum mutantur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falsam; sed si scribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ sunt signorum successiones $++$ & $---$, una vero permutatio $+-$; adeoque æquatio duas radices falsas, veram unam habet.

Sf 3

PRO-

PROBLEMA CLVI.

333. Radicem æquationis augere vel minuire quantitate data.

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda est æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

$$\text{Fiat } x + 3 = y$$

$$\text{erit } x = y - 3$$

$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$$

$$-6x^2 = -6y^2 + 36y - 54$$

$$+13x = +13y - 39$$

$$-10 = -10$$

$$0 = y^3 - 15y^2 + 76y - 130$$

En æquationem novam, in qua $y = x + 3$!

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

$$\text{Fiat } y - 2 = x$$

$$\text{erit } y = x + 2$$

$$y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$-15y^2 = -15x^2 - 60x - 60$$

$$+76y = +76x + 152$$

$$-130 = -130$$

$$0 = x^3 - 9x^2 + 28x - 30$$

En æquationem novam, in qua $x = y - 2$!

COROLLARIUM I.

334. Quod si radicem augeas quantitate radice falsa maxima majore, radices falsæ evadunt veræ; & contra si radicem minuas quantitate radice vera maxima majore, veræ evadunt falsæ. Si enim $y = -4$, & fiat $y + 5 = x$; erit $x = 5 - 4 = 1$. Contra si $y = 3$ & fiat $y - 4 = x$; erit $3 - 4 = -1 = x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate

quadam data, facile accidit ut radices veræ in falsas mutantur.

COROLLARIUM II.

335. Dum radices veræ augmentur, falsæ minuuntur. Nam si $y = 3$ & $= -5$, fiat que $y + 4 = x$; erit $x = 3 + 4 = 7$ & $= 4 - 5 = -1$. Similiter si fiat $y - 2 = x$; erit $x = 3 - 2 = 1$ & $= -5 - 2 = -7$.

PROBLEMA CLVII.

336. Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.

Sit ex. gr. radix æquationis $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ multiplicanda per a .

$$\text{Fiat } ax = y$$

$$\text{erit } x = y : a$$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$x^3 = y^3 : a^3$$

$$+ px^2 = + py^2 : a^2$$

$$+ qx = + qy : a$$

$$- r = - r$$

$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0$$

$$y^3 + apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = ax$!

COROLLARIUM I.

337. Hinc manifestum est, æquationem datam tantum multiplicari debere per progressionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas per quam radix multiplicari jubetur. Sit ex. gr. in æquatione $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum.

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

$$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$$

En

En æquationem, in qua $y = 2x!$
 Similiter sit radix æquationis $x^3 - 3x + 1 = 0$ multiplicanda per 3.

$$\begin{array}{r} x^3 * - 3x + 1 = 0 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ y^3 * - 27y + 27 = 0 \end{array}$$

En æquationem, in qua $y = 3x!$

SCHOLIUM.

338. Stellula repleti solent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.

PROBLEMA CLVIII.

339. Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.

Sit æquationis $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radix dividenda per a .

$$\begin{array}{l} \text{Fiat} \quad x : a = y \\ \text{erit} \quad x = ay \\ \quad \quad x^2 = a^2 y^2 \\ \quad \quad x^3 = a^3 y^3 \\ \quad \quad - px^2 = - a^2 p y^2 \\ \quad \quad + qx = + a q y \\ \quad \quad - r = - r \\ \hline a^3 y^3 - a^2 p y^2 + a q y - r = 0 \\ y^3 - \frac{p y^2}{a} + \frac{q y}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0 \end{array}$$

En æquationem novam, in qua $y = x : a!$

COROLLARIUM.

340. Apparet adeo, non alia re opus esse, quam ut æquatio data dividatur per progressionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit ex.gr. radix æquationis $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$\begin{array}{r} x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \end{array}$$

$$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{2}x$.

Similiter si radix æquationis $x^3 * - 36x - 54 = 0$ dividatur per 3; erit

$$\begin{array}{r} x^3 * - 36x - 54 = 0 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \end{array}$$

$$y^3 * - 4y - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{3}x$.

PROBLEMA CLIX.

341. Complexe æquationem, in qua termini quidam deficiunt.

Radix æquationis augenda est quantitate data.

Sit e.gr. æquatio $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

$$\text{Fiat} \quad x + 1 = y$$

$$\text{erit} \quad x = y - 1$$

$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ - 23x = \quad \quad - 23y + 23 \\ - 70 = \quad \quad \quad - 70 \\ \hline y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0. \end{array}$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

SCHOLIUM.

342. Idem Problema solvi potest radicem æquationis quantitate data minuendo: sed cum hac ratione metuendum sit, ne radices verae in falsas mutantur (§. 334) consultius est, ut radicem æquationis augeamus.

PROBLEMA CLX.

343. Secundum terminum ex æquatione tollere.

Sit in æquatione $x^3 + px^2 - qx + r = 0$ tollendus secundus terminus px^2 .

Fiat

$$\text{Fiat } x + t = y$$

$$\text{erit } x = y - t$$

$$x^2 = y^2 - 2ty + t^2$$

$$x^3 = y^3 - 3ty^2 + 3t^2y - t^3$$

$$+ px^2 = + py^2 - 2pty + pt^2$$

$$- qx = - qy + qt$$

$$+ r = + r$$

Ut secundus terminus tollatur, si fuerit $-px^2$ fieri debet,

$$- 3t - p = 0$$

$$\text{Unde erit } - 3t = p$$

$$t = -\frac{1}{3}p$$

Quodsi fuerit $+px^2$, erit

$$- 3t + p = 0$$

$$- 3t = - p$$

$$t = +\frac{1}{3}p$$

Et in genere, si fuerit $x^m + px^{m-1}$ &c. & fiat $x = y - t$, erit

$$x^m = y^m - mty^{m-1} \text{ \&c.}$$

$$+ px^{m-1} = + py^{m-1} \text{ \&c.}$$

consequenter in casu primo

$$- mt - p = 0$$

$$- mt = p$$

$$t = - p : m$$

in casu autem altero

$$- mt + p = 0$$

$$- mt = - p$$

$$t = p : m$$

Unde patet

Regula: Si terminus secundus sit positivus, augeatur; si privativus, minuatur radix quantitate cognita secun-

di termini per exponentem primi divisa.

Sit ex. gr. ex æquatione $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ tollendus secundus terminus.

$$\text{Fiat } x - 8 : 3 = y$$

$$\text{erit } x = y + 8 : 3$$

$$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$$

$$x = y^3 + 8y^2 + 64y : 3 + 512 : 27$$

$$- 8x^2 = - 8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9$$

$$- x = - y - 8 : 3$$

$$8 = + 8$$

$$y^3 * - 67y : 3 - 880 : 27 = 0$$

In hac æquatione $y = x - 8 : 3$.

COROLLARIUM I.

344. Quodsi ex æquatione quadratica affecta secundus terminus aufertur, ad puram reducitur, sicque ea alio adhuc modo resolvi potest. Si ex. gr. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

$$\text{Fiat } x - 4 = y$$

$$\text{erit } x = y + 4$$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$

$$- 8x = - 8y - 32$$

$$+ 15 = + 15$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

Consequenter $x = 1 + 4 = 5$.

COROLLARIUM II.

345. Secundo termino sublato, æquationes cubicæ ad tres casus reducuntur. Nimirum

$$x^3 * - px - r = 0$$

$$x^3 * + px - r = 0$$

$$x^3 * - px + r = 0$$

PRO-

PROBLEMA CLXI.

346. Ex æquatione terminum tertium tollere.

Si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$

Fiat $x = y - m$

erit $x^2 = y^2 - 2my + m^2$

$$\begin{array}{r} x^3 = y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3 \\ - 4x^2 = - 4y^2 + 8my - 4m^2 \\ + 4x = + 4y - 4m \\ - 6 = - 6 \end{array}$$

Quoniam æquatio sinistra dextræ æqualis; si tertius terminus deficere debet, talis assumendus est valor ipfius m , ut fit

$$\begin{array}{r} 3m^2 + 8m + 4 = 0 \\ \text{erit ergo } m^2 + \frac{8}{3}m = -\frac{4}{3} \end{array}$$

$$\frac{m^2 + \frac{8}{3}m + \frac{16}{9}}{m + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}$$

$$m + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

Fiat ergo $x = y + \frac{2}{3}$

erit $x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

$$\begin{array}{r} x^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} \\ - 4x^2 = - 4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9} \\ + 4x = + 4y + \frac{8}{3} \\ - 6 = - 6 \end{array}$$

$$y^3 - 2y^2 - 13y + 27 = 0.$$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \frac{2}{3}$.

SCHOLIION.

347. Eodem artificio in aliis quoque casibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c. hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

PROBLEMA CLXII.

348. Ex æquatione terminum penultimum tollere, si secundus deficiat.

Pro quantitate incognita substituendus est terminus ultimus per y divisus.

Sit ex. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus penultimus $- 3x$. Operatio talis erit

$$x^3 = \frac{1}{y^3}$$

$$- 3x = - \frac{3}{y}$$

$$+ 1 = + 1$$

$$1 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$$

PROBLEMA CLXIII.

349. Æquationem datam a fractionibus liberare.

Radix multiplicetur per factum omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Exempla.

$$y^3 * - \frac{67}{3}y - \frac{880}{27} = 0$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{9}{9} \quad \frac{27}{27}$$

$$x^3 * - 201x - 880 = 0$$

In hac æquatione $x = 3y$.

$$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 64 = 0$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{12}{12} \quad \frac{144}{144} \quad \frac{1728}{1728}$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA CLXIV.

350. Æquationem datam ab irrationalitate liberare.

T t

Inter-

Interdum id fieri potest per multiplicationem: interdum per divisionem radicis. Neutra tamen regula universalis est.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipsam; si vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis sub signo radicali tollendæ positæ, aut in genere per radicem ejusdem gradus, quæ tolli debet, sed ex quantitate sub signo radicali tollendæ posita ad gradum proxime inferiorem elevata. Interdum circumstantiæ singulares aliud suadent.

Exempla.

$$\begin{array}{r} x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 \\ \hline 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4 \end{array}$$

$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

In hac æquatione $y = a\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{r} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - aab = 0 \\ \hline 1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4 \end{array}$$

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$

Divisio exemplis rectius, quam regulis docetur.

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2\sqrt{3} * - 6\sqrt{3} = 0 \\ \hline 1. \quad \sqrt{3} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} \end{array}$$

$$y^3 - 3y^2 * - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0 \\ \hline 1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2 \end{array}$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{2}$.

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2\sqrt{2} + 3\frac{1}{2}x - 3\sqrt{2} = 0 \\ \hline 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2} \end{array}$$

$$y^3 - y^2 + \frac{7}{4}y - \frac{3}{2} = 0$$

Quodsi ulterius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 + \frac{7}{4}y - \frac{3}{2} = 0 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \end{array}$$

$$z^3 - 2z^2 + 7z - 12 = 0$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x\sqrt{2}$.

PROBLEMA CLXV.

351. *Invenire utrum æquatio data habeat radices racionales, nec ne; & si quas habet, quenam ea sint.*

Cum æquationis terminus ultimus sit factum omnium radicum (§. 329), resolvatur is in suos factores, & hi successive substituuntur pro x in æquatione data: in quibus enim casibus numeri positivi & negativi se mutuo destruunt, in iis factor substitutus est valor ipsius x .

Sit ex. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$\begin{array}{r} x^2 = 4 \\ -6x = -12 \\ +8 = +8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 2 radix vera æquationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$\begin{array}{r} x^2 = 16 \\ -6x = -24 \\ +8 = +8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 4 radix altera vera æquationis.

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 sunt 1, 3, 5.

Substituatur 1 pro x ; erit

$$\begin{array}{r} x^3 = 1 \\ -3x^2 = -3 \\ -13x = -13 \\ +15 = +15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 1 una ex radicibus veris.
Substituatur porro 3 pro x ; erit

$$\begin{array}{r} x^3 = 27 \\ - 3x^2 = - 27 \\ - 13x = - 39 \\ + 15 = + 15 \\ \hline 0 = - 24 \end{array}$$

Est ergo 3 nulla ex radicibus veris.
Substituatur ergo -3 pro x .

$$\begin{array}{r} x^3 = - 27 \\ - 3x^2 = - 27 \\ - 13x = + 39 \\ + 15 = + 15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est itaque -3 radix falsa æquationis.
Substituatur denique 5 pro x ; erit

$$\begin{array}{r} x^3 = 125 \\ - 3x^2 = - 75 \\ - 13x = - 65 \\ + 15 = + 15 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Est ergo 5 radicem verarum altera.

Aliter.

Cum æquationes compositæ ex multiplicatione simplicium oriuntur (§. 329); si radix aliqua fuerit rationalis, æquatio per simplicem ex aliquo factore termini ultimi & x constatam divisibilis fit necesse est. Quare divisio hæc tentanda.

Sit data æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Factores termini ultimi sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde æquationes simplices constantur $x-1=0$, $x+1=0$; $x-2=0$, $x+2=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-4=0$, $x+4=0$; $x-6=0$, $x+6=0$; $x-8=0$, $x+8=0$; $x-12=0$, $x+12=0$. Divisio frustra tentatur per $x-1$ & $x+1$. Quare 1 nec radix falsa est, nec verarum una: succedit autem divisio per $x-2$.

$$\begin{array}{r} x-2) \ x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \ (x^2 - x - 12) \\ \underline{x^3 - 2x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - x^2 - 10x \\ - x^2 + 2x \\ \hline - 12x + 24 \\ - 12x + 24 \\ \hline + 0 \end{array}$$

Est adeo 2 una ex radicibus veris, cumque terminus ultimus sit 12 in quotiente, 8 & 12 non sunt in numero radicum. Divisio æquationis quadraticæ $x^2 - x - 12 = 0$ per $x-3$ frustra tentatur; sed per $x+3$ succedit.

$$\begin{array}{r} x+3) \ x^2 - x - 12 \ (x-4) \\ \underline{x^2 + 3x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 4x - 12 \\ - 4x - 12 \\ \hline - 0 \end{array}$$

Est ergo 3 radix falsa æquationis & ob $x-4=0$, 4 verarum altera.

Similiter fit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$: erunt factores termini ultimi 1, 3, 5; consequenter divisores tentandi $x-1=0$, $x+1=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-5=0$, $x+5=0$. Tentetur divisio per $x-1$.

$$\begin{array}{r} x-1) \ x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \ (x^2 - 2x - 15) \\ \underline{x^3 - x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 2x^2 - 13x \\ - 2x^2 + 2x \\ \hline - 15x + 15 \\ - 15x + 15 \\ \hline + 0 \end{array}$$

Est ergo 1 radicem verarum una. Divisio in æquatione quadratica per $x-3$ non succedit: succedit tamen per $x+3$.

$$\begin{array}{r} T t \ 2 \\ \end{array}$$

SCHOLIUM.

355. Eadem æquatio $y^2 - 13y + 13 = 0$ habet radicem falsam -4 . Si enim hunc valorem pro y substituas, prodibit $-64 + 52 + 12 = 0$. Ergo $x = y + 1 = -3$. Reperitur adeo -3 radix falsa æquationis propositæ $x^2 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$; prorsus ut supra (§. 351).

PROBLEMA CLXVII.

356. Invenire limites æquationis, hoc est, duas quantitates, intra quas radix continetur.

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$px < q$ (§. 84 Arithm.).

$x < q : p$ (§. 182 Arithm.).

Similiter ob $x^2 + px = q$

$q > x^2$ (§. 84 Arithm.).

$\sqrt{q} > x$ (§. 246, 180 Arith.).

$x\sqrt{q} > x^2$ (§. 180 Arithm.).

$px \text{ } px \text{ add.}$

$x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ (§. 90 Arithm.)

adeoque $(\sqrt{q} + p)x > q$ (§. 89 Arith.).

$x > q : (\sqrt{q} + p)$ (§. 182 Arithm.).

Sunt adeo limites æquationis $q : p$ & $q : (\sqrt{q} + p)$. Nempe radix minor esse debet quam $q : p$ & major quam $q : (\sqrt{q} + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p$

Similiter quia $x^2 = px - q$, adeoque differentia inter px & q positiva, erit

$px > q$

$x > q : p$

Sunt adeo limites æquationis p & $q : p$. Nempe radix minor est quam p & major quam $q : p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

$x\sqrt{q} > q$

Ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$ hoc est, $px + q < px + x\sqrt{q}$ adeoque $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$x < p + \sqrt{q}$

Similiter $x^2 > px$

$x > p$

$px > p^2$

$px + q > p^2 + q$

$x^2 > p^2 + q$

$x > \sqrt{p^2 + q}$

Sunt adeo limites $p + \sqrt{q}$ & $\sqrt{p^2 + q}$. Nimirum radix minor esse debet quam $p + \sqrt{q}$; sed major quam $\sqrt{p^2 + q}$.

Sit $x^3 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = qx$

Ergo $qx > r$

$x > r : q$

Similiter $x^3 < qx$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

Sunt adeo limites $r : q$ & \sqrt{q} .

Sit $x^3 + qx - r = 0$

Tt 3

erit

$$\text{erit } x^3 + qx = r$$

$$qx < r$$

$$x < r : q$$

$$\text{Similiter } r > x^3$$

$$r^{1:3} > x$$

$$r^{2:3} > x^2$$

$$xr^{2:3} > x^3$$

$$\frac{xr^{2:3} + qx > x^3 + qx}{> r}$$

$$x > r : (r^{2:3} + q)$$

Sunt adeo limites $r : q$, & $r : (r^{2:3} + q)$,

$$\text{Sit } x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

$$\text{erit } x^3 - px^2 = r - qx$$

Quodsi ergo $x > p$, erit quoque $r > qx$, consequenter $x < r : q$. Sed si $p > x$; erit $qx > r$, consequenter $x > r : q$.

In utroque igitur casu limites sunt p & $r : q$.

$$\text{Sit } x^3 - px^2 - qx + r = 0$$

$$\text{erit } x^3 + r = px^2 + qx$$

$$px^2 + qx > r$$

$$x^2 + qx : p > r : p$$

$$x^2 + qx : p + q^2 : 4p^2 > r : p + q^2 : 4p^2$$

$$x^2 + q : 2p > \sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)}$$

$$x > \sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)} - q : 2p$$

$$\text{Similiter } px^2 + qx > x^3$$

$$px + q > x^2$$

$$q > x^2 - px$$

$$q + \frac{1}{4}p^2 > x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$$

$$\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} > x - \frac{1}{2}p$$

$$x < \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p$$

Sunt adeo limites $\sqrt{(r : p + q^2 : 4p^2)}$

$$- q : 2p \text{ \& } \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{2}p.$$

$$\text{Sit } x^4 - qx^2 - rx - s = 0$$

$$\text{erit } x^4 - qx^2 = rx + s$$

$$\text{Ergo } x^4 > qx^2$$

$$x^2 > q$$

$$x > \sqrt{q}$$

$$\text{Similiter } x^4 - rx = qx^2 + s$$

$$\text{ergo } x^3 > r$$

$$x > r^{1:3}$$

$$\text{Tandem } x^4 - s = qx^2 + rx$$

$$\text{Ergo } x^4 > s$$

$$x > s^{1:4}$$

$$x^3 > s^{3:4}$$

$$x^3 s^{1:4} > s$$

$$\text{Similiter } x > q^{1:2} \quad x > r^{1:3}$$

$$\frac{xq^{1:2} > q}{x^3 q^{1:2} > qx^2} \quad \frac{x^2 > r^{2:3}}{x^2 r^{1:3} > r}$$

$$\frac{x^3 r^{1:3} > rx}{x^3 s^{1:4} > s}$$

$$\text{Ergo ob } x^4 = qx^2 + rx + s$$

$$x^4 < x^3 q^{1:2} + x^3 r^{1:3} + x^3 s^{1:4}$$

$$x < q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$$

Sunt adeo limites \sqrt{q} vel $r^{1:3}$ vel $s^{1:4}$, & $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

SCHOLIUM.

357. In aequatione $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ factores termini ultimi sunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. Limites reperiuntur $\sqrt{(\frac{24}{3} + \frac{25}{9})} - \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{97}{9}} - \frac{5}{3} = \frac{98 - 50}{30} = \frac{48}{30} = 1\frac{2}{5}$ fere, & $\sqrt{(10 + \frac{9}{4})} + \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \frac{2}{3} = \frac{7}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{2} = 5$. Maxima igitur radicum non potest esse minor quam $1\frac{2}{5}$ debet tamen esse minor quam 5. Unde apparet divisionem tentandam esse per $x - 2$.
Quo

Quo facto reperitur $x = 2$ & æquatio reducitur ad quadraticam $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351). Unde radix vera altera $= \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$, & falsa $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$ (§. 143).

PROBLEMA CLXVIII.

358. Ex æquatione cubica radicem extrahere.

Æquationes cubicæ, sublato secundo termino, ad hos tres casus reducuntur (§. 345).

$$x^3 = +px + q$$

$$x^3 = -px + q$$

$$x^3 = +px - q$$

Fiat $x = y + z$

$$\text{erit } x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$$

$$px = py + pz$$

Quamobrem in casu primo

$$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q$$

$$\text{Fiat } 3y^2z + 3z^2y = +py + pz$$

$$\text{erit } 3yz = p \quad (y+z)$$

$$z = p : 3y$$

Erit porro $y^3 + z^3 = q$

$$\text{hoc est } y^3 + p^3 : 27y^3 = q^3$$

$$y^6 + \frac{1}{27}p^3 = qy^3$$

$$\frac{y^6 - qy^3}{\frac{1}{4}q^2} = -\frac{\frac{1}{27}p^3}{\frac{1}{4}q^2}$$

$$y^6 - qy^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$$

$$\left. \begin{matrix} y^3 - \frac{1}{2}q \\ \frac{1}{2}q - y^3 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$$

$$y^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Est nempe $y = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$
& $z = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$.

Ergo $y + z = x =$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

Eodem modo reperitur radix in casu altero $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$.

Denique in casu tertio $x =$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

Ex. gr. Sit $x^3 = 6x + 40$: erit $p = 6, q = 40$, adeoque $\frac{1}{2}q = 20, \frac{1}{4}q^2 = 400, \frac{1}{27}p^3 = 8$, consequenter $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 392$ & $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)} = \sqrt{392} = \sqrt{2} \cdot 196 = 14\sqrt{2}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)} = 20 \pm 14\sqrt{2}$, adeoque $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = 2 \pm \sqrt{2}$. Quare per regulam primam $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Sit $x^3 = -3x + 36$. Quia $p = 3, q = 36$, adeoque $\frac{1}{2}q = 18, \frac{1}{4}q^2 = 324, \frac{1}{27}p^3 = 1$, consequenter $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 325 = \frac{13 \cdot 25}{4}$ & $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)} = 10\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{40}{4}\sqrt{\frac{13}{4}}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)} = 18 \pm \frac{40}{4}\sqrt{\frac{13}{4}}$, adeoque $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{3\frac{1}{4}}$. Quare per regulam secundam $x = \frac{3}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Sit $x^3 = 6x - 40$. Quoniam $p = 6, q = 40$, eodem modo, quo in casu primo, reperitur $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = -2 \pm \sqrt{2}$, adeoque $x = -2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = -4$.

SCHOLIUM.

359. Equidem ex $20 \pm \sqrt{392}$ radix cubica extrahitur per regulas communes (§. 282 Arithm.): ut tamen appareat quomodo radix inveniri possit, si regulæ communes

commode applicari nequeant, methodum generalem apponere libet, qua & in aliis casibus similibus utendum. Ceterum formulas illas extrahendi radicem ex æquatione cubica (§. 358) CARDANI regulas vocat CARTESIUS (a), quia eas primus publicavit: ipse enim CARDANUS inventionis laudem Scipioni FERREO tribuit.

PROBLEMA CLXIX.

360. Extrahere radicem desideratam ex quantitate irrationali composita.

Sit ex binomio $3 + \sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam esse $x + \sqrt{y}$, erit $x^2 + 2x\sqrt{y} + y = 3 + \sqrt{8}$.

$$\begin{array}{r} \text{Fiat } x^2 + y = 3 \qquad 2x\sqrt{y} = \sqrt{8} \\ \text{erit } x^4 + 2x^2y + y^2 = 9 \qquad 4x^2y = 8 \\ \qquad \qquad \qquad 4x^2y = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^2y + y^2 = 1 \\ \hline \text{Ext. Rad.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - y = 1 \\ \hline x^2 = y + 1 \end{array}$$

Est vero etiam, ob $x^2 + y = 3$, $x^2 = 3 - y$

$$\text{Quare } 3 - y = y + 1$$

$$3 = 2y + 1$$

$$2 = 2y$$

$$1 = y$$

$$\text{Ergo } x^2 = y + 1 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Est ergo $x + \sqrt{y} = \sqrt{(3 + \sqrt{8})} = 1 + \sqrt{2}$.

Sit similiter in Problemate præcedente ex $20 + \sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem esse $x + \sqrt{y}$, erit ejus cubus

(a) Geom. Lib. II. p. m. 93, & 94.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + \sqrt{y}^3 = 20 + \sqrt{392} \\ \text{Fiat } 3x^2\sqrt{y} + \sqrt{y}^3 = \sqrt{392} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{erit } 9x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 392 \\ \text{Porro } x^3 + 3xy = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 = 400 \\ 9x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 392 \text{ subtr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = 8 \\ \hline \text{Ext. Rad.} \end{array}$$

$$x^2 - y = 2$$

$$x^2 - 2 = y$$

Substituto valore ipsius y in æquatione :

$$\begin{array}{r} x^3 + 3xy = 20 \\ \text{erit } x^3 + 3x^3 - 6x = 20 \\ \text{hoc est } 4x^3 - 6x = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 * - \frac{6}{4}x = 5 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad (\S. 337). \end{array}$$

$$z^3 * - 6z = 40$$

Si pro z substituatur 4; erit $64 - 24 = 40$. Est ergo 4 radix hujus æquationis (§. 351); consequenter $x = z: 2 = 2$. Quare cum sit

$$x^2 - 2 = y$$

$$\text{erit } 4 - 2 = y$$

$$2 = y$$

Est ergo radix cubica ex $20 + \sqrt{392}$ extracta $2 + \sqrt{2}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

PROBLEMA CLXX.

361. Æquationem biquadraticam, in qua secundus terminus deficit, reducere ad cubicam.

Sit æquatio biquadratica $x^4 + qx^2 + rx + f = 0$, ubi retinetur in omnibus terminis signum +, ut omnes casus repræ-

represententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 329); assumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in se invicem ductæ generabunt

$$\begin{aligned} x^4 + zx^2 + yvx + vx = 0 \\ + vx^2 - yzx \\ - y^2x^2 \end{aligned}$$

Quoniam hæc æquatio eadem supponitur cum proposita; erit

$$\begin{array}{r} z + v - y^2 = q \quad yv - yz = r \quad vz = f \\ q + y^2 = z + v \quad v - z = r : y \\ q + y^2 - v = z \quad v - q - y^2 + v = r : y \\ \hline 2v = q + y^2 + r : y \\ v = (q + y^2 + r : y) : 2 \end{array}$$

Substituatur valor ipsius v in æquatione $q + y^2 - v = z$, erit

$$\begin{aligned} q + y^2 - (q + y^2 + r : y) : 2 = z \\ \text{hoc est } z = (2q + 2y^2 - q - y^2 - r : y) : 2 \\ = (q + y^2 - r : y) : 2. \end{aligned}$$

$$\text{Ergo } vz = \frac{(q + y^2 + r : y)}{2} \cdot \frac{(q + y^2 - r : y)}{2}$$

$$= \frac{q^2 + 2qy^2 + y^4 - r^2 : y^2}{4} = f$$

$$\begin{aligned} \frac{q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2}{y^6 + 2qy^4 + q^2y^2 - r^2} = 4fy^2 \\ \frac{\quad}{\quad} = 4fy^2 \end{aligned}$$

Fiat $y^2 = t$, erit

$$\begin{aligned} t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0. \\ - 4ft \end{aligned}$$

PROBLEMA CLXXI.

362. Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.

I. Si æquatio fuerit pura, ex. gr. *Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.*

$x^4 = a^2bc$: extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2 = a\sqrt{bc}$; & hinc denuo educatur radix quadrata : reperietur $x = \sqrt{a\sqrt{bc}}$

Ex. gr. Sit $x^4 = 32$; erit $x^2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, adeoque $x = 2\sqrt{2}$.

II. Si æquatio fuerit affecta,

1. Tollatur secundus terminus, si adfuerit (§. 343).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 361).
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 358).
4. Hac data, ex æquationibus quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propositæ erui possunt.

Ex. gr. Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$; erit $q = -86$, $r = 600$, $f = -851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam ea reducenda, sit $t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$;

si in ea substituuntur valores quantitatum q, r, f , prodibit

$$\begin{aligned} t^3 - 172t^2 + 10800t - 360000 = 0 \\ \text{Hæc æquatio cum sit per } t - 100 \text{ divisibilis (§. 351); erit } t = 100, \text{ adeoque in Problemate precedente } y^2 = 100 \text{ \& hinc } y = 10. \end{aligned}$$

Hoc valore substituto in æquatione $\frac{q + y^2 - r : y}{2} = z$; reperitur $z = \frac{-86 + 100 - 600 : 10}{2} = -\frac{46}{2} = -23$.

Eodem valore ipsius y substituto in æquatione $v = \frac{(q + y^2 + r : y)}{2}$; invenitur $v = \frac{-86 + 100 + 600 : 10}{2} = \frac{74}{2}$

$= 37$. Tandem valores quantitatum y, z & v

& v substituendi sunt in æquationibus quadraticis $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$ & habebimus:

$$I. x^3 + 10x - 23 = 0.$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 10x = 23 \\ \underline{ 25 } \\ 25 \end{array}$$

$$x^2 + 10x + 25 = 48$$

$$x + 5 = \pm \sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

$$x = \pm 4\sqrt{3} - 5$$

$$II. x^2 - 10x^2 + 37 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 10x^2 = -37 \\ \underline{ 25 } \\ 25 \end{array}$$

$$x^2 - 10x + 25 = -12$$

$$\begin{array}{l} x - 5 = \} \\ 5 - x = \} \end{array} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$$

$$x = 5 \pm 2\sqrt{-3}$$

Sunt ergo radices æquationis propositæ $4\sqrt{3} - 5, -4\sqrt{3} - 5, 5 + 2\sqrt{-3}$ & $5 - 2\sqrt{-3}$

PROBLEMA CLXXII.

363. *Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.*

Quamvis æquationum quadraticarum radices surdæ extrahi possint (§. 143), nec difficile sit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 273 *Arithm.*): quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, universalis est, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, consultum ducimus.

Sit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Quoniam $x < 5 + \sqrt{31}$ & $> \sqrt{56}$, sive $x < 10$ & > 7 (§. 354): ponamus radi-

cem esse $8 + y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus assumtus 8 radicem vel excedit, vel ab ea deficit: erit

$$x^2 = 64 + 16y + y^2$$

$$-5x = -40 - 5y$$

$$-31 = -31$$

$$\underline{ 0}$$

Quoniam fractionum potentia continuo decrefcunt, & radix tantum desideratur prope vera, y^2 abjiciatur: quo factò, erit

$$-7 + 11y = 0$$

$$y = \frac{7}{11} = \frac{6}{10} \text{ fere, } = 0.6$$

$$\text{Ergo } x = 8 + 0.6 = 8.6$$

Ponamus $x = 8.6 + y$: erit

$$x^2 = \frac{7396}{100} + \frac{172}{10}y + y^2$$

$$-5x = -\frac{430}{10} - 5y$$

$$-31 = -31$$

$$\frac{7396}{100} - \frac{430}{10} - 31 + \frac{172}{10}y - 5y = 0$$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta, (quod in gratiam tyronum semel hic exhibere placuit)

$$7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0$$

$$-0.04 + 12.20y = 0$$

$$\underline{ 0.04}$$

$$12.20y = 0.04$$

$$y = 0.04 : 1220 = 0.0032$$

Ergo $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

$$\text{Ponamus } x = 8.6032 + y, \text{ erit}$$

$$x^2 = 7401505024 + 1720640000y + y^2$$

$$-5x = -4301600000 - 5.00000000y$$

$$-31 = -3.10000000$$

$$\underline{ 0}$$

$$-0.000094976 + 12.20640000y = 0$$

$$y = 0.000094976 : 1220640000$$

$$= 0.000077808.$$

Ergo

Ergo $x = 8.6032000000 + 0.000077808 = 8.603277808.$

Sit similiter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem esse $5 + y$ [numerus 5 assumitur vi limitum æquationis (§. 354)]: quoniam termini, in quibus est y^2 & y^3 , omittuntur; non opus est, ut in transformatione æquationis exprimentur. Reperitur adeo

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 + 75y \dots \\ + 2x^2 &= 50 + 20y \dots \\ - 23x &= -115 - 23y \\ - 70 &= -70 \\ \hline - 10 + 72y &= 0 \end{aligned}$$

$$y = \frac{10}{72} = 0.1$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

$$x^m = t^m + mt^{m-1}y$$

$$+ ax^{m-1} = at^{m-1} + (m-1)at^{m-2}y + \frac{m-1 \cdot m-2}{2}at^{m-3}y^2 \dots$$

$$+ bx^{m-2} = bt^{m-2} + (m-2)bt^{m-3}y + \frac{m-2 \cdot m-3}{2}bt^{m-4}y^2 \dots$$

$$+ cx^{m-3} = ct^{m-3} + (m-3)ct^{m-4}y + \frac{m-3 \cdot m-4}{2}ct^{m-5}y^2 \dots$$

&c. &c.

$$+ f = +f$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3} \dots = p$

$$mt^{m-1} + (m-1)at^{m-2} + (m-2)bt^{m-3} + (m-3)ct^{m-4} \dots = q$$

$$\frac{m \cdot m-1}{2}t^{m-2} + \frac{m-1 \cdot m-2}{2}at^{m-3} + \frac{m-2 \cdot m-3}{2}bt^{m-4} + \frac{m-3 \cdot m-4}{2}ct^{m-5} \dots = r$$

Quoniam termini, in quibus y ad plures dimensiones ascendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p + qy + ry^2 = 0$$

Fiat ut in exemplis specialibus

$$\frac{p + qy = 0}{qy = -p}$$

$$\text{erit } y = -p : q$$

Ponamus $x = 5.1 + y$: erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 132.651 + 78.030y \dots \\ + 2x^2 &= 52.020 + 20.400y \\ - 23x &= -117.300 - 23.000y \\ - 70 &= -70.000 \end{aligned}$$

$$-2.629 + 75.430y = 0$$

$$75.430y = 2.629$$

$$y = 2629 : 75430 = 0.0348$$

Ergo $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$

Eodem modo progredi licet, quousque libuerit.

Nec difficile est eadem methodo regulam generalem investigare. Sit nempe $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5} \dots + f = 0$. Ponamus esse $x = t + y$; erit

$$+ \frac{m \cdot m-1}{2}t^{m-2}y^2 \dots$$

$$+ \frac{m-1 \cdot m-2}{2}at^{m-3}y^2 \dots$$

$$+ \frac{m-2 \cdot m-3}{2}bt^{m-4}y^2 \dots$$

$$+ \frac{m-3 \cdot m-4}{2}ct^{m-5}y^2 \dots$$

In applicatione regulæ hujus generalis eadem calculi instauratione opus est, qua in exemplis specialibus paulo ante usi sumus.

Quodsi vero regula desideretur; quæ celerius appropinquat, ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p + qy + ry^2 = 0$

$$\text{erit } \frac{qy + ry^2 = -p}{(q + ry)} \\ y = -p : (q + ry)$$

Sed $y = -p : q$, per regulam priorem.

$$\text{Ergo } y = -p : (q - \frac{pr}{q}) = -pq : (q^2 - pr).$$

Vel quia $p + qy + ry^2 = 0$

$$\text{erit } \frac{qy + ry^2 = -p}{qy : r + y^2 = -p : r}$$

$$q^2 : 4r^2 + qy : r + y^2 = q^2 : 4r^2 - p : r$$

$$q : 2r + y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - pr\right) : r}$$

Habetur adeo x , si valor ipsius y adjiciatur valori t , signo vel positivo, vel privato, prout repertus fuerit.

SCHOLIUM.

364. *Duas regulas posteriores methodo ab hac diversa investigavit celeberrimus HALLEIUS (a), & easdem aliquot exemplis illustravit. Quamvis vero usus earum ex ante allatis exemplis manifestus esse videatur; non inconsultum tamen judicamus ut unum apponamus.*

$$\text{Sit } x^3 + 438x^2 - 7825x - 98508430 = 0.$$

Fiat $x = t + y = 300 + y$; erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 27000000 + 2700000y + 900y^2 + y^3 \\ + ax^2 &= 39420000 + 262800y + 438y^2 \\ - bx &= -2347500 - 7825y \\ - f &= -98508430 \end{aligned}$$

$$0 = -34435930 + 524975y + 1338y^2$$

Est itaque $p = -34435930$, adeoque $-p = 34435930$, $q = 524975$, $r = 1338$. Quare $y = -p : (q - pr : q) = 34435930 : (524975 + 46075274340 : 524975) = 34435930 : 612741 = 56$, consequenter $x = 300 + 56 = 356$.

Fiat jam $x = 356 + y$; erit

(a) In Transact. Anglican. n. 210. p. 136.

$$\begin{aligned} x^3 &= 45118016 + 380208y + 1068y^2 + y^3 \\ + ax^2 &= 55510368 + 311856y + 438y^2 \\ - bx &= -2785700 - 7825y \\ - f &= -98508430 \end{aligned}$$

$$0 = -665746 + 684239y + 1506y^2.$$

Est itaque $p = -665746$, $q = 684239$, $r = 1506$. Quare $y = -p : (q - pr : q) = 665746 : (684239 + 1002613476 : 684239) = 6657460 : 685704 = 0.9708$, consequenter $x = 356 + 0.9708 = 356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri potest, quia rationali accuratior. Possunt quoque plures nota inveniri per rationalem, si operatio continuetur.

COROLLARIUM.

365. Sit $x^m - f = 0$ & fiat $x = t + y$; erit

$$x^m - f = t^m + mt^{m-1}y + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} t^{m-2}y^2$$

&c. - f . Unde si fiat $t^m + mt^{m-1}y - f = 0$, erit $y = (f - t^m) : mt^{m-1}$, quæ est regula per approximationem extrahendi radicem ex quavis æquatione pura. Si accuratior desideretur, fiat ut ante $t^m = p$, mt^{m-1}

$$= q, \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} t^{m-2} = r; \text{ reperietur ut in}$$

problemate $y = -p : (q - pr : q)$. Unde apparet eandem regulam inservire radicem extractioni tum ex æquationibus puris, tum ex affectis.

PROBLEMA CLXXIII.

366. *Ex serie infinita radicem extrahere.*

Sit $v = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ &c.

Fiat $x = bv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. erit (§. 95),

$$x^2 = b^2v^2 + 2biv^3 + i^2v^4 + 2ikv^5 + k^2v^6 + 2bkv^4 + 2blv^5 + 2ilv^6 + 2hmv^8$$

$$x^3 = b^3v^3 + 3b^2iv^4 + 3bi^2v^5 + i^3v^6 + 3b^2kv^5 + 3b^2lv^6 + 6bikv^7 + 6hkv^8 + 6b^2iv^6 + 4b^2kv^7 + 4b^2lv^8$$

$$x^4 = b^4v^4 + 4b^3iv^5 + 6b^2i^2v^6 + 4b^3kv^6 + 4b^3lv^7 + 4b^3mv^8$$

$$x^5 = b^5 v^5 + 5b^4 i v^6$$

$$x^6 = b^6 v^6$$

Substituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -v + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$-v = -v$							
$+ ax = + avv$	$+ av^2$	$+ akv^3$	$+ av^4$	$+ amv^5$	$+ anv^6$		&c.
$+ bx^2 =$	$+ bh^2..$	$+ 2bhi..$	$+ bi^2..$	$+ 2bik..$	$+ bk^2..$		
			$+ 2bhk..$	$+ 2bhl..$	$+ 2bil..$		
					$+ 2bbm..$		
$+ cx^3 =$	$+ ch^3..$	$+ 3ch^2i..$	$+ 3chi^2..$	$+ 3ch^2k..$	$+ ci^3..$		
					$+ 3ch^2l..$		
					$+ 6chik..$		
$+ dx^4 =$			$+ db^4..$	$+ 4db^3i..$	$+ 6db^2i^2..$		
					$+ 4db^3k..$		
$+ ex^5 =$				$+ eb^5..$	$+ 5eb^4i..$		
$+ fx^6 =$					$+ fb^6..$		

Jamcum æquatio ponatur nihilo æqualis, propterea quod v subducitur ex altero æquationis membro ipsi æquali; omnes terminos $v, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6$ &c. in nihilum ductos concipere licet.

Fiat ergo in hac æquatione cujuslibet termini coefficientis nihilo æqualis, erit

$$\frac{ab-1=0}{b=1:a} \quad \frac{ai+bh^2=0}{i=-bh^2:a}$$

$$i=-b:a^2$$

$$\frac{ak+2bhi+ch^3=0}{k=(-2bhi-ch^3):a}$$

$$k=(+2b^2-ac):a^5$$

$$\frac{al+bi^2+2bhk+3ch^2i+dh^4=0}{l=(-bi^2-2bhk-3ch^2i-dh^4):a}$$

consequenter ob

$$bi^2=b^3:a^6, \quad 2bhk=(4b^3-2abc):a^6$$

$$3ch^2i=-3bc:a^5 \quad dh^4=d:a^4$$

$$l=-b^3:a^7-4b^3:a^7+2abc:a^7+3bc:a^6-d:a^5$$

$$l=(5abc-5b^3-a^2d):a^7$$

$$am+2bik+2bhl+3chi^2+3ch^2k+4db^3i+eb^5=0$$

Ergo ob

$$2bik = (-4b^4 + 2ab^2c):a^8, \quad 4db^3i = -4bd:a^6$$

$$2bhl = (10ab^2c - 10b^4 - 2a^2bd):a^8 \quad eb^5 = e:a^5$$

$$3chi^2 = 3b^3c:a^7 \quad 3ch^2k = (6b^2c - 3ac^2):a^7$$

$$m = (14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e):a^9$$

Eodem modo reperitur $n = (-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2bc^2 - 28a^2b^2d + 7a^3cd + 7a^3be - a^4f):a^{11}$, & ita porro.

Quodsi tandem in æquatione assumpta $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coefficientium h, i, k, l, m, n &c. substituantur, prodibit radix quæ sita

$$x = \frac{1}{a}v - \frac{b}{a^3}v^2 + \frac{2b^2-ac}{a^5}v^3$$

$$+ \frac{5abc-5b^3-a^2d}{a^7}v^4 + \frac{14b^4-21ab^2c+6a^2bd+3a^2c^2-a^3e}{a^9}v^5$$

&c. in infinit.

CAPUT VI.

De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicata.

DEFINITIO XX.

367. **P**ER *Geometriam Sublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & solidis inde genitis tractat.

DEFINITIO XXI.

Tab. II. Fig. 36. 368. *Diameter* curvæ est recta AD rectas MM inter se parallelas bifariam secans in P. In specie *Axis* vocatur, si rectas æquidistantes ad angulos rectos fecerit.

DEFINITIO XXII.

369. *Vertex curvæ* est punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO XXIII.

Tab. III. Fig. 36. 370. *Ordinatim applicatae* sunt lineæ æquidistantes MM, quæ a diametro bifariam secantur. Earum dimidiæ PM vocantur *Semiordinatae*. Vocantur etiam Tab. V. Fig. 60. *Semiordinatae* lineæ QM, QM ex punctis curvæ M, M ad lineam AT positione datam ductæ, ac inter se parallelæ.

DEFINITIO XXIV.

Tab. III. Fig. 36. 371. *Abscissa* AP est pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curva refertur, inter verticem aut aliud punctum fixum & semiordinatam PM intercepta. Quidam *sagittam* vocant.

SCHOLIUM.

372. *Abscissæ* nimirum a quovis puncto in linea positione data computari possunt, ad quam referuntur puncta curvæ, quemadmodum ex subsequentiis patebit.

DEFINITIO XXV.

373. *Diameter transversa* AB est recta, quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat. Tab. III. Fig. 37.

DEFINITIO XXVI.

374. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

DEFINITIO XXVII.

375. *Quantitates variabiles* sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescendentibus, aut crescunt aut decrescunt. Tab. III. Fig. 38.

Ex. gr. semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles: una enim crescente, crescit etiam altera.

Quantitates constantes sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescendentibus, eadem manent.

Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans: crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet.

HYPOTHESIS VIII.

376. *Quantitates constantes primis alphabeti literis indigentur* a, b, c, &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x, &c. *Speciatim* x *abscissam*, y *semiordinatam* denotet, nisi aliud expresse moneatur.

DEFINITIO XXVIII.

377. *Curva algebraica* est, in qua relatio abscissarum AP ad semiordinatas per æquationem algebraicam explicari potest. Sit ex. gr. in circulo Tab. III. Fig. 36.

AB

Tab. III. $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; erit $PB = a - x$, consequenter ob $PM^2 = AP \cdot PB$ (§. 327, 377 *Geom.*) $y^2 = ax - x^2$. Vel sit $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $MC^2 - PC^2 = PM^2$, hoc est, $a^2 - x^2 = y^2$.

SCHOLIION I.

378. Dicuntur æquationes algebraica, quæ determinati sunt gradus, ita ut æquatio semper eadem maneat in singulis punctis curvæ.

SCHOLIION II.

379. Vulgo cum CARTESIO (a) lineas algebraicas geometricas vocant, quod eas tantum ad construenda Problemata admittant, adeoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur, non refragantibus summis in re Geometrica arbitris LEIBNITIO atque NEWTONO (b).

DEFINITIO XXIX.

380. Curva transcendens est, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLIION.

381. Curvæ transcendentes ab aliis, CARTESII exemplo, dicuntur mechanicæ & ex Geometria ejiciuntur; aliter sentientibus viris summis LEIBNITIO atque NEWTONO. Invenit quoque LEIBNITIUS novum æquationum transcendentium genus, quibus curvæ transcendentes definiuntur, & quæ sunt gradus indefiniti, hoc est, non constanter eadem in omnibus curvæ punctis (c).

DEFINITIO XXX.

382. Curvæ algebraicæ ejusdem gene-

(a) *Geom. Lib. 2. p. m. 17. & seq.*

(b) *Act. Erud. Lips. A. 1708. p. 526.*

(c) *Act. Erud. Lips. A. 1684. p. 234 & 235.*

ris sunt, quarum æquationes ad eandem dimensionem assurgunt. Cum vero sola æquatio, quæ rectam definit, unius dimensionis esse possit; Curva primi generis vocatur, in qua æquatio ad duas dimensiones assurgit; si ad tres, curva secundi generis; si ad quatuor, curva tertii generis, &c.

Ex. gr. æquatio pro circulo est $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 377). Est ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis est, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva secundi generis est, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO XXXI.

383. Familia curvarum vocatur pluri-um curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi, definiuntur.

Ex. gr. sit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$; si $m = 4$, erit $a^3x = y^4$, &c. in infinitum. Omnes istæ curvæ dicuntur ejusdem familiæ.

SCHOLIION.

384. Æquationes, per quas curvarum familiæ definiuntur, cum transcendentibus non sunt confundendæ. Licet enim, intuitu totius familiæ, sint gradus indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ respectu, gradum determinatum habent: cum æquationes transcendentes, respectu ejusdem curvæ, indefiniti gradus existant (§. 381).

COROLLARIUM.

385. Omnes adeo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis constantem, quarum una quælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes per quas curvæ definiuntur, ingre-

ingrediantur facta vel ex potentiis abscissarum & semiordinatarum in coëfficientes datos, vel ex potentiis abscissarum in potentias semiordinatarum, vel ex meris quantitibus datis; omnes vero æquationes nihilo æquales fieri possunt (e. gr. si $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$); æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum $+$ in omnibus terminis retinetur, quia in casibus singularibus infinitæ variationes occurrere possunt. Et, si plures potentia ejusdem indeterminatæ quantitatis, v. gr. x , occurrunt, coëfficiens termini in formula, v. gr. b , explicatur per omnes ejus coëfficientes, & exponens dignitatis, v. gr. n , per omnes dignitatum exponentes.

DEFINITIO XXXII.

386. *Sectiones conicae sunt lineæ curvæ, quæ ex conici sectione oriuntur.*

SCHOLIUM.

387. *Sectiones conicae præter Circulum sunt tres, Parabola, Hyperbola & Ellipsis. Nos præcipuas earum proprietates, quæ scilicet frequentioris sunt usus, ex æquationibus eas definitivis per calculum algebraicum eruemus; quia nobis propositum est, Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicationem exemplis docere; licet non disteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonstrari, si in solido, seu in cono ex quo secantur, considerentur.*

DEFINITIO XXXIII.

388. *Parabola est curva, in qua $ax = y^2$; hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem, quæ axis Parametrum, ab aliis Latus rectum dicitur.*

SCHOLIUM.

389. *Hanc proprietatem Parabola competere assumimus respectu axis: quod vero etiam ipsi competere debeat respectu cujuslibet diametri, inferius demonstrabitur.*

COROLLARIUM I.

390. Est ergo Parabola curva primi generis, & crescentibus abscissis crescunt semiordinatæ; consequenter curva in se non redit.

COROLLARIUM II.

391. Et in ea $x = y^2 : a$ atque $a = y^2 : x$, hoc est, abscissa est tertia proportionalis ad parametrum & semiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abscissam & semiordinatam.

COROLLARIUM III.

392. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc est, semiordinata est media proportionalis inter parametrum & abscissam.

COROLLARIUM IV.

393. Data itaque parametro AB describi potest Parabola. Continuetur enim parameter AB in C, & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum assumtis, circino usque ad A aperto, ducantur arcus rectam BV in I, II, III, IV, V, &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5, &c. intersecantes: erunt B1, B2, B3, B4, B5, &c. abscissæ; BI, BII, BIII, BIV, BV, &c. semiordinatæ (§. 327 Geom.). Quare si lineæ B1, B2, B3, &c. ex recta BC in BN transferantur, & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII, &c. curva per puncta I, II, III &c. transiens Parabola est: BN vero ejus axis (§. 392). Elegantius Parabola describitur, si sumto AX pro axe Parabolæ & puncto A pro vertice, fiat AB parametro æqualis, & ducta recta CD, quæ rectam BX ad angulos rectos secet, describantur pro arbitrio circuli quotcumque transeuntes per B & axem secantes in P, P, P &c. erunt enim AP, AP, AP &c. abscissæ, PI = AI, PII = A2, PIII = A3, &c. semiordinatæ Parabolæ (§. 327 Geom.).

COROL-

Tab.

III.

Fig. 39.

The

verice

loqua

397

circu

rehan

cifar

398

ce A

solid

tia

Fig.

118.

Tab.

XII.

Fig.

118.

399

399

399

399

399

399

399

399

399

399

399

399

399

COROLLARIUM V.

Tab. 394. Quodlibet etiam punctum Parabola geometricè determinari potest. Ex. gr. III. quæritur, utrum punctum M sit in Parabola, necne? Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM, & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN describatur semicirculus. Quodsi enim is transeat per M; erit punctum M in Parabola (§. 327 Geom. & §. 392 Analys.).

DEFINITIO XXXIV.

Tab. 395. Focus est punctum axis F, in III. quo semiordinata FN æquatur semi-parametro.

PROBLEMA CLXXIV.

396. Invenire distantiam Foci a vertice AF.

Sit $AF = x$, parameter = a , erit $FN = \frac{1}{2}a$ (§. 395); consequenter

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\S. 388)}{\frac{1}{4}a = x} \quad a \text{ div.}$$

Theorema. In Parabola distantia foci a vertice AF est ad parametrum in ratione subquadrupla, seu quarta pars parametri.

COROLLARIUM I.

397. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 388): quadratum semiordinatæ PM est quadruplum rectanguli ex distantia foci a vertice in abscissam $\frac{1}{4}ax$, sive AF. AP.

COROLLARIUM II.

398. Invenitur adeo distantia foci a vertice AF, si ad abscissam quamcunque AP & dimidiam semiordinatam $\frac{1}{2}PM$ quærat tertiam proportionalis (§. 327 Geom.). Est enim $\frac{1}{4}PM^2 = AP \cdot AF$ (§. 377 Geom.); consequenter $PM^2 = 4 AF \cdot AP$.

PROBLEMA CLXXV.

399. Determinare quantitatem rectæ FM ex foco F ad extremitatem semiordinatæ M ductæ.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Sit $AP = x$. Quoniam $AF = \frac{1}{4}a$ (Tab. 396) erit $PF = x - \frac{1}{4}a$, vel $\frac{1}{4}a - x$, III. si $AF > PA$; consequenter Fig. 40.

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

$$\bullet PM^2 = \frac{ax}{\quad} \quad (\S. 388)$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 417 Geom.)$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Theorema. Recta FM ex foco F ad extremitatem semiordinatæ Parabolæ ducta æquatur aggregato ex abscissa AP & distantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM I.

400. Si quarta pars parametri ex A in Tab. f & F transfertur, & per AD parallelæ III. quocunque, ipsi in punctis P normales, Fig. 41. MM aguntur, tandemque ex F intervallo Pf puncta M determinantur; curva per hæc puncta transiens est Parabola.

COROLLARIUM II.

401. Potest ergo Parabola etiam continuo motu describi. Nimirum assumpta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB secans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum, altero sui extremo in foco F fixum, quod sit = AD + AF. Quodsi stylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorsum & dein sinistrorsum promoveatur; stylus Parabola designabit. Est enim constanter $FM = EM = Pf = x + \frac{1}{4}a$; consequenter punctum M in Parabola (§. 399).

PROBLEMA CLXXVI.

402. Invenire rationem semiordinatarum in Parabola.

X x

Sint

Sint abscissæ x & v , semiordinatæ y & z ; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 388); consequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$

$$y^2 : z^2 = x : v \quad (\S. 124) \bullet$$

$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema. Quadrata semiordinatarum sunt inter se ut abscissæ: ipsæ autem semiordinatæ in ratione subduplicata abscissarum.

PROBLEMA CLXXVII.

Tab. 403. *Determinare quantitatem rec-*
III. *tanguli ex summa duarum semiordinata-*
Fig. 40. *rum PM + pm in differentiam earundem Rm.*

$$pm + PM = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \quad (\S. 292)$$

$$mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$

$$\frac{(PM + pm)mR}{=} = av - ax = a(v - x) \\ = a. Pp$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum semiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abscissarum.

COROLLARIUM.

404. Est ergo parameter ad summam duarum semiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abscissarum. (§. 299 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXVIII.

405. *Determinare quantitatem rectanguli ex semiordinata in abscissam.*

Tab. Quoniam $PM = \sqrt{ax}$ (§. 392); erit
III. $PM \cdot AP = x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 61). Quare

Fig. 40. cum sit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^2$, hoc est,
 $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 124)

hoc est $a : PM = PM \cdot AP : AP^2$.

Theorema. In Parabola est rectangulum ex semiordinata in abscissam ad quadratum abscissæ ut parameter ad semiordinatam.

PROBLEMA CLXXIX.

406. *Determinare quantitatem rectanguli ex abscissa una in alteram.*

Sit abscissa una $= x$, altera $= v$; semiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 391), consequenter $xv = y^2 z^2 : a^2$, adeoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema. In Parabola quadratum parametri est ad quadratum semiordinatæ unius, ut quadratum semiordinatæ alterius ad rectangulum abscissarum.

PROBLEMA CLXXX.

407. *Determinare quantitatem chordæ AM.* Tab. III.

Sit parameter $= a$, $AP = x$, erit $PM^2 = ax$ (§. 388). Quare cum $AP^2 = x^2$; erit $AM^2 = ax + x^2$ (§. 417 *Geom.*), $= (a + x)x = (a + AP) \cdot AP$.

Theorema. In Parabola chorda est media proportionalis inter abscissam & compositam ex parametro & abscissa.

DEFINITIO XXXV.

408. Si TM curvam tangit in M , Tab. ducatur MR ad tangentem normalis; III. recta PT inter tangentem TM & semi-
Fig. 42. ordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter semiordinatam & normalem intercipitur PR , *Subnormalis* audit.

COROLLARIUM.

409. Est adeo TMR triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*); adeoque ob PM ad AR normalem (§. 329, 267 *Geom.*), $PR : PM = PM : PT$, & $PM : PT = MR : TM$, hoc est, in omni curva subnormalis est tertia proportionalis ad subtangentem & semiordinatam, & normalis est ad tangentem ut semiordinata ad subtangentem.

PRO-

PROBLEMA CLXXXI.

Tab. III. Fig. 42. *410. Determinare quantitatem subtangentis PT & subnormalis PR in Parabola.*

Sit $AP = x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, $RA = v$, erit $PR = v - x$, $PM^2 = ax$ (§. 388) & (§. 417 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

$$\text{hoc est } x^2 - 2vx + v^2 = 0$$

$$+ ax - t^2$$

Eadem æquatio provenit, si recta TM Parabolam secet, & quidem ad utrumque sectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abscissis per x designatis. Quare si fiat $x = z$ seu $x - z = 0$ & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices continens (§. 329); hæc cum antea inventa eadem esse debet; consequenter

$$-2z = -2v + a$$

Ergo ob $z = x$) $x = v - \frac{1}{2}a$

$$\frac{1}{2}a = v - x = PR$$

Porro (§. 409) $PR : PM = PM : PT$

$$\text{hoc est, } \frac{1}{2}a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax} : PT$$

$$\text{Ergo } PT = ax : \frac{1}{2}a = 2x.$$

Theorema. In Parabola subtangens PT est abscissæ AP dupla; subnormalis vero PR parametri subdupla, adeoque constans.

COROLLARIUM I.

411. Quoniam $TA = x$, & distantia foci a vertice $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 396); erit $TF = \frac{1}{4}a + x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§. 399); consequenter TFM triangulum æquicrum.

COROLLARIUM II.

412. Quoniam $PA = x$, & $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 396), erit $PF = x - \frac{1}{4}a$; consequenter cum sit $PR = \frac{1}{2}a$ (§. 410), $FR = x + \frac{1}{2}a$, adeoque $FR = FM$ (§. 399) = TF (§. 411). Circulus igitur, ex foco Parabolæ F per punctum ejus M ductus, subtangentem PT & subnormalem PR determinat; consequenter punctum T , ex quo ducitur tangens TM .

COROLLARIUM III.

413. Quodsi MN ducatur parallela axi AR , erit angulus $NMT = FTM$ (§. 233 *Geom.*). Cumque sit $TF = FM$ (§. 411); erit $FTM = FMT$ (§. 184 *Geom.*); consequenter $FMT = NMT$ (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXXII.

414. *Ducta ON tangenti TM, & MG axi AQ parallela; determinare rationem segmentorum HF & FN.* Tab. III. Fig. 43.

Sit $AP = AT$ (§. 410) = x , parameter = a , erit $PM = \sqrt{ax}$ (§. 392), $PT = IO$ (ob $TO = MF = PI$, (§. 257 *Geom.*)) = $2x$ (§. 410). Sit $MF = PI = v$, erit $TI = v + 2x$, $IA = v + x$. Sit denique $IQ = FG = t$, erit $OQ = OI + IQ = 2x + t$, $QA = x + v + t$, & hinc $QN^2 = ax + av + at$ (§. 388). Porro (§. 268 *Geom.*)

$$OI : IF = OQ : QN$$

hoc est, $OI^2 : IF^2 = OQ^2 : QN^2$ (§. 124)

$$4x^2 : ax = (2x + t)^2 : QN^2$$

$$4x : a = (2x + t)^2 : \frac{a(2x + t)^2}{4x}$$

Est itaq; $a(x + v + t) = a(2x + t)^2 : 4x$

$$4x^2 + 4xv + 4tx = 4x^2 + 4tx + t^2$$

$$4xv = t^2$$

X x 2 Quod-

Tab. III. Quodsi LI dicatur t ; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$, reliquis manentibus iisdem. Unde patet, esse $LI = IQ$. Est vero (§. 268 *Geom.*).

$OH:OL = HN:LQ$ & $OH:OL = HF:LI$, adeoque $HN:HF = LQ:LI$ (§. 167, 173 *Arihm.*). Sed $LI = \frac{1}{2}LQ = IQ$, per demonstrata. Ergo $HF = \frac{1}{2}HN = FN$ (§. 149. *Arih.*).

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam secat in F.

COROLLARIUM I.

415. Est ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abscissa (§. 368, 370, 371).

COROLLARIUM II.

416. Quoniam anguli recti ad G & I per constr. æquales sunt (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum FG & OQ per construct. anguli F & O in $\triangle FNG$ & $\triangle OFI$ æquales sunt (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$OI:FI = FG:GN$$

$$2x:\sqrt{ax} = \sqrt{4vx}:\sqrt{av}$$

Et quia (§. 417 *Geom.*) $FN^2 = FG^2 + GN^2$ erit $FN^2 = 4vx + av = (a + 4x)v$. Jam cum $FM = v$, & x respectu puncti M constans; $a + 4x$ est parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatæ æquale rectangulo ex parametro in abscissam.

COROLLARIUM III.

417. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta est $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399); diameter ergo parametri est rectæ illius quadrupla.

PROBLEMA CLXXXIII.

Tab. XII. Fig. 119.

418. Si TM Parabolam tangit in M

& MR fuerit ad eam normalis, & ex Tab. XII. foco F ducatur recta FM atque FO ad TM normalis; demittatur etiam ex R ad rectam FM normalis RH; determinare quantitatem segmentorum MH & FH, itemque rectæ OF.

Sit parameter a , $AP = x$, erit $FM = \frac{1}{4}a + x$ (§. 399), $PR = \frac{1}{2}a$, & $TP = 2x$ (§. 410). Cum TFM sit triangulum æquicrurum (§. 411), erit $TO = OM$ (§. 184 *Geom.*). Quoniam itaque $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (§. cit.); erit $TM^2 = 4x^2 + ax$ (§. 388); consequenter $OM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$, quod ex $FM^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax + x^2$ subductum relinquit $FO^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax = (\frac{1}{4}a + x) \frac{1}{4}a$ (§. 417 *Geom.*). Porro $MR^2 = PR^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + ax = (\frac{1}{4}a + x)a$. Jam cum in Triang. OFM & HMR anguli ad O & H recti per hypoth. sint inter se æquales (§. 145 *Geom.*), & ob parallelismum rectarum MR & FO (§. 256 *Geom.*), anguli F & M æquales (§. 233 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*)

$$FM:OF = MR:MH$$

adeoq; $FM^2:OF^2 = MR^2:MH^2$ (§. 124) $(\frac{1}{4}a + x)^2:(\frac{1}{4}a + x)\frac{1}{4}a = (\frac{1}{4}a + x)a:MH^2$ $\frac{1}{4}a + x:\frac{1}{4}a = (\frac{1}{4}a + x)a:MH^2$ (§. 124)

$$1:\frac{1}{4}a = a:MH^2 \text{ (§. cit.)}$$

$$MH^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$MH = \frac{1}{2}a = PR$$

$$\text{Ergo } HF = FM - HM = x - \frac{1}{4}a = FP.$$

Theorema 1. Recta OF ex foco Parabolæ F ad tangentem TM ducta est media proportionalis inter quartam partem parametri & rectam FM ex foco F ad punctum Parabolæ M ductam.

Theorema

Tab. XII. *Theorema 2.* Si MR fuerit ad Parabolam in puncto M normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Parabolæ punctum M ductam normalis RH; erit MH subnormali PR & HF portioni axis inter focum F & semiordinatam PM interceptæ æqualis.

PROBLEMA CLXXXIV.

Tab. III. 419. *Invenire equationem ad Parabolam externam; hoc est, punctis Parabolæ M ad rectam AO, quæ ad axem AR in vertice A perpendicularis, relatis.*

Sit abscissa AN = x, semiordinata NM = y, parameter = a. Quoniam AN per hypoth. & PM (§. 368) perpendicularis ad AR; erit AN ipsi PM parallela (§. 256 Geom.). Cum ex eadem ratione NM sit parallela ipsi AR; erit AN = PM & NM = AP (§. 257 Geom.); consequenter PM = x, AP = y, atque ideo $x^2 = ay$ (§. 388).

DEFINITIO XXXVI.

Tab. III. 420. *Ellipsis est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem; hoc est, si AB = a, parameter = b, PM = y, AP = x, erit $b : a = y^2 : ax - x^2$, adeoque $ay^2 = abx - bx^2$.*

COROLLARIUM I.

421. Est ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abscissam.

COROLLARIUM II.

422. Fiat $y = 0$, erit $bx - bx^2 : a = 0$, adeoque $abx = bx^2$, consequenter $a = x$.

Patet adeo curvam secare AB in A & B, consequenter in se redire. Tab. III.

COROLLARIUM III. Fig. 44.

423. Fiat $x = \frac{1}{2}a$. Erit $y^2 = \frac{1}{2}ab - a^2b : 4a = \frac{1}{4}ab$; coniequenter $y = CD = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo $DE = 2\sqrt{\frac{1}{4}ab} = \sqrt{ab}$, hoc est, axis minor ED est medius proportionalis inter majorem AB & parametrum; consequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM IV.

424. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

$$\text{erit } \frac{bx^2}{bx^2} = \frac{abx - ay^2}{bx^2}$$

$$bx^2 : (bx - y^2) = a$$

Invenitur ergo axis, parametro, abscissa & semiordinata datis; si fiat, $1^{\circ} b : y = y : \frac{y^2}{b}$

$2^{\circ} x - \frac{y^2}{b}$ seu $\frac{bx - y^2}{b} : x = x : a$. Nimirum

fit axis AB positione datus, & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abscissa AP & semiordinata PM, fiat AN = AQ = PM; ducta NF ipsi LQ parallela, erit AF = $y^2 : b$, consequenter FP = $x - y^2 : b$. Continuetur LA in G, factaque AH = FP & AG = AP, ducatur GB ipsi HP parallela: erit AB = $bx^2 : (bx - y^2)$; adeoque axis quæsitus.

COROLLARIUM V.

425. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

$$\text{erit } \frac{ay^2}{ay^2} = \frac{abx - bx^2}{ay^2}$$

consequenter $1^{\circ} x : y = y : \frac{y^2}{x}$ & $2^{\circ} a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$. Datis ergo axe AB, abscissa

AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1° . Fiat AI = PM, & ex A per M ducatur recta AL. 2° . In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 268 Geom.) ob AP : PM = AI : LI; LI = $y^2 : x$. 3° . Producat PM in O, donec PO = LI = $y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4° . In A excitetur

Tab. perpendicularis AG = [ob BP:PO=BA:
IV. GA] $ay^2:(ax-x^2)$: quæ erit parameter AG.
Fig.45.

COROLLARIUM VI.

$$426. y = \sqrt{\left(\frac{abx - bxx}{a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{bx}{a}(a-x)\right)}.$$

Datis itaque axe AB & parametro AG, cui-
libet abscissæ BP semiordinata PN assigna-
tur, si parametro AG axi AB ad angulos
rectos juncta ducatur GB, & erecta perpen-
diculari PN, fiat PL = PH, tandemque su-
per AL semicirculus describatur. Est enim
AB (a): AG (b) = BP (x): PH (bx:a), & PN
= $\sqrt{AP \cdot PL} = \sqrt{AP \cdot PH} = \sqrt{(a-x)$
 $\times (bx:a)} = \sqrt{(bx - bx^2:a)}$.

PROBLEMA CLXXXV.

Tab. 427. Invenire distantiam foci a ver-
III. tice AF.
Fig.44.

Sit AB = a, parameter = b, AF
= x, erit FR = $\frac{1}{2}b$ (§. 395) &

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2 \quad (\S. 420)$$

$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$

$$\frac{x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab}{\frac{1}{4}a^2} \quad \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a - x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)} = x}{\frac{1}{4}a^2}$$

Constructio. Ex B in L transferatur dimi-
dia parameter, erit CL = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. In
centro C erigatur perpendicularis CK oc-
currens semicirculo super AL descripto in
K, erit CK = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$. Fiat ita-
que CF = CK; erit in F focus.

Tab. Aliter. Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4}ab} = CD$, (§. 423)
IV. si intervallo DF = $\frac{1}{2}a$ interfecetur AB in F,
Fig.46. erit in F focus. Nam $CD^2 = \frac{1}{4}ab$ & DF^2
= $\frac{1}{4}a^2$. Ergo CF = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$,
ut ante.

Aequatio secunda sequens suppeditat

Theorema. Si axis AB in foco F secetur; Tab.
erit rectangulum ex segmentis axis AF. FB III.
subquadruplum rectanguli ex parametro in Fig.44.
axem, seu quadrato axis dimidii minoris
CD æquale.

COROLLARIUM.

428. Distantia foci a centro est =
 $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$, hoc est quadratum ejus
est differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA CLXXXVI.

429. Invenire rationem ordinata-
rum PM & pm in Ellipsi.

Sit AB = a, parameter = b, AP = x,
PM = y, Ap = z, pm = v; erit

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned} \right) (\S. 421).$$

$$\text{Ergo } y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$$

$$\text{h. e. } y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$$

$$\text{seu } PM^2 : pm^2 = AP \cdot BP : Ap \cdot pB$$

Theorema. In Ellipsi quadrata semior-
dinatarum sunt inter se ut rectangula ex
axis segmentis.

COROLLARIUM I.

430. Est igitur etiam $DC^2 : PM^2 = CB^2 :$
AP. PB, consequenter $DC^2 : CB^2 = PM^2 :$
AP. PB (§. 173 Arithm.), hoc est, quadra-
tum axis minoris est ad quadratum majoris
ut quadratum semiordinatæ ad rectangu-
lum ex axis segmentis.

COROLLARIUM II.

431. Sit CP = x; erit AP = $\frac{1}{2}a - x$, & PB
= $\frac{1}{2}a + x$; consequenter AP. PB =
 $\frac{1}{4}a^2 - x^2$. Habemus adeo (§. 430)

$$\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : \frac{1}{4}a^2 - xx$$

$$\text{hoc est } b : a =$$

$$\frac{ay^2 = \frac{1}{4}a^2 b - bx^2}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam Ellip-
sis definit, abscissis a centro C computatis.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. 432. Sit $CD = d$, $AC = r$, $PC = x$; erit
 III. $AP = r - x$ & $PB = r + x$; consequenter
 Fig. 44. $AP \cdot PB = r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$. Habemus
 ergo, ut ante

$$\frac{d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2}{\text{unde } r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)}$$

$$y^2 = d^2 (r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem
 Ellipsis naturam definit, abscissis denuo a
 centro C computatis, & qua in subsequen-
 tibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM IV.

433. Crescentibus adeo abscissis x , se-
 miordinatæ decrefcere debent. Quodsi
 tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$; conse-
 quenter $y^2 = 0$, adeoque Ellipsis cum axe
 tandem concurrat. Unde porro intelligi-
 tur, Ellipsin esse lineam in se redeuntem.

PROBLEMA CLXXXVII.

Tab. 434. Determinare quantitatem rec-
 IV. tarum FM & fM ex utroque foco F & f
 Fig. 46. ad idem peripherie punctum M ductarum.

Sint $FC = fC = c$, reliqua ut ante:
 erit $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$,
 $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, adeoque $PF^2 = c^2 - ac$
 $+ \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2 = (\frac{1}{2}a - c)^2$
 $+ 2cx - ax + x^2$; $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2$
 $- 2cx - ax + x^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx$
 $- ax + x^2$. Est vero (§. 430),

$$CB^2 : DC^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2}{\text{Habemus adeo}}$$

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

$$PF^2 = (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$

$$FM^2 = (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

$$Pf^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + xx$$

$$fM^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectorum FM & fM
 ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ
 punctum M ductarum æquatur axi majori
 AB .

COROLLARIUM I.

435. Datis ergo axibus conjugatis, Ellip-
 sis facillime describitur. Determinatis enim
 focis F & f (§. 427), clavi in iis designantur
 & his filum circumligetur FMf axi majori
 AB æquale. Quodsi immisso stylo filum
 extendatur & circa clavos circumducatur,
 Ellipsis desigabitur.

COROLLARIUM II.

436. Immo eodem modo geometrice
 determinatur quodlibet punctum Ellipseos
 M . Axis enim AB dividatur pro arbitrio
 utcumque in duas partes, & parte una ex
 foco F , altera ex foco f describuntur arcus:
 duo enim hi arcus se mutuo secabunt in
 puncto M . Possunt autem una eademque
 opera quatuor simul determinari puncta,
 singula nempe in singulis quadrantibus
 AD , DB , BE & EA .

PROBLEMA CLXXXVIII.

437. Determinare quantitatem rectæ
 MR ex quovis Ellipsis puncto M ad axem
 conjugatum DC perpendicularis.

Sit $MR = PC = v$, $AC = r$; erit AP
 $= r - v$, & $PB = r + v$. Sit $DR = z$,
 $DC = c$; erit $RC = PM = c - z$;
 consequenter (§. 430)

$$DC :$$

Tab. IV.

Fig. 46.

Tab. III.

Fig. 44.

Tab. III. $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP \cdot PB$
 $cc : rr = z^2 - 2cz + c^2 : r^2 - v^2$
 Fig. 44. $c^2 : z^2 - 2cz + c^2 = r^2 : r^2 - v^2$ (§. 173 *Arihm.*)
 $2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2$ (§. 193 *Arihm.*)
 $2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2$ (§. 173 *Arihm.*)
 DR. RE : RM² = DC² : AC².

Theorema. Rectangulum ex segmentis axis conjugati est ad quadratum semiordinatæ ipsius, ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

COROLLARIUM I.

438. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit.

COROLLARIUM II.

439. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2z}{c} - \frac{r^2z^2}{c^2}$ (§. 437);

si fiat $2r^2 : c = p$, erit $v^2 = pz - pz^2 : 2c$. Est adeo p parameter axis conjugati (§. 420). Quare parameter axis conjugati tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, seu ad axem conjugatum & axem majorem.

PROBLEMA CLXXXIX.

Tab. IV. 440. *Determinare subtangentem PT & subnormalem PR in Ellipsi.*

Fig. 47. Eadem prorsus methodo utendum, qua in Parabola usi sumus. Nimirum sit parameter = b , axis major = a , AP = x , PM = y , MR = t , RA = z ; erit PR = $z - x$, consequenter PM² = $t^2 - z^2 + 2zx - x^2$. Est vero etiam PM² = $bx - bx^2 : a$ (§. 421). Quare

$$\frac{t^2 - z^2 + 2zx - x^2 = bx - bx^2 : a}{at^2 - az^2 + 2azx - ax^2 = abx - bx^2}$$

$$\frac{ax^2 - bx^2 + abx - 2azx + az^2 - at^2 = 0}{x^2 + \frac{ab - 2az}{a - b}x + \frac{az^2 - at^2}{a - b} = 0}$$

Cum ex superioribus constet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales; ponatur ut supra (§. 410) $x - v = 0$, erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, æquatio eadem cum anteriore, consequenter

$$\frac{(ab - 2az) : (a - b) = -2v}{ab - 2az = -2av + 2bv}$$

$$\frac{ab + 2av - 2bv = 2az}{\frac{1}{2}b + v - bv : a = z}$$

Est vero $v = x$, per *hypoth.* Quare si x pro v substituatur, prodibit $z = \frac{1}{2}b + x - bx : a = AR$. Ergo PR = $\frac{1}{2}b + x - bx : a - x = \frac{1}{2}b - bx : a = (\frac{1}{2}ab - bx) : a$, quæ expressio hanc suppeditat analogiam:

$$a : b = \frac{1}{2}a - x : PR$$

Theorema. In Ellipsi est ut axis primus ad parametrum, ita distantia semiordinatæ a centro ad subnormalem.

Porro PR : PM = PM : PT (§. 409).

$$\frac{\frac{1}{2}ab - bx}{a} : y = y : \frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab - bx}$$

Est vero $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420). Ergo PT = $(abx - bx^2) : (\frac{1}{2}ab - bx) = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x)$. Habemus adeo

$$\frac{\frac{1}{2}a - x : x = a - x : PT}{PC : AP = PB : PT}$$

Ergo PB . AP = CP . PT

Theorema. In Ellipsi rectangulum ex segmentis axis æquatur rectangulo ex distantia semiordinatæ a centro in subtangentem.

Tandem AT = PT - AP = $(ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$. Quare

$$\frac{\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a = x : AT}{PC : AC = AP : AT}$$

Theo-

Tab. IV. Fig. 47.

Theorema. Ut distantia semiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abscissa ad portionem subtangentis inter verticem Ellipsis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

441. Quia $PC : AC = AP : AT$; erit etiam $PC : AP = AC : AT$ (§. 173 *Aritbm.*); consequenter $PC : PC + PA = AC : CA + AT$ (§. 190 *Aritbm.*), hoc est, $PC : AC = AC : CT$.

COROLLARIUM II.

442. Est ergo $AC^2 = PC \cdot CT$ (§. 377 *Geom.*), hoc est quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

COROLLARIUM III.

443. Crescentibus abscissis x , decrescit $\frac{1}{2}a - x$; consequenter ratio $\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a$ minuitur (§. 203 *Aritbm.*). Abscissa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor (§. 440).

COROLLARIUM IV.

444. Si $x = \frac{1}{2}a$, hoc est, quando AC fit abscissa, $\frac{1}{2}a - x = 0$; consequenter abscissa rationem infinitam habet ad AT, adeoque tangens TM cum subtangente TP nunquam concurrat. Est igitur axi parallela.

COROLLARIUM V.

445. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC respectu infinitæ pro nihilo habendam esse.

PROBLEMA CXC.

446. Determinare quantitatem rectanguli ex subtangente PT in abscissam CP.

Sit $PC = x$, $PT = t$, $AC = r$; erit $AP = r - x$, & $PB = r + x$, $CT = t + x$. Quoniam (§. 441)

$$PC : AC = AC : CT$$

$$x : r = r : t + x$$

$$\text{erit } tx + xx = r^2$$

$$tx = r^2 - x^2 = AP \cdot PB$$

Wolfsi Oper. Mathem. Tom. I.

Theorema. Rectangulum ex subtangente PT in abscissam CP æquatur rectangulo ex segmentis axis. Fig. 47.

PROBLEMA CXCI.

447. Determinare valorem subtangentis PT, abscissis a centro computatis.

Sit $AC = r$, $PC = v$, erit $PB = r + v$, $AP = r - v$; consequenter (§. 440)

$$PC : PB = AP : PT$$

$$v : r + v = r - v : t$$

$$tv = r^2 - v^2$$

Theorema. Rectangulum ex subtangente & distantia ordinatæ a centro æquatur differentia quadrati hujus distantia a quadrato semiaxis transversi.

PROBLEMA CXCII.

448. Determinare quantitatem subtangentis KE in axe conjugato.

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis $MK = PC$ (§. 226 *Geom.*), erit ob parallelismum rectarum KM & CT (§. 256) angulus $T = EMK$ (§. 233 *Geom.*). consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = MK : KE$$

$$\frac{r^2 - v^2}{v} : y = v : \frac{v^2 y}{r^2 - v^2}$$

Quodsi fiat $DC = c$, $DK = z$, erit $KC =$

$$PM = y = c - z \text{ \& } v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2} \text{ (§. 437).}$$

Hinc $r^2 - v^2 = (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) : c^2$, & $v^2 y = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : c^2$. Quare $v^2 y : (r^2 - v^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2) : (cr^2 - r^2 z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expressio itaque subtangentis in axe conjugato eadem, quæ in transverso (§. 440).

Yy

PRO-

PROBLEMA CXCIIL.

Tab. IV. Fig. 48. 449. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, & punctum contactus M atque centrum C jungantur recta MC, qua secat HN in G; determinare rationem reclarum HG & GN.

Sit $AB = a$, $PM = y$, $PC = c$, $FG = KD = t$, $GI = KS = z$, erit $IF = HL = DS = t - z$, $HL^2 = t^2 - 2tz + z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Est itaque (§. 268 Geom.)

$$PM : PC = FG : FC$$

$$y : c = t : (tc : y)$$

Et quia $\triangle TMP \sim \triangle FOG$ (§. 233 & 267 Geom.), & $\triangle GIH \sim \triangle FOG$ (§. 268 Geom.); erit etiam $\triangle TMP \sim \triangle GIH$; consequenter (§. 267 Geom.)

$$PM : PT = GI : HI$$

$$y : \frac{ax - x^2}{c} = z : \frac{(ax - x^2)z}{cy} \quad (\S. 440)$$

Ponamus brevitatis gratia $ax - x^2 = v$; erit $FL = HI = vz : cy$. Ergo $CL = FL + FC = tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc $AL = AC - CL = \frac{1}{2}a - (tc^2 + vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$ & $BL = AB - AL = a - (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy$. Est vero (§. 429)

$$AP : PB : LA : LB = PM^2 : HL^2$$

$$x^2 : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2y^2} = y^2 : HL^2$$

$$\text{Hinc } HL^2 =$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2v} = t^2c^2v - 2tc^2vz + z^2c^2v$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - v^2z^2}{c^2v} = t^2c^2v + z^2c^2v$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{c^2v} = v^2z^2 + c^2vz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v} = z^2$$

Quodsi jam KN dicatur z , reliqua Tab. IV. Fig. 48. mancant ut ante; reperietur eodem modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v}$, con-

sequenter $KN^2 = KS^2$, adeoque & $KN = KS$.

Est vero (§. 268 Geom.) $KN : KS = GN : HG$. Ergo $GN = HG$.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum Ellipsis C transiens eam bifariam secat.

COROLLARIUM I.

450. Est ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368, 370). Tab. IV. Fig. 49.

COROLLARIUM II.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam substituere liceat; omnes rectæ per centrum transeuntes & in peripheria utrinque terminatæ sunt diametri, ipsisque coordinatæ sunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM III.

452. Est ergo etiam ECV ordinatæ HN parallela & per centrum C transiens diameter, consequenter MQ & EV sunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA CXCIIV.

453. Si ex diametri VE tangenti TM parallela extremitate V perpendicularis VR demittatur in axem AB; determinare quantitatem rectæ RC.

Sit $CA = r$, $CR = v$, $PT = t$, $PC = x$; erit $AR = r - v$, $RB = r + v$; consequenter $AP : PB = tx$ (§. 446), $AR : RB = r^2 - v^2 = tx + x^2 - v^2$ (§. 447). Quoniam VE ipsi TM parallela, per hypoth. erit $MTC = ICV$ (§. 233 Geom.). Quare cum anguli ad P & R sint recti, per

Tab. per construct. erit (§. 267 Geom.),
 IV. PM: RV=TP: RC. Hinc PM²: RV²
 Fig. 49. =TP²: RC² (§. 124). Est vero etiam
 PM²: RV²=AP. PB: AR. RB (§. 429).
 Ergo (§. 167 Arithm.)

$$AP. PB: AR. RB = TP^2: RC^2$$

$$tx: tx + x^2 - v^2 = t^2: v^2$$

$$tv^2x = t^3x + t^2x^2 - t^2v^2$$

$$v^2x = t^2x + tx^2 - tv^2$$

$$tv^2 + xv^2 = t^2x + tx^2$$

$$v^2 = tx$$

hoc est, CR² = AP. PB.

consequenter AP: CR = CR: PB.

PROBLEMA CXCV.

454. Determinare quantitatem se-
 miordinata GH ad diametrum Ellipsis
 MQ.

Ductis KI ipsi FD & KG ipsi AB
 parallelis, fiat CP=x, AC=r, PT=t,
 PM=y, KG=IL=m, LC=n. Erit
 (§. 268 Geom.)

$$CP: PM = CL: LG$$

$$x: y = n: \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN per
 constr. ang. TSI = KHG (§. 233 Geom.)
 adeoque ob rectos ad I & K per constr.
 T = HGK (§. 246 Geom.), & hinc (§.
 267 Geom.).

$$TP: PM = KG: KH$$

$$t: y = m: \frac{my}{t}$$

$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$

$$CI = CL + LI = n + m$$

$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$

$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$

$$AI. IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn \quad \text{Tab. IV.}$$

— m² (§. 432).
 Est vero (§. 429)

$$AP. PB: AI. IB = PM^2: HI^2$$

$$r^2 - x^2: r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2: HI^2$$

$$\text{Unde elicitur } HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Quare

$$\frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2} \quad y^2$$

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} \quad x^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc est, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 446)

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$

$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$

$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2.$$

Sit jam CM = v, erit (§. 268 Geom.)

$$CP: CM = CL: CG$$

$$x: v = n: (vn: x)$$

$$\text{Ergo } MG = MC - CG = v - vn: x, \text{ \& } GQ = GC$$

Y y 2

Tab. = GC + MC = v + vn : x, MG. GQ
 IV. = v² — v² n² : x²
 Fig. 49. Quodsi v² — v² n² : x² = MG. GQ mul-
 tiplices per r² — x² = CR² (§. 453) & r²
 + n² — x² — r² n² : x² = KG² per v² = CM²;
 utrobique prodit r² v² + n² v² — x² v²
 — r² n² v² : x². Est itaque MG. QG. CR²
 = KG². CM², adeoque (§. 299 Arithm.)
 KG² : CR² = MG. QG : CM². Jam ob
 parallelas EV & HN, per hypoth. MCV
 = MGH (§. 233 Geom.), & ob paralle-
 las KG & RC, per constr. MGK = MCR
 (§. cit.). Ergo KGH = RCV (§. 91 Arithm.),
 consequenter KG² : CR² = HG² : CV²
 (§. 267 Geom. & §. 260 Arithm.). Un-
 de tandem habetur (§. 167 Arithm.)
 MG. QG : CM² = HG² : CV².

Theorema. In Ellipsi est quadratum se-
 miordinatæ ad quadratum semidiametri con-
 jugatæ ut rectangulum ex segmentis diame-
 tri ad quadratum semidiametri.

COROLLARIUM.

455. Sit MQ = a, EV = c, MG = x, HG = y,
 erit GQ = a — x; consequenter (§. 454)

$$\frac{ax - x^2 : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : \frac{1}{4}c^2}{\frac{1}{4}c^2 ax - \frac{1}{4}c^2 x^2 = \frac{1}{4}a^2 y^2}{c^2 x - \frac{c^2 x^2}{a} = ay^2}$$

Fiat $\frac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$.

Eadem ergo est ratio semiordinatarum
 ad diametros, quæ ad axem (§. 420), & dia-
 metri parameter est tertia proportionalis ad
 diametros a & c.

SCHOLIUM.

456. Cum ex hac equatione fundamentali reli-
 quas Ellipsis proprietates respectu axis deduxe-
 rimus; evidens est, omnes quoque istas proprie-
 tates Ellipsi competere intuitu diametri.

PROBLEMA CXCVI.

457. Determinare quantitatem rectæ
 FO. ex foco F ad tangentem Ellipsis
 TM perpendicularis.

Sit RM ad tangentem TM normalis:
 erunt MR & OF inter se parallelæ (§.
 256 Geom.); adeoque TR : RM = TF : FO
 (§. 268 Geom.). Porro cum in triangulo
 rectangulo TMR semiordinata PM sit
 ad hypotenusam TR perpendicularis
 (§. 368, 370); erit $\Delta PMR \sim \Delta TMR$
 (§. 329 Geom.), adeoque TR : RM
 = RM : PR (§. 267 Geom.). Est ergo
 RM : PR = TF : FO (§. 167 Arithm.);
 consequenter FO. RM = PR. 1F (§.
 378 Geom.).

Theorema. Rectangulum ex subnormali
 PR in differentiam distantie foci a semiord-
 inata atque subtangentis TF æquale est re-
 ctangulo ex normali MR & recta ex foco
 ad tangentem perpendiculari FO.

PROBLEMA CXCVII.

458. Si in F fuerit focus Ellipsis &
 MR ad eam normalis, HR vero nor-
 malis ad FM ex foco ad punctum con-
 tactus ductam; determinare quantitatem
 segmentorum MH & HF.

Sit parameter = b, axis = a, distan-
 tia foci a centro = c, erit FM = $\frac{1}{2}a$
 — c + 2cx : a (§. 434), PR = $(\frac{1}{2}ab - bx) : a$
 (§. 440), AT = $\frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ (§. cit.)
 & AF = $\frac{1}{2}a - c$, consequenter TF
 = $\frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x) + \frac{1}{2}a - c = ax :$
 $(a - 2x) + \frac{1}{2}a - c = (\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx) :$
 $(a - 2x)$. Ducatur FO ad tangentem
 TM normalis, erit OF parallela ipsi
 MR (§. 256 Geom.); adeoque angulus
 OFM ipsi HMR æqualis (§. 233 Geom.)
 & hinc

Tab. XII. Fig. 119.

Tab. XII. Fig. 119.

Tab. XII. Fig. 119.

& hinc, ob rectos ad O & H æquales (§.145 *Geom.*), reperitur (§.267 *Geom.*)

FM:FO=MR:MH, hoc est, FM: $\frac{PR.TF}{MR}$ =MR:MH (§.457). Est itaque MH = (PR.TF):FM; consequenter FM:TF=PR:MH. Quare

$$\frac{\frac{1}{2}a-c+\frac{2cx}{a}:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x}}{\frac{1}{2}a^2-ac+4cx} = \frac{ab-2bx}{2a} : MH$$

$$a^2-2ac+4cx:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x} = ab-2bx:MH$$

(§.184 *Arith.*)

$$\frac{a^2-2ac+4cx}{a-2x}:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x} = b:MH$$

(§.183 *Arith.*)

Est ergo MH = $\frac{1}{2}b$ (§.149 *Arith.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Ellipsin normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Ellipseos punctum M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidia æqualis.

DEFINITIO XXXVII.

459. *Hyperbola* est linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc est, $b:a = y^2:ax + x^2$, seu quadratum semiordinatæ est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositam ex eadem abscissa & recta quadam constante, quæ *Axis transversus*, vel *Latus transversum* audit, ut recta alia constans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transversum.

COROLLARIUM.

460. Est ergo etiam hic ut in Ellipsi $y^2 = bx + bx^2$: $a, b = ay^2:(ax + xx)$, $a = bxx:(y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§.421 & seqq.).

DEFINITIO XXXVIII.

461. In *Hyperbola Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in Ellipsi (§.423).

DEFINITIO XXXIX.

462. Si axis transversus AB axi AX Tab. in directum jungitur & in C bifariam III. dividitur; punctum C *Centrum* appel- Fig.37. latur.

PROBLEMA CXCVIII.

463. *Datis parametro & axe transverso AB, invenire distantiam foci a vertice AF.*

Sit parameter = b , $AB = a$, erit $FN = \frac{1}{2}b$ (§.395) & (§.459),

$$b:a = \frac{1}{4}bb:ax + xx$$

$$\frac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\frac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)} = \frac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a = x$$

Invenitur adeo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ mediam proportionalem, ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$. Vel, quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab} = CE$ (§.461), si fiat $AG = EC$, erit $GC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare cum sit $AC = \frac{1}{2}a$, si ex centro C radio CG describatur arcus GF axem secans in F, erit $AF = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$, adeoque in F focus.

COROLLARIUM I.

464. Est adeo distantia foci a centro $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$. Quare si $FC^2 = c^2$, erit $CE^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM II.

465. Quia $ax + xx = \frac{1}{4}ab$ & $ax + xx = AF.FB$, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§.461), rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

Yy 3

PRO-

PROBLEMA CXCIX.

Tab. 466. Invenire rationem semiordina-
III. tarum PM & pm.

Fig.40. Sit axis transversus = a, parameter = b, AP = x, PM = y, Ap = v, pm = z; erit (§.460)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bxx}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}$$

$$= ax + xx : av + v^2 \text{ (§.124).}$$

$$= (a + x)x : (a + v)v$$

Theorema. In Hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM.

467. Crescentibus adeo abscissis x, crescent quoque rectangula ax + x², consequenter & quadrata semiordinatarum y², adeoque semiordinate ipsæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA CC.

468. Invenire rationem axis transversi ad axem conjugatum.

Si axis transversus = a, parameter = b, erit quadratum axis conjugati = ab (§.461). Hoc ergo ad quadratum transversi, ut ab ad aa, hoc est, ut b ad a (§.124).

Theorema. Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum.

COROLLARIUM.

Tab. 469. Quoniam b : a = PM² : AP. PB (§. 459); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi ut quadratum semiordinate ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa & axe transverso.

PROBLEMA CCI.

470. Sint duæ Hyperbola æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes AN & BY cum axe trans-

verso communi AB in directum jacent. Tab. Ex focus F & f ad punctum M Hyperbole III. unius ducantur rectæ fM & FM: deter- Fig.37. minare quantitatem harum rectarum.

Sit FC = fC = c, reliqua ut in præcedentibus: erit AF = c - 1/2 a, Af = c + 1/2 a, PF = x - c + 1/2 a, Pf = c + 1/2 a + x, PF² = x² - 2cx + c² + ax - ac + 1/4 a², Pf² = c² + ac + 1/2 a² + 2cx + ax + x².

Jam (§.464) quadratum semiaxis conjugati CE = cc - 1/4 aa. Porro (§.469)

$$AC^2 : CE^2 = AP. BP : PM^2$$

$$\frac{1}{4} aa : cc - \frac{1}{4} aa = ax + xx : PM^2$$

Est itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2 x : a + 4c^2 x^2 : a^2$$

$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4} a^2$$

$$FM^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4} a^2 - 2cx + \frac{4c^2 x}{a} + \frac{4c^2 x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \frac{1}{2} a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2 x : a + 4c^2 x^2 : a^2$$

$$Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4} a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4} a^2 + 2cx + \frac{4c^2 x}{a} + \frac{4c^2 x^2}{a^2}$$

$$fM = c + \frac{1}{2} a + 2cx : a$$

$$FM = c - \frac{1}{2} a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM I.

471. Datis ergo axe transverso & distantia a vertice, Hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focus F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsum superet axe transverso AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & stilo ad filum applicato regula emoveatur.

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. IV. Fig. 50. 472. Iisdem datis, puncta quotcunque Hyperbolæ determinantur, si ex foco *f* intervallo quocunque AB majore describatur arcus, factò *fb* = AB, intervallo residuo *bm* ex F ducatur arcus alius priorem in *m* interfecans, erit enim ob *fm* - *Fm* = AB, *m* punctum hyperbolæ (§. 470) Vel commodius hyperbola ita describitur: Fiat AB axi transverso æqualis, determinanturque foci *f* & *F* (§. 463.). Jungatur ipsi *f* O recta *fK* sub angulo acuto quocunque, & ex centro *f* radiis ipsa *fA* majoribus describantur arcus quotcunque concentrici secantes rectam *fK* in I, II, III, &c. Fiat *fL* = AB, & ex foco *F* intervallis LI, LII, LIII &c. interfecentur arcus isti utrinque in 1, 2, 3; erunt puncta 1, 2, 3 &c. in Hyperbola. Est enim *fI* = *fI*, *fII* = *f2*, *fIII* = *f3* &c. (§. 40 Geom.). Sed *F1* = LI, *F2* = LII, *F3* = LIII &c. per constr. Ergo *fI* - *F1* = *fI* - LI = AB, *f2* - *F2* = *fII* - LII = AB, *f3* - *F3* = *fIII* - LIII = AB &c. consequenter puncta 1, 2, 3, &c. in Hyperbola (§. 470).

PROBLEMA CCII.

Tab. IV. Fig. 51. 473. Determinare situm rectæ DE, quæ per verticem A ipsi ordinatæ Mm parallela ducitur.

Sit AP = *x*, PM = *y*, parameter = *b*, axis transversus = *a*: erit $y^2 = bx + bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A sit *x* = 0; erit etiam *y* = 0; consequenter DE tota extra Hyperbolam cadit, eamque adeo tangit.

Theorema. Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur; Hyperbolam in A tangit.

DEFINITIO XL.

Tab. IV. Fig. 51. 474. Si recta DE per verticem Hyperbolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi; præterea ex centro C per D & E agan-

tur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Asymptotæ Hyperbolæ*.

COROLLARIUM I.

475. Quoniam (§. 268 Geom.) CA : AE = CP : Pr, & CA : (DA) AE = CP : PR; erit Pr = PR (§. 177 Arithm.). Quare cum sit PM = Pm (§. 370); erit quoque MR = mr (§. 91 Arithm.).

COROLLARIUM II.

476. Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE; erit EA : ED = AI : DC (§. 268 Geom.). Sed EA = $\frac{1}{2}$ ED (§. 474). Ergo AI = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ CE. Et quoniam porro EA : AD = EI : IC (§. 268 Geom.); erit EI = CI = $\frac{1}{2}$ EC; consequenter AI = CI (§. 87).

DEFINITIO XLI.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia Hyperbolæ*.

PROBLEMA CCIII.

478. Determinare potentiam Hyperbolæ.

Sit CA = $\frac{1}{2}a$, AE = $\frac{1}{2}c$, erit CE = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$ (§. 417 Geom.); adeoque CI = $\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$. Ergo CI² = $\frac{1}{16}(aa + cc)$.

Theorema: Potentia Hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

COROLLARIUM.

479. Quoniam *cc* = *ab* (§. 461); erit CI² = $\frac{1}{16}(aa + ab) = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$; hoc est potentia Hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transversi in quartam partem aggregati ex axe transverso & parametro.

PROBLEMA CCIV.

480. Determinare differentiam quadratorum PM & PR.

Quoniam

Tab. IV. Fig. 51.

Tab. IV. Quoniam $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 461), &
 Fig. 51. $CP = \frac{1}{2}a + x$; præterea (§. 268 Geom.)
 $CA : AD = CP : PR$

$$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR$$

$$\text{erit } PR = \left(\frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{4}ab} + x \sqrt{\frac{1}{4}ab} \right) : \frac{1}{2}a$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x \sqrt{\frac{1}{4}ab} : a. \text{ Quare}$$

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$

$$PM^2 \quad bx + bx^2 : a \quad (\text{§. 460})$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2$$

Theorema. Si in Hyperbola semiordinata PM producat, donec asymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato semiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Crescente adeo semiordinata PM, decrescit recta MR, adeoque Hyperbola ad asymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere potest, quia cum fit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLIUM.

482. En rationem, cur lineas CF & CG ἀστυπτότας seu non coincidentes vocaverint Veteres.

PROBLEMA CCV.

483. Determinare quantitatem rectanguli ex MR in Mr.

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, consequenter $MR \cdot Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema. In Hyperbola rectangulum ex MR & Mr æquatur differentie quadratorum PR^2 & PM^2 .

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum æquale est quadrato semiaxis conjugati DA (§. 480), consequenter omnia rectangula eodem modo formata æqualia sunt.

PROBLEMA CCVI.

485. Si QM & sm cum asymptoto CG,

qm & SM cum altera CF parallela ducantur; determinare rationem rectangulorum QM. MS & qm. ms. Tab. IV. Fig. 51.

Sit $MR = mr = a$, $Rm = rM = b^2 QM = v$, $mq = z$. Erit (§. 268 Geom.)

$$RM : MQ = Rm : ms$$

$$a : v = b : (bv : a)$$

$$rm : mq = rM : MS$$

$$a : z = b : (bz : a)$$

Ergo $MQ \cdot MS = bvz : a$, & $mq \cdot ms = bvz : a$; consequenter $MQ \cdot MS = mq \cdot ms$.

Theorema. Si QM & ms cum asymptoto CG; qm vero & MS cum altera CF parallela ducantur; rectangula ex QM in MS & qm in ms æqualia sunt.

COROLLARIUM.

486. Quoniam $Cq = sm$ & $CQ = MS$ (§. 257 Geom.); etiam rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM æqualia sunt.

PROBLEMA CCVII.

487. Determinare rationem rectanguli ex qm in ms ad potentiam Hyperbolæ, seu AI^2 .

Sit $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$: erit, ob parallelas AE & Pr, ang. E = r, & ob parallelas AI & qm, ang. I = q (§. 233 Geom.); consequenter (§. 267 Geom.)

$$mr : qm = AE : AI$$

$$z : y = c : (cy : z)$$

Porro ob mR. $mr = AE^2$ (§. 484) erit (§. 299 Arithm.)

$$mr : AE = AE : mR$$

$$z : c = c : (cc : z)$$

Denique ob parallelas sm & MQ (§. 268 Geom.)

$$RM : MQ = Rm : ms$$

$$z : y = (cc : z) : (ccy : zz)$$

Ergo $mr = RM$ (§. 475); cumque

Tab. IV. que fit $mr : qm = AE : AI$, & $MR : QM = DA : HA = AE : AI$, per Fig. 51. demonstr., etiam $MQ = mq$ (§. 177 Aritih.).

Quare $sm. qm = Cq. qm = ccyy : zz$. Est vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $sm. qm = AI^2$.

Theorema. Si qm asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex Cq in qm æquatur potentia Hyperbolæ.

COROLLARIUM I.

488. Quare si fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ est æquatio naturam Hyperbolæ intra asymptotos declarans.

COROLLARIUM II.

489. Datis ergo asymptotis positione & latere potentia Hyperbolæ CI vel AI , si in una asymptotorum CG sumantur abscissa quotcunque, invenientur totidem semiordinata & per eas puncta quotlibet Hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentia CI tertias proportionales (§. 272 Geom.). Nimirum sint AB & AC asymptoti, $AD = DI = a$ latus potentia Hyperbolæ. Sit $AP = x$. Ducatur FG parallela ipsi AC , & PN parallela ipsi DI ; erit $PN = DI$ (§. 257 Geom.) = a . Ducatur AN secans DI in H : erit (§. 268 Geom.)

$$AP : PN = AD : DH$$

$$x : a = a : DH$$

adeoque $DH = a^2 : x$. Quare si fiat $PM (= y) = DH$: erit $y = a^2 : x$; consequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in Hyperbola (§. 488).

COROLLARIUM III.

Tab. IV. Fig. 51. 490. Quodsi abscissa non computentur a centro C , sed ab alio quovis puncto L , dicaturque $CL = b$; erit $Cq = b + x$; consequenter $a^2 = by + xy$.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

PROBLEMA CVIII.

491. Determinare in Hyperbola sub-tangentem PI & subnormalem PR .

Tab. III. Fig. 42.

Sit parameter = b , axis transversus = a , $AP = x$, $PM = y$, $RM = z$, $RA = t$, erit $PR = t - x$, $PM^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$ (§. 417 Geom.). Quare (§. 460)

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$

$$\frac{az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2}{bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0}$$

$$- 2atx - az^2$$

$$b + a$$

$$x^2 + \frac{ab - 2at}{b + a} x + \frac{at^2 - az^2}{b + a} = 0$$

Fiat jam, ob rationes supra (§. 410) allatas, $x - v = 0$: erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$(ab - 2at) : (b + a) = - 2v$$

$$ab - 2at = - 2bv - 2av$$

$$ab + 2bv + 2av = 2at$$

$$2a$$

$$\frac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc est, quia $x = v$,

$$\frac{1}{2}b + bx : a + x = t = RA.$$

$$\text{Ergo } PR = \frac{1}{2}b + bx : a + x = x = \frac{1}{2}b + bx : a = (\frac{1}{2}a + x)b : a.$$

Theorema. In Hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

Porro (§. 409)

$$PR : PM = PM : PT$$

$$\frac{\frac{1}{2}a + x}{a} b : \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})} = \sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})} : PT$$

$$\text{Reperitur ergo } PI = (abx + bx^2) :$$

$$(\frac{1}{2}a + x)b = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x).$$

Z z

Theo-

Tab. III. *Theorema.* In Hyperbola est ut aggregatum ex femiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita aggregatum ex integro axe transverso & abscissa ad subtangentem.

$$\begin{aligned} \text{Denique } AT &= (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x) \\ -x &= (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : (\frac{1}{2}a + x) \\ &= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x). \end{aligned}$$

Theorema. In Hyperbola est ut aggregatum ex femiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita femiaxis transversus ad rectam AT inter verticem & tangentem intercepta.

PROBLEMA CCIX.

Tab. V. 492. *Ducta NO tangenti TM parallela, & ex centro C per contactum M recta CQ, qua NO secat in G; determinare rationem segmentorum GN & GO.*

Demittatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec rectæ OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro HG ad ND & GF, MP, OL ad axem AS perpendiculares: erit GI ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Sit AB axis transversus = a, AP = x, PM = y, PC = $\frac{1}{2}a + x = p$, GI = HS = v, GF = HD = z, erit IF = DS = LO = z - v, & (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

Ob parallelas TM & GO (§. 233 *Geom.*) angulus GKI = PTM & ob parallelas KI & OF per constr. angulus GKI = GOF; consequenter GOT = PTM. Quare, cum præterea F & P sint recti; erit (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} = z : \frac{(ax + xx)z}{(\frac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur, brevitatis gratia, $ax + xx = q$ & $\frac{1}{2}a + x = p$, ut ante, erit FO = qz : py. Ergo LC = IC - FO = pv : y - qz : py =

$$\begin{aligned} (p^2v - qz) : py, \text{ \& LA} = \text{LC} - \text{AC} \\ = (p^2v - qz - \frac{1}{2}apy) : py, \text{ LB} = \text{LC} + \text{CB} \\ \text{CB} = (p^2v - qz + \frac{1}{2}apy) : py. \text{ Est vero} \\ (\S. 466) \end{aligned}$$

$$AP. PB : AL. LB = PM^2 : OL^2$$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL^2$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam yy = (ax + xx) b : a (§. 459). Cum itaque posuerimus ax + xx = q; yy = bq : a. Hoc valore in expressione ipsius OL² substituto, habetur

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$$

Enim vero OL² = z² - 2zv + v². Habemus adeo

$$\begin{aligned} z^2 - 2zv + v^2 &= \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q} \\ p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 &= p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq \\ \frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 &= q^2z^2 - p^2qz^2 \\ z^2 &= \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q} \end{aligned}$$

Quodsi HN dicatur z, & calculus eodem modo instituat; reperietur denuo z² = $\frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$.

Unde liquet esse HN² = GF² = HD²; consequenter HN = HD. Quoniam igitur (§. 268 *Geom.*) HN : HD = NG : GO; erit NG = GO.

Theorema. Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

COROLLARIUM.

493. Est itaque CQ diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§. 368); MC vero est semidiameter transversa.

PRO-

PROBLEMA CCX.

Tab.V. 494. *Ductis duabus rectis Hm & mK ex eodem Hyperbolæ puncto m, utrinque in asymptotis CQ & CT terminatis, itidemque duabus aliis LN & NO prioribus parallelis; determinare rationem rectangulorum Hm. mK & LN. NO.*

Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad asymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm \cdot mr = QN \cdot NT$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$

$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam, ob parallelas mr & NT , angulus $r = T$; &, ob parallelas Km & NO , $K = O$ (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$

$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob similem rationem, nempe similitudinem $\triangle\triangle QLN$ & RHm

$$Rm : Hm = QN : LN$$

$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN \cdot NO = abzy$; $zy = ab$. Est vero etiam $Hm \cdot mK = ab$. Sunt igitur duo ista rectangula æqualia.

Theorema. Si intra asymptotos Hyperbolæ, ex ejus puncto m ducantur utcumque duæ rectæ Hm & mK , & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO ; erit $Hm \cdot mK = LN \cdot NO$.

Idem invenitur, si ductæ rectæ Hmk agatur parallela LN . Nempe in hoc etiam casu $Hm \cdot mk = LN \cdot No$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis

eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis Tab.V. eodem modo formata inter se æqualia sunt. Fig. 53.

PROBLEMA CCXI.

496. *Si recta Hk utcumque intra asymptotos CQ & CT ducatur; determinare rationem segmentorum HE & mk inter Hyperbolam & asymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & m rectæ IG & Rr ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE \cdot EG = Rm \cdot mr$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mR : IE = EG : mr$$

$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro, ob IG ipsi Rr parallelam, (§. 268 *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$

$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$

$$mr : km = EG : Ek$$

$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Est itaque $Ek \cdot EH = abxy$; $ab = xy = Hm \cdot mk$. Quare

$$Ek : mk = mH : HE$$

$$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$$

(§. 193 *Arithm.*)

$$h. c. Em : mk = Em : HE.$$

consequenter $mk = HE$ (§. 177 *Arithm.*).

Theorema. Si inter asymptotos recta Hk utcumque ducatur, segmenta HE & mk inter Hyperbolam & asymptotos utrinque intercepta æqualia sunt.

COROLLARIUM I.

497. Quando fit $Em = 0$; recta Hk Hyperbolam tangit. Tangens adeo FD inter asymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

Zz 2

COROL:

COROLLARIUM II.

Tab.V. 498. Rectangulum itaque ex segmentis *Hm* & *mk* rectæ tangenti *FD* parallelæ æquatur quadrato tangenti dimidiæ *DV* (§. 495).

PROBLEMA CCXII.

Tab.V. 499. Determinare relationem semior-dinatæ *PM* ad diametri abscissam *AP*. Fig. 54.

Sit *AB* diameter transversa, *DE* diameter conjugata, adeoque ordinatæ *NM* parallela, *C* centrum Hyperbolæ & *CQ* atque *CR* sint ejus asymptotæ. Fiat *DA* = *c*, *CA* = *r*, *PM* = *y*, *CP* = *v* & *CB* = *AC*: erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$

$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare $RM = \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$, & $MQ = \frac{cv + ry}{r}$, consequenter $RM \cdot MQ = \frac{(c^2v^2 - r^2y^2)}{r^2}$. Est vero $RM \cdot MQ = DA^2 = c^2$ (§. 498). Habemus itaque

$$\frac{(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2 = c^2}{c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2}$$

$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam,

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$

$$PM^2 : AP \cdot PB = DA^2 : AC^2$$

Est nimirum $BP = BC + CP = r + v$ & $AP = CP - CA = v - r$, adeoque $AP \cdot PB = (v - r)(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema. Quadratum semiorinatæ in Hyperbolæ est ad rectangulum ex abscissa & aggregato ex diametro transversa *AB* & abscissa *AP*, ut quadratum semidiametri conjugatæ *AD* ad quadratum semidiametri transversæ *CA*.

COROLLARIUM.

500. Quodsi fiat $AP = x$, & $2r = AB$ Tab.V. = *a*, erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, consequenter Fig. 54. $y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \frac{1}{4}aa = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$.

Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio Hyperbolæ naturam definit respectu diametri, quæ eam exprimit respectu axis, estque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas *DE* & *AB*. Unde liquet easdem proprietates Hyperbolæ competere respectu diametri, quæ superius ex æquatione fundamentali respectu axis deduximus.

PROBLEMA CCXIII.

501. Duëtis *AF* & *TN* asymptoto *CR* parallelis, determinare rationem rectanguli ex *TN* in *TC* ad rectangulum ex *AF* in *FC*.

Sit $CF = a$, $AF = b$; $AD = c$, $RN = z$, erit ob $AE = DA$, etiam $EF = FC = a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam $RN \cdot NQ = DA^2$ (§. 498), erit (§. 299 *Arith.*)

$$RN : DA = DA : NQ$$

$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro, ob parallelas *AF* & *NT*, angulus $F = T$, & ob parallelas *AE* & *GN*, angulus $E = Q$ (§. 133. *Geom.*), ideoque (§. 267 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$

$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$

$$AE : FE = QN : TQ$$

$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

Et $QN : QT = RN : TC$ (§. 263. *Geom.*)

$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

$$\text{Ergo } TC \cdot TN = \frac{azbc}{cz} = ab = CF \cdot AF.$$

Theo-

Tab. V.
Fig. 54.

Theorema. Si ex vertice A & quocunque Hyperbolæ puncto N ducantur AF & TN cum asymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex TN in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodsi adeo fiat $TC = x$, $TN = y$; æquatio Hyperbolæ naturam inter asymptotos respectu diametri declarans erit $xy = ab$.

PROBLEMA CCXIV.

Tab. XII.
Fig. 119.

503. *Determinare quantitatem rectæ FO ex foco F ad tangentem Hyperbolæ TM perpendicularis.*

Eodem prorsus, quo supra (§. 457), modo reperitur FO. $RM = PR$. TF, ut verba singula huc transcribere liceat.

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantæ foci a semiorinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA CCXV.

504. *Si in F fuerit focus hyperbolæ & MR ad eam normalis, HR vero normalis ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam; determinare quantitatem segmentorum MH & HF.*

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit $FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$ (§. 470), $PR = (\frac{1}{2}ab + bx) : a$ & $AT = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$ (§. 491), $AF = c - \frac{1}{2}a$, $TF = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x) + c - \frac{1}{2}a = ax : (a + 2x) + c - \frac{1}{2}a = (ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx) : (a + 2x)$. Ducta FO ad Tangentem TM perpendiculari, reperitur, prorsus ut supra, iisdem retentis verbis, $FM : TF = PR : MH$ (§. 458). Quare

$$c - \frac{1}{2}a + \frac{2cx}{a} : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ab + bx}{a} : MH$$

Hoc est

$$2ac - a^2 + 4cx : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = ab + 2bx : MH$$

(§. 184 Arith.)

$$\frac{2ac - a^2 + 4cx}{a + 2x} : \frac{ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx}{a + 2x} = b : MH$$

(§. 183 Arith.)

Est ergo $MH = \frac{1}{2}b$ (§. 149 Arithm.).

Theorema. Si MR fuerit ad Hyperbolam normalis, & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XLII.

505. *Hyperbola æquilatera dicitur, in qua axes conjugati AB & DE sunt æquales.*

COROLLARIUM I.

506. Cum parameter sit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipsa etiam axibus æqualis est.

COROLLARIUM II.

507. Quare si in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam Hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROLLARIUM III.

508. Hinc quadrata ordinarum y^2 & z^2 sunt inter se ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc est, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM IV.

509. Si sint $CP = x$, $CA = r$, erit $AP = x - r$ & $PB = x + r$ consequenter $y^2 = x^2 - r^2$.

COROLLARIUM V.

510. Quoniam $AE = CA$ (§. 505); erit ACE angulus semirectus (§. 241 Geom.); consequenter angulus asymptotorum FCG in Hyperbola æquilatera rectus.

Tab. XII.
Fig. 119.

Tab. 4
IV.
Fig. 51.

PROBLEMA CCXVI.

Tab.V. 511. Investigare naturam curvæ, que
Fig.55. oritur, si conus ABC ita secetur ut sec-
tionis axis DE sit lateri coni AC paral-
lelus, ipsum vero planum sectionis DLN
ad basin sectionis triangularis AB per-
pendicularis.

Secetur conus plano HMI basi ANB
parallelo: erit HMI circulus (§. 468
Geom.); consequenter cum uterque
circulus HMI & ANB per sectionem
triangularem ACB secetur in HI &
AB, & a sectione data in pM & LN;
erunt cum HI & AB, tum pM & LN
inter se parallelæ (§.499 Geom.). Qua-
re cum sit EN perpendicularis ad AB
per hypoth. erit etiam PM perpendicu-
laris ad HI (§.492 Geom.); consequen-
ter cum DE & HI, itemque DE & AB
sint in eodem plano sectionis triangula-
ris, EN & PM etiam perpendiculares
sunt ad DE (§. 484 Geom.); adeoque
semiordinatæ ad axem DE applicatæ
(§.368, 370). Et quia AH parallela ipsi
EP, per hypoth. HP parallela ipsi AE, per
demonstr. erit HP=AE (§.257 Geom.).
Sit jam AE=HP=v, PI=t, DP=x,
DE=z; erit (§. 268 Geom.)

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo $PM^2 = HP \cdot PI$ (§. 377) = tv
& $EN^2 = AE \cdot EB$ (§.cit.) = $tzv : x$. Est
ergo (positis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

$$\text{hoc est} = tvx : tzv \quad (\S. 124)$$

$$= x : z$$

Est itaque curva NMDpL Parabo-
la (§. 402).

PROBLEMA CCXVII.

512. Si conus ABC ita secetur, ut
axis sectionis DE cum diametro basis AB
continuata in F concurrat, & planum
sectionis continuatum eam ad angulos
rectos secet; invenire naturam curvæ ex
hac sectione procedentis DMNELD.

Eodem, quo ante (§. 511) modo of-
tenditur esse PM & QN cum semiordi-
natas circulorum IMH & LNK, tum
curvæ DMNE. Sit jam $DE = a$, $DP = x$,
 $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$; erit $PE =$
 $a - x$, $QE = a - v$, & (§. 268 Geom.)

$$DP : PH = DQ : QK$$

$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

$$EQ : QL = EP : PI$$

$$a - v : s = a - x : \frac{sa - sx}{a - v}$$

Quare (§. 377) $PM^2 = HP \cdot PI =$
 $(tsa - tsx) : (a - v)$, & $QN^2 = KQ \cdot$
 $QL = vts : x$. Est adeo

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa - tsx}{a - v} : \frac{vts}{x}$$

$$\text{hoc est,} = tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$$

$$(\S. 124) = ax - x^2 : av - v^2$$

Est itaque curva DMNELD Ellip-
fis (§. 429).

PROBLEMA CCXVIII.

513. Si conus ABC ita secetur, ut
axis sectionis DQ continuatus cum late-
re coni AC continuato in E concurrat,
planum vero sectionis DLN secet diame-
trum basis AB ad angulos rectos; inve-
nire naturam curvæ DMN, qua ex hac
sectione resultat.

Eodem modo, quo paulo ante
(§. 511), ostenditur, QN & PM esse
semiordinatas cum circulorum HMI
atque

Tab. atque ANB, tum curvæ DMN.
 IV. Sit ED = a, DP = x, DQ = v, PH
 Fig. 57. = t, PI = s; erit EP = a + x, EQ = a + v, & (§. 268 Geom.)

$$EP : PH = EQ : AQ$$

$$a + x : t = a + v : \frac{at + vt}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$

$$x : s = v : \frac{sv}{x}$$

Ergo HP. PI = ts & AQ. QB = (atsv + v²ts) : (ax + x²); consequenter ob PM² = HP. PI, & QN² = AQ. QB (§. 377),

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{astv + vst}{ax + xx}$$

$$\text{hoc est,} = 1 : \frac{av + vv}{ax + xx}$$

$$(\text{§. 124}) = ax + xx : av + vv$$

Est itaque LDMN Hyperbola (§. 466), DE ejus axis transversus, E vertex Hyperbolæ oppositæ.

SCHOLIUM.

514. Hinc intelligimus, quod statim ab initio Parabolam, Hyperbolam atque Ellipsin tanquam ex Cono sectas proponere, & ex indole sectionis æquationem fundamentalem eruere licuisset, nisi nobis constitutum fuisset ostendere, quomodo ex æquationibus utcumque assumtis, vel datis, curvarum proprietates ac descriptiones per Algebram & Arithmeticam speciosam eruere debeamus. Immo potuissent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum descriptiones fundamenti loco assumi & inde æquationes elici: quod ut appareat, unum de Ellipsi exemplum proposuisse suffecerit.

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. 515. Sit descripta curva ADMB, circumductu regula GM in instrumento, cujus structura ex Fig. 59 Tab. IV

manifesta est, ita ut paxilli in E defixi Tab. basis mobilis incedat per canalem ab, IV. alterius vero in F per cd; investigare Fig. naturam ejus. 58.59.

Ex curvæ descriptione manifestum, esse longitudinem regulæ EM axi majori dimidio CB, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, consequenter distantiam paxillorum EF differentiam inter semiaxem majorem AC & semiaxem minorem DC.

Assumamus itaque quemcumque regulæ situm EFM (Fig. 58) & determinetur curva, in qua sit punctum ejus M. Demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat CP = RM = x, PM = y, AC = EM = a, CD = FM = b, erit EF = a - b & (§. 268 Geom.)

$$EM : MR = EF : FC$$

$$a : x = a - b : \frac{ax - bx}{a}$$

Ergo PF = x - x + bx : a = bx : a

Hinc PM² = FM² - FP² (§. 417 Geom.) = b² - b² x² : a² = (a² b² - b² x²) : a² = y².

Est adeo curva ADMB Ellipsis (§. 432).

DEFINITIO XLIII.

516. Circuli superiorum generum sunt Tab. curvæ, in quibus est AP^m : PM^m = PM : III. PB vel etiam AP^m : PM^m = PMⁿ : PBⁿ. Fig. 38.

COROLLARIUM I.

517. Sit AP = x, PM = y, AB = a: erit PB = a - x, consequenter x^m : y^m = y : a - x. Hinc æquatio infinitos circulos definiens est y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}, & alios adhuc infinitos definiens y^{m+n} = (a - x)ⁿ x^m.

COROL-

COROLLARIUM II.

518. Si $m = 1$, erit $y^2 = ax - x^2$, adeoque circulus primi generis sub hac æquatione una continetur. Si $m = 2$, $n = 1$, erit $y^3 = ax^2 - x^3$: quæ æquatio circulum secundi generis definit.

DEFINITIO XLIV.

519. *Parabola superiorum generum* sunt curvæ algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1}x = y^m$, ex. gr. per $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$, $a^5x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: speciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, si $a^2x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem*, si $a^3x = y^4$; *surdesolidalem* si $a^4x = y^5$ &c. Harum curvarum respectu *Parabola* primi generis superius explicata dicitur *Apolloniana*, item *quadratica*. Ad Parabolas quoque referri solent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $a^2x = y^3$, $ax^3 = y^4$: quia a nonnullis *semiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur sub communi æquatione $a^m x^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas, in quibus $a^2x^2 = y^4$, $a^2x^3 = y^5$, $a^3x^4 = y^7$.

COROLLARIUM I.

520. Cum in *Parabolis superiorum generum* sit $y^m = a^{m-1}x$; si alia quæcunque semiordinata dicatur v , abscissa ipsi respondens z , erit $v^m = a^{m-1}z$, consequenter

$$y^m : v^m = a^{m-1}x : a^{m-1}z$$

hoc est, $= x : z$

Communis adeo *Parabolarum* proprietas est, quod *ordinatarum potentia rationem abscissarum habeant*.

COROLLARIUM II.

521. In *semiparabolis* vero est $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1} = x^{m-1} : z^{m-1}$, seu *potentia semiordinatarum sunt ut poten-*

tia abscissarum uno gradu inferiores; ex. gr. in *semiparabolis cubicalibus* cubi *ordinatarum* y^3 & v^3 sunt ut *quadrata abscissarum* x^2 & z^2 . Et in genere in omnibus *curvis Parabolæ agnatis* $y^{m+n} : v^{m+n} = a^m x^n : a^m z^n = x^n : z^n$.

DEFINITIO XLV.

522. *Ellipses infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m(a-x)^n$, quæ a nonnullis *Elliptoides* dicuntur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$. Ex. gr. *Elliptoidem cubicalem*, si $ay^3 = bx^2(a-x)$; *Elliptoidem biquadraticalem* appellant *Ellipsin* tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2(a-x)^2$. Harum curvarum respectu *Ellipsis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM I.

523. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abscissa respondens z ; erit $av^{m+n} = bz^m(a-z)^n$, consequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m(a-x)^n : bz^m(a-z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m(a-x)^n : z^m(a-z)^n$.

COROLLARIUM II.

524. Si fiat $a = b$, erit $y^{m+n} = x^m(a-x)^n$ & si porro fiat $n = 1$, erit $y^{m+1} = x^m(a-x) = ax^m - x^{m+1}$, hoc est, *Ellipses superiorum generum degenerant in Circulos superiorum generum*.

DEFINITIO XLVI.

525. *Hyperbolas infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$ ex. gr. $ay^3 = bx^2(a+x)$. Et harum curvarum respectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* salutatur.

COROL-

COROLLARIUM.

526. Est ergo in infinitis Hyperbolicis
 $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a+x)^n : bz^m (a+z)^n$
 hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a+x)^n : z^m (a+z)^n$.

DEFINITIO XLVII.

527. Conos superiorum generum appello, quorum bases & sectiones basi-
 bus parallelæ sunt circuli superiorum generum. Generatur istiusmodi Conus, si recta linea AC in puncto sublimi C fixa, sed quæ pro re nata magis aut minus extendi posse concipitur, circa peripheriam circuli ANB convertatur.

PROBLEMA CCXX.

Tab.V. Fig.55. 528. Investigare naturas curvarum, quæ procedunt, si coni superiorum generum ita secantur, ut axis sectionis DE sit lateri coni AC parallelus, planum vero sectionis LDN secet diametrum basis AB ad angulos rectos.

Eodem, quo supra (§.511) modo ostenditur, esse PM & EN inter se parallelas & cum circulo HMI atque ANB, tum curvæ LDN semiordinatas. Sit PM=y, EN=q, AE=HP=v, DP=x, DE=z, PI=t; reperietur ut in Probl. 216 (§.511), EB=tz:x. Est vero (§.516)

$$HP^m : PM^m = PM : PI$$

$$v^m : y^m = y : t$$

$$y^{m+1} = tv^m$$

Porro AE^m : EN^m = EN : EB.

$$v^m : q^m = q : (tz : x)$$

$$q^{m+1} = tzv^m : x$$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$ Tab.V. Fig.55.

hoc est $= 1 : \frac{z}{x} (\S.124).$

feu $= x : z$

Sunt ergo curvæ istæ Parabolæ superiorum generum (§.520).

Vel sit generaliter (§.516)

$$HP^m : PM^m = PM^m : PI^m$$

$$v : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n v^m$$

$$AE^m : EN^m = EN^n : EB^n$$

$$v^m : q^m = q^n : \frac{t^n z^n}{x^n}$$

$$q^{m+n} = \frac{t^n z^n v^m}{x^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : q^{m+n} = t^n v^m : \frac{t^n z^n v}{x^n}$$

$$= x^n : z^n$$

Sunt itaque curvæ DLN superiorum generum Parabolis agnatæ (§.521).

PROBLEMA CCXXI.

529. Investigare naturam curvarum, quæ enascuntur, si coni superiorum generum ita secantur, ut axis sectionis DE cum diametro basis AB continuata in F concurrat, planum vero sectionis continuatum eandem ad angulos rectos secet. Tab.V. Fig.56.

Patet, ut supra (§.511), PM & QN esse inter se parallelas atque semiordinatas cum circulo HMI & KNL, tum curvæ DMNE. Sit DE=a, DP=x, DQ=v, PH=t, QL=s, PM=y, QN=z; erit PE=a-x, QE=a-v & reperietur ut in Probl. 217 (§.512) QK=v:t:x, PI=(sa-sx):(a-v). Est vero (§.516)

A a a

IP

Tab.V. $IP^m : PM^m = PM^n : PH^n$

Fig. 56. $\frac{s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} \cdot y^m = y^n : t^n$

$$y^{m+n} = t^n s^m (a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $QL^m : QN^m = QN^n : KQ^n$

$$s^m : z^m = z^n : \frac{v^n t^n}{x^n}$$

$$z^{m+n} = t^n v^n s^m : x^n$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = \frac{t^n s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{v^n t^n s^m}{x^n}$$

$$\text{hoc est} = (a-x)^m x^n : (a-v)^m v^n$$

Sunt adeo curvæ istæ in numero Ellipticum superiorum generum (§. 523).

PROBLEMA CCXXII.

Tab. 530. Investigare naturam curvarum, IV. quæ gignuntur, si coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis DQ cum latere coni continuato AC, continuatus & ipse, in E concurrat, planum vero sectionis DLN diametrum basis AB ad angulos rectos secet.

Patet, ut supra (§. 511), PM & QN esse inter se parallelas, atque semior-dinatas cum circulorum HMI & ANB, tum curvæ DMN. Sit DE = a, DP = x, DQ = v, PH = t, PI = s; erit EP = a + x, EQ = a + v, & reperietur ut in Probl. 218 (§. 513) AQ = t(a + v) : (a + x) & QB = sv : x. Est vero (§. 517)

$$PI^m : PM^m = PM^n : PH^n$$

$$s^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m$$

Porro $QB^m : QN^m = QN^n : AQ^n$

$$\frac{s^m v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n (a+v)^n}{(a+x)^n}$$

$$z^{m+n} = \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n s^m : \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

$$\text{hoc est (§. 124)} = 1 : \frac{v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

$$= x^m (a+x)^n : v^m (a+v)^n$$

Sunt adeo curvæ Hyperbolæ superiorum generum (§. 526.)

PROBLEMA CCXXIII.

531. Diametro semicirculi AB jun-Tab.V gatur ad angulos rectos recta AT, du- Fig. 60 canturque ex centro C secantes QC. Erigantur in Q normales QM ipsis QR æquales. Investigare naturam curvæ AMP, quæ est locus omnium punctorum M hac ratione inventorum.

Sit AQ = PM = y, QM = QR = x, AB = a, erit (§. 379 Geom.) $y^2 = ax + x^2$.

Est adeo curva AMR Hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§. 507).

COROLLARIUM.

532. Habemus adeo facilem Hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometricè determinata descriptionem.

PROBLEMA CCXXIV.

533. Invenire æquationem Hyperbolæ Tab. XIII. ad axem CR ex centro C ductæ & ad Fig. 124. axem transversum AB normalem relata.

Sit CQ = PM = x, CP = QM = y, CB = CA = a, erit BP = a + y, AP = y - a, adeoque BP. PA = $y^2 - a^2$. Sit porro parameter = b, erit (§. 459)

$$b : 2a = x^2 : y^2 - a^2$$

$$2ax^2 = by^2 - a^2 b$$

$$2ax^2 + a^2 b = by^2$$

$$\frac{2ax^2}{b} + a^2 = y^2$$

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. XIII. 534. Quodsi Hyperbola fuerit æquilate-
ra, erit $2a = b$ (§. 506), consequenter y^2
Fig. = $x^2 + a^2$, five $QM^2 = CQ^2 + CB^2$.
124.

DEFINITIO XLVIII.

Tab. VI. 535. Si ducatur recta BD & alia AC
ad ipsam in E perpendicularis, ex puncto
Fig. 61. C agantur rectæ quotcunque
CM rectam BD secantes in Q, fiatque
 $QM = QN = AE = EF$; Curva, in qua
sunt puncta M, dicitur a NICOMEDE
inventore *Conchilis* seu *Conchois prima*;
altera vero, in qua sunt puncta N, *Con-*
chois secunda; recta BD *regula*; punctum
C *Polus*. Excogitavit autem instrumen-
Fig. 62. tum, quo motu continuo Conchois pri-
ma describi potest. Nimirum in regula
AD excavatus est canalis, ut clavus te-
res regulæ mobili CB in F firmiter infi-
xus intra eam libere moveri possit. Re-
gulæ EG in K infigitur clavus alius, in
fissuram regulæ mobilis CB immittendus.
Quodsi regula BC ita moveatur, ut
clavus F canalem AD percurrat; stylus
in C Conchoidem primam describet.

COROLLARIUM I.

536. Sit $AP = x$, $AE = a$, erit $PE = MR$
 $= a - x$. Crescentibus adeo x , decrescit
 $a - x$ seu MR , adeoque curva continuo ad
regulam BD propius accedit. Eodem mo-
do patet, rectam NO continuo decrescere
debere, adeoque Conchoidem quoque in-
feriorem ad regulam continuo propius ac-
cedere.

COROLLARIUM II.

537. Quoniam tamen inter Conchoidem
utramque & rectam BD semper interjicitur
recta QM, vel QN, ipsi AE æqualis (§. 535);

neutra Conchoidum cum recta BD concurre-
re potest, consequenter BD est asymptotus
utriusque Conchoidis. Tab. VI. Fig. 61.

PROBLEMA CCXXV.

538. Invenire æquationem pro Con-
choide.

Sit $QM = AE = a$, $EC = b$, MR
 $= EP = x$, $ER = PM = y$, erit $CP =$
 $b + x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$PE : MQ = EC : CQ$$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Hinc $CM = a + ab : x = (ax + ab) :$
 x . Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$
(§. 417 *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx$
 $+ b^2 = (a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2) : x^2$;
consequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2 x^2 + b^2 x^2$
 $= a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2$: quæ est æqua-
tio naturam Conchoidis primæ expli-
cans.

Sit $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$,
 $GN = EO = y$; erit $GC = b - x$ &
(§. 268 *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$

$$x : a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo, ob $CN^2 = CG^2 +$
 GN^2 (§. 417 *Geom.*), $(a^2 b^2 - 2a^2 bx$
 $+ a^2 x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, hoc
est, $a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 = b^2 x^2 -$
 $2bx^3 + x^4 + x^2 y^2$: quæ est æquatio na-
turam Conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

539. Est adeo Conchois utraque linea
tertii generis (§. 382).

DEFINITIO XLIX.

540. Aliæ Conchoidum species pro-
deunt, si fiat $CE : CQ = QM : AE$, vel
indefinite si $CE^m : CQ^m = QM^n : AE^n$.

A a a 2

Co-

COROLLARIUM.

Tab. 541. Quare si $CE = b$, $AE = a$, CQ
VI. $= x$, $QM = y$, erit $ab = xy$ & pro infini-
Fig. 61. tis Conchoidibus $a^m b^n = x^m y^n$.

SCHOLIUM.

542. *Equatio hæc videtur eadem cum equatione Hyperbolæ inter asymptotos* (§. 486); eadem tamen non est, cum in presente casu equatio non exprimat relationem punctorum per rectas parallelas ad eandem rectam positione datam, quemadmodum in Hyperbola.

PROBLEMA CCXXVI.

543. *Invenire equationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* $CE : CQ = QM : AE$.

Sit $AE = a$, $CE = b$, $PM = y$, $PE = x$, erit $CP = b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§. 417 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) $CP : CM = CE : CQ = EP : QM$. Quare $CE \cdot EP : CQ \cdot QM = CP^2 : CM^2$ (§. 213 *Arithm.*), hoc est, ob $CQ \cdot QM = CE \cdot EA$ per *hypoth.*

$CE \cdot EP : CE \cdot EA = CP^2 : CM^2$
hoc est (§. 181 *Arith.*),
 $EP : EA = CP^2 : CM^2$
 $x : a - b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$
 $ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2 x + b^2 x + 2bx^2 + x^3$
quæ est æquatio desiderata.

DEFINITIO L.

Tab. 544. Diametro AB semicirculi AOB
VI. jungatur ad angulos rectos recta inde-
Fig. 63. finita BC . Ducatur recta AH , fiatque
 $AM = IH$, vel in altero quadrante $LC = AN$: erit punctum M , itemque L in curva $AMOL$, quam *Cissoidem* dixit *DIOCLES* inventor.

COROLLARIUM I.

545. Ducantur rectæ PM & KI ad AB Tab. normales; erunt eadem inter se parallelæ VI. (§. 256 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) $AP : Fig. 63. KB = AM : IH$. Sed $AM = IH$ (§. 544). Ergo $AP = KB$ (§. 149 *Arithm.*), consequenter $AK = PB$ (§. 88 *Arithm.*), & $PN = IK$.

COROLLARIUM II.

546. Eodem modo patet, *Cissoidem* AMO semicirculum AOB bifariam dividere. Est enim $AO : OF = AG : GB$ (§. 268 *Geom.*). Sed $AO = OF$ (§. 544). Ergo $AG = GB$ (§. 149 *Arithm.*). Est itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM III.

547. $AK : KI = KI : KB$ (§. 327 *Geom.*), hoc est, $AK : PN = PN : AP$ (§. 545). Porro $AK : (KI) PN = AP : PM$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $PN : AP = AP : PM$ (§. 167 *Arithm.*). Sunt adeo AK , PN , AP & PM quatuor lineæ continue proportionales & si fiat $PN = u$, $AP = x$, $PM = y$, $x^2 = uy$. Eodem modo ostenditur esse AP , PN , AK , KL continue proportionales.

PROBLEMA CCXXVII.

548. *Invenire equationem, quæ naturam Cissoidis AMOL declarat.*

Sit $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; erit $AK = PB$ (§. 545) $= a - x$, $KI = PN^2 = ax - x^2$ & (§. 547, 124)

$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$
 $a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

$$\frac{a^2 y^2 - 2axy^2 + x^2 y^2}{(a-x \text{ div.})} = \frac{ax^3 - x^4}{(a-x \text{ div.})}$$

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$\text{hoc est, } (a-x)y^2 = x^3$$

Theorema. In *Cissoide* *DIOCLES* cubus abscissæ AP æquatur solido ex quadrato semiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB .

COROL-

COROLLARIUM I.

Tab. VI. Fig. 63. 549. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & $BC = y$, consequenter $y^2 = \frac{a^3}{o}$. Quare $o : 1 = a^3 : y^2$, hoc est, valor ipsius y fit infinitus, adeoque Cissois AMOL cum BC nunquam concurrat. Est ergo BC Cissoidis asymptotus.

COROLLARIUM II.

550. Cissois est linea secundi generis (§. 382).

SCHOLIUM.

551. Veteres tam Conchoide, quam Cissoide usi sunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas, quemadmodum docet PAPPUS.

DEFINITIO LI.

Tab. VI. Fig. 64. 552. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales ipsique in punctis divisionum A, P, p &c. jungantur rectæ AN, PM, pm &c. continue proportionales, puncta N, M, m &c. in curva existunt, quæ Logistica, itemque Logarithmica vocari solet.

COROLLARIUM I.

553. Sunt ergo abscissæ AP, Ap &c. semiordinatarum PM, pm &c. logarithmi (§. 334 Arithm.).

COROLLARIUM II.

554. Hinc si $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, & logarithmi ipsorum y & $z = ly$ & lz ; erit $x = ly$ & $v = lz$; consequenter $x : v = ly : lz$, hoc est, denominatores rationum AN : PM & AN : pm sunt inter se ut abscissæ AP & Ap.

COROLLARIUM III.

555. Quamobrem infinitas alias logistica excogitare licet, si fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abscissarum potestates aut radices quæcunque (m nempe numerum fractum denotante) sint semiordinatarum logarithmi.

COROLLARIUM IV.

556. Cum semiordinatæ pm continuo decrescant, ratione AN ad pm cum abscissis continuo crescente (§. 552 *Analys. & S. 205 Arithm.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodsi pm ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipsius AN in infinitum augetur, consequenter & abscissa AP (§. 554.). Quare logistica nonnisi infinito intervallo cum axe concurrat, adeoque AX est ejus asymptotus.

Tab. VI. Fig. 64.

DEFINITIO LII.

557. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, p, p, &c. dividatur & ex radiis CP, Cp, Cp, &c. rescentur CM, Cm, Cm &c. continue proportionales; puncta M, m, m, &c. erunt in Logistica spirali.

Tab. VI. Fig. 65.

COROLLARIUM I.

558. Sunt ergo arcus AP, Ap &c. logarithmi ordinarum CM, Cm &c.

COROLLARIUM II.

559. Unde liquet, infinitas logistica spirales excogitari posse (§. 555).

DEFINITIO LIII.

560. Si quadrans BGD bifariam dividatur in G & arcus BG, GD denuo subdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariae longitudinis assumtus eodem modo dividatur in partes æquales Ab, bi, ik, kC, tandemque in punctis b, i, k, C applicentur normales eb, ig, kf, Cd ipsis HE, IG, KF, CD æquales; puncta A, e, g, f, d erunt in Linea, a LEIBNITIO inventore Linea Sinuum dicta.

Tab. VI. Fig. 66.

COROLLARIUM.

561. Cum HE, IG, KF, CD sint sinus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2 *Trigon.*) erunt abscissæ Ab, Ai, Ak, AC ut arcus seu anguli, semiordinatæ eb, ig, kf, Cd, ut sinus eorundem arcuum seu angulorum.

DEFINITIO LIV.

Tab. 562. Iisdem factis, quæ in definitio-
VI. ne præcedente fieri præcipimus, fiant
Fig. 66. *eh, ig, kf* &c; tangentibus BL, BM, BN
&c. vel secantibus CL, CM, CN &c.
æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur,
quas *Lineas Tangentium & Secantium*
appellare libet.

COROLLARIUM.

563. In linea tangentium abscissæ sunt
ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eo-
rundem tangentes: in secantium vero linea
abscissæ itidem sunt ut arcus seu anguli, se-
miordinatæ ut eorundem secantes.

DEFINITIO LV.

Tab. 564. Quadrans arcus ANB divida-
VI. tur in partes quotcunque æquales in
Fig. 67. N, *n* &c. per continuam bisectionem;
in totidem dividatur radius AC per
puncta P, *p* &c. Ducantur radii CN, *cn*
&c. denique ex punctis P, *p* &c. eri-
gantur perpendiculares PM, *pm* &c.
istis in punctis M, *m* &c. occurrentes:
erunt puncta M, *m* &c. in curva, quam
DINOSTRATES inventor *Quadratricem*
appellavit.

COROLLARIUM.

565. Est ergo ANB: AN = AC: AP. Qua-
re si fiat ANB = *a*, AC = *b*, AN = *x*, AP
= *y*; erit $ay = bx$.

DEFINITIO LVI.

Tab. 566. Si quadrans ANB & ejus ra-
VI. dius in partes æquales dividantur, ut in
Fig. 68. definitione præcedente, & ex punctis
P, *p* &c. agantur rectæ PM, *pm* &c. ip-
si CB; ex punctis N, *n* &c. rectæ NM, *nm*
&c. ipsi AC parallelæ: puncta M, *m*, &c.
sunt in *Quadratrice Tschirnhusiana* a D^{no}
DE TSCHIRNHAUSEN ad imitationem
alterius excogitata (*a*).

(a) In *Medicina Mentis* part. II. p. 114.

COROLLARIUM I.

567. Cum etiam hic ANB: AN = AC: AP. Tab.
AP; Quadratrix quoque *Tschirnhusiana* con- VI.
tinetur sub æquatione $ay = bx$. Fig. 68.

COROLLARIUM II.

568. Quoniam PM = QN, erit PM Sinus
arcus AN (§. 2. *Trigon.*). Quare cum sit
AP: Ap = AN: An (§. 566); abscissæ Qua-
dratricis hujus sunt ut arcus & semiordina-
tæ ut sinus eisdem respondententes, quemad-
modum in linea sinuum (§. 561).

DEFINITIO LVII.

569. Peripheria circuli APp A divi-
datur in partes quotcunque æquales in Tab.
punctis, P, *p*, per continuam bisectionem. VII.
In totidem partes dividatur radius Fig. 69.
CA, fiatque CM parti uni, Cm vero dua-
bus &c. partibus radii æqualis. Erunt
puncta M, *m*, &c. in linea curva,
quam ab inventore ARCHIMEDE dicunt
Spiralem vel *Helicem Archimedeam*.
Dicitur autem *Spiralis prima*, quia con-
tinuari potest, circulo duplo radio de-
scripto: immo *secunda* continuatur,
descripto radio circulo triplo & ita
porro in infinitum.

COROLLARIUM I.

570. Est ergo AP ad peripheriam ut CM
ad radium. Quare si peripheria dicatur *p*,
radius AC = *r*, AP = *x*, PM = *y*, erit CM
= *r - y*, consequenter ob $p : r = x : r - y$;
habebimus $pr - py = rx$.

COROLLARIUM II.

571. Si CM = *y*; erit $rx = py$: quam
æquationem cum Quadratrice tam DINOS-
TRATIS, quam TSCHIRNHUSII, communem
habet *spiralis*.

Co-

COROLLARIUM III.

572. Quare pro infinitis spiralibus & quadratricibus erit $r^n x^m = p^n y^m$.

DEFINITIO LVIII.

Tab. VII. Fig. 70. 573. Cyclois vel Trochois est curva, quam describit punctum a in peripheria circuli, si circulus super recta AC rotatur.

COROLLARIUM I.

574. Recta igitur AC peripheriæ; AD femiperipheriæ circuli æqualis est, & in quocumque circuli genitoris situ Ad arcui Pd.

COROLLARIUM II.

575. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui BM circuli genitoris æqualis. Est enim $Pd = Ad$ & hinc $Pb = dD$ (§. 574). Quare cum $NL = Dd$ (§. 226 Geom.) & ob $Pb = MB$ etiam $PN = ML$ (§. 12 Trigon.); erit etiam $PN + NM = PM = ML + NM = NL = Dd$; consequenter ob $Dd = Pb = MB$, per demonstr. $PM = MB$. Sumto igitur arcu MB pro abscissa, PM pro semiordinata, si $BM = x$, $PM = y$; erit $x = y$.

DEFINITIO LIX.

576. Epicyclois describitur, si circulus non ut in præcedente definitione super recta, sed super peripheria alterius circuli incedat. Dicitur Epicyclois superior, si circulus genitor per peripheriæ convexitatem rotatur: Epicyclois inferior, si ejus concavitatem emetitur.

SCHOLION I.

577. Logarithmica, Logistica spiralis, Linea sinuum, Linea tangentium, Linea secantium, Quadratrix DINOSTRATIS, Quadratrix Tschirnhufiana, Spiralis Archimedeæ, Cyclois, Epicyclois sunt lineæ transcendentes; neque enim per æquationes algebraicas expli-

cari possunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his assumserimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non sunt. Supposuimus enim superius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, per solas lineas rectas explicare debere.

SCHOLION II.

578. Innumera autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam transcendentes excogitari possunt & actu excogitata sunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime consultum est. Trademus autem in Analyfi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hætenus explicatarum, sed etiam aliarum quarumcunque symptomata, si quando iis opus habemus, erui possunt. Ut tamen appareat, quomodo plures excogitari possint; unum alterumque exemplum addere lubet.

PROBLEMA CCXXVIII.

§. 579. Invenire naturas curvarum, quæ prodeunt si semiordinata PM continentur in N, donec fiant chordis AM æquales. Tab. XII. Fig. 125.

Facile apparet, curvas infinitas, imo infinitas earum series construui posse. Æquatio igitur in dato casu speciali eruenda ex æquatione curvæ generatricis ABC. Sit ea circulus, cujus diameter a . Sit in omni casu $AP = x$, $PN = y$; erit $PM^2 = ax - x^2$ (§. 377). Quare cum $AP^2 = x^2$, & $AM^2 = AP^2 + PM^2$ (§. 417 Geom.); erit $AM^2 = ax$, consequenter æquatio ad curvam genitam AND, $y^2 = ax$. Est itaque curva AND Parabola (§. 388).

Sit curva genetrix AMC Parabola: erit $PM^2 = ax$ (§. 388); consequenter $AM^2 = PN^2 = ax + x^2$. Quoniam itaque

Tab. itaque æquatio ad curvam AND, y^2
XIII. $= ax + x^2$; erit ea Hyperbola æqui-
Fig. latera, cujus axis transversus $= a$ (§.
125. 507).

Sit curva genetrix AMC Hyperbola
æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, con-
sequenter $AM^2 = PN^2 = ax + 2x^2$.
Æquatio itaque ad curvam AND, y^2
 $= ax + 2x^2$, adeoque eadem Hyper-
bola scalena, cujus parameter a , axis
transversus vero $= \frac{1}{2}a$ (§.459).

Sit AMC Parabola secundi generis,
erit $PM = \sqrt[3]{a^2x}$ (§.519), adeoque
 $PM^2 = \sqrt[3]{a^4x^2}$ & $PN^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$.
Cum itaque æquatio ad curvam sit
 $y^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$; erit $(y^2 - x^2)^3$
 $= a^4x^2$, seu $y^6 - 3x^2y^4 + 3x^4y^2$
 $- x^6 = a^4x^2$.

S C H O L I O N.

580. Patet per Problema præsens plurima-
rum curvarum descriptiones facillimo negotio
detegi posse: quod idem per sequentia quoque
Problemata intelligitur. Nec minus liquet,
eodem modo ad axem AB applicari posse tan-
gentes, subtangentes, normales, subnormales,
& quascunque alias lineas eodem modo deter-
minatas. Hoc pacto subinde Theoremata non
inelegantia reperiuntur, qualia in ipsa resolu-
tione Problematis præsentis continentur, v. gr.
Quod, si Parabola circa diametrum circuli
describatur, chordæ circuli AM sint semior-
dinatis Parabola PN æquales.

P R O B L E M A C C X X I X.

Tab. 581. Investigare naturas curvarum,
XIII. quæ gignuntur, si ad chordam AM curvæ
Fig. genetricis AMC erigatur perpendicularis
126. AN semiorinatam PM ultra axem AB
continuata secans in N.

Sit curva genetrix AMC: Quoniam

MAN angulus rectus per hypothesin; Tab.
erit $PM : AP = AP : PN$ (§. 327 XIII.
Geom.); consequenter $PM^m : AP^m =$ Fig.
 $AP^m : PN^m$ (§. 124), adeoque PN^m 126.
 $= AP^{2m} : PM^m$; consequenter si AP
 $= x$, $PN = y$; $y^m = x^{2m} : PM^m$. Valor
igitur ipsius PM & exponens m ex
æquatione curvæ genetricis AMC de-
terminantur.

Sit AMC circulus; erit $PM^2 = ax$
 $- x^2$, adeoque æquatio ad curvam
ANR, $y^2 = x^4 : (ax - x^2) = x^3 :$
 $(a - x)$. Est igitur curva ANR Cissois
DIOCLIS (§.548).

Sit curva genetrix Parabola Apollo-
niana: erit $PM^2 = ax$, adeoque $y^2 =$
 $x^4 : ax = x^3 : a$, hoc est, $ay^2 = x^3$. Est
igitur ANR Parabola secundi generis
(§.519).

Sit in genere curva genetrix quæ-
dam ex Parabolis infinitis, quæ defi-
niuntur per æquationem $PM^m = ax^{m-1}$,
adeoque $y^m = x^{2m} : ax^{m-1} = x^{m+1} : a$
hoc est, $ay^m = x^{m+1}$. Est igitur ANR
Parabola proxime superior genetricæ.
Unde patet modus describendi omnes
Parabolas in infinitum, quæ continen-
tur sub æquatione $y^m = ax^{m-1}$.

Sit curva genetrix Hyperbola æqui-
latera: erit $PM^2 = ax + x^2$, adeoque
 $y^2 = x^4 : (ax + x^2) = x^3 : (a + x)$.
Est igitur ANR curva secundi gene-
ris affinitatem quandam habens cum
Cissoide; sed quæ peculiari nomine
desinitur.

Sit curva genetrix Ellipsis: erit
 $PM^2 = (abx - bx^2) : a$, adeoque
 $y^2 = ax^4 : (abx - bx^2)$ hoc est $by^2 =$
 $ax^3 : (a - x)$.

SCHO-

SCHOLIION I.

582. Si Circuli superiorum generum sumuntur pro genetrice, Cissoïdes superiorum generum erunt genita.

PROBLEMA CCXXX.

Tab. XIII. Fig. 127.

583. Sit curva genetrice AMK, recta AT ad axem AX normalis, AS magnitudinis constantis; investigare naturam curvæ, in qua est punctum N, quod determinatur, demissa ex S perpendiculari SR ad semiordinatam genetricis PM & ducta recta QN per punctum curvæ genetricis M axi AX parallela, recta AN ex vertice A per punctum R ducta occurrente in N.

Sit AS = a, AQ = x, QN = y, erit ob parallelas SR & QN (§. 268 Geom.)

AS : (SR) QM = AQ : QN
 a : QM = x : y
 adeoque $\frac{QM \cdot x}{a} = y$

Tab. XIII. Fig. 127.

Sit AMK Parabola Apolloniana, erit QM = x² : a. Est igitur

$$y = x^2 : a$$

$$a^2 y = x^2$$

quæ est æquatio ad Parabolam secundi generis (§. 519).

Sit AMK quædam ex infinitis Parabolis, erit QM = x^m : a^{m-1} (§. cit.), adeoque y = x^{m+1} : a^m; consequenter a^m y = x^{m+1}. Est igitur curva genita Parabola proxime superior genetrice, patetque simul modus describendi Parabolas omnes in infinitum, quæ continentur sub æquatione a^{m-1} x = y^m.

C A P U T VII.

De Locis Geometricis.

DEFINITIO XL.

584. Locus Geometricus est linea, per quam construitur Problema indeterminatum. In specie Locus ad rectam dicitur, si linea recta æquationi construendæ sufficit; Locus ad circumulum, si circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO XLI.

385. Loca ad lineam rectam & circumulum Veteres dixerunt Loca plana: quæ vero sunt ad parabolam, ellipsin aut hyperbolam, Loca solida. Commodius Loca in ordines distinguuntur secundum Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

dum numerum dimensionum, ad quem assurgunt quantitates indeterminatæ. Sic Locus primi ordinis est, si æquatio x = ay : c. Locus secundi seu quadratici ordinis, si ex. gr. y² = ax, vel y² = a² - x² &c. Locus tertii seu cubici ordinis, si ex. gr. y³ = a² x, vel y³ = ax² - x³ &c.

PROBLEMA CCXXXI.

585. Construere loca ad rectam. Tab. VII.

Si y = ax : b; y = ax : b + c, y = ax : b - c, vel y = c - ax : b; Locus semper est ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat AI = b, IE = a : ductis Bbb

Fig. 71.

Tab. VII. ductis ipsi EI parallelis quibuscunque PM, pm &c. erit AP=x, PM=y. Est enim (§. 268 Geom.)

$$AI : IE = AP : PM$$

$$b : a = x : y$$

Ergo $ax : b = y$

Quodsi EI continuetur in G, ita ut sit IG=c, per G agatur DF ipsi AB, & ex A, AD ipsi EI parallela, erit AP=DQ=x, QM=y. Est enim PM=ax:b, per demonstr. PQ=c (§. 257 Geom.). Ergo QM=ax:b+c=y.

Si LG=b, GE=a & LQ=x: erit QM=ax:b, per demonstr. Fiat IG=c & per I ducatur ipsi DF parallela AB, erit PQ=c (§. 257 Geom.), consequenter PM=ax:b-c.

Tab. VII. Denique sit AC=c & AD=b; ducatur per D recta EF ipsi AC parallela fiatque DE=a. Ducatur recta AL & per C ipsi AL parallela CB. Quodsi alia parallela MN ad EF agatur: erit AP=x, PM=y. Est enim (§. 268 Geom.)

$$AD : DE = AP : PN$$

$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

Sed MN=AC=c (§. 257 Geom.). Ergo PM=c-ax:b.

PROBLEMA CCXXXII.

587. Invenire Theoremata generalia construendi omnes aequationes ad Parabolam.

Duo Theoremata nobis investiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem Parabolæ.

Tab. VII. Sint KP & DL, itemque KD & QM inter se parallelæ, & LDH angu-

lus quicunque. Sit porro KA=p, DH=q, LH=r, DK=PN (§. 257 Geom.)=n, DL=f, & parametro t describatur Parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro DQ=x, QM=y: erit (§. 268 Geom.)

$$DH : DL = DQ : DN (=PK)$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Ergo AP=PK-KA=fx/q-p & PM=QM-PN-QN=y- $\frac{rx}{q}$ -n

Quare cum sit PM²=t. AP (§. 388), erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tfx}{q} - tp$$

hoc est,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tfx}{q} + tp$$

Sit denuo in casu altero, ubi IM parallela ipsi DQ & DI ipsi QM, KA=p, DH=q, LH=r, DK=PN (§. 257 Geom.)=n, DI=f, IM=DQ=y, QM=x. Parabola AM denuo parametro t describatur.

Erit (§. 268 Geom.)

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = y : \frac{fy}{q}$$

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo AP=DN-AK=fy/q-p & PM=QM

Tab. VII. $=QM - QN - PN = x - ry: q - n$.
Quare cum sit $PM^2 = t$. AP; erit

Fig. 76. (§. 388. 419),
$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = \frac{t}{q} - tp$$

hoc est,

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = 0$$

$$- \frac{t}{q} + tp$$

Tab. VII. Sit ex.gr. $y^2 - ax = 0$, erit $-\frac{2r}{q} = 0$, adeo-

Fig. 75. que $\frac{r^2}{q^2} = 0$, & $f = q$; porro $n = 0$ & $tf: q = a$,
hoc est, $a = t$. Cadit ergo punctum D in A
& Q in P, nec alia re opus est, quam ut pa-
rametro a Parabola AM describatur: erit
enim $AP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; erit $2r: q = 0$,
consequenter H cadit in L, adeoque $f = q$.
Porro $a = -2n$: ergo $-\frac{1}{2}a = n$. Item $-t$
 $= -b$, adeoque $t = b$. Denique $n^2 + tp = \frac{1}{4}aa$,
hoc est, $\frac{1}{4}a^2 + bp = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $p = 0$. Ca-
dit adeo punctum K in A. Parametro itaque

Tab. VII. b describenda Parabola AM & in A erigen-
da perpendicularis $AB = \frac{1}{2}a$. Ducta enim
Fig. 74. BS axi AB parallela, erit ob $n = \frac{1}{2}a$, $MS = y$
& $BS = x$.

Sit $yy - ay - bx + cc = 0$, erit $\frac{2r}{q} = 0$,

adeoque $q = f$

$$\frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \quad \frac{-t = -b}{t = b} \quad \frac{n^2 + tp = -cc}{tp = -c^2 - \frac{1}{4}aa}$$

$$p = (-c^2 - \frac{1}{4}a^2) : b$$

Parametro ergo b describenda Parabola
AHM, & quia KA, sive p , est quan-
titas negativa, auferenda est ex AP, ita
ut origo indeterminata x statuatur in R
vel N. Denique ob $n = \frac{1}{2}a$; fiat $AD = \frac{1}{2}a$
& ducatur DQ parallela axi AP, erit NQ
 $= RP = x$, & $QM = y$.

Sit $x^2 - ay + bb = 0$: erit, vi Theorematis
secundi, $r: q = 0$, adeoque $q = f$. Porro $n = 0$ &

$$-\frac{t = -a}{t = a} \quad \frac{tp = bb}{ap = bb}$$

$$p = \frac{bb}{a}$$

Construitur adeo Parabola AHM paramet-
tro a , factaque $AK = bb: a$; erit $KP = y$,
 $PM = x$.

Sit $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, erit

$$-\frac{2r}{q} = -\frac{a}{b} \quad 2n = 0 \quad -\frac{t}{q} = -c$$

$$\frac{r}{q} = \frac{a}{2b} \quad n = 0 \quad t = \frac{qc}{f} = \frac{2bc}{f}$$

$$n^2 + tp = 0$$

$$p = 0$$

Construatur itaque parametro $2bc: f$ Para-
bola AHM, & factis $AO = 2b$, atque RO ad
AP normalis $= a$, ducatur recta AT; erit
TM ipsi OR parallela $= y$, $AT = x$.

Ceterum loca esse rite constructa patet, si
assumtis valoribus, prout per regulam deter-
minantur, quæratæ æquatio ad curvam, ea-
demque cum proposita reperiatur. Etenim si
in exemplo ultimo $AO = 2b$, $RO = a$, para-
meter $= 2bc: f$, $AT = x$, $TM = y$, cum sit

$$AO : AR = AT : AP$$

$$2b : f = x : \frac{fx}{2b}$$

erit $t. AP = 2bcfx : 2bf = cx$.

Et quia $AO : OR = AT : TP$

$$2b : a = x : \frac{ax}{2b}$$

erit $PM = TM - TP = y - \frac{ax}{2b}$

adeoque $PM^2 = y^2 - \frac{axy}{2b} + \frac{a^2x^2}{4b^2}$

Quare $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} = cx$, consequen-

ter $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quæ est
æquatio ad construendum proposita.

PROBLEMA CCXXXIII.

588. Invenire Theorema generale con-
struendi omnia loca solida ad Ellipsin.

Bbb 2

Circa

Tab. VII.
Fig. 74.

Tab. VII. Circa diametrum AB descripta fit Ellipsis AMB, sintque KD & LH semior-
 dinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit KD=PN=n, KC=p, DH=q, LH=r, DL=f, semidiameter AC vel
 CB=m, parameter=t, DQ=x, QM=y. Erit (§.257 Geom.) KP=DN, & (§.268 Geom.)

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Quare CP=DN—KC=fx:q—q
 & PM=QM—QN—PN=y—rx:q
 —n. Jam ex natura Ellipsis (§.420),
 $t : 2m = PM^2 : AP \cdot PB$.

$$\text{Est vero } PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2, AP = m + \frac{fx}{q} - p$$

$$\text{ \& } PB = m - \frac{fx}{q} + p, \text{ adeoque } AP \cdot PB = m^2 - p^2 + \frac{2pfx}{q} - \frac{f^2x^2}{q^2}.$$

Ergo (§. cit.) $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tf^2x^2}{2mq^2}$

Unde tandem habetur

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$

$$+ \frac{tf^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m}$$

Sit ex.gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, y & x: erunt r:q=0, q=f, n=0, p=0; hinc $t : 2m = s : b$, hoc

est, c:b exprimit rationem parametri ad diametrum. Erit porro $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc est, substituto pro t: 2m valore ipsius ante invento c:b, $\frac{m^2c}{b} = \frac{aac}{b}$. Quare $m^2 = aa$, & hinc semidiameter $m = a$. Jam quoniam $2m:t = b:c$, erit $t = \frac{2ac}{b}$. Parametro igitur $\frac{2ac}{b}$ & axe 2a construat Ellipsis AMB; erit CP=x, PM=y.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit r:q=0, n=0; consequenter f=q. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, adeoque ratio diametri AB ad parametrum est = b:c. Porro $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc est, ob t: 2m=c:b, 2p=d, seu p= $\frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc est, ob t: 2m=c:b, $m^2 - p^2 = aa$, seu $m^2 = aa + \frac{1}{4}dd$. Est itaque semidiameter $\sqrt{aa + \frac{1}{4}dd}$. Quodsi ergo semidiametro $\sqrt{aa + \frac{1}{4}dd}$ & parametro $2c\sqrt{aa + \frac{1}{4}dd} : b$ describatur Ellipsis, fiatque KC= $\frac{1}{4}d$; erit KP=x, PM=y.

Sit $y^2 - dxy : f + bx^2 : c - aa = 0$. Erit 2r:q=d:f, adeoque r:q=d:2f. Porro $r^2 : q^2 + t^2 : 2mq^2 = b : c$, hoc est $d^2 : 4f^2 + t^2 : 2m \cdot 4f^2 = b : c$, consequenter $t : 2m = \sqrt{4bf^2 - cd^2} : cf^2$. Est denique $n=0, p=0$ & $-tm^2 : 2m = -aa$, consequenter $m^2 = a^2cf^2 : (4bf^2 - cd^2)$, adeoque $m = \sqrt{a^2cf^2 : (4bf^2 - cd^2)}$. Hinc vero porro ad datam rationem 2m:t reperitur parameter t. Quare si parametro t & diametro 2m Ellipsis construat, fiatque CF=2f, DF=d, ducta recta CQ ex C per F semiordinatæ PM continuatæ in Q occurrente, erit QM=y, CQ=x.

Locum rite esse constructum, eodem modo quo in Parabola ostenditur. Etenim

CF

Tab. VII. Fig. 78.

Tab. VII. Fig. 77.

CF : DF = CQ : QP

2f : d = x : $\frac{dx}{2f}$

Quare PM = $y - \frac{dx}{2f}$, consequenter

PM² = $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$.

Porro CF : CD = CQ : CP

2f : f = x : $\frac{fx}{2f}$

Quare AP = $\sqrt{\frac{aacf^2}{(4bf^2 - cd^2)} + \frac{fx}{2f}}$ & PB =

$\sqrt{\frac{aacf^2}{(4bf^2 - cd^2)} - \frac{fx}{2f}}$, consequenter AP.PB =

$\frac{aacf^2}{4bf^2 - cd^2} - \frac{f^2x^2}{4f^2}$. Est itaque $\frac{t}{2m}$. AP.PB

= $(4bf^2 - cd^2) a^2 c f^2 : c f^2 (4bf^2 - cd^2) -$

$(4bf^2 f^2 x^2 - cd^2 f^2 x^2) : 4c f^2 f^2 = a^2 - \frac{bx^2}{c}$

+ $\frac{d^2x^2}{4f^2}$; consequenter cum fit in Ellipsi $\frac{t}{2m}$.

AP.PB = PM² (§.420), $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2} = a^2 -$

$\frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$. Ergo $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$.

COROLLARIUM.

589. Cum in Ellipsi fit $b : a = y^2 : ax - x^2$ (§.420); si $b = a$, hoc est, si parameter diametro æqualis, erit $y^2 = ax - x^2$, seu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quæ est æquatio ad Circulum (§.377). Æquatio itaque localis ad Ellipsin degenerat in æquationem localem ad Circulum: si ponatur $t = 2m$ & angulus ad P rectus: quo facto erit

$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$.

+ $\frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} - m^2 + p^2$

Ceterum cum ex comparatione formulæ propositæ cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro construendis locis ad Ellipsin atque ad Circulum sufficit.

Ponamus ex. gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deest, erit $r : q = 0$, consequenter $f = q$. Quare $t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Locus adeo planus est ad Circulum. Porro

$-2n = -b$

$n = \frac{1}{2}b$

$-2tp : 2m = -c$

$2p = c$, ob $t = 2m$.

$p = \frac{1}{2}c$

Denique $n^2 - m^2 + p^2 = 0$

$n^2 + p^2 = m^2$

h. e. $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 = m^2$

$m = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2}$

Quare ducta linea recta AB & in ea assum- Tab. ta CN = GD = $\frac{1}{2}c$, si porro fiat GN = CD, VII. & ad AB perpendicularis = $\frac{1}{2}b$, atque ex Fig.73. centro C radio CG describatur circulus; erit GR = NP = x & RM = y .

Cum enim fit $CG^2 = CD^2 + GD^2$ (§.417 Geom.), erit $CG = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2}$. Porro, ob PR = GN (§.257 Geom.) = $\frac{1}{2}b$, est PM = $y - \frac{1}{2}b$, adeoque PM² = $y^2 - by + \frac{1}{4}bb$. Similiter CP = PN - NC = $x - \frac{1}{2}c$, adeoque CP² = $x^2 - bx + \frac{1}{4}cc$. Quare cum fit CP² + PM² = CM² (§.417 Geom.); erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 + x^2 - bx + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$, adeoque $y^2 + x^2 - by - cx = 0$: quæ est æquatio localis ad construendum proposita.

PROBLEMA CCXXXIV.

590. Invenire Theorema generale con- Tab. struendi omnia loca ad Hyperbolam circa VIII. diametrum descriptam. Fig.80.

Diametro transversa AB = $2m$ & parametro t descripta sit Hyperbola AM, cujus centrum in C, ductisque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis, fiat KD = PN = n , KC = p , DH = q , LH = r , DL = f , DQ = x , QM = y , erit (§.257 Geom.) KP = DN & (§.268 Geom.)

DH : HL = DQ : QN

$q : r = x : \frac{rx}{q}$

Bbb 3

DH:

Tab. VIII. Fig. 80.

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

$$\text{Quare } CP = DN - KC = \frac{fx}{q} - p \text{ \&}$$

$$PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n.$$

Jam (§. 459)

$$t : 2m = PM^2 : AP \cdot PB$$

$$\text{Est vero } PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny$$

$$+ \frac{2nrx}{q} + n^2 \text{ \& } AP \cdot PB = (CP - CA)$$

$$(CP + CA) = CP^2 - CA^2 (\text{§. 499}) =$$

$$\frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2. \text{ Unde habetur}$$

$$\frac{tf^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} +$$

$$\frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2.$$

Quare æquatio generalis pro quovis loco hyperbolico,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$

$$- \frac{tf^2x^2}{2mq^2} + \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m}$$

Quando contingit, reperiri $t = 2m$, Hyperbola est æquilatera (§. 505).

Eadem formula reperitur, si Hyperbola ad diametrum conjugatam refertur, nisi quod $tm^2 : 2m$ signo — afficiatur.

$$\text{Sit ex. gr. } y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{aac}{b} = 0. \text{ Cum in}$$

æquatione non habeantur xy, y & x ; erit $r : q = 0, n = 0, p = 0, f = q$; consequenter $-t : 2m = -c : b$, adeoque ratio parametri t ad diametrum $2m = c : b$. Porro $tm^2 : 2m = aac : b$, hoc est, ob $t : 2m = c : b, m^2 = aa$. Diameter adeo Hyperbolæ $2a$; unde ob rationem diametri ad parametrum datam reperiri dia-

meter potest. Quare si datis diametro & parametrum Hyperbola AML construat; erit $CP = x, PM = y$. Est enim $AC = CB = a$, adeoque $BP = a + x$ & $AP = x - a$, consequenter $AP \cdot PB = x^2 - a^2$. Quare $c : b = y^2 : x^2 - a^2$ (§. 459). Est itaque $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{a^2c}{b} = 0$.

Sit $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{acx}{b} = 0$. Quoniam in æquatione desiderantur xy, y & quantitas pure cognita; erit $r : q = 0, n = 0$ & quia ($obr = 0$), DL coincidit cum DH, $f = q$. Quamobrem $-t : 2m = -c : b$, hoc est, ratio parametri t ad diametrum $2m$ denuo $= c : b$. Porro $2tp : 2m = ac : b$, hoc est, ($ob t : 2m = c : b$) $2p = a$ seu $p = \frac{1}{2}a$: Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$ seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}aa$, adeoque $m = \frac{1}{2}a$.

Quare cum ob rationem diametri ad parametrum datam detur etiam parameter $= \frac{ac}{b}$; constructa Hyperbola AML, erit $BP = x, PM = y$: quod ostenditur ut ante.

Sit $y^2 - x^2 + by - ax = 0$. Quia xy desideratur; erit $r : q = 0$, consequenter $f = q$. Quare $-t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Est itaque locus ad Hyperbolam æquilateram (§. 505). Porro

$$\frac{-2n = +b}{n = -\frac{1}{2}b} \quad \frac{2tp : 2m = -a}{2p = -a, \text{ ob } t = 2m}$$

$$p = -\frac{1}{2}a.$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} = \frac{tp^2}{2m}$$

$$n^2 + m^2 = p^2$$

$$m^2 = p^2 - n^2$$

$$\text{hoc est, } m^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$$

Diametro itaque $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construat Hyperbola æquilatera AML, fiatque $CR =$

Tab. VIII. Fig. 79.

Fig. 80.

Fig. 79.

Tab. VIII. Fig. 79.

CR = $\frac{1}{2}a$, KR = GP = $\frac{1}{2}b$, erit KG = RP = x , GM = y . Est enim PB = CB + CR + RP = $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}a + x$ & AP = AR + RP = CR - CA + RP = $\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + x$, adeoque AP.PB = $ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$. Porro PM = GM + GP = $y + \frac{1}{2}b$; adeoque PM² = $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit PM² = AP.PB (§. 507); erit $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 + by = ax + x^2$, consequenter $y^2 - x^2 + by - ax = 0$.

Sit $y^2 - x^2 - by + ax = 0$. Quia xy desideratur, erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & $q = f$. Quare $t : 2m = 1$, seu $t = 2m$. Est itaque locus ad Hyperbolam æquilateram. Porro

$$\frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \quad \frac{2p = a}{p = \frac{1}{2}a} \quad \frac{n^2 + m^2 - p^2 = 0}{m^2 = p^2 - n^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2}{m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}$$

Diametro $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur Hyperbola æquilatera AML, factaque CF ex centro C = $\frac{1}{4}a$ & FH ad FP perpendiculari = $\frac{1}{2}b$, ductisque HN ipsi FP & NM ipsi FH parallelis; erit HN = x , NM = y . Est enim BP = FP - BF = $x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, AP = FP - FA = $x - \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, adeoque AP.PB = $x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$. Porro PM = MN - PN = $y - \frac{1}{2}b$, adeoque PM² = $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit PM² = AP.PB (§. 507), erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 - x^2 - by + ax = 0$.

PROBLEMA CCXXXV.

Tab. VIII. Fig. 81. 591. Invenire Theorema generale construendi omnia loca solida ad Hyperbolam intra asymptotos.

Sint SA & AR asymptoti Hyperbolæ MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcumque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH alteri asymptotorum SA parallela. Ponamus denuo KD = PN = n , KA = p ,

DH = q , LH = r , DL = f , DQ = x , Tab. QM = y , RI = m , AR = DL = f ; erit VIII. (§. 268 Geom.) Fig. 81.

DH : HL = DQ : QN

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

DH : DL = DQ : DN

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Ergo AP = DN — AK = $\frac{fx}{q} - p$ &

PM = QM — PN — NQ = $y - n - rx : q$. Quare ob AR. RI = AP.PM (§. 502).

$$mf = \frac{fyx}{q} - \frac{frx^2}{q^2} - py - \frac{snx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$msq = fyx - \frac{frx^2}{q} - pqy - snx + prx + pnq$$

$$mq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{f} - nx + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f}$$

$$xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{f} + \frac{prx}{f} + \frac{pnq}{f} = 0. \\ - nx - mq$$

Invenitur adhuc regula alia pro locis ad Hyperbolam intra asymptotos, si valor ipsius x ponatur esse QM. Tab. VIII. Fig. 82.

Sit nimirum IM Hyperbola, cujus asymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QM cum asymptoto AS, DL vero cum altera KR, & TM ipsi DH utcumque ductæ parallela. Sit ut ante AK = p , KD = PN = n , DH = q , DL = AR = f , HL = r , RI = m , QM = x , DQ = TM = y . Erit (§. 268 Geom.)

DH : DL = DQ : DN

$$q : f = y : \frac{fy}{q}$$

DH : HL = DQ : QN

$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Er-

Tab. Ergo $AP = DN - AK = fy : q - p$ &
 VIII. $PM = QM - QN - NP = x - ry : q - n$.
 Fig. 82. Quare ob $AR.RI = AP.PM$ (§. 502)

$$mf = \frac{fxy}{q} - \frac{rfy^2}{q^2} - \frac{fny}{q} - px + \frac{pry}{q} + pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante usi sumus, reperitur.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{f} + \frac{pry}{f} + \frac{pnq}{f} = 0.$$

$$\text{Sit ex. gr. } xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0 : \text{erit } r : q$$

= 0, adeoque $r = 0$ & hinc $q = f$, quia L cadit in H, $-pq : f = +fd : c$, hoc est, Fig. 81. ob $q = f$, $p = -fd : c$. Porro $+pr : f - n = 0$, quia x in æquatione præsentè deficit, & hinc, ob $r = 0$, $n = 0$. Denique $pnq : f - mq = -abd : c$. Sed $pnq : f = 0$; ergo $mq = mf = abd : c$. Quare si $f = ab : c$; erit $m = d$. Fiat igitur $AR = ab : c$, & $IR = d$, atque constructa Hyperbola intra asymptotos, porro $OA = fd : c$; erit $OP = x$, $PM = y$. Nam $AP = x + fd : c$ adeoque $AP.PM = xy + fdy : c$. Quare cum sit $AR.RI = abd : c$, erit

$$xy + fdy : c = abd : c$$

$$\text{adeoque } xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0.$$

Sit $xy - \frac{bxx}{a} - cy = 0$. Erit $-r : q = -b : a$, hoc est, $r = b$, $q = a$. Porro $-pq : f = -c$. Ergo $p = fc : a$. Cum x in æquatione desit; $pr : f - n = 0$, seu $pr : f = n$, hoc est, $bc : a = n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : f - mq = 0$, seu $pnq : f = mq$, vel $pn : f = m$, hoc est, $bc^2 : a^2 = m$. Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH, HL, AR, RI; constructio loci manifesta est. Est enim $AK = fc : a$, $KD = bc : a$, $DH = a$, $HL = b$, $DL = AR = f$, $RI = bc^2 : a^2$, $DQ = x$, $QM = y$: His enim positis, erit $AR.RI = fbc^2 : a^2$. Porro (§. 268 Geom.).

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$a : f = x : \frac{fx}{a}$$

Quare cum sit $KA = fc : a$, erit $AP = (fx - fc) a$. Est vero etiam

$$DH : LH = DQ : QN$$

$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Quare cum sit $KD = PN = bc : a$, & $QM = y$, erit $PM = y - bx : a - bc : a$.

$$\text{Habemus adeo } AP.PM = \frac{fxy}{a} - \frac{scy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2}.$$

Quoniam itaque $AR.RI = AP.PM$, erit $\frac{fxy}{a} - \frac{scy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2} = \frac{bfc^2}{a^2}$: unde reperitur $xy - cy - \frac{bx^2}{a} = 0$.

SCHOLIUM.

592. Ut usus hujus doctrinæ appareat, exempla aliquot Problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda sunt criteria, unde judicium fieri possit, cum quanam formularum antecedentium comparanda sit æquatio ad construendum proposita. Nimirum duo occurrere possunt casus: aut enim in æquatione proposita habetur xy , aut minus. Si in priori casu quadratorum indeterminatorum neutrum occurrat, vel saltem alterutrum, locus est Hyperbola intra asymptotos; si quadrata indeterminatarum x^2 & y^2 diversis signis afficiuntur, locus est Hyperbola circa diametrum descripta; si eadem quadrata eodem signo afficiuntur, sitque coefficientis dimidius facti xy æqualis radici coefficientis quadrati x^2 , locus est Parabola; si minor, Hyperbola; si major, Ellipsis. In casu posteriori, si unum tantum quadratorum indeterminatorum adsit, locus est Parabola; si utrumque eodem signo afficiatur, Ellipsis vel Circulus; si signis diversis gaudeant, Hyperbola. Nempe in casu ultimo Hyperbola est æquilatera, in penultimo Circulus, si terminus x^2 a fractione liber. Quæ omnia manifesta sunt ex accurata formularum generalium inter se collatarum contemplatione. Quod

Quod si quantitatis alicujus valor per regulam generalem eruitur negativus, quantitas ista ex parte opposita sumenda est, quemadmodum in exemplis propositis a nobis factum.

PROBLEMA CCXXXVI.

593. Construere Rhomboidem ea conditione, ut rectangulum ex lateribus sit aequale quadrato dato.

Tab. IV. Fig. 51. Sit quadratum datum a^2 , sint latera rhomboidis x & y : erit per conditionem Problematis $xy = a^2$. Construenda itaque est Hyperbola intra asymptotos CG & CR, cujus potentia $AI = a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§ 488).

PROBLEMA CCXXXVII.

594. Quadratum construere, quod sit aequale rectangulo, cujus latera differunt recta data.

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui est locus ad Hyperbolam æquilateram, cujus parameter $= b$ (§. 507).

Id etiam ex formula generali elicatur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§. 590) $2r : q = 0$, adeoque $r = 0$, $q = f$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Est vero $t : f^2 : 2mq^2 = -1$, hoc est, ob $q^2 = f$, $t : 2m = 1$ seu $t = 2m$. Unde apparet, locum esse ad Hyperbolam æquilateram. Est præterea $2tpf : 2mq = -b$, hoc est, ob $t = 2m$ & $f = q$, $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $1m^2 : 2m - tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc est, $m^2 - p^2 = 0$, seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}bb$. Unde $m = \frac{1}{2}b$. Constructio ex constructione generali haud

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

difficiliter elicatur. Nimirum pro diametro transversa $AB = 2m$, pone b . Quia $KC = -\frac{1}{2}b$, punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia semidiametro in hoc casu æqualis. Unde origo indeterminata x erit in A, nam ob $DK = PN = 0$, punctum D in K, consequenter in nostro casu in A cadit. Porro, ob $HL = 0$, puncta H & L adeoque & puncta Q & N, & ob $RN = 0$, puncta N & P, consequenter Q & P coincidunt: unde origo alterius indeterminata y est in P.

Est enim $BP = b + x$, adeoque $AP \cdot PB = bx + x^2$. Quare cum $PM^2 = y^2$; erit $y^2 = bx + x^2$.

PROBLEMA CCXXXVIII.

595. Super data recta AB triangulum construere, ita ut quadrata laterum AC & CB sint in ratione data. Tab. VIII. Fig. 83.

Sit ratio data $= b : c$ DB = x

AB = a DC = y

erit AD = a - x

Quoniam (§. 417 Geom) $AC^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, & $CB^2 = x^2 + y^2$; erit, per conditionem Problematis,

$$\frac{b : c = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 : x^2 + y^2}{bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2}$$

$$\frac{by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0}{y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0}$$

Hæc æquatio comparanda est cum æquatione generali locorum ad Ellipsin, quia deest xy , & y^2 atque x^2 eodem signo afficiuntur (§. 592). Repertur adeo (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad -2n = 0 \quad \frac{r^2 : q^2 + t : 2mq^2 = 1}{hinc: \quad t : 2m = 1}$$

$$r = 0 \text{ \& } q = f \quad 2nr : q = 0 \quad h. e. t = 2m$$

C c c

Cum

Tab. VIII. Cum diameter $2m$ parametro æqua-
lis sit; locus ad construendum propo-
Fig. 83. situs est Circulus.

Porro

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tpf}{2mq} = \frac{2ac}{b-c} \quad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = \frac{a^2c}{b-c}$$

h. e. $2p = \frac{2ac}{b-c} \quad p^2 - m^2 = \frac{a^2c}{b-c}$

$$p = \frac{ac}{b-c} \quad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

h. e. $\frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$$

Est ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$.
Quod si igitur $AL = ac : (b-c)$,
& radio $CL = a\sqrt{bc} : (b-c)$ describa-
tur circulus ECF; erit $AD = x$, $DC = y$.
Nam ponatur brevitatis gratia $AL = p$,
 $LF = m$; erit $DL = p - x$, $ED = m - p + x$
& $DF = m + p - x$, consequenter, ob $ED \cdot DF = DC^2$,
 $m^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$.

$$y^2 + x^2 - 2px + p^2 = 0$$

hoc est, substitutis valoribus p & $p^2 - m^2$
erit $y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

PROBLEMA CCXXXIX.

Tab. VIII. 596. Duas rectas AB & CD ita
secare in E & F, ut AE. EB = CF.
Fig. 84. FD.

Sit $AB = a$, $AE = x$
 $CD = b$, $CF = y$
erit $EB = a - x$
 $FD = b - y$
Quare $ax - xx = by - yy$
 $y^2 - x^2 - by + ax = 0$

Hæc æquatio comparanda cum
æquatione locali pro Hyperbola. Est
nempe

$$\frac{2r}{q} = 0 \text{ \& hinc } \frac{q = f}{q^2 = f^2} \quad \frac{r^2}{q^2} = 0 \quad \frac{2nr}{q} = 0$$

$$-\frac{tf^2}{2mq^2} = -1 \quad \frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \quad \frac{2tpf}{2mq} = a$$

$$t : 2m = 1 \quad 2p = a$$

$$t = 2m \quad p = \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb\right)}$$

Quoniam $t = 2m$, hoc est, parame-
ter diametro æqualis, Hyperbola est
æquilatera (§. 505), diametro $=$
 $2\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb\right)}$ construenda. Cum dia-
metro determinata AB agatur parallela
HN & cum MN altera FH, ita ut sit FH
 $= PN = \frac{1}{2}b$ & $CF = \frac{1}{2}a$, erit $HN = x$ &
 $MN = y$. Est enim $CP = x - \frac{1}{2}a$; PM
 $= y - \frac{1}{2}b$, & $AC = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb\right)}$.
Quare, ob $AP \cdot PB = CP^2 - AC^2 = PM^2$,
 $x^2 - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = y^2 - by + \frac{1}{4}bb$

$$x^2 - ax = y^2 - by$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

PRO-

Tab. VIII. Fig. 84

Tab. VIII. Fig. 79

PROBLEMA CCXL.

Tab. VIII. Fig. 85. 597. Super recta AB descriptus sit semicirculus ANB, & alius minor ERD. Ex puncto quocunque N demittatur ad AB perpendicularis PN, ductoque radio CN, ex puncto R perpendicularis alia RM. Determinare locum, in quo sunt omnia puncta M eodem modo determinata.

Sit $AB = a$, $ED = d$, $AP = x$, $PM = y$: erit $PB = a - x$, $PN = \sqrt{(ax - x^2)} = v$ (§. 377), $PC = \frac{1}{2}a - x$, $NR = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ & (§. 268 Geom.)

$NC : NP = NR : NM$

$\frac{1}{2}a : v = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d : \frac{(a-d)v}{a}$

Quare $PM = v - \frac{av - dv}{a} = \frac{av - av + dv}{a} = \frac{dv}{a}$; consequenter

$PM^2 = y^2 = d^2 v^2 : a^2$. Unde habetur $a^2 y^2 = d^2 (ax - x^2)$, substituto nimirum valore ipsius v^2 , quæ æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$y^2 : ax - x^2 = d^2 : a^2$

h. e. $PM^2 : PA \cdot PB = CF^2 : AC^2$

Unde intelligitur locum punctorum M esse Ellipsin, cujus axes conjugati AB & ED (§. 430).

SCHOLIUM.

598. Apparet adeo curvam, quam fornicibus construendis aptam prædicat SERLIUS (k) esse Ellipsin.

COROLLARIUM.

599. Quoniam $PN = v$, $PM = \frac{1}{2}dv : \frac{1}{2}a$, erit $PN : PM = v : \frac{1}{2}dv$
hoc est (§. 124) $= \frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = CG : CF$

(k) Architect. lib. 1. c. 1. f. m. 9. b.

PROBLEMA CCXLI.

Tab. VIII. Fig. 86. 600. Super recta HI describatur semicirculus HGI. Sit recta quæcunque AB bisariam divisa in C & ex C erecta perpendicularis $CD = GF$. Erecta perpendicularis LN fiat $DC : AC = HL : AP$, & in P erigatur perpendicularis $PM = NL$. Determinare locum, in quo sunt omnia puncta M eodem modo inventa.

Sit $HF = GF = DC = d$, $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$: erit, ex hypothesi, $AC : DC = AP : HL$

$a : d = x : \frac{dx}{a}$

Quare $LH = 2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc $LN^2 = (2addx - ddx) : aa$ (§. 367). Habemus itaque ex hypothesi, $y^2 = (2addx - ddx) : aa$ adeoque, $aa : 2ax - xx = dd : y^2$.

Est igitur locus quæsitus Ellipsis, cujus semiaxes conjugati AC & CD (§. 430).

SCHOLIUM.

601. Evidens adeo est, curvam, quam Albertus DURERUS & cum ipso Daniel HARTMANNUS (1) fornicibus construendis aptam prædicant, esse Ellipsin Apollonianam.

PROBLEMA CCXLII.

Tab. VIII. Fig. 87. 602. Rectam DB ita secare in P simulque invenire aliam rectam y, ita ut rectangulum ex y in datam CA sit aequale rectangulo ex segmentis partium DP & PB.

Sit $DB = a$, $AC = b$, $DP = x$, erit $PB = a - x$, consequenter, per conditionem Problematis,

$Ccc 2 \quad ax -$

(1) In der Bürgerlichen Bau-Kunst, f. 7. & seqq.

Tab. VIII. Fig. 87.

$$\frac{ax - xx = by}{x^2 - ax + by = 0.}$$

Est itaque locus ad Parabolam (§. 592).

Quodsi cum æquatione locali ad Parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 587)

$$\begin{aligned} -\frac{2r}{q} = 0 & \quad -2n = -a & \quad -t f : q = b \\ \text{hinc } q = f & \quad n = \frac{1}{2}a & \quad t = -b \\ & \quad mn + tp = 0 \\ & \quad \frac{1}{4}aa - bp = 0 \\ & \quad \frac{1}{4}aa = bp \\ & \quad \frac{1}{4}aa : b = p \end{aligned}$$

Est adeo parameter = -b. Quare parametro b describenda est Parabola deorsum tendens AMB. cujus pars altera AD, seu quod perinde est, describitur Parabola circa axem AK (§. 393) & in eo fit $AK = \frac{1}{4}aa : b$, erit $KB = \frac{1}{2}a$ (§. 388) = $\frac{1}{2}DB$, adeoque DB linea ad secandum proposita. Ducta igitur PM ipsi AK parallela, erit $PB = x$, $PM = y$. Nam $KP = RM = \frac{1}{2}a - x$ & $AR = \frac{1}{4}aa : b - y$. Quare (§. 388) $\frac{1}{4}aa - ax + xx = \frac{1}{4}aa - by$, consequenter $x^2 - ax + by = 0$.

PROBLEMA CCXLIII.

Tab. 603. Datam rectam MN in tres partes continue proportionales secare.

Fig. 88. Sit $MN = a$, pars prima = x, secunda = y, erit tertia = yy : x & per conditionem Problematis,

$$\begin{aligned} x + y + \frac{yy}{x} & : x = a \\ \frac{xx + xy + yy}{x} & = ax \\ yy + xy + xx - ax & = 0 \end{aligned}$$

Cum locus sit ad Circulum (§. 592); æquatio comparanda est, cum formula generali ad Circulum.

Erit ergo $-\frac{2r}{q} = 1$, hoc est, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$.

Porro

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{q^2} + \frac{f^2}{q^2} & = 1 & \quad 2n = 0. \\ \frac{1}{4} + \frac{f^2}{4} & = 1 & \quad \text{hinc } \frac{2nr}{q} = 0 \\ & & \quad n^2 = 0 \\ 1 + f^2 & = 4 & \quad -\frac{2pf}{q} = -a \\ f^2 & = 3 & \quad \frac{2pf\sqrt{3}}{2} = a \\ f & = \sqrt{3} & \quad p = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$m^2 = n^2 + p^2 = p^2$$

$$m = p = a : \sqrt{3}$$

Describatur ergo radio $AC = a : \sqrt{3}$ Tab. VIII. Fig. 88. semicirculus, fiat (ob valorem negativum ipsius r) $HL : AL = 1 : \sqrt{3}$, ob valorem scilicet ipsius r negativum triangulum ALH contraria ratione construendum, ita ut angulus rectus sit in L, qui in formula generali supponitur in H: ita enim prodit $f = \sqrt{3}$, quemadmodum ex regula eruitur per Theorema Pythagoricum. Ducatur porro recta AHR. Quodsi inter C & B erigatur perpendicularis PM: erit $AQ = x$, $QM = y$. Nam (§. 268 Geom.)

$$AH : HL = AQ : QP$$

$$2 : 1 = x : \frac{1}{2}x$$

Unde $PM = y + \frac{1}{2}x$ & $PM^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$.

$$\text{Porro } AH : AL = AQ : AP$$

$$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Unde

Tab. VIII. Fig. 88. Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$
 & $AP \cdot PB = ax - \frac{3}{4}x^2$. Habemus adeo
 (§. 377),

$$\frac{y^2 + xy + \frac{1}{4}xx = ax - \frac{3}{4}x^2}{y^2 + xy + x^2 - ax = 0.}$$

SCHOLIUM.

604. Eodem modo æquationes locales inveniri possunt pro Curvis superiorum generum, ad construenda loca hyperbolida. Primus formulas generales computavit Joannes CRAIGIUS (a), earumque usum deinde uberius exposuit HOSPITALIUS (b).

CAPUT VIII.

De Constructione Æquationum superiorum.

PROBLEMA CCXLIV.

605. **Æ**quationem quamcunque geometricè construere.

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales ad diversas curvas transformetur, in quibus nempe sint duæ indeterminatæ.
3. Construantur duæ æquationes locales. Communis enim intersectio radices determinabit.

SCHOLIUM.

606. Genuinum hoc æquationes construendi artificium primus aperuit Renatus FRANCISCUS SLUSIUS, Canonicus Leodiensis (c): quem postea secuti sunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus, eam exemplis cubicarum imprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illustrabimus, quoniam ad has construendas suffiunt, quæ de locis planis & solidis in capite precedente tradidimus.

(a) In Tractatu de Figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis geometricis p. 62. & seqq.

(b) *Traité analytique des Sect. coniq.* lib. 3. p. 206. & seqq.

(c) *Mesolabo* Part. 2. integra.

PROBLEMA CCXLV.

607. Construere æquationem cubicam
 $y^3 + aby = aac.$

Æquatio proposita $y(y^2 + ab) = aac$
 in hanc resolvitur analogiam

$$a : y = y^2 + ab : ac.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & ejus ope æquationes locales ad diversas curvas eliciantur, fiat

$$\frac{a : y = y : x}{\text{erit I. } ax = y^2. \text{ Hinc } x = y^2 : a}$$

Porro $y : x = yy + ab : ac$ (§. 167 *Arithm.*)
 hoc est, $\frac{= ax + ab : ac}{\text{feu (§. 124.) } = x + b : c}$

II. $x^2 + bx = cy$

$$\frac{ax = y^2}{x^2 + bx = cy}$$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

$$\frac{ax = y^2}{x^2 + bx = cy}$$

IV. $x^2 + ax + bx = y^2 + cy$

$$x^2 + bx = cy$$

$$x^2 + \frac{by^2}{a} = cy$$

$$V. y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$$

$$y^3 + aby = aac$$

$$\frac{y^3}{a} + by = ac$$

$$VI. xy + by = ac$$

Habemus adeo æquationes locales :

$$I. y^2 - ax = 0$$

$$II. x^2 + bx - cy = 0$$

$$III. y^2 + x^2 - cy + bx = 0$$

$$IV. y^2 - x^2 + cy - ax = 0$$

$$V. y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$VI. xy + by - ac = 0$$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Ellipsin; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Equidem constructio æquationis absolvi potest, duobus quibuscunque locis combinatis; præstat tamen nonnisi Circulum cum una ex Sectionibus conicis combinari, non tam quod Circulus fit locus planus (ut vulgo cum CARTESIO sentiunt;) sed quia facilius describitur Sectionibus conici.

Agedum itaque, construamus æquationem propositam primum ope æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

Locus prior construitur, si parametro a Parabola describatur: erit origo

indeterminatæ x in vertice, nempe AP Tab. IX. $= x$, PM $= y$ (§. 587).

Pro Circulo erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{2n}{q} = c \quad \frac{-2p}{q} = b - a$$

$$\& \text{ hinc } q = f \quad n = \frac{1}{2}c \quad -p = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$$

$$(r^2 + f^2) : q^2 = 1$$

$$\text{seu } f = q$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb\right)} = m$$

Quodsi ergo radio AL = m semicirculus AMB describatur, sumaturque Tab. IX. LK = $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ deorsum, quia valor ipsius p negativus, & KD = $\frac{1}{2}c$, atque DQ ipsi AB, QM vero inter K & A, ob valorem ipsius p negativum, si $b > a$, ipsi KD parallela ducatur: erit (§. 588, 589) origo indeterminatæ x in D, nempe DQ = x & QM = y . Fig. 90.

Si jam Circulus cum Parabola combinandus, quo eadem sit indeterminatarum origo, punctum D in A & DQ super AP cadere debet. Quare si fiat perpendicularis AK = $\frac{1}{2}c$ & altera KL = $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit centrum Circuli L & radius LA. Quodsi is describatur, secabit Parabolam in unico puncto M. Dico, semiordinatam Parabolæ PM esse radicem veram æquationis, radices duas reliquas nonnisi imaginarias.

Est nimirum AK = PR = $\frac{1}{2}c$, KL = $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, adeoque LA = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc\right)}$, qui est radius circuli per superius demonstrata, &, si PM = y , MR = $y - \frac{1}{2}c$. Porro AP = KR = $yy : a$ (§. 391), consequenter LR = $y^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & hinc ob LM² seu LA² = LR²

Tab. = LR² + MR² (S. 417 Geom.) $\frac{1}{4}bb$

IX. $-\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + \frac{1}{4}bb - y^2$

Fig. 89. $-\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc,$

hoc est,
 $\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$

$\frac{y^4 + aby^2 - aacy}{y} = 0$

$y^3 + aby - aac = 0$

Quodsi fuerit $a > b$, erit $p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, consequenter cum valor ipsius p sit positivus, punctum K cadet ultra centrum L versus B, & $KL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $KD = \frac{1}{2}c$ ut ante. Cetera fiunt ut ante. Cadit vero tum centrum L infra AK.

Construamus porro eandem æquationem combinato Circulo cum Ellipsi. Quoniam locus ad Ellipsin est y^2

$+\frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$; erit (S. 588),

$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad 2n = \frac{ac}{b}$

hinc $r = 0 \quad n = \frac{ac}{2b}$

& $q = f$
 $\frac{2nr}{q} - \frac{2tps}{2mq} = 0 \quad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = 0$

$-\frac{2tp}{2m} = 0 \quad n^2 = \frac{tm^2}{2m}$

$p = 0 \quad \frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{am^2}{b}$

$\frac{ac^2}{4b} = m^2$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac^2}{b}} = m$

Est itaque ratio parametri t ad diametrum $2m$ ut a ad b . Ellipsis diametro $AB = \sqrt{(ac^2 : b)}$ & parametro t describenda & in centro C erecta per-

pendiculari $CF = ac : 2b$, ductisque FQ Tab. ipsi AC & QM ipsi CF parallelis, erit IX.

$FQ = x$ & $QM = y$, origo nempe in- Fig. 91. determinata x in F. Circulus itaque ita combinandus cum Ellipsi, ut punctum D in F & DK super FC cadat, hoc est,

$FC = \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat

$FK = \frac{1}{2}c$ (est enim $b > a$, hinc $bc > ac$, consequenter $c > ac : b$) & in K erigatur perpendicularis $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit enim per præcedentia L centrum, LF radius Circuli, qui descriptus Ellipsin in M secabit. Dico QM esse radicem æquationis.

Ponamus enim $QM = y$. Quoniam $CF = PQ = ac : 2b$ & $FQ = CP = x$, $AC = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)}$; erit $PM = QM - PQ = y - ac : 2b$, $AP = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} - x$, $PB = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} + x$, $PM^2 = y^2 - aacy : b + a^2c^2 : 4b^2$ & $AP \cdot PB = ac^2 : 4b - x^2$, & ex natura Ellipsis (S. 420),

$b : a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$

$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$

$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$

$x^2 = cy - by^2 : a$

Porro $KR = QF = x$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $KF = QR = \frac{1}{2}c$, adeoque $MR = MQ - QR = y - \frac{1}{2}c$, $RL = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, consequenter (S. 417 Geom.) $LF^2 = KL^2 + KF^2 = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = ML^2 = MR^2 + RL^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc + x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$.

Unde

Unde habemus

$$y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$

hoc est, ob $x^2 = cy - by^2 : a$

$$y^2 + cy - \frac{by^2}{a} - cy + bx - ax = 0$$

$$\frac{ay^2 - by^2}{a} + bx - ax = 0$$

feu $\frac{ay^2 - by^2}{a} = ax - bx$

$$\frac{y^2}{a} = x$$

$$\frac{y^4}{aa} = x^2$$

$$\frac{y^4}{aa} = cy - \frac{by^2}{a}$$

$$y^4 = aacy - aby^2$$

$$y^3 = aac - aby$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Construamus denique eandem æquationem, combinatis loco ad Hyperbolam intra asymptotos $xy + by - ac = 0$ & loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Posterioris constructionem jam tradidimus: alterius constructio elicetur comparatione æquationis propositæ cum formula generali pro locis ad Hyperbolam intra asymptotos instituta. Est nempe (§. 591),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad p = 0 \quad -n = b \quad -mq = -ac$$

$$q = f \quad \frac{pr}{f} = 0 \quad n = -b \quad m = c \quad q = a$$

Jungantur ipsi $AR = a$ recta $RI = c$ & indefinita AS ad angulos rectos, quæ

erunt asymptoti Hyperbolæ æquilatere Tab. IX. per punctum I describendæ (§. 489). IX. Fiât $AD = b$, quia valor ipsius b nega- Fig. 92. tivus: erit $DT = x = NM$, $1M = y$ (§. cit.) Quod si jam Circulus cum Hyperbola combinari debet; punctum D Tab. IX. in D & recta DQ super DT cadere debet. Scilicet ex D in K transferatur Fig. 90. & 92. $DK = \frac{1}{2}c$ & ex K in L, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Radio DL describatur Circulus & ex puncto intersectionis Circuli atque Hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM: dico hanc esse radicem æquationis.

Quoniam enim $AR = a$, $RI = c$, $AD = PN = b$, $NM = DT = x$, $TM = AP = y$; erit $AT = PM = b + x$ & ob $AR \cdot RI = AP \cdot PM$ (§. 501) $by + xy = ac$, consequenter $x = \frac{ac}{y} - b$. Porro $Kr = NM = x$, $LK = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $DK = Tr = \frac{1}{2}c$. Ergo $Lr = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $rM = y - \frac{1}{2}c$, & ob $LM^2 = Lr^2 + rM^2$ (§. 417 Geom.) $x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$y^2 - cy = ax - x^2 - bx$$

feu $\frac{y^2 - cy}{y} = (a - x - b)x$

$$y^2 - cy = \left(a - \frac{ac}{y} + b - b\right) \left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

$$= \left(a - \frac{ac}{y}\right) \left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

hoc est,

$$y^2 - cy = \frac{aac}{y} - \frac{a^2c^2}{y^2} - ab + \frac{abc}{y}$$

$$y^4 - cy^3 = a^2cy - a^2c^2 - aby^2 + abcy$$

$y - c$ $\frac{y^3 = a^2c - aby}{y^3 + aby - a^2c = 0}$

SCHO-

SCHOLIION.

608. Mirabuntur forte, qui Tyrones sunt in altioribus, quod tam operose construxerimus æquationem, quæ per regulam CARTESII ope Circuli & Parabolæ admodum facile construitur. Sed notent velim, geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus, cum eidem satisfaciatur methodus extrahendi radices per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi constructiones istiusmodi quam maxime explicari debet.

PROBLEMA CCXLVI.

609. Construere æquationem cubicam $y^3 - aby = aac$.

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam :

$$a : y = yy - ab : ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diversæ inde eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit

$$I. ax = y^2 \text{ \& hinc } y^2 : a = x$$

$$\text{Porro : } y : x = yy - ab : ac$$

$$\text{hoc est, } = ax - ab : ac$$

$$\text{seu (§. 124) } = x - b : c$$

$$II. x^2 - bx = cy$$

$$ax = y^2$$

$$x^2 - bx = cy$$

$$III. ax - x^2 + bx = y^2 - cy$$

$$ax = y^2$$

$$cy = x^2 - bx$$

$$IV. ax - cy = y^2 - x^2 + bx$$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

$$x^2 - bx = cy$$

$$x^2 - \frac{by^2}{a} = cy$$

$$a : b \text{ mult.}$$

$$V. \frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{acy}{b}$$

$$y^3 - aby = aac$$

$$\frac{y^3}{a} - by = ac$$

$$VI. xy - by = ac$$

Habemus adeo æquationes locales

$$I. y^2 - ax = 0$$

$$II. x^2 - bx - cy = 0$$

$$III. y^2 + x^2 - cy - bx = 0$$

$$- ax$$

$$IV. y^2 - x^2 + cy + bx = 0$$

$$- ax$$

$$V. y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy^2}{b} = 0$$

$$VI. xy - by - ac = 0$$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam ; tertius ad Circulum ; quartus ad Hyperbolam æquilateram ; quintus ad Hyperbolam scalenam ; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Cum æquationes locales nonnisi signis differant ab iis, in quas æquationem Problematis præcedentis resolvimus ; æquatio præsentis eodem fere modo construitur, quo præcedentem construximus : id quod in unico casu, quo Circulus cum Parabola combinatur, ostendisse suffecerit.

Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur ut in Problemate præcedente,

D d d

fi

Tab. si parametro a Parabola describatur:
IX. erit origo indeterminata x in vertice,
Fig. 93. nempe $AP = x$, $PM = y$.

Pro loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589), $2r = 0$ & hinc $q = f$

$$\frac{2n = c}{n = \frac{1}{2}c} \quad 2p = b + a$$

$$p = \frac{b + a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa = m^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa)} = m}$$

Quia ergo in Circulo origo indeterminata x distat a centro quantitate $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\frac{1}{2}c$, fiat $AD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & perpendicularis $DH = \frac{1}{2}c$ atque radio AH describatur per verticem Parabolæ A Circulus, erit PM radix vera æquationis; QN & qn erunt falsæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$ (§. 417 *Geom.*),

$AP = yy : a$ (§. 391), $PD = HR = \frac{yy}{a} - \frac{1}{2}a$

$MR = y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa$

$+ \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a}$

$+ \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} - cy = 0$$

$$y^4 - abyy - aacy = 0$$

$$y^3 - aby - aac = 0.$$

PROBLEMA CCXLVII.

610. Construere æquationem cubicam
 $y^3 - aby = -aac$.

Æquatio proposita $y^3 - aby = -aac$, hoc est, $aac = aby - y^3$ in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = ab - yy : ac.$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = ab - yy : ac$

hoc est, $= ab - ax : ac$

feu (§. 124) $= b - x : c$

II. $bx - xx = cy$

$$ax = y^2$$

$$bx - xx = cy$$

III. $ax - bx + xx = yy - cy$

$$ax = yy$$

$$cy = bx - xx$$

IV. $ax - cy = yy - bx + xx$

$$bx - xx = cy$$

$$\frac{by^2}{a} - xx = cy$$

$a : b$ mult.

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$$aac = aby - y^3$$

$$ac = by - \frac{y^3}{a}$$

VI. $ac = by - xy$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx + cy = 0$

III. $y^2 - x^2 - cy + bx = 0$

$$- ax$$

IV. $y^2 + x^2 + cy - bx = 0$

$$- ax$$

V. f

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy - by + ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam, tertius ad Hyperbolam æquilateram, quartus ad Circulum, quintus ad Hyperbolam scalenam, sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Æquationes locales denuo nonnisi signis differunt ab iis, quas in Problemate 245, (§. 607) reperimus. Quare denuo nobis suffecerit constructionem ope Parabolæ & Circuli ostendisse.

Tab. IX. Quoniam locus ad Parabolam $y^2 = ax$; Parabola denuo construitur parametro a , & origo indeterminatæ x est in vertice axis A.

Pro Circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589)

$\frac{2r}{q} = 0 \quad -2n = c \quad -2p = -b - a$

hinc

$q = f \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = \frac{b+a}{2}$

$n^2 + p^2 = m^2$

$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)} = m$

Tab. IX. Describatur ergo, radio AC = m , semicirculus, ductaque FLS intervallo Fig. 95. CL = $\frac{1}{2}c$ diametro AB parallela; erit SQ = x , QM = y .

Tab. IX. Quamobrem si Circulus cum Parabola combinatur, punctum S super A & SL super AD cadet. Quare si fiat AD = $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & erigatur perpendicularis DH = $\frac{1}{2}c$; erit AH = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$ radius Circuli per verticem de-

scribendi & PM radix vera æquationis. Tab. IX.

Nam AP = yy ; a (§. 391), hinc DP = HR = yy ; $a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Porro MR Fig. 94.

$= y + \frac{1}{2}c$. Quare ob $HM^2 = MR^2 + HR^2$ (§. 417 Geom.), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} + cy = 0$

$y^4 - abyy + aacy = 0$

$y^3 - aby + aac = 0$

COROLLARIUM.

612. Si Circulus Parabolam tangit; duæ interfectiones coincidunt, adeoque æquatio duas habet radices æquales. Si eam nec tangit, nec fecat; radices omnes sunt impossibiles.

SCHOLIUM.

613. Constructiones per Circulum & Parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis quas habet CARTESIUS (a), etsi alio modo eruta.

PROBLEMA CCXLVIII.

614. Construere æquationem cubicam $y^3 + ay^2 - aby = aac$.

Ut nova indeterminata in æquatione introducatur, fiat

$a : y = y : x$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$. Substituatur ax pro y^2 in æquatione data.

erit $axy + aax - aby = aac$

II. $xy + ax - by = ac$

$xy^2 + axy - by^2 - axy - a^2x + aby = acy - a^2c$

$xy^2 - by^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$

$ax^2 - abx - a^2x = acy - aby - a^2c$

D d d 2

III.

(n) Geomet. lib. III. p. 85. & seqq.

$$\begin{aligned} \text{III. } & \frac{x^2 - bx - ax = cy - by - ac}{ax - y^2} \\ \text{IV. } & \frac{2ax - x^2 + bx = y^2 - cy + by + ac}{x^2 - bx - ax = cy - by - ac} \\ & \frac{ax = y^2}{+} \\ \text{V. } & \frac{x^2 - bx = y^2 + cy - by - ac}{x^2 - \frac{by^2}{a} = ax + cy - by - ac} \\ \text{VI. } & \frac{\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - ay - \frac{a^2c}{b}} \end{aligned}$$

Habemus adeo æquationes locales :

- I. $y^2 - ax = 0$
- II. $xy + ax - by - ac = 0$
- III. $x^2 - bx - cy + ac = 0$
 $- ax + by$
- IV. $y^2 + x^2 - cy - 2ax + ac = 0$
 $+ by - bx$
- V. $y^2 - x^2 + cy + bx - ac = 0$
 $- by$
- VI. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} + \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$
 $- ay$

Locus primus & tertius sunt ad Parabolam; secundus ad Hyperbolam intra asymptotos; quartus ad Circulum; quintus ad Hyperbolam æquilateram; sextus ad Hyperbolam scalenam.

Tab. IX. Fig. 96. Construamus æquationem combinando Circulum cum Parabola. Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur, si parametro a Parabola describitur; cujus vertex A origo ipsius x .

Pro Circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\begin{array}{l} \frac{2r}{q} = 0 \quad -2n = -c + b \quad -2p = -2a - b \\ \text{hinc} \\ q = f \quad n = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b \quad p = a + \frac{1}{2}b \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 + p^2 - m^2 = ac}{n^2 + p^2 - ac = m^2} \\ & \frac{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}bb + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac = m^2}{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + (a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)^2)} = m} \end{aligned}$$

Jungatur ipsi IL = a ad angulos rectos LR ipsi æqualis & refecetur LH = PN = $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR = $a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat LD = HC = $\frac{1}{2}b$: erit CR = m, adeoque radius Circuli, quo descripto habebitur IP = x & PM = y.

Est enim NM = PM - PN = $y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, adeoque $NM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$. Porro DP = IP - ID = $x - a - \frac{1}{2}b$, adeoque $DP^2 = CN^2 = x^2 - 2ax - bx + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $NM^2 + CN^2$ (§. 417 Geom.) = $CM^2 = CR^2 = CH^2 + HR^2 = \frac{1}{4}bb + aa + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$, erit $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, quæ est æquatio ad construendum proposita. Circulus itaque rite constructus.

Si jam Circulus cum Parabola combinatur, punctum I in verticem Parabolæ A & IP super AP cadit. Quare fiat AL = a; erit LR = a (§. 388), hoc est, LR = a. Fiat porro LH = $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR = $a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat denique LD = HC = $\frac{1}{2}b$; erit CR radius Circuli per punctum Parabolæ R ex centro C describendi, & semiordinata PM radix æquationis.

Nam PN = LH = $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$: hinc NM = $y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Ex natura Parabolæ $y^2 = a$ = AP: unde DP = CN = $\frac{y^2}{a} - a - \frac{1}{2}b$. Quare cum sit (§. 417 Geom.) $CM^2 (= CR^2) = CN^2 + NM^2$ erit $\frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - 2y^2 + aa - \frac{by^2}{a} +$

$$+ ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + by + \frac{1}{4}bb - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc,$$

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - y^2 - \frac{by^2}{a} + by - cy + ac = 0$$

$$y^4 - a^2y^2 - aby^2 + a^2by - a^2cy + a^3c = 0$$

$$y^3 + ay^2 - aby - a^2c = 0$$

SCHOLIION.

615. Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum casus reliqui construi debeant, ut adeo plura addere supervacaneum judicemus.

PROBLEMA CCXLIX.

616. Æquationem biquadraticam $y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$ construere.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Hoc valore in æquatione data substituto prodibit

$$a^2x^2 + aby^2 + a^2cy = a^3d \quad (ab)$$

$$\text{II. } y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = \frac{a^2d}{b}$$

$$\text{Item } a^2x^2 + a^2bx + a^2cy = a^3d \quad (a^2)$$

$$x^2 + bx + cy = ad$$

$$\text{III. } \frac{x^2 + bx = ad - cy}{ax = y^2}$$

$$\text{IV. } \frac{x^2 + bx + ax = y^2 + ad - cy}{ax = y^2} \\ x^2 + bx = ad - cy$$

V. $ax - x^2 - bx = y^2 - ad + cy$
Habemus adeo æquationes locales;

$$\text{I. } y^2 - ax = 0$$

$$\text{II. } y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} - \frac{a^2d}{b} = 0$$

$$\text{III. } x^2 + bx + cy - ad = 0$$

$$\text{IV. } y^2 - x^2 - cy - bx + ad = 0$$

$$\text{V. } y^2 + x^2 + cy + bx - ad = 0$$

Locus primus & tertius est Parabola, secundus Ellipsis, quartus Hyperbola æquilatera, quintus denique Circulus.

Construamus primum æquationem, Circulo cum Parabola $ax = y^2$ combinato. Construat Parabolam MDN para-
metro a , erit $DQ = x$, $QM = y$. Tab.X. Fig.98.

Pro Circulo $y^2 + x^2 + cy + bx - ax - ad = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{f^2}{q^2} = 1 \quad \frac{-2n=c}{f=q} \quad \frac{-2p=b-a}{n=-\frac{1}{2}c} \quad \frac{-2p=b-a}{p=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)} = m$$

Erecta in D perpendiculari $DK = QP = \frac{1}{2}c$ ob valorem ipsius c negativum, ducatur per K recta indefinita AB fiatque $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ erit (§. 417 Geom.). $DC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)}$. Fiat porro $DI = a$ & continuata DC in H, donec $HD = d$, quærat media proportionalis DL (§. 327 Geom.), quæ erit \sqrt{ad} : consequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§. 417 Geom.) est radius Circuli ex centro C per L describendi, qui cum Parabola secet in M & N, erit QM radix æquationis vera, RN falsa.

Ddd 3

Est

Tab.X. Est enim $PM = y + \frac{1}{2}c$; $DQ = KP$
 Fig.98. $= y^2 : a$ (§.388), $CP = KP - KC =$

$$\frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b. \text{ Quare (§.417 Geom.)}$$

$$\text{ob } CL^2 \text{ feu } MC^2 = PM^2 + PC^2, \frac{1}{4}cc$$

$$+ \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy$$

$$+ \frac{1}{4}cc + \frac{y^2}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb,$$

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + cy = ad$$

$$y^4 + aby^2 + aacy = a^3d.$$

Combinemus eundem Circulum cum
 Ellipsi, quam definit æquatio superius

$$\text{reperta } y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{ac}{b}y - \frac{a'd}{b} = 0$$

Erit, vi Theorematis generalis (§.588),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad -2n = \frac{ac}{b} \quad p = 0$$

hinc

$$q = f \quad n = -\frac{ac}{2b}$$

$$n^2 = \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a'd}{b}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{am^2}{b} = -\frac{a'd}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} + ad = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{ac^2}{4b} + ad\right)} = m$$

Construatur locus ad Circulum, ut
 ante, nempe ut sit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a$

Tab.X. $= \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$, adeoque DL

Fig.99. $= \sqrt{ad}$ (§.327 Geom.); consequenter
 $LC = \sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad\right)}$ (§.417 Geom.).

Jam cum origo indeterminatæ x sit Tab.X.
 in D, & valor ipsius n in Ellipsi etiam Fig.99.
 negativus, & $p = 0$; ex DK refecetur
 $DG = ac : 2b$, & per G ducatur AB ipsis
 DQ & KP parallela, fiatque $AG = BG$
 $= \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB
 tanquam axem describatur Ellipsis
 AMB, in qua axis AB ad parametrum
 $= b : a$. Dico QM esse radicem æqua-
 tionis veram. Est enim $GR = DQ$
 $= x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG$
 $= y + ac : 2b$; ratio diametri ad paramet-
 rum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$.
 Quare ex natura Ellipsis (§.431)

$$a:b = RM^2 : AG^2 - GR^2 (= BR.RA)$$

$$= y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = ad - \frac{by^2}{a} - cy$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK$
 $= y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK$
 $= x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $LC^2 = MC^2 = PM^2$
 $+ PC^2$ (§.417 Geom.) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab$
 $+ \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + x^2 - ax + \frac{1}{4}aa$
 $+ bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$ad - \frac{by^2}{a} - cy = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

hoc

hoc est, $\frac{y^4}{a^2} = ad - \frac{by^2}{a} - cy$, vi superiorum

$$\frac{y^4}{a^2} = a^2 d - aby^2 - a^2 cy$$

$$\frac{y^4 + aby^2 + a^2 cy}{a^2} = a^2 d$$

PROBLEMA CCL.

617. Construere æquationem biquadraticam

$$y^4 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $yy = ax$. Hinc $x = y^2 : a$

Si valor ipsius y^2 in æquatione proposita substituatur : prodibit

$$\frac{a^2 x^2 + aby^2 - a^2 cy}{ab} = -a^3 d$$

$$\text{II. } \frac{ax^2}{b} + y^2 = \frac{acy}{b} - \frac{a^2 d}{b}$$

$$\text{Item } a^2 x^2 + a^2 bx = a^2 cy - a^3 d$$

$$\text{III. } x^2 + bx = cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$\text{IV. } x^2 + bx + ax = y^2 + cy - ad$$

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = cy - ad$$

V. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy + ad$
Habemus adeo æquationes locales

$$\text{I. } y^2 - ax = 0$$

$$\text{II. } y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} + \frac{a^2 d}{b} = 0$$

$$\text{III. } x^2 + bx - cy + ad = 0$$

$$\text{IV. } y^2 - x^2 + cy - bx - ad = 0$$

$$\text{V. } y^2 + x^2 - cy + bx + ad = 0$$

Locus primus & tertius sunt Parabolæ ; secundus est Ellipsis ; quartus Hyperbola æquilatera ; quintus denique Circulus.

Dabimus constructionem per Circulum & Parabolam, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$. Est ergo parameter $= a$, AP $= x$, PM $= y$. Tab. X. Fig. 100.

Pro circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0. \quad -2n = -c \quad -2p = -a + b$$

hinc

$$q = f \quad n = \frac{1}{2}c \quad p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$n^2 + p - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 - ad = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad\right)} = m$$

Ducatur recta CR & sumatur C pro centro Circuli. Erigatur CK $= \frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat AK $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; erit in A origo indeterminatæ x & AC $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb\right)}$. Fiat AI $= d$, AH $= a$; quaraturque media proportionalis AL $= \sqrt{ad}$ (§. 327 Geom.). Porro super AC describatur semicirculus, & in eo applicetur GA $= AL = \sqrt{ad}$; erit GC $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad\right)}$ (§. 417 Geom.) adeoque radius Circuli.

Quoniam in Parabola, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$, origo indeterminatæ x in verticem axis cadit; circa axem AP parametro a describatur Parabola: dico PM esse radicem æquationis veram.

ER

Tab.X. Est enim $MR = PM - PR = PM -$
 Fig. $CK = y - \frac{1}{2}c$; $AP = y^2 : a$ & $CR = KP$
 100. $= AP - AK = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, con-
 sequenter ob $CG^2 = CM^2 = CR^2 +$
 MR^2 (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab$
 $+ \frac{1}{4}bb - ad = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab$
 $+ \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,
 $\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = -ad$

$$y^4 + aby^2 - aacy = -a^3d$$

Cum loco ad Circulum descripto
 eodem modo, quo in Problemate præ-
 cedente, combinatur locus ad Ellipsin.
 Labet vero adhuc constructionem dare
 per Circulum & Hyperbolam æquila-
 teram $y^2 - x^2 + cy - bx - ax - ad = 0$.

Est autem, vi Theorematis gene-
 ralis (§. 590),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad -\frac{t}{2m} = -1 \quad -2n = c \quad 2p = -a - b$$

$$t = 2m \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = -ad$$

$$m^2 = p^2 - n^2 - ad$$

$$m^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad\right)}$$

Tab.X. Constructo nempe Circulo ut ante,
 Fig. ita ut sit $AK = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $CK = \frac{1}{2}c$, adeo-
 101. que $CA = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc\right)}$,
 $AH = a$, $AI = d$, adeoque $AL = AG$
 $= \sqrt{ad}$, consequenter $GC = MC =$
 $\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad\right)}$; quia
 origo indeterminatæ y in Hyperbola
 ob valorem ipsius n negativum ab axe

versus finistram distat intervallo $\frac{1}{2}c$, Tab.X.
 fiat $KT = \frac{1}{2}c$, ducaturque per T recta Fig.
 OS ipsi AP parallela & ad hanc AF 101.
 perpendicularis.

Quoniam porro, ob valorem ipsius
 p negativum, indeterminatæ x origo
 a centro distat intervallo $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, fiat
 $FO = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $OQ = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab$
 $+ \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad\right)}$; erit O centrum
 & Q vertex Hyperbolæ æquilateræ;
 quæ si circa axem QS describatur,
 Circulum in M secabit. Dico PM esse
 radicem æquationis veram.

Est enim $CR = KP = AP - AK =$
 $x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $MR = MP - RP = MP$
 $- CK = y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob
 $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*)
 $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}cc - ad = x^2 - ax$
 $+ \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$,
 hoc est,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = -ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro $MS = MP + PS = MP + KT$
 $= y + \frac{1}{2}c$, $SO = FS + FO = AP + FO$
 $= x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob SO^2
 $- QO^2 = MS^2$ (§. 509) $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa$
 $+ bx + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$
 $+ ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

seu substituto valore ipsius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ seu } ax = y^2$$

$$x^2 = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

His valoribus ipsorum x^2 & x in
 æquatione

$$x^2 +$$

$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$
 substitutis, prodit

$$y^2 + cy = \frac{y^4}{aa} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$aacy = y^4 + aby^2 + a^3d$$

feu $y^4 + aby^2 - a^2cy = -a^3d$.

PROBLEMA CCLI.

618. Construere æquationum biquadraticam $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$.

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; æquatio data in hanc resolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$
 $ax - by = y^2$, consequenter
 $a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2$
 Substituatur in hac æquatione ulterius valor ipsius y^2 ; prodibit

$$a^3d - a^2cy = a^2x^2 - ab^2x + b^3y$$

h. c. $a^3d - a^2cy - b^3y = a^2x^2 - ab^2x$

III. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}$

$$yy + by = ax$$

IV. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2x}{a} + ax$

$$ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}$$

$$y^2 + by = ax$$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2x}{a}$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Habemus adeo æquationes locales :

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} + \frac{a^3d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2x}{a} + cy - ad = 0$
 $+ \frac{b^3y}{aa}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3y}{a^2} + \frac{b^2x}{a} + ad = 0$
 $+ by - ax$
 $- cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} - \frac{b^2x}{a} - ad = 0$
 $+ by - ax$
 $+ cy$

Construamus æquationem per Circulum & Parabolam. Pro Circulo cum

$$\text{fit } y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} + by + cy - \frac{b^2x}{a} - ax$$

$- ad = 0$; erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \quad \frac{f^2}{q^2} = 1 \quad -2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c.$$

$$f = q \quad n = -\frac{b^3}{2a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$$

$$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$$

$$p = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$$

Circulus ergo eodem prorsus modo construitur, quo in Problemate 249,

E e e (§.

Tab.X. (§. 616). Fit nempe $DC = p = b^2 : 2a$

Fig. $+ \frac{1}{2}a$, $DO = n = b^3 : 2a^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$,

102. $HO = a, OI = d$; erit $OC = \sqrt{(n^2 + p^2)}$,

$OL = \sqrt{ad}$, & hinc $LC = \sqrt{(n^2 + p^2 + ad)}$.

Ducatur OQ ipsi DC parallela, erit ob valorem OD negativum origo indeterminata x in O .

Porro pro Parabola, ad quam $y^2 + by - ax = 0$, erit, vi theorematis generalis (§. 587),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad -2n = b \quad -\frac{t}{q} = -a$$

$$\text{hinc } r = 0 \quad n = -\frac{1}{2}b \quad t = a$$

$$q = f$$

$$\frac{n^2 + tp = 0}{\frac{1}{4}bb + ap = 0}$$

$$\frac{ap = -\frac{1}{4}bb}{p = -\frac{bb}{4a}}$$

$$p = -\frac{bb}{4a}$$

Ob valorem itaque ipsius n negativum fiat $OK = \frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipsi OQ parallela; ob valorem ipsius p negativum, fiat $KA = bb : 4a$; erit in A Parabolæ vertex parametro a circa axem AR describendæ, quæ Circulum secabit in M . Dico QM esse radicem æquationis veram.

Sit enim $QM = y$: erit $MR = y + \frac{1}{2}b$, adeoque $RA = \frac{yy + by + \frac{1}{4}bb}{a}$

(§. 391), consequenter $KR = AR - AK = \frac{yy + by}{a}$. Hinc $PC = OQ$

sive $KR - CD = \frac{yy + by}{a} - p$ & PM

$= QM + QP = QM + DO = y + n$. Quare cum sit $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebitur

$$\text{tandem } n^2 + p^2 + ad = \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa}$$

$$+ \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + p^2 + y^2$$

$$+ 2ny + n^2, \text{ hoc est, } \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} +$$

$$\frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} - y^2 + 2ny = ad.$$

Substituuntur valores p & n ex æquatione ad Circulum: Quoniam $p = \frac{1}{2}a + b^2 : 2a$ & $n = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + b^3 : 2a^2$;

$$\text{prodibit } \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - y^2 - \frac{b^2y^2}{aa}$$

$$- by - \frac{b^2y}{aa} + y^2 + by + cy + \frac{b^2y}{aa} = ad,$$

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + cy = ad$$

$$\frac{y^4 + 2by^3 + a^2cy}{aa} = a^3d$$

SCHOLIUM.

619. *Æquationes locales, in quas æquationes construendas resolvimus, sunt ad curvam aliquam determinatam; sed plurimum amplificatur methodus, si exemplo SLUSII ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius Ellipsis vel Hyperbola unica, sed infinitæ constructioni inserviunt. Potest etiam æquatio localis ad curvam datam revocari, sicque Problema per Sectionem conicam datam constitui. Agedum itaque! videamus, quomodo utrumque præstetur.*

PROBLEMA CCLII.

620. *Æquationem datam resolvere in æquationes locales, quæ sint ad curvas indeterminatas.*

a) Substituatur pro y radice æquationis $az : v$, ubi pro v recta quælibet assumi potest, & nova, quæ prodit, æquatio in locales ut supra resolvatur: id quod exemplo unico ostendisse sufficit.

Sit

Sit ex.gr. $y^3 + aby = aac$. Quoniam $y = az : v$;
erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$; consequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = aac$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam :

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $z : x = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

hoc est, $= vx + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

feu (§. 124) $= x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$
 $vx = z^2$

III. $x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$
 $vx = z^2$
 $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

IV. $vx - x^2 - \frac{vbx}{a} = z^2 - \frac{vcz}{a}$
 $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

hoc est, ob $x = z^2 : v$

V. $x^2 + \frac{bx^2}{a} = \frac{vcz}{a}$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

$$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$$

VI. $zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

Habemus adeo æquationes locales ad infinitas Sectiones conicas nempe

I. $z^2 - vx = 0$ } ad infinitas
II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$ } tas Para-
 } bolas.

III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} = 0$ } ad infinitas
 } Hyperbolas
 } æquilateras.

IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} = 0$ } ad infinitos
 } Circulos.

V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vcz}{b} = 0$ } ad infinitas
 } Ellipses.

VI. $zx + \frac{vbx}{a} - \frac{v^2c}{a} = 0$ } ad infinitas
 } Hyperbolas
 } intra asymptotos.

β) Si fieret $\frac{aa}{v} : y = y : x$; locus

primus $y^2 = \frac{a^2x}{v}$ foret ad infinitas

Parabolas, nec radix æquationis y (id quod maxime commodum videri poterat) mutaretur in aliam: sed cum locus ad Circulum degeneret in locum ad Ellipsin, simplicitati constructionis minime confuleretur. Loca tamen ad Hyperbolam & Ellipsin determinatam ita reduci possunt ad Hyperbolas & Ellipses infinitas, ut utraque indeterminata y & x eadem maneat.

Ex.gr. Pro æquatione proposita construenda eluimus supra (§. 607)

I. $y^2 + ax = 0$ } loca ad Para-
II. $x^2 + bx - cy = 0$ } bolam.

III. $y^2 + x^2 - cy - ax = 0$ } locum ad Cir-
 } + bx } culum.

Ecc 2

Quo-

Quoniam $y^2 = ax$
 erit $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$
 & ob $cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} - cy = \frac{a^2x}{v} - x^2 - bx$$

$$y^2 - \frac{vcy}{a} = ax - \frac{vx^2}{a} - \frac{vbx}{a}$$

Item $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$
 $cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} + cy = x^2 + \frac{a^2x}{v} + bx$$

$$y^2 + \frac{vcy}{a} = \frac{vx^2}{a} + ax + \frac{vbx}{a}$$

En locum ad infinitas Ellipses $y^2 + \frac{vcy}{a} - \frac{vx^2}{a} - ax = 0$ & locum ad infinitas Hyperbolas $y^2 - \frac{vcy}{a} + \frac{vx^2}{a} - ax - \frac{vbx}{a} = 0$:

quorum uterque cum loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ construi potest.

PROBLEMA CCLIII.

621. *Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem speciei, quæ sit ad curvam datam.*

1. Ex æquatione locali eliciendus est valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde est, ratio earundem.
2. Hi valores cum sint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda: æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coefficientium in æquatione data substituendi, ut in quæsitam degeneret.

Ex.gr. Æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda est in aliam, quæ sit ad Parabolam,

cujus parameter r . Quoniam a parameter Parabolæ, ad quam æquatio data existit; erit $r = a$, consequenter æquatio quæ sita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda sit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad Circulum, cujus radius r . Quoniam radius Circuli, ad quam est æquatio data (§. 589) $= \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc}$

$$\text{erit } (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc = r^2$$

$$\frac{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b} = \frac{r^2 - \frac{1}{4}cc}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b}$$

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b + \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}cc)} = f$$

$$\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}cc)} = g$$

$$\frac{1}{2}c = \sqrt{(r^2 - (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2)} = h$$

His valoribus in æquatione proposita substitutis; prodit æquatio ad Circulum desideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

PROBLEMA CCLIV.

622. *Invenire regulam generalem construendi omnes æquationes, tam cubicas quam biquadraticas.*

Sit descripta Parabola, & ex centro Tab.X.
 H radio AH Circulus secans eam in N, Fig.
 N & M. Sit $AD = b$, $DH = d$, $AQ = c$; erit $AH^2 = dd + bb$. Sit porro 103.
 $PM = x$ parameter Parabolæ $= a$,
 erit $OM = x + c$, $RM = x + d$. Quoniam (§. 404)

$$a : OM + AQ = PM : AP$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

$$\text{erit } DP = HR = \frac{x^2 + 2cx}{a} - b, \text{ adeoque}$$

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} -$$

$$\frac{4bcx}{a} + bb, \text{ \& } RM^2 = x^2 + 2dx + dd.$$

Habe-

Habemus adeo:

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$$

$$+ x^2 + 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$

$$+ x^2$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$

$$- 2abx + 2a^2d$$

$$+ a^2x$$

Apparet adeo, si habetur terminus secundus positivus, radices veras cadere versus dextram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0; \text{ erit}$$

$$4c = p \quad 4c^2 - 2ab + a^2 = q$$

$$c = \frac{1}{4}p \quad 4c^2 + a^2 - q = 2ab$$

$$\frac{1}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$$

$$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$$

vel

$$a^2 + 4c^2 - 2ab = -q$$

$$a^2 + \frac{1}{16}p^2 + q = 2ab$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$$

Porro

$$2a^2d - 4abc = r$$

$$2a^2d = r + 4abc$$

$$d = \frac{r}{2a^2} + \frac{2bc}{a}$$

$$\text{hoc est } d = \frac{r}{2a^2} + \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2}$$

vel

$$2aad - 4abc = -r$$

$$2aad = 4abc - r$$

$$d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

$$\text{hoc est } d = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$$

Sit jam $pN = x$; reliqua sint ut an-Tab.X. te: erit $Nr = pN - rp = pN - DH$ Fig. $= x - d$, $No = x - c$, $pm = x - 2c$. 103.

Quoniam (§. 404)

$$a : oN + AQ = pm : Ap$$

$$a : x = x - 2c : \frac{xx - 2cx}{a}$$

erit $Dp = Hr = \frac{x^2 - 2cx}{a} - b$. Habemus adeo $NH^2 = Hr^2 + Nr^2$ (§. 417 Geom.)

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2$$

$$+ x^2 - 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} - 2dx$$

$$+ x^2$$

$$x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc = 0$$

$$- 2abx - 2a^2d$$

$$+ a^2x$$

Apparet adeo, si terminus secundus fit negativus, radicem æquationis veram esse versus sinistram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda $x^3 - px^2 + qx + r = 0$; erit

$$-p = -4c$$

$$\frac{1}{4}p = c$$

$$4c^2 - 2ab + a^2 = q$$

$$a^2 + 4c^2 - q = 2ab$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} - \frac{q}{2a} = b$$

Ecc 3

hoc

hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

vel

$$\begin{array}{r} 4c^2 - 2ab + a^2 = -q \\ a^2 + 4c^2 + q = 2ab \\ \hline + + = 2a \end{array}$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$

$$4abc - r = 2a^2d$$

$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc est $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$

$$4abc + r = 2a^2d$$

$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc est $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d$

Tab.X. Est ergo in omnibus æquationibus
Fig. cubicis completis

103.

$$AQ = \frac{1}{4}p$$

$$DA = \frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a}$$

$$DH = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2}$$

Nimirum in regula, q seu coëfficiens termini tertii semper afficitur signo contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, si p & r diversis signis afficiuntur: alias semper est $+r$.

Quoniam coëfficientes illorum terminorum evanescent, qui nihilo æquales ponuntur; evidens est ejusdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique si quadratum radii MH vel HN ponatur $bb + dd + af$; æquatio manebit biquadratica. Quare si biquadratica æquatio fuerit $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + f = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, sed

$$\begin{array}{l} f = a^3 f \\ f : a^3 = f \end{array}$$

Unde radius Circuli invenitur ut in Problemate 250 (§. 617), si fuerit $+f$, vel ut in Problemate 251 (§. 618), si fuerit $-f$. His observatis, regula eadem constructioni æquationum biquadraticarum satisfacit.

SCHOLIION.

623. Atque hæc est regula, quam Thomas BAKERUS (a) centalem vocat & ad omnes casus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ superius tradidimus. Restat, ut usum hujus doctrinæ aliquot exemplis illustremus.

PROBLEMA CCLV.

624. Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.

Si datarum major = b minor = y ,
quæsitaram minor = a major = x

erit, per conditionem Problematis,

$$a : y = y : x$$

I. $ax = yy$

$$y : x = x : b$$

II. $xx = by$

III.

(a) In Clave Geometrica catholica P. 6.

$$a : y = x : b$$

III.
$$\begin{aligned} ab &= xy \\ x^2 &= by \\ ax &= y^2 \end{aligned}$$

IV.
$$\begin{aligned} x^2 - ax &= by - y^2 \\ ax &= y^2 \\ x^2 &= by \end{aligned}$$

V.
$$\begin{aligned} x^2 + ax &= y^2 + by \\ x^2 &= by \\ \frac{ax^2}{v} &= \frac{aby}{v} \\ ax &= y^2 \end{aligned}$$

VI.
$$\begin{aligned} \frac{ax^2}{v} + ax &= \frac{aby}{v} + y^2 \\ ax &= y^2 \\ \frac{ax^2}{v} &= \frac{aby}{v} \end{aligned}$$

VII.
$$ax - \frac{ax^2}{v} = y^2 - \frac{aby}{v}$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - by = 0$

III. $xy - ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{v} + \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Hyperbolas scalenas.

VII. $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Ellipses.

Quodsi in æquatione ad Hyperbolam intra asymptotos $xy = ab$ substituatür valor ex æquatione ad Parabolam $ax = y^2$; prodibit $y^3 - a^2b = 0$.

Constructio itaque multis modis

fieri potest, nimirum per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos, per Circulum & Hyperbolam æquilateram, per Circulum & infinitas Hyperbolas, per Circulum & infinitas Ellipses, vel per duas Hyperbolas &c. vel denique per regulam centram BAKERI.

Pro Circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\begin{aligned} \frac{r}{q} &= 0 & 2n &= b & 2p &= a \\ \frac{f^2}{q^2} &= 1 & n &= \frac{1}{2}b & p &= \frac{1}{2}a \\ f &= q \\ n^2 + p^2 &= m^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa\right)} = m$$

Quoniam in Parabola parametro a Tab. IX. *Fig. 93.* descripta, ad quam $ax = y^2$, origo ipsius x in vertice A existit; Circulus per ejus verticem describendus radio $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa\right)}$. Fiat itaque $AD = \frac{1}{2}a$, $DH = \frac{1}{2}b$; erit centrum Circuli in H & $PM = y$, $PA = x$: id quod facile ostenditur eodem, quo superius, modo.

Pro Ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\begin{aligned} \frac{2r}{q} &= 0 & \frac{t}{2m} &= \frac{a}{v} & 2n &= \frac{ab}{v} \\ \text{hinc} & & & & & \end{aligned}$$

$$f = q \qquad n = \frac{ab}{2v}$$

$$\frac{2tp}{2m} = a = \frac{2ap}{v} \qquad n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$\frac{2ap = av}{p = \frac{1}{2}v} \qquad n^2 + \frac{ap^2}{v} = \frac{am^2}{v}$$

$$vn^2$$

$$\frac{vn^2}{a} + p^2 = m^2$$

$$\frac{ab^2}{4v} + \frac{1}{4}v^2 = m^2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{ab^2}{v} + v^2\right)} = m$$

Tab. X. Constructio itaque Problematis per

Fig. Circulum & Ellipsin hæc est: Jungantur

104. DF = b & DE = a ad angulos rectos.

Fiat DK = $\frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari

KC = $\frac{1}{2}a$; erit DC = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa\right)}$. Ex

centro itaque C radio DC describatur

Circulus: ita locus prior erit construc-

tus atque origo indeterminatæ x in D.

Quare pro Ellipsi fiat DH = ab : 2v &

per H ducatur ipsi DE parallela IN.

Fiat HL = $\frac{1}{2}v$ & LI = LN = $\frac{1}{2}\sqrt{(ab^2 :$

v + v²); erit L centrum, IN axis El-

lipsis: quæ si describatur, secabit Cir-

culum in M. Dico esse DQ = x, QM

= y, consequenter DE, QM, DQ,

DF quatuor continue proportionales.

Est enim CP = x - $\frac{1}{2}a$ & PM = y - $\frac{1}{2}b$,

adeoque ob DC² = CM² = CP² + PM²

(§. 417 Geom.), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = xx - ax$

+ $\frac{1}{4}aa + yy - by + \frac{1}{4}bb$, hoc est, yy + xx

- by - ax = 0: qui est locus ad Circulum.

Porro OM = y - ab : 2v, LO = x - $\frac{1}{2}v$

adeoque ob

$$v : a = IL^2 - LO^2 : OM^2 \text{ (§. 431)}$$

$$I : \frac{a}{v} = \frac{ab^2}{4v} - x^2 + vx : y^2 - \frac{aby}{v} + \frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{4v^2} - \frac{ax^2}{v} + ax = y^2 - \frac{aby}{v} + \frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$$

$$\text{sed } y^2 + x^2 - by - ax = 0$$

$$\text{Ergo } \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} + by - x^2 = 0$$

$$x^2 - by = 0$$

$$x^2 = by$$

Substituatur hic valor in æquatione
y² + x² - by - ax = 0; prodibit

$$y^2 + by - by - ax = 0$$

$$y^2 = ax$$

Quare a : y = y : x & (ob x² = by)
y : x = x : b. Sunt adeo a, y, x, & b
quatuor continue proportionales.

Eodem modo Problema construi-
tur per Circulum & infinitas Hyper-
bolas scalenas.

Constructionem per Circulum &

Hyperbolam intra asymptotos adhuc

apponimus. Jungantur nempe RI = a

& AR = b ad angulos rectos, & per I

describatur Hyperbola intra asympto-

tos RA, AT. Fiat RD = $\frac{1}{2}b$ & in D

erigatur perpendicularis DC = $\frac{1}{2}a$,

tandemque ex centro C radio CA de-

scribatur Circulus secans Hyperbolam

in M: erit TM = y & AT = x.

Nam ex natura Hyperbolæ (ob AR.

RI = AT. TM) ab = xy & CK = x - $\frac{1}{2}a$,

KM = y - $\frac{1}{2}b$, adeoque ob CM² = CK²

+ KM², $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa$

+ yy - by + $\frac{1}{4}bb$, consequenter yy + xx

- ax - by = 0, seu xx - ax = by

- yy. Est ergo, vi æquationis prioris,

$$a : x = y : b$$

Quare x - a : a = b - y : y (§. 124)

Porro, vi æquationis posterioris

$$x - a : b - y = y : x$$

Ergo (§. 124) a : y = y : x

Est vero etiam a : y = x : b (§. cit.)

Ergo a : y = y : x = x : b (§. 167 Arith.)

Quod-

Tab. XIII. Fig. 122.

Quodsi AR & AS jungantur ad angulos rectos, & circa axem AR parametro a describatur Parabola AMH, circa AS vero parametro b Parabola altera AMI secans priorem in M; erit AP= x , PM= y : quem modum invenit MENECHMUS; ex conditione Problematis, absque calculo analytico facile eruendum: & nos ideo apponimus, quia inde enata est methodus construendi æquationes per duorum locorum combinationem. Est enim vi Parabolæ primæ $y^2 = ax$ & vi secundæ $x^2 = by$, adeoque $a : y = y : x$ & $y : x = x : b$.

COROLLARIUM.

625. Sit latus cubi = a , latus cubi dupli = y ; erit $2a^2 = y^2$, seu ponendo $2a = b$, $aab = y^2$. Quærendæ igitur sunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi est $ma^2 = y^2$, adeoque inter a & ma quærendæ sunt duæ mediæ.

SCHOLIUM.

626. Coincidit adeo Problema Deliacum de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra pestem quærentibus Oraculum proposuisse fertur, cum Problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus observavit HIPPOCRATES Chius): unde & ipsum Problema Deliacum appellari solet. Celebre hoc Problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quos inter PLATO, HERON Alexandrinus, APOLLONIUS Pergæus, ERATOSTHENES, PAPPUS Alexandrinus, SPORUS, MENECHMUS, ARCHITAS Tarentinus, PHILO Byzantius, PHILOPONUS, DIOCLES & NICOMEDES modis diversis ab EUTOCIO (a) conservatis solverunt.

(a) In Commentariis in lib. 2 ARCHIMEDIS de Sphæra & Cylindro.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

PROBLEMA CCLVI.

627. Rectam AB utcumque divisam in C ulterius dividere in D, ita ut sit CD : DB = AC² : CD².

Tab. XI. Fig. 106.

Sit AC = a , CB = b , CD = y , erit DB = $b - y$; consequenter, per conditionem Problematis,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^2 = a^2 b - a^2 y$ Problema solidum esse facile intelligatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$, & hinc
 $y : b - y = a^2 : ax$
 $= a : x$ (§. 124)

II. $xy = ab - ay$
 Porro ob $y : b - y = a : x$
 $y^2 : by - y^2 = a : x$ (§. 124)
 $ax : by - y^2 = a : x$
 $x : by - y^2 = 1 : x$ (§. cit.)

III. $x^2 = by - y^2$
 $ax = y^2$ add.

IV. $x^2 + ax = by$
 $ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax = by + y^2$
 Denique ob $ax = y^2$ (I)
 & $x^2 = by - y^2$ (III) subtr.

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$
 Habemus adeo æquationes locales

- I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.
- II. $xy + ay - ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.
- III. $y^2 + x^2 - by = 0$ ad Circulum.
- IV. $x^2 + ax - by = 0$ ad Parabolam.
- V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.
- VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ ad Ellipsin.

Fff

Nos

Nos duas dabimus constructiones, alteram per Parabolam & Circulum; alteram per Circulum & Ellipsin.

Quoniam æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$; non alia re opus est, quam ut parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 388).

Pro Circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \quad \frac{2n = b}{n = \frac{1}{2}b} \quad \frac{n^2 = m^2}{m = n = \frac{1}{2}b}$$

Tab. XI. Fig. 107.

In vertice adeo Parabolæ erigatur perpendicularis $AD = \frac{1}{2}b$ & ex centro D , radio $AD = \frac{1}{2}b$, describatur circulus; erit $PM = y$.

Demissa enim perpendiculari DR , erit $MR = PM - PR = PM - AD = y - \frac{1}{2}b$ & (§. 391) $AP = DR = y^2 : a$, consequenter ob $DA^2 = DM^2 = MR^2 + DR^2$ (§. 417 *Geom.*), $y^4 : aa + y^2 - by + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4 + y^2 - by = 0}{aa} \quad y : aa$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

Pro Ellipsi ad quam $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \quad \frac{2n = \frac{1}{2}b}{n = \frac{1}{4}b} \quad \frac{2tp}{2m} = \frac{1}{2}a \quad p = \frac{1}{2}a$$

hinc

$$q = f$$

$$\frac{n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}}$$

$$\frac{n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2}$$

$$\frac{\frac{1}{16}bb + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{2}m^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2\right)} = m$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{\left(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2\right)}$ & parameter $= \sqrt{\left(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2\right)}$ ob $2m : t = 2 : 1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = n = \frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD = p = \frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatæ x .

Quare Circulum cum ea combinaturus erige perpendicularem $DL = \frac{1}{2}b$ & ex L radio DL describatur Circulus: erit $QM = y$, $DQ = x$.

Est enim $PC = QH = DQ - DH = x - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{4}b$, adeoque $PC^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Est porro $AC^2 = \frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2$, consequenter ob $t : 2m = 1 : 2$ (§. 431)

$$1 : 2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$

$$1 : 2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}bb : \frac{1}{8}bb - x^2 + ax$$

$$\frac{2y^2 - by + \frac{1}{8}bb = \frac{1}{8}bb + ax - xx}{2y^2 - by = ax - xx}$$

$$2y^2 - by = ax - xx$$

Porro $KM = y - \frac{1}{2}b$, $LR = DQ = x$, $LM = \frac{1}{2}b$, consequenter ob $LM^2 = LR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{\frac{1}{4}bb = y^2 - by + \frac{1}{4}bb + xx}{y^2 - by = -xx}$$

$$y^2 - by = -xx$$

Quo valore ipsius $y^2 - by$ in aequatione superiore substituto, prodit

$$y^2 - xx = ax - xx$$

$$y^2 = ax$$

$$y^2 : a = x$$

$$y^4 : aa = x^2$$

Hinc ob $y^2 - by + x^2 = 0$

$$\frac{y^4 + y^2 - by = 0}{aa} \quad y : aa$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

Quod Ellipsis transeat per puncta D & L , ita ostenditur. Est $KL = DK = \frac{1}{4}b$, adeoque $KL^2 = \frac{1}{16}b^2$. $AC = \sqrt{\left(\frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2\right)}$

Tab. XI. Fig. 108.

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)}$ & $KC = DH = \frac{1}{2}a$, adeoque $AK = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} - \frac{1}{2}a$ & $KB = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} + \frac{1}{2}a$, consequenter $AK \cdot KB = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{8}b^2$. Sed $2KL^2 = \frac{2}{10}b^2 = \frac{1}{5}b^2$. Est itaque $2KL^2 = AK \cdot KB$, consequenter punctum L , adeoque & punctum D in Ellipsi (§.420).

PROBLEMA CCLVII.

628. Dato parallelepipedo cubum æqualem construere.

Sint latera parallelepipedi a, b & c ; latus cubi sit y ; erit (§. 536 Geom.)

$$abc = y^3$$

hoc est, $a:y = y^2:bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a:y = y:x$$

erit I. $ax = y^2$

& ob $a:y = ax:bc$

II. $xy = bc$

Porro $a:y = y:x$

$$a:y = ax:bc$$

adeoque $y:x = ax:bc$ (§.167 Arithm.)

$$ax^2 = bcy$$

III. $x^2 = bcy:a$

$$ax = y^2 \text{ subtr.}$$

IV. $x^2 - ax = bcy:a - y^2$

V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy:a$

$$\& 2ax = 2y^2$$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy:a$

& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy:a$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad Parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Ellipsin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Hyperbolam scalenam.

Pro loco ad Circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§.589),

$$\frac{2n = bc : a}{n = bc : 2a} \quad \frac{2p = a}{p = \frac{1}{2}a}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}aa)} = m$$

Cum in Parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a descripta, origo indeterminata x sit in vertice A , fiat $AD = \frac{1}{2}a$, $DH = n = bc : 2a$; erit H centrum Circuli radio HA describendi: qui si describatur, secabit Parabolam in M , eritque $MP = y$.

Est enim $AH^2 = AD^2 + DH^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2$, $PA = yy : a$ (§.391), & hinc $DP = HR = yy : a - \frac{1}{2}a$, $MR = y - bc : 2a$. Quare ob $AH^2 = HM^2 = HR^2 + MR^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = \frac{y^4}{aa} - yy$

$$+ \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$$

hoc est, $\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$

$$\frac{y^3 - abc = 0}{y : aa}$$

Fff 2

Jun:

Tab.
XI.
Fig.
105.

Jungantur $RI = b$ & $RA = c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipsi RI parallela & intra asymptotos RA & AS per I describatur Hyperbola; erit origo indeterminata x in A . Porro ut Circulus cum ea combinetur, fiat $AD = n = bc: 2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \frac{1}{2}a$; ex centro C radio AC describatur Circulus Hyperbolam in M interfecans, erit TM ipsi AR parallela $= y$.

Est enim ob $AR, RI = AT, TM$ (§. 502) $bc = xy$. Præterea $CM^2 = AC^2 = AL^2 + CL^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{2}aa + b^2c^2: 4aa$, $CK = LT = AI - AL = x - \frac{1}{2}a$ & $MK = TM - TK = IM - AD = y - bc: 2a$: unde ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$ elicitur $\frac{1}{4}aa + b^2c^2: 4aa = x^2$

$$-ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$$

hoc est, $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituatur pro bc valor ipsius xy ; prodibit

$$y^2 - \frac{xy^2}{a} = ax - x^2$$

$$\frac{ay^2 - xy^2 = aax - axx}{a - x}$$

$$y^2 = ax$$

$$y^4 = a^2x^2$$

$$y^4: a^2 = x^2$$

Quare ob $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

$$ax - \frac{bcy}{a} + \frac{y^4}{a^2} - ax = 0$$

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$$

$$y^3 - abc = 0$$

Pro Ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \quad \frac{2tp}{2m} = -a$$

hinc $q = f$ $2n = \frac{bc}{2a}$ $\frac{2p}{2} = a$

$$n = \frac{bc}{4a} \quad p = a$$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2$$

$$2n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{8aa} + aa\right)} = m$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(a^2 + b^2c^2: 8aa)}$, parameter $\sqrt{(a^2 + b^2c^2: 8aa)}$, quia est ad axem in ratione subdupla. Ex centro C excitetur perpendicularis $CH = \frac{bc}{4a}$ &

per H agatur DE ipsi AB parallela. Fiat $DH = a$: erit D origo indeterminata x . Ut Circulus cum eadem combinetur, fiat $DI = bc: 2a$ & $IL = \frac{1}{2}a$, & radio LD ex centro L describatur Circulus, qui Ellipsin secabit in M . Dico QM esse $= y$ & $DQ = x$.

Est enim $CP = HQ = DQ - DH = x - a$ & $PM = QM - PQ = QM - DK = y - bc: 4a$. Ex natura Ellipsis (§. 431)

$$2:1 = AC^2 - CP^2: PM^2$$

$$2:1 = \frac{b^2c^2}{8aa} + a^2 - x^2 + 2ax - aa: y^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b^2c^2}{16a^2}$$

Tab.
XI.
Fig.
109.

Tab. XI. Fig. 109.

$$\frac{b^2c^2}{8aa} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$\begin{aligned} 2ax - x^2 &= 2y^2 - \frac{bcy}{a} : a \\ \text{Porro MR} &= \text{QM} - \text{RQ} = \text{QM} - \text{DI} \\ &= y - bc : 2a, \text{LR} = \text{DQ} - \text{IL} = x - \frac{1}{2}a. \\ \text{Quare ob DL}^2 &= \text{LM}^2 = \text{LR}^2 + \text{RM}^2 \\ \frac{1}{2}aa + b^2c^2 : 4a^2 &= x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 \\ -bcy : a + b^2c^2 : 4a^2, &\text{ hoc est,} \\ x^2 - ax + y^2 - \frac{bcy}{a} : a &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{feu } y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$$

Substituto valore ipsius $ax - xx$ in æquatione superiori, prodit

$$ax + y^2 - \frac{bcy}{a} = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{ax = y^2}{x = y^2 : a}$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipsorum x & x^2 denuo in æquatione superiore substitutis prodit

$$y^2 - y^4 : a^2 = y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{y^4}{aa} = \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{y^4}{a^2} = y : aa$$

$$y^3 = abc$$

Non absimili modo fit constructio per Circulum & Hyperbolam.

PROBLEMA CCLVIII.

629. Datum angulum ACB trisecare.

Concipiamus angulum ACB esse trifariam sectum in ACE, ECD & DCB, ducanturque arcuum æqualium subtensæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales sunt (§. 289 Geom.). Sit AC = b, AB = a, AE = y, EG = x.

Jam anguli EAB mensura est arcus DB (§. 314 Geom.). Anguli vero

Tab. XI. Fig. 110.

ACE mensura cum fit arcus AE (§. 57 Geom.) ipsi DB æqualis per hypoth. anguli EAG & ACE æquales sunt (§. 142 Geom.). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 267 Geom.)

$$\text{AC:AE} = \text{AE:EG} \quad \text{AC:EC} = \text{AE:AG}$$

$$b : y = y : x \quad \text{fed AC} = \text{EC}$$

$$1. \quad yy = bx \quad \text{ergo AE} = \text{AG}$$

Ducatur EF ipsi DC parallela: erit EFH = GHC (§. 233 Geom.) = EDC (§. 312 & 233 Geom.). Porro EGF = HGC (§. 156 Geom.) = CED (§. 312 & 233 Geom.). Est igitur (§. 267 Geom.)

$$\text{EC:ED} = \text{EG:GF}$$

$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB = ED = AE, & DB = BH, EA = AG, per demonstr. ED = FH (§. 257 Geom.): erit AE + ED + DB = AG + BH + GH + FG, hoc est, 3AE = AB + FG, consequenter

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ seu $3by - xy = ab$ quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$

$$y : x = 3b - x : a \quad (\text{§. 167 Arith.})$$

$$\text{III. } ay = 3bx - xx$$

$$yy = bx \quad \text{add.}$$

$$\text{IV. } ay + yy = 4bx - xx$$

$$ay = 3bx - xx$$

$$yy = bx \quad \text{subtr.}$$

$$\text{V. } ay - yy = 2bx - xx$$

$$ay = 3bx - xx$$

$$2yy = 2bx \quad \text{add.}$$

$$\text{Fff } 3$$

VI.

$$\begin{aligned} \text{VI. } 2yy + ay &= 3bx - xx \\ ay &= 3bx - xx \\ 2yy &= 2bx \quad \text{subtr.} \end{aligned}$$

$$\text{VII. } ay - 2yy = bx - xx$$

Habemus adeo æquationes locales

- I. $yy - bx = 0$ ad Parabolam.
- II. $xy - 3by + ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.
- III. $xx - 3bx + ay = 0$ ad Parabolam.
- IV. $yy + xx + ay - 4bx = 0$ ad Circulum.
- V. $yy - xx - ay + 2bx = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.
- VI. $yy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}bx = 0$ ad Ellipsin.
- VII. $yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad Hyperbolam scalenam.

Pro Circulo, ad quem est $yy + xx + ay - 4bx = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\begin{aligned} \frac{-2n = a}{n = -\frac{1}{2}a} & \qquad \frac{-2b = -4b}{p = 2b} \\ n^2 + p^2 &= m^2 \\ \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + 4bb\right)} &= m \end{aligned}$$

Tab. IX. Fig. 93.

Quare Parabola, ad quam $yy - bx = 0$, parametro b descripta, fiat $AD = 2b$, $DH = \frac{1}{2}a$, & ex centro H radio DH describatur Circulus; erit $QN = y$, $AQ = x$.

Est enim his positis $bx = y^2$ (§. 388), consequenter $x = y^2 : b$, atque hinc $DQ = KH = 2b - y^2 : b$. Porro $KN = QN + QK = QN + DH = y + \frac{1}{2}a$. Quare ob $HN^2 = KH^2 + KN^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + y^4 : bb + yy + ay + \frac{1}{4}aa$, hoc est

$$\begin{aligned} \frac{y^4}{bb} - 3y^2 + ay &= 0 \\ \frac{y^4}{bb} - 3by + abb &= 0 \end{aligned}$$

Eadem vero æquatio prodit, si in superius inventa secunda æquatione $3y = a + xy : b$ substituitur valor ipsius $x = y^2 : b$

ex prima. Est nempe $3y = a + y^2 : bb$, hoc est, $y^3 - 3bby + abb = 0$.

Constructio per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos ita absolvitur. Jungantur $KL = 2b$ & $CL = \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $CK = \sqrt{4bb + \frac{1}{4}aa}$ radius Circuli ex centro C per K describendi. Producat CL in I , donec $LI = a$ & KL in T , donec $LT = b$, seu $KT = 3b$. Intra asymptotos KTS per I describatur Hyperbola. Dico QM esse radicem veram quæsitam seu subtensam trientis arcus, qui metitur angulum trifecandum, radio b descripti: seu $QM = y$ & $KQ = x$.

Est enim $QT = KI - KQ = 3b - x$, adeoque ob $IL.LT = QT.QM$ (§. 502), $3by - xy = ab$. Porro $PC = QL = KL - KQ = 2b - x$ & $PM = y + \frac{1}{2}a$, adeoque ob $KC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 Geom.), $\frac{1}{4}aa + 4bb = y^2 + ay + \frac{1}{4}aa + 4bb - 4bx + xx$, hoc est, $y^2 + ay = 4bx - x^2$. Æquatio prior ad Hyperbolam in hanc resolvitur analogiam;

$$\frac{3b - x : b = a : y}{\text{Ergo } 4b - x : b = a + y : y \text{ (§. 124)}}$$

$$\frac{4b - x : a + y = b : y}{\text{Æquatio posterior ad Circulum hanc suppeditat analogiam :}}$$

$4b - x : y + a = y : x$

Quare $b : y = y : x$ (§. 167 Arithm.)

Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$. Substitutis his valoribus in æquatione ad Circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$\begin{aligned} \frac{y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2}{ay = 3y^2 - y^4 : b^2} \end{aligned}$$

$$ab^2 = 3b^2y - y^4$$

seu $y^4 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante. Notan-

Tab. XI. Fig. 111.

Tab. XI. Fig. 110. 111. Notandum vero est, cum eadem æquatio prodeat si ponatur $qm = y$, esse qm trientis complementi ad circumulum subtensam AI.

Constructiones reliquas facile proprio Marte addent, qui superiora rite perceperunt.

PROBLEMA CCLIX.

630. Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $x^{1:m} = y$

erit $x = y^m$

hoc est, a pro unitate assumpta

$a^{m-1} x = y^m$

quæ est æquatio ad infinita Parabolarum genera (§. 519). Quare si parametro a Parabola primi generis sit descripta & abscissa sit ad parametrum ut numerus sub signo radicali. ex. gr. ut 3 ad 1, si $\sqrt{3}$ desideretur, vel ut 3 ad 2, si quærat $\sqrt{\frac{3}{2}}$; ejus semiordinata exprimet numerum quæsitum.

Est enim in casu primo, si $a = 1$, $x = 3$, $y^2 = 3$, adeoque $y = \sqrt{3}$. Et si fuerit $a = 1$, $a : x = 3 : 2$, erit $3x = 2a = 2$, consequenter $x = \frac{2}{3}$. Hinc $y^2 = \frac{2}{3}$, adeoque $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, describendam esse Parabolam secundi generis seu cubici ordinis, si radices cubicæ dentur; Parabolam vero tertii generis seu biquadratici ordinis, si radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed possunt etiam Parabolæ inferiores satisfacere radicibus superioribus. Sit enim ex. gr. quærenda linea y , quæ eandem habeat rationem ad lineam da-

tam a , quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem Problematis erit

$$\frac{1 : \sqrt[3]{5} = a : y}{a \sqrt[3]{5} = y}$$

$$\frac{5a^3 = y^3}{}$$

Construetur adeo Problema per Parabolam primi generis & circumulum, quærendo nempe inter a & $5a$ duas medias continue proportionales.

Fiat enim $a : y = y : x$

erit I. $y^2 = ax$

Æquatio proposita $5a^3 = y^3$ resolvitur in hanc analogiam :

$$\frac{a : y = y^2 : 5a^2}{= ax : 5a^2}$$

$$= x : 5a$$

unde $y : x = x : 5a$

$x^2 = 5ay$

$y^2 = ax$ vi num. I.

II. $y^2 + x^2 = 5ay + ax$

Æquatio prima est ad Parabolam & secunda ad Circulum. Unde æquatio $y^2 = 5a^3$ construitur ut supra.

PROBLEMA CCLX.

631. Invenire puncta quotcunque, quæ sint in curva data æquationis.

1. Ducta linea recta, quæ pro axe curvæ describendæ assumatur, pro arbitrio determinantur abscissæ quotcunque.
2. Erigantur perpendiculares indeterminatæ ad singulas abscissas.
3. Quoniam abscissæ determinata est, æquatio data pro determinata recte habetur. Construat itaque per methodum supra expositam : ita enim invenietur semiordinata abscissæ respondens.

E. gr.

Ex. gr. Sit construenda Parabola secundi generis seu cubici ordinis $avv = y^3$. Assumpta igitur pro abscissa v recta determinata, nova quaedam indeterminata introducat. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$

$$I. ax = y^2$$

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam :

$$a : y = y^2 : av$$

$$\text{hoc est } ax : av$$

$$\text{seu } x : v (\S. 124)$$

Quare $y : x = x : v$ (§. 167 Arithm.)

$$x^2 = vy$$

$$\text{addatur } y^2 = ax$$

$$\text{erit II. } y^2 + x^2 - vy - ax = 0$$

Ope igitur æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad infinitos Circulos (quia v infinitis modis determinari potest & debet) $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$ puncta quotcunque in Paraboloide cubicali inveniuntur. Est enim pro Circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$2n = v \quad 2p = a$$

$$n = \frac{1}{2}v \quad p = \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}vv + \frac{1}{4}aa\right)} = m$$

Tab. XI. Fig. 112. Quare Parabola parametro a descripta, fiat portio axis $AK = \frac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indefinita KG , ex ejus puncto quocunque C per verticem A describatur Circulus, erit QM semiordinata respondens abscissæ in Paraboloide cubicali, quæ est ipsius KC dupla. Ut igitur plures semiordinatæ determinantur, ut quotcunque aliis punctis rectæ KG per verticem Parabolæ ducendi sunt Circuli alii in punctis adhuc aliis Parabolam interfecantes.

Nam si $KC = \frac{1}{2}v$ & $QM = y$, erit $AQ = yy : a$, $KQ = CP = AQ - AK = yy : a - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{2}v$. Quamobrem ob $AC^2 = AK^2 + KC^2 = CM^2 = CP^2 + PM^2$ (§. 417 Geom.) $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}vv = y^2 : aa - y^2 + \frac{1}{4}aa + y^2 - vy + \frac{1}{4}vv$, hoc est,

$$y^4 : aa = vy$$

$$y^3 = avv$$

Est ergo $2KC$ abscissa & QM ipsi respondens semiordinata in Paraboloide cubicali.

Sit construendus Circulus secundi generis, ad quem est $y^3 = av^2 - v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam :

$$v : y = y^2 : av - v^2$$

Cum in constructione v determinetur, introducat nova indeterminata x ; ponendo

$$v : y = y : x$$

$$\text{erit I. } vx = yy$$

$$\text{Porro } v : y = vx : av - v^2$$

$$\text{hoc est } y : x = x : a - v \quad (\S. 124)$$

$$\text{Itaque } ay - yv = xx$$

$$\text{Addatur } vx = yy$$

$$\text{erit II. } yy + xx + vy - ay - vx = 0.$$

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas Parabolæ & posterioris ad infinitos Circulos determinantur quotcunque semiordinatæ ad abscissas quotcunque in Circulo secundi generis assumptas.

Parametro nimirum v describitur Parabola, in qua abscissa x , semiordinata y . Pro Circulo vero est, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0$$

$$\text{hinc } r = 0$$

$$q = f$$

$$-\frac{2rf}{q} = -v$$

$$-2p = -v$$

$$p = \frac{1}{2}v$$

$$-2n = v - a$$

$$n = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$$

$$m^2 = n^2 + p^2$$

$$= \frac{1}{4}aa - av + \frac{1}{4}v^2$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - av + \frac{1}{4}v^2\right)}$$

Fiat itaque $AD = \frac{1}{2}v$, $DH = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$ & Tab. X. radio $AH = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - av + \frac{1}{4}v^2\right)}$ describatur Fig. 93. Circulus ex centro H transiens per verticem Parabolæ A , erit $AP = x$ & $PM = y$.

Ipsa tamen constructio molestior est antecedente, quia continuo nova Parabola describenda, ob indeterminatam parametrum v .

Finis Analyseos finitorum.

ELE-

ELEMENTORUM
ANALYSEOS MATHEMATICÆ

PARS SECUNDA,

ELEMENTA ANALYSEOS
INFINITORUM TRADENS.

SECTIO PRIMA,

DE CALCULO DIFFERENTIALI.

CAPUT PRIMUM.

De natura Calculi differentialis.

DEFINITIO I.

1. **C**ALCULUS *differentialis* est Methodus quantitates differendiandi, hoc est, inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities sumta datam adæquat.

DEFINITIO II.

2. *Infinitefima*, seu *quantitas infinite parva*, est particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis existat, seu quæ omni assignabili minor.
Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

COROLLARIUM I.

3. Infinitefima itaque respectu ejus quantitatis, cui incomparabilis existit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni assignabili minor, hoc est, nullus.

COROLLARIUM II.

4. Hinc duæ quantitates infinitefima differentes æquales sunt. Cum enim infinitefima neglecta nullum producat errorem in quantitatibus (§. 3); una alteri substitui potest. Sunt igitur æquales (§. 15 *Arithm.*).

Ggg

SCHO-

SCHOLIUM.

5. Ut natura infinitesimalum rite intelligatur, ad sequentia animum advertisse juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, flatu venti pulvisculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulvisculi censetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, sive pulvisculum illud vertici adhaereat, sive abigatur; quantitas ejus diametri in presente negotio pro nihilo habenda, hoc est, infinite parva existit. Similiter in Astronomia diameter Telluris respectu Fixarum habetur pro puncto seu infinitesima: idem enim observaretur motus primus, si Tellus esset punctum individuum. Eodem etiam modo in Eclipsibus lunaribus computandis Terra pro sphaera perfecta, consequenter montium, multoque magis adium ac turrium altitudines pro infinitesimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra Telluris super disco Luna, si Terra sphaera perfecta esset. Idem vero in abstractis quantitibus locum habere, dudum agnovere Veteres & inter eos demonstratores rigidissimi, EUCLIDES (a) atque ARCHIMEDES (b). Ex. gr. si a linea data auferatur ipsius dimidium, ut habet EUCLIDES, seu, quod perinde est, pars alia quantacunque, & a residuo rursus ipsius dimidium aut pars alia similis primum ablata, atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem quolibet data minorem, hoc est, ad infinitesimam. Apparet adeo hinc, nomen infinitesimae esse respectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam, cujus respectu infinitesima dicitur. Ex. gr. diameter Telluris in Eclipsibus lunaribus est infinite magna respectu altitudinis montium; sed eadem tamen est infinite parva respectu distantiae Fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod distincta conti-

(a) Element. Lib. 10. prop. 1.

(b) In praefatione ad Quadraturam Parabola, & in scriptis ejus omnibus.

nui ac infiniti notione destituti nescio quae phantasmata sibi fingunt, infinitesimas & infinitesimalum infinitesimas pro entibus realibus habeas: a quo ipse Calculi infinitesimalis inventor, illustris LEIBNIUS, alienus. (c)

DEFINITIO III.

6. Infinitesimae dicuntur differentia- lia, item quantitates differentiales, si spectantur ut differentiae duarum quantitatum. Vir summus NEWTONUS (quem Angli sequuntur) infinitesimas Fluxiones vocat, quia eas considerat veluti momentanea quantitatum incrementa, ex. gr. lineae fluxu puncti, aut superficiei fluxu lineae, aut solidi fluxu superficiei genita.

COROLLARIUM.

7. Cum itaque solae quantitates variables continuo augeantur, vel minuuntur, constantibus vero nihil accedat, (S. 375 *Analys. finit.*); differentiale quantitatis constantis nullum est, sed variables tantum ali- quod admittunt.

HYPOTHESIS.

8. Quantitatum differentia- lia exprimentur per eandem litteram, quibus variables denotantur, praefixa tamen littera d. Ex. gr. differentiale ipsius x dicatur dx; differentiale ipsius y dicatur dy. Est autem dx quantitas positiva, si x continuo crescit; negativa, si decrescit.

SCHOLIUM.

9. Angli cum NEWTONO pro dx scribunt x; pro dy vero y; sed commodior est Leibniana

(c) Vide *Acta Eruditorum* A. 1712. p. 167.

nitiana differentialium designatio, qua omnes reliqui utuntur, quia si differentialia denuo differentiantur facile oritur punctorum confusio: ut taceam typhetas facilius puncta negligere, quam litteram d omittere.

COROLLARIUM I.

10. Quoniam quantitates constantes primis alphabeti litteris indigitamus (§. 376 *Analys. finit.*); erit $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$, (§. 7).

COROLLARIUM II.

11. Quare $d(x + y - a) = dx + dy$ & $d(x - y + a) = dx - dy$. Facilis adeo est differentiatio quantitarum per additionem aut subtractionem compositarum.

PROBLEMA I.

12. Differentiare quantitates se mutuo multiplicantes.

RESOLUTIO.

I. Si quantitates duæ se mutuo multiplicent, ut xy ; differentiale unius factoris ducatur in factorem alterum; summa duorum factorum, quæ hac ratione procedunt, $xdy + ydx$, erit differentiale quæsitum, hoc est, $d(xy) = xdy + ydx$.

DEMONSTRATIO.

Tab. I. xy repræsentat rectangulum ABDC, Fig. I. cujus latus unum $AC = x$, alterum $DC = y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in $CL = x + dx$ & CD in $CE = y + dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale adeo ipsius xy est differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§. 6). Quare $d(xy) = xy + ydx + xdy + dxdy$

$- xy = ydx + xdy + dxdy$, nempe ALBH Tab. I. + DBFE + BHGF. Quodsi, in rectan- Fig. I. gulo ALHB = ydx , AL = dx sumatur pro constante; erit HGFB = $dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, esse idem rectangulum BHGF differentiale ipsius DBFE. Quamobrem HCFG seu $dxdy$ respectu rectangulorum ALHB & DBFE, seu ydx & xdy , habetur pro nullo, consequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, seu differentiale ipsius xy est $ydx + xdy$. Q. e. d.

II. Si plures quantitates se mutuo multiplicent, ex. gr. si fuerit vxy ; fiat $vx = t$, erit $vxy = ty$, consequenter $d(vxy) = tdy + ydt$, per cas. I. Sed $dt = vdx + xdv$, per cas. I. Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy + ydt$ substitutis prodit $d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$. Patet adeo factum ex binis ducendum esse in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus sit, si plures quantitates se mutuo multiplicent. Sit enim ex. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy = t$, erit $vxyz = tz$, consequenter $d(tz) = zdt + tdz$, per cas. I. Sed $dt = d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$, per cas. 2. Ergo $d(vxyz) = zdt + tdz = zvx dy + zvy dx + zxy dv + vxy dz$.

IV. Quodsi crescente una variabili altera y decresceret; evidens est, fore $ydx - xdy$ differentiale ipsius xy .

COROLLARIUM I.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet, quomodo potentia differentientur.

COROLLARIUM II.

14. Cum 1, 2, 3, 4 &c. exponentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4 , &c. sint earundem logarithmi, posito logarithmo unitatis $= 0$ (§. 334 Arithm.); logarithmi vero dignitatum decrefcentium $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c. sint $-1, -2, -3, -4$ &c. (§. 351 Arithm.) erit $\frac{1}{x} = x^{-1}, \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, confequenter $d(1:x^m) = d(x^{-m}) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13). Vel cum fit $1 = x^0$ (§. 55 part. I.), erit $1 : x^m = x^0 : x^m = x^{-m}$ (§. 54 part. I.), adeoque $d(1 : x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13).

COROLLARIUM III.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 57 Analyf. finit.) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (§. cit. & præc.); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{n:m-1} dx = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = \frac{n}{m} dx \sqrt[m]{x^{n-m}}$ &c. $d(1 : \sqrt[m]{x^n}) = -\frac{n}{m} x^{-n:m-1} dx = -\frac{n}{m} x^{-(n-m):m} dx = -\frac{n}{m} dx : m \sqrt[m]{x^{n+m}}$

SCHOLION.

16. Quodfi cuipiam non satis manifeflum videatur, quomodo Corollaria duo posteriora ex priore inveniantur; is differentialia potentiarum imperfectarum alio adhuc modo investigare potefl: quem in fequente Problema-

te exponimus, imprimis cum ejuſdem methodi uſus eſſe poſſit, quoties in formulis compoſitis differentiandis aqua hæret.

PROBLEMA II.

17. Differentiare $1 : x^m$, item $\sqrt[m]{x^n}$ & $1 : \sqrt[m]{x^n}$.

RESOLUTIO.

I. Fiat $1 : x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§. 10, 12) $0 = mx^{m-1} v dx + x^m dv$

$-mx^{m-1} v dx = x^m dv$

$\frac{-mx^{m-1} v dx}{x^m} = dv$

$-\frac{mx^{m-1} dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 42, 54 part. I.)

h.e. $-mx^{-m-1} dx = dv$ (§. 54 part. I.)

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

$x^n = y^m$

$nx^{n-1} dx = my^{m-1} dy$ (§. 13)

hoc eſt, $nx^{n-1} dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 54 part. I.)

$\frac{nyx^{n-1}}{my^m} dx = dy$

$\frac{nyx^{n-1}}{my^m} dx = dy$

ſeu $\frac{nx^{n:m} x^{n-1}}{mx^{n:m}} dx = dy$

$\frac{nx^{n:m} x^{-1}}{m} dx = dy$ (§. 54, part. I.)

hoc eſt, $\frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = dy$

III. Fiat denique $1 : \sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z \sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} z dx + x^{n:m} dz$ (§. 12.)

- nx

$$\frac{nx^{(n-m):m}}{m} z dx = x^{n:m} dz$$

$$\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{n:m}} dx = x^{n:m} dz$$

$$\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{n:m}} dx = dz \text{ (§. 54 part. 1)}$$

$$\frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = dz \text{ (§. 54 part. 1)}$$

h. e. $\frac{ndx}{m\sqrt{x^{n+m}}} = dz \text{ (§. 14).}$

En in omnibus casibus easdem formulas, quas superius elicuimus (§. 14, 15.)

SCHOLION.

18. Me non monente clarum esse arbitror, formulas in Problemate repertas subire vicem regularum, juxta quas in casibus similibus instituitur differentiatio.

PROBLEMA III.

19. Differentiare quantitates se mutuo dividentes $x : y$.

RESOLUTIO.

I. Sit $\frac{x : y = v}$
erit $x = vy$

$$dx = vdy + ydv \text{ (§. 12)}$$

$$dx - vdy = ydv$$

hoc est $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$$

seu $(ydx - xdy) : y^2 = dv$

Regula 1. Differentiale divisoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in divisorem. 2. Factum prius ex posteriore auferatur. 3. Residuum per quadratum divisoris dividatur. Quotus est differentiale quantatum se mutuo dividendum.

II. Si fuerit $xy : vz$ differentianda :

ponatur $xy = t$ & $vz = w$; erit $xy : vz = t : w$. Sed $d(t : w) = (wdt - tdw) : w^2$, per cas. I. & $dt = xdy + ydx$, $dw = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d(t : w) = d(xy : vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv) : v^2z^2$. Patet adeo, regulam precedentem huic quoque casui satisfacere.

CAPUT II.

De usu Calculi differentialis in tangentibus curvarum determinandis.

PROBLEMA IV.

20. **I**nvenire subtangentem in curva algebraica quacunque.

RESOLUTIO.

Sit semiordinata pm alteri PM infi-

nite propinqua, erit Pp differentiale Tab. I. abscissæ, & demissa perpendiculari Fig. 2. $MR = Pp$ (§. 226 Geom.), Rm differentiale semiordinatæ. Ducatur tangens TM : arcus infinite exiguus

Ggg 3

Mm

Tab. I. Mm non differet a linea recta, adeoque

Fig. 2. MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *Triangulum curvæ characteristicum* appellari solet, quia lineæ curvæ per illud a se invicem distinguuntur. Ob parallelismum rectarum PM & pm (§. 370 part. 1.), angulus $MmR = TMP$ (§. 233 *Geom.*). Quare $\triangle MmR \sim \triangle TMP$ (§. 267 *Geom.*). Sit itaque $AP = x$, $PM = y$: erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$ (§. 8), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$Rm : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodsi, ex æquatione curvæ cujuscunque data, in expressione subtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipsius dx substituat: quantitates differentiales evanescent, proditque valor subtangentis in quantitibus communibus.

Tab. I. Idem valor eruitur, si convexitas

Fig. 4. curvæ refertur ad axem AT .

COROLLARIUM I.

21. Pro Parabola Apolloniana est:

$$ax = y^2 \quad (\text{§. 388 part. I})$$

Hinc $adx = 2ydy$ (§. 12)

$$dx = 2ydy : a$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : a dy = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$: prorsus ut supra (§. 410 part. I.)

COROLLARIUM II.

22. Pro infinitis Parabolis (§. 519 part. I.)

$$a^{m-1} x = y^m$$

$$a^{m-1} dx = m y^{m-1} dy \quad (\text{§. 12})$$

$$dx = m y^{m-1} dy : a^{m-1}$$

$PT = ydx : dy = m y^m dy : a^{m-1} dy = m y^m : a^{m-1} = m a^{m-1} x : a^{m-1} = mx$.

Ex. gr. Cum in Paraboloide cubicali $m = 3$; erit subtangens $= 3x$: cum in furdolidali $m = 5$; erit subtangens $= 5x$.

COROLLARIUM III.

23. Pro Circulo est (§. 377 part. 1.)

$$ax - xx = yy$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 dy : (a - 2x) dy = 2y^2 : (a - 2x) = (2ax - 2xx) : (a - 2x) = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$, hoc est, PC :

$PB = AP : PT$, consequenter $PC : PT = AP : PB$ (§. 378 *Geom.*) = PM^2 (§. 377 part. 1.)

Ergo $AT = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x) = x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ hoc est, $PC : PA = CA : AT$.

COROLLARIUM IV.

24. Pro infinitis Circulis est (§. 524 part. 1.)

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

$$\frac{max^{m-1} dx - (m+1)x^m dx}{(m+1)y^m dy} = \frac{dx}{max^{m-1} - (m+1)x^m}$$

$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$, & $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$.

Cum itaque in Circulo secundi generis $m=2$; erit $AT = ax : (2a - 3x)$, & $PT = (2ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM V.

25. Pro Ellipfi Apolloniana est (§. 420 part. 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Hinc

Tab. I.
Fig. 3.

Hinc $2aydy = abdx - 2bx dx$
 $2aydy : (ab - 2bx) = dx$
 PT = $ydx : dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) =$
 $2abx - 2bx^2 : (ab - 2bx) = (2ax -$
 $2x^2) : (a - 2x)$, prorsus ut supra
 (§. 440 part. I.).

COROLLARIUM VI.

26. Pro infinitis Ellipsis est (§. 522 part. I.)

$$ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$$

$$(m+n)ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1} dx$$

$$dx = \frac{(m+n)ay^{m+n-1} dy}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)ay^{m+n}}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}}$$

$$= \frac{(m+n)bx^m(a-x)^n : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1})}{[divisione per bx^{m-1}(a-x)^{n-1} facta]} (m+n)(ax-x^2) :$$

$$(ma - mx - nx), \text{ \& hinc}$$

$$AT = (max - mxx + nax - nxx) :$$

$$(ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - (m+n)x).$$

Cum adeo in Elliptoide cubicali fit $m=2$, $n=1$; erit $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$ & $AT = ax : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM VII.

27. Pro Hyperbola Apolloniana est (§. 459 part. I.)

$$ay^2 = abx + bxx$$

$$2aydy = abdx + 2bx dx$$

$$2aydy : (ab + 2bx) = dx$$

$$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab + 2bx) = (2abx + 2bxx) : (ab + 2bx) = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$$
 prorsus ut supra (§. 491 part. I.).

COROLLARIUM VIII.

28. Pro infinitis Hyperbolis, cum sit $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$ (§. 525 part. I.): reperietur, ut ante pro infinitis Ellipsis, $PT = (m+n)(ax+x^2) : (ma + (m+n)x)$ & $AT = nax : (ma + (m+n)x)$.

COROLLARIUM IX.

29. Pro Hyperbola intra asymptotos est (§. 502 part. I.)

$$xy = aa$$

$$xdy + ydx = 0$$

$$ydx = -xdy$$

$$PT = ydx : dy = -xdy : dy = -x$$

Quoniam valor subtangentis est negativus, id indicio est, subtangentem PT esse sumendam in oppositum originis abscissæ AP. Differentiale enim ipsius xy esse debebat $ydx - xdy$, quia y decrefcit (§. 12).

COROLLARIUM X.

30. Pro infinitis Hyperbolis intra asymptotos, est

$$a^{m+n} = x^n y^m$$

$$0 = nx^{n-1} y^m dx + mx^n y^{m-1} dy$$

$$-mx^n y^{m-1} dy = nx^{n-1} y^m dx$$

$$-mxdy : ny = dx$$

$$PT = ydx : dy = -mxydy : nydy = -\frac{mx}{n}$$

COROLLARIUM XI.

31. Pro Cissoide Dioclis est (§. 548 part. I.)

$$y^2 = x^3 : (a - x^3)$$

$$2ydy = (3ax^2 dx - 3x^3 dx + x^3 dx) : (a - x^3)^2$$

$$2y(a - x)^2 dy : (3ax^2 - 2x^3) = dx$$

$$PT = ydx : dy = 2y^2(a - x)^2 : (3ax^2 - 2x^3) = 2x^3(a - x) : (3ax^2 - 2x^3) = 2(ax - xx) : (3a - 2x).$$

Habemus itaque :

$$3a - 2x : a - x = 2x : PT$$

$$\text{five } \frac{3}{2}a - x : a - x = x : PT$$

$$\text{h. e. } PB + GB : PB = AP : PT.$$

Tab. VI. Algeb. Fig. 63.

COROL-

COROLLARIUM XII.

Tab. I. 32. Denique pro omnibus curvis algebraicis est (§. 385 part. 1.)

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$$

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = \frac{-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{-may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta,

$$ay^m = y^2 \quad bx^n = -ax$$

$$a = 1 \quad m = 2 \quad b = -a \quad n = 1$$

$$cy^r x^s = 0 \quad f = 0$$

$$c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$$

His valoribus in formula subtangentis generalissima substitutis, prodit subtangens Parabolæ primi generis $(-2.1.y^2 - 0.0y^0 x^0) : (1. - ax^{1-1} + 0.0y^0 x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut supra (§. 21).

Similiter fit pro circulo $y^2 - ax + x^2 = 0$; erit

$$ay^m = y^2 \quad bx^n = -ax$$

$$a = 1 \quad m = 2 \quad b = -a \quad n = 1$$

$$bx^n = x^2 \quad cy^r x^s = 0$$

$$b = 1 \quad n = 2 \quad c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$$

$$PT = \frac{-2.1.y^2}{1. - ax^0 + 2.1x} = \frac{-2y^2}{-a + 2x} = \frac{2y^2}{a - 2x}$$

ut supra (§. 23).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$$ay^m = y^3 \quad bx^n = -x^3$$

$$a = 1 \quad m = 3 \quad b = -1 \quad n = 3$$

$$cy^r x^s = -axy \quad f = 0$$

$$c = -a \quad r = 1 \quad s = 1$$

His valoribus in formula subtangentis Tab. I. generali substitutis, prodit subtangens cur- Fig. 2.

$væ$, ad quam est æquatio data $PT = (-3.1y^3 - 1. - ax^3) : (3. - 1x^2 + 1. - ax^0) = (-3y^3 + ax^3) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - ax^3) : (3x^2 + ay)$; consequenter $AT = (3y^3 - ax^3) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - ax^3 - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, [substituto nempe ex æquatione ad curvam ipsius $y^3 - x^3$ valore axy] hoc est, $axy : (3x^2 + ay)$.

SCHOLIUM.

33. In applicatione formula generalis, bx^n & $cy^r x^s$ totidem terminis sigillatim comparantur, quot in dato casu speciali eisdem respondent, singulique valores simul in formula subtangentis substituuntur, propterea quod bx^n repræsentat omnes terminos, in quibus sola indeterminata x occurrit, & $cy^r x^s$ omnes terminos, in quibus utraque indeterminata x & y locum habet (§. 385 part. 1.)

COROLLARIUM XIII.

34. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§. 417 Geom.) $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

PROBLEMA V.

35. Determinare subnormalem PH in linea algebraica quacunque.

RESOLUTIO.

Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20), & $TP : PM = PM : PH$ (§. 409 part. 1.)

hoc est, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$

Quodli, ut in Problemate præcedente, in expressione subnormalis PH generali valor ipsius dy substituatur, differentiales quantitates evanescent, & valor subnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

Co-

COROLLARIUM I.

Tab. I. 36. In Parabola Apolloniana $dy = adx : 2y$,
 Fig. 2. (§. 21). Ergo $PH = ydy : dx = aydx : 2ydx$
 $= \frac{1}{2}a$, ut supra reperimus (§. 410 part. I.)

COROLLARIUM II.

37. In infinitis Parabolis $dy = a^{m-1} dx :$
 my^{m-1} (§. 22). Itaque $PH = ydy : dx =$
 $a^{m-1}y : my^{m-1} = a^{m-1}y^2 : my^m$ (§. 54
 part. I.) $= a^{m-1}y^2 : ma^{m-1}x$ (§. 519
 part. I.) $= y^2 : mx$, ut adeo fit $mx : y = y : PH$.

COROLLARIUM III.

Tab. I. 38. In Circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23),
 Fig. 3. hoc est, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx = PC$. Apparet adeo,
 in Circulo omnes ad peripheriam normales
 in centro concurrere; consequenter tangen-
 tem TM radio CM ad angulos rectos infitere.

COROLLARIUM IV.

39. In infinitis Circulis ($max^{m-1} dx$
 $-(m+1)x^m dx : (m+1)y^m = dy$.
 Unde subnormalis $PH [ydy : dx] = (max^{m-1}y$
 $-(m+1)x^m y) : (m+1)y^m = (max^{m-1}y^2$
 $-(m+1)x^m y^2) : (m+1)y^{m+1} = (max^{m-1}y^2$
 $-(m+1)x^m y^2) : (m+1)(ax^m - x^{m+1})$
 $= (may^2 - (m+1)xy^2) : (m+1)(ax - x^2)$.
 Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+1} a - x : PH$.

COROLLARIUM V.

Tab. I. 40. In infinitis Ellipsis $dy = (mbx^{m-1}$
 Fig. 2. $(a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx) : (m+n)$
 ay^{m+n-1} (§. 26). Unde $PH = ydy : dx$
 $= (mbx^{m-1}(a-x)^n y - nbx^m (a-x)^{n-1} y) :$
 $(m+n) ay^{m+n-1} = (mbx^{m-1}(a-x)^n y^2$
 $- nbx^m (a-x)^{n-1} y^2) : (m+n) ay^{m+n}$ five
 $: (m+n) bx^m (a-x)^n = (my^2 (a-x) - nxy^2)$
 $: (m+n) (ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 :$
 $y^2 = \frac{m}{m+n} a - x : PH$.

COROLLARIUM VI.

41. Eodem modo (§. 28) pro infinitis Hy-
 perbolis reperitur $PH = (my^2(a+x) + nxy^2) :$
 $(m+n)(ax + x^2)$. Est itaque $ax + xx : yy =$
 $\frac{m}{m+n} a + x : PH$.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

COROLLARIUM VII.

42. Pro Hyperbola intra asymptotos (§. 29) Tab. I.
 $dy = -ydx : x$. Unde $PH = ydy : dx = -y^2 : x$ Fig. 4.
 Valor negativus indicio est, subnormalem
 PH cadere versus sinistram. Quia $xy = a^2$,
 adeoque $y = a^2 : x$, & $y^2 = a^4 : x^2$, erit PH
 $= a^2 y : x^2$, vel $a^4 : x^3$, consequenter $x^2 : a^2$
 $= y : PH$ & $x^3 : a^3 = a : PH$, hoc est, semi-
 ordinata habet ad subnormalem rationem
 duplicatam, & ad latus potentiae Hyperbolae
 rationem triplicatam abscissae ad latus po-
 tentiae Hyperbolae.

COROLLARIUM VIII.

43. In Cissoide Dioclis, $2ydy = (3ax^2 dx$
 $- 2x^3 dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur subnor-
 malis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$. Est
 adeo $(a-x)^2 : x^2 = \frac{3}{2}a - x : PH$.

COROLLARIUM IX.

44. Quia $PH = ydy : dx$ (§. 35), & PM Tab. I.
 $= y$; erit $MH = \sqrt{(y^2 dy^2 : dx^2 + y^2)} = y \sqrt{(dy^2$
 $+ dx^2)} : dx$.

SCHOLION.

45. Equidem data per Problema praecedens
 subtangente, subnormalis reperitur facillime abs-
 que calculo differentiali (§. 409) : quoniam
 tamen subinde subnormalis inveniri debet, data
 tantummodo aequatione ad curvam; ideo in Pro-
 blemate praesente docendum erat, quomodo in-
 dependenter a subtangente ex aequatione eruenda.

PROBLEMA VI.

46. Determinare curvarum algebrai-
 carum asymptotos.

RESOLUTIO.

1. Quoniam asymptotus CD cum Tab. I.
 curva non concurret, nisi interval. Fig. 2.
 lo infinito emenso; haberi potest
 pro tangente in puncto, cui ab-
 scissa infinita respondet. Quanti-
 tates ergo constantes respectu va-
 riabilium x & y sunt infinite parvae
 (§. 2). Quamobrem si ex valore
 H h h ipsius

Tab. I.
Fig. 2.

ipſius AT abjiciantur, quæ in nul-
lam variabilem ducuntur; prodibit
valor ipſius AC, per quem pun-
ctum C determinatur, ex quo aſym-
ptotus CD ducitur.

2. Quodſi idem fiat in æquatione
pro curva, & facta differentia-
tione inveniatur ratio $dx : dy$;
haud difficulter quoque eruitur va-
lor ipſius AE: eſt enim in illo ca-
ſu $\triangle MR^m \sim \triangle CAE$. Quod ut
clarius intelligatur, ponamus ab-
ſciſſam AP eſſe infinitam, adeo-
que TM aſymptotum; evidens
eſt $\triangle MR^m \sim \triangle TPM$ (§. 20).
Sed $\triangle TPM \sim \triangle TAG$ (§. 268
Geom.). Ergo $\triangle TAG \sim \triangle MR^m$,
conſequenter $MR : R^m = TA : AG$
(§. 267 *Geom.*). Surrogetur jam
in locum $\triangle TAG$ alterum CAE ;
erit $MR : R^m = CA : AE$, hoc eſt,
 $dx : dy = CA : AE$.

COROLLARIUM I.

47. In Hyperbola Apolloniana, $AT = ax$
 $:(a + x)$ (§. 491 part. 1). Ergo in caſu aſym-
ptotico degenerat in $ax : 2x = \frac{1}{2}a = AC$,
prorſus ut ſupra habetur (§. 474 part. 1).
Porro ad Hyperbolam Apollonianam

$$ay^2 = bx(a + x)$$

hoc eſt, in noſtro caſu, ob a infiniteſimam,

$$ay^2 = bxx$$

conſequenter $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

adeoque ob $dx : dy = CA : AE$ (§. 46)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{1}{2}a : AE$$

Unde habetur $AE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$,
denuo ut ſupra (§. 474 part. 1).

Idem etiam adhuc aliter invenitur. In Tab. I.
caſu infiniti, ſeu aſymptotico, $TP = CP = \frac{1}{2}a$ Fig. 2.
 $+x = x$, ob $\frac{1}{2}a = 0$, quia $x = \infty$. Porro,
ob ſimilitudinem $\triangle TPM \sim \triangle CAE$, eſt

$$TP : PM = CA : AE$$

$$x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}a : AE$$

$$1 : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}a : AE$$

$$AE = \frac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

COROLLARIUM II.

48. Pro infinitis Hyperbolis, eſt $AT = na$
 $:(ma + mx + nx)$ (§. 28) adeoque in caſu
aſymptotico, in quo $x = \infty$, $AC = na$:
 $(mx + nx) = na : (m + n)$ (§. 46). Quo-
niam porro (§. 525 part. I.).

$$ay^{m+n} = bx^m(a + x)^n$$

$$\text{erit } ay^{m+n} = bx^{m+n} \text{ (§. 46),}$$

hoc eſt, ſi fiat brevitatis gratia $m + n = r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$a^{1:r}y = b^{1:r}x$$

$$a^{1:r}dy = b^{1:r}dx$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = CA : AE$$

Unde ob $CA = na : r$, reperitur AE

$$\frac{na\sqrt{b}}{r\sqrt{a}} = \frac{n}{r}\sqrt{a^{r-1}b}.$$

PROBLEMA VII.

49. Determinare ſubtangente[m] & ſub-
normalem in Conchoide.

Quoniam Conchois eſt curva alge-
braica (§. 377, 538 part. 1); ſubtan-
gens ejus inveniri poteſt per *Probl. 4*,
& ſubnormalis per *Probl. 5* (§. 20 & 35).
Enim vero quia, ob æquationem ejus
admodum prolixam, expreſſio utraque
non ſatis concinna prodit; ideo conſul-
tius judicamus alia methodo utramque
inveſtigari, qua & in caſibus aliis ſimili-
bus commode utendum.

Sit

Tab. I. Sit nempe $AP = x$, $PM = y$. Intel-
Fig. 5. ligatur pm ipsi PM infinite propinqua:
erit $Pp = MR = dx$, & $Rm = dy$, unde
 $PT = ydx : dy$, ut supra (§. 20). Sit
porro $AB = QM$ (§. 535 part. I.) $= a$,
 $CM = z$, $BC = b$; erit $PB = a - x$,
 $PC = a + b - x$. Ut valor ipsius dx
ex natura curvæ inveniatur; fiat:

$$\frac{a - x = v}{erit - dx = dv} \quad \frac{a + b - z = t}{- dx = dt}$$

Porro (§. 268 Geom.)

$$PB : MQ = PC : MC$$

$$v : a = t : z$$

$$\frac{at = zv}{adt = zdv + vdz}$$

Denique (§. 417 Geom.) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, hoc est,

$$z^2 = t^2 + y^2$$

$$\frac{2zdz = 2tdt + 2ydy}{zdz = tdt + ydy}$$

Substituantur ex æquationibus dua-
bus prioribus valores ipsorum diffe-
rentialium dt & dv in duabus poste-
rioribus: prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \quad zdz = -tdx + ydy$$

$$\frac{zdx - adx = vdz}{zdx - adx = dz} \quad dz = \frac{-tdx + ydy}{x}$$

Quamobrem

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{ydy - tdx}{z}$$

$$z^2 dx - az dx = v y dy - v t dx$$

$$z^2 dx - az dx + v t dx = v y dy$$

$$dx = \frac{v y dy}{z^2 - az + vt}$$

Hinc $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$ Tab. I.
 $+ vt) = v(z^2 - t^2) : (z^2 - az + vt)$, ob Fig. 5.
 $y^2 = z^2 - t^2$, & subnormalis $ydy : dx$
habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Aliter.

Sit TC fecans regulam in I per- Tab.
pendicularis ad MC & mc ipsi CM IV.
infinite propinqua. TM tangat Con- Fig. 43.
choidem in M . Radio CQ describa-
tur arcus Qt & radio CM arcus Mr .
Sit $QM = a$, $CQ = x$, $CM = y$; erit
 $tS = dx$, $mr = dy$. Quoniam in $\triangle QIS$
angulus t rectus est (§. 38), & QCI
itidem rectus (§. 78 Geom.), & ob an-
gulum infinite parvum $QCS = 0$ (§. 3),
angulus $IQC = QSt$ (§. 239 Geom.),
erit $\triangle QIS \sim \triangle QIC$, (§. 267 Geom.),
adeoque

$$CQ : CI = tS : Qt$$

$$x : b = dx : \frac{bdx}{x}$$

Quoniam Qt & Mr sunt arcus con-
centrici intra crura ejusdem anguli de-
scripti, erit (§. 138, 412 Geom.)

$$CQ : Qt = CM : Mr$$

$$x : \frac{bdx}{x} = y : \frac{bydx}{x^2}$$

Denique cum eodem, quo supra,
modo ostendatur, esse $\triangle Mrm \sim \triangle$
 MCT , erit

$$mr : Mr = MC : CT$$

$$dy : \frac{bydx}{x^2} = y : \frac{by^2 dx}{x^2 dy}$$

Ex natura Conchoidis (§. 535 part. I.)

$$y = x + a$$

adeoque $dy = dx$

$$\text{Ergo } CT = \frac{by^2 dx}{x^2 dy} = \frac{by^2}{x^2}$$

Hhh 2

Duca-

Tab. IV. Ducatur itaque GM parallela regu-
lae IQ; erit (§. 268 Geom.).
Fig. 43.

$$CQ : CM = CI : CG$$

$$x : y = b : \frac{by}{x}$$

Quare si porro TM ducatur paral-
lela ipsi GQ; erit (§. cit.)

$$CQ : CG = CM : CT$$

$$x : \frac{by}{x} = y : \frac{by^2}{x^2}$$

adeoque CT subtangens, consequen-
ter TM tangens quaesita.

PROBLEMA VIII.

Tab. I. 50. Determinare subtangentem in Spi-
rali Archimedea, & infinitis Spirali-
bus aliis.

Sit semidiameter circuli $AB = a$,
peripheria $= b$, arcus $BD = x$, $AG = y$.
Intelligatur radius AC alteri AD infi-
nite propinquus, & ducatur radio AG
arculus EG; erit $CD = dx$, & $EF = dy$
& (§. 138, 412 Geom.)

$$AD : AG = DC : GE$$

$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicula-
ris (§. 38); ducatur HA ad AG nor-
malis; quae est subtangens Spiralis: erit
EG parallela ipsi AH (§. 256 Geom.),
adeoque cum sit $FA = AE$, sive AG , ob
infinite parvam EF (§. 268 Geom.),

$$FE : EG = FA : AH$$

$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2 dx}{ady}$$

Jam pro Spirali Archimedea (§. 571
part. I)

$$\frac{ax = by}{adx = bdy}$$

Hinc subtangens $AH = \frac{y^2 dx}{ady} = by^2$: Tab. I.
Fig. 6.

$$a^2 = zy : a.$$

Pendet adeo determinatio subtan-
gentis a quadratura Circuli, cum pro
arcu x assumenda sit recta.

Pro infinitis Spiralibus est (§. 572
part. I.)

$$a^m x^n = b^n y^m$$

$$\frac{na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy}{dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}}$$

$$AH = y^2 dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$$

COROLLARIUM.

51. Quodsi ponamus arcum BC esse ad
FC ut est abscissa curvae algebraicae ad fe-
miordinatam; erit $BC = x$, $CD = dx$, FC
 $= y$, & (ducto radio AF arculo FI) $GI = FE$
 $= dy$, atque (§. 138, 412. Geom.) ob AG
 $= AF$ (§. 4)

$$AC : CD = AG : EG$$

$$a : dx = a - y : \frac{adx - ydx}{a}$$

$$dy : \frac{adx - ydx}{a} = a - y : \frac{(a-y)^2 dx}{ady}$$

Quodsi ergo ex aequatione curvae alge-
braicae, quae exprimit relationem BC ad
FC, substituatur in expressione subtangen-
tis AH valor ipsius dx , prodibit subtangens
quaesita. Sit. ex. gr. relatio arcus BC ad
rectam FC contenta aequatione

$$bx = y^2$$

$$\text{erit } bdx = 2ydy$$

$$\text{unde } AH = (a-y)^2 dx : ady = 2y(a-y)^2 : ab.$$

PROBLEMA IX.

52: Determinare subtangentem PT Tab. I.
in Cycloide. Fig. 7.

Sit

Tab.I. Sit APB circulus genitor Cycloidis Fig.7. AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ Cycloidem in M tangat; erit TP subtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M transeunti intelligatur ipsa *qm* parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipsi PT parallela. Erit MS=PO (§.226 Geom.) & MR=Pp, quia arcus Pp infinite exiguus, habetur pro parte rectæ pT, (§.257 Geom.). Sit jam AP=x, PM=y; erit Pp=MR=dx, mR=dy. Ob parallelas MP & mR, per construct. angulus MmR = TMP, & ob parallelas MR & TP, itidem per constr. mRM=mpT=MPT (§.233 Geom.); consequenter (§.267 Geom.)

$$mR : RM = MP : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Est vero in Cycloide $y = x$ (§.575 part.1); consequenter $dy = dx$, & hinc $ydx : dy$ seu $PT = y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ Cycloidem in puncto respondente M tangit.

COROLLARIUM.

53. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus arcus AP sint abscissæ transcendentis AMC, eodem modo determinatur subtangens; cum in omni casu reperiatur $PT = ydx : dy$. Ponamus ex. gr.

$$\begin{aligned} bx &= ay \\ \text{erit } bdx &= ady \\ dx &= ady : b \end{aligned}$$

$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

PROBLEMA X.

54. Determinare subtangentem PT in Logistica.

Sit AP=x, PM=y, *pm* ipsi PM parallela; erit MR=Pp=dx & Rm=dy, & vi eorum, quæ in Problemate 4 (§.20) demonstrata sunt,

$$mR : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sit abscissa alia ipsa AP major vel minor=v, & semiordinata eidem respondens=z; erit subtangens=zdv:dz. Quoniam, ex natura Logistica, abscissæ in progressionem arithmetica progrediuntur (§.552 part.1.) erit $dx = dv$. Quoniam vero semiordinate progrediuntur in geometrica (§.cit.); erit

$$y : y + dy = z : z + dz$$

$$\frac{y : dy = z : dz}{dx = dv} \quad (\text{§.193 Arithm.})$$

$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logistica omnes subtangentes sunt inter se æquales, seu subtangens PT est constans.

PROBLEMA XI.

55. Determinare subtangentem MH in Quadratrice DINOSTRATIS. Tab.I. Fig.9.

Per punctum datum M ducatur radius CN, sitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, Cn ipsi CN, & *pm* ipsi PM infinite propinqua; AP=y, AN=x, CM=p, ANB=a, AC=b; erit MI=b-y, Pp=MR=dy, Nn=dx. Quoniam arcus infinite parvus, radio CM descriptus, coincidit cum recta MH, erit (§.138, 412 Geom.)

$$CN : Nn = CM : MH$$

$$b : dx = p : \frac{pdx}{b}$$

Hhh 3

Porro

Tab.I. Porro cum TK (per hypoth.) & CH Fig.9. (§.38) sint ad MK perpendiculares; erit mH ipsi KT parallela (§. 256 Geom.), adeoque (§. 268 Geom.)

$$Mm : MT = MH : MK.$$

Similiter mR & TI, quia ad MI perpendiculares (per hypoth.), inter se parallela (§. 256 Geom.), adeoque (§. 268 Geom.)

$$Mm : MT = MR : MI$$

consequenter (§. 167 Arithm.)

$$MR : MI = MH : MK$$

$$dy : b - y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} = \frac{pydx}{bdy}$$

Est vero, ex natura Quadratricis (§. 565 part. 1.)

$$bx = ay$$

$$bx : a = y$$

Item, $dx = ady : b$

Substitutis ergo, in valore ipsius MK, pro dx & y valoribus modo inventis,

$$\text{prodit MK} = \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{abb} = (ap - px) : b = (a - x)p : b = NB. MC : AC.$$

Est vero NB arcus radio NC descriptus; adeoque constructio a rectificatione arcus illius, seu a quadratura circuli pendet.

PROBLEMA XII.

Tab.I. 56. Intra angulum QTH describere Fig.2. curvam desideratam algebraicam, qua rectam TQ in dato puncto M tangat.

RESOLUTIO.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM, erit TP subtangens, PM femiordinata curvæ quæsitæ. Sit TP = v, PM = y, erit (§. 20)

$$TP : PM = MR : mR$$

$$v : y = dx : dy$$

$$vdy = ydx$$

Quare si ex æquatione curvæ de- Tab.I. terminatur valor ipsius dx vel dy , & in Fig.2. æquatione modo inventa substituitur; per communes Algebrae regulas determinantur tum abscissa x semioordinata PM datæ respondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodsi vero contingat, aliquas ex his determinari non posse, id quidem indicio est, eam variis modis assumi posse, adeoque plures curvas ejusdem speciei satisfacere proposito.

COROLLARIUM I.

57. Si curva AMO Parabola primi generis esse debet; erit (§. 388 part. 1.)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a.$$

Quodsi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituitur; habebimus

$$vdy = 2y^2 dy : a$$

$$av = 2y^2 \text{ seu } a = 2y^2 : v.$$

Porro ex æquatione ad Parabolam $a = y^2 : x$ Quare

$$2y^2 : v = y^2 : x \quad y^2$$

$$2 : v = 1 : x$$

$$2x = v$$

$$x = \frac{1}{2}v$$

Divisa nempe TP bifariam in A, habetur vertex Parabolæ A, ut jam ex superioribus (§. 21) constat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH Parabola describenda (§. 401 part. 1.)

COROLLARIUM II.

58. Si curva AMO Hyperbola æquilaterra: erit (§. 507 part. 1.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a + 2x)$$

Quod-

Tab. I.
Fig. 2.

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur valor modo inventus, prodibit

$$vdy = 2y^2 dy : (a + 2x)$$

$$\frac{av + 2vx = 2y^2}{}$$

$$av = 2y^2 - 2vx$$

$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc est, si fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro, ex æquatione ad Hyperbolam æquilateram

$$ax + xx = y^2$$

$$a = yy : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$

$$\frac{yy - xx = 2mx - 2xx}{}$$

$$yy = 2mx - xx$$

seu $\frac{xx - 2mx = -yy}{m^2 \quad m^2}$

$$\frac{x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - yy}{}$$

$$\left. \begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix} \right\} = \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

$$x = m \pm \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

Dato itaque valore ipsius x , datur vertex Hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$; consequenter Hyperbola describi potest (§. 472 part. 1.)

COROLLARIUM III.

59. Quoniam pro Circulo $ax - x^2 = y^2$, eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ seu, si fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = \sqrt{(mm + yy)} - m$.

COROLLARIUM IV.

60. Si curva AMO Ellipsis primi generis; erit (§. 421 part. 1.)

Tab. I.
Fig. 2.

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$\frac{2ydy = bdx - 2bxdx : a}{}$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ substituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvax = 2ay^2$$

$$b = 2ay^2 : (av - 2vax)$$

Ex natura curvæ est

$$b = ay^2 : (ax - xx)$$

Unde $\frac{2ay^2}{av - 2vax} = \frac{ay^2}{ax - xx}$

$$\frac{2ax - 2xx = av - 2vx}{}$$

$$-\frac{1}{2}av = xx - ax - vx$$

Si fiat $a - v = 2m$

erit $m^2 - \frac{1}{2}av = xx - 2mx + mm$

$$\sqrt{(m^2 - \frac{1}{2}av)} = \left\{ \begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix} \right.$$

$$\frac{m \pm \sqrt{(m^2 - \frac{1}{2}av)} = x}{}$$

Quoniam ipsius a , seu axis transversi nullus valor erui potest; pro arbitrio assumi debet. Quodsi minor fuerit quam v ; erit $x = m + \sqrt{(m^2 - \frac{1}{2}av)}$.

CAPUT III.

De usu Calculi differentialis in Methodo de maximis
& minimis.

DEFINITIO IV.

61. **S**I semiordinatæ alicujus curvæ usque ad certum terminum continuo crescunt vel decrescunt, quem prætergressæ denuo decrescunt vel crescunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *Methodus de maximis & minimis*.

SCHOLIUM.

62. *Potest vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum crescunt vel decrescunt, adhiberi. Sed representandæ sunt per curvarum semiordinatas, ut Exempla inferius adducenda loquuntur.*

PROBLEMA XIII.

Tab. I. 63. *Determinare maximam vel minimam applicatam in curva algebraica.*
Fig. 10. II.

RESOLUTIO.

Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallela evadit, adeoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit, in casu maximi vel minimi, subtangens TP infinita atque subnormalis PH nihilo æqualis. Est vero $PH = ydy : dx$. Quodsi ergo ponatur $ydy : dx = 0$; reperietur $dy = 0$ &, ob $PT = ydx : dy = \infty$, (quæ est nota infinitatis) $dx = \infty$.

Fieri potest, ut tangens HG in direc-

tum jaceat semiordinatæ GC: quo in Tab. I. casu subtangens PT nihilo æquatur & Fig. 12. subnormalis PH fit infinita. Est vero $PT = ydx : dy = 0$ (§. 20), quare si ponatur $ydx : dy = 0$, habebimus $dx = 0$. Vel, ob $PH = ydy : dx = \infty$, reperitur $dy = \infty$. Sunt nimirum tam dx , quam y , intuitu dy infinitesimæ.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus est valor ipsius dy , & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abscissæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM I.

64. Quoniam in Circulo (§. 377 part. I.)

$$ax - xx = y^2$$

$$\text{erit } adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Nempe maxima semiordinata in Circulo erigitur ex centro, uti ex Elementis constat (§. 299 Geom.).

Quodsi porro valor ipsius x in æquatione $ax - xx = y^2$ substituatur; prodibit $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa = yy$, hoc est, $\frac{1}{2}aa = yy$. Unde $\frac{1}{2}a = y$: id quod denuo ex Elementis manifestum est.

Quodsi ponamus $2ydy : (a - 2x) = dx = \infty$: erit $a - 2x$ respectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, adeoque (§. 3) $a - 2x = 0$, ut ante.

COROL-

COROLLARIUM II.

65. Pro infinitis circulis (§. 24)

$$\frac{max^{m-1} dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0}{max^{m-1} = (m+1)x^m}$$

$$\frac{ma : (m+1) = x.}{(m+1)x^{m-1}}$$

Ex. gr. Sit $m = 3$, seu æquatio ad circum-
lum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit x
 $= \frac{3}{4}a$; consequenter $y^4 = \frac{27}{64}a^4 - \frac{81}{256}a^4$
 $= \frac{108}{256}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{27}{256}a^4$. Unde $y = \frac{3}{4}a$
 $\sqrt[4]{27}$.

COROLLARIUM III.

66. Pro Ellipsis infinitis (§. 26)

$$\frac{(m+n)ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1} dx = 0}{mbx^{m-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit ex. gr. Ellipsis primi generis; erit
 $m = 1$ & $n = 1$, adeoque $x = \frac{1}{2}a$, & ob
 $y^2 = bx - bxx : a$ (§. 421 part. I.), $y^2 = \frac{1}{2}ab$
 $-\frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM IV.

67. Si $x^3 + y^3 = axy$

$$\text{erit } \frac{3x^2 dx + 3y^2 dy = axdy + aydx}{3x^2 dx - aydx = axdy - 3y^2 dy = 0}$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$27x^6 : a^3 = y^3$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3 x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Porro

$$y = 3x^2 : a = \frac{3}{5}a \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}a \sqrt[3]{4}$$

COROLLARIUM V.

68. Sit $y - a = a^{1:3} (a - x)^{2:3}$

$$\text{erit } \frac{dy = -2a^{1:3} dx : 3(a-x)^{1:3}}{Quodsi hic valor ipsius dy ponatur nihilo æqualis; erit -2a^{1:3} = 0. Quamobrem cum nullus valor ipsius x inde eruatur; ponatur$$

$$-2a^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty$$

erit, ob denominatorem respectu numera-
toris infinite parvum (§. 3),

$$\frac{3(a-x)^{1:3} = 0}{a-x = 0}$$

$$a-x = 0$$

$$a = x$$

Unde $y - a = a^{1:3} (a - x)^{2:3} = a^{1:3} \cdot 0 = 0$
adeoque $y - a = 0$

$$y = a.$$

COROLLARIUM VI.

69. Sit $y^5 = a^2 x^3 - x^5 + b^2 c^2 x$

$$\text{erit } \frac{5y^4 dy = 3a^2 x^2 dx - 5x^4 dx + b^2 c^2 dx = 0}{3a^2 x^2 - 5x^4 + b^2 c^2 = 0}$$

$$3a^2 x^2 - 5x^4 + b^2 c^2 = 0$$

$$5x^4 - 3a^2 x^2 = b^2 c^2$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2 x^2 = \frac{1}{5}b^2 c^2$$

$$\frac{5}{100}a^4 \quad \frac{1}{100}a^4$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2 x^2 + \frac{1}{100}a^4 = \frac{1}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2 c^2$$

$$\left. \begin{matrix} x^2 - \frac{3}{10}a^2 \\ \frac{3}{10}a^2 - x^2 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\left(\frac{1}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2 c^2\right)}$$

$$x^2 = \frac{1}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2 c^2\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2 c^2\right)}\right)}$$

Iii

Fiat

Tab.I. Fig.13. COROLLARIUM II.
73. In Hyperbola æquilatera (§. 507 part. I.)

$$\begin{aligned} ax + xx &= y^2 \\ \frac{adx + 2xdx}{\frac{1}{2}adx + xdx} &= \frac{2ydy}{ydy} \end{aligned}$$

Quare $\frac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§.71)

$$2x = c - \frac{1}{2}a$$

$$x = \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}a$$

five PR = $c - x = \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}a$

Quoniam subnormalis reperitur $x + \frac{1}{2}a$ (§. 35), PR = $c - x = \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}a$ est denuo subnormalis, consequenter &

Theorema. In Hyperbola æquilatera normalis est brevissima omnium rectorum, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci possunt.

COROLLARIUM III.

74. In Ellipsi primi generis est (§. 420 part. I.)

$$\begin{aligned} ay^2 &= abx - bx^2 \\ 2aydy &= abdx - 2bxdx \end{aligned}$$

$$ydy = (abdx - 2bxdx) : 2a$$

Quare $\frac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$

$$\frac{\frac{1}{2}b - c - bx}{a + x} = 0$$

$$x - \frac{bx}{a} = c - \frac{1}{2}b$$

$$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$$

$$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b)$$

$$c - x = (\frac{1}{2}ab - bc) : (a - b)$$

Cum subnormalis reperiatur $\frac{1}{2}b - bx : a$ (§. 35), erit PR = $c - x = \frac{1}{2}b - (bc - \frac{1}{2}bb) : (a - b) = (\frac{1}{2}ab - bc) : (a - b)$, ut adeo PR denuo fit subnormalis; consequenter &

Theorema. In Ellipsi normalis fit linea recta brevissima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci potest.

COROLLARIUM IV. Tab.I. Fig.13.
75. Eodem modo in Hyperbola scalena reperitur $x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a + b)$.

COROLLARIUM V.

76. Quoniam $ydy + xdx - cdx = 0$ (§.71)

$$ydy = cdx - xdx$$

$$\frac{ydy}{dx} = c - x = PR$$

Est adeo PR subnormalis (§. 35), atque adeo patet generale

Theorema: In omni curva perpendicularis est linea recta brevissima, quæ ex dato puncto in axe ad eam duci potest.

PROBLEMA XV.

77. A puncto C extra curvam algebraicam dato ducere rectoram CM, qua sit minima omnium ex eodem puncto C ad curvam ducendarum. Tab.I. Fig.14.

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum, datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit AD = p, CD = q, AP = x, PM = y; erit MH = AP - AD = x - p, & CH = CD - PM = q - y; consequenter MC² = CH² + HM² = q² - 2qy + yy + x² - 2px + pp. Cum adeo MC² sit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc est, $\frac{1}{2}2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$

$$\text{feu } (y - q)dy + (x - p)dx = 0.$$

Reliqua peragenda sunt ut in Problemate præcedente (§. 71).

COROLLARIUM I.

78. Si curva AMO fuerit Parabola primi generis; erit

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

Iii 2

Unde

Unde $y - q + (x - p)2y : a = 0$

$$\frac{ay - aq + 2xy - 2py = 0}{ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0}$$

$$\frac{ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0}{aay - aaq + 2y^3 - 2apy = 0}$$

$$h. e. y^3 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}aaq = 0$$

$$- apy$$

Tab. I. Quodsi hæc æquatio ope Parabolæ datæ at-
Fig. 14. que circuli construat (§. 622 part. I.);
una eademque opera determinantur & AP
& PM, & punctum M. Nimirum (vi §. cit.)
fieri debet AL = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$
& IL = $\frac{1}{4}q$, atque centro I per verticem
Parabolæ A describendus est circulus, qui
eam in puncto desiderato M secabit. Erit
autem AL = $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; si ex A in G trans-
feratur $\frac{1}{2}a$ & DG bifariam secetur in L.
Nam AD = p , adeoque DG = $\frac{1}{2}a - p$.
Ergo DL = $\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, consequenter AL
= $\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p + p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$. His factis AP
= x , PM = y . Etenim ex natura Parabolæ
AP = $y^2 : a$, adeoque LP = IR = $y^2 : a - \frac{1}{4}a$
- $\frac{1}{2}p$, consequenter IR² = $y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2$
+ $\frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2$. Porro
MR = $y - \frac{1}{4}q$, adeoque MR² = $y^2 - \frac{1}{2}qy$
+ $\frac{1}{16}q^2$. Habemus itaque (§. 417 Geom.)
MI² = IR² + MR² = $y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2$
- $py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$.
Est vero MI² = AI² = IL² + LA² = $\frac{1}{16}a^2$
+ $\frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}q^2$. Quare

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}qy = 0$$

$$\frac{py^2}{a}$$

$$\frac{y^4 + \frac{1}{2}a^2y^2 - \frac{1}{2}a^2qy = 0}{- apy^2}$$

$$\frac{y^3 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}a^2q = 0}{- apy}$$

quæ est æquatio ad construendum proposita.

COROLLARIUM II.

79. Quoniam (§. 77)

$$(y - q)dy + (x - p)dx = 0$$

$$\text{erit } (x - p)dx = (q - y)dy$$

$$\frac{(x - p)y}{q - y} = \frac{ydy}{dx}$$

Jam porro (§. 268 Geom.)

$$CH : MH = CD : Dr$$

$$q - y : x - p = q : Dr$$

adeoque $Dr = \frac{qx - pq}{q - y}$; consequenter

$$\text{ob } DP = x - p, Pr = \frac{qx - pq}{q - y} - x + p =$$

$$(qx - pq - qx + pq + xy - py) : (q - y) =$$

$$(x - p)y : (q - y). \text{ Est adeo } Pr = ydy : dx \text{ sub-}$$

normalis (§. 35). Patet adeo denuo generale
Theorema. In omni curva AMO linea ad
eam perpendicularis est brevissima om-
nium, quæ ex dato extra eam puncto C
ad eam duci possunt.

SCHOLIUM.

80. Ex allato exemplo liquet, si Proble-
ma non fuerit planum, consultius esse ut in
expressione generali valor potius ipsius dx,
quam dy substituatur. Nec absimili modo in
curvis algebraicis determinatur punctum in-
tra earum ambitum datum, a quo ad earum
perimetros ducantur rectæ minimæ: quemad-
modum ex sequente Problemate patet.

PROBLEMA XVI.

81. A puncto C intra curvam alge-
braicam dato ducere rectam CM, quæ
sit minima omnium ex eodem puncto C
ad curvam ducendarum. Tab. IV. Fig. 44.

Sit AD = p , CD = q , AP = x , PM
= y , erit HC = PD = $p - x$ & MH
= $y - q$, consequenter MC² = MH²
+ HC² (§. 417 Geom.) = $y^2 - 2qy$
+ $q^2 + p^2 - 2px + x^2$. Cum
MC² sit minimum quoddam, ex hy-
pothesi: erit ejus differentiale nihilo
æqua-

Tab. IV. α quale (§. 63), hoc est, $2ydy - 2qdy - 2pdx + 2xdx = 0$ seu $(y - q) dy - (p - x) dx = 0$. Reliqua peragenda sunt ut in Problemate 14 (§. 71).

COROLLARIUM I.

82. Quoniam $(y - q) dy = (p - x) dx$

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{p - x}{y - q}$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{(p - x)y}{y - q} = \frac{HC \cdot PM}{MH}$$

Quare cum sit $MH : HC = PM : PR$ (§. 268 Geom.); erit PR subnormalis (§. 35). Patet adeo denuo

Theorema. In omni curva AMO linea normalis est brevissima, quæ a dato intra eam puncto C ad eam duci potest.

COROLLARIUM II.

83. Linea itaque ad curvam normalis est brevissima omnium, quæ a dato quocunque in eodem plano puncto ad eam duci potest (§. 76, 79, 82).

PROBLEMA XVII.

Tab. II. Fig. 15. 84. Lineam rectam AB ita secare in D , ut rectangulum ex AD & DB sit maximum eorum, qua hac ratione construï possunt.

Sit $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, consequenter $AD \cdot DB = ax - xx$ maximum aliquod, atque hinc (§. 63) ejus differentiale nihilo æquale: concipitur nempe esse ad circum, ad quem

$$ax - xx = yy$$

$$\text{Quare } adx - 2xdx = 2ydy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Linea igitur AB est secanda in duas partes æquales, estque quadratum om-

nium rectangulorum maximum, quorum altitudines & bases junctim sumtæ inter se æquantur.

PROBLEMA XVIII.

85. Lineam rectam AB ita secare in D , ut $AD^m \cdot DB^n$ sit maximum factorum simili modo formarum. Tab. II. Fig. 15.

Sit denuo $AB = a$, $AD = x$, erit $DB = a - x$, consequenter $AD^m \cdot DB^n = x^m (a - x)^n$. Erit igitur x abscissa respondens semiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m (a - x)^n = y^{m+n}$ (§. 517 part. 1), & hinc (§. 63)

$$mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1} dx = 0$$

$$m(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m + n) = x$$

Sit ex. gr. $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{2}{3}a$, hoc est, si recta $AD = \frac{2}{3}a$ & $BD = \frac{1}{3}a$, atque BD sumatur pro altitudine prismatis, AD pro latere quadrati, quod est basis ejusdem; erit prisma omnium maximum eorum, quæ ex divisione rectæ AB in duas partes formari possunt.

PROBLEMA XIX.

86. Super recta AB tanquam hypotenusa triangulum rectangulum maximum construere. Tab. II. Fig. 16.

Sit $AB = a$, $AC = x$, erit (§. 417 Geom.) $BC = \sqrt{aa - xx}$, area (§. 392 Geom.) $= \frac{1}{2}AC \cdot CB = \frac{1}{2}x\sqrt{aa - xx}$. Habemus adeo æquationem ad curvam tertii generis

$$x\sqrt{aa - xx} = 2y^2$$

$$\text{seu } aaxx - x^4 = 4y^4$$

Tab. II. Unde $2a^2 x dx - 4x^3 dx = 16y^3 dy = 0$
Fig. 16.

$$\frac{2a^2 x = 4x^3}{4x}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a^2 = x^2}{\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = x}$$

Patet adeo triangulum maximum esse æquicrurum. Nam si $AB^2 = aa$ & $AC^2 = \frac{1}{2}aa$, erit etiam $CB^2 = \frac{1}{2}aa$; consequenter $AC = CB$.

PROBLEMA XX.

Tab. II. 87. Inter omnes conos æquales deter-
Fig. 17. minare eum, qui minimam habet super-
ficiem.

Sit soliditas conorum æqualium a^3 , ratio radii ad peripheriam $r : p$, radius cono $AC = x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$. Hæc peripheria basis $px : r$ ducta in $\frac{1}{2}x$ dat basin cono $px^2 : 2r$ (§. 429 Geom.): per quam si dividatur a^3 , habetur $\frac{1}{3}DC = 2a^3 r : px^2$ (§. 548 Geom.). Unde $DC = 6a^3 r : px^2$, &

$$DC^2 = 36a^6 r^2 : p^2 x^4$$

$$AC^2 = x^2$$

$$AD^2 = x^2 + 36a^6 r^2 : p^2 x^4 \text{ (§. 417 Geom.)}$$

$$AD = \sqrt{(p^2 x^6 + 36 a^6 r^2) : p x^2}$$

$\frac{1}{2}$ peripheria bas. $px : 2r$

$$\text{Superf. cono } \sqrt{(p^2 x^6 + 36 a^6 r^2) : 2rx} \text{ (§. 548 Geom.)}$$

Habemus itaque, vi methodi de maximis & minimis (§. 63),

$$(p^2 x^6 + 36 a^6 r^2) : 4r^2 x^2 = y^2$$

h. e. $p^2 x^4 : 4r^2 + 9 a^6 : x^2 = y^2$

$$\frac{4p^2 x^3 dx : 4r^2 - 18 a^6 x dx : x^4 = 2y dy = 0}{p^2 x^3 dx : r^2 - 18 a^6 dx : x^3 = 0}$$

$$p^2 x^3 : r^2 = 18 a^6 : x^3$$

obnU

ε III

$$p^2 x^6 = 18 a^6 r^2$$

$$px^3 = 3 a^3 r \sqrt{2}$$

$$x^3 = 3 a^3 r \sqrt{2} : p$$

$$x = a^3 \sqrt{(3r \sqrt{2} : p)}$$

Quoniam $px^3 = 3a^3 r \sqrt{2}$, erit $x^3 : a^3 = 3r \sqrt{2} : p$, consequenter evidens est

Theorema. Cubus radii cono inter æquales minimam superficiem habentis est ad ipsum conum in ratione composita radii ad peripheriam & $3\sqrt{2}$ ad 1.

PROBLEMA XXI.

88. Sit ADB semicirculus & curva Tab. AMD ejus nature, ut sit BP : PN = AP : IV. PM; determinare punctum M, in quo Fig. 45. MN est maxima linea earum, qua simili modo determinantur.

Sit diameter semicirculi $AB = a$, $AP = x$; erit $PB = a - x$, & $PN = \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 327, 377 Geom.). Est vero, per hypoth.

$$BP : PN = AP : PM$$

$$a - x : \sqrt{(ax - x^2)} = x : PM$$

$$\text{adeoque } PM = \frac{x \sqrt{(ax - x^2)}}{a - x} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a - x)}}$$

consequenter $NM = PN - PM = \sqrt{(ax - x^2)} - \sqrt{x^3} : \sqrt{(a - x)}$, & hinc $MN^2 = (a^2 x - 2ax^2 + 2x^3 - 2\sqrt{(a^2 x^4 - 2ax^5 + x^6)} : (a - x) = [\text{ob } \sqrt{(a^2 x^4 - 2ax^5 + x^6)} = ax^2 - x^3], \frac{a^2 x - 4ax^2 + 4x^3}{a - x}$. Quare cum NM^2 sit maximum aliquod, erit (§. 63)

$$\frac{(a^2 - 8ax + 12x^2)(a - x) dx + (a^2 x - 4ax^2 + 4x^3) dx}{(a - x)^2} = 0$$

$$(a^2 - 8ax + 12x^2)(a - x) + a^2 x - 4ax^2 + 4x^3 = 0$$

h. c.

Tab. h. c. $a^3 - 8a^2x + 12ax^2$
 IV. $- a^2x + 8ax^2 - 12x^3$
 Fig.45. $+ a^2x - 4ax^2 + 4x^3$ } = 0
 $a^3 - 8a^2x + 16ax^2 - 8x^3 = 0$
 $a^2 - 6ax + 4x^2 = 0$
 $4x^2 - 6ax = -a^2$
 $x^2 - \frac{3}{2}ax = -\frac{1}{4}a^2$
 $\frac{9}{16}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{5}{16}a^2$
 $x^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{9}{16}a^2 = \frac{5}{16}a^2$
 $\frac{3}{4}a - x = \frac{1}{4}\sqrt{5}a^2$
 $x = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5}a^2$

Dividatur radius CB bifariam in E, erit CE = $\frac{1}{4}a$, adeoque, ob CD = $\frac{1}{2}a$, DE = $\sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{5}a^2$. Fiat EP = ED; erit PB = $\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{5}a^2$; consequenter AP = AB - PB = $\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5}a^2$.

PROBLEMA XXII.

Tab. 89. Determinare maximam applica-
 IV. tam QN in curva AMND ejus natu-
 Fig.46. ra, ut ducta recta FM per punctum D,
 recta AE qua lineam CB positione datam
 in E ad angulos rectos secat, sit eidem AE
 constanter aequalis.

Sit FM = AE = a, DE = b, EP = MG = x, erit DP = x - b & FG = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417 Geom.). Jam cum anguli ad P & G sint recti, per construct. & ob parallelas AE & MG (§. 256 Geom.) PDM = DMG (§. 233 Geom.), erit $\Delta FGM \sim \Delta PDM$, & ideo (§. 267 Geom.)

MG : GF = DP : PM
 $x : \sqrt{(a^2 - x^2)} = x - b : PM$

adeoque $PM = \frac{(x-b)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = (1-\frac{b}{x})\sqrt{(a^2-x^2)}$

Hinc $PM^2 = (1-\frac{2b}{x}+\frac{b^2}{x^2})(a^2-x^2)$

$= a^2 - \frac{2a^2b}{x} + \frac{a^2b^2}{x^2} - x^2 + 2bx - b^2$

Habemus adeo (§. 63)
 $\frac{2a^2bdx}{x^2} - \frac{2a^2b^2dx}{x^3} - 2xdx + 2bdx = 0$
 $\frac{a^2b}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3} - x + b = 0$
 $a^2bx - a^2b^2 - x^4 + bx^3 = 0$
 $a^2b - x^3 = 0$
 $x^3 = a^2b$
 $x = \sqrt[3]{a^2b}$

Parametro a circa axem EB describatur Parabola EIR (§. 400 part. 1) fiatque (§. 622 part. 1) EO = $\frac{1}{2}a$, & OK ad EB perpendicularis = $\frac{1}{2}b$. Ex centro K, radio KE, describatur circulus EIT secans Parabolam in I, erit IL ad EB perpendicularis (= EQ) = x, adeoque QN perpendicularis ad AE transiens per I maxima applicata.

Est enim IS = IL - SL = x - $\frac{1}{2}b$, & cum EL = $x^2 : a$ (§. 391 part. 1) LO = SK = $\frac{1}{2}a - x^2 : a$. Quare SI² = $x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$, & SK² = $\frac{1}{4}a^2 - x^2 + x^4 : a^2$; consequenter EK² = IK² = $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - bx + x^4 : a^2$. Unde ob EK² = $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$ habetur $x^4 : a^2 - bx = 0$, adeoque $x^3 - a^2b = 0$.

PROBLEMA XXIII.

90. Determinare maximam applica-
 Tab. tam PM curvae AME ejus natura, ut
 Fig.47. diameter circuli ANB sit axi AE &
 recta per A ducta MN in quolibet curva
 puncto M aequalis.

Sit MN = AB = AE = a, AM = x, PM = y, erit AN = a - x. Jam cum AB & PM sint ad AE perpendiculares, per hypoth. erunt eadem inter se parallelæ (§. 256 Geom.) adeoque AMP = NAB (§. 233 Geom.). Quare cum porro angulus ad

Tab. ad Præctus sit (§.78 Geom.) & ANB, qui
 IV. est in semicirculo, sit itidem rectus,
 Fig.47. (§.317 Geom.); erit $\triangle AMP \sim \triangle ANB$
 (§.267 Geom.) &

$$PM : AM = AN : AB$$

$$y : x = a - x : a$$

$$ay = ax - x^2$$

$$ady = adx - 2xdx = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\frac{1}{2}a = x$$

Hinc porro $y = x - \frac{x^2}{a} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$

Est igitur in casu applicatæ maxi-
 mæ $AM = \frac{1}{2}a$: unde reperitur AP
 $= \frac{1}{4}\sqrt{3a^2}$ (§.417 Geom.)

Tab.
 IV.
 Fig.47.



S E C T I O S E C U N D A.

DE CALCULO INTEGRALI, SEU SUMMATORIO.

C A P U T I.

De natura Calculi integralis.

DEFINITIO V.

91. **C**alculus Integralis seu Sum-
 matorius est Methodus quan-
 titates differentiales summandi, hoc est,
 ex quantitate differentiali data inve-
 niendi eam, ex cujus differentiatione
 resultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

92. Integrationis itaque seu summationis
 rite peractæ indicium est, si quantitas inven-
 ta juxta regulas Cap. I, Sect. I, tradita
 differentiata eam producit, quæ ad summan-
 dum proponebatur.

SCHOLION.

93. Quoniam Angli differentiaalia quanti-
 tatum fluxiones vocant (§.6); Calculum,
 quem nos differentialem dicimus, Methodum
 fluxionum; quem vero integralem vocamus &
 qui a differentiis ad summas, seu, ut cum An-
 glis loquar, a fluxionibus ad quantitates fluen-
 tes (ita nimirum variables dicunt) ascendit,
 Methodum fluxionum inverſam appellant.

HYPOTHESIS.

94. Signum summa aut quantitatis in-

tegralis sit \int , ita ut $\int y dx$ denotet sum-
 mam seu integrale differentialis $y dx$.

PROBLEMA XXIV.

95. Quantitatem differentialem inte-
 grare seu summare.

RESOLUTIO.

Ex superioribus manifestum est, quod sit

I. $\int dx = x$ (§.8).

II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ (§.11.).

III. $\int (x dy + y dx) = xy$ (§.12).

IV. $\int m x^{m-1} dx = x^m$ (§.13)

V. $\int (n.m) x^{(n-m).m} dx = x^{n.m}$ (§.17).

VI. $\int (y dx - x dy) : y^2 = x : y$ (§.19).

Ex his casus quartus & quintus fre-
 quentius occurrunt, in quibus quantitas
 differentialis summatur, si exponenti va-
 riabilis unitas additur, & ea, quæ prodit,
 dividitur per novum exponentem du-
 ctum in differentiale radice, ex. gr. in
 casu quarto per $(m - 1 + 1) dx$, hoc
 est, per $m dx$.

Quod si quantitas differentialis ad sum-
 mandum

mandum proposita nulli illarum formularum similis; aut reducenda est ad summabilem finitam, aut ad seriem infinitam cujus singuli termini summari possunt, vel etiam ad Quadraturas & Rectificationes curvarum simpliciorum, quae quadrari vel rectificari nondum possunt, veluti ad Quadraturam circuli, vel Rectificationem arcus circuli: quas reductiones exemplis potius, quam regulis docemus, ne calculi tyronibus nauseam moveamus.

Et quia eadem differentialia prodeunt, si variabilibus constantes quantitates adjiciantur, quam si eadem abfuerint (§. II); itaque fieri potest, ut $\int dx$ sit $x + a$ vel $x - a$, $\int (x dy + y dx) = xy + a^2$, vel $xy \pm ab$, & ita porro. Sed quid de quantitate adjicienda tenendum sit, docebitur paulo post.

SCHOLIUM.

96. Quemadmodum in *Analysi finitorum* qualibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum exehi, sed non vice versa ex qualibet radix extrahi potest desiderata; ita similiter in *Analysi infinitesimali* quantitas qualibet variabilis, aut ex variabilibus & constantibus quomodocunque composita, haud difficulter differentiat, sed non vice versa quodlibet differentiale integrari potest. Quemadmodum autem porro in *Analysi finitorum* non ex omnibus aequationibus radices extrahendi Methodus hactenus inventa, neque enim aetas nostra transcendit limites ultra seculum & quod excurrit Algebrae jam assignatos: ita similiter in *Analysi infinitorum Calculus integralis* suam perfectionem nondum est assecutus. Sicuti autem in *Analysi finitorum* ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita similiter in *Analysi infinitorum* ad series infinitas confugimus, ubi perfectam summationem dare non valemus.

CAPUT II.

De usu Calculi integralis in Quadraturis curvarum.

DEFINITIO VI.

Tab.I. Fig.2. 97. **D**ifferentialiale seu Elementum areae dicitur rectangulum PMRP ex semiordinata PM in differentiale abscissae Pp.

COROLLARIUM I.

98. Si ergo semiordinata PM = y, abscissa AP = x, erit Pp = MR = dx, consequenter Elementum areae PM. MR = ydx.

COROLLARIUM II.

99. Quoniam mR = dy & MR = dx; erit $\Delta MRm = \frac{1}{2} dx dy$ (§. 392 Geom.). Sed $\frac{1}{2} dx dy$ est ipsius ydx infinitesima (§. 12), consequenter trapezium PMmp aequale est rectangulo PMRp, in praesente nimiram casu, ubi pm ipsi PM infinite propinqua intelligitur (§. 4). Qua-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

re cum area AMP in infinita istiusmodi tra-Tab.I. pezia resolvi possit; erit ea $\int y dx$ (§. 91, 94). Fig.2.

COROLLARIUM III.

100. Quodsi itaque ex aequatione ad curvam datam substituatur valor ipsius y, & ydx integrabile evadat; integratione perfecta habetur Quadratura curvae. Curvam igitur quadrare, idem est ac summare ydx.

PROBLEMA XXV.

101. Invenire aream Trianguli. Tab.II. Sit CP = x, MN = y, CD = a, AB = b; Fig. 18. erit, ob MN ipsi AB parallelam, (§. 268, 396 Geom.)

$$\begin{array}{l} CP : MN = CD : AB \\ x : y = a : b \\ \hline y = \frac{bx}{a} \end{array}$$

K k k

Ergo

Tab.II. Ergo elementum $MNnm = ydx$ (§. Fig. 18. 98) $= bxdx : a$. Unde habetur $\int ydx = bx^2 : 2a$ (§. 95): quæ est area indefinita CMN (§. 99). Quodsi pro CP, seu x , substituatur CD, seu a ; prodibit area totius trianguli $ACB = ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AB \cdot CD$, prorsus ut in Elementis Geometriæ (§. 392) demonstratum.

SCHOLION.

102. Hoc Exemplum ideo attulimus, ut Tyrones, quibus principia Calculi summatorii sub initium duriora videntur, intelligant, per eum non alia reperiri, nisi quæ demonstrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perspiciant.

PROBLEMA XXVI.

103. Parabolam quadrare. Pro Parabola Apolloniana (§. 388 part. I)

$$\begin{aligned} ax &= y^2 \\ \frac{ax}{a^{1:2}x^{1:2}} &= y \\ ydx &= a^{1:2}x^{1:2}dx \\ \int ydx &= \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} = \frac{2}{3}xy, \text{ substituto valore ipsius } a^{1:2}x^{1:2}. \end{aligned}$$

COROLLARIUM.

104. Est ergo spatium parabolicum ad rectangulum ex semiordinata in abscissam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy , hoc est, ut 2 ad 3 (§. 124 part. I).

PROBLEMA XXVII.

105. Infinitas Parabolas quadrare. Pro infinitis Parabolis & curvis agnatis (§. 519 part. I)

$$\begin{aligned} a^n x^m &= y^r \\ \frac{a^{n:r} x^{m:r}}{a^{n:r} x^{m:r}} &= y \\ ydx &= a^{n:r} x^{m:r} dx \\ \int ydx &= \frac{r}{m+r} a^{n:r} x^{m:r+1} = \frac{r}{m+r} x^y, \\ \text{ob } a^{n:r} x^{m:r} &= y. \end{aligned}$$

COROLLARIUM.

106. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcumque est ad rectangulum ex semiordinata in abscissam, ut $xy : (m+r)$ ad xy , hoc est, ut r ad $m+r$ (§. 124 part. I).

PROBLEMA XXVIII.

107. Quadrare segmentum spatii parabolici PMNQ inter duas semiordinatas Fig. 19. PM & QN interceptum.

I. Quoniam AP constans est, & origo abscissæ indeterminatæ in P: fit $AP = b$, $PQ = x$, $QN = y$, erit $AQ = b+x$. Sit porro parameter $= a$, erit (§. 388 part. I)

$$\begin{aligned} ab + ax &= y^2 \\ \sqrt{ab + ax} &= y \\ ydx &= dx \sqrt{ab + ax} \end{aligned}$$

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$$\begin{aligned} \sqrt{ab + ax} &= v \\ \text{erit } ab + ax &= v^2 \\ \frac{adx}{2v} &= 2v dv \\ dx &= 2v dv : a \\ ydx &= 2v^2 dv : a \end{aligned}$$

$$\int ydx = \frac{2}{3}v^3 : a = \frac{2}{3}(ab + ax)\sqrt{ab + ax} : a = \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{ab + ax}.$$

Quoniam in P, $x = 0$, & spatium quoque QNMP evanescit; si in integrali inventa ponatur $x = 0$, quod relinquitur, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, ostendit quid ei adjiendum vel demendum, ut spatium QNMP nihilum evadat in P, consequenter ut integrale fiat quadratura ipsius QNMP. Habemus nempe in nostro casu subtrahendum $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$: unde

Tab. unde ipsius QNMP area = $\frac{2}{3}(b+x)$
 II. $\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$.

Fig. 19. II. Sit AQ constans, & = b, origo
 ipsius x in Q, erit QP = x, PM = y,
 AP = b - x & (§. 388 part. I)

$$ab - ax = y^2$$

$$\sqrt{(ab - ax)} = y$$

$$y dx = dx \sqrt{(ab - ax)}$$

$$\text{Fiat ut ante } ab - ax = v^2$$

$$\text{erit } -adx = 2v dv$$

$$dx = -2v dv : a$$

$$y dx = -2v^2 dv : a$$

$$\int y dx = -\frac{2}{3}v^3 : a = -\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$$

Ut intelligatur quid integrali sit ad-
 jiciendum, quo spatii PMNQ mensu-
 ram constituat; ponatur ut ante $x=0$,
 relinquatur $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Unde manifes-
 tum est, si illi adjiciatur $+\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, ha-
 beri spatium PMNQ = $\frac{2}{3}b\sqrt{ab} -$
 $\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

SCHOLIUM.

108. Spatium PMNQ esse in casu
 priore $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, in
 posteriore $\frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$ etiam
 ex Problemate 26 (§. 103) manifestum
 est. Nimirum PMNQ = ANQ - AMP.
 Sed in casu priore ANQ = $\frac{2}{3}AQ$. QN
 = $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$, & AMP = $\frac{2}{3}AP$.
 PM = $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Unde PMNQ = $\frac{2}{3}(b+x)$
 $\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. In posteriore ANQ
 = $\frac{2}{3}AQ$. QN = $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ & AMP = $\frac{2}{3}AP$.
 PM = $\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$. Unde QNMP
 = $\frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

COROLLARIUM.

109. Quod si adeo curva non supponatur
 descripta, sed tantum æquatio ad eam de-
 tur, ut adeo non constet, ubi origo ipsius
 x sit statuenda; evidens est, ex resolutione
 Problematis præsentis, quod in integrali
 poni debeat $x=0$, & deletis iis quæ per x
 multiplicantur, residuum, si quod fuerit,
 sub signo contrario ipsi sit adjiciendum, ut
 habeatur quadratura quæ sita.

PROBLEMA XXIX.

110. Quadrare curvam, ad quam
 $xy^3 = a^4$.

Quoniam

$$y = a^{4/3} x^{-1/3}$$

$$\text{erit } y dx = a^{4/3} x^{-1/3} dx$$

$$\int y dx = \frac{2}{5} a^{4/3} x^{2/3} = \frac{2}{5} \sqrt[3]{a^4 x^2} = \frac{2}{5} a \sqrt[3]{ax^2}$$

PROBLEMA XXX.

111. Quadrare curvam CARTESII
 (d), ad quam $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Quoniam $b^2 y = bx^2 - x^3$

$$\text{erit } y = (bx^2 - x^3) : b^2$$

$$y dx = (bx^2 dx - x^3 dx) : b^2$$

$$\int y dx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$$

PROBLEMA XXXI.

112. Quadrare curvam, ad quam x^5
 $+ ax^4 + a^2 x^3 + a^3 x^2 + a^4 = a^5 y$.

Quoniam $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

$$\text{erit } y dx = \left(\frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a} + a \right) dx$$

$$\int y dx = \frac{x^6}{6a^4} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{3a} + ax$$

PROBLEMA XXXII.

113. Quadrare curvam, ad quam
 $y^2 = x^4 + a^2 x^2$.

Quoniam $y = x \sqrt{(x^2 + a^2)}$

$$\text{erit } y dx = x dx \sqrt{(x^2 + a^2)}$$

Kkk 2

Ut

(d) Epist. Tom. III. pag. 219.

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\begin{aligned} \sqrt{(x^2 + a^2)} &= v \\ \text{erit } x^2 + a^2 &= v^2 \\ \frac{2x dx}{2v} &= \frac{2v dv}{2v} \\ x dx &= v dv \\ \frac{x dx \sqrt{(a^2 + x^2)}}{v} &= v^2 dv \end{aligned}$$

$\int x dx \sqrt{(a^2 + x^2)} = \frac{1}{3} v^3 = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{(x^2 + a^2)}$.
Ponatur $x = 0$, erit residuum $\frac{1}{3} a^2 \sqrt{a^2}$ five $\frac{1}{3} a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{(x^2 + a^2)} - \frac{1}{3} a^3$ (§. 109).

PROBLEMA XXXII.

114. Quadrare curvam, ad quam $y^2 = x^3 + ax^2$.

Quoniam $y = x \sqrt{(x+a)}$
erit $y dx = x dx \sqrt{(x+a)}$
Ut elementum integrabile evadat, fiat

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+a)} &= v \\ \text{erit } x+a &= v^2 \text{ \& } x = v^2 - a \\ dx &= 2v dv \\ y dx &= 2v^4 dv - 2av^2 dv \\ \int y dx &= \frac{2}{5} v^5 - \frac{2}{3} av^3 = \frac{2}{5} (x+a)^2 \sqrt{(x+a)} \\ &- \frac{2}{3} a (x+a) \sqrt{(x+a)} = \left(\frac{6}{15} x^2 + 2ax + aa \right) - \frac{2}{15} (ax + aa) \sqrt{(x+a)} = (6x^2 + 2ax - 4aa) \sqrt{(x+a)} : 15. \text{ Ponatur } \\ x &= 0; \text{ relinquetur } -\frac{4}{15} aa \sqrt{a}. \text{ Area igitur curvæ } \frac{1}{15} \sqrt{(x+a)} (6x^2 + 2ax - 4aa) + \frac{4}{15} aa \sqrt{a} \text{ (§. 109)}. \end{aligned}$$

PROBLEMA XXXIII.

115. Quadrare curvam, ad quam $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Quoniam $y = x : \sqrt{(x+a)}$
erit $y dx = x dx : \sqrt{(a+x)}$

Ponatur $\sqrt{(x+a)} = v$

$$\begin{aligned} \text{erit } x+a &= v^2 \\ x &= v^2 - a \\ dx &= 2v dv \\ x dx : \sqrt{(x+a)} &= (2v^3 dv - 2av dv) : v \\ &= 2v^2 dv - 2adv \end{aligned}$$

$\int x dx : \sqrt{(x+a)} = \frac{2}{3} v^3 - 2av = \frac{2}{3} (x+a) \sqrt{(x+a)} - 2a \sqrt{(x+a)} = (2x + 2a - 6a) \sqrt{(x+a)} : 3 = \frac{2}{3} \sqrt{(x^3 - 3ax^2 + 4a^3)}$. Reductio ad mere surdam necessaria, ut appareat, si fiat $x = 0$, & termini quidam nullefiant, quale residui esse debeat signum, propterea quod $x - 2a$ signis afficitur diversis.

Ponatur $x = 0$; relinquetur $\frac{2}{3} \sqrt{4a^3} = \frac{4}{3} a \sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{2}{3} \sqrt{(x^3 - 3ax^2 + 4a^3)} - \frac{4}{3} a \sqrt{a}$ (§. 109) $= \frac{2}{3} (x - 2a) \sqrt{(x+a)} - \frac{4}{3} a \sqrt{a}$.

PROBLEMA XXXIV.

116. Quadrare omnes curvas, qua comprehenduntur sub equatione generali $y = \sqrt[m]{(x+a)}$.

Quoniam $y = (x+a)^{1:m}$
erit $y dx = dx (x+a)^{1:m}$
Ut elementum integrabile fiat, ponatur

$$\begin{aligned} (x+a)^{1:m} &= v \\ \text{erit } x+a &= v^m \\ dx &= m v^{m-1} dv \\ y dx &= m v^m dv \\ \int y dx &= \frac{m v^{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1} (x+a)^{\frac{m+1}{m}} \sqrt[m]{(x+a)}. \\ \text{Fiat } x &= 0: \text{ erit residuum } \frac{m}{m+1} a^{\frac{m+1}{m}} \sqrt[m]{a}. \\ \text{Unde area curvæ } &\frac{m}{m+1} (x+a)^{\frac{m+1}{m}} \sqrt[m]{(x+a)} \\ &- \frac{m}{m+1} a^{\frac{m+1}{m}} \sqrt[m]{a} \text{ (§. 109)}. \end{aligned}$$

PRO-

PROBLEMA XXXV.

117. Quadrare omnes curvas, qua definiuntur hac aequatione generali $y = ax^m$: $\sqrt{(b + cx^{m+1})}$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx: \sqrt{(b + cx^{m+1})}$. Ut integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(b + cx^{m+1})} = v$$

$$\text{erit } b + cx^{m+1} = v^2$$

$$(m+1)cx^m dx = 2v dv$$

$$x^m dx = 2v dv : c(m+1)$$

$$ydx = 2adv : (m+1)c$$

$$\int ydx = 2av : (m+1)c$$

$$= 2a\sqrt{(b + cx^{m+1})} : (m+1)c$$

Fiat $x = 0$, relinquetur $2a\sqrt{b} : (m+1)c$

Est igitur area $\frac{2a\sqrt{(b + cx^{m+1})} - 2a\sqrt{b}}{(m+1)c}$

PROBLEMA XXXVI.

118. Quadrare innumeras Hyperbolas intra asymptotos.

Pro infinitis Hyperbolis intra asymptotos $a^{m+n} = y^m x^n$.

Fiat $a = 1$

erit $1 = y^m x^n$

$$x^{-n} = y^m$$

$$x^{-n:m} = y$$

$$ydx = x^{-n:m} dx$$

$$\int ydx = \frac{m}{m-n} x^{-n:m+1} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^{m-n}}$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n} xy$$

Tab. I. Si $m > n$; spatii interminati $\int MPAS$ quadratura semper habetur: si $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura spatii IMPK: si vero $m = n$, spatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^2$; erit $m = 2, n = 1$, adeo-

que $\int MPAS = 2xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit Tab. I. $m = 4, n = 1$, adeoque $\int MPAS = \frac{4}{3}xy$. Fig. 4. Si $x^2y = a^3$; theorema dat $a^3: x = -xy$ seu xy pro spatio interminato IMPK. Si $x^4y = a^5$; habetur $m = 1, n = 4$, adeoque $-\frac{1}{3}xy$, hoc est $\frac{1}{3}xy = IMPK$. Sed si $xy = a^2$; erit $m = 1, n = 1$, adeoque $m : (m - n) = \frac{1}{0}$: est adeo numerator respectu denominatoris infinitus.

SCHOLIUM.

119. Johannes WALLISIUS (e) spatium SAPMS, eo in casu, ubi valor negativus, vocavit plusquam infinitum: ostendit vero Celeberrimus VARIGNONIUS (f), Virum ceteroquin magno suo merito celebrem aliquid humani passum esse, consentiente summo LEIBNITIO (g).

PROBLEMA XXXVII.

120. Hyperbolam Apollonianam intra asymptotos quadrare.

Quoniam ad Hyperbolam intra asymptotos (§. 490 part. I.) $a^2 = by + xy$, seu si fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio sit arbitraria, vi §. cit.)

$$1 = y + xy$$

erit $1 : (1 + x) = y$

hoc est divisione actu facta, (§. 45 part. I)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \&c.$$

$$ydx = dx - xdx + x^2 dx - x^3 dx + x^4 dx - x^5 dx + x^6 dx : \&c. \text{ in infinit.}$$

$$\int ydx = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 \&c. \text{ in infinit.}$$

Kkk 3

SCHO-

(e) In *Arithmet. infinit.* Schol. Prop. 101. f. 407. & Prop. 104. fol. 409.

(f) *Memoires de l'Academie Royale des Sciences*, A. 1706. p. m. 15.

(g) In *Actis Eruditorum*, A. 1711. P. 267. & seqq.

SCHOLIUM.

121. Hanc quadraturam Hyperbolæ primus dedit Serierum infinitarum inventor Nicolaus MERCATOR (h). Cum autem seriem quasivisset per divisionem; celeberrimi Geometra LEIBNITIUS atque NEWTONUS (i) methodum hanc serierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicem extractiones, ille autem ex serie quadam præsupposita. Utriusque exempla in sequentibus occurrunt.

PROBLEMA XXXVIII.

122. Quadrare curvam, in qua $x^2 y + y = 1$

Quoniam $x^2 y + y = 1$

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

vel $y = \frac{1}{1 + x^2}$

$$y dx = dx : (x^2 + 1)$$

vel $= dx : (1 + x^2)$

Resolvatur 1: ($x^2 + 1$) per divisionem in seriem infinitam (§. 45 part. I), reperietur

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \&c.$$

$$= x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \&c.$$

Quare

$$y dx = x^{-2} dx - x^{-4} dx + x^{-6} dx - x^{-8} dx \&c.$$

adeoque

$$\int y dx = -x^{-1} + \frac{1}{3} x^{-3} - \frac{1}{5} x^{-5} + \frac{1}{7} x^{-7} \&c.$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} \&c.$$

Resolvatur similiter 1: ($1 + x^2$) in seriem (§. cit.), reperietur

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \&c.$$

adeoque

$$y dx = dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx \&c.$$

$$\text{Quare } \int y dx = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 \&c.$$

Quoniam series exprimit aream,

(h) In *Logarithmotechnia*, prop. 17. p. 31. & seqq.
(i) Vid. *Epistola* ipsorum apud WALLISIUM vol. III. *Operum Mathematic.*

quia convergit, hoc est, termini continuo fiunt minores, ut in casu singulari tandem deveniatur ad particulam inassignabilem, etiamsi terminorum numerus sit finitus, series autem prior citius convergit posteriore; ideo utendum est serie prima, si x fuerit satis magna, secunda vero, si satis parva.

PROBLEMA XXXIX.

123. Quadrare Hyperbolam AMP. Tab. I.

Quoniam in Hyperbolæ $ay^2 = abx$ Fig. 2. $+ bx^2$ (§. 459 part. I.); $y = \sqrt{(ax + x^2)} \sqrt{b}$: \sqrt{a} , adeoque $y dx = dx \sqrt{(ax + x^2)} \sqrt{b}$: \sqrt{a} ; consequenter $\int y dx = \sqrt{(b:a)} \int dx \sqrt{(ax + x^2)}$. Quoniam $\int dx \sqrt{(ax + x^2)}$ est area Hyperbolæ æquilateræ (§. 507 part. I) hac data datur etiam area Hyperbolæ scalenæ. Quare ut elementum areæ Hyperbolæ æquilateræ integrabile reddatur, solvatur $\sqrt{(ax + x^2)}$ in seriem infinitam (§. 98 part. I), erit in theoremate generali

$$m = 1, n = 2, P = ax$$

$$Q = x : a = a^{-1} x$$

$$P^{m:n} = a^{1:2} x^{1:2} = A:$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{1:2} \cdot a^{-1} x$$

$$= \frac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} a^{-1:2} x^{1:2} \cdot a^{-1} x$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 4} a^{-3:2} x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} a^{-3:2} x^{5:2} \cdot a^{-1} x$$

$$= +\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{-5:2} x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{-5:2} x^{7:2} \cdot a^{-1} x$$

$$= -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^{-7:2} x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^{-7:2} x^{9:2} \cdot a^{-1} x$$

$$= +\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} a^{-9:2} x^{11:2} \&c.$$

Est

Est itaque

$$y = a^{1:2} x^{1:2} + \frac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} - \frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2} + \frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7:2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2} + \&c. \text{ in infinit.}$$

$$y dx = a^{1:2} x^{1:2} dx + \frac{1}{2} a^{-1:2} x^{3:2} dx - \frac{1}{2.4} a^{-3:2} x^{5:2} dx + \frac{1.3}{2.4.6} a^{-5:2} x^{7:2} dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{-7:2} x^{9:2} dx \&c. \text{ in infinit.}$$

adeoque

$$\int y dx = \frac{2}{3} a^{1:2} x^{3:2} + \frac{1}{5} a^{-1:2} x^{5:2} - \frac{1}{4.7} a^{-3:2} x^{7:2} + \frac{1.3}{4.6.9} a^{-5:2} x^{9:2} - \frac{1.3.5}{4.6.8.11} a^{-7:2} x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13} a^{-9:2} x^{13:2} + \&c.$$

Quoniam $a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$, erit

$$\int y dx = \sqrt{ax} \left(\frac{2}{3} x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7a^2} + \frac{1.3.x^4}{4.6.9a^3} - \frac{1.3.5x^5}{4.6.8.11a^4} + \frac{1.3.5.7x^6}{4.6.8.10.13a^5} \right) \&c. \text{ in infinit.}$$

PROBLEMA XL.

124. Circulum quadrare.

Tab. I. Sit $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$; Fig. 2. erit (§. 377 part. 1.)

$$y = \sqrt{(x - xx)}$$

$$y dx = dx \sqrt{(x - xx)} = dx (x - xx)^{1:2}$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $x - xx$ extrahatur radix per Theorema generale (§. 98 part. 1.), in quo erit

$$m = 1, n = 2, P = x, Q = -xx: x = -x$$

$$P^{m:n} = x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} x^{1:2} \cdot -x = -\frac{1}{2} x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} x^{3:2} \cdot -x = -\frac{1}{2.4} x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{2.4} x^{5:2} \cdot -x = -\frac{1.3.x^{7:2}}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot -\frac{1.3}{2.4.6} x^{7:2} \cdot -x = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^{9:2} \cdot -x = -\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} x^{11:2} \&c. \text{ in infinit.}$$

Habemus adeo $y dx = x^{1:2} dx - \frac{1}{2} x^{3:2} dx + \frac{1}{4} x^{5:2} dx - \frac{1.3}{2.4.6} x^{7:2} dx + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} x^{9:2} dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} x^{11:2} dx + \&c. \text{ in infinit.}$

Hinc $\int y dx = \frac{2}{3} x^{3:2} - \frac{1}{5} x^{5:2} + \frac{1}{4.7} x^{7:2} - \frac{1.3}{4.6.9} x^{9:2} + \frac{1.3.5}{4.6.8.11} x^{11:2} - \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13} x^{13:2} + \&c. \text{ in infinit.}$

$= \sqrt{x} \left(\frac{2}{3} x - \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{4.7} x^3 - \frac{1.3}{4.6.9} x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8.11} x^5 - \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13} x^6 + \frac{1}{2.8} x^3 - \frac{1}{7.2} x^4 - \frac{5}{70.4} x^5 - \frac{7}{106.4} x^2 + \&c. \text{ in infinit.} \right)$

Hæc nempe series exhibet quadraturam indeterminatam segmenti AMP.

Aliter.

Quoniam si radius Circuli = 1, CP = x, PM = y (§. 377 part. 1.) $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ Fig. 3. $\sqrt{(1 - x^2)} \& \sqrt{(1 - x^2)} = 1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 - \frac{7}{256} x^{10} \&c. \text{ in infinit.}$ erit (§. 98 part. 1.)

$$y dx = dx - \frac{1}{2} x^2 dx - \frac{1}{8} x^4 dx - \frac{1}{16} x^6 dx - \frac{5}{128} x^8 dx - \frac{7}{256} x^{10} dx - \& \text{ in infinit.}$$

$$\int y dx = x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{112} x^7 - \frac{5}{1152} x^9 - \frac{7}{2816} x^{11} \&c. \text{ in infinit.}$$

Quando x radio CA æqualis evadit, spatium DCPM degenerat in quadrantem. Substituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \&c. \text{ in infinit.}$, quæ eadem series integram Circuli aream metitur, si diameter fuerit 1.

Quo.lli

Quodsi progressum in infinitum perspicere lubet, multiplicatio ut ante tantummodo indicanda, dum $\sqrt{(1-x^2)}$ in seriem resolvitur.

$$\text{Ita nimirum prodibit } y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4 \\ - \frac{1.3}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10} \\ \&c. \text{ in infinit.}$$

$$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2 dx - \frac{1}{2.4}x^4 dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^6 dx \\ - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10} dx \\ \&c.$$

$$\int ydx = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 \\ - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}x^{11} \\ \&c. \text{ in infin.}$$

Dicatur terminus primus A, secundus B, tertius C, quartus D, quintus E &c. erit $A = x$

$$B = -\frac{1}{2.3}x^3 = -\frac{1.1}{2.3}Ax^2$$

$$C = -\frac{1}{2.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{2.3.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{4.5}Bx^2$$

$$D = -\frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 = -\frac{1.3.3.5}{2.3.4.5.6.7}x^7 = \\ -\frac{3.5}{6.7}Cx^2$$

$$E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 = \frac{1.3.5.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 = \\ -\frac{5.7}{8.9}Dx^2$$

&c. *Aliter.*

Tab. II. Sit tangens arcus dimidii $GB = x$, radius $BC = 1$; erit tangens integri seu dupli $KB = 2x : (1 - xx)$ (§. 327 part. I) & (§. 269 Geom.)

$$BG : BC = KG : KC$$

$$x : 1 = \frac{x+x^3}{1-xx} : \frac{1+x^2}{1-xx}$$

Est enim $KG = 2x : (1 - xx) - x = \text{Tab. II.}$
 $(2x - x + x^3) : (1 - xx) = (x + x^3) : (1 - xx)$ Fig. 20.

Porro (§. 268 Geom.)

$$KC : KB = MC : PM$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} : \frac{2x}{1-x^2} = 1 : \frac{2x}{1+x^2}$$

$$KC : BC = MC : PC$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} : 1 = 1 : \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Unde $PB = 1 - (1 - x^2) : (1 + x^2) = (1 + x^2 - 1 + x^2) : (1 + x^2) = 2x^2 : (1 + x^2)$. Hinc differentiando eruitur $Pp = MR = (4x dx + 4x^3 dx - 4x^5 dx) : (1 + x^2)^2 = 4x dx : (1 + x^2)^2$, & $mR = (2dx + 2x^2 dx - 4x^4 dx) : (1 + x^2)^2 = (2dx - 2x^2 dx) : (1 + x^2)^2$. Ob $MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 Geom.) habetur $Mm^2 = 16x^2 dx^2 : (1 + x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2 dx^2 + 4x^4 dx^2) : (1 + x^2)^4 = (4dx^2 + 8x^2 dx^2 + 4x^4 dx^2) : (1 + x^2)^4$, & $Mm = (2dx + 2x^2 dx) : (1 + x^2)^2 = 2dx : (1 + x^2)$. Denique $Mm \cdot \frac{1}{2}MC = dx : (1 + x^2)$. Ut sector hic infinite parvus MCm , seu elementum sectoris BCM , cujus dimidii tangens x , summetur; resolvi debet $1 : (1 + x^2)$ in seriem (§. 45 part. I): quo facto reperitur $dx : (1 + x^2) = dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10} dx$ &c. adeoque $\int dx : (1 + x^2) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. quæ series exprimit sectorem BCM , ita ut arcus dimidii tangens $GB = x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio æqualis (§. 32 Trig.). Si ergo pro x substituatur 1, series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem Circuli exprimit. Immo totam aream emittitur, si 1 denotet diametrum Circuli.

Brevius.

Brevius.

Tab.II. Sit tangens KB = x, BC = 1 & secans Fig.20. CA alteri CK infinite propinqua, ductusque arcus KL radio CK; erit AK = dx, KC = √(1 + x²) (§.417 Geom.). Jam cum anguli ad B & L sint recti (§.38); & ob angulum infinite parvum KCL angulus BKC = KAC (§.239 Geom. & §.3 Analys. infinit.); erit (§.267 Geom.)

KC : BC = KA : KL

√(1 + x²) : 1 = dx : $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Porro (§.137, 412 Geom.)

CK : KL = CM : mM

√(1 + x²) : $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ = 1 : $\frac{dx}{1+x^2}$

Sector igitur CMm = $\frac{1}{2}dx : (1+x^2)$ = $\frac{1}{2}(dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx \&c.)$. Unde per summationem eruitur sector BCM, cujus tangens KB = x, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11} \&c.$ in infinit. adeoque si BM octans Circuli, seu arcus 45°, sector erit (§.32 Trigon.) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22} \&c.$ in infinit. Hujus adeo seriei duplum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \&c.$ in infinitum est quadrans Circuli, immo integra area si diameter = 1.

SCHOLIION.

125. Seriem primam invenit NEWTONUS, alteram Jacobus GREGORIUS, & in eandem incidit LEIBNITIUS ignorans, dubio procul, prodituram seriem Gregorianam, cum ex tangente quereretur aream. Neque enim putandum est, quod inventum seriei, quam GREGORIO repertam non ignorabat, etsi publice non constaret, sibi attribuerit absque ulla ratione Vir probati alias candoris. Sed nullum

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

est dubium quin ingeniosissimus LEIBNITIUS methodo ab iis diversa, quas ego proposui, ad suam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico percontanti, unde constet, (quod LEIBNITIUS in Actis Eruditorum asseruerat) s(dx : (1 + x²)) dependere a quadratura circuli, & quomodo inde eruatur series Leibnitiana pro circulo $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \&c.$ responsurus, judicio LEIBNITII submissem, eam equidem non improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius absolvi posse: unde etiam factum est, ut postea de breviori cogitarem.

PROBLEMA XL.

126. Ellipsin Apollonianam qua-Tab.I. drare. Fig.10.

Sit AC = a, GC = c, PC = x; erit (§.432 part. 1)

$y^2 = c^2 (a^2 - x^2) : a^2$

$y = c \sqrt{(a^2 - x^2)} : a$

Est vero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$

$-\frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} \&c.$ in infin.

(§.98 part. 1.). Ergo ydx = cdx

$-\frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8}$

$-\frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}} \&c.$ in infinit. consequenter

$\int ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8}$

$-\frac{7cx^{11}}{2816a^{10}} \&c.$ in infinit.

Quodsi pro x ponatur a; erit quadrans Ellipsis $ac - \frac{1}{3}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac \&c.$ in infinitum: quæ eadem series integram Ellipsis aream exhibet, si a axem integrum denotet.

LII

Aliter.

Aliter.

Tab. II. Quoniam elementum Ellipseos est
Fig. 23. $cdx\sqrt{(a^2-x^2)}:a$; erit ECLR = $\frac{c}{a}\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$. Sed $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ = DCLK (§. 124). Est itaque $a:c$ = DCLK : ECLR, hoc est, area circularis DCLK est ad Ellipticam ECLR ut axis major AB (qui est diameter circuli) ad minorem 2CE (§. 124 part. 1). Pendet adeo quadratura Ellipseos a quadratura Circuli.

COROLLARIUM I.

127. Si fiat $\sqrt{ac} = 1$, erit area Ellipsis = $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152} - \frac{1}{2816}$ &c. in infinitum. Patet adeo Ellipsia esse circulo æqualem, cujus diameter est media proportionalis inter axes Ellipsis conjugatos (§. 124).

COROLLARIUM II.

128. Est ergo Ellipsis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut ac ad a^2 (§. 408 Geom.), hoc est, ut c ad a (§. 124 part. 1), seu ut axis minor ad majorem: quod idem de segmentis indefinitis ostendimus analytice in resolutione.

COROLLARIUM III.

129. Data Circuli quadratura dabitur etiam quadratura Ellipsis, & contra.

SCHOLIUM.

130. Quamvis Circuli integri quadratura finita hæcenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometra. Primam quadraturam partialem alicujus lunula dedit jam olim HIPPOCRATES Chius, ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit AEB semicirculus & GC = BG. Describatur radio BC quadrans AFB; erit AEBFA Lunula HIPPOCRATIS. Quoniam $BC^2 = 2GB^2$ (§. 417 Geom.); erit quadrans AFBC semicirculo AEB æqualis (§. 408 Geom.). Ablato igitur utrinque segmento communi AFBA; erit AEBFA = $\Delta ACB = GB^2$.

Tab. II. Fig. 21.

PROBLEMA XLII.

131. Cycloidem quadrare.

Quoniam TP = PM (§. 52): erunt in Tab. I. ΔPMT anguli M & T æquales (§. 184 Fig. 7. Geom.), adeoque TPQ = 2M (§. 239 Geom.). Est vero anguli APQ mensura arcus dimidius AP (§. 291, & 314 Geom.) & idem metitur angulum TPA (§. 322 Geom.). Ergo APQ = TPA (§. 142 Geom.). Sed TPQ = TPA + APQ = 2APQ = 2TMP, per demonstrata. Ergo APQ = TMP = Mms, ob parallelas MP & mq (§. 233 Geom.). Quamobrem, cum ad S & Q sint recti, per constr.; erit (§. 267 Geom.)

$$AQ:QP = MS:Sm$$

Sit jam AQ = x , AB = 1, erit MS = dx , PQ = $\sqrt{(x-xx)}$ (§. 377 part. 1.) & $ms = dx\sqrt{(x-xx)}:x$. Reperimus autem supra (§. 124) $\sqrt{(x-xx)} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx\sqrt{(x-xx)}:x =$ (quoniam ob divisionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur, §. 54 part. 1.) $x^{-1/2} dx - \frac{1}{2}x^{1/2} dx - \frac{1}{8}x^{3/2} dx - \frac{1}{16}x^{5/2} dx$ &c. in infinitum, cujus summa $2x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{20}x^{5/2} - \frac{1}{56}x^{7/2}$ &c. in infinitum, est semiorinata Cycloidis QM ad axem AB relata. Hinc QM dx , seu elementum QMSq spatii cycloidici AMQ = $2x^{1/2} dx - \frac{1}{3}x^{3/2} dx - \frac{1}{20}x^{5/2} dx - \frac{1}{56}x^{7/2} dx$ &c. in infinitum: cujus summa = $\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{15}x^{5/2} - \frac{1}{70}x^{7/2} - \frac{1}{252}x^{9/2}$ &c. in infinit. exprimit segmentum Cycloidis AMQ.

Quodsi $MS = gG = dx\sqrt{(x-xx)}:x$ ducatur in $GM = AQ = x$, reperietur elementum GMHg areae AMG = $dx\sqrt{(x-xx)}$: quod cum idem sit cum ele-

men-

mento segmenti circuli APQ (§. 124), erit spatium AMG segmento circuli APQ; consequenter area ADC semicirculo APB æqualis.

COROLLARIUM.

132. Quoniam CB semiperipheria circuli æquatur (§. 574 part. 1.) si ea = p & AB = a; erit rectangulum BCDA = ap (§. 375 Geom.), & semicirculus APB, adeoque & spatium cycloïdicum externum ADC = $\frac{1}{4}ap$ (§. 429 Geom.). Ergo area semicycloïdis ACB = $\frac{1}{4}ap$ & AMCBPA = $\frac{1}{2}ap$; consequenter area Cycloïdis est circuli genitoris tripla.

PROBLEMA XLIII.

133. Cissoïdem DIOCLIS quadrare.

Quoniam $y^2 = x^3 : (1-x)$, si 1 diameter circuli genitoris (§. 548 part. 1.); erit

$y = x\sqrt{x} : \sqrt{(1-x)} = x^{3:2} (1-x)^{-1:2}$
 Extrahatur ergo ex 1: $\sqrt{(1-x)}$ actu radix, per Theorema generale (§. 98 part. 1) in quo erit $m = -1, n = 2, P = 1, Q = -x$ & hinc $P^m : n = 1 = A$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot -x = \frac{1}{2}x = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1x}{2} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3x^2}{2 \cdot 4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3x^2}{2 \cdot 4} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot -x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx = x^{3:2} (1-x)^{-1:2} dx =$
 $x^{3:2} dx + \frac{1}{2}x^{5:2} dx + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^{7:2} dx +$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{9:2} dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{11:2} dx \&c. cu-$$

jus summa $\frac{2}{5}x^{5:2} + \frac{1}{7}x^{7:2} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 9}x^{9:2} +$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 11} x^{11:2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13} x^{13:2} \&c. \text{ in in-}$$

$$\text{finitum} = \sqrt{x} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 9}x^4 + \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 11}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13}x^6 \&c. \text{ in infini-} \right.$$

tum) exprimit spatium APM.

Aliter.

Sit AP = x, PN = v, PM = y, AB = a; erit (§. 548 part. 1)

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$\frac{2aydy - 2xydy - y^2 dx = 3x^2 dx}{2(a-x)dy - ydx = 3x^2 dx : y}$$

Tab. II.
Fig. 22.

Quoniam (§. 547 part. 1) $x^2 = vy$; erit $x^2 : y = v$. Fiat præterea $a - x = PB = z$: habebimus

$$2zdy - ydx = 3vdx$$

$$\frac{2zdy - ydx = 3vdx}{2szdy - sydx = 3svdx}$$

Est vero vdx elementum circuli PNnp; $szdy$, ob $z = PB = OM$ & $dy = mR = oO$, elementum $mMOo$ area AMOB & ydx elementum PMmp area AMP. Jam quando $szdy$ integram aream intra Cissoïdem AI & ejus asymptotum BH exhibet, etiam $sydx$ est eadem area, adeoque $sydx = szdy$; consequenter $2szdy - sydx = szdy$. Quare cum in eodem casu $svdx$ semicirculum producat ANB; erit, ob $szdy = 3svdx$, totum spatium cissoïdale in infinitum protensum semicirculi genitoris ANB triplum.

PROBLEMA XLIV.

134. Quadrare Logisticam, seu Logarithmicam.

Sit subtangens PT = a (§. 54), Tab. I. PM = y, Pp = dx; erit (§. cit.) Fig. 8.

$$ydx : dy = a$$

$$ydx = ady$$

$$\frac{ydx = ady}{fydx = ay}$$

Tab. I. Spatium ergo interminatum HPMI
Fig. 8. æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM I.

135. Sit $QS = z$; erit spatium interminatum $ISQH = az$, consequenter $SMPQ = ay - az = a(y - z)$, hoc est, spatium inter duas Logistica semiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.

COROLLARIUM II.

136. Est itaque spatium BAPM ad spatium PMSQ ut differentia semiordinatarum AB & PM ad differentiam semiordinatarum PM & SQ (§. præc. & §. 124 part. 1).

PROBLEMA XLV.

137. Quadrare Spirales.

Tab. I. Sint omnia ut in Problemate 8
Fig. 6. (§. 50); erit arcus $EG = ydx : a$, qui ductus in $\frac{1}{2}AG$ producit sectorem infinite parvum $GAE = y^2 dx : 2a$ (§. 435 Geom.). Est autem pro Spirali Archimedeæ,

$$\frac{by = ax}{y^2 = a^2 x^2 : b^2}$$

$$y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2b^2$$

$$fy^2 dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Quodsi pro arcu x ponatur integra periphæria b ; erit spatium spirale integrum $\frac{1}{6}ab$. Similiter pro infinitis Spiralibus ad circulum relatis (§. 572 part. I).

$$b^n y^m = a^m x^n$$

$$y^m = a^m x^n : b^n$$

$$y = ax^{n:m} : b^{n:m}$$

$$y^2 = a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m}$$

$$y^2 dx : 2a = ax^{2n:m} dx : 2b^{2n:m}$$

$$fy^2 dx : 2a = max^{(2n+m):m} : (4n+2m)b^{2n:m}$$

Quare si pro x ponatur integra periphæria circuli b , prodibit pro spatii spiralibus integris $mab^{2n:m+1} : (4n+2m)b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$.

Quodsi ponamus arcum BC esse ad CF ut abscissa ad semiordinatam in curva aliqua algebraica, eodem modo reperitur spatium spirale. Sit enim ex. gr. BC ad CF ut abscissa Parabolæ ad semiordinatam, erit (sumto r pro parametro)

$$rx = a^2 - 2ay + yy$$

$$dx = (2ydy - 2ady) : r$$

$$y^2 dx : 2a = (y^3 dy - ay^2 dy) : ar$$

$$fy^2 dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec absimili modo invenitur spatium inter arcum BC & Spiralem BF comprehensum, cujus elementum est trapezium CFID = $(CD + FI) \frac{1}{2} FC$ (§. 400 Geom.). Est vero $CD = dx$, $FI = ydx : a$, $FC = a - y$, adeoque $CFID = (dx + ydx : a) (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}y) = (a^2 dx - y^2 dx) : 2a$.

Si jam Spiralis sit parabolica, pro dx substituatur valor ipsius $(2ydy - 2ady) : r$, erit elementum speciale $(ay^2 dy + a^2 ydy - y^3 dy - a^3 dy) : ar$, cujus summa, $y^3 : 3r + ay^2 : 2r - y^4 : 4ar - a^2 y : r$, est spatium quæsitum BFC.

PROBLEMA XLVI.

138. Quadrare Conchoidem NICOMEDIS.

Sit $AP = x$, $PM = y$, $BC = b$, $AB = a$ & OQ ad PM perpendicularis: erit $PB = OQ = a - x$, $PC = a + b - x$. Quoniam OQ & BA perpendiculares ad PM , per hypoth. erunt inter se parallelæ (§. 256 Geom.), consequenter (§. 268 Geom.),

PC

Tab. I.
Fig. 5.

$$\begin{aligned}
 &PC : PM = OQ : OM \\
 &a + b - x : y = a - x : OM \\
 &\& hinc OM = y(a - x) : (a + b - x) \\
 &\text{adeoque } OM^2 = y^2(a - x)^2 : (a + b - x)^2. \\
 &\text{Porro } OQ^2 = (a - x)^2, \& QM^2 = AB^2 \\
 &(\S. 535 \text{ part. } 1) = a^2. \text{ Quare } (\S. 417 \text{ Geom.}) \\
 &a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{y^2(a - x)^2}{(a + b - x)^2} \\
 &\frac{2ax - x^2}{(a + b - x)^2} = \frac{y^2(a - x)^2}{(a + b - x)^2} \\
 &\sqrt{(2ax - x^2)} = y(a - x) : (a + b - x) \\
 &y = \frac{a + b - x}{a - x} \sqrt{(2ax - x^2)}
 \end{aligned}$$

Habemus itaque elementum areæ
 $\int y dx = \int \frac{a + b - x}{a - x} dx \sqrt{(2ax - x^2)}$
 nec alia re opus est, quam ut $\sqrt{(2ax - x^2)}$
 resolvatur in seriem (§. 98 part. 1.), se-
 ries hæc porro ducatur in $a + b - x$ &
 factum tandem dividatur per $a - x$. Ita
 enim obtinetur series, quæ singulis ter-
 minis in dx ductis exprimit elementum
 areæ atque eodem, quo ante, modo
 summatur. Ne calculus perplexus tyro-
 nes turbet, sumamus casum simplicissi-
 mum, in quo est $b = a$, adeoque $a + b$
 $= 2a$, & ne $\sqrt{2}$ toties sit scribenda,
 ponamus $2a = c$, ut sit $a = \frac{1}{2}c$: erit
 $\int dx = \int \frac{c - x}{\frac{1}{2}c - x} dx \sqrt{(cx - x^2)}$. Est autem
 $\sqrt{(cx - x^2)}$ semiordinata circuli, cujus
 diameter c , atque adeo coincidit resolu-
 tio in seriem cum ea, quam dedimus
 paulo ante (§. 124), nisi quod ibidem
 supposuerimus $c = 1$. Quoniam tamen
 hic consultius est c retineri & in resolu-
 tione, in gratiam operationum sequen-
 tium, quædam notanda sunt; ideo non

inconsultum ducimus, vi Theorematis
 Newtoniani (§. 99 part. 1) resolutionem
 ipsam instituire. Erit itaque
 $m = 1, n = 2, P = cx,$
 $Q = -x^2 : cx = -x : c = -c^{-1}x$ (§. 54, 55 part. 1),
 adeoque

$$\begin{aligned}
 P^{m:n} &= c^{1:2} x^{1:2} = A \\
 \frac{m}{n} AQ &= \frac{1}{2} c^{1:2} x^{7:2} \cdot -c^{-1}x = -\frac{1}{2} c^{-1:2} x^{3:2} = B \\
 \frac{m-n}{2n} BQ &= -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} c^{-1:2} x^{3:2} \cdot -c^{-1}x = \\
 &= -\frac{1}{8} c^{-3:2} x^{5:2} = C \\
 \frac{m-2n}{3n} CQ &= -\frac{1}{6} \cdot -\frac{1}{8} c^{-3:2} x^{5:2} \cdot -c^{-1}x \\
 &= -\frac{1}{16} c^{-5:2} x^{7:2} = D \\
 \frac{m-3n}{4n} DQ &= -\frac{1}{8} \cdot -\frac{1}{16} c^{-5:2} x^{7:2} \cdot -c^{-1}x \\
 &= -\frac{1}{128} c^{-7:2} x^{9:2}, \&c.
 \end{aligned}$$

Est itaque $\sqrt{(cx - x^2)} = c^{1:2} x^{1:2} -$
 $\frac{1}{2} c^{-1:2} x^{3:2} + \frac{1}{8} c^{-3:2} x^{5:2} - \frac{1}{16} c^{-5:2} x^{7:2}$
 $+ \frac{5}{128} c^{-7:2} x^{9:2} \&c.$ in infinitum.

Quodsi hanc seriem multiplices per $c - x$,
 & porro divides per $\frac{1}{2}c - x$, prodibit
 $(c - x) \sqrt{(cx - x^2)} : (\frac{1}{2}c - x) = 2c^{1:2} x^{1:2}$
 $+ c^{-1:2} x^{3:2} + \frac{1}{4} c^{-3:2} x^{5:2} + \frac{4}{8} c^{-5:2} x^{7:2}$
 $+ \frac{7 \cdot 2}{64} c^{-7:2} x^{9:2} \&c.$ in infinitum.

Multiplicatio & divisio modo ordinario
 instituitur. Etenim si seriem multiplices
 per c , prodit $c^{3:2} x^{1:2} - \frac{1}{2} c^{1:2} x^{3:2} -$
 $\frac{1}{8} c^{-1:2} x^{5:2} - \frac{1}{16} c^{-3:2} x^{7:2} - \frac{5}{128} c^{-5:2}$
 $x^{9:2} \&c.$ in infinit. Si porro eandem duc-
 cas in $-x$, prodit $-c^{1:2} x^{3:2} + \frac{1}{2} c^{-1:2} x^{5:2}$
 $+ \frac{1}{8} c^{-3:2} x^{7:2} + \frac{1}{16} c^{-5:2} x^{9:2} \&c.$
 Quodsi terminos homogeneos in unam
 summam colligas, obtinetur series $c^{3:2}$
 $x^{1:2} - \frac{3}{2} c^{1:2} x^{3:2} + \frac{5}{8} c^{-1:2} x^{5:2} + \frac{1}{16} c^{-3:2} x^{7:2}$
 $+ \frac{3}{128} c^{-5:2} x^{9:2} \&c.$ Hac porro divisa
 per $\frac{1}{2}c - x$ (§. 40 part. 1), prodit quotus
 $2c^{1:2} x^{1:2} + c^{-1:2} x^{3:2} + \frac{1}{4} c^{-3:2} x^{5:2}$
 $+ \frac{4}{8} c^{-5:2} x^{7:2} + \frac{7 \cdot 2}{64} c^{-7:2} x^{9:2} \&c.$

Tab. I. Est adeo elementum areae Conchoidis
Fig. 5.

$$2c^{-1:2} x^{1:2} dx + c^{-1:2} x^{3:2} dx + \\ \frac{1}{4} c^{-3:2} x^{5:2} dx + \frac{4}{8} c^{-5:2} x^{7:2} dx \\ + \frac{7}{8} c^{-7:2} x^{9:2} dx \&c. \text{ in infinit.}$$

$$\text{Quare area AMP} = \frac{4}{3} c^{1:2} x^{3:2} + \frac{2}{5} c^{-1:2} \\ x^{5:2} + \frac{1}{4} c^{-3:2} x^{7:2} + \frac{5}{4} c^{-5:2} x^{9:2} \\ + \frac{7}{5} c^{-7:2} x^{11:2} \&c. \text{ in infin.}$$

PROBLEMA XLVII.

139. Invenire rationem, quam habent spatia curvilinea juxta axem eundem vel axes aequales descripta, semiordinatis correspondentibus rationem constantem habentibus.

Sit elementum spatii curvilinei unius $= ydx$. Quoniam ordinata ad aequales partes axis continuo applicantur, per hypoth. erit elementum spatii alterius zdx , posita nempe semiordinata hujus z , abscissa communi x . Sed cum in singulis elementis eadem semper sit ratio ipsius y ad z , per hypoth. erit $fydx : fzdx = ydx : zdx$ (§. 187 Arithm.) $= y : z$ (§. 181. Arithm.).

Theorema. Spatia curvilinea aequae alta habent rationem basium, quibus insunt, si

semiordinatae correspondentes fuerint in ratione constante.

COROLLARIUM I.

140. Quare si ARB fuerit semiellipsis; Tab. AKB semicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit KL ad RL in ratione constante DC ad EC (§. 599 part. 1.), adeoque segmentum circulare BKL ad segmentum ellipticum BRL ut KL ad RL. Fig. 23.

COROLLARIUM II.

141. Quodsi ex foco F ducantur rectae FR & FK, erunt quoque triangula FKL & FRL ut KL ad RL (§. 389 Geom.). Quamobrem sector circularis BFK est ad sectorem ellipticum BFR ut KL ad RL (§. 187 Arithm.). Cum itaque KL : RL = CD : CE (§. 599 part. 1.) & ut CD ad CE ita Circulus integer ad Ellipsin integram (§. 128); erit quoque sector KFB ad sectorem RFB ut Circulus ad Ellipsin (§. 167. Arithm.), consequenter ut sector KFB ad aream integri Circuli, ita sector RFB ad integram Ellipsis aream (§. 173 Arithm.).

SCHOLIUM.

142. Quoniam sectores ex arcuum elementis derivantur; de iis quadrandis agemus Capite sequente, ubi arcuum rectificatio docetur.

C A P U T III.

De usu Calculi integralis in Rectificatione Curvarum.

DEFINITIO VII.

143. **R**ectificatio curvae est inventio rectae, cui aequalis est linea curva.

COROLLARIUM.

144. Cum linea curva concipiatur con-

stare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; si una earum inveniatur per calculum differentialem, summa dabit longitudinem curvae. Nimirum cum ex superioribus Tab. I. constet, esse $MR = dx$, $mR = dy$ (§. 20); Fig. 2. erit Mm seu elementum curvae $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (§. 417 Geom.). Quodsi itaque ex aequatione differentiali ad curvam specialem substituat

fituatur valor vel ipsius dx^2 , vel ipsius dy^2 ; habetur elementum speciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

SCHOLIUM.

145. Interdum elementum curvæ commodius ex circumstantiis specialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquentur.

PROBLEMA XLVIII.

146. Parabolam rectificare, Pro Parabola $adx = 2ydy$ (§. 21)

$$\frac{a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2}{dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2}$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + 4y^2 dy^2 : a^2} = dy \sqrt{aa + 4yy} : a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, resolvatur in seriem infinitam (§. 99 part. 1.); erit in Theoremate generali

$$n = 2, m = 1, P = a^2, Q = 4y^2 : a^2$$

$$P^{m-n} = a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} a \cdot 4y^2 : a^2 = 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2y^2}{a} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = -\frac{2y^4}{a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2y^4}{a^3} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = -\frac{4y^6}{a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{1}{8} \cdot \frac{4y^6}{a^5} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = -\frac{10y^8}{a^7} \&c.$$

in infinitum.

$$\text{Quare } dy \sqrt{aa + 4yy} : a = dy + \frac{2y^2 dy}{a^2} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} - \frac{10y^8 dy}{a^8} \&c.$$

$$\text{cujus integrale } y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6}$$

$$- \frac{10y^9}{9a^8} \&c. \text{ in infinitum exprimit arcum parabolicum.}$$

COROLLARIUM I.

Tab. II. 147. Sint AC & DC semiaxes conjugati Fig. 24. Hyperbolæ æquilateræ; erit AC = DC = a

(§. 505 part. 1). Sit CQ = MP = 2y; erit Tab. II. (§. 534 part. 1) QM = $\sqrt{4yy + aa}$. Quod si qm intelligatur ipsi QM infinite propinqua; erit Qq = dy, adeoque elementum areæ CQMA = $dy \sqrt{aa + 4yy}$. Pendet itaque rectificatio Parabolæ a quadratura spatii Hyperbolici CQMA.

COROLLARIUM II.

148. Sit AMR Parabola, cujus parameter AC, & circa communem axem descripta Hyperbola æquilatera ANT, cujus axis 2CA. Si fiat CQ = AV = QN = 2PM, & rectangulum CORA spatio curvilineo CQNA æquale; erit AR æqualis arcui AM (§. 146, 147), consequenter RV = AM - 2PM, seu differentia inter ordinatam & arcum respondentem, & ORVQ = VNA.

SCHOLIUM.

149. Probe notandum est, omnes summationes reduci ad quadraturas curvarum, quocumque in casu iisdem utamur. Unde ut sint perfecta, in omnibus observanda est regula supra tradita de quadraturis (§. 109).

PROBLEMA XLIX.

150. Rectificare Parabolam secundi generis, ad quam $ax^2 = y^3$, seu sumto $a = 1, x^2 = y^3$.

$$\text{Quoniam } x^2 = y^3$$

$$\text{erit } 2x dx = 3y^2 dy$$

$$4x^2 dx^2 = 9y^4 dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4 dy^2 : 4x^2 = 9y^4 dy^2 : 4y^3 = \frac{9}{4} y dy^2$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} y dy^2 + dy^2\right)} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(9y dy^2 + 4dy^2)} = \frac{1}{2} dy \sqrt{(9y + 4)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(9y + 4)} = v$$

$$\text{erit } 9y + 4 = v^2$$

$$9dy = 2v dv$$

$$\frac{1}{2} dy \sqrt{(9y + 4)} = \frac{1}{2} v^2 dv$$

$$\int \frac{1}{2} dy \sqrt{(9y + 4)} = \frac{1}{27} v^3$$

$$= \frac{1}{27} (9y + 4) \sqrt{(9y + 4)}.$$

Ut

Ut vero summa exprimat longitudinem arcus, fiat $y=0$; erit residuum $=\frac{4}{27}\sqrt{4}=\frac{8}{27}$: adeoque arcus $\frac{1}{27}(9y+4)\sqrt{(9y+4)}-\frac{8}{27}$ (§. 109).

COROLLARIUM.

Tab. II. Fig. 19. 151. Sit parameter Parabolæ Apolloniæ $na=1$, $AP=1$, $PQ=\frac{1}{2}y$, erit $AQ=\frac{1}{4}y+1$, & ob parametrum 1, $QN^2=\frac{1}{4}y+1=(9y+4):4$ (§. 388 part. I.), consequenter $QN=\frac{1}{2}\sqrt{(9y+4)}$. Est adeo elementum $QNNq$ spatii parabolici $PMNQ=\frac{1}{2}dy\sqrt{(9y+4)}$; quod divisum per 1, sive parametrum, dat elementum arcus Parabolæ secundi generis, ad quam $ax^2=y^3$. Pendet adeo hujus rectificatio a quadratura Parabolæ Apolloniæ; quæ cum dari possit (§. 103), mirum non est, illam quoque rectificabilem esse.

PROBLEMA L.

152. Infinitas Parabolæ rectificare.

Si parameter = 1, pro infinitis parabolis (§. 519 part. I)

$$\begin{aligned} y^m &= x \\ my^{m-1} dy &= dx \\ m^2 y^{2m-2} dy^2 &= dx^2 \end{aligned}$$

h. e. sive brevitas gratia fiat $2m-2=2$

$$m^2 y^2 dy^2 = dx^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(m^2 y^2 dy^2 + dy^2)} = dy \sqrt{(m^2 y^2 + 1)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $m^2 y^2 + 1$ extrahenda est radix per Theorema generale (§. 99 part. I); in quo erit

$$\begin{aligned} m &= 1, n = 2, P = 1, Q = m^2 y^2 \\ P^{n:m} &= 1 = A \end{aligned}$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} m^2 y^2 = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} m^2 y^2 \cdot m^2 y^2 = -$$

$$\frac{1}{2.4} m^4 y^{2r} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} = CQ = \frac{1}{6} - \frac{1}{2.4} m^4 y^{2r} \cdot m^2 y^2 = + \frac{1.3}{2.4.6} m^6 y^{3r} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1.3}{2.4.6} m^6 y^{3r} \cdot m^2 y^2 = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} m^8 y^{4r} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{1}{10} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} m^8 y^{4r} \cdot m^2 y^2 = + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} m^{10} y^{5r} \text{ \&c. in infinitum.}$$

Habemus itaque $dy \sqrt{(1 + m^2 y^2)}$

$$dy + \frac{1}{2} m^2 y^2 dy - \frac{1}{2.4} m^4 y^{2r} dy + \frac{1.3}{2.4.6} m^6 y^{3r} dy - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} m^8 y^{4r} dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} m^{10} y^{5r} dy \text{ \&c. in infinit.}$$

$$\text{cujus integrale } y + \frac{1}{2(r+1)} m^2 y^{2r+1} - \frac{1}{2.4(2r+1)} m^4 y^{2r+1}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.6(3r+1)} m^6 y^{3r+1} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)} m^8 y^{4r+1}$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)} m^{10} y^{5r+1} \text{ \&c. in infinitum, indefinite exprimit arcum parabolicum cujuscunque generis.}$$

Quodsi pro r substituatur valor ipsius $2m-2$; prodibit idem arcus

$$= y + \frac{1}{2(2m-1)} m^2 y^{2m-1} - \frac{1}{2.4(4m-3)} m^4 y^{4m-3}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.6(6m-5)} m^6 y^{6m-5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)} m^8 y^{8m-7}$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(10m-9)} m^{10} y^{10m-9} \text{ \&c. in infinitum.}$$

PROBLEMA LI.

153. Dato sinu PQ arcus AP; invenire arcum AP. Tab. I. Fig. 7.

Sit radius AI=1, PQ=y, AQ=x; erit (§. 377 part. I)

Tab. I.
Fig. 7.

$$\frac{2x - xx = yy}{2dx - 2xdx = 2ydy}$$

$$\frac{dx = ydy : (1-x)}{dx^2 = y^2 dy^2 : (1-2x+xx) = y^2 dy^2 : (1-y^2)}$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 = \frac{y^2 dy^2}{1-y^2} + dy^2}{= (y^2 dy^2 + dy^2 - y^2 dy^2) : (1-y^2) = dy^2 : (1-y^2)}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{(1-y^2)} = dy (1-y^2)^{-1/2}$$

Resolvatur hoc elementum in seriem infinitam per extractionem radiceis, vi Theorematis generalis (§. 99 part. I), in quo erit

$$m = -1, n = 2, P = 1, Q = -y^2$$

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot -y^2 = \frac{1}{2} y^2 = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} y^2 \cdot -y^2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^4 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^4 \cdot -y^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} y^6 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} y^6 \cdot -y^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} y^8 \text{ \&c. in infinit.}$$

$$\text{Est adeo } dy \sqrt{(1-y^2)} = dy + \frac{1}{2} y^2 dy + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^4 dy + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} y^6 dy + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} y^8 dy \text{ \&c.}$$

$$\text{in infinitum, cujus integrale } y + \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} y^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} y^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} y^9 \text{ \&c.}$$

est arcus AP, cujus sinus PQ=y, sinu toto existente 1. Si terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. & secundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5}$, quintus per $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ &c. cum sit

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

$$A = y$$

$$B = \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} A y^2$$

$$C = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} y^5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^5 = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} B y^2$$

$$D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} y^7 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} y^7 = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7} C y^2$$

$$E = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} y^9 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} y^9 = \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9} D y^2$$

series inventa in hanc degenerat: $y + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}$

$$A y^2 + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} B y^2 + \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7} C y^2 + \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9} D y^2 \text{ \&c.}$$

Si cosinus QI=x, erit (§. 417 Geom.) PQ= $\sqrt{(1-xx)}$. Sit pq ipsi PQ infinite propinqua, & PO ad pq perpendicularis: cum anguli Q & q sint recti, per hyp. PO=Qq=dx & $\Delta \Delta pOP$ atque PQI rectangula. Quare cum OPQ sit rectus (§. 230 Geom.) & pPI itidem rectus (§. 38); erit etiam pPO=IPQ (§. 91 Arithm.), consequenter (§. 267 Geom.)

$$PQ : PI = PO : Pp$$

$$\sqrt{(1-xx)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

Cum adeo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens est, si in serie anteriore pro y substituatur x, prodire seriem pro arcu, qui est illius complementum ad 90°.

COROLLARIUM I.

154. Quoniam elementum arcus Mm = dy: $\sqrt{(1-y^2)}$, si MC=1, PM=y (§. 153); Tab. II. erit sector elementaris MCm = dy: $2\sqrt{(1-y^2)}$ Fig. 20. (§. 435 Geom.); consequenter sector BCM = $\frac{1}{2} dy : \sqrt{(1-y^2)} = \frac{1}{2} y + \frac{3}{2} y^3 + \frac{3}{4 \cdot 4 \cdot 5} y^5 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} y^7 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} y^9 \text{ \&c. in infin.}$

M m m

Co-

Tab. I.
Fig. 7.

COROLLARIUM II.

Tab. II. 155. Quodsi $MC = 1$, $PC = y$, erit denuo
Fig. 20. $Mm = dy : \sqrt{1-y^2}$ (§. 153); consequenter
& $MCm = dy : 2\sqrt{1-y^2}$: Summa vero ex-
hibet sectorem MCO.

COROLLARIUM III.

156. Si fiat $y = 1$, sector BCM vel MCO
degenerat in quadrantem, qui adeo erit
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4.3} + \frac{3}{4.4.5} + \frac{3.5}{4.4.6.7} + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}$ &c. sive
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{224} + \frac{1}{2304}$ &c. in infinit.
Eadem series integrum Circulum exprimit,
si fuerit diameter = 1.

PROBLEMA LII.

Tab. I. 157. Dato sinu verso AQ; invenire
Fig. 7. arcum AP.

Sit $AQ = x$, diameter $AB = 1$, erit
 $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 part. I) & vi
Probl. præc. $Pp = dx : 2\sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2} dx$
 $(x - xx)^{-1/2}$. Cum adeo sit, in Theo-
remate generali (§. 99 part. I), $m = -1$,
 $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$; erit

$$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot x^{-1:2} \cdot -x = \frac{1}{2} x^{1:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{1:2} \cdot -x = \frac{3}{8} x^{3:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot x^{3:2} \cdot -x = \frac{5}{16} x^{5:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{16} \cdot x^{5:2} \cdot -x = \frac{7}{128} x^{7:2}$$

&c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2} dx : \sqrt{(x - xx)} = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$
 $+ \frac{1}{4} x^{1/2} dx + \frac{3}{4 \cdot 4} x^{3/2} dx + \frac{5}{4 \cdot 4 \cdot 6} x^{5/2} dx$
 $+ \frac{7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{7/2} dx$ &c. in infinitum,
cujus integrale $x^{1/2} + \frac{1}{2 \cdot 3} x^{3/2}$

$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^{5/2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^{7/2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} x^{9/2}$ Tab. I.
&c. in infinitum, seu $\sqrt{x} (1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x$ Fig. 7.
 $+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} x^4$ &c. in
infinitum) exprimit arcum AP, quia
 $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

PROBLEMA LIII.

158. Data tangente BK; invenire ar- Tab. II.
cum BM. Fig. 20.

Sit tangens $BK = x$, radius $BC = 1$,
erit $Mm = dx : (1 + x^2) = dx - x^2 dx$
 $+ x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10} dx$ &c.
in infinitum (§. 124). Hujus seriei sum-
ma $x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{11} x^{11}$
&c. in infinitum, dat arcum BM.

Cum tangens 45° sit radio æqualis
(§. 32 Trigon.), si pro x ponatur 1;
prodibit arcus 45° seu dimidius qua-
drans $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in
infinitum, quæ eadem series quadranti
satisfacit, si diameter = 1.

PROBLEMA LIV.

160. Dato arcu BM; invenire si-
num PM.

Sit sinus $PM = y$, radius $BC = 1$,
arcus $BM = v$; erit $v = y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40} y^5$
&c. in infinitum (§. 153). Valor ip-
sius y invenietur extrahendo radicem
ex $y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40} y^5$ &c. in infinitum.
Est nimirum in Theoremate generali
(§. 366 part. I) $a = 1$, $c = \frac{1}{6}$, $e = \frac{3}{40}$ &c.
adeoque

$$v : a = v$$

$$- acv^3 : a^5 = -\frac{1}{6} v^3$$

$$+ (3a^2c^2 - a^2e)v^5 : a^9 = (\frac{3}{36} - \frac{3}{40})v^5$$

$$= (\frac{1}{12} - \frac{3}{40})v^5$$

$$= \frac{40-36}{12 \cdot 40} v^5$$

$$= \frac{4}{12 \cdot 40} v^5 = \frac{1}{120} v^5$$

Hinc

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c. in infinitum $= \frac{1}{1}v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5$ &c. in infinitum: unde lex progressionis manifesta est. Nimirum $y = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c.

Quodsi Theorema generale supponere non libet, reperietur valor ipsius y eodem modo, quo (§. 366 part. I.) Theorema generale investigavimus. Sit nempe

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 + \&c.$$

$$y^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 + \&c. + 3a^2cv^7 + \&c.$$

$$y^5 = a^5v^5 + 5a^4bv^7 + \&c.$$

$$y^7 = a^7v^7 + \&c.$$

Habemus itaque

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \&c.$$

$$\frac{1}{6}y^3 = \frac{1}{6}a^3v^3 + \frac{1}{2}a^2bv^5 + \frac{1}{2}ab^2v^7 + \frac{1}{2}a^2cv^7 \&c.$$

$$\frac{3}{40}y^5 = \frac{3}{40}a^5v^5 + \frac{3}{8}a^4bv^7 + \&c.$$

$$\frac{5}{112}y^7 = \frac{5}{112}a^7v^7 + \&c.$$

$$-v = -v$$

$$\begin{array}{l} a - 1 = 0 \quad b + \frac{1}{6}a^3 = 0 \\ a = 1 \quad b = -\frac{1}{6} \end{array}$$

$$c + \frac{1}{2}a^2b + \frac{3}{40}a^5 = 0$$

$$\text{h.e. } v - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$$

$$c = \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = \frac{40 - 36}{12 \cdot 40} = \frac{1}{120}$$

$$d + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}a^2c + \frac{3}{8}a^4b + \frac{5}{112}a^7 = 0$$

$$\text{h.e. } d + \frac{1}{72} + \frac{1}{240} - \frac{1}{16} + \frac{5}{112} = 0$$

$$\text{feu } d + \frac{1}{5040} = 0$$

$$d = -\frac{1}{5040}$$

$$\text{Nimirum } \frac{1}{72} + \frac{1}{240} = \frac{13}{720}, \frac{13}{720} - \frac{1}{16} = -\frac{2}{45}$$

$$\text{tandem } \frac{1}{112} - \frac{2}{45} = \frac{1}{5040}.$$

Habemus itaque ut ante $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 - \frac{1}{5040}v^7$ &c. in infin.

PROBLEMA LV.

161. Dato arcu BM; invenire tangen- Tab.II.
tem BK. Fig.20.

Sit tangens = x , radius = 1, arcus = v ; erit (§. 158) $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in Problemate præcedente, reperitur $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c. (§. 366 part. I.).

Est nimirum, vi Theorematis generalis,

$$x = \frac{v}{a} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5 \&c.$$

Jam vero $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{3}, d = 0, e = \frac{1}{5}$, per legem comparationis, adeoque

$$\frac{ac}{a^5} = c = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} = 3c^2 - e = \frac{3}{9} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5 - 3}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Quare $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c.

Potest etiam valor ipsius x eodem modo inveniri, quo in Problemate præcedente.

Ponamus nempe $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. = 0; erit (§. 95 part. I.)

$$x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \&c.$$

$$+ 3a^2cv^7 \&c.$$

$$x^5 = a^5v^5 + 5a^4bv^7 \&c.$$

$$x^7 = a^7v^7 + \&c.$$

Habemus adeo, ob

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \&c. = v$$

Mmm 2

$$\begin{aligned}
 -v &= -v \\
 x &= av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.} \\
 -\frac{1}{3}x^3 &= -\frac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.} \\
 &\quad -a^2cv^7 \\
 +\frac{1}{5}x^5 &= +\frac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ \&c.} \\
 -\frac{1}{7}x^7 &= -\frac{1}{7}a^7v^7 \text{ \&c.}
 \end{aligned}$$

Quamobrem

$$\begin{aligned}
 a-1 &= 0 & b-\frac{1}{3}a^3 &= 0 & c-a^2b+\frac{1}{5}a^5 &= 0 \\
 a &= 1 & b &= \frac{1}{3} & c &= b-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\
 & & & & &= \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d-ab^2-a^2c+a^4b-\frac{1}{7}a^7 &= 0 \\
 d-\frac{1}{9}-\frac{2}{15}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{2}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945} \\
 &= \frac{51}{945} = \frac{17}{315}
 \end{aligned}$$

His ergo valoribus coefficientium a, b, c, d &c. in æquatione assumptitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. substitutis, prodit $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 + \frac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLIUM.

162. Me non monente apparet, si plures termini desiderentur, assumptitiam quoque ex pluribus constandam esse.

PROBLEMA LVI.

Tab.I. 163. Dato arcu AP; invenire sinum Fig. 7. versum AQ.

Quodsi formulam desideres, quam NEWTONUS dedit^(a); radius supponi debet 1. In formula superiori, quam pro arcu ex sinu verso eruimus (§. 157), diameter est 1. Quamobrem hæc prius eadem, qua supra usi sumus, methodo eruenda. Sit igitur AI=1, AQ=x, erit AB=2, PQ= $\sqrt{(2x-x^2)}$ & per demonstrata (§. 153)

$$PQ : PI = PO : Pp$$

$$\sqrt{(2x-x^2)} : 1 = dx : Pp$$

(a) In Epistola ad LEIBNITIIUM, qua legitur apud WALLISIUM Vol. III. Oper. f. 625.

consequenter $Pp = dx : \sqrt{(2x-x^2)} = dx(2x-x^2)^{-1/2}$ cumque sit (§. 99 part. I.)

$m = -1, n = 2, P = 2x, Q = -x^2 : 2x = -\frac{1}{2}x$, erit

$$P^{m:n} = (2x)^{-1/2} = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{2}} = A,$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{2}x = +\frac{x^{1/2}}{4\sqrt{2}} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x^{1/2}}{4\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{2}x = +\frac{3x^{3/2}}{32\sqrt{2}} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3x^{3/2}}{32\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{2}x = +\frac{5x^{5/2}}{128\sqrt{2}}$$

&c.

Est itaque $Pp = \frac{x^{-1/2}dx}{\sqrt{2}} + \frac{x^{1/2}dx}{4\sqrt{2}} + \frac{3x^{3/2}dx}{32\sqrt{2}} + \frac{5x^{5/2}dx}{128\sqrt{2}}$ &c.

adeoque arcus AP = $\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3/2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5/2}}{80\sqrt{2}} + \frac{5x^{7/2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

$$\text{Nam } \frac{x^{3/2}}{4\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2x^{3/2}}{3 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{x^{3/2}}{6\sqrt{2}}$$

$$\frac{3x^{5/2}}{32\sqrt{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{2 \cdot 3x^{5/2}}{5 \cdot 32\sqrt{2}} = \frac{3x^{5/2}}{80\sqrt{2}}$$

$$\frac{5x^{7/2}}{128\sqrt{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{2 \cdot 5x^{7/2}}{128 \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{5x^{7/2}}{448\sqrt{2}}$$

Sit jam AP=v,

$$\text{erit } v = \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3/2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5/2}}{80\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{5x^{7/2}}{448\sqrt{2}} \text{ \&c.}$$

adeoque

$$\begin{aligned}
 v^2 &= \frac{4x}{2} + \frac{4x^2}{2 \cdot 6} + \frac{x^3}{2 \cdot 36} \text{ \&c.} \\
 &\quad + \frac{4 \cdot 3x^3}{2 \cdot 80}
 \end{aligned}$$

$$\text{hoc est, } v^2 = 2x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{40}x^3$$

Ponatur

Ponatur

$$x = av^2 + bv^4 + cv^6 \text{ \&c.}$$

erit $x^2 = a^2v^4 + 2abv^6$

$$x^3 = + a^3v^6$$

adeoque

$$2x = 2av^2 + 2bv^4 + 2cv^6 \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{1}{3}x^2 = + \frac{1}{3}a^2v^4 + \frac{2}{3}abv^6$$

$$+ \frac{1}{72}x^3 = + \frac{1}{72}a^3v^6$$

$$+ \frac{1}{40}x^3 = + \frac{1}{40}a^3v^6$$

$$- v^2 = - v^2$$

Quamobrem

$$\frac{2a - 1 = 0}{2a = 1} \quad \frac{2b + \frac{1}{3}a^2 = 0}{2b = -\frac{1}{3}a^2}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{6}a^2 = -\frac{1}{6 \cdot 4} = -\frac{1}{24}$$

$$2c + \frac{2}{3}ab + \frac{1}{72}a^3 + \frac{1}{40}a^3 = 0$$

$$c = -\frac{1}{3}ab - \frac{1}{144}a^3 - \frac{1}{80}a^3$$

$$-\frac{1}{3}ab = +\frac{1}{144} = +\frac{8}{144 \cdot 8}$$

$$-\frac{1}{144}a^3 = -\frac{1}{144 \cdot 8}$$

$$-\frac{1}{3}ab - \frac{1}{144}a^3 = \frac{7}{144 \cdot 8} = \frac{7}{1152}$$

$$-\frac{3a^3}{80} = -\frac{3}{80 \cdot 8} = -\frac{3}{640}$$

$$c = \frac{4480 - 3456}{1152 \cdot 640} = \frac{1024}{1252 \cdot 640}$$

$$= \frac{16}{1152 \cdot 10} = \frac{1}{720}$$

Est igitur $x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{720}v^6 \text{ \&c.}$

Enimvero $2 = 1 \cdot 2, 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 720 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6.$ Quare $x = \frac{1}{1 \cdot 2}v^2$

$$- \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}v^4 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}v^6 \text{ \&c.}$$

Quodsi jam terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit

$$x = \frac{1}{1 \cdot 2}v^2 - \frac{1}{3 \cdot 4}Av^4 + \frac{1}{5 \cdot 6}Bv^6 - \frac{1}{7 \cdot 8}Cv^8 \text{ \&c. in infinitum.}$$

COROLLARIUM I.

164. Quoniam radius = 1, erit sinus complementi, seu cosinus arcus $v = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2}v^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}v^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}v^6 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}v^8 \text{ \&c.}$

COROLLARIUM II.

165. Si $1 - \frac{1}{1 \cdot 2}v^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}v^4$, sive $1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$ praxi satisfacit pro sinu complementi arcus, & cosinus iste dicatur c; erit $c = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$, consequenter $v = \sqrt{(6 + \sqrt{(24c + 12)})}$ (§. 143 part. 1).

PROBLEMA LVII.

166. Dato arcu BM; invenire se-Tab.II. cantem KC. Fig. 20.

Sit BC = 1, arcus = v, erit KB = $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 + \text{\&c.}$ (§. 161); adeoque $BC^2 = 1, KB^2 = v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^8 \text{ \&c.}$ consequenter (§. 417 Geom.) ob $\frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^8 = \frac{17}{45}v^6$, $KC^2 = 1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$ Quodsi inde radix vulgari modo extrahatur, prodit KC = $1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \frac{61}{720}v^6 \text{ \&c.}$ quem admodum typus exempli ostendit.

$$1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6 \text{ \&c.} (1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \text{\&c.})$$

$$\frac{1}{1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}}$$

$$+ v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$$

(2)

$$+ v^2 + \frac{1}{4}v^4$$

$$+ \frac{5}{12}v^4 + \frac{17}{45}v^6 \text{ \&c.}$$

$$(2 + v^2)$$

$$+ \frac{5}{12}v^4 + \frac{5}{24}v^6 \text{ \&c.}$$

$$+ \frac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$

$$(2 + v^2 + \frac{5}{12}v^4)$$

$$+ \frac{61}{360}v^6 \text{ \&c.}$$

$$\text{\&c. \&c.}$$

SCHOLIUM.

167. Seriem pro sinu & sinu verso ex arcu, atque pro arcu ex iisdem determinando invenit NEWTONUS (1); seriem pro tangente & secante ex arcu, atque arcu ex tangente determinando, JACOBUS GREGORIUS (m). Existimavit autem LEIBNITIUS series istas Trigonometriam canonicam ad quantamcunque exactitudinem in numeris a Tabularum necessitate liberare.

PROBLEMA LVIII.

Tab.I. 168. Rectificare Cycloidem.

Fig.7. Sit $AQ = x$, $AB = 1$, erit $Qq = MS = dx$, $PQ = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 part. 1) & hinc $AP = \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 417 Geom.), consequenter ob $\triangle APQ$ & MmS similitudinem supra demonstratam (§. 131)

$$AQ : AP = MS : Mm \\ x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2} dx$$

Est ergo Mm differentiale arcus cycloidici $AM = x^{-1:2} dx$. Unde $\int x^{-1:2} dx = 2x^{1:2} = 2AP$ est arcus AM , seu arcus Cycloidis AM est chordæ arcus circuli genitoris ipsi respondentis AP duplus.

PROBLEMA LIX.

Tab. IV. 169. Data chorda arcus AP ; invenire arcum cognominem, quem subtendit.

Fig.49. Sit $AB = 1$, $AP = x$: cum angulus APB sit rectus (§. 317 Geom.) erit $PB = \sqrt{(1 - x^2)}$ (§. 417 Geom.). Sit porro Ap ipsi AP infinite propinqua. Quoniam angulus $AQB = APB + PAp$ (§. 239 Geom.) & PAp , cujus mensura est $\frac{1}{2} Pp$ (§. 314 Geom.) infinite parvus; erit $AQB = APB$ (§. 4), consequenter rectus (§. 145 Geom.) Est igitur & $PQp = AQB$ (§. 156 Geom.) rectus (§. 145 Geom.) itidemque AQP

rectus (§. 65 Geom.) adeoque ipsi APQ Tab. æqualis (§. 145 Geom.) & hinc $AP = AQ$ IV. (§. 253, 89 Geom.); consequenter Qp Fig.49 differentiale chordæ AP (§. 6) = dx . Porro anguli PAB mensura est arcus dimidius PB & anguli QPp mensura $\frac{1}{2} pB$ (§. 314 Geom.): quare cum arcus PB & pB , ob infinite parvum Pp , sint æquales (§. 4), erit angulus $PAB = QPp$ (§. 141 Geom.). Habemus itaque (§. 267 Geom.)

$$PB : AB = pQ : Pp$$

$$\sqrt{(1 - x^2)} : 1 = dx : Pp$$

adeoque $Pp = dx : \sqrt{(1 - x^2)}$, & hinc porro arcus $AP = \int dx : \sqrt{(1 - x^2)}$. Eadem igitur formula satisfacit arcui AP ex chorda cognomine determinando, quam supra invenimus pro eodem ex sinu PM determinando (§. 153), nimirum arcus $AP = x + \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1.3}{2.4.5} x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} x^9$ &c. in infinitum.

Quodsi $PB = x$, erit $PQ = dx$ & $AP = \sqrt{(1 - x^2)}$, atque eodem profus modo reperitur arcus $PB = \int dx : \sqrt{(1 - x^2)}$, ut adeo eadem series satisfaciat utrique arcui AP & PB inveniendo.

PROBLEMA LX.

170. Data chorda arcus AP ; invenire segmentum circuli cognomine.

Sit diameter circuli $AB = 1$, chorda $AP = x$, erit, per demonstrata in Problemate præcedente, $PB = \sqrt{(1 - x^2)}$ & $pQ = dx$, nec non $\triangle APB \sim \triangle PQp$: erit etiam (§. 267 Geom.)

$$PB : AP = pQ : PQ$$

$$\sqrt{(1 - x^2)} : x = dx : PQ$$

adeo-

(1) Vide *Commercium epistolicum* D. Joh. COLINS p. 40. 52.

(m) *Ibidem* p. 45.

Tab. IV. adeoque $PQ = xdx : \sqrt{(1-x^2)}$, con-
 sequenter cum PQ haberi possit pro
 Fig. 49. arcu infinite parvo ex centro A radio
 AP descripto (§. 38), adeoque APQ
 pro sectore circulari, erit $APQ =$
 $x^2 dx : 2\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 435 *Geom.*) $= \frac{1}{2} x^2 dx$
 $(1-x^2)^{-1/2}$.

Est vero $(1-x^2)^{-1/2}$ seu $1:\sqrt{(1-x^2)}$
 $= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8$
 &c. (§. 153), adeoque

$$APQ = \frac{1}{2}x^2 dx (1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}x^2 dx$$

$$+ \frac{1}{4}x^4 dx + \frac{1.3}{4.4}x^6 dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^8 dx$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{10} dx \text{ \&c. in infinit.}$$

Ergo segmentum circuli $AP =$

$$\frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1.3}{4.4.7}x^7 + \frac{1.3.5}{4.4.6.9}x^9$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.11}x^{11} \text{ \&c. in infinitum.}$$

PROBLEMA LXI.

171. Dato arcu AP ; invenire chor-
 dam cognominem.

Sit diameter circuli $AB = 1$, $AP = x$,
 erit arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5$
 $+ \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. (§. 169). Dicatur
 idem arcus v , erit $v = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5$
 $+ \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. adeoque $AP = x = v$
 $- \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7$
 $+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c. in infinitum,
 ut supra (§. 160).

Quodsi diameter dicatur d , non 1 , Tab.
 reperietur arcus $AP = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3$ IV.
 Fig. 49.

$$+ \frac{1.3}{2.4.5d^4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}x^7 \text{ \&c. \& vicif-}$$

sim chorda $AP = v - \frac{1}{1.2.3d^2}v^3$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5d^4}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7d^6}v^7$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9d^8}v^9 \text{ \&c. id quod}$$

calculos superiores repetenti apparet.

PROBLEMA LXII.

172. Rectificare arcum Ellipsis GM . Tab. I.
 Sit $CG = c$, $AC = a$, $PC = x$, PM Fig. 10.

$$= y, \text{ erit (§. 432 part. I)}$$

$$a^2 y^2 = a^2 c^2 - c^2 x^2$$

$$2a^2 y dy = -2c^2 x dx$$

$$a^4 y^2 dy^2 = c^4 x^2 dx^2$$

$$dy^2 = \frac{c^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2} = \frac{c^4 x^2 dx^2}{a^4 c^2 - a^2 c^2 x^2} = \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^4 - a^2 x^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^4 - a^2 x^2}$$

$$= \frac{a^4 dx^2 - a^2 x^2 dx^2 + c^2 x^2 dx^2}{a^4 - a^2 x^2}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2 x^2)}}$$

$$= \frac{dx \sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Ut elementum hoc integrabile reddat-
 tur, tam numerator $\sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}$,
 quam denominator $a \sqrt{(a^2 - x^2)}$,
 resolvendus est in seriem & series prior
 per posteriorem dividenda eo modo,
 quem mox subjiciemus. Est itaque
 (§. 99 part. 1.), in casu primo,
 $m = 1, n = 2, P = a^4, Q = -(a^2 - x^2)x^2 : a^4$
 Fiat

Fiat $a^2 - c^2 = b^2$ ob commoditatem calculi, erit $Q = -\frac{b^2 x^2}{a^4}$.

Unde porro obtinetur

$$P^{m:n} = a^2 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{b^2 x^2}{a^4} = \frac{b^2 x^2}{2a^2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{b^2 x^2}{2a^2} \cdot \frac{b^2 x^2}{a^4} = -\frac{b^4 x^4}{8a^6} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{8} \cdot \frac{b^4 x^4}{8a^6} \cdot \frac{b^2 x^2}{a^4} = -\frac{b^6 x^6}{16a^{10}} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{b^6 x^6}{16a^{10}} \cdot \frac{b^2 x^2}{a^4} = -\frac{5b^8 x^8}{128a^{14}} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)} = \sqrt{(a^2 - a^2 x^2 + c^2 x^2)} = a^2 - \frac{b^2 x^2}{2a^2} - \frac{b^4 x^4}{8a^6} - \frac{b^6 x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8 x^8}{128a^{14}} \text{ \&c. in infinitum} = K$

Enimvero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ \&c. in infin. (§. 126).}$

Quare $a \sqrt{(a^2 - x^2)} = a^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6} \text{ \&c. in infin.} = L.$

Seriem adeo primam K per alteram L divisurus probe observare debes omnes terminos in divisione emergentes, in quibus x ad eandem dimensionem assurgit, haberi pro uno, cum pro coefficientibus omnibus simul sumtis substitui possit unus, qualis etiam in casu singulari revera prodiret, ubi a & b in numeris dantur, si fractiones ad eandem denominationem reductæ in unam summam colligerentur. Quamobrem terminus unusquisque dividendæ dividitur per a², quotcunque partibus fuerit auctus in ipso divisionis actu, & integra series dividens ducitur in quotum atque a dividenda subtrahitur, quemadmodum in communi divisione fieri solet: id quod ex typo exempli subjecti attento lectori obvium.

	A.	B.	C.	D.	E.
K = a²	$\frac{b^2 x^2}{2a^2}$	$\frac{b^4 x^4}{8a^6}$	$\frac{b^6 x^6}{16a^{10}}$	$\frac{5b^8 x^8}{128a^{14}}$	
L = a²	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{x^4}{8a^2}$	$-\frac{x^6}{16a^4}$	$-\frac{5x^8}{128a^6}$	
Resid. I.	$\frac{b^2 x^2}{2a^2}$	$\frac{b^4 x^4}{8a^6}$	$\frac{b^6 x^6}{16a^{10}}$	$\frac{5b^8 x^8}{128a^{14}}$	
	$+\frac{1}{2}x^2$	$+\frac{x^4}{8a^2}$	$+\frac{x^6}{16a^4}$	$+\frac{5x^8}{128a^6}$	
L.B =	$\frac{b^2 x^2}{2a^2}$	$\frac{b^4 x^4}{4a^4}$	$\frac{b^6 x^6}{16a^6}$	$\frac{b^8 x^8}{32a^8}$	
	$+\frac{1}{2}x^2$	$\frac{x^4}{4a^2}$	$\frac{x^6}{16a^4}$	$\frac{x^8}{32a^6}$	
					$+\frac{5b^8 x^8}{128a^8}$
					Resid.

Resid. II.

$$\begin{array}{r} \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \\ \frac{b^2x^4}{4a^4} - \frac{b^2x^6}{16a^6} - \frac{32a^8}{9x^8} \\ + \frac{3x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{9x^8}{128a^6} \end{array}$$

L. C =

$$\begin{array}{r} - \frac{b^4x^4}{8a^6} + \frac{b^4x^4}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{64a^{10}} \\ - \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{8a^6} + \frac{32a^8}{3x^8} \\ + \frac{3x^4}{8a^2} - \frac{3x^6}{16a^4} - \frac{3x^8}{64a^6} \end{array}$$

Resid. III. =

$$\begin{array}{r} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \\ \frac{b^4x^6}{16a^8} - \frac{64a^{10}}{b^4x^8} \\ - \frac{3b^2x^6}{16a^6} - \frac{16a^8}{b^2x^8} \\ + \frac{5x^6}{16a^4} + \frac{15x^8}{128a^6} \end{array}$$

L. D =

$$\begin{array}{r} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} + \frac{b^6x^8}{32a^{12}} \\ \frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{32a^{10}} \\ - \frac{3b^2x^6}{16a^6} + \frac{3b^2x^8}{32a^8} \\ + \frac{5x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{32a^6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \\ - \frac{b^6x^8}{32a^{12}} \\ - \frac{3b^4x^8}{64a^{10}} \\ - \frac{5b^2x^8}{32a^8} \\ + \frac{35x^8}{128a^6} \\ \&c. \&c. \end{array}$$

Substituatur jam valor ipsius *b*. Quoniam

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$$

$$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$$

$$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$$

crit

$$\frac{b^2x^2}{2a^4} = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$

$$+ \frac{x^2}{2a^2} = + \frac{x^2}{2a^2}$$

$$B = + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$

$$\frac{b^4x^4}{8a^8} = \frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

$$\frac{b^2x^4}{4a^6} = \frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$

$$+ \frac{3x^4}{8a^4} = + \frac{3x^4}{8a^4}$$

$$C = + \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

$$\frac{b^6x^6}{16a^{12}} = \frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

$$\frac{b^4x^6}{16a^{10}} = \frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$

$$\frac{3b^2x^6}{16a^8} = \frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$

$$+ \frac{5x^6}{16a^6} = + \frac{5x^6}{16a^6}$$

$$D = + \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{4c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

$$\frac{5b^8x^8}{128a^{16}} = \frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}}$$

$$+ \frac{5c^6x^8}{32a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

$$\frac{b^6x^8}{32a^{14}} = \frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32a^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$

$$\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = \frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$

$$\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = \frac{5x^8}{32a^8} - \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$

$$+ \frac{35x^8}{128a^8} = + \frac{35x^8}{128a^8}$$

$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Habemus itaque

$$A = 1$$

$$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$$

$$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

$$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Quamobrem prolixo satis calculo, quem tamen distincte hic explicari consultum fuit, ut sit exemplar in casibus similibus, tandem reperitur

$$\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$

$$1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \&c. - \frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Est

Tab. I. Est igitur elementum arcus
Fig. 10.

$$\frac{dx \sqrt{(a^2 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a \sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} + \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}}$$

$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{8a^{12}}{3c^4x^8dx}$$

$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$

$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

&c. in infinitum.

Tandem adeo arcus GM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \&c.$$

$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$

$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$

$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodsi terminorum homogeneorum
coëfficientes reducās ad eandem deno-
minationem; erit GM = $x + \frac{c^2x^3}{6a^4}$

$$+ \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 - 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7$$

$$+ \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 + 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$$

COROLLARIUM I.

173. Quodsi ponamus esse GC: AC = 1:m
adeoque AC = mc; erit GM = $x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 + \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 - 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7$

$$+ \frac{64m^6 - 48m^4 + 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9 \&c.$$

Quare si species Ellipsis in casu dato deter-
minetur, hoc est, m per numerum deter-

minatum explicetur; prodibit series multo Tab. I.
x simplicior. Sit enim m = 2, erit GM = Fig. 10.

$$x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7$$

$$+ \frac{3419}{75497472c^8}x^9 \&c.$$

COROLLARIUM II.

174. Quodsi c = a, Ellipsis degenerat
in Circulum & series pro Circulo evadit

$$x + \frac{x}{6a^2} + \frac{3x^3}{40a^4} + \frac{5x^5}{112a^6} + \frac{35x^7}{1152a^8} \&c.$$

hoc est, si a = 1, series = $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$
 $+ \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \&c.$ prorsus ut supra
(§. 153).

PROBLEMA LXIII.

175. Rectificare arcum Hyperbolæ Tab. II.
AM. Fig. 24.

Sit BC = AC = c, CQ = PM = x,
dimidius axis conjugatus = a, CP = y,
erit BP = y + c, AP = y - c

$$AP. PB = y^2 - c^2$$

Quare (§. 469 part. I)

$$\frac{a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2}{a^2 y^2 - a^2 c^2 = c^2 x^2}$$

$$\frac{a^2 y^2 = a^2 c^2 + c^2 x^2}{2a^2 y dy = 2c^2 x dx}$$

$$\frac{a^2 y^2 dy^2 = c^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2 dy^2 + a^2 c^2 x^2 dy^2 = c^4 x^2 dx^2}$$

$$\frac{a^4 dy^2 + a^2 x^2 dy^2 = c^2 x^2 dx^2}{dy^2 = \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^4 + a^2 x^2}}$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^4 + a^2 x^2}$$

$$= \frac{a^4 dx^2 + a^2 x^2 dx^2 + c^2 x^2 dx^2}{a^4 + a^2 x^2}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx \sqrt{(a^4 + a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

Tab.II. Elementum hoc nonnisi signis differt Fig.24. ab elemento Ellipsis (§.172). Quamobrem, eodem profus modo quo in Problemate precedente, reperitur elementum arcus Mm =

$$dx + \frac{c^2 x^2 dx}{2a^4} - \frac{c^2 x^4 dx}{2a^6} + \frac{c^2 x^6 dx}{2a^8} - \frac{c^2 x^8 dx}{2a^{10}} \&c.$$

$$- \frac{c^4 x^4 dx}{8a^8} + \frac{c^4 x^6 dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4 x^8 dx}{8a^{12}}$$

$$+ \frac{c^6 x^6 dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6 x^8 dx}{16a^{14}}$$

$$- \frac{5c^8 x^8 dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus AM =

$$x + \frac{c^2 x^3}{6a^4} - \frac{c^2 x^5}{10a^6} + \frac{c^2 x^7}{14a^8} - \frac{c^2 x^9}{18a^{10}} \&c.$$

$$- \frac{c^4 x^5}{40a^8} + \frac{c^4 x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4 x^9}{24a^{12}}$$

$$+ \frac{c^6 x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6 x^9}{48a^{14}}$$

$$- \frac{5c^8 x^9}{1152a^{16}}$$

hoc est, reductione coefficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2 x^3}{6a^4} - \frac{4a^2 c^2 + c^4}{40a^8} x^5 + \frac{8a^4 c^2 + 4a^2 c^4 + c^6}{112a^{12}} x^7 - \frac{64a^6 c^2 + 48a^4 c^4 + 24a^2 c^6 + 5c^8}{1152a^{16}} x^9 \&c.$

Quodsi denuo Hyperbolæ axes ponantur inter se ut 1 ad m , hoc est, si sit $a = mc$, reperietur arcus AM = $x + \frac{1}{6m^4 c^2} x^3 - \frac{4m^2 + 1}{40m^8 c^4} x^5 + \frac{8m^4 + 4m^2 + 1}{112m^{12} c^6} x^7 - \frac{64m^6 + 48m^4 + 24m^2 + 5}{1152m^{16} c^8} x^9 \&c.$

Et si species Hyperbolæ determinetur, explicando m per numerum de-

terminatum 2, erit AM = $x + \frac{1}{96c^2} x^3 - \frac{17}{1024c^4} x^5 + \frac{145}{458752c^6} x^7 - \frac{4965}{75497472c^8} x^9$ &c. Tab.II. Fig.24.

Series adeo pro arcu hyperbolico à serie pro arcu elliptico non differt nisi signis, in formula generali.

COROLLARIUM.

176. Si Hyperbola fuerit æquilatera erit $c = a$, & series pro arcu AM multo simplicior evadit. Est nempe = $x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{5x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{141x^9}{1152a^8}$ &c.

PROBLEMA LXVI.

177. Rectificare Logarithmicam. Tab.I. Fig.8. Sit curvæ subtangens = a , PM = y , Pp = dx , erit (§.54)

$$\frac{y dx}{dy} = a$$

$$y dx = a dy$$

$$dx = \frac{a dy}{y}$$

$$dx^2 = \frac{a^2 dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2} + 1\right)}$$

Ut elementum hoc mM integrabile redatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda est radix. Erit itaque, in Theoremate generali (§.99 part.1)

$$m = 1$$

Tab. I.
Fig. 8.

$$m=1, n=2, P=\frac{a^2}{y^2}, Q=1; \frac{a^2}{y^2}=\frac{y^2}{a^2}$$

$$P^{m:n}=\frac{a}{y}=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{y}\cdot\frac{y^2}{a^2}=\frac{y}{2a}=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}\cdot\frac{y}{2a}\cdot\frac{y^2}{a^2}=-\frac{y^3}{8a^3}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{1}{6}\cdot-\frac{y^3}{8a^3}\cdot\frac{y^2}{a^2}=\frac{y^5}{16a^5}=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}\cdot\frac{y^5}{16a^5}\cdot\frac{y^2}{a^2}=-\frac{5y^7}{128a^7} \&c.$$

Est itaque $\sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right)}=\frac{a}{y}+\frac{y}{2a}-\frac{y^3}{8a^3}+\frac{y^5}{16a^5}-\frac{5y^7}{128a^7} \&c.$ in infinitum.

Eadem series prodit, si ex $\sqrt{(a^2+y^2)}$ extrahatur radix (§. cit.) & quæ provenit, $a+\frac{y^2}{2a}-\frac{y^4}{8a^3}+\frac{y^6}{16a^5}-\frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y . Habemus itaque elementum Mm arcus interminati MI = $\frac{a}{y}dy+\frac{y}{2a}dy-\frac{y^3}{8a^3}dy+\frac{y^5}{16a^5}dy-\frac{5y^7}{128a^7}dy \&c.$

Quare arcus MI = $\int \frac{ady}{y} + \frac{y^2}{4a} - \frac{y^4}{32a^3} + \frac{y^6}{96a^5} - \frac{5y^8}{1024a^7} \&c.$

Ponatur SQ = z , erit arcus interminatus SI = $\int \frac{adz}{z} + \frac{z^2}{4a} - \frac{z^4}{32a^3} + \frac{z^6}{96a^5} - \frac{5z^8}{1024a^7} \&c.$

Est igitur arcus MS = $\int \frac{ady}{y} - \int \frac{adz}{z} + \frac{y^2-z^2}{4a} - \frac{y^4-z^4}{32a^3} + \frac{y^6-z^6}{96a^5} - \frac{5y^8-5z^8}{1024a^7} \&c.$

$\int \frac{ady}{y} - \int \frac{adz}{z}$ est spatium hyperbo-

licum asymptoticum inter duas $a^2 : y$ & $a^2 : z$ comprehensum, & per a divisum (§. 118).

Est autem a latus potentia Hyperbolæ, y & z sunt abscissæ in asymptoto sumtæ (§. 488 part. 1). Pendet adeo rectificatio curvæ Logarithmica a quadratura Hyperbolæ, quæ per series infinitas in superioribus data (§. 120).

Potest etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni potest $P=1$, $Q=\frac{a^2}{y^2}=a^2y^{-2}$. Quare cum sit ut ante $m=1, n=2$; erit

$$P^{m:n}=1=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a^2y^{-2}=\frac{1}{2}a^2y^{-2}=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}a^2y^{-2}\cdot a^2y^{-2}=-\frac{1}{8}a^4y^{-4}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{1}{6}\cdot-\frac{1}{8}a^4y^{-4}\cdot a^2y^{-2}=\frac{1}{16}a^6y^{-6}=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{16}a^6y^{-6}\cdot a^2y^{-2}=-\frac{5}{128}a^8y^{-8} \&c.$$

Est igitur elementum curvæ $dy + \frac{1}{2}a^2y^{-2}dy - \frac{1}{8}a^4y^{-4}dy + \frac{1}{16}a^6y^{-6}dy - \frac{5}{128}a^8y^{-8}dy \&c.$ in infinitum.

Quare longitudo curvæ = $y - \frac{1}{2}a^2y^{-1} + \frac{1}{24}a^4y^{-3} - \frac{1}{864}a^6y^{-5} + \frac{5}{896}a^8y^{-7} \&c. = y - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^6}{864y^5} + \frac{5a^8}{896y^7} \&c.$

Sit jam alia semiordinata SQ = z , erit longitudo curvæ = $z - \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{864z^5} + \frac{5a^8}{896z^7} \&c.$

Nnn 3 Ergo

Ergo arcus inter semiordinatas y
& z interceptus $MS = y - z - \frac{a^2}{2y}$
 $+ \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5}$
 $+ \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{896z^7} \&c.$

COROLLARIUM.

178. Quoniam series istæ satisfaciunt quæ-
sito, quatenus convergunt, & termini con-
tinuo minores fiunt (§. 53 part. 1), in Lo-
garithmica autem y continuo fit minor, ita
ut tandem infra subtangentem a decrescat;
serie prima utendum est, si $a > y$; poste-
riori autem si $y > a$.

PROBLEMA LXV.

179. Rectificare Hyperbolam ex equa-
tione ad Hyperbolam intra asymptotos.

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488 part. 1),

erit $y = a^2 : x = a^2 x^{-1}$

$$dy = -a^2 x^{-2} dx$$

$$dy^2 = a^4 x^{-4} dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4 x^{-4} dx^2$$

$$\sqrt{dy^2 + dx^2} = dx \sqrt{1 + a^4 x^{-4}}$$

Elementum hoc arcus Hyperbolici non
multum differt ab elemento arcus Lo-
garithmicæ (§. 177).

Vi Theorematis generalis (§. 99
part. 1)

$$m=1, n=2, P=1, Q=a^4 x^{-4}$$

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a^4 x^{-4} = \frac{1}{2} a^4 x^{-4} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} a^4 x^{-4} \cdot a^4 x^{-4} =$$

$$\frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} \cdot a^4 x^{-4} =$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} \cdot a^4 x^{-4}$$

$$= -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{16} x^{-16} \&c.$$

Est igitur elementum curvæ $dx +$

$$\frac{1}{2} a^4 x^{-4} dx - \frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} dx + \frac{1.3}{2.4.6} a^{12}$$

$$x^{-12} dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{16} x^{-16} dx, \&c. \text{ con-}$$

sequenter longitudo curvæ = $x -$

$$\frac{1}{2.3} a^4 x^{-3} + \frac{1}{2.4.7} a^8 x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11} a^{12}$$

$$x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15} a^{16} x^{-15} \&c. = x$$

$$- \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3 a^{12}}{2.4.6.11x^{11}}$$

$$+ \frac{1.3.5 a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}} \&c. \text{ in infinitum.}$$

Quodsi alia abscissa fit z ; erit lon-

$$\text{gitudo curvæ } z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7}$$

$$- \frac{1.3 a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5 a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}} \&c.$$

Arcus igitur inter semiordinatas ab-
scissis x & z respondentes interceptus

$$= x - z - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{a^8}{2.4.7z^7}$$

$$- \frac{1.3 a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3 a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5 a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$$

$$- \frac{1.3.5 a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}} \&c. \text{ in infinitum.}$$

Eadem profus series prodit, si in
elemento curvæ generali $\sqrt{dx^2 + dy^2}$
substituatur valor ipsius dx^2 , ut ele-
mentum curvæ speciale evadat $dy \sqrt{1 + a^4 y^{-4}}$. Enimvero cum y continuo
decreseat, nec unquam sit major late-
re potentia a ; series hæc altera parum
convergit.

Quod-

Quodsi a dicatur 1, erit series pro ar-
 cu intercepto $x - z - \frac{1}{2.3x^3} + \frac{1}{2.3z^3}$
 $+ \frac{1}{2.4.7x^7} - \frac{1}{2.4.7z^7} + \frac{1.3.}{2.4.6.11x^{11}}$
 $+ \frac{1.3}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15x^{15}}$
 $- \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z$
 $- \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}}$
 $+ \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920x^{15}} - \frac{5}{1920z^{15}}$
 &c. in infinitum.

PROBLEMA LXVI.

180. Data area Hyperbolæ intra asymp-
 totos; invenire abscissam eidem respon-
 dentem.

Sit area Hyperbolæ $= t$, abscissa a
 fine lateris potentia Hyperbolæ com-
 putata $= x$, erit (§. 120)

$$t = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

$$\text{Fiat } x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.}$$

$$\text{erit } x^2 = + a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4$$

$$+ 2act^4$$

$$x^3 = + a^3t^3 + 3a^2bt^4$$

$$x^4 = + a^4t^4$$

adeoque

$$x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.}$$

$$- \frac{1}{2}x^2 = - \frac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \frac{1}{2}b^2t^4$$

$$- act^4$$

$$+ \frac{1}{3}x^3 = + \frac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4$$

$$- \frac{1}{4}x^4 = - \frac{1}{4}a^4t^4$$

$$- t = - t$$

Habemus itaque

$$a - 1 = 0 \quad b - \frac{1}{2}a^2 = 0$$

$$a = 1 \quad b = \frac{1}{2}$$

$$c - ab + \frac{1}{3}a^3 = 0$$

$$\text{h. e. } c - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$$

$$c = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$d - \frac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \frac{1}{4}a^4 = 0$$

$$\text{h. e. } d - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$d = \frac{14}{48} - \frac{1}{4} = \frac{7}{24} - \frac{6}{24} = \frac{1}{24}$$

Est igitur $x = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$ &c.

$$= \frac{1}{1}t + \frac{1}{1.2}t^2 + \frac{1}{1.2.3}t^3 + \frac{1}{1.2.3.4}t^4 +$$

$\frac{1}{1.2.3.4.5}t^5$ &c. in infinitum. Quodsi

terminus primus dicatur A, secundus B,
 tertius C, quartus D &c. erit $x = t +$
 $\frac{1}{2}At + \frac{1}{3}Bt + \frac{1}{4}Ct + \frac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

181. Eodem prorsus modo in aliis casibus
 inveniri potest basis, si figura area datur per
 seriem infinitam, ut pluribus exemplis non sit
 opus.

PROBLEMA LXVII.

182. Quadrare Cycloidem, ex suppo-
 sita arcus Circuli rectificatione vi sinus
 versi.

In Cycloide est arcus AP = PM (§. Tab.I.
 575 part.1). Jam si AQ = x, arcus AP, Fig.7.
 (§. 157) consequenter

$$PM = x^{1:2} + \frac{1}{6}x^{3:2} + \frac{1}{40}x^{5:2} + \frac{1}{112}x^{7:2} \text{ \&c.}$$

$$PQ = x^{1:2} - \frac{1}{2}x^{3:2} - \frac{1}{8}x^{5:2} - \frac{1}{16}x^{7:2} \text{ (§. 124)}$$

$$QM = 2x^{1:2} - \frac{1}{3}x^{3:2} - \frac{1}{20}x^{5:2} - \frac{1}{56}x^{7:2}$$

$$\text{Quare elementum } QMmq = 2x^{1:2}dx$$

$$- \frac{1}{3}x^{3:2}dx - \frac{1}{20}x^{5:2}dx - \frac{1}{56}x^{7:2}dx$$

&c. prorsus ut supra (§. 131).

SCHO-

S C H O L I O N.

183. *Methodo hac quadrandi Cycloidem usus est NEWTONUS (a): quam ideo superiori addidimus, ut appareat, quomodo subinde quadratura curvarum ex aliarum rectificationibus deducantur. Etenim pro Circulo substitui possunt curvæ aliæ, quarum arcui AP æqualis est PM. Dari etiam possunt exempla, in quibus arcus datur non per abscissam, ut in exemplo presente, sed per semiordinatam, veluti si AP sit Parabola (§. 146).*

P R O B L E M A L X V I I I.

184. *Data chorda arcus cujuscunque invenire chordam arcus alterius, qui sit ad illum in ratione data.*

Sit diameter circuli = d

chorda arcus dati = a

ratio arcuum = $1 : n$

chorda arcus quæsitæ = x

erit (§. 169).

$$\text{arcus datus} = a + \frac{1}{2.3d^2} a^3 + \frac{1.3a^5}{2.4.5d^4}$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6} a^7 \&c = a + \frac{1}{2.3d^2} a^3 +$$

$$x = ha + ia^3 + \frac{1}{2.3d^2} x^3 = \frac{1}{2.3d^2} h^3 a^3$$

$$+ \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 =$$

$$+ \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7 =$$

&c &c

$$- A = - na - \frac{n}{2.3d^2} a^3 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} a^5 - \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7 \&c;$$

(a) In *Analyti per aequationes numero terminorum infinitas*, p. 18.

$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4} a^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7 \&c.$$

$$\text{arcus quæsitus} = x + \frac{1}{2.3d^2} x^3 +$$

$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7 \&c.$$

Quoniam arcus datus ad quæsitum ut 1 ad n ; erit (§. 297 *Arithm.*)

$$na + \frac{n}{2.3d^2} a^3 + \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} a^5 +$$

$$\frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7 \&c. = x + \frac{1}{2.3d^2} x^3 +$$

$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7 \&c.$$

consequenter si prima series sit = A altera B, erit B - A = 0.

Fiat

$$x = ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \&c.$$

$$x^3 = + h^3 a^3 + 3h^2 ia^5 + 3h^2 ka^7$$

$$+ 3hi^2 a^7$$

$$x^5 = + h^5 a^5 + 5h^4 ia^7$$

$$x^7 = + h^7 a^7$$

adeoque

$$+ ka^5 + la^7 \&c.$$

$$+ \frac{1}{2d^2} h^3 ia^5 + \frac{1}{2d^2} h^2 ka^7 \&c.$$

$$+ \frac{1}{2d^2} hi^2 a^7 \&c.$$

$$+ \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} h^5 a^5 + \frac{3.3}{2.3.4d^4} h^4 ia^7 \&c.$$

$$+ \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} h^7 a^7 \&c.$$

&c

Habemus

Habemus itaque

$$\frac{b - n = 0}{b = n}$$

$$i + \frac{1}{2 \cdot 3 d^2} b^3 - \frac{n}{2 \cdot 3 d^2} = 0$$

$$i = \frac{n - n^3}{2 \cdot 3 d^2} = \frac{n \cdot (1 - n^2)}{2 \cdot 3 d^2}$$

$$k + \frac{1}{2 d^2} b^2 i + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} b^5 - \frac{3 \cdot 3 n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} = 0$$

$$k = \frac{3 \cdot 3 n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} - \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} b^5 - \frac{1}{2 d^2} b^2 i$$

Est vero

$$b^5 = n^5 \quad b^2 = n^2$$

$$\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} b^5 = \frac{9 n^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4}$$

$$i = \frac{n - n^3}{2 \cdot 3 d^2}$$

$$b^2 i = \frac{n^3 - n^5}{2 \cdot 3 d^2}$$

$$\frac{1 b^2 i}{2 d^2} = \frac{n^3 - n^5}{3 \cdot 4 d^4}$$

$$= \frac{10 n^3 - 10 n^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n - 9n^5 - 10n^3 + 10n^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} = \frac{9n - 10n^3 + 10n^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} = \frac{n \cdot (1 - n^2) \cdot (9 - n^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4}$$

Eodem modo reperitur $l = \frac{n \cdot (1 - n^2) \cdot (9 - n^2) \cdot (25 - n^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 d^6}$

Est igitur chorda arcus quaesiti =

$$na + \frac{n \cdot (1 - n^2) a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 d^2} + \frac{n \cdot (1 - n^2) \cdot (9 - n^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 d^4} a^5 + \frac{n \cdot (1 - n^2) \cdot (9 - n^2) \cdot (25 - n^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 d^6} a^7 \text{ \&c. in infinitum.}$$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

SCHOLIUM.

185. Cum sinus sit arcus dupli subtensa dimidia (§. 2 Trigon.); formula praesens sinus computandis inservit.

PROBLEMA LXIX.

186. Quadrare sectorem Ellipsis DCM.

Ducatur Cm ex centro C ipsi CM Tab. infinite propinqua, & ex eodem centro IV. C radio CM describatur arcus MN, Fig. 50. erit angulus ad N rectus (§. 38), & sector infinite parvus CMN = MN. $\frac{1}{2}$ CM (§. 435 Geom.). Est vero $Mm^2 - Nm^2 = MN^2$ (§. 417 Geom.)

Sit jam AC = a, parameter = b, PC = x, PM = y erit AP = a - x PB = a + x

$$AP \cdot PB = a^2 - x^2$$

consequenter (§. 420 part. I)

$$b : AB = PM^2 : AP \cdot PB$$

$$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 b - b x^2}{2a} = \frac{2a^2 b - 2abx^2}{4a^2}$$

Porro CP² = x²

$$PM^2 = \frac{2a^2 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^2 b - 2abx^2}{4a^2} = \frac{4a^2 x^2 + 2a^2 b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a} \sqrt{(4a^2 x^2 + 2a^2 b - 2abx^2)} = \frac{1}{2a} (4a^2 x^2 + 2a^2 b - 2abx^2)^{1/2}$$

Ooo

Nm

Tab. IV. Fig. 50.

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^2b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^2b}$$

$$\text{Jam } Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2} \text{ (§.172)}$$

Est vero $c = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 part. 1)

$$\begin{aligned} \text{Ergo } Mm^2 &= \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2} \\ &= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2} \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$\begin{aligned} NM^2 &= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \\ &\quad - \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^2b} \end{aligned}$$

Quodsi jam partes has ipsius NM^2 reducas ad eandem denominationem, probabit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^2b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^3x^2 + 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

$$\text{Quare } NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^2b)}$$

$$\text{adeoque } NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^2b)}}$$

$$\begin{aligned} \text{Jam cum fit } \frac{1}{2}CM &= \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^2b)}; \text{ erit tandem elementum} \\ \text{sectoris CMN} &= \frac{a^2bdx}{2\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}} \\ &= \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{2ab}\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}}. \end{aligned}$$

Est vero $\sqrt{2ab} = 2c$. Ergo CMN Tab. IV.

$$= \frac{2acdxdx}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{acdxdx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}; \text{ confe- Fig. 50.} \\ \text{quenter sector BCM} = \frac{1}{2}c \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Enimvero $\int \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ est elementum arcus circuli LE radio CA descripti, cujus sinus est PC (§. 153). Quare cum in superioribus hunc arcum quadrare docuimus, non alia re opus est, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$, five quartam partem axis minoris CD, ut prodeat sector ellipticus DCM.

COROLLARIUM.

187. Quodsi fiat $c = a$, hoc est CD = CE, Ellipsis degenerat in circulum, & formula pro sectore DCM degenerat in

$$\frac{1}{2}a \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{2}CE \cdot LE, \text{ adeoque sector ellipticus DCM in sectorem circuli ECL (§. 435 Geom.). Est itaque}$$

$$\begin{aligned} \text{DCM : ECL} &= \frac{1}{2}c \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} : \frac{1}{2}a \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \\ &= c : a \quad (\text{§. 124 part. 1}) \\ &= CD : EL \end{aligned}$$

hoc est, sector ellipticus DCM est ad sectorem circuli circa axem majorem descripti, sinu arcuum PC utrobique existente eodem, ut axis minor ad majorem.

SCHOLIUM.

188. Pendet adeo quadratura sectoris elliptici à quadratura sectoris circuli.

PROBLEMA LXX.

189. Quadrare sectorem hyperbolicum CAM, radio CM ex centro C ducto.

Intelligatur radius Cm ipsi CM infinite propinquus, & radio CM descriptur Tab. IV. Fig. 51.

Tab. IV. Fig. 51. batur arcus Circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}CM$. MN sector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*), seu elementum sectoris hyperbolici quadrandi CAM.

Sit jam $PC = x$

$AC = CB = a$ crit $AP = x - a$

Parameter $= b$ $PB = x + a$

$$AP \cdot PB = x^2 - a^2$$

adeoque (§. 459 *part. 1*)

$$AB : b = AP : PM^2$$

$$2a : b = x^2 - a^2 : PM^2$$

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$CP^2 = x^2$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a} \sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$= \frac{1}{2a} (4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1/2}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$\text{Jam } y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$2ydy = \frac{2bx dx}{2a}$$

$$y^2 dy^2 = \frac{b^2x^2 dx^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2 dx^2}{4a^2y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2 dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

Tab. IV. Fig. 51.

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2 dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

$$\text{h. c. } Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b) dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2) dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b) dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ \frac{-(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2) dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arithm.*), reperitur

$$\frac{b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$- \frac{2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2}{4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2}$$

$$+ \frac{2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ \frac{4a^2b^3x^4 + 8a^3bx^4 - 8a^5bx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ \frac{8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$- \frac{8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^4}{2abx^2 - 2a^3b}$$

consequenter productis hifce in unam summam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2 dx^6}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$\text{Jam } \frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a} \sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$000 \quad 2 \quad \frac{1}{2} CM.$$

Tab. IV. Fig. 51. $\frac{1}{2} \text{CM. NM.} = \frac{2a^2 b dx}{4\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(x^2 - a^2)}}$

Est vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§. 461 part. 1) qui si dicatur $2c$; erit sectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Jam in Hyperbola æquilatera $a=c$ (§. 505 part. 1). Ergo elementum sectoris $= \frac{a^2 dx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

Resolvatur 1: $\sqrt{(x^2 - a^2)} = (x^2 - a^2)^{-1/2}$ in seriem (§. 99 part. 1) erit

$$m = -1, n = 2, P = x^2, Q = -\frac{a^2}{x^2} = -a^2 x^{-2}$$

$$P^{m:n} = x^{-1} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} x^{-1} \cdot -a^2 x^{-2} = +\frac{1}{2} a^2 x^{-3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} a^2 x^{-3} \cdot -a^2 x^{-2} =$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^4 x^{-5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^4 x^{-5} \cdot -a^2 x^{-2} =$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^6 x^{-7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{7}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^6 x^{-7} \cdot -a^2 x^{-2} =$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^8 x^{-9}$$

Habemus itaque

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = x^{-1} dx + \frac{1}{2} a^2 x^{-3} dx +$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^4 x^{-5} dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^6 x^{-7} dx +$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^8 x^{-9} dx \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quare $\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{1}{2} acx^{-1} dx + \frac{1}{2} a^3 cx^{-3} dx + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4} a^5 cx^{-5} dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6} a^7 cx^{-7} dx + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^9 cx^{-9} dx$ &c. Tab. IV. Fig. 51.

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} a^9 cx^{-9} dx$$

&c.

Habemus itaque sectorem CAM

$$= \frac{1}{2} a^2 c x^{-1} dx - \frac{1}{2 \cdot 4} a^4 c x^{-3} dx - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} a^6 c x^{-5} dx$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} a^8 c x^{-7} dx - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} a^{10} c x^{-9} dx$$

$$\text{\&c.} = \frac{1}{2} a^2 c x^{-1} dx - \frac{a^4 c}{2 \cdot 4 x^2} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 x^4} a^6 c$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 a^8 c}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 x^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 a^{10} c}{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 x^8} \text{ \&c. in inf.}$$

Quoniam $\frac{1}{2} a^2 c x^{-1} dx$ pendet a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos (§. 120); evidens est quadraturam sectoris hyperbolici in hoc casu supponere quadraturam Hyperbolæ intra asymptotos.

Quodsi Hyperbola ad axem secundum referenda, fiat dimidius axis secundus $CD=c$, $CA=CB=a$, $CQ=PM=x$, $CP=QM=y$, erit $PM^2 = x^2$, $AP. PB = y^2 - a^2$ & (§. 469 part. 1).

$$AC^2 : CD^2 = AP. PB : PM^2$$

$$a^2 : c^2 = y^2 - a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2 y^2}{a^2} - c^2 = x^2$$

$$\frac{c^2 y^2}{a^2} = x^2 + c^2$$

Quoniam linea, quæ est tertia proportionalis ad axem secundum $2CD$ & primum AB dicitur parameter respectu axis secundi, quemadmodum parameter

Tab. rameter respectu axis primarii AB est IV. tertia proportionalis ad AB & 2CD Fig. 51. (§. 461 part. I); si parameter respectu axis 2CD dicatur p , erit $c : a = 2a : p$, adeoque $2a^2 : c = p$, consequenter $2a^2 : c^2 = p : c$, & $c^2 : a^2 = 2c : p$. Hoc valore ipsius $c^2 : a^2$ in æquatione substituto, prodit

$$\frac{2cy^2}{p} = x^2 + c^2$$

$$y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$\text{Jam } PM^2 = x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Ergo } CM^2 &= x^2 + \frac{px^2 + pc^2}{2c} \\ &= \frac{2cx^2 + px^2 + pc^2}{2c} \\ &= \frac{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}{4c^2} \end{aligned}$$

$$CM = \frac{1}{2c} \sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$Nm = \frac{2cxdx + pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\text{Porro } y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$\text{adeoque } 2ydy = \frac{2pxdx}{2c}$$

$$\begin{aligned} dy^2 &= \frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2} \\ &= \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mm^2 &= \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2 \\ &= \frac{p^2x^2dx^2 + 2pcx^2dx^2 + 2pc^3dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} \end{aligned}$$

$$Nm^2 = \frac{(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$\begin{aligned} NM^2 &= \frac{(p^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} \\ &+ \frac{-(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3} = \\ &\frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2 + 2pc^3)(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)} \end{aligned}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2 + 2pc^3)} \cdot \sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\frac{1}{2} CM = \frac{1}{4c} \sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$\begin{aligned} CMN &= \frac{2pc^2dx}{4\sqrt{2pc} \cdot \sqrt{(x^2 + c^2)}} = \frac{cdx \sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2 + x^2)}} \\ &= \frac{acd}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2pc} = 2a \\ &= \frac{1}{2} acdx (c^2 + x^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Resolvatur $I : \sqrt{(c^2 + x^2)}$ in seriem: erit in Theoremate generali (§. 99 part. I.)

$$m = -1, n = 2, P = c^2, Q = \frac{x^2}{c^2}$$

$$P^{m:n} = c^{-1} = \frac{1}{c} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$$

$$\begin{aligned} \frac{m-n}{2n} BQ &= -\frac{1}{4} \cdot -\frac{x^2}{2c^3} \cdot \frac{x^2}{c^2} = +\frac{1 \cdot 3x^4}{2 \cdot 4c^5} \\ &= C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m-2n}{3n} CQ &= -\frac{5}{6} \cdot \frac{1 \cdot 3x^4}{2 \cdot 4c^5} \cdot \frac{x^2}{c^2} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6c^7} \\ &= D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m-3n}{4n} DQ &= -\frac{7}{8} \cdot -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6c^7} \cdot \frac{x^2}{c^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8c^9} \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Tab. IV. Fig. 51.

Tab. IV. Est itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2}$
 Fig. 51. + $\frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$
 &c. consequenter $CMA = \frac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2}$
 + $\frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam sectoris hyperbolici CAM hoc in casu non pendere a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excrescit; ubi procul a vertice discesseris, series posterior minus convergit priori; sed quando $x < a$, eadem magis convergit.

COROLLARIUM I.

190. Quoniam in Hyperbola $y^2 = (bx^2 + bc^2) : 2c$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc est, axis secundus seu conjugatus est ad ipsius parametrum ut quadratum semiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad quadratum distantiae semiordinatæ a centro CP.

COROLLARIUM II.

191. Cum in Hyperbola æquilatera sit $c = a$, sector hyperbolicus est $\int(a^2 dx : 2\sqrt{(a^2+x^2)}) = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3.4a} + \frac{1.3x^5}{4.4.5a^3} - \frac{1.3.5x^7}{4.4.6.7a^5}$
 + $\frac{1.3.5.7x^9}{4.4.6.8.9a^7}$ &c.

PROBLEMA LXXI.

Tab. IV. 192. Data tangente AE arcus elliptici AM; invenire sectorem AMC.
 Fig. 52. Quoniam tangens AE axi conjugato DC est parallela (§. 448, 444 part. I), DC vero ad AB perpendicularis;

erit etiam EA perpendicularis ad AB Tab. IV. (§. 230 Geom.), adeoque angulus ad A rectus (§. 78 Geom.). Sit jam $AC = a$, $CD = 1$, $AE = x$, $PM = y$. Ducatur Ce ipsi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN, atque radio CM arcus MO. Erit $\triangle EeN \sim \triangle AEC$, quemadmodum supra in casu simili (§. 124) demonstratum est, $Ee = dx$, & ob $EC^2 = AE^2 + AC^2$ (§. 417 Geom.) $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$. Jam cum sit (§. 267 Geom.)

$$EC : AC = Ee : EN$$

$$\sqrt{(x^2 + a^2)} : a = dx : EN$$

$$\text{erit } EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$$

Porro, ob parallelismum rectarum AE & PM (§. 256 Geom.), erit (§. 268 Geom.)

$$EA : AC = PM : PC$$

$$x : a = y : PC$$

$$\text{adeoque } PC = \frac{ay}{x}$$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Porro (§. 432 part. 1)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$

$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297 Arithm.)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$

$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

PC²

Tab. IV. Fig. 52.
 $PC^2 = \frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2 + 1}$
 $CM^2 = \frac{x^2 + a^2}{x^2 + 1}$
 $CM = \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)}}{\sqrt{(x^2 + 1)}}$

Denique ob sectores similes CEN & CMO (§. 137, 412 Geom.)

CE : EN = CM : OM
 $\sqrt{(x^2 + a^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)}}{\sqrt{(x^2 + 1)}} : OM$
 adeoque $OM = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 + a^2)}\sqrt{(x^2 + 1)}}$
 Jam $\frac{1}{2} CM = \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)}}{2\sqrt{(x^2 + 1)}}$

Ergo $CMO = \frac{\frac{1}{2} adx}{1 + x^2}$

Est igitur elementum sectoris elliptici ACE idem cum sectore circuli (§. 124), si $CD = 1$.

Quare sector $AMC = \frac{1}{2} a(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 \&c. \text{ in infinit. })$

PROBLEMA LXXII.

Tab. 193. Dato sectore KFB, recta KF ex IV. foco Ellipsis ducta; invenire semiordina- Fig. 52. tam KQ.

Sit $AC = CB = a$, $QK = y$,
 $FB = b$, sector $KFB = \frac{1}{2} v$,
 $CD = c$, erit differentiale ejus $\frac{1}{2} dv$
 & ob QB. $QA = BC^2 - QC^2$ (§. 431 part. I) ex natura Ellipsis (§. 430 part. I)

$CD^2 : CB^2 = QK^2 : CB^2 - QC^2$
 adeoque $CD^2 : QK^2 = CB^2 : CB^2 - QC^2$
 (§. 124 part. I.)

$CD^2 : CD^2 - QK^2 = CB^2 : QC^2$
 $c^2 : c^2 - y^2 = a^2 :$
 consequenter $CQ^2 = a^2 (c^2 - y^2) : c^2$

$CQ = a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$
 $CB = a$
 $QB = a - a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$
 $FB = b$
 $FQ = b - a + a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$

Differentiale ipsius $FQ = \frac{ay dy}{c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$
 $KQ = y$

Elementum segmenti $KQB = \frac{ay^2 dy}{c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

Porro

$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$
 $\frac{1}{2} QK = \frac{1}{2} y$

$\Delta FQK = \frac{1}{2} by - \frac{1}{2} ay + ay\sqrt{(c^2 - y^2)} : 2c$

differentiale $\Delta FQK = \frac{1}{2} b dy - \frac{1}{2} a dy - \frac{ay^2 dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}} + a dy \sqrt{(c^2 - y^2)} : 2c$
 hoc est, reductione ad eandem denominationem facta.

$d\Delta FQK = \frac{(bc - ac)\sqrt{(c^2 - y^2)} dy + (ac^2 - 2ay^2) dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

$dKQB = \frac{2ay^2 dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

$dFKB = \frac{(bc - ac)\sqrt{(c^2 - y^2)} dy + ac^2 dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$
 $= \frac{ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}}{2\sqrt{(c^2 - y^2)}} dy$

Habemus itaque

$\frac{ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}}{2\sqrt{(c^2 - y^2)}} dy = \frac{1}{2} dv$

$(ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}) dy = dv\sqrt{(c^2 - y^2)}$

$\frac{dy}{dv} (ac + (b - a)\sqrt{(c^2 - y^2)}) = \sqrt{(c^2 - y^2)}$

dy

$$\frac{dy}{dv} (ac + (b-a)\sqrt{c^2 - y^2}) - \sqrt{c^2 - y^2} = 0$$

Jam ut valor ipsius y per v exprimat-
tur, quod est quod quaeritur, fiat

$$y = hv + iv^3 + lv^5 + mv^7 \quad \&c.$$

$$\text{erit } dy = hdv + 3iv^2dv + 5lv^4dv + 7mv^6dv \quad \&c.$$

$$\frac{dy}{dv} = h + 3iv^2 + 5lv^4 + 7mv^6, \quad \&c.$$

$$y^2 = h^2v^2 + 2hiv^4 + i^2v^6 + 2hlv^6 \quad \&c.$$

$$y^4 = h^4v^4 + 4h^3iv^6 \quad \&c.$$

$$y^6 = h^6v^6 \quad \&c.$$

$$\frac{bdy}{dv} = bh + 3biv^2 + 5blv^4 + 7bmv^6 \quad \&c.$$

$$\frac{bdy}{dv} \sqrt{c^2 - y^2} = bch + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6$$

$$- \frac{bh^3}{2c}v^2 - \frac{2bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bhi^2}{2c}v^6$$

$$- \frac{2bh^2l}{2c}v^6$$

$$- \frac{bh^5}{8c^3}v^4 - \frac{4bh^4i}{8c^3}v^6$$

$$- \frac{3bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bh^7}{16c^5}v^6$$

$$- \frac{6bhi^2}{2c}v^6$$

$$- \frac{5bh^2l}{2c}v^6$$

$$- \frac{3bh^4i}{8c^3}v^6$$

Porro (§. 99 part. I)

$$\sqrt{c^2 - y^2} = c - \frac{y^2}{2c} - \frac{y^4}{8c^3} - \frac{y^6}{16c^5} \quad \&c.$$

$$= c - \frac{h^2v^2}{2c} - \frac{2hiv^4}{2c} - \frac{i^2v^6}{2c} \quad \&c.$$

$$- \frac{2hlv^6}{2c} \quad \&c.$$

$$- \frac{h^4v^4}{8c^3} - \frac{4h^3iv^6}{8c^3} \quad \&c.$$

$$- \frac{h^6v^6}{16c^5} \quad \&c.$$

Quodsi pro b substituatur a , prodibit valor ipsius $\frac{ady}{dv} \sqrt{c^2 - y^2}$.

Quamobrem, si hi valores in æquatione $\frac{dy}{dv} (ac + (b-a)\sqrt{c^2 - y^2}) - \sqrt{c^2 - y^2} = 0$ substituuntur, prodibit

$\frac{ady}{dv}$

$$\begin{aligned} \frac{acy}{dv} &= ach + 3aciv^2 + 5aclv^4 + 7acmv^6 \text{ \&c.} \\ \frac{bdy}{dv} \sqrt{(c^2 - y^2)} &= bch + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6 \text{ \&c.} \\ &\quad - \frac{bh^3}{2c} v^2 - \frac{5bh^2i}{2c} v^4 - \frac{bhi^2}{2c} v^6 \\ &\quad \quad - \frac{7bh^2l}{2c} v^8 \\ &\quad \quad - \frac{bh^5}{8c^3} v^4 - \frac{7bh^4i}{8c^3} v^6 \\ &\quad \quad \quad - \frac{bh^7}{16c^5} v^8 \\ &\quad \quad \quad - \frac{6bhi^2}{2c} v^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{ady}{dv} \sqrt{(c^2 - y^2)} &= -ach - 3aciv^2 - 5aclv^4 - 7acmv^6 \text{ \&c.} \\ &\quad + \frac{ah^3}{2c} v^2 + \frac{5ah^2i}{2c} v^4 + \frac{ahi^2}{2c} v^6 \\ &\quad \quad + \frac{7ah^2l}{2c} v^8 \\ &\quad \quad - \frac{ah^5}{8c^3} v^4 + \frac{7ah^4i}{8c^3} v^6 \\ &\quad \quad \quad + \frac{ah^7}{16c^5} v^8 \\ &\quad \quad \quad + \frac{6ahi^2}{2c} v^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{(c^2 - y^2)} &= -c + \frac{h^2}{2c} v^2 + \frac{2hi}{2c} v^4 + \frac{i^2}{2c} v^6 \text{ \&c.} \\ &\quad \quad + \frac{2hl}{2c} v^8 \\ &\quad \quad + \frac{h^4}{8c^3} v^4 + \frac{4h^3i}{8c^3} v^6 \\ &\quad \quad \quad + \frac{h^5}{16c^5} v^8 = 0 \end{aligned}$$

Habemus itaque

$$\begin{array}{r} ach + bch - ach - c = 0 \\ \hline bch - c = 0 \\ \hline bh - 1 = 0 \\ \hline bh = 1 \\ \hline h = 1 : b \end{array}$$

$$3aci + 3bci - \frac{bh^3}{2c} - 3aci + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$\begin{aligned} 3bci - \frac{bh^3}{2c} + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} &= 0 \\ 6bc^2i - bh^3 + ah^3 + h^2 &= 0 \\ \hline 6bc^2i = bh^3 - ah^3 - h^2 \\ &= \frac{1}{b^2} - \frac{a}{b^3} - \frac{1}{b^2} \\ &= -\frac{a}{b^3} \\ i &= -\frac{a}{6b^4c^2} \end{aligned}$$

$$5acl + 5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} - 5acl$$

$$+ \frac{5ab^2i}{2c} + \frac{ab^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{b^4}{8c^3} = 0$$

hoc est, $5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} + \frac{5ab^2i}{2c}$

$$+ \frac{ab^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{b^4}{8c^3} = 0$$

$$40bc^4l - 20bc^2h^2i - bh^5 + 20ac^2h^2i$$

$$+ ab^5 + 8c^2hi + b^4 = 0$$

$$40bc^4l = 20bc^2h^2i + bh^5 - 20ac^2h^2i - ab^5$$

$$- 8c^2hi - b^4$$

$$h^2 = \frac{1}{b^2} \quad bh^5 = \frac{1}{b^4}$$

$$i = -\frac{a}{6b^4c^2} \quad -ab^5 = -\frac{a}{b^5}$$

$$h^2i = -\frac{a}{6b^6c^2} \quad hi = -\frac{a}{6b^5c^2}$$

$$20bc^2h^2i = -\frac{10a}{3b^5} \quad -8c^2hi = +\frac{4a}{3b^5}$$

$$-20ac^2h^2i = +\frac{10a^2}{3b^5}$$

Ergo $40bc^4l =$

$$-\frac{10a}{3b^5} + \frac{1}{b^4} + \frac{10a^2}{3b^5} - \frac{3a}{3b^5} + \frac{4a}{3b^5} - \frac{1}{b^4}$$

$$= \frac{10a^2}{3b^5} - \frac{9a}{3b^5} = \frac{10a^2 - 9ab}{3b^5}$$

$$l = \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}$$

Reperitur eodem modo $m =$

$$\frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}, \text{ adeoque}$$

$$\text{tandem } y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{6b^4c^2}v^3 + \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}v^5$$

$$- \frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}v^7, \&c.$$

PROBLEMA LXXIII.

194. Quadrare sectorem hyperbolicum CAM, data tangente ad verticem AE. Tab. IV. Fig. 53.

Calculus prorsus idem, qui supra pro Ellipsi in casu simili (§. 192). Si enim $AC = CB = a$ $PM = y$

$$AE = x \quad CD = 1$$

$$\text{erit } Ee = dx \quad EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$$

& ob $\triangle AEC$ & EeN similitudinem,

$EN = adx : \sqrt{(x^2 + a^2)}$; ob similitudinem vero $\triangle CPM$ & CAE ,

ut in Ellipsi, $PC = ay : x$, atque, ob analogiam $CD^2 : AC^2 = PM^2 : PC^2$

$- AC^2$ ex natura hyperbolæ (§. 469

part. 1) $a^2y^2 = (a^2y^2 - a^2x^2) : x^2$. Hinc

ut supra reperitur $CM = \sqrt{(a^2 + x^2)}$:

$\sqrt{(1 - x^2)}$, & ob $CE : EN = CM : OM$,

porro $OM = adx : \sqrt{(a^2 + x^2)}\sqrt{(1 - x^2)}$,

tandemque elementum MOC sectoris

$CMA = \frac{\frac{1}{2}adx}{1 - x^2}$: quod idem prorsus

est, quod pro Ellipsi & Circulo reperimus,

(§. 124, 192) nisi quod illic fit $+x^2$, hic $-x^2$. Unde prodit, ut

supra, sector $CMA, \frac{1}{2}a(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$

$+ \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9, \&c.$ in infin.).

COROLLARIUM.

195. Eadem ergo series sectoribus circuli, ellipsis, atque hyperbolæ ex data tangente inveniendis inservit, nisi quod pro hyperbola signa omnia sint positiva.

C A P U T IV.

De usu Calculi integralis in cubandis Solidis & dimetiendis
superficiebus eorundem.

DEFINITIO VIII.

196. **S**olidum cubare idem est ac spatium solido comprehensum dimetiri.

PROBLEMA LXXIV.

Tab.II. 197. *Cubare solidum ex rotatione Fig.19. figure planæ ANQ circa rectam AQ tanquam axem facta genitum.*

RESOLUTIO.

Sit semiordinata *pm* alteri *PM* infimite propinqua: parallelogrammulum *PMRp* haud differet a trapeziolo *PMmp* (§. 99). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ *ANQ* circa axem *AQ* describit parallelogrammulum *PMRp* (§. 465 *Geom.*) est elementum solidi per illam rotationem producti: cujus adeo summa dat integrum solidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis constare concipitur.

Sit jam *AP=x*, *PM=y*, erit *Pp=dx*. Sit porro ratio radii ad peripheriam $=r:p$, erit periphæria circuli radio *PM* descripti $=py:r$; consequenter area $py^2:2r$ (§. 429 *Geom.*), quæ ducta in *Pp*, sive *dx*, dat soliditatem cylindruli seu elementi solidi $=py^2dx:2r$ (§. 541 *Geom.*).

Quodsi jam ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y^2 ; habebitur, si elementum integrari possit, soliditas segmenti, cujus altitudo *AP*, radius basis *PM*, hoc est revolutione ipsius *AMP* circa *AP* geniti.

PROBLEMA LXXV.

198. *Cubare Conum.*

Tab.II.

Conus describitur, si triangulum *ADC* circa axem *DC* rotatur (§. 467 *Geom.*). Sit *DC=a*, *AC=r*, *PM=y*, *DP=x*; erit (§. 268 *Geom.*).

$$DP:PM=DC:CA$$

$$x:y=a:r$$

$$\text{Hinc } rx:a=y$$

$$\& r^2x^2:a^2=y^2$$

$$py^2 dx:2r=pr^2x^2 dx:2a^2r=prx^2 dx:2a^2$$

(§. 197).

$$\int py^2 dx:2r=prx^3:6a^2.$$

Quodsi pro *x* substituatur *a*; habebitur soliditas totius Coni, $pra^3:6a^2=1/6 apr=1/2 pr. 1/3 a$. Basis nempe $1/2 pr$ ducenda est in tertiam altitudinis partem $1/3 a$, ut ex Elementis Geometriæ constat (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVI.

199. *Cubare Sphæram.*

Sphæra cum describatur per rotationem semicirculi circa diametrum ejus (§. 470 *Geom.*); erit, si diameter fit *2r*,

$$yy=2rx-x^2 \quad (\text{§. 377 part. 1.})$$

$$\text{Unde } py^2 dx:2r=pxdx-px^2 dx:2r$$

$$\int py^2 dx:2r=1/2 px^2-px^3:6r$$

Habemus adeo indefinitam cubationem segmenti sphærici, cujus diameter *2r*, altitudo *x*.

$$Ppp 2$$

Quod-

Quodsi ergo pro x substituatur diameter $2r$; prodibit soliditas sphaerae integrae $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2 = 2rp \cdot \frac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicandum est per tertiam radii, aut sextam diametri partem $\frac{1}{3}r$. Denique si diameter $2r$ sit 1; erit soliditas sphaerae $\frac{1}{6}p$.

COROLLARIUM I.

200. Sphaera igitur aequatur pyramidi quadrangulari, cujus basis est rectangulum ex diametro sphaerae $2r$ in peripheriam eadem descriptam, altitudo semidiameter sphaerae (§. 548 Geom.).

COROLLARIUM II.

201. Cylindri sphaerae circumscripti soliditas est pr^2 (§. 541 Geom.). Est itaque ad sphaeram ut pr^2 ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, seu ut 3 ad 2 (§. 124 part. 1).

PROBLEMA LXXVII.

202. Cubare Conoides parabolicum, ex rotatione parabola cujuscunque generis circa axem suum genitum.

Sit parameter = 1, erit aequatio ad infinita paraboliarum genera (§. 519 part. 1)

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$\frac{py^2 dx : 2r = px^{2:m} dx : 2r}{}$$

$$\frac{spy^2 dx : 2r = mpx^{2:m+1} : (4 + 2m)r}{= mpy^2 x : (4 + 2m)r}$$

Sit altitudo totius conoidis = a , diameter baseos $2r$: erit a pro x , & r pro y substituto, soliditas totius conoidis

$$mpr_2 a : (4 + 2m)r = \frac{m}{4 + 2m} apr$$

$$= \frac{1}{2}pr \cdot \frac{m}{2 + m} a.$$

Ex. gr. Si parabola genitrix fuerit Apolloniana, erit $m = 2$, adeoque $m : (2 + m) = 2 : (2 + 2) = \frac{1}{2}$. Basis ergo ducenda est in dimidiam altitudinem: consequenter conoides cylindri super eadem basi & ejusdem altitudinis subduplum (§. 541 Geom.).

PROBLEMA LXXVIII.

203. Cubare sphaeroides ellipticum ex rotatione Ellipsis Apollonianae circa axem genitum.

Quoniam ad Ellipsin Apollonianam (§. 420 part. 1).

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$\text{erit } \frac{py^2 dx : 2r = pbx dx : 2r - pbx^2 dx : 2a}{}$$

$$\frac{spy^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar}{}$$

Quodsi pro abscissa x substituatur axis a , prodibit soliditas integri sphaeroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 : 4r = pba^2 : 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

COROLLARIUM I.

204. Quodsi $2r$ ponatur axi conjugato aequalis; erit $4r^2 = ab$ (§. 423 part. 1). Unde soliditas sphaeroidis habetur $4par^2 : 12r = \frac{1}{3}par$; hoc est, sphaeroides ellipticum aequatur cono, cujus altitudo axi majori a aequalis, basis vero dupla circuli circa axem minorem descripti (§. 548 Geom.).

COROLLARIUM II.

205. Quoniam cylindri circumscripti altitudo = a , diameter = $2r$, adeoque soliditas = $\frac{1}{2}apr$ (§. 541 Geom.); erit sphaeroides ellipticum ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{1}{2}apr$, hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ seu ut 2 ad 3 (§. 124 part. 1).

COROLLARIUM III.

206. Si diameter sphaerae = a , erit peripheria circuli maximi (posita ratione radii ad peripheriam = $r:p$) = $ap:2r$; consequenter sphaera = $a^3p:12r$. Est adeo sphaeroides ellipticum ad sphaeram axe majore a descriptam ut $\frac{1}{3}apr$ ad $a^3p:12r$, hoc est, (dividendo per $\frac{1}{3}ap$)

$\frac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2:4r$, seu ut $4r^2$ ad a^2 , nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM IV.

207. Si diameter sphaerae = $2r$, erit soliditas = $\frac{2}{3}pr^2$ (§. 199). Est itaque sphaeroides ellipticum ad sphaeram axe minore $2r$ descriptam, ut $\frac{1}{3}par$ ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut a ad $2r$ (§. 124 part. 1.), seu ut axis major ad minorem.

PROBLEMA LXXIX.

208. Cubare Conoides hyperbolicum ex rotatione hyperbolae Apollonianae circa axem genitum.

Quoniam ad Hyperbolam scalenam (§. 459 part. 1)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

$$\text{erit } py^2 dx : 2r = pbx dx : 2r + pbx^2 dx : 2ar \\ \& \text{ } spy^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar.$$

Et quia ad Hyperbolam aequilateram (§. 507 part. 1.)

$$y^2 = ax + x^2$$

$$\text{erit } py^2 dx : 2r = (apx dx + px^2 dx) : 2r \\ \& \text{ } spy^2 dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$$

COROLLARIUM.

209. Si altitudo conoidis fuerit axi transverso aequalis, hoc est, si $x = a$; erit soliditas conoidis in casu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^3) : 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r$.

PROBLEMA LXXX.

Tab. II. Fig. 22. 210. Cubare solidum ex rotatione Cifoidis circa axem AB genitum.

Sit $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$; erit (§. 548 part. 1.)

$$y^2 = x^3 : (1 - x)$$

$$py^2 dx : 2r = px^3 dx : 2r(1 - x) \\ \text{hoc est, quia } 2r = AB = 1,$$

$$py^2 dx : 2r = px^3 dx : (1 - x).$$

$$\text{Est vero } x^3 : (1 - x) = x^3 + x^4 + x^5$$

+ $x^6 + x^7 + x^8$ &c. in infinitum (§. 45 part. 1). Ergo $py^2 dx : 2r = px^3 dx + px^4 dx + px^5 dx + px^6 dx + px^7 dx + px^8 dx$ &c. in infinitum.

Tab. II.

Et hinc $spy^2 dx : 2r = \frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7 + \frac{1}{8}px^8 + \frac{1}{9}px^9$, &c. definit solidum portione APM descriptum. Quod si pro x substituatur $AB = 1$; prodit solidum integrum $\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{9}p$ &c. seu $p(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. in infinitum.).

Fig. 22.

PROBLEMA LXXXI.

211. Cubare solidum ex rotatione Logistica circa asymptotum AH genitum. Tab. I. Fig. 8.

In Logistica, cujus subtangens = a , est (§. 54).

$$y dx = a dy$$

$$dx = a dy : y$$

$$py^2 dx : 2r = pay dy : 2r$$

$$spy^2 dx : 2r = pay^2 : 4r$$

Quod si pro y substituatur $AB = r$, erit integrum solidum $par^2 : 4r = \frac{1}{2}apr$.

COROLLARIUM.

212. Cylindrus, cujus altitudo = a , radius basis = r , est $\frac{1}{2}apr$ (§. 541 Geom.); adeoque ad solidum logisticum ut $\frac{1}{2}apr$ ad $\frac{1}{4}apr$, hoc est, ut 2 ad 1 (§. 124 part. 1).

SCHOLION.

213. Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus exposita expressionibus solidorum, ea inter se facile comparentur, unumque in alterum transformetur.

PROBLEMA LXXXII.

214. Cubare solidum ex rotatione Parabole circa semiordinatam QN genitum. Tab. II. Fig. 25.

Ex resolutione Problematis 74 (§. 197) manifestum est, elementum solidi esse circulum radio MR descriptum & in differentiale Rr ipsius NR ductum.

Tab.II. Sit itaque ratio radii ad peripheriam
Fig. 25. $= r : p$, $AQ = r$, $AP = x$, $QN = b$,
 $PM = y$, erit $Rr = dy$, $MR = PQ =$
 $AQ - AP = r - x$, peripheria radio
MR descripta $= p - px : r$; conse-
quenter area circuli $\frac{1}{2} pr - px + px^2 :$
 $2r$ (§. 429 *Geom.*) & hinc elementum
solidi $\frac{1}{2} prdy - pxdy + px^2 dy : 2r$.

Si jam parameter parabolæ 1; erit
 $y^2 = x$ (§. 388 *part. 1*) & $y^4 = x^2$;
quibus valoribus in expressione ele-
menti generali substitutis, erit id $\frac{1}{2} prdy$
 $- py^2 dy + py^4 dy : 2r$. Hujus inte-
grale $\frac{1}{2} pry - \frac{1}{3} py^3 + py^5 : 10r$ indefi-
nite exprimit solidum ex rotatione
portionis MNR circa NR genitum.

Quodsi pro y^2 ponatur x ; habebimus
pro eodem solido $\frac{1}{2} pry - \frac{1}{3} pxy$
 $+ px^2 y : 10r = p (\frac{1}{2} ry - \frac{1}{3} xy + x^2 y : 10r)$.

Denique si pro y substituatur b , pro
 x vero r ; prodibit solidum integrum
 $p (\frac{1}{2} br - \frac{1}{3} br + \frac{1}{10} br) = (30 - 20 + 6)$
 $pbr : 60 = \frac{8}{30} pbr = \frac{1}{2} pr \cdot \frac{8}{15} b$, hoc est,
basis seu circulus radio AQ descriptus
ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

COROLLARIUM.

215. Cylindrus super eadem basi & ejus-
dem altitudinis est $\frac{1}{2} pbr$ (§. 541 *Geom.*);
adeoque ad solidum hoc parabolicum ut
 $\frac{1}{2} pbr$ ad $\frac{1}{2} pbr \cdot \frac{8}{15}$, hoc est, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, seu
ut 15 ad 8 (§. 124 *part. 1*).

PROBLEMA LXXXIII.

Tab.II. 216. *Cubare solidum ex rotatione spa-*
Fig. 26. *tii interminati hyperbolici juxta asymptotum*
CD tanquam axem genitum.

Sit $AB = a$, $AC = b$, $CP = x$, $PM = y$;
erit $Pp = dx$, & posita peripheria radio
AC descripta $= p$, peripheria radio
PC descripta $px : b$, quæ ducta in PM
 $= y$, dat superficiem cylindri parallelo-

grammo CPMR descripti $= pxy : b$ Tab.II.
(§. 541 *Geom.*). Hæc vero si ulterius du-
Fig. 26. catur in $Pp = dx$, prodibit cylindrus
cavus, parallelogrammulo Pp QM def-
scriptus, seu elementum solidi $= pxydx : b$.

Est vero ex natura hyperbolæ intra
asymptotos

$$xy = ab \text{ (§. 502 part. 1).}$$

$$\text{Quare } pxydx : b = pabdx : b = padx$$

$$spxydx : b = pax.$$

Quodsi pro x substituatur b ; pro-
dibit solidum integrum pab .

COROLLARIUM.

217. Cylindrus ex rotatione parallelo-
grammi ACSB circa axem CS geniti est
 $\frac{1}{2} pba$ (§. 541 *Geom.*), adeoque ad solidum
hyperbolicum ut $\frac{1}{2} pba$ ad pba , hoc est ut
 $\frac{1}{2}$ ad 1, seu ut 1 ad 2 (§. 124 *part. 1*).

SCHOLIUM.

218. Possunt etiam figuræ planæ rotari
circa tangentes, vel alias lineas quasunque;
Sed cum nihil in his difficultatis sit, plura
non addimus.

PROBLEMA LXXXIV.

219. *Metiri superficiem corporis ro-* Tab.II.
tatione figura ANQ circa axem AQ Fig. 19.
geniti.

RESOLUTIO.

Sit ratio radii ad peripheriam $= r : p$,
 $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = MR = dx$,
 $mR = dy$; $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, peri-
pheria radio PM descripta $= py : r$, quæ
ducta in Mm dat elementum superficiæ
solidi ex rotatione circa axem AQ ge-
niti $py \sqrt{dx^2 + dy^2} : r$.

Quodsi jam ex natura figuræ ANQ
valor ipsius dx^2 substituatur, & elemen-
tum integrabile fiat; superficies deside-
rata per summationem habetur.

PRO-

PROBLEMA LXXXV.

Tab. II. 220. *Invenire superficiem Coni.*
 Fig. 17. Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expressio-
 ne generali ante (§. 198) inventa substituendus est valor ipsius dx^2 . Sit nempe $CD = a$, $AC = r$, $DP = x$, $PM = y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$x : y = a : r$$

$$x = ay : r$$

$$dx = ady : r$$

$$dx^2 = a^2 dy^2 : r^2$$

$$\begin{aligned} & py \sqrt{dx^2 + dy^2} : r \\ &= py \sqrt{a^2 dy^2 + r^2 dy^2} : r^2 \\ &= py dy \sqrt{a^2 + r^2} : r^2 \end{aligned}$$

$spy \sqrt{dx^2 + dy^2} : r = py^2 \sqrt{a^2 + r^2} : 2r^2$
 Quodsi pro y ponatur r , prodibit superficies conii integri $= \frac{1}{2} p \sqrt{a^2 + r^2} = \frac{1}{2} p \cdot AD$; est nempe æqualis facto ex semiperipheria basis conii in latus AD , prorsus ut in Elementis Geometriæ demonstratum (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXXVI.

Tab. I. 221. *Invenire superficiem Spharæ.*
 Fig. 3. Sit diameter circuli genitoris $= 1$, $AP = x$, erit elementum arcus Mm (§. 157) $= dx : 2\sqrt{x - xx}$, quod ductum in peripheriam radio PM descriptam $= 2p\sqrt{x - xx}$ producit elementum superficiem sphericæ (§. 219)

pdx . Hujus integrale px indefinite metitur superficiem segmenti sphericæ, cujus altitudo x .

Quodsi pro x substituatur diameter 1 ; erit superficies sphericæ integræ $= p \cdot 1$; seu, si $1 = a$, pa .

COROLLARIUM.

222. Est ergo quodlibet segmentum superficiem sphericæ ad superficiem sphericæ integræ ut px ad $p \cdot 1$, seu ut x ad 1 (§. 124 *part. 1*), hoc est ut altitudo segmenti ad diametrum sphericæ.

PROBLEMA LXXXVII.

223. *Invenire superficiem Conoidis parabolici.*

Ad parabolam est $adx = 2ydy$ (§. 21).

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$\begin{aligned} & py \sqrt{dx^2 + dy^2} : r \\ &= py \sqrt{4y^2 dy^2 + a^2 dy^2} : ar \\ &= py dy \sqrt{4y^2 + a^2} : ar \end{aligned}$$

Fiat $\sqrt{4y^2 + a^2} = v$

erit $4y^2 + a^2 = v^2$

$$8ydy = 2v dv$$

$$ydy = \frac{1}{4} v dv$$

$$pydy \sqrt{4y^2 + a^2} : ar = pv^2 dv : 4ar$$

$$spydy \sqrt{4y^2 + a^2} : ar = pv^3 : 12ar$$

$$= p(4y^2 + a^2) \sqrt{4y^2 + a^2} : 12ar.$$

Fiat $y = 0$, relinquetur $pa^2 \sqrt{a^2} : 12ar$

$$= pa^2 : 12r. \text{ Unde superficies seg-}$$

$$\text{menti conoidis parabolici} =$$

$$p(4y^2 + a^2) \sqrt{4y^2 + a^2} : 12ar - pa^2 : 12r$$

CAPUT V.

De usu Calculi integralis in Methodo tangentium inversa.

DEFINITIO IX.

224. **M**ethodus Tangentium inversa est, qua ex data tangente, aut linea quacunque alia cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut constructio curvæ.

COROLLARIUM.

225. Cum expressiones differentiales tangentis, subtangentis, subnormalis, normalis & arcus, itemque area curvæ superius tradita fuerint (§. 20, 34, 35, 44, 98, 144); si valor datus expressioni differentiali æquetur, & æquatio differentialis vel summetur, vel, si id fieri nequeat, construatur; curva desiderata innotescit.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire lineam curvam, cujus subtangens = 2yy: a.*

Quoniam subtangens lineæ algebraicæ = $ydx:dy$ (§. 20); erit

$$\begin{aligned} ydx:dy &= 2yy:a \\ \frac{aydx}{adx} &= \frac{2y^2dy}{2ydy} \\ ax &= y^2 \end{aligned}$$

Est adeo curva quæsitæ parabola (§. 388 part. I), cujus constructio ex superioribus manifesta (§. 393 part. I).

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Curvam invenire, cujus subnormalis est constans, ex. gr. = a.*

Quoniam subnormalis lineæ algebraicæ (§. 35) = $ydy:dx$; erit

$$\begin{aligned} ydy &= adx \\ \frac{\frac{1}{2}y^2}{y^2} &= \frac{ax}{2ax} \\ y^2 &= 2ax \end{aligned}$$

Est adeo curva quæsitæ parabola, cujus parameter = $2a$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire curvam, cujus subnormalis = r - x.*

Quoniam $ydy:dx = r - x$ (§. 35);

$$\begin{aligned} \text{erit } ydy &= rdx - xdx \\ \frac{\frac{1}{2}y^2}{y^2} &= \frac{rx - \frac{1}{2}xx}{2rx - xx} \\ y^2 &= 2rx - xx \end{aligned}$$

Est adeo curva quæsitæ circulus, cujus radius r seu diameter $2r$ (§. 377 part. I).

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad $r - x$ & y .*

Quoniam (§. 20)

$$r - x: y = y: \frac{ydx}{dy}$$

erit $r - x: y = dy: dx$ (§. 124 part. I)

$$\begin{aligned} \frac{rdx - xdx}{rx - \frac{1}{2}x^2} &= \frac{ydy}{\frac{1}{2}y^2} \\ 2rx - xx &= y^2 \end{aligned}$$

Est adeo curva quæsitæ denuo circulus, cujus diameter $2r$.

PROBLEMA XCII.

230. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad $r + x$ & y .*

Quoniam (§. 20)

$$r + x: y = y: \frac{ydx}{dy}$$

erit

erit $r + x : y = dy : dx$ (§. 124 part. 1)

$$\frac{rdx + xdx = ydy}{}$$

$$\frac{rx + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2}{}$$

$$2rx + x^2 = y^2$$

Est adeo curva quaesita Hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter = $2r$ (§. 507 part. 1).

PROBLEMA XCIII.

231. Invenire curvam in qua subtangens multiplo abscissæ equalis.

Quoniam (§. 20)

$$mx = ydx : dy$$

erit $mxdy = ydx$

$$mxdy - ydx = 0$$

Ut hæc æquatio integrari possit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$ (§. 95).

erit $(my^{m-1}xdy - y^m dx) : x^2 = 0$

$$\frac{y^m : x = a^{m-1}}{}$$

$$y^m = a^{m-1}x$$

Satisfaciunt ergo proposito infinita Parabolæ genera.

PROBLEMA XCIV.

232. Invenire lineam, in qua subtangens semiordinatæ equalis.

Quoniam (§. 20)

$$ydx : dy = y$$

$$\frac{ydx = ydy}{}$$

$$\frac{dx = dy}{}$$

$$x = y$$

Patet adeo, lineam quaesitam esse rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, seu hypotenusam trianguli rectanguli æquicruri (§. 89 Geom.). Quod si vero x sumatur pro arcu circuli, erit linea quaesita Cyclois (§. 572 part. 1, & §. 52 part. 2).

Wolffii Oper. Mathem. Tom. I.

PROBLEMA XCV.

233. Invenire curvam, cujus subnormalis = \sqrt{ax} .

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§. 35)

erit $ydy = a^{1/2} x^{1/2} dx$

$$\frac{\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}a^{1/2}x^{3/2}}{}$$

$$y^2 = \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \frac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet adeo, quadrata semiordinatarum hujus curvæ exprimerent spatia Parabolæ, cujus parameter $4a$ (§. 103). Sunt igitur semiordinatæ ipsæ mediæ proportionales inter abscissas & $\frac{2}{3}$ semiordinatarum Parabolæ circa communem axem descriptæ (§. cit.).

SCHOLION.

234. Curva hæc dici potest Quadratrix Tab. II. Parabolæ. Solent enim Geometræ Quadratrix Fig. 27. cem alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem descriptam, cujus semiordinatis datis datur quadratura partium respondentium in altera curvâ. Ex. gr. si fuerit ut in nostro casu $APMA = PN^2$, vel $APMA = AP \cdot PN$, vel $APMA = PN \cdot a$, &c. erit AND Quadratrix ipsius AMC.

PROBLEMA XCVI.

235. Invenire curvam, cujus normalis constans est.

Sit constans linea = a , abscissa = x , semiordinata = y ; erit (§. 44)

$$\frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx = a}{}$$

$$\frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = adx}{}$$

$$\frac{y^2 dy^2 + y^2 dx^2 = a^2 dx^2}{}$$

$$\frac{y^2 dy^2 = a^2 dx^2 - y^2 dx^2}{}$$

$$\frac{ydy = dx\sqrt{(a^2 - y^2)}}{}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = dx$$

$$\frac{\sqrt{(a^2 - y^2)} = a - x}{}$$
 (§. 95).

Qq q

Est itaque curva quæsitæ circulus.

PROBLEMA XCVII.

236. Invenire curvam, cujus area indefinite exprimitur per $a\sqrt{ax}$.

Quoniam differentiale areæ $= ydx$ (§. 98);

$$\text{erit } \frac{1}{2}a^2 : x^{-1} : dx = ydx$$

$$\frac{\frac{1}{2}a^2 : x^{-1} : 2}{\frac{1}{4}a^2 : x^{-1} : 2} = y$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 : x^{-1} : 2}{\frac{1}{4}a^2} : x = y^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 = xy^2$$

Est adeo curva Hyperbola secundi generis intra asymptotos.

COROLLARIUM.

237. Cum \sqrt{ax} sit semiordinata Parabolæ, cujus parameter $= a$; evidens est Parabolam Apollonianam esse quadratricem Hyperbolæ intra asymptotos, ad quam $\frac{1}{4}a^2 = xy^2$.

PROBLEMA XCVIII.

238. Invenire curvam, cujus quadratura indefinita $= x^3 : a$.

$$\text{Quoniam } x^3 : a = \int ydx$$

$$\text{erit } 3x^2 dx : a = ydx$$

$$x^2 = \frac{1}{3}ay$$

Tab. II. Fig. 28. Est adeo curva quæsitæ Parabola exterior, cujus parameter $\frac{1}{3}a$. Sit enim $AQ = PM = x$, $PQ = AM = y$, erit $\frac{1}{3}ay = x^2$ (§. 388 part. 1).

PROBLEMA XCIX.

239. Invenire curvam, cujus area $= a\sqrt{aa + xx}$.

$$\text{Quoniam } ax dx : \sqrt{aa + xx} = ydx$$

$$\frac{ax : \sqrt{aa + xx}}{a^2 x^2 : (aa + xx)} = y$$

$$\frac{a^2 x^2 : (aa + xx)}{a^2} = y^2$$

hoc est, $y^2 : x^2 = a^2 : aa + xx$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix est Hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & para-

metro existentibus a (§. 507 part. 1, & §. 234 part. 2).

PROBLEMA C.

240. Invenire curvam, cujus area $= x\sqrt{aa + xx}$.

$$\text{Quoniam } \frac{x^2 dx}{\sqrt{aa + xx}} + dx\sqrt{aa + xx} = ydx$$

$$\text{erit } \frac{2x^2 + aa}{\sqrt{aa + xx}} = y$$

$$(2x^2 + aa)^2 = y^2 (aa + xx)$$

$$y^2 : aa + 2xx = aa + 2xx : aa + xx$$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix est Hyperbola æquilatera.

SCHOLIUM.

241. Ex Problematibus his apparet, quod data quadratrice semper inveniatur quadranda facili negotio. Et hac quidem methodo inveniuntur curvæ innumera quadrabiles, construunturque curvarum quadrabilium, seu, quod perinde est, formularum summabilium canones.

PROBLEMA CI.

242. Invenire curvam, cujus subtangens est linea constans a .

$$\text{Quoniam } ydx : dy = a \quad (\text{§. 20})$$

$$\text{erit } dx = ay^{-1} dy$$

$$\int dx = x = \int ay^{-1} dy$$

Quodsi $ay^{-1} dy$ multiplicetur per a ; erit $a^2 y^{-1} dy$ elementum Hyperbolæ intra asymptotos (§. 118) & quidem æquilateræ, in qua asymptoti junguntur ad angulos rectos (§. 510 part. 1). Quodsi ergo y sumatur pro abscissa, erit respondens semiordinata $x = a \int y^{-1} dy$ æqualis spatio hyperbolico asymptotico per constantem a , quæ latus est potentie in Hyperbola æquilatera (§. 477 part. 1), diviso. Unde constructio curvæ

curvæ quæsitæ a quadratura Hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM I.

243. Quoniam linea, ad quam $x = say^{-1}dy$, est logarithmica ad asymptotum relata (§. 54) atque x in asymptoto sumta logarithmus semiordinatæ ipsi respondentis (§. 553 part. 1); erit quoque $say^{-1}dy$ logarithmus ejusdem semiordinatæ y , consequenter $say^{-1}dy = asdy : y = ly$; (l denotat logarithmum ipsius y in logistica sumtum, cujus subtangens = a). Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, sit inveniendum. Quoniam enim $ady : y = dly$ erit etiam $d(ly)^n = n(ly)^{n-1}ady : y$ ubi a notat subtangentem logistica.

COROLLARIUM II.

244. Et quia $af \frac{dy}{y}$ est spatium hyperbolicum per latus potentia Hyperbolæ divisum; spatia hyperbolica per idem latus divisa exprimunt logarithmos, quorum numeri sunt ut semiordinatæ ad asymptotum relatæ.

PROBLEMA CII.

245. Invenire curvam, in qua est ut a ad y ita $\sqrt{(aa - yy)}$ ad subtangentem.

Quoniam per hypoth. & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa - yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

$$\text{hoc est, } a : 1 = dy \sqrt{(aa - yy)} : dx$$

$$\text{erit } \frac{dy \sqrt{(aa - yy)} : a = dx}{f dy \sqrt{(aa - yy)} : a = x}$$

Tab. I. Fig. 3. Quoniam $f dy \sqrt{(aa - yy)}$ est portio circuli CDPM, cujus radius $AC = a$, abscissa $PC = y$ (§. 124): constructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc est, circulus est quadratrix curvæ quæsitæ (§. 234). Retentis nempe abscissis PC , semiordinatæ x erunt æquales spatio PMDC per constantem a diviso.

PROBLEMA CIII.

246. Invenire curvam, in qua est ut a ad y ita $\sqrt{(aa + yy)}$ ad subtangentem.

Quoniam per hypoth. & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa + yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

$$\text{hoc est, } a : 1 = dy \sqrt{(aa + yy)} : dx$$

$$\text{erit } \frac{dy \sqrt{(aa + yy)} : a = dx}{f dy \sqrt{(aa + yy)} : a = x}$$

$$\text{erit } \frac{f dy \sqrt{(aa + yy)} : a = dx}{f dy \sqrt{(aa + yy)} : a = x}$$

Quoniam $f dy \sqrt{(aa + yy)} : a$ est arcus Tab. II. cus Parabolæ AM, cujus parameter $2a$ Fig. 19. (§. 146); si semiordinata Parabolæ PM sumatur pro abscissa curvæ quæsitæ, erit semiordinata ejusdem arcui parabolico AM æqualis.

SCHOLIUM.

247. Apparet adeo, interdum constructionem pendere a rectificatione curvarum. Præstat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere; quia in priori casu praxis est facilior, ubi arcum filo metiri datur. In posteriori autem spatiorum quadratura ope serierum infinitarum definienda est in numeris prope veris, & inde similiter in istiusmodi numeris semiordinata curvarum quæsitæ sunt computanda.

PROBLEMA CIV.

248. Invenire curvam, in qua est subtangens ad y ut quantitas constans r ad $\sqrt{(r^2 - y^2)}$.

Quoniam per hypoth. & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

$$\text{hoc est, } \frac{dx : dy = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}}{\text{erit } \frac{dx = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}}{x = f(rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)})}}$$

$$\text{erit } \frac{dx = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}}{x = f(rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)})}$$

Quia $f(rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)})$ est arcus Tab. I. circuli AM, cujus radius $AC = r$, PM Fig. 3. = y (§. 153); constructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli.

Q 99 2

Nempe

Tab.I. Nempe si semiordinatæ in circulo PM Fig. 3. sumantur pro abscissis curvæ quæsitæ; erunt ejusdem semiordinatæ arcubus AM æquales.

PROBLEMA CV.

249. Invenire curvam, in qua subtangens est ad y ut r^2 ad $r^2 + y^2$.

Quoniam per hypoth. & §. 20

$$\frac{y dx}{dy} : y = r^2 : r^2 + y^2$$

hoc est, $dx : dy = r^2 : r^2 + y^2$

$$\text{erit } dx = r^2 dy : (r^2 + y^2)$$

Quoniam $\int (r^2 dy : (r^2 + y^2))$ aut, si $r=1$, $\int (dy : (1 + y^2))$ est elementum Tab.II. arcus BM, cujus tangens BK = y (§. Fig. 20. 158); evidens est, constructionem curvæ quæsitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abscissis curvæ quæsitæ; semiordinatæ ejusdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli existente r .

PROBLEMA CVI.

250. Invenire curvam, in qua tangens est constans.

Sit constans illa = a , abscissa = x , semiordinata y : erit (§. 34)

$$y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy = a$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = \frac{a^2 dy^2 - y^2 dy^2}{y^2}$$

$$x = \int \left(\frac{dy}{y} \sqrt{(a^2 - y^2)} \right).$$

Tab.I. Curva, in qua tangens constans est, Fig. 8. describitur puncto M, si alterum extremum rectæ TM in recta AR ince-

dit, diciturque *Traçtoria*. Ad ejus adeo Tab.I. descriptionem non opus est, nisi ba- Fig. 8. cillo, in cujus utroque extremo cuspis infixæ, ita ut cuspis in M prematur in planum elatere, vel pondere. Est itaque æquatio inventa ad Traçtoriam.

Eadem æquatio sic eruitur. Quoniam $TM = a$, $PM = y$; erit $PT = \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Sed $PT = y dx : dy$ (§. 20. Ergo $y dx : dy = \sqrt{(a^2 - y^2)}$; consequenter $dx = dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y$; aut, quia semiordinatæ continuo decrescentis differentiale negativum, $dx = - dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y$.

COROLLARIUM I.

251. Si fuerit $x = 0$, erit etiam $dx = 0$, adeoque

$$- dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y = 0$$

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = 0$$

$$a^2 - y^2 = 0$$

$$a = y$$

Est igitur in A, ubi origo indeterminatæ x , $AB = a$; id quod etiam ex descriptione liquet.

COROLLARIUM II.

252. Quoniam $dx = dy \sqrt{(a^2 - y^2)} : y$, erit $y dx = dy \sqrt{(a^2 - y^2)}$; adeoque spatium indeterminatum RPMI = $\int dy \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Quadratura igitur traçtorix pendet a quadratura circuli (§. 124), cujus radius est a , abscissæ a centro computatæ sunt y .

COROLLARIUM III.

253. Similiter quia $dx^2 = \frac{a^2 dy^2 - y^2 dy^2}{y^2}$ erit

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dy^2 - y^2 dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$= a^2 dy^2 : y^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int \frac{ady}{y}$$

Quare

Quare cum $\int \frac{ady}{y}$ sit logarithmus ipsius y ; arcus tractoriæ sunt ut logarithmi, semior-
dinatæ ut numeri.

Et quia $f(ady: y)$ est abscissa logarithmi-
cæ, cujus subtangens = a ; arcus tractoriæ
rectificantur per abscissas logarithmicæ.

COROLLARIUM IV.

254. Si $BO = v$, erit $OA = PM = a - v$,
adeoque $a - v = y$, & $-dv = dy$; con-
sequenter $dx = -dy \sqrt{(a^2 - y^2)}$: $y =$
 $dv \sqrt{(2av - v^2)}$: $(a - v)$. Habemus adeo
æquationem, quæ Tractoriam definit res-
pectu axis BA.

CAPUT VI.

De usu Calculi integralis in Logarithmorum doctrina.

PROBLEMA CVII.

255. **D**ato numero, invenire loga-
rithmum.

Tab. III. Sit Logarithmicæ MBN ordinata
Fig. 30. $AB = 1$, eademque subtangenti, quæ
constans est (§. 54) æqualis, erit PM
numerus unitate major, QN numerus
unitate minor, AP logarithmus nu-
meri unitate majoris, AQ logarith-
mus numeri unitate minoris.

Quodsi jam differentia inter AB &
PM sit y ; erit $PM = 1 + y$; consequen-
ter AP, seu logarithmus unitate majoris
numeri, $\int (dy: (1 + y))$ (§. 243). Est vero
 $1: (1 + y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ &c.
in infinitum (§. 45 part. 1). Ergo $dy:$
 $(1 + y) = dy - ydy + y^2 dy - y^3 dy$
 $+ y^4 dy$ &c. in infinitum; consequenter
 $\int (dy: (1 + y))$, seu logarithmus numeri
 $1 + y$ unitate majoris, $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$
 $- \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodsi differentia inter AB & QN
sit y , erit $QN = 1 - y$; consequenter
AQ, seu logarithmus numeri unitate
minoris, $= \int (-dy: (1 - y))$. Est vero $1:$
 $(1 - y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 +$ &c.
in infinitum (§. 45 part. 1). Ergo $-dy:$
 $(1 - y) = -dy - ydy - y^2 dy - y^3 dy - y^4 dy,$

&c. in infinitum; consequenter $\int (-dy:$
 $(1 - y))$, seu logarithmus numeri unitate
minoris, $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$
&c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

256. Si latus potentia Hyperbolæ AB, vel Tab. II.
BC, fuerit 1, BP = y ; erit AP = $1 + y$, & spa- Fig. 29.
tium hyperbolicum asymptoticum $= y - \frac{1}{2}y^2$
 $+ \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120).
Et ubi BQ = y , erit AQ = $1 - y$, adeoque
(si QN = v) ob $1 = v - vy$ (§. 490 part. 1),
elementum spatii hyperbolici asymptotici
 $= 1ydy: (1 - y)$; consequenter spatium
 $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infi-
nitum (§. 120). Possunt ergo etiam loga-
rithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum
si latus potentia AB = 1, abscissa AP est nu-
merus unitate major, spatium asymptoti-
cum BCMP logarithmus numeri unitate
majoris; similiter abscissa AQ est numerus
unitate minor & spatium hyperbolicum
asymptoticum QNCB logarithmus numeri
unitate minoris.

COROLLARIUM II.

257. Quodsi $y = 1$, erit $1 + y = 2$; adeo-
que logarithmus hyperbolicus binarii $= \frac{1}{2}$
 $- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM III.

258. Quoniam logarithmus ipsius 1:
 $(1 + x)$ & numeri integri $1 + x$ idem est
(§. 351 Arithm.), fractio vero 1: $(1 + x)$

Qqq 3 nume-

numerus unitate minor; pro $1-y$ ponatur $1: (1+x)$, formula posterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum satisfacit. Nempe cum sit ex hypothesi

$$1-y = 1: (1+x)$$

$$\text{erit } \frac{1-y}{1+x} = \frac{1}{1+x} = y$$

$$\text{hoc est, } \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} = y$$

adeoque in formula $y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. pro y substitui debet $x: (1+x)$, si numeri unitate majoris logarithmus consideretur.

SCHOLIUM.

259. Formula posterior si in casu quoque priore, ubi numerus cuius logarithmus queritur unitate major, adhibetur, inventio logarithmi facilius opera absolvitur; quia series citius convergit, quam si priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum Neperianis, adeoque diversos esse a Briggianis, quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolicus sint ad Briggianos ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii Briggianum, sitque logarithmus binarii hyperbolicus 2.302585092994 &c. Briggianus 1.000000000000; hyperbolicus ad Briggianos, quibus vulgo utimur, facile reducuntur.

PROBLEMA CVIII.

260. Dato logarithmo invenire numerum.

Sit logarithmus l , numerus $1+y$ erit $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Quare cum $y = l + bl^2 + (2b^2 - c)l^3 + (5bc - 5b^3 - d)l^4 + (14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e)l^5$ &c. (§.366 part. I) ob $a=1$, & $b = -\frac{1}{2}$, $c = +\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$, $e = +\frac{1}{5}$ &c. erit

$$2b^2 - c = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$5bc - 5b^3 - d = -\frac{5}{6} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{-40 + 30 + 12}{48} = \frac{2}{48} = +\frac{1}{24}$$

$$14b^4 + 6bd - 21b^2c + 3c^2 - e = \frac{14}{16} + \frac{6}{8} - \frac{21}{12} + \frac{3}{9} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{7}{8} + \frac{6}{8} - \frac{14}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{40-15-24}{120} = -\frac{1}{120}$$

adeoque

$$y = l + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{6}l^3 + \frac{1}{24}l^4 + \frac{1}{120}l^5 \text{ \&c.}$$

$$\text{in infinit.} = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \frac{l^3}{1.2.3} + \frac{l^4}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{l^5}{1.2.3.4.5} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y = l + \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l est logarithmus numeri $1+y$; erit numerus $1+y = 1 + l + \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus unitate minoris $1-y$; erit $l = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y = l - \frac{1}{1.2}l^2 + \frac{1}{1.2.3}l^3$

$$- \frac{1}{1.2.3.4}l^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}l^5, \text{ \&c. in infi-}$$

$$\text{nitum, consequenter } 1-y = 1 - \frac{l}{1}$$

$$+ \frac{1}{1.2}l^2 - \frac{1}{1.2.3}l^3 + \frac{1}{1.2.3.4}l^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$$

&c. in infinitum. Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, &c. erit $y = l - \frac{1}{2}Al + \frac{1}{3}Bl - \frac{1}{4}Cl + \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum; consequenter $1-y = 1 - l + \frac{1}{2}Al - \frac{1}{3}Bl + \frac{1}{4}Cl - \frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

PRO-

PROBLEMA CIX.

261. Dato sinu, invenire logarithmum.

Sit radius = 1, cosinus = x, erit sinus

$$= \sqrt{(1-xx)} (\S. 377 \text{ part. 1}) = \sqrt{((1+x)(1-x))}.$$

$$\text{Sed } l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$$

$$\& l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$$

$$\text{Ergo } l(1-xx) = -\frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6 (\S. 337 \text{ Aritb.})$$

$$\& l\sqrt{(1-xx)} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 \&c. (\S. 338 \text{ Ar.}).$$

PROBLEMA CX.

262. Data tangente, invenire logarithmum.

Sit radius, seu sinus totus, hoc est, tangens 45° ($\S. 32 \text{ Trigon.}$) = 1; tangens arcus 45° majoris = $1+x$; tangens arcus 45° minoris = $1-x$; erit logarithmus tangens in casu posteriore $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in casu posteriore $-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum ($\S. 255$.)



S E C T I O T E R T I A

DE CALCULO EXPONENTIALI.

C A P U T I

De natura Calculi exponentialis.

DEFINITIO X.

263. **C**alculus exponentialis est methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium summandi.

DEFINITIO XI.

264. Quantitas exponentialis est dignitas, cujus exponens variabilis, ex. gr. x^x , a^x .

PROBLEMA CXI.

265. Quantitatem exponentialem differentiare.

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revocentur: quo facto, differentiatio succedit per $\S. 243$.

E. gr. Quæritur differentiale quantitatis exponentialis x^y . Fiat

$$x^y = z$$

$$\text{erit } ylx = lz (\S. 341 \text{ Aritb.})$$

$$lxdy + ydx : x = dz : z (\S. 243)$$

$$z lxdy + zydx : x = dz$$

$$\text{hoc est, } x^y lxdy + yx^{y-1} dx = dz$$

Sit quantitas exponentialis differentian- da secundi gradus v^x . Fiat, ut ante,

$$v^x = z$$

$$\text{erit } xlv = lz (\S. 341 \text{ Aritb.})$$

$$(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + x^y dv : v = dz : z (\S. 243)$$

$$z(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + zx^y dv : v = dz$$

hoc est,

$$v^x(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + vx^y v^{-1} x^y dv = dz$$

seu

$$v^x x^y lxlvd y + v^x yx^{y-1} lvd x + v^x v^{-1} x^y dv = dz$$

Eadem

Eadem ratione inveniri potest differentiale quantitatis exponentialis cujuscunque alterius.

PROBLEMA CXII.

266. *Differentiale logarithmicum integrare.*

Sit differentiale integrandum $x \ln x dx$.

Fiat

$$\begin{aligned} x &= 1 + y \\ \text{erit } \ln x &= \ln(1 + y) \\ \& \quad dx &= dy \end{aligned}$$

$$x \ln x dx = \ln(1 + y) (1 + y) dy.$$

Est vero $\ln(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.$ in infinitum (§. 255). Ergo $\ln(1 + y) (1 + y) dy = (1 + y) dy (y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.$ in infinitum) = [multiplicatione actu facta]

$$y dy - \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{1}{3}y^3 dy - \frac{1}{4}y^4 dy + \frac{1}{5}y^5 dy \&c. + y^2 dy - \frac{1}{2}y^3 dy + \frac{1}{3}y^4 dy - \frac{1}{4}y^5 dy \&c.$$

h.e. $y dy + \frac{1}{2}y^2 dy - \frac{1}{6}y^3 dy + \frac{1}{12}y^4 dy - \frac{1}{20}y^5 dy \&c.$

Unde tandem habetur $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6 \&c.$
 $= \frac{1}{1 \cdot 2}y^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}y^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}y^5 - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}y^6 \&c.$ in infinitum: in qua serie $y = x - 1$.

PROBLEMA CXIII.

267. *Differentiale exponentialem quantitatem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$.

Fiat $x = 1 + y$, erit $x^x = (1 + y)^{1+y}$, & $dx = dy$, adeoque $x^x dx = (1 + y)^{1+y} dy$.

Fiat $(1 + y)^{1+y} = 1 + v$

erit $(1 + y) \ln(1 + y) = \ln(1 + v)$

hoc est, $(1 + y) (y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.$ in infinitum) $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 \&c.$ in infinitum (§. 255); seu

per calculum præcedentem, $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5 \&c.$ in infinitum $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 \&c.$ in infinitum (§. 266).

Fiat porro

$$\begin{aligned} v &= y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \&c. \\ \text{erit } v^2 &= y^2 + 2ky^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 \\ &\quad + 2my^4 + 2ny^5 \\ v^3 &= y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 \\ &\quad + 3my^5 \\ v^4 &= y^4 + 4ky^5 \\ v^5 &= y^5 \end{aligned}$$

(§. 95 part. I). Unde

$$\begin{aligned} v &= y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \&c. \\ - \frac{1}{2}v^2 &= - \frac{1}{2}y^2 - ky^3 - \frac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5 \&c. \\ &\quad - my^4 - ny^5 \\ + \frac{1}{3}v^3 &= + \frac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5 \&c. \\ &\quad + my^5 \\ - \frac{1}{4}v^4 &= - \frac{1}{4}y^4 - ky^5 \&c. \\ + \frac{1}{5}v^5 &= + \frac{1}{5}y^5 \&c. \\ - y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{20}y^5 &= 0 \end{aligned}$$

Habemus ergo

$$\begin{aligned} 1 - 1 &= 0 & k - \frac{2}{2} &= 0 & m - k + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} &= 0 \\ 1 = 1 & & k = 1 & & m = 1 - \frac{1}{6} &= \frac{5}{6} \\ n - \frac{1}{2}k^2 - m + k - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} &= 0 \\ n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p - km - n + k^2 + m - k + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} &= 0 \\ p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Consequenter

$$\begin{aligned} (1 + y)^{1+y} &= 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 \\ &\quad + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5 \&c. \text{ in infinitum.} \\ \text{Quare differentiale ad integrandum} & \\ \text{propositum } (1 + y)^{1+y} dy &= dy + y dy \\ &\quad + y^2 dy + \frac{1}{2}y^3 dy + \frac{1}{3}y^4 dy + \frac{1}{12}y^5 dy \&c. \\ \text{in infinitum, adeoque } \int (1 + y)^{1+y} dy & \\ &= y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6 \&c. \end{aligned}$$

PRO-

PROBLEMA CXVI.

Tab. I. 274. *Quadrare spatium Logisticum*
Fig. 8. *interminatum HPMI.*

Sit Logistica subtangens $PT = I : la$:

$PM = y$, $Pp = dx$; erit

$$a^x = y \quad (\S. 273).$$

$$\frac{xla = by}{}$$

$$\frac{ladx = dy}{y} \quad (\S. 243)$$

$$\frac{dx = dy}{y} \quad yla$$

$$\frac{ydx = ydy}{yla = dy} : la$$

$$\frac{fydx = y : la = y (I : la) = PM. PT}{}$$

COROLLARIUM I.

275. *Spatium Logisticum interminatum HPMI est trianguli subtangente PT, tangente TM, & semiordinata PM contenti duplum (§. 392 Geom.).*

COROLLARIUM II.

276. *Quoniam Spatium HPMI = PM. PT & ISQH = SQ. PT (§. 274); erit QPMS = (PM - SQ) PT, hoc est, spatium inter duas semiordinatas interceptum æquale rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.*

PROBLEMA CXVII.

277. *Cubare solidum Logisticum ex rotatione spatii interminati HPMI circa asymptotum PH geniti.*

Quoniam (§. 274)

$$dx = dy : yla \quad \text{erit} \quad (\S. 197)$$

$$\frac{py^2 dx : 2r = py^2 dy : 2ryla = pydy : 2rla}{}$$

$$\frac{spy^2 dx : 2r = py^2 : 4rla.}{}$$

COROLLARIUM I.

278. *Quoniam $py^2 : 2r$ est circulus radio $PM = y$ descriptus (§. 197), $py^2 : 4rla$ est cylindrus, cujus basis eadem est cum basi solidi logistici, altitudo vero $I : 2la$ seu $\frac{1}{2}PT$ (§. 541 Geom.).*

COROLLARIUM II.

279. *Est ergo solidum istud logisticum ad conum, cujus altitudo subtangens PT*

$= I : la$, semidiameter basis $PM = y$, ut Tab. I. $py^2 : 4rla$ ad $py^2 : 6rla$, hoc est, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$, Fig. 8. seu ut 6 ad 4, aut ut 3 ad 2 (§. 124 part. I).

PROBLEMA CXVIII.

280. *Determinare subnormalem Logisticam.*

Quoniam $ladx = dy : y$ (§. 274).

$$\text{erit} \quad \frac{dy = yladx}{}$$

$$ydy : dx = y^2 ladx : dx \quad (\S. 35).$$

$$= y^2 la = y^2 : \frac{I}{la}$$

Est adeo subnormalis tertia proportionalis ad tangentem $PT = I : la$ & semiordinatam $PM = y$.

COROLLARIUM.

281. *Quodsi ergo Parabola describatur, cujus parameter subtangenti Logisticae æqualis; semiordinatae Parabolæ eadem sunt cum semiordinatis Logisticae, illius autem abscissis hujus subnormales æquantur.*

PROBLEMA CXIX.

282. *Determinare subtangentem curvae exponentialis, ad quam $x^x = y$.*

Quoniam $xlx = ly$

$$\text{erit} \quad \frac{lx dx + x dx : x = dy : y}{}$$

$$\frac{ylx dx + y dx = dy}{}$$

Ergo subtangens $ydx : dy = ydx : (ylx dx + y dx) = I : (lx + I)$.

Est itaque PT tertia proportionalis ad $AB + AP = I + lx$ & $AB = I$ (§. 268). Tab. III. Fig. 30.

PROBLEMA CXX.

283. *Determinare subnormalem curvae, ad quam $x^x = y$.*

Quia $ylx dx + y dx = dy$ (§. 282); erit subnormalis (§. 35) $ydy : dx = (y^2 lxdx + y^2 dx) : dx = y^2 lx + y^2 = y^2 (lx + I)$.

Quærenda igitur est ad $AB = I$, & $PM = y$, tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad $AB = I$, $AB + AP = I + lx$, arque

atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA CXXI.

Tab. 284. Determinare minimam applica-
III. tam SR in curva exponentiali, ad quam
Fig. 30. $x^x = y$.

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282);
fiat $ylxdx + ydx = 0$ (§. 63).

$$\text{erit } \frac{lx + 1 = 0}{1 = -lx}$$

Fiat ergo AT = AB = 1; erit TV = AR = x (§. 554 part. 1).

Quodsi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ substituatur valor modo inventus — 1; prodibit $x = -ly$. Fiat igitur AQ = VT = — x: erit NQ = SR = y (§. cit part. 1).

PROBLEMA CXXII.

285. Quadrare curvam exponentialem, ad quam $x^x = y$.

Quoniam elementum areæ ydx (§. 98) erit area curvæ = $\int x^x dx = [\text{si pro } x \text{ ponatur } 1 + y] v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 + \frac{1}{6}v^6 \&c.$ in infinitum (§. 267).

PROBLEMA CXXIII.

286. Invenire æquationem ad curvam, cujus subtangens = 1: (1 + lx).

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 20)

$$\text{erit } \frac{dy = y(1 + lx) dx}{dy : y = dx + lxdx}$$

$$\int (dy : y) = ly, \int (dx + lxdx) = xlx$$

$$ly = xlx$$

$$y = x^x \text{ (§. 341 Arithm.)}$$

PROBLEMA CXXIV.

287. Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis $y^2 (lx + 1)$.

Quoniam $y^2 (lx + 1) = ydy : dx$ (§. 35)

$$\text{erit } \frac{y^2 (lx + 1) dx = ydy}{lx dx + dx = dy : y}$$

$$\frac{xlx = ly \text{ (§. 243)}}{x^x = y \text{ (§. 341 Arithm.)}}$$

$$x^x = y \text{ (§. 341 Arithm.)}$$

PROBLEMA CXXV.

288. Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis $y^2 la$.

Quoniam $y^2 la = ydy : dx$ (§. 35)

$$\text{erit } \frac{y^2 ladx = ydy}{ladx = dy : y}$$

$$\frac{xla = ly \text{ (§. 243)}}{a^x = y \text{ (§. 341 Arithm.)}}$$

$$a^x = y \text{ (§. 341 Arithm.)}$$

Est ergo Curva quæsitæ Logarithmica vulgaris, seu Logistica (§. 273).

PROBLEMA CXXVI.

289. Invenire æquationem ad curvam, cujus area $(2x^2 lx - x^2) : 4la$.

Quoniam (§. 98)

$$(4xlxdx + 2xdx - 2xdx) : 4la = ydx$$

$$\text{erit } \frac{4x/x = 4yla}{xlx = yla}$$

$$xlx = yla$$

$$x^x = a^y \text{ (§. 341 Arithm.)}$$

Curva hæc vi Probl. 114 (§. 268) Tab. III. ita construitur, ope Logarithmicæ vulgaris MBN. Sit nempe AB = 1, quæ Fig. 32. in infinitum producat. Fiat AD = a, & AC = x, ducanturque DL & CM ipsi AP, HL & PM ipsi AC parallela; erit DL = AH = la & CM = AP = lx (§. 268). Fiat AF = AH & ducatur IE ipsi CG parallela, per A vero & E recta AG ipsi CM continuatæ in G occurrens, erit CG = x/lx : la = y (§. 268 Geom.); adeoque punctum G in curva quæsitæ, quæ definitur per $x^x = a^y$.

COROLLARIUM I.

Tab. III. Fig. 32. 290. Quia $lx dx + dx = ldy$ (§. 243) erit $\frac{dx}{dy} = \frac{lady}{(lx + 1)}$ $y dx : dy = yla : (lx + 1)$ (§. 20).

Est ergo subtangens curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad AB + AP, CG & constantem AH.

COROLLARIUM II.

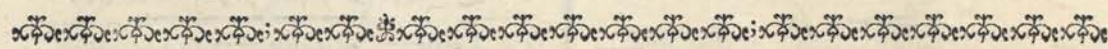
291. Quia $(lx dx + dx) : la = dy$ (§. 290); erit $y dy : dx = y (lx + 1) : la$, adeoque sub-

normalis curvæ hujus exponentialis est quarta proportionalis ad constantem AH, ad AP + AB & ad CG.

Tab. III. Fig. 32.

COROLLARIUM III.

292. Est ergo subtangens ad subnormalem ut $yla : (lx + 1)$ ad $y (lx + 1) : la$, hoc est, ut la^2 ad $(lx + 1)^2$ (§. 124 part. 1) Quare quadratum compositæ ex constante AB & variabili AP est ad quadratum constantis AH ut subnormalis curvæ exponentialis ad ejus subtangentem.



SECTIO QUARTA.

DE CALCULO DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi differentio-differentialis.

DEFINITIO XIV.

293. **C**alculus differentio-differentialis est methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

COROLLARIUM.

294. Quoniam signum differentialis est d (§. 8): differentiale ipsius dx erit ddx : differentiale ipsius ddx erit ddd , & ita porro.

HYPOTHESIS.

295. Scribantur ddx , ddd , ddd &c. compendiosius d^2x , d^3x , d^4x &c.

DEFINITIO XV.

296. Differentiale primi gradus est infinitesima quantitates ordinariæ, ut dx . Differentiale secundi gradus est infinitesima quantitates differentialis primi gradus, veluti ddx , $dx dx$ vel dx^2 , $dx dy$. Differentiale tertii gradus est

infinitesima quantitates differentialis secundi gradus, ut ddd , dx^3 , $dx dy dz$ & ita porro.

PROBLEMA CXXVII.

297. *Invenire regulas differentiandi differentialia quacunque data.*

RESOLUTIO.

Eodem prorsus modo investigari possunt, quo supra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§. 17, 19): id quod uno alteroque exemplo ostendere libet.

Ex. gr. I. Sit investigandum differentiale ipsius $x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Fiat} \quad & x dx = v \\ \text{erit} \quad & dx = v : x \\ & d^2x = (x dv - v dx) : x^2 \quad (\text{§. 19}) \\ & x^2 d^2x = x dv - v dx \\ & v dx + x^2 d^2x = x dv \end{aligned}$$

hoc

hoc est, ob $v = xdx$
 $xdx^2 + x^2d^2x = xdv$

 $dx^2 + xd^2x = dv$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ se mutuo multiplicantes differentiari solent (§.12).

II. Sit differentiale ipsius x : dx investigandum.

Fiat $x : dx = v$

 $x = vdx$

$dx = vd^2x + dx dv$, per cas. præc.
 $dx - vd^2x = dx dv$

hoc est, ob $v = x : dx$
 $dx - xd^2x : dx = (dx^2 - xd^2x) : dx = dx dv$

 $(dx^2 - xd^2x) : dx = dv$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ se mutuo dividentes differentiari solent (§.19).

III. Sit differentiale ipsius dx^2 investigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$d^2x = (dx dv - vd^2x) : dx^2$, per cas. 2.
 $dx^2 d^2x = dx dv - vd^2x$

$vd^2x + dx^2 d^2x = dx dv$

hoc est, ob $v = dx^2$
 $dx^2 d^2x + dx^2 d^2x = 2dx^2 d^2x = dx dv$

 $2dx^2 d^2x = dv$

Differentialium igitur potentiæ veluti dx^2 , eodem modo differentiantur, quo

potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari solent (§.13, seqq.).

COROLLARIUM I.

298. Cum differentialia composita aut se mutuo multiplicent, aut se mutuo dividant, aut potentiæ, sive perfectæ, sive imperfectæ, differentialium primi gradus existant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

COROLLARIUM II.

299. Calculus adeo differentio-differentialis non est diversus a calculo differentiali (§.293).

PROBLEMA CXXVIII.

300. Differentiare differentialia.

RESOLUTIO.

Differentialia considerentur instar ordinariarum quantitatum, & ex circumstantiis casuum specialium judicetur quænam sint variabiles, quænam constantes. Ipsa vero differentiatio absolvatur per Problemata Cap. I. Sect. I. (vi §.299).

Ex. gr. Sit differentiale denuo differentiantum $= 1 : dx$, & 1 quantitas constans, erit $d(1 : dx) = -d^2x : dx^2$ (§.19). Similiter reperitur $d(ydy : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, si dx constans; vel $(dxdy^2 - ydyd^2x) : dx^2$, si dy constans.

CAPUT II.

De usu Calculi differentio-differentialis in inveniendo puncto flexus contrarii curvarum.

DEFINITIO XVI.

Tab. 301. **P**unctum flexus contrarii est punctum M, in quo curva flectitur in partes contrarias, ut scilicet axi, aut puncto cuidam fixo convexitatem obvertat, cum antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regressus*, si curva AMI in contrarias partes flexa regreditur versus verticem A.

PROBLEMA CXXIX.

302. Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatae sunt inter se parallelae.

RESOLUTIO.

Tab. III. **S**int duae curvae AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens FM, sintque PM, pm & QS infinite propinqua, & Pp = pQ, hoc est, dx sit constans. Demittantur ex punctis curvarum M & m perpendiculares MR & mr. Quoniam pm ipsi QS parallela, per hypoth. erit angulus MmR = mr (§. 233 Geom.). Sed MR = Pp & mr = pQ per hypoth. adeoque MR = mr (§. 87 Arithm.). Ergo mR = rS (§. 251 Geom.). Est vero Sr > Vr, quando curva axi concavitatem obvertit, & Sr < Vr, quando convexitas curvae axem respicit. Quamobrem, in casu priore, differentia semiordinatarum dy continuo decrescit, in posteriore autem crescit, sumpta abscissae differentia dx pro constans. In

puncto itaque flexus contrarii differentia semiordinatarum dy est minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur adeo illud punctum, si fiat $ddy = 0$, vel $ddy = \infty$, hoc est, si sumpta dx pro constans, valor ipsius dy denuo differentietur (§. 300) & quae prodit differentia vel nihilo, vel infinito aequalis ponatur.

COROLLARIUM.

303. Quodsi aequatio ad curvam ignotam detur; inveniri potest, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, si ex aequatione differentiali eruatur ratio mR & MR. Ex. gr. In Parabola (§. 388 part. 1).

$$ax = y^2$$

$$\text{adeoque } adx = 2ydy$$

$$a : 2y = dy : dx$$

$$\text{hoc est } a : 2y'ax = dy : dx$$

Crescente adeo abscissa x, decrescit ratio a : 2y'ax (§. 205 Arithm.). Quare cum dx sit constans, per hypoth. dy decrescere debet (§. 204 Arithm.) Parabola igitur constanter concavitatem axi obvertit, adeoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PROBLEMA CXXX.

304. Determinare punctum flexus contrarii M in Cycloide AMN ejus natura, ut sit AQB : BN = AQ : QM.

Tab. III. Fig. 34.

Sit

Tab. Sit femiperipheria circuli genitoris

III. $AQB = p$, $BN = a$, $AB = 1$, $PQ = v$,
Fig. 34. $AQ = z$, $AP = x$, $PM = y$. Quoniam
per hypoth.

$$AQB : BN = AQ : QM$$

$$p : a = z : \frac{az}{p}$$

$$\text{erit } PM = PQ + QM = v + az : p$$

Est adeo æquatio ad curvam

$$y = v + az \cdot \frac{p}{p}$$

$$\text{unde } dy = dv + adz : p$$

$$\text{vel } pdy = pdv + adz$$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - xx)}$ (§. 157) &

ob $v = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 part. I),

$$dv = (dx - 2x dx) : 2\sqrt{(x - xx)}$$

$$\text{Ergo } 2 pdy = (pdx - 2px dx + adx) : \sqrt{(x - xx)}$$

Quodsi adeo dx fumatur pro constante; erit (§. 300)

$$2pddy = \frac{2pV'(x - xx) dx^2}{x - xx}$$

$$\frac{pdx^2 - 4px dx^2 + adx^2 + 4px^2 dx^2 - 2ax dx^2}{(x - x^2) 2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax) dx^2}{2(x - xx) \sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(2ax - p - a) dx^2}{2(x - xx) \sqrt{(x - xx)}} \text{ Quare (§. 302)}$$

$$\frac{(2ax - p - a) dx^2}{2(x - xx) \sqrt{(x - xx)}} = 0$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \frac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo $CP = AP - AC = x - \frac{1}{2} = p : 2a$. Est adeo $a : p = \frac{1}{2} : CP$.

$$BN : AQB = BC : CP.$$

PROBLEMA CXXXI.

305. Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $axx = (xx + aa)y$.

$$\text{Quoniam } axx = (xx + aa)y$$

$$\text{erit } axx : (xx + aa) = y$$

$$\frac{2ax^3 dx + 2a^3 x dx - 2ax^3 dx}{(xx + aa)^2} = dy$$

$$\text{hoc est, } \frac{2a^3 x dx}{x^4 + 2a^2 x^2 + a^4} = dy$$

Quodsi adeo dx fumatur pro constante reperietur (§. 300)

$$(2a^3 x^4 + 4a^3 x^2 + 2a^7) dx^2 - (8a^3 x^4 + 8a^3 x^2) dx^2$$

$$\frac{(x^2 + a^2)^4}{2a^7 - 6a^3 x^4 - 4a^3 x^2} dx = ddy$$

Quare (§. 302)

$$2a^7 - 6a^3 x^4 - 4a^3 x^2 = 0$$

$$\frac{2a^7 - 6a^3 x^4 - 4a^3 x^2}{(2a^3)}$$

$$a^4 - 3x^4 - 2a^2 x^2 = 0$$

$$\frac{aa - 3xx}{(aa + xx)}$$

$$aa - 3xx = 0$$

$$aa = 3xx$$

$$\frac{1}{3}aa = xx$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}aa} = x$$

Quodsi valor ipsius x^2 in æquatione data $axx = (xx + aa)y$ substituitur: prodibit

$$\frac{1}{3}a^2 = \frac{4}{3}aay$$

$$\frac{1}{3}a = y$$

Quare si $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ & $\frac{1}{3}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit descripta.

PROBLEMA CXXXII.

306. Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$

$$\text{Quoniam } 4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$$

$$\text{erit } 4b^3 dx = 4b^2 y dy - 4y^3 dy$$

$$\frac{b^3 dx}{b^2 y - y^3} = dy$$

Porro quoniam dx constans, reperietur (§. 300),

ddy

$$ddy = \frac{-b^5 dxdy + 3b^3 y^2 dxdy}{(b^2 y - y^3)^2} = 0$$

$$3b^3 y^2 - b^5 = 0$$

$$3y^2 = b^2$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{3} b^2}$$

Substituatur hic valor in æquatione ad curvam $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$, erit

$$4b^3 x = \frac{2}{3} b^4 - \frac{1}{9} b^4 = \frac{5}{9} b^4$$

$$x = \frac{5}{36} b$$

Quodsi fit $x = 0$, erit

$$2b^2 y^2 - y^4 = 0$$

$$2b^2 = y^2$$

$$\sqrt{2b^2} = y$$

Quodsi ponamus $dy = \infty$, erit ob

$$b^3 dx : (b^2 y - y^3) = dy$$

$$b^2 y - y^3 = 0$$

$$b^2 - y^2 = 0$$

$$b^2 = y^2$$

$$b = y$$

in casu maximi (§. 63).

Quodsi denique hic valor substituatur in æquatione ad curvam $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$; erit

$$4b^3 x = 2b^4 - b^4 = b^4$$

adeoque $x = \frac{1}{4} b$

Curvæ igitur hujus ductus est prorsus mirabilis.

PROBLEMA CXXXIII.

307. Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $ay^2 = x^3 - bx^2$.

$$\text{Quia } ayy = x^3 - bx^2$$

$$\text{erit } 2aydy = 3x^2 dx - 2bx dx$$

$$dy = \frac{3x^2 dx - 2bx dx}{2ay}$$

$$ddy = 0 =$$

$$12axy dx^2 - 4aby dx^2 - 6ax^2 dxdy + 4abxdxdy$$

$$4a^2 y^2$$

Hinc

$$(12axy - 4aby) dx^2 = (6ax^2 - 4abx) dxdy$$

$$\frac{(6x - 2b)y dx}{3x^2 - 2bx} = dy = \frac{(3x^2 - 2bx) dx}{2ay}$$

$$(12x - 4b) ayy = (3x^2 - 2bx)^2$$

$$(12x - 4b)(x^3 - bx^2) = (3x^2 - 2bx)^2$$

hoc est,

$$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2 x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2 x^2$$

$$3x^4 - 4bx^3 = 0$$

$$3x - 4b = 0$$

$$3x = 4b$$

$$x = \frac{4}{3} b$$

Substituatur valor ipsius x in æquatione data $ayy = x^3 - bx^2$; reperietur

$$ayy = \frac{64}{27} b^3 - \frac{16}{9} b^3 = \frac{64}{27} b^3 - \frac{48}{27} b^3 = \frac{16}{27} b^3$$

$$y = \frac{4}{3} \sqrt{(b^3 : 3a)}$$

PROBLEMA CXXXIV.

308. Determinare punctum flexus contrarii in curva ad quam $y - a = (x - a)^{3:5}$

$$\text{Quoniam } y - a = (x - a)^{3:5}$$

$$\text{erit } dy = \frac{3}{5} (x - a)^{-2:5} dx$$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante; reperietur

$$ddy = -\frac{6}{25} (x - a)^{-7:5} dx^2 = 0$$

$$-\frac{6}{25} (x - a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0$$

Quoniam nullus valor ipsius x prodit in hypothefi $ddy = 0$; ponatur

$$-6 dx$$

$$\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5} dx^2 = \infty$$

$$\text{erit } \frac{25}{25} \frac{(x-a)^{7:5} = 0}{x-a = 0}$$

$$x = a$$

PROBLEMA CXXXV.

309. Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum semiordinata CM, Cm, ex puncto fixo C ducuntur.

Tab. III. Fig. 35. n. I. 2. Sit Cm ipsi CM infinite propinqua & CM = y. Tangat TM curvam in puncto M, & occurrat ipsi CT ad CM perpendiculari in T. Erigatur etiam Ct perpendicularis ad Cm, & ducatur tangens tm ad punctum m, quæ ipsi Ct in t occurret. Secabit autem tangens TM perpendicularem Ct in L, eritque Ct < CL, quando curva puncto C seu polo convexitatem obvertit: at eadem Ct > CL, quando curva est versus polum C concava. Igitur in flexus contrarii puncto Lt = 0. Describatur jam ex centro C radio CM arcus MR = dx & radio CT arcus TH; erit ob MCT = m Ct (§. 145 Geom.) MCm = HCT (§. 91 Arithm.); consequenter arcus TH ∝ MR (§. 141 Geom.). Porro TCM est rectus, per construct. MRm itidem rectus (§. 38), adeoque TCM = MRm (§. 145 Geom.) Et quia TMC = MmC + MCm (§. 239 Geom.), & MCm = 0; erit MmR = TMC, consequenter (§. 267 Geom.)

$$mR : MR = MC : TC$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ob arcus MR & TH similes, per demonstrata, erit (§. 413 Geom. & §. 171 Arithm.)

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

$$CM : CT = MR : TH$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$

Tab. III. Fig. 35.

Denique cum, ob infinite parvum LCT, angulus HLT = LTC (§. 239 Geom.), & H rectus (§. 38), MCT itidem rectus, per construct. erit (§. 267 Geom.)

$$CM : CT = TH : HL$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : HL$$

$$\text{Ergo } HL = dx^2 : dy^2.$$

Est vero ob CT = ydx : dy, sumto arculo MR = dx pro constante, tH = (dx dy^2 - y dx ddy) : dy^2 (§. 300). Ergo tL = tH + HL = (dx dy^2 - y dx ddy + dx^2) : dy^2.

$$\text{Fiat jam } \frac{dx dy^2 - y dx ddy + dx^2}{dy^2} = 0$$

$$\text{erit } dy^2 + dx^2 = y ddy$$

PROBLEMA CXXXVI.

310. Determinare punctum flexus contrarii in Conchoide NICOMEDIS.

Sit AB = qM = a, BC = b, Cq = z, Tab. I. CM = y, Mr = dx, erit mr = dy & Fig. 5. (§. 535 part. 1)

$$\frac{z + a = y}{dz = dy}$$

Porro Bq = √(zz - bb) (§. 417 Geom.) & ducto arculo qt, erit ob rectos t & B, atque S & q non nisi infinite parvo angulo qCS differentes (§. 239 Geom.), adeoque æquales (§. 4), ΔSqt ∝ ΔBCq (§. 267 Geom.); consequenter

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob sectores Cqt & CMr similes est

S s s

Cq :

Tab.I.
Fig.5.

Cq: qt = CM: Mr

$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2-b^2)}}$$
 Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2-b^2)}$

$$\frac{zdx \sqrt{(z^2-b^2)}}{bz + ab} = dz = dy$$

Si itaque dx sumatur pro constante, cum sit differentiale ipsius $zdx\sqrt{(z^2-b^2)}$
 $= dzdx\sqrt{(z^2-b^2)} + z^2dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)}$
 $= (2z^2-b^2)dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)}$ & differentiale denominatoris $bz + ab$ sit bdz , reperitur $ddy = (2bz^3 - b^3z + 2abz^2 - ab^3)dzdx : (bz + ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} - bz\sqrt{(z^2-b^2)}dzdx : (bz + ab)^2 = (bz^3 + 2abbz^2 - ab^3)dzdx : (bz + ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} =$
 [substituto valore ipsius dz,]
 $(bz^4 + 2abz^3 - ab^3z)dx^2 : (bz + ab)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii $yddy = dx^2 + dy^2$ (S. 308)
 hinc tandem eruitur
 $b(z+a)(z^4 + 2az^3 - ab^2z)dx^2 : (bz + ab)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2)dx^2 : (bz + ab)^2$
 $z^4 + 2az^3 - ab^2z = (bz + ab)^2 + z^4 - b^2z^2$
 $2az^3 - ab^2z = b^2z^2 + 2ab^2z + a^2b^2 - b^2z^2 = 2ab^2z + a^2b^2$
 $\frac{2az^3 - 3ab^2z = a^2b^2}{z^3 - \frac{3}{2}b^2z - \frac{1}{2}ab^2 = 0}$

Tab.I. Describatur itaque parametro b parabola & (S. 622 part. 1) fiat $AL = \frac{5}{4}b$, & $LI = \frac{1}{4}a$. Ex centro I per verticem A describatur circulus: dico esse $PM = z$. Nam $AI^2 = LI^2 + AL^2 = \frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb$, & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = IR^2 + MR^2$, $\frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb = \frac{z^4}{bb} - \frac{10}{8}z^2 + \frac{25}{16}bb + z^2 - \frac{5}{2}az + \frac{1}{16}aa$

Tab.I.
Fig.5.

$$\frac{z^4}{bb} - \frac{5}{4}z^2 - \frac{1}{2}az = 0$$

$$z^3 - \frac{5}{2}b^2z - \frac{1}{2}ab^2 = 0 \quad z:bb$$

SCHOLIUM.

311. Nisi inconsulta nobis visa fuisset figurarum multiplicatio, Parabolam circa axem CT descripsissemus, statuto vertice in C & crure sursum tendente.

PROBLEMA CXXXVII.

312. Determinare punctum flexus contrarii in Spirali parabolica AMC, qua generatur, si axis Parabola in peripheriam circuli incurvatur. Tab. III. Fig.36.

Quoniam semiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (S. 38). Quare si parameter Parabolæ a , abscissa AP = v , PM = y ; erit æquatio ad Spiralem parabolicam

$$av = y^2$$

$$\text{adeoque } \frac{adv = 2ydy}{dv = 2ydy : a}$$

Sit porro radius circuli = r , MR = dx ; erit CM = $r - y$, &
 CP: Pp = CM: MR
 $r : dv = r - y : dx$

$$\frac{rdx = rdv - ydv}{dx = (r - y)dv : r}$$

hoc est, substituto valore ipsius dv,
 $(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$
 $(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)dy^2 : a^2r^2 = dx^2$
 &, si dx sumatur pro constante,
 $\frac{2r^2y^2 - 4ydy^2 + 2ryddy - 2y^2ddy = 0}{ar}$
 $(r - 2y)dy^2 + (ry - y^2)ddy = 0$
 $(r - y)yddy = (2y - r)dy^2$
 $yddy = (2y - r)dy^2 : (r - y)$

Habe-

Habemus adeo

ob $dx^2 + dy^2 = yddy$ (§. 309)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2) dy^2}{a^2r^2} = \frac{(2y-r) dy^2}{r-y}$$

$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$

$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y est femiordinata PM in puncto flexus contrarii.

C A P U T III.

De usu Calculi differentio-differentialis in investigandis Evolutis curvarum & Radio osculi.

DEFINITIO XVII.

Tab. 313. **S**I curvæ BC filum circumpli- III.
III. cetur & successive iterum ab
Fig. 37. ea abducatur, extremitas ejus A in
rectam MC extensi curvam aliam describit, quam HUGENIUS inventor (*k*)
Curvam ex evolutione descriptam; sicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO XVIII.

314. Portio fili MC appellatur *Radius Evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius osculi*. Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C describitur, dicitur curvam ex evolutione descriptam in M *osculari*.

COROLLARIUM I.

315. Evoluta igitur BC est locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione descriptam AMI osculantium.

COROLLARIUM II.

316. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

COROLLARIUM III.

317. Quia elementum arcus Mm in curva ex evolutione descripta est arcus circu-

li radio CM descriptus (§. 313); radius Tab. evolutæ CM est ad curvam AMI perpendicularis (§. 38). III.

Fig. 37.

COROLLARIUM IV.

318. Quoniam radius evolutæ MC ipsam evolutam BC continuo tangit, ceu ex genesi manifestum (§. 313); curvæ ex evolutione per innumera puncta describuntur, si tangentes in quotlibet punctis evolutæ producantur: donec arcubus sibi respondentibus æquales fiant.

SCHOLIUM.

319. Meditatio de curvarum osculis debetur illustri LEIBNITIO, qui primus Evolutarum Hugenianarum in metienda curvedinis curvarum usum ostendit.

PROBLEMA CXXXVIII.

320. Determinare Radium osculi vel Tab. curvedinis in curvis, quarum femiordinata PM & pm sunt ad axem perpendiculares. III. Fig. 37.

RESOLUTIO.

Sit femiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua; sit item radius osculi *Cm* alteri CM infinite propinquus. Ducatur CE ipsi AB parallela, donec

Sff 2

femior-

(k) In Horolog. Oscillatorio; part. 3. Def. 3. if. 60.

Tab. III. Fig. 37. femiordinatæ MP continuatæ in E occurrat, & MG eidem axi AB parallela. Quoniam anguli E & R sunt recti, & ob EMG & CMm (§. 317) rectos adeoque æquales (§. 145 *Geom.*) utrinque angulo CMG sublato, EMC = GMm; erit (§. 267 *Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = t : \frac{t' \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

Jam cum radius MC constans intelligatur, quandiu ex centro C arcus infinite parvus Mm describitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali Rm; erit radii osculi CM differentiale nullum (§. 7). Sed, si dx sumatur pro constante, differentiale ipsius MC est

$$\frac{dt' \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} + \frac{tdy ddy}{dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

$$\text{Ergo } \frac{dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy}{dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$$

$$dtdx^2 + dtdy^2 = -tdyddy$$

Quoniam mR differentiale femiordinatæ etiam differentiale ipsius ME ob PE constantem; erit $dt = dy$.

$$\text{Quare } dx^2 + dy^2 = -tddy$$

$$(dx^2 + dy^2) : -dddy = t$$

Quod si itaque, ex æquatione ad curvam datam, substituatur valor ipsius dy^2 & $-dddy$; prodibit ME = t in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipse desideretur (quem interdum inveniri præstat) fiat (§. 268 *Geom.*) ob PH = ydy : dx (§. 35)

$$MP : PH = ME : EC$$

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} : \frac{dx^2 dy + dy^3}{-dxddy} \quad \text{Tab. III. Fig. 37.}$$

$$\text{Unde } EC^2 = \frac{dx^4 dy^2 + 2dx^2 dy^4 + dy^6}{dx^2 ddy^2}$$

$$ME^2 = \frac{dx^4 + 2dx^2 dy^2 + dy^4}{ddy^2} \\ = \frac{dx^5 + 2dx^4 dy^2 + dx^2 dy^4}{dx^2 ddy^2}$$

$$MC^2 = \frac{dx^5 + 3dx^4 dy^2 + 3dx^2 dy^4 + dy^6}{dx^2 ddy^2} \\ = \frac{(dx^4 + 2dx^2 dy^2 + dy^4)(dx^2 + dy^2)}{dx^2 ddy^2}$$

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$$

PROBLEMA CXXXIX.

321. Data æquatione ad curvam algebraicam, invenire æquationem ad Evolutam.

RESOLUTIO.

- Investigentur quantitates BN & CN in valore abscissæ AP aut femiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§. 320): unde subducta PM relinquit PE = NC. Sed per analogiam PM : PH = ME : EC (§. 268 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex AP + EC = AN subtrahatur AB radius Evolutæ in vertice B, per Probl. præc. determinandus, relinquitur BN.
- Fiat valor ipsius BN = v, CN = z & communis æquationum reductio dabit æquationem ad Evolutam in puris v & z atque constantibus.

PROBLEMA CXL.

322. Invenire Radium circuli Parabolam osculantis, & æquationem ad ejus Evolutam.

I. Quo-

I. Quoniam $ax = y^2$
erit $\frac{adx}{2y} = \frac{2ydy}{2y}$

$adx : 2y = dy$
 $a^2 dx^2 : 4y^2 = dy^2$

h. e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, si dx fumatur pro constante,
invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$

Tab. III. Unde $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{(4x dx + adx^2) 4x\sqrt{ax}}{4ax dx^2} =$

Fig. 37. $\frac{(a + 4x)\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a} = y + \frac{4xy}{a}$

$= t = ME = PM + PE$. Est vero $PM = y$.
Ergo $PE = 4xy : a$, hoc est, quia $x = y^2$:
 a , $PE = 4y^3 : aa$.

Constructio. Quoniam $PM = y$, $TP = 2y^2 : a$,
(§. 21); si in T excitetur ad TM perpen-
dicularis TE ipsi MP continuatae in E occur-
rens; erit $PE = 4y^3 : aa = 4y^3 : aa$ (§. 327
Geom.). Quodsi ulterius in E & M excitentur
perpendiculares EC & MC ad ME &
 MT ; communis intersectio in C radium
osculi seu Evolutae MC determinabit
(§. 317).

II. Quoniam EC ipsi PH parallela;
erit (§. 268 *Geom.*) ob $PH = \frac{1}{2}a$ (§. 36)

$MP : PH = ME : EC$

$y : \frac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \frac{1}{2}a + 2x$

adeoque $EC^2 = \frac{1}{4}aa + 2ax + 4xx$

$ME^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

$MC^2 = \frac{1}{4}aa + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a$.

Jam cum MC coincidit in AB , hoc est,
quando radius Evolutae est AB , $x = 0$.
Quare $AB^2 = \frac{1}{4}aa$ & hinc $AB = \frac{1}{2}a$. Est
adeo $BN = AP + PM - AB = 3x$
 $+ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam $BN = v$,
 $CN = PE = z$: erit

$v = 3x$ $z = 4x\sqrt{ax} : a$

$\frac{1}{3}v = x$ $z = \frac{4}{3}v\sqrt{\frac{1}{3}av} : a$

$3az = 4v\sqrt{\frac{1}{3}av}$

$9a^2 z^2 = \frac{16}{3}av^3$

$27az^2 = 16v^3$ $a : 3$

Tab.

III.

Fig. 37.

En æquationem ad evolutam Parabolae
Apolloniana: unde intelligitur Evolutam
Parabolae APOLLONII esse Parabolam se-
cundi generis, cujus parameter = $\frac{27}{16}$ pa-
rametri Parabolae *Apolloniana*.

III. Si MC in terminis analyticis quaeratur, erit, substitutis in formula generali
 $(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dx ddy$ valoribus
 dy^2 & $-ddy$ paulo ante inventis, $MC =$
 $(dx^2 + \frac{adx^2}{4x})\sqrt{(dx^2 + \frac{adx^2}{4x})} 4x\sqrt{ax} : adx^3$
 $= (4x + a)dx^3\sqrt{(4x + a)4x\sqrt{ax}} : 8ax dx^3\sqrt{x}$
 $= (4x + a)\sqrt{(4x + a)} : 2\sqrt{a}$

Quodsi fiat $x = 0$, erit vi n. I, $ME = 0$
& $MC = a\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = \frac{1}{2}a$, hoc est, circu-
li Parabolam in vertice osculantis dia-
meter æquatur parametro, & centrum
ejus, ob $ME = 0$, est in axe Parabolae.
Porro, quia $MC = \frac{(4x + a)\sqrt{(4x + a)}}{2\sqrt{a}}$

$= \frac{(4ax + aa)\sqrt{(4ax + aa)}}{2a^2}$, & $\frac{1}{2}\sqrt{(4ax + aa)}$

$= MH$ seu normali: erit $MC = \frac{8MH^3}{2a^2}$

Est autem $8MH^3$ cubus duplæ nor-
malis MH , sicuti $2a^2$ duplum quadrati
parametri.

Constructio. Fiat $a : 2MH = 2MH : \frac{4MH^2}{a}$ & $2MH : \frac{4MH^2}{a} = \frac{4MH^2}{a} : \frac{8MH^3}{a^2}$

hoc est, quaeratur ad parametrum & duplam
normalem $2MH$ quarta continue proportio-
nalis, erit ejus dimidium radius osculi MC .

Sff 3

Quoniam

Tab. III. Fig. 37. Quoniam etiam $MC = 4MH^2 : a^2$, erit etiam $a : MH = MH : \frac{MH^2}{a}$ & $MH : \frac{MH^2}{a}$

$= \frac{MH^2}{a} : \frac{MH^2}{a^2}$, hoc est, quaratur ad parametrum & normalem MH quarta continue proportionalis, erit ejus quadrupla radius osculi seu evolutæ MC .

PROBLEMA CXLII.

323. Determinare Radium osculi seu Evolutæ MC in infinitis Parabolis aut Paraboloidibus.

Ad infinitas parabolæ (§. 519 part. 1).

$$y^m = a^{m-1}x$$

$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante, erit

$$(m^2 - m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(m^2 - m)y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$$

$$(m - 1)y^{-1}dy^2 = -ddy$$

Quamobrem

$(dx^2 + dy^2) : -ddy = (ydx^2 + ydy^2) : (m-1)dy^2$
hoc est, ob $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2 : a^{2m-2}$

$$ME = \frac{m^2y^{2m-1}dy^2 + a^{2m-2}ydy^2}{(m-1)a^{2m-2}dy^2} =$$

$$\frac{m^2y^{2m-1} + a^{2m-2}y}{(m-1)a^{2m-2}} = \frac{m^2y^{2m-1}}{(m-1)a^{2m-2}} + \frac{y}{m-1}$$

$$= \frac{1}{m-1}y + \frac{m^2x^2}{(m-1)y}$$

Sit jam $m = 2$, erit $x = y^2 : a$ & hinc $x^2 = ax \cdot y^2 : a^2 = xy^2 : a$, adeoque $ME = 4xy^2 : ay + y = 4xy : a + y$, ut in Problemate præcedente.

PROBLEMA CXLII.

324. Determinare Radium osculi in circulo.

Quoniam ad circulum (§. 377 part. 1)

$$y^2 = 2rx - xx$$

$$\text{erit } 2ydy = 2rdx - 2xdx$$

$$ydy = rdx - xdx$$

Quare si dx sumatur pro constante, erit

$$dy^2 + yddy = -dx^2$$

$$(dx^2 + dy^2) : y = -ddy$$

Quare (§. 320)

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{y(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2} = y$$

Est itaque $ME = y$, hoc est, punctum E cadit in P , adeoque C in centrum circuli H (§. 38, 320). Radius igitur circuli idem est cum radio osculi, hoc est, circulus, qui circulum osculatur, huic congruit & circuli Evoluta est centrum ejus.

PROBLEMA CXLIII.

325. Invenire Radium osculi in Ellipsi. Quoniam ad Ellipsin (§. 420 part. 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$\text{erit } 2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$$

$$\text{ob } a^2y^2 = a^2bx - abx^2.$$

Unde, si dx sumatur pro constante,

$$ddy = \frac{4bdx^2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}{4a^2bx - 4abx^2}$$

$$\frac{a^2b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

$$\frac{(-4a^2b^2x + 4ab^2x^2 - a^2b^2 + 4a^2b^2x - 4ab^2x^2)dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

$$= \frac{a^2b^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

Nimirum si $D = 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$

& $N = abdx - 2bxdx$; reperietur $dD = (a^2bdx - 2abxdx) : \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$,

$$\text{adeoque } \frac{dD \cdot N}{D^2} =$$

$$\frac{a^2b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

quæ est differentialis valoris ipsius dy pars negativa (§. 19).

Est

Tab. III. Fig. 37.

Est vero porro

$$dy^2 = \frac{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2) dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)}$$

Quare $dy^2 + dx^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2) dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$ & $(dy^2 + dx^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2) \sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)} dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2) 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$; consequenter $MC = (dx^2 + dy^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2) \sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)} : 2a^2b^2 =$ (brevitatis gratia) $v\sqrt{v} : 2a^2b^2$.

Est vero (§. 44) normalis $MH = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$. Quare cum sit $y = \sqrt{(abx - bx^2)} : \sqrt{a}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{v} : 2\sqrt{(abx - bx^2)} : \sqrt{a}$. Erit $MH = \sqrt{(abx - bx^2)} dx\sqrt{v} : 2a\sqrt{(abx - bx^2)} dx = \sqrt{v} : 2a$; consequenter $MH^2 = v\sqrt{v} : 8a^2$; adeoque $4MH^2 = v\sqrt{v} : 2a^3$.

Est itaque $MC = v\sqrt{v} : 2a^3b^2 = 4MH^2 : b^2$

Constructio. Fiat $b : MH = MH : MH^2$ & $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^2}{b}$

hoc est, quærat ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius osculi MC .

COROLLARIUM.

326. Si AP , sive $x = 0$: circuli in A Ellipsin osculantis AB radius reperitur $a^2b^2/a^2b^2 : 2a^2b^2 = a^2b^2 : 2a^2b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA CXLIV.

327. Invenire Radium osculi seu Evoluta in Hyperbola.

Quoniam ad Hyperbolam (§. 459 part. 1) $ay = bx + bx^2$, radius osculi MC eodem profus, ut in Probl. præced. modo invenitur $(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x$

$+ 4b^2x^2) \sqrt{(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)} : 2a^2b^2 = 4MH^2 : b^2$ & si $x = 0$, hoc est in vertice, $= a^2b^2 \sqrt{a^2b^2} : 2a^2b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA CXLV.

328. Invenire radium circuli MC Cycloidem AMB in M osculantis.

Tab. III. Fig. 39.

Sit diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$, $PM = y$, erit $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 part. 1), arcus $AQ = \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 157); adeoque $PM = PQ + QM = \sqrt{(x - xx)} + \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§. 575 part. 1). Quamobrem

$$y = \sqrt{(x - xx)} + \int \frac{dx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$dy = \frac{dx - 2xdx + dx}{2\sqrt{(x - xx)}} = \frac{2dx - 2xdx}{2\sqrt{(x - xx)}} = dx(1 - x) : \sqrt{x} \sqrt{(1 - x)} = dx\sqrt{(1 - x)} : \sqrt{x}$
Quodsi ergo dx sumatur pro constante, reperietur

$$ddy = -dx^2\sqrt{x} : 2x\sqrt{(1 - x)} - dx^2\sqrt{(1 - x)} : 2x\sqrt{x} = (-x dx^2 - dx^2 + x dx^2) : 2x\sqrt{(x - xx)} = -dx^2 : 2x\sqrt{(x - xx)}$$

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2 : (1 - x) : x = (x dx^2 + dx^2 - x dx^2) : x = dx^2 : x$; eruitur $MC = (dx^2 + dy^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$ (§. 320) $= 2x dx^3 \sqrt{(x - x^2)} : x dx^3 \sqrt{x} = 2\sqrt{(1 - x)}$ $= 2DQ$ (§. 417 Geom.). Nam

$$PD^2 = 1 - 2x + xx$$

$$PQ^2 = x - xx$$

$DQ^2 = 1 - x$. Ergo $DQ = \sqrt{(1 - x)}$. Constructio. Quoniam tangens TM ipsi AQ parallela (§. 132); $TMQ = AQP$ (§. 233 Geom.). Est vero AQD rectus (§. 317 Geom.), & TMC itidem rectus (§. 317); Ergo $QMC = PQD$ (§. 91 Arithm.); consequenter MC ipsi QD parallela. Constructio igitur talis est: Ducatur MC ipsi QD parallela, & fiat $EC = EM$; erit C punctum in Evoluta Cycloidis.

Co-

COROLLARIUM I.

329. Si $x=0$; erit radius evolutæ $2\sqrt{1} = 2 = 2AD$, quia $AD=1$. Quare si DG fiat $= AD$; in G terminabitur Evoluta ex una parte. Si $x=AD=1$; erit radius Evolutæ $2\sqrt{1-1} = 2\sqrt{0} = 0$. Quare Evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM II.

330. Quodsi BL ipsi QD vel MC parallela ducatur, erit $LBD = BDQ$ (§. 233 *Geom.*), adeoque arcus QD & BL (§. 322 *Geom.*) chordæque cognomines (§. 289 *Geom.*); consequenter $BL = EC$ (§. 337 *Geom.*), & hinc LC ipsi BE æqualis & parallela (§. 257 *Geom.*). Est vero BE arcui QD (§. 575 *part. 1*) adeoque & alteri BL , per demonstr. æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§. 87 *Aritbm.*). Est itaque Evoluta Cycloidis itidem Cyclois æqualis & similis (§. 575 *part. 1*), hoc est, Cyclois sui evolutione seipsam describit.

SCHOLIUM.

331. Cum Radius osculi aut Evoluta vel æqualis sit arcui Evolutæ, vel eundem quantitate data excedat (§. 316); omnes arcus Evolutarum geometricè rectificantur, quarum radii per constructiones geometricas exhiberi possunt. Unde patet, cur arcus Cycloidis BC sit chorda BL duplus (§. 168): est enim radius Evolutæ MC ejusdem duplus (§. 328) & Evoluta Cycloidis ipsa quoque Cyclois est (§. 330). Liqueat etiam innumeras inveniri posse curvas, que saltem geometricè rectificantur. Ceterum utilis est Radii osculi inventio, quia arcus circuli osculatoris substitui potest pro arcu curvæ, quam osculatur, in praxi. Ita Speculum sphericum cavum, observante LEIBNITIO in Actis Erudit. A. 1686, substituitur parabolico, quia parameter parabola est diameter circuli eam in vertice osculantis (§. 317) sicque perinde ac parabolicum distantiam foci habet quartæ diametri parti æqualem.

PROBLEMA CXLVI.

332. Determinare Radium osculi seu Evolutæ in Logarithmica.

Quoniam in Logarithmica (§. 54)

$$y dx : dy = a$$

$$y dx : a = dy$$

$$dx dy : a = ddy, \text{ quia } dx \text{ constans}$$

$$\text{feu } ddy = y dx^2 : a^2,$$

$$\text{Est vero } dy^2 = y^2 dx^2 : a^2, \text{ adeoque}$$

$$dy^2 + dx^2 = y^2 dx^2 : a^2 + dx^2$$

$$= (y^2 + a^2) dx^2 : a^2$$

$$(dy^2 + dx^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx^3 (y^2 + a^2) \sqrt{y^2 + a^2} : a^3$$

$$(dx^2 + dy^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : — dx ddy =$$

$$dx^3 (y^2 + a^2) \sqrt{y^2 + a^2} : (y^2 + a^2) \sqrt{y^2 + a^2}$$

$$= a^3 y dx^3 : a^2 = ay$$

$$\text{Est igitur Radius osculi seu Evolutæ} \\ = (y^2 + a^2) \sqrt{(y^2 + a^2)} : ay.$$

Enimvero cum a fit subtangens Lo- Tab. I. gistica PT , y semiordinata PM , erit Fig. 8. $\sqrt{(y^2 + a^2)}$ tangens TM (§. 417 *Geom.*). Porro cum sit

$$TP : PM = PM : PH$$

$$a : y = y : PH$$

erit subnormalis $PH = y^2 : a$; consequenter TH composita ex subnormali $y^2 : a$ & subtangente $a = (y^2 + a^2) : a$.

Habemus adeo

$$y : \frac{y^2 + a^2}{a} = \sqrt{(y^2 + a^2)} : MC$$

$$\text{h. e. } PM : TH = TM : MC$$

Theorema. In Logistica Radius osculi seu Evolutæ est quarta proportionalis ad semiordinatam, tangentem atque compositam ex subtangente ac subnormali.

Quantitas negativa est, ob valorem ipsius y in presente casu negativum.

Porro quoniam ay est spatium logisticum interminatum $HPMI$ (§. 134) & $(a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 + y^2)} = TM^3$; erit $HPMI : TM^2 = TM : MC$. Habemus itaque hoc

Theorema. Spatium logisticum interminatum est ad quadratum tangentis, ut tangens ad Radium osculi seu Evolutæ.

SEC.

S E C T I O Q U I N T A .
D E A R I T H M E T I C A I N F I N I T O R U M .

C A P U T I .

De natura Arithmetica infinitorum.

D E F I N I T I O X I X .

333. **A** *Arithmetica infinitorum* est methodus summam series numerorum infinitis terminis constantes, aut earum rationes investigandi.

P R O B L E M A C X L V I I .

334. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum numerator communis est unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad suum denominatorem.*

Sit fractio prima $1 : e$. Numerus terminorum cum sit infinitus, & termini continuo decrescant, devenietur tandem ad infinitesimam (§.2), adeoque summa fractionis primæ & hujus, quæ tanquam ultima consideratur, ipsi fractioni primæ $1 : e$ æqualis (§.4). Divisa ergo per $e - 1$ dat summam omnium terminorum $1 : (ee - e)$, excepto primo (§.119 part.1). Quare summa integræ seriei $1 : (ee - e) + 1 : e = (1 + e - 1) : (ee - e) = e : (ee - e) = 1 : (e - 1)$.

Sit ex. gr. $e = 2$; erit $f(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \&c. \text{ in infinit.}) = 1$.

Sit $e = 3$; erit $f(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \&c. \text{ in infinit.}) = \frac{1}{2}$.

Sit $e = 4$; erit $f(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \&c. \text{ in infinit.}) = \frac{1}{3}$.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. I.

Sit $e = 5$; erit $f(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \&c. \text{ in infinit.}) = \frac{1}{4}$.
Sit $e = 6$; erit $f(\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} \&c. \text{ in infinit.}) = \frac{1}{5}$.

P R O B L E M A C X L V I I I .

335. *Invenire summam fractionum, ubi numerator communis est unitate minor denominatore primæ, & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $= m$; erit numerator $= m - 1$. Summa primi & ultimi termini, utpote primo æqualis $= (m - 1) : m$, quæ per $m - 1$ divisa dat summam omnium terminorum, excepto maximo seu primo $1 : m$. Quare summa integræ seriei $= m : m = 1$.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $f(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \&c. \text{ in infinit.}) = 1$, ut ante (§.334).

Sit $m = 3$, erit $f(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} \&c. \text{ in infinit.}) = 1$.

Sit $m = 4$, erit $f(\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} \&c. \text{ in infinit.}) = 1$.

S C H O L I O N .

336. *Poterat idem per modum Corollarii ex Theoremate precedente deduci. Est enim $f(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \&c.) = \frac{1}{2}$ (§.334). Ergo duplum hujus seriei, hoc est, $f(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} \&c.) = \frac{2}{2} = 1$. Et in genere $f(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3}$*

+ $\frac{1}{m^4} \&c. \text{ in infinit.}) = 1 : (m - 1)$. Ergo multipulum hujus seriei, cum sumitur vicibus $m - 1$, sit necesse est $(m - 1) : (m - 1) = 1$.

• T t t

P R O

PROBLEMA CXLIX.

337. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Si terminus primus $= (m - n)$; m , qui, utpote æqualis summæ primi & ultimi, divisus per $(m - 1)$ dat summam omnium terminorum maximo excepto $(m - n) : (m^2 - m)$. Quare summa seriei integræ $= (m - n) : (m^2 - m) + (m - n) : m = (m - n + m^2 - mn - m + n) : (m^2 - m) = (m^2 - mn) : (m^2 - m) = (m - n) : (m - 1)$.

Sit ex. gr. $n = 1$, erit $(m - n) : (m - 1) = (m - 1) : (m - 1) = 1$.

Sit $n = 2$, $m = 4$, erit $f(\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} \&c.) = (4 - 2) : (4 - 1) = \frac{2}{3}$.

Sit $n = 2$, $m = 5$; erit $f(\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} \&c.) = (5 - 2) : (5 - 1) = \frac{3}{4}$.

Sit $n = 2$, $m = 6$; erit $f(\frac{2}{6} + \frac{2}{36} + \frac{2}{216} \&c.) = (6 - 2) : (6 - 1) = \frac{4}{5}$.

Sit $n = 2$, $m = 7$; erit $f(\frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \frac{2}{343} \&c.) = (7 - 2) : (7 - 1) = \frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n = 3$, $m = 6$; erit $f(\frac{3}{6} + \frac{3}{36} + \frac{3}{216} \&c.) = (6 - 3) : (6 - 1) = \frac{3}{5}$.

Sit $n = 3$, $m = 7$; erit $f(\frac{3}{7} + \frac{3}{49} + \frac{3}{343} \&c.) = (7 - 3) : (7 - 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Sit $n = 3$, $m = 8$; erit $f(\frac{3}{8} + \frac{3}{64} + \frac{3}{512} \&c.) = (8 - 3) : (8 - 1) = \frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n = 4$, $m = 8$; erit $f(\frac{4}{8} + \frac{4}{64} + \frac{4}{512} \&c.) = (8 - 4) : (8 - 1) = \frac{4}{7}$.

Sit $n = 4$, $m = 9$; erit $f(\frac{4}{9} + \frac{4}{81} + \frac{4}{729} \&c.) = (9 - 4) : (9 - 1) = \frac{5}{8}$.

Sit $n = 4$, $m = 10$, erit $f(\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} \&c.) = (10 - 4) : (10 - 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \&c. \&c.$

PROBLEMA CL.

338. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum communis est numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.*

Sit numerator communis $= m$; denominator fractionis primæ $= a$; denominator rationis $= n$; erit series summanda $\frac{m}{a} + \frac{m}{na} + \frac{m}{n^2a} + \frac{m}{n^3a} \&c.$ in infinitum. Unde eodem, quo in Problematibus præcedentibus, modo reperitur summa $m : (na - a) + m : a = (m + mn - m) : (na - a) = mn : (na - a) = mn : a(n - 1)$.

Sit ex. gr. $m = 5$, $a = 6$, $n = 2$; erit $f(\frac{5}{6} + \frac{5}{12} + \frac{5}{24} \&c.) = 10 : 6(2 - 1) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Sit $m = 3$, $a = 5$, $n = 4$; erit $f(\frac{3}{5} + \frac{3}{20} + \frac{3}{80} + \frac{3}{320} \&c.) = 12 : 5(4 - 1) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Sit $m = 1$, $a = 7$, $n = 2$; erit $f(\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} \&c.) = 2 : 7(2 - 1) = \frac{2}{7}$.

SCHOLIUM.

339. *Hoc Problema universalitate sua antecedentia omnia complectitur. Sit enim $n = a$ & $m = n - 1$, qui est casus Problematis præcedentis: substitutis hisce valoribus in formula præsentis, prodit $(n^2 - ln) : n(n - 1) = (n - l) : (n - 1)$, quæ est formula Problematis præcedentis. Similiter sit $n = a$, $m = n - 1$, erit summa $= (n^2 - n) : (n^2 - n) = 1$, ut supra (§. 335). Denique si $m = 1$, $n = a$; erit summa $= n : (n - 1)n = 1 : (n - 1)$, ut supra (§. 334).*

PROBLEMA CLI.

340. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ simplicis ab 1 in infinitum continuatæ $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \&c.)$ ad summam totidem maximo æqualium.*

Termi-

Terminus primus = 1, numerus terminorum = n , differentia = 1. Ergo ultimus = n , & hinc $\int(1+2+3+4+5 \&c.) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 107 part. 1) & $\int n = n^2$. Cum n sit infinitus numerus, atque (§. 66 Arith.) $1:n=n:n^2$; erit n^2 ipso n infinities majus, adeoque n respectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), consequenter $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n^2$. Est itaque $\int(1+2+3+4+5 \&c. \text{ in infinit.}) : \int n = \frac{1}{2}n^2 : n^2 = 1:2$ (§. 124 part. 1).

Theorema. Summa seriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ est ad summam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

PROBLEMA CLII.

341. *Invenire rationem summe progressionis arithmetica, sive finita, sive infinita, cujus terminus primus est 0, ad summam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus = 0, ultimus = v , numerus terminorum = n ; erit summa progressionis = $\frac{1}{2}nv$ (§. 107 part. 1), summa vero totidem maximo æqualium nv . Est ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv , hoc est, ut 1 ad 2 (§. 124 part. 1).

PROBLEMA CLIII.

342. *Invenire rationem, quam habet summa omnium quadratorum ab 0 in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n ; erit summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§. 205 part. 1). Est vero $1:n=n^2:n^3$ (§. 66 Arithm.). Ergo, quia 1 infinitesima ipsius n , per hypoth. erit etiam n^2 infinitesima ipsius n^3 ; consequenter $\frac{1}{2}n^2$, adeoque multo magis $\frac{1}{6}n$, respectu ipsius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3).

Est ergo summa infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium summa est n^3 . Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ ad n^3 , hoc est, ut 1 ad 3 (§. 124 part. 1).

PROBLEMA CLIV.

343. *Invenire rationem, quam habet summa omnium cuborum ab 0 in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n ; erit summa cuborum $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ (§. 205 part. 1). Sed eodem modo, quo in Problemate præcedente, ostenditur $\frac{1}{2}n^3$, adeoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, respectu ipsius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evanescere. Erit ergo summa infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed summa totidem cuborum maximo æqualium est n^4 . Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4 , hoc est, ut 1 ad 4 (§. 124 part. 1).

PROBLEMA CLV.

344. *Invenire rationem, quam habet summa omnium potentiarum cujuscunque gradus ab 0 in infinitum continuatarum ad summam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentia inferiores numeri infiniti, respectu superioris, evanescunt (id quod eodem modo, quo in Probl. 153 ostenditur), summa omnium potentiarum ab 0 in infinitum continuatarum est $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$

(§. 203 part. 1) = $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in casu infiniti, ob $1=0$, respectu n . Sed potentia maxima est n^m adeoque summa totidem maximæ æqualium n^{m+1} .

Ergo summa illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1}$
 $\times n^{m+1}$ ad n^{m+1} , consequenter ut 1 ad
 $m+1$ (§. 124 part. 1).

Ex. gr. Sit $m=2$; erit summa quadra-
 torum infinitorum ad totidem maximo
 æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m=3$; erit summa cuborum infinito-
 rum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m=7$; erit summa potentiarum septi-
 mi gradus ad totidem maximæ æqualium
 ut 1 ad 8.

SCHOLION I.

345. In infinitum continuari revera non
 aliud significat, quam eo usque continuari,
 donec quantitates quædam respectu aliarum
 evanescent (l). Nam ex. gr. (§. 342) in
 summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, ratio
 termini primi $\frac{1}{3}n^3$ ad reliquos $\frac{1}{2}n^2$ & $\frac{1}{6}n$
 continuo crescit. Unde non mirum, si ratio
 posteriorum tandem adeo exigua evadat, ut
 assignari amplius nequeat. Est enim primus
 ad secundum $= \frac{1}{3}n^3 : \frac{1}{2}n^2 = 2n : 3$ (§. 124
 part. 1). Quare crescente n , ratio ipsius
 $2n$ ad 3 continuo crescit (§. 203 Arithm.).

Similiter terminus primus est ad tertium ut
 $\frac{1}{3}n^3$ ad $\frac{1}{6}n$ hoc est, ut $2n^2$ ad 1 (§. 124 part. 1).
 Quare crescente n , ratio ipsius $2n^2$ ad 1
 multo magis crescit, quam in casu priore (§. 203
 Arithm.). In eo igitur casu, in quo terminus
 secundus respectu primi fit inassignabilis, ter-
 tius multo magis inassignabilis esse debet.

SCHOLION II.

346. Eodem modo plurima alia Arithme-
 tica infinitorum Theoremata inveniri possunt,
 si utamur iis, quæ in *Analyse finitorum* (§. 210
 & seqq.) de numeris figuratis demonstrata
 sunt.

SCHOLION III.

347. Usus Arithmeticae infinitorum in
 Geometria ostenderunt (m) WALLISIUS in-
 ventor, & qui eam magis excoluit, ISMAEL
 BULIALDUS (n). Enimvero cum per calculum
 LEIBNITII summatorium non modo ea, quæ per
 Arithmeticae infinitorum evadunt, longe fa-
 cilius, sed & plurima huic insuperabilia in-
 veniri possint; e re nostra non esse judico, ut de
 ejus usu multa proferamus. Suffecerit igitur
 pauca eam in rem attulisse.

CAPUT II.

De usu Arithmeticae infinitorum in Geometria.

PROBLEMA CLVI.

Tab. 348. **I**nvenire rationem trianguli ACB
 III. ad parallelogrammum AEFB
 Fig. 40. super eadem vel æquali basi AB, & ejus-
 dem altitudinis.

Concipiatur altitudo CD in partes
 infinite parvas & inter se æquales di-
 visa; triangulum ACD resolvetur in

(l) Vid. *Ontologia* nostra §. 823. & seqq.

parallelogrammula, quorum bases sunt Tab.
 ordinatae trianguli Mm, Nn, Oo &c. III.
 altitudines infinitesimæ ipsius CD; pa- Fig. 40.
 rallelogrammum vero EABF in toti-
 dem parallelogrammula & inter se
 & maximo in triangulo æqualia,
 quorum nempe bases basi trianguli
 AB

(m) In *Arithmetica infinitorum*, quæ extat in
 Vol. I. *Oper. Mathes.*
 (n) In *Opere novo ad Arithmeticae infinitorum.*

Tab. III. AB figillatim æquales sunt. Parallelogrammum itaque, seu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinarum Mm, Nn, Oo &c. (§. 389 *Geom.*). Ordinatae vero sunt ut abscissæ CP, CQ, CR (§. 396 *Geom.*); &, quoniam altitudo in partes æquales divisa, abscissæ crescunt in progressionem arithmetica $0, 1, 2, 3, 4, 5, &c.$ Ergo elementa trianguli constituunt progressionem arithmeticam a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Est adeo triangulum ACB ad parallelogrammum $EABF$ ut 1 ad 2 (§. 341).

PROBLEMA CLVII.

Tab. II. Fig. 28. 349. *Invenire rationem spatii parabolici externi AKLPA nec non interni ANLPA, ad rectangulum AKLN super eadem basi KL & ejusdem altitudinis AK.*

Si spatium parabolicum $AKLPA$ & rectangulum KN in parallelogrammum resolvantur, ut in Probl. præc. (§. 348), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales divisa; elementa parabolici progrediuntur ut semiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem respondent maximo, cujus basis KL , æqualia. Quodsi parameter parabolæ fuerit a , $AH=1, AQ=2, AK=3$ &c. erit $HI=1:a, QP=4:a, KL=9:a$ &c. (§. 391 *part. I*), hoc est bases elementorum, adeoque elementa ipsa (§. 389 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abscissarum, hoc est, ut $0, 1, 4, 9$ &c. Est ergo spatium parabolicum $AKLPA$ ad rectangulum $ANLK$ ut 1 ad 3

(§. 342), adeoque $ANLPA$ ad idem rectangulum $ANLK$ ut 2 ad 3. Tab. II. Fig. 28.

PROBLEMA CLVIII.

350. *Invenire rationem spatii paraboloidici cujuscunque AKLPA & ANLPA ad rectangulum AKLN.*

Si abscissæ AH, AQ, AK fuerint ut $1, 2, 3$ &c. in paraboloidibus quibuscunque, erunt semiordinatæ HI, QP, LK ut $1, 2^m, 3^m$ &c. (§. 519 *part. I*). Quare, cum etiam spatii paraboloidici $AKLPA$ elementa progrediantur ut $1, 2^m, 3^m$ &c. (§. 349), iisdem vero in rectangulo respondeant totidem maximo æqualia, erit illud ad hoc ut 1 ad $1+m$ (§. 344); consequenter $ANLPA$ ad idem rectangulum NK , ut $1 - \frac{1}{1+m}$ ad 1, hoc est, ut $\frac{m}{1+m}$ ad 1, seu ut m ad $1+m$ (§. 124 *part. I*).

PROBLEMA CLIX.

351. *Invenire rationem Pyramidis & Coni ad Prisma & Cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.* Tab. III. Fig. 41.

Si Pyramidis $ADBC$ altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales divisa; in prismata resolvitur, quæ inter se sunt ut bases (§. 573 *Geom.*), hoc est, ut plana similia a, b, c, d (§. 474 *Geom.*). Quoniam vero altitudines illorum prismatum sunt ut $1, 2, 3$ &c. planorum latera homologa erunt itidem ut $0, 1, 2, 3$ &c. (§. 566 *Geom.*) adeoque ipsa plana ut $0, 1, 4, 9$ &c. (§. 406 *Geom.*) Quare cum elementis pyramidis respondeant in prisma super eadem basi & ejusdem

Tab. III. dem altitudinis totidem maximo æqualia; Pyramis ad Prisma est ut 1 ad 3 Fig. 41. (§. 342).

Quodsi ACBD fuerit conus, plana a, b, c, d erunt circuli: qui cum progrediantur ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 387 *Geom.*), in cylindro vero ipsis respondeant totidem maximo d æquales; conus quoque ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis est ut 1 ad 3 (§. 342).

PROBLEMA CLX.

352. *Invenire rationem Conoidis parabolici, ex rotatione Parabolæ AMSR circa axem AR geniti, ad Cylindrum*

super eadem basi & ejusdem altitudinis. Tab. III.

Constat ex superioribus (§. 197), altitudine AR in particulas infinite parvas & æquales divisa, Conoides resolvi in cylindrulos, quorum bases sunt circuli radiis PM, QN, SR descripti, quique adeo sunt ut isti circuli (§. 573 *Geom.*). Quodsi $AP=1, AQ=2, AR=3$; erit $PM=1, QN=\sqrt{2}, SR=\sqrt{3}$ (§. 392 *part. 1*) adeoque circuli sunt ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 408 *Geom.*). Quare cum iisdem respondeant in cylindro totidem maximo æquales; omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri sunt ut 1 ad 2 (§. 341).

FINIS *Analyseos infinitorum, & Tomi Primi.*



Fig: Algebr: Tab: I.

Fig. 1.

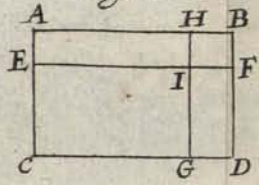


Fig. 2.

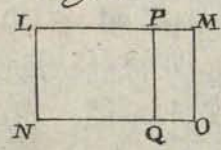


Fig. 3.

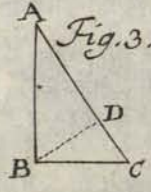


Fig. 4.

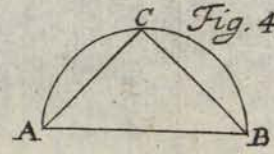


Fig. 5.

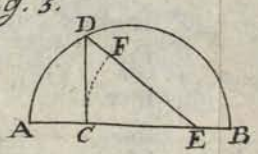


Fig. 6.

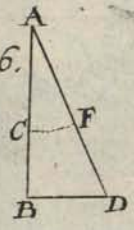


Fig. 7.

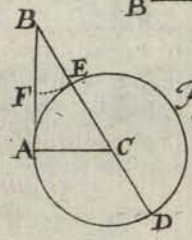


Fig. 8.

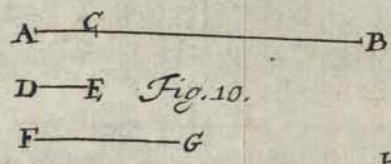
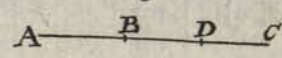


Fig. 10.

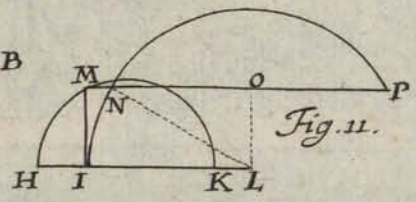


Fig. 11.

Fig. 9.

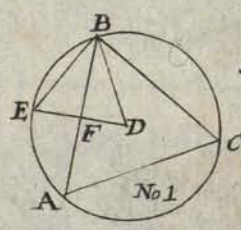
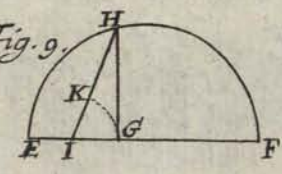
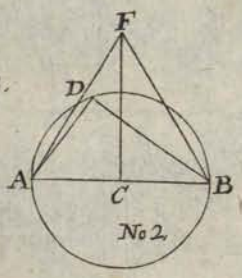


Fig. 13.



No. 2.

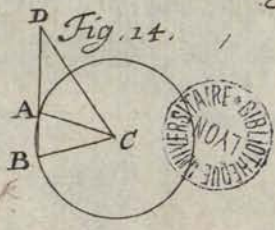


Fig. 14.

Fig. 12.

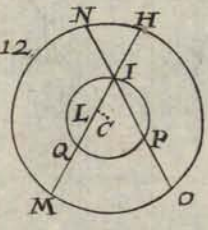


Fig. 15.

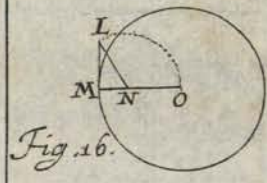
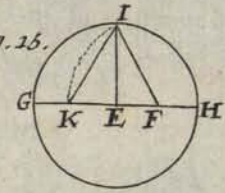


Fig. 16.

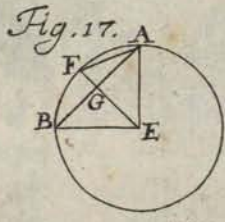


Fig. 17.

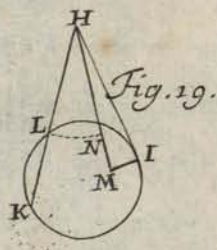


Fig. 19.

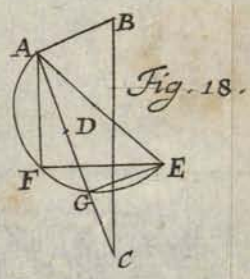


Fig. 18.

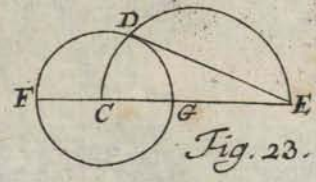


Fig. 23.

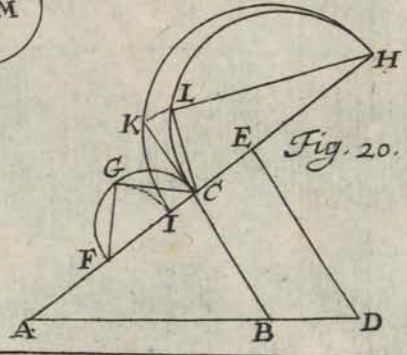
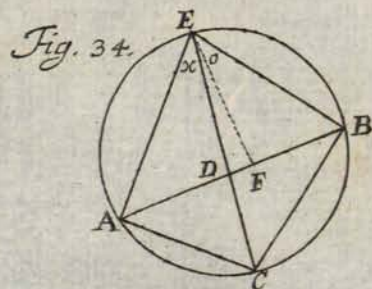
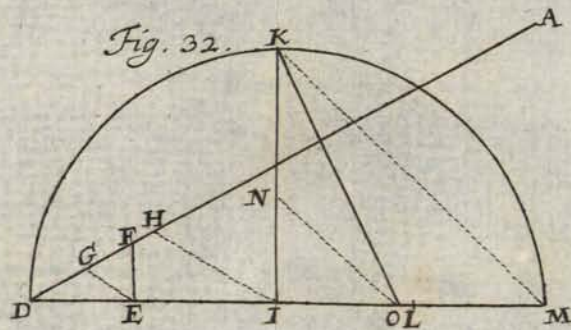
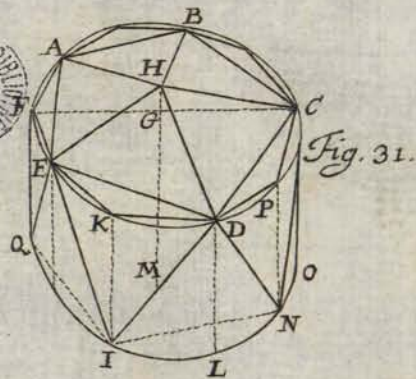
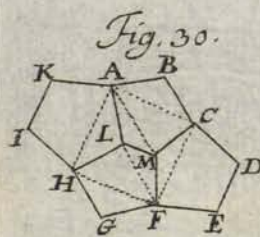
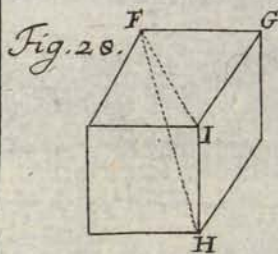
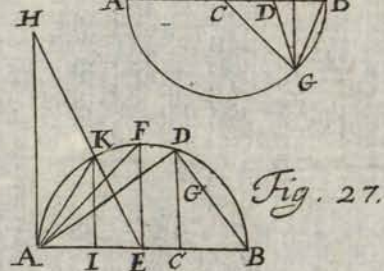
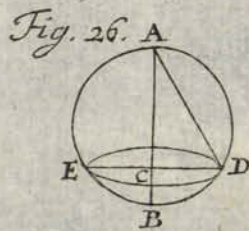
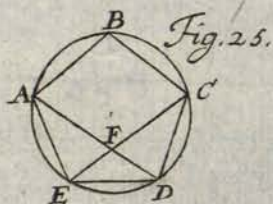
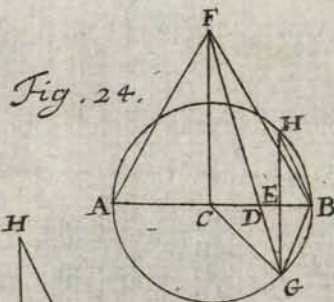
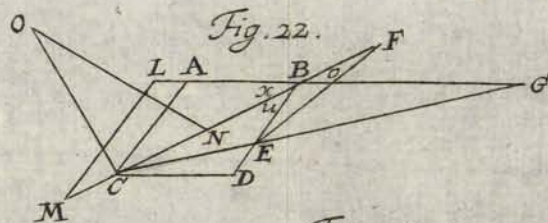
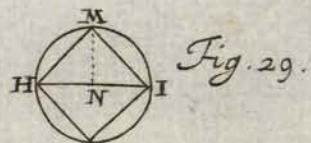
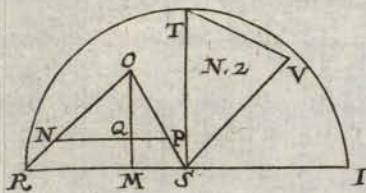
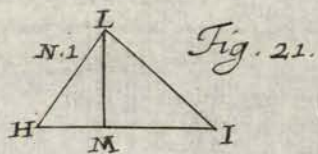


Fig. 20.

Figur: Algebr: Tab: II.



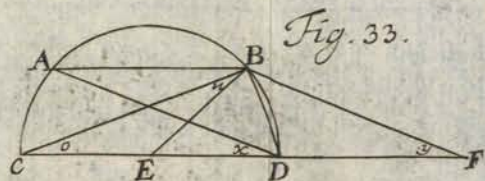
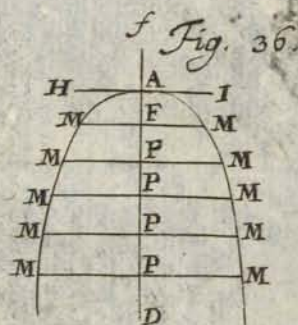


Fig. 33.



f Fig. 36.

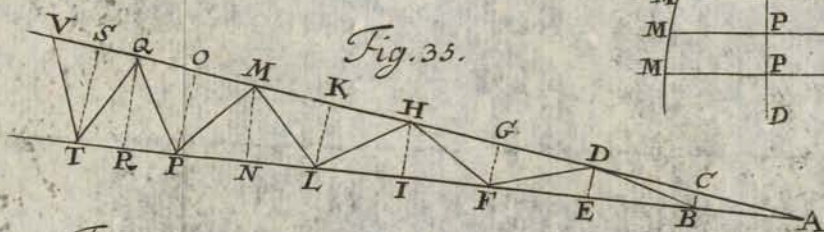


Fig. 35.

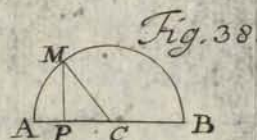


Fig. 38.

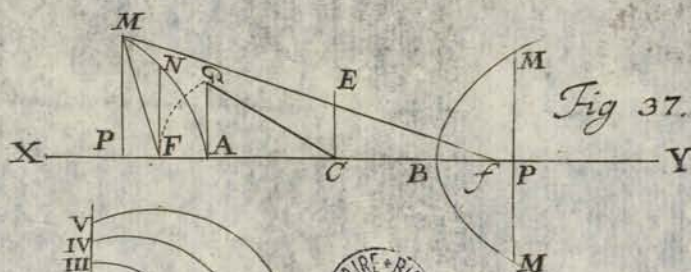


Fig. 37.

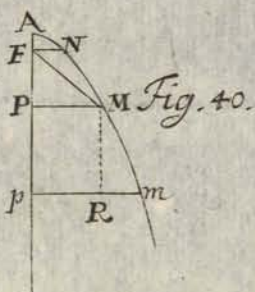


Fig. 40.

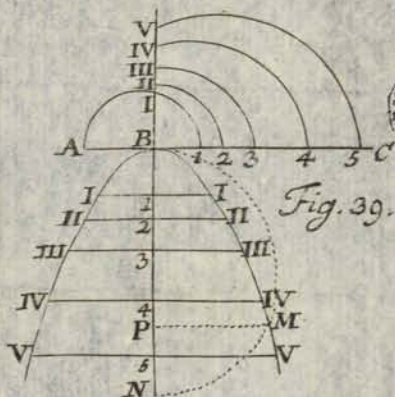


Fig. 39.

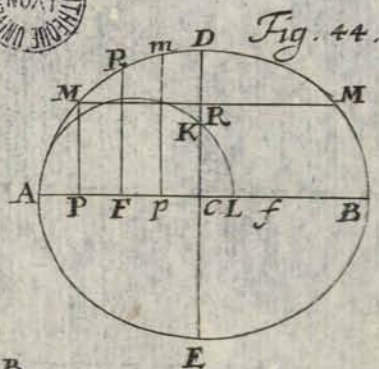


Fig. 44.

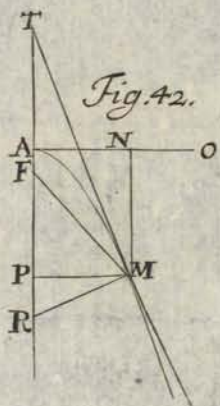


Fig. 42.

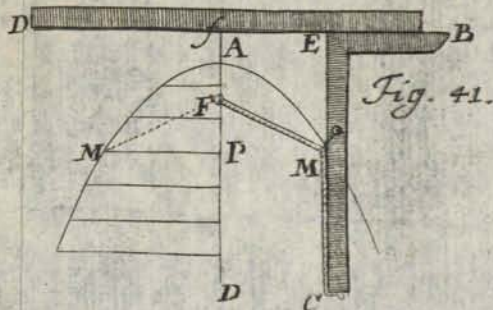


Fig. 41.

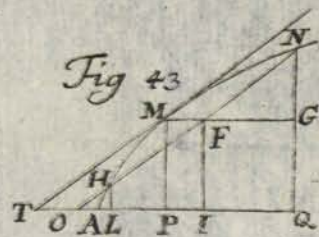


Fig. 43.

Fig. 52.

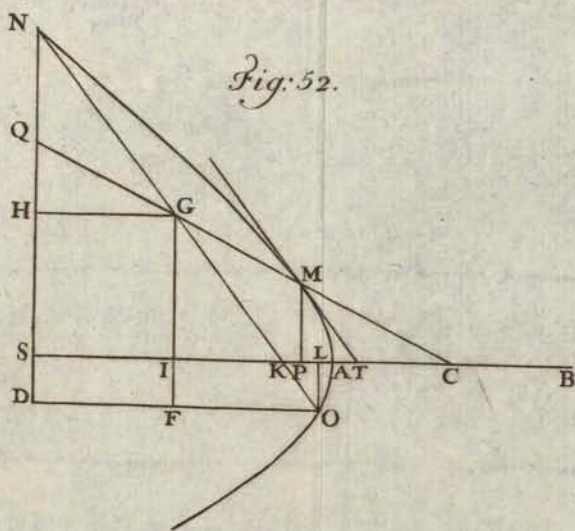


Fig. 53.

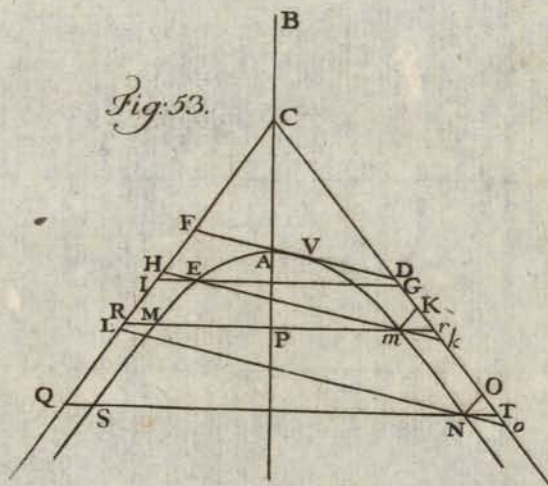


Fig. 54.

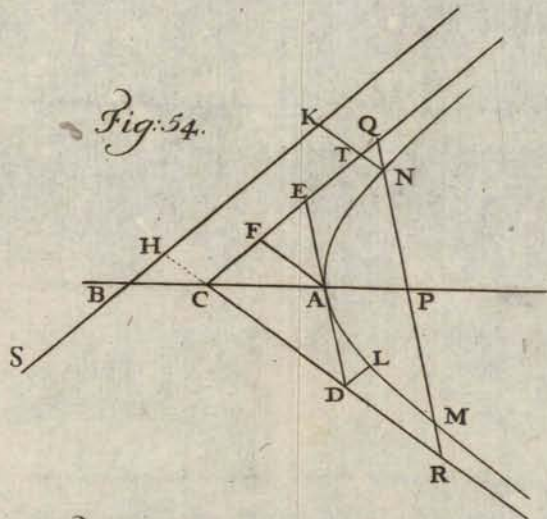


Fig. 55.

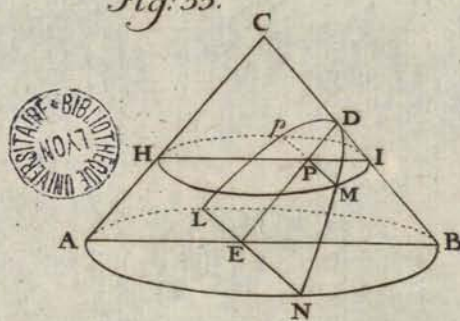


Fig. 56.

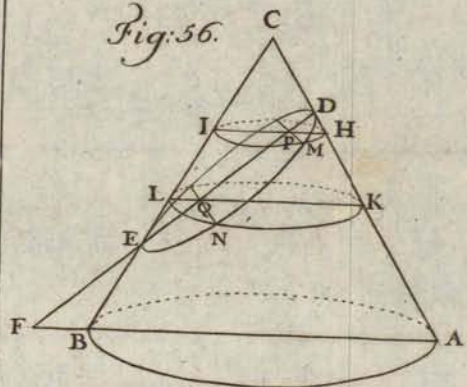
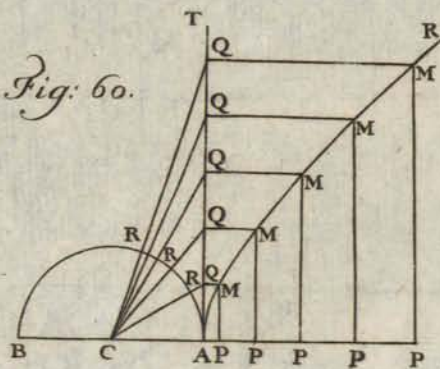


Fig. 60.



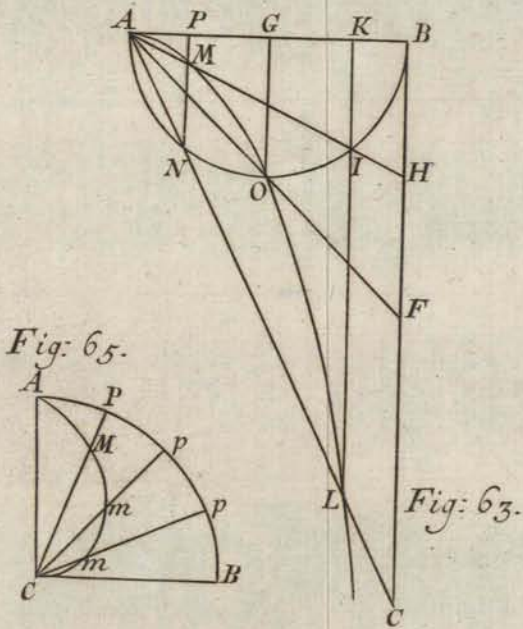
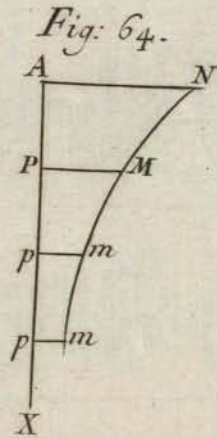
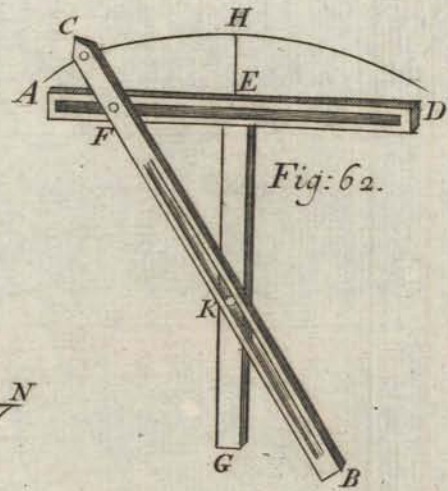
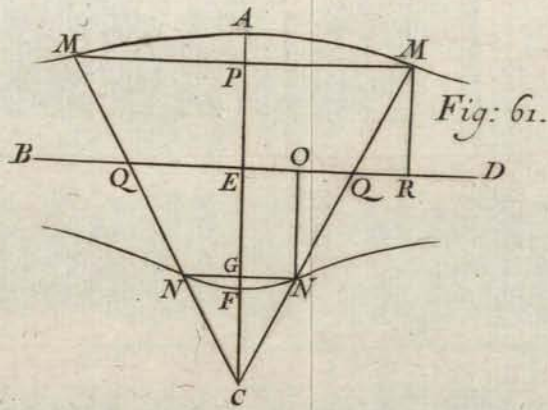


Fig: 65.

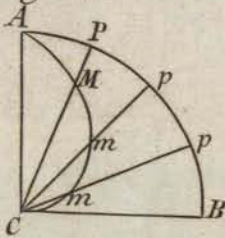


Fig: 63.

Fig: 67.

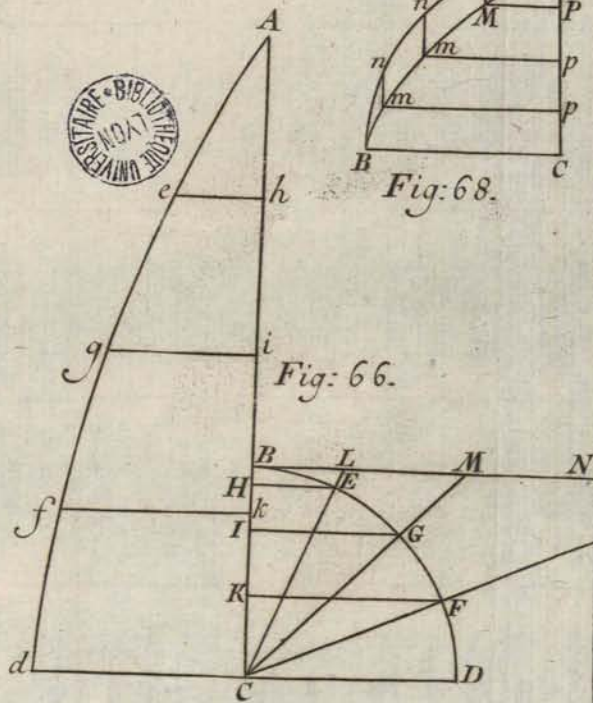
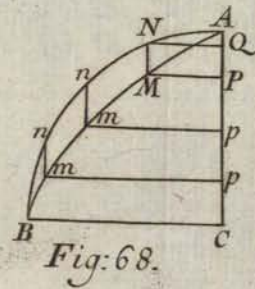
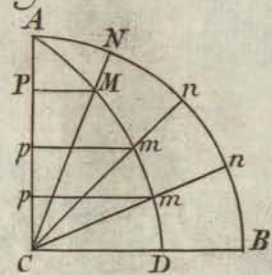


Fig. 69.

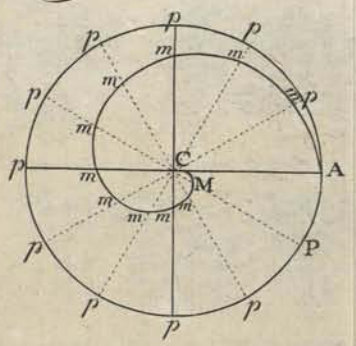


Fig. 70.

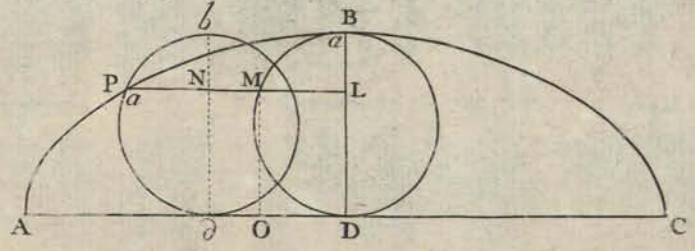


Fig. 71.

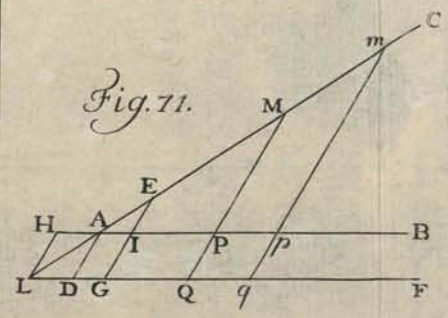


Fig. 72.

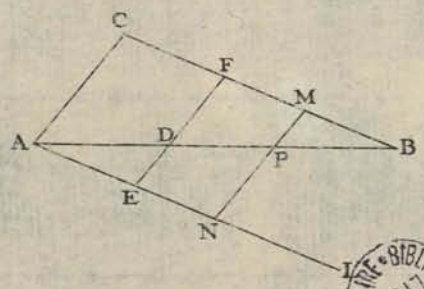


Fig. 73.

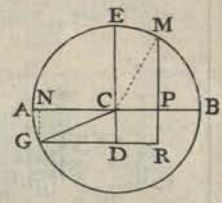


Fig. 74.

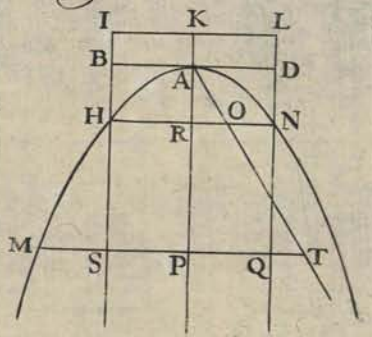


Fig. 75.

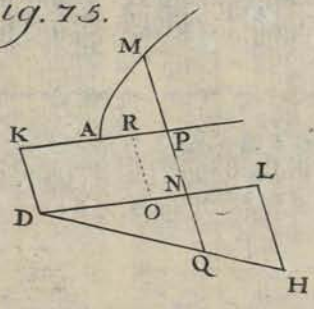


Fig. 76.

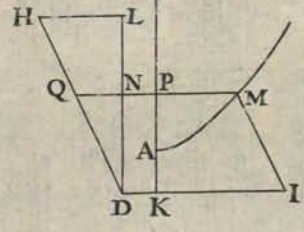


Fig. 77.

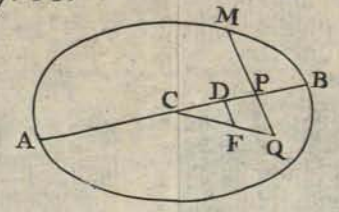
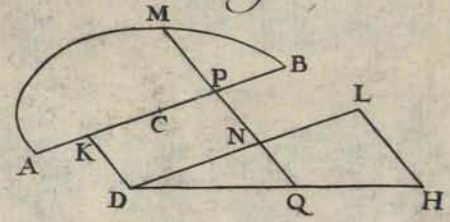


Fig. 78.



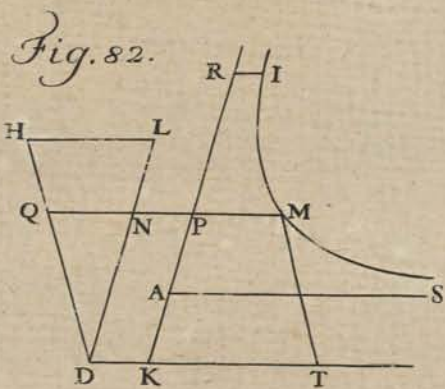
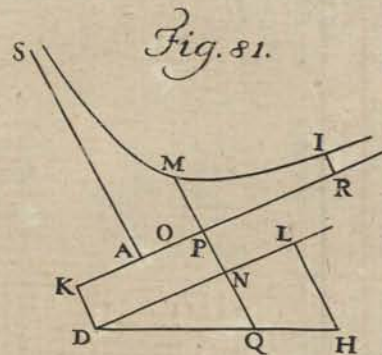
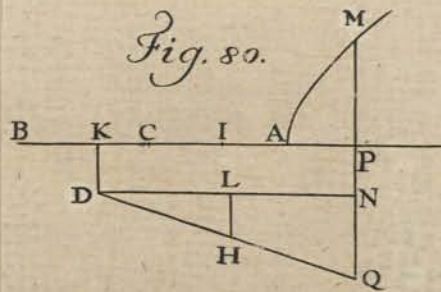
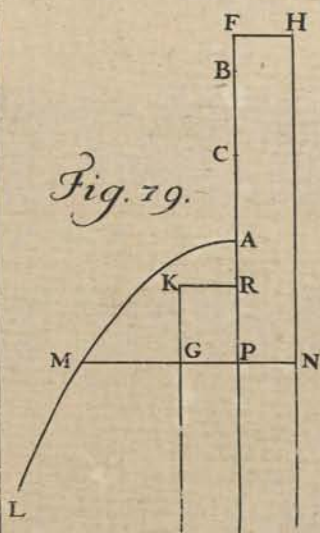


Fig. 83.

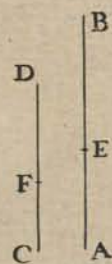
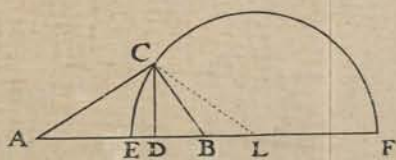


Fig. 84.

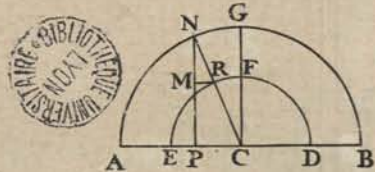


Fig. 85.

Fig. 86.

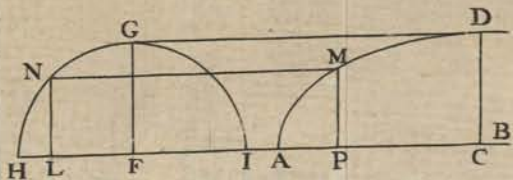


Fig. 87.

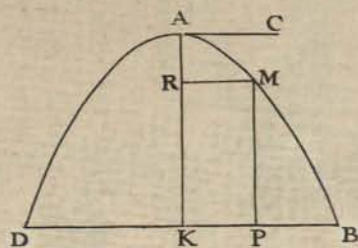


Fig. 88.

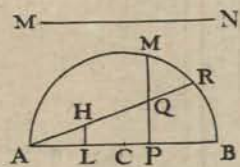


Fig: 89.

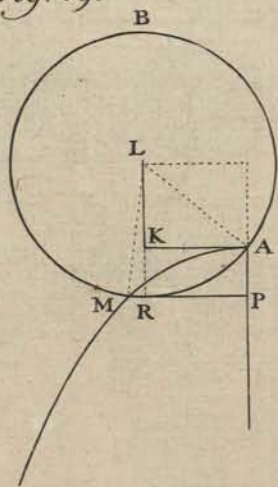


Fig: 90.

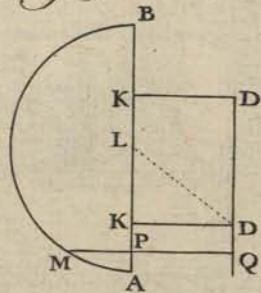


Fig: 91.

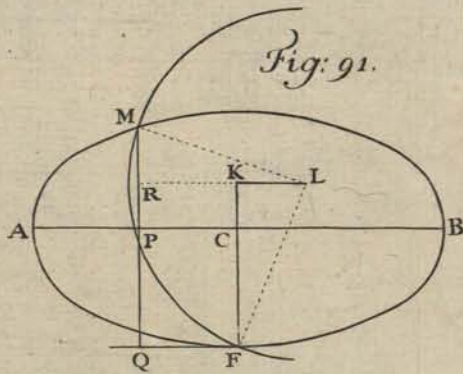


Fig: 93.

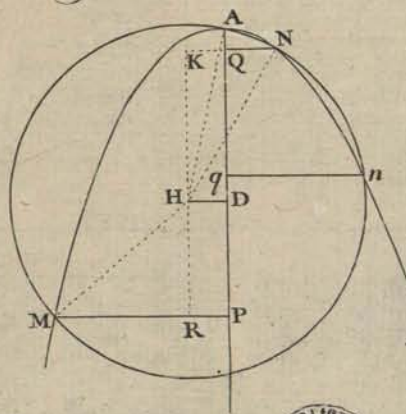


Fig: 92.

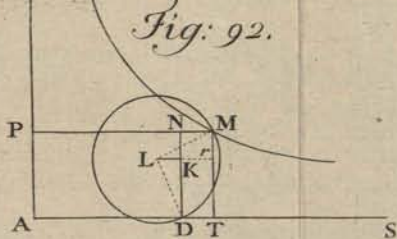


Fig: 94.

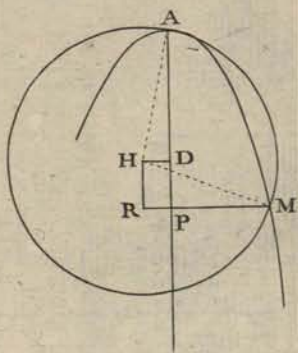


Fig: 95.

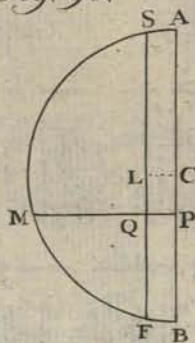


Fig: 96.

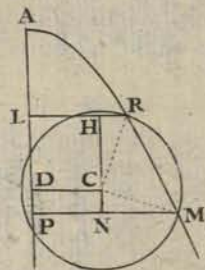


Fig. 97.

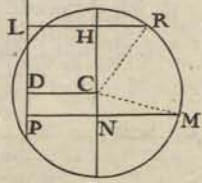


Fig. 98.

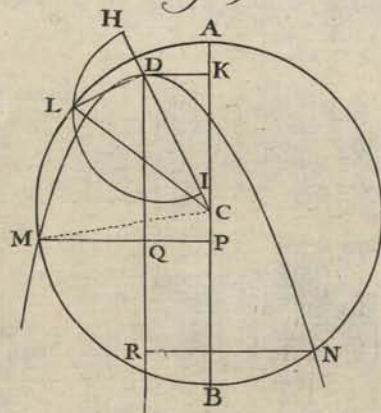


Fig. 99.

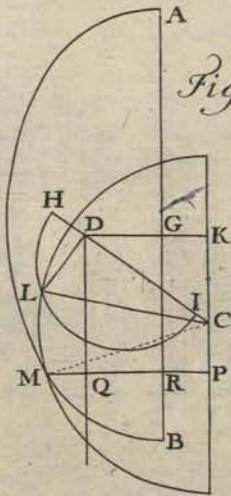


Fig. 100.

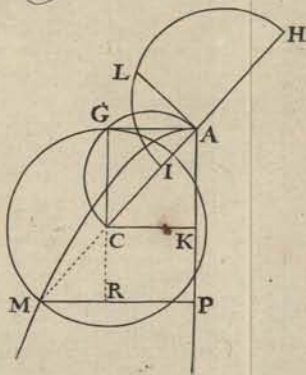


Fig. 101.

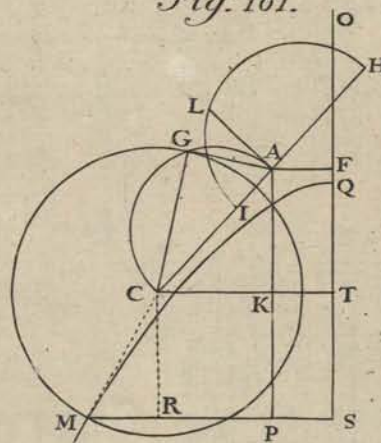


Fig. 102.

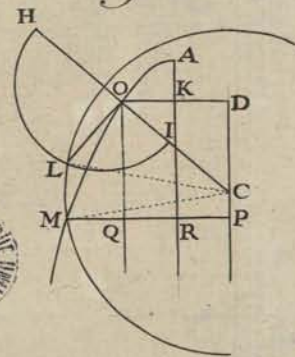


Fig. 103.

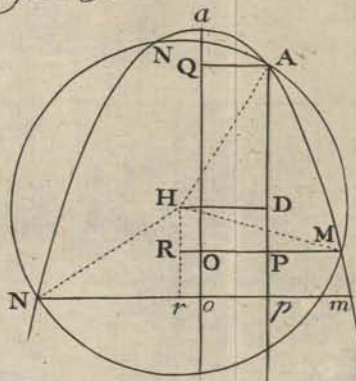


Fig. 104.

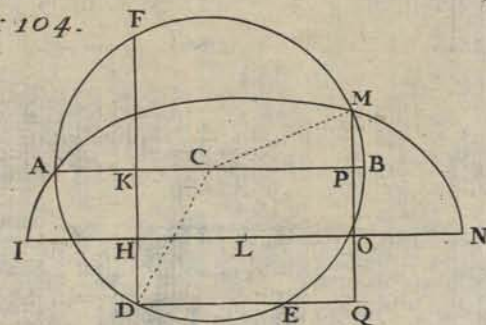


Fig: 105.

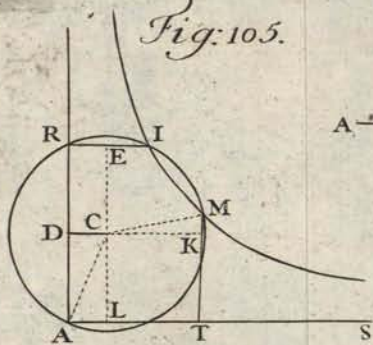


Fig: 106.

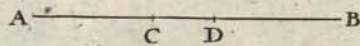


Fig: 107.

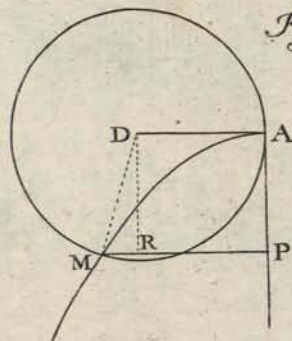


Fig: 108.

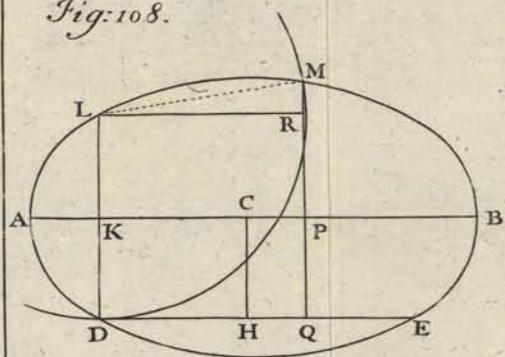


Fig: 109.

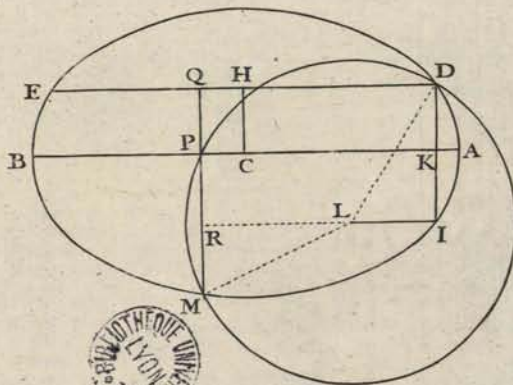


Fig: 110.

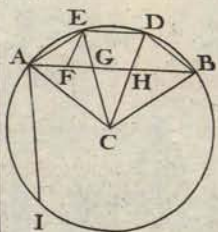


Fig: 111.

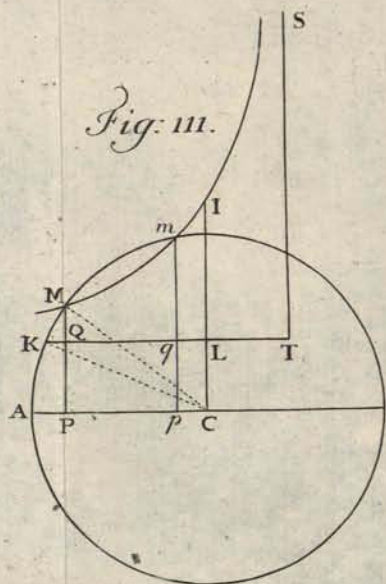


Fig: 112.

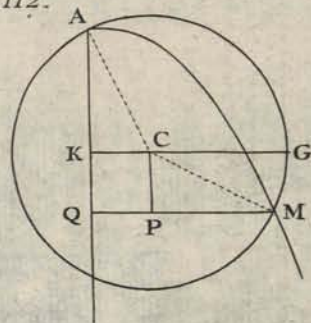


Fig. Algebr. Tab. XII.

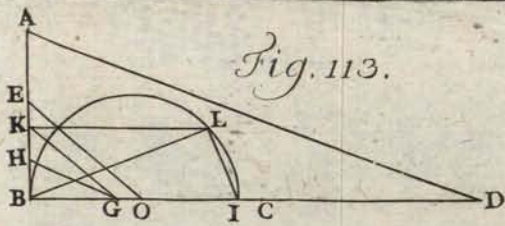


Fig. 115.

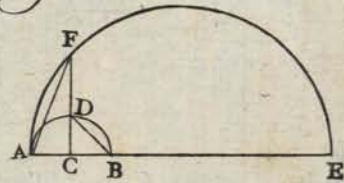


Fig. 114.

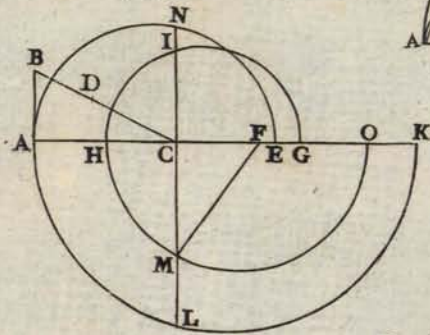


Fig. 116.

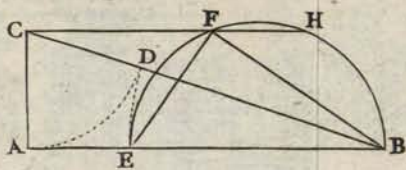


Fig. 118.

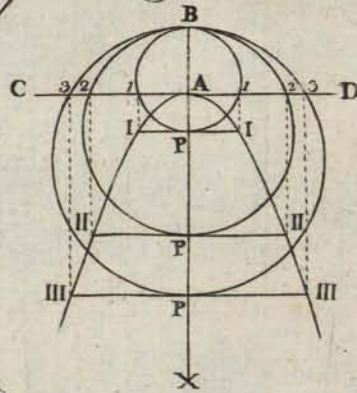


Fig. 117.

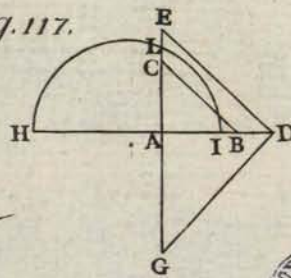


Fig. 119.

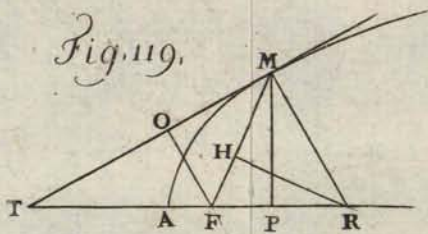


Fig. 121.

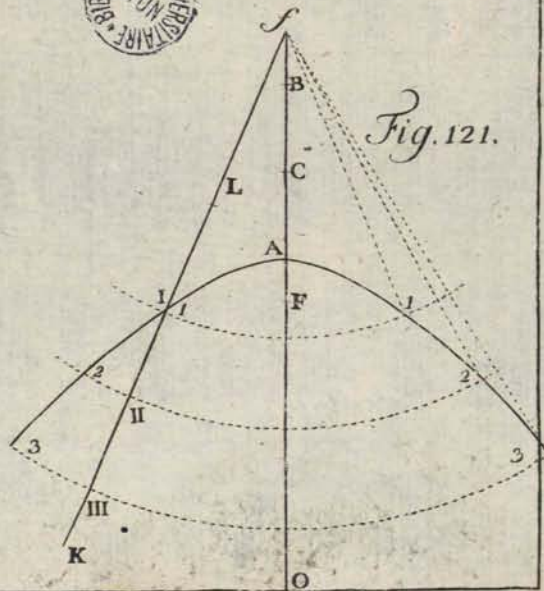


Fig. 120.

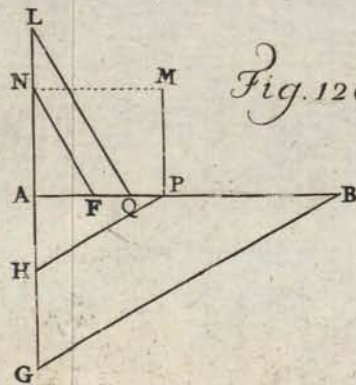


Fig. 122.

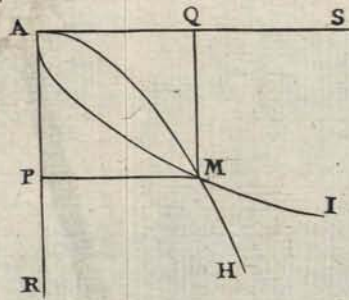


Fig. 123.

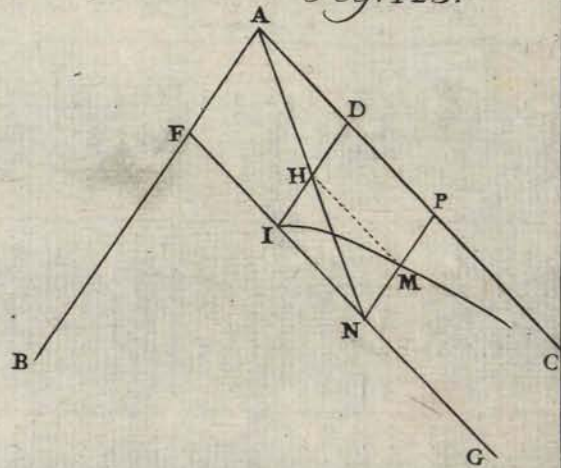


Fig. 124.

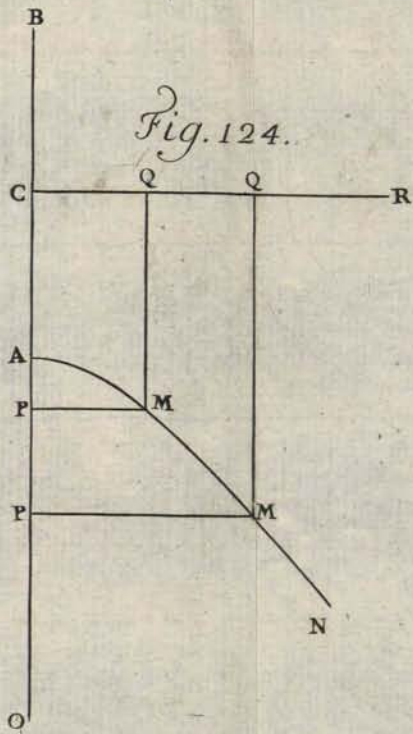


Fig. 125.

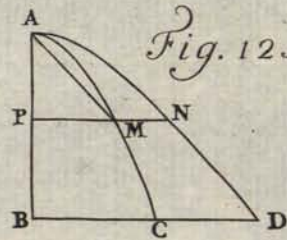


Fig. 127.

Fig. 126.

