Université Claude Bernard Lyon 1
Institut de Sciences et techniques de Réadaptation
Département Orthophonie

N° de mémoire 2027

Mémoire d'Orthophonie

présenté pour l'obtention du

Certificat de capacité d'orthophoniste

Par

BAILLET Juliette

Impact d'une intervention avec un matériel manipulable Montessori sur les performances et les stratégies utilisées en résolution d'addition : étude de cas unique

Directrice de Mémoire

GOIRAN Audrey

Année académique 2019-2020

Membres du jury

Sophie ChAMBOST

Guy CHAZOULE

Institut Sciences et Techniques de Réadaptation

DEPARTEMENT ORTHOPHONIE

Directeur ISTR

Xavier PERROT

Equipe de direction du département d'orthophonie :

Directeur de la formation

Agnès BO

Coordinateur de cycle 1

Claire GENTIL

Coordinateur de cycle 2

Solveig CHAPUIS

Responsables de l'enseignement clinique

Claire GENTIL

Ségolène CHOPARD

Johanne BOUQUAND

Responsables des travaux de recherche

Lucie BEAUVAIS

Nina KLEINSZ

Responsable de la formation continue

Johanne BOUQUAND

Responsable du pôle scolarité

Rachel BOUTARD

Secrétariat de scolarité

Anaïs BARTEVIAN

Constance DOREAU KNINDICK

Patrick JANISSET

Céline MOULARD

Université Claude Bernard Lyon 1

Président
Pr. FLEURY Frédéric

Président du Conseil Académique
Pr. BEN HADID Hamda

Vice-président CA
Pr. REVEL Didier

Vice-président CFVU
Pr. CHEVALIER Philippe

Vice-président CS
M. VALLEE Fabrice

Directeur Général des Services
M. VERHAEGHE Damien

Secteur Santé :

U.F.R. de Médecine Lyon Est
Doyen **Pr. RODE Gille**

U.F.R de Médecine et de maïeutique - Lyon-Sud Charles Mérieux
Doyenne **Pr. BURILLON Carole**

Comité de Coordination des Etudes Médicales (C.C.E.M.)
Président **Pr. COCHAT Pierre**

U.F.R d'Odontologie
Directrice **Pr. SEUX Dominique**

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques
Directrice **Pr. VINCIGUERRA Christine**

Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation (I.S.T.R.)
Directeur **Dr. PERROT Xavier**

Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine
Directrice **Pr. SCHOTT Anne-Marie**

Secteur Sciences et Technologie

U.F.R. Faculté des Sciences et Technologies
Directeur **M. DE MARCHI Fabien**

U.F.R. Faculté des Sciences
Administrateur provisoire
M. ANDRIOLETTI Bruno

U.F.R. Biosciences
Administratrice provisoire
Mme GIESELER Kathrin

U.F.R. de Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives (S.T.A.P.S.)
Directeur **M. VANPOULLE Yannick**

Institut des Sciences Financières et d'Assurance (I.S.F.A.)
Directeur **M. LEBOISNE Nicolas**

Observatoire Astronomique de Lyon
Directeur **Mme DANIEL Isabelle**

Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education (E.S.P.E.)
Administrateur provisoire
M. Pierre CHAREYRON

POLYTECH LYON
Directeur **M. PERRIN Emmanuel**

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1 (I.U.T.LYON 1)
Directeur **M. VITON Christophe**

Résumé

Un trouble des apprentissages mathématiques dans l'enfance peut impacter durablement l'avenir scolaire et social des individus. Les orthophonistes sont donc amenés à chercher des pratiques validées par la preuve pour remédier aux troubles des enfants qu'ils sont amenés à prendre en soin. Une pratique répandue et globalement validée par la preuve est l'utilisation de matériel manipulable, permettant de donner à l'enfant un support concret et sensoriel aux concepts étudiés. Cependant, il existe actuellement peu de recherches attestant de l'efficacité de matériel manipulable concret précis sur une compétence mathématique ciblée. Dans cette démarche, nous avons choisi d'étudier l'impact d'un entraînement de dix séances avec un matériel manipulable Montessori sur les compétences en addition de notre sujet présentant un trouble mathématique. Nous avons utilisé le matériel des perles dorées, qui permet de rendre saillante la structure en base 10 de notre numération symbolique, en représentant les unités accrochées par dizaines, centaines et milliers (principe du bloc UDCM). Ce matériel était associé à des cartes symboles superposables en numération arabe pour appuyer la compréhension de la notation positionnelle. L'évaluation pré et post-intervention s'est concentrée sur des compétences associées à la réussite arithmétique : un recours adéquat à la retenue, les performances en termes de rapidité et de précision, à mettre en lien avec un accès automatisé aux faits arithmétiques, et une utilisation, appropriée à la difficulté de l'opération, des stratégies de résolution. Notre intervention n'a pas montré l'effet significatif escompté sur les compétences en gestion de retenue ou sur l'efficacité de résolution de la patiente. En revanche, nous observons une maturation de la répartition stratégique utilisée sous contrainte temporelle face à des opérandes à un chiffre, et une précision durable de la perception des quantités via le code arabe.

Mots clés : matériel manipulable - addition - Montessori - stratégies - mémoire de travail - retenue - faits arithmétiques.

Abstract

Mathematical disorders in childhood can have a lasting impact on an individual's academic and social future. Speech and language therapists are therefore led to look for evidence-based practices to remedy the disorders of the children they care for. A widespread practice that has been globally validated by the evidence is the use of manipulatives, which gives the child concrete and sensory support for the concepts studied. However, there is currently little research attesting the effectiveness of specific concrete manipulatives on targeted mathematical competence. In this approach, we have chosen to study the impact of a ten-session training with a Montessori manipulative on the skills in addition of our subject with mathematical disorder. We used the golden beads material, which allows to make the base 10 structure of our symbolic numeration stand out, by representing the units hung by tens, hundreds and thousands (10 blocks principle). This material was associated with superimposable symbol cards in Arabic numeration, to support the understanding of positional notation. The pre- and post-intervention evaluation focused on skills associated with arithmetic success: adequate use of carry over, performances in terms of speed and accuracy, linked to automated access to arithmetic facts, and the use of resolution strategies appropriate to the difficulty of the operation. Our intervention did not show the expected significant effect on carry over management skills or patient resolution effectiveness. On the other hand, we observed a maturation of the strategic distribution used under time constraint when faced with single-digit operands, and a lasting precision of the perception of quantities via the Arabic code.

Key words : manipulatives - addition - Montessori - strategies - working memory - carry over - arithmetic facts.

Remerciements

Un grand merci à Audrey Goiran d'avoir accepté d'être ma directrice de mémoire, ainsi que pour tous les retours pertinents et constructifs sur mon travail, sa confiance et sa sérénité à toute épreuve.

Merci à la jeune patiente de mon étude pour sa participation et son enthousiasme tout au long du travail effectué ensemble, et à sa famille d'avoir accepté mon projet et de m'avoir accueillie.

Merci à Julie Guillan de m'avoir ouvert les portes de son cabinet et de m'avoir permis d'intervenir auprès de sa patiente.

Merci à Christelle Hubert pour le prêt de sa banque Montessori, permettant que cette recherche se déroule dans de bonnes conditions.

Merci à tous les enseignants rencontrés pendant ce cursus, ainsi qu'à toutes mes maîtres de stages qui ont contribué à ma formation de professionnelle du soin.

Merci à tous mes amis qui ont rendu ces cinq années plus légères et riches, par nos échanges et de franches tranches de rigolade. J'ai adoré cheminer avec vous !

Merci à ma famille de m'avoir soutenue dans ce projet d'études loin d'eux et de m'avoir toujours encouragée à tracer ma route.

Merci à Yannis qui a baigné d'amour, de musique et d'ondes magiques anti-stress cette période intense.

Sommaire

I. Partie théorique

La dyscalculie peut être définie comme un trouble du développement mathématique qui interfère fortement avec les activités de la scolarité et de la vie quotidienne impliquant les connaissances numériques (American Psychiatric Association, 2013). Elle touche de 3,5 à 7,7 % de la population d'âge scolaire, selon les critères retenus (Barrouillet et al., 2007). Cela implique que chaque enseignant est potentiellement confronté à cette problématique dans sa classe. Or, les compétences numériques précoces sont un prédicteur important du niveau socio-économique à l'âge adulte selon Ritchie & Bates (2013). Il est donc essentiel de proposer une remédiation, la plus précoce et la plus efficace possible, à ces enfants dont les difficultés importantes en mathématiques entravent le quotidien présent et futur.

Aujourd'hui, l'usage de matériel manipulable (boîtes, cubes, allumettes, billes, etc..) est largement répandu pour permettre aux enfants de vivre, dans leur corps et par leurs sens, les notions étudiées (Fyfe et al., 2014; Laski et al., 2015). Ces matériels manipulables ont été reconnus globalement bénéfiques à l'apprentissage des mathématiques (Bouck & Park, 2018 ; Lafay et al., 2019), et ce, même concernant les enfants en difficulté (Lafay et al., 2018), susceptibles d'avoir besoin d'un suivi orthophonique pour un trouble des apprentissages mathématiques. En revanche, peu de recherches existent faisant le lien entre l'utilisation d'un matériel précis et l'amélioration d'une compétence ciblée (Lafay, Osana, & Valat, 2019).

Dans cette démarche, nous souhaitons évaluer si un entraînement court à l'addition, avec un matériel utilisé dans le cadre de la pédagogie Montessori, aurait un impact sur les capacités en calcul de notre sujet. Nous étudierons particulièrement la gestion des retenues, la notation positionnelle et un choix approprié de stratégies, ces compétences étant reconnues essentielles en résolution d'additions (Miller & Kaffar 2011).

Pour poser un cadre théorique à cette recherche, nous commencerons par nous placer dans le modèle théorique du triple code, aujourd'hui dominant. Puis, nous évoquerons certains facteurs associés à la réussite arithmétique, et les différentes stratégies utilisables en addition. Par la suite, nous passerons en revue les recommandations actuelles concernant la forme et l'utilisation la plus efficace du matériel manipulable en calcul additif, et son application possible dans le cas de la pédagogie Montessori.

1. Traitement cognitif du nombre et du calcul

1. Bases cérébrales : le modèle théorique du triple code

Ce travail s'inscrit dans le modèle théorique du triple code, développé par Stanislas Dehaene et Laurent Cohen depuis 1992. Ils postulent que notre traitement du nombre mobilise trois systèmes de représentations indépendants : analogique, verbal et arabe.

Le module analogique nous permet de percevoir, assembler et comparer des quantités. Ces capacités sont observées dès la petite enfance (Dehaene & Cohen, 2000) mais aussi chez certains animaux (Vauclair, 2000; Dehaene et al., 2004). Elles ne nécessitent pas la maîtrise de représentations symboliques du nombre. Ce premier système est en relation avec deux autres modules qui se développent plus tard.

La représentation auditivo-verbale du nombre (oralisé ou écrit en toutes lettres) se construit en parallèle de l'apprentissage de sa langue maternelle par l'enfant. Elle possède, comme la langue, un lexique et une syntaxe permettant de composer les nombres, la quantité exprimée étant codée par l'ordre des mots dans la chaîne numérique verbale. Les combinaisons de mots peuvent suivre des relations additives (cent quatre = "cent" + "quatre"), multiplicatives (quatre cents = "quatre" x "cent") ou les deux (six cent trente = "six" fois "cent" plus "trente"). Toutes les combinaisons ne sont cependant pas recevables. Ainsi, “dix-sept” est considéré correct mais “dix-trois” ne l'est pas. De même que “cinq mille” est correct mais “cinquante cents” ne l'est pas. Cette syntaxe présentant des irrégularités en français (dix-neuf est transparent mais pas quatre-vingt-quatorze), la chaîne numérique sera acquise de manière stable plus tardivement que pour un locuteur d'une langue au code verbal transparent : en chinois par exemple, 94 se dira « neuf dix quatre » (Fayol, 2018). D'après Dehaene & Cohen (2000), c'est par ce module verbal que les faits arithmétiques, c'est-à-dire l'association entre les représentations des calculs et leur solution (Noël et al., 2013), sont encodés et récupérés en mémoire à long terme.

La représentation visuelle arabe est quant à elle majoritairement enseignée explicitement à l'école (Fayol, 2018). Le code indo-arabe, utilisé dans notre société, comporte une syntaxe basée sur la notation positionnelle, avec un codage spatial de la puissance en base 10, à partir d'un lexique de dix chiffres de 0 à 9. Ainsi, suivant sa position dans le nombre, 6 peut signifier 6 unités, 6 dizaines, 6 centaines, etc. Cette représentation devient nécessaire dans la résolution des opérations à plus de deux chiffres, mais son apprentissage peut poser problème à certains enfants qui tentent d'y plaquer la syntaxe du code verbal appris précédemment (Fuson & Briars, 1990). Ces représentations symboliques nécessitent donc une phase d'apprentissage explicite, car elles font appel à des codes abstraits, créant des liens arbitraires pour représenter un nombre non symbolique, une quantité, par un mot (six) ou par un symbole (6).

Ces trois modules sont à la fois indépendants et interconnectés. Ils permettent le traitement des quantités, présentées dans les codes numériques analogique, arabe et oral, également nommé habiletés numériques de base (Lafay et al., 2014). De leur bon fonctionnement dépendront les capacités arithmétiques de la personne (Orrantia et al., 2018; Siegler, 2016).

Sur le plan neuro-anatomique, chacun de ces modules serait associé à des réseaux de neurones différents dans le cerveau (Dehaene et al., 2004). Les représentations analogiques prendraient place dans la partie inférieure des sillons intra-pariétaux, tandis que les représentations visuo-arabes siègeraient dans l'aire occipito-temporal, de manière prédominante dans l'‘hémisphère gauche (Dehaene & Cohen, 2000). Les représentations auditivo-verbales, quant à elles, activeraient les aires dominantes du langage, le plus souvent situées dans l'hémisphère gauche (Dehaene et al., 2004).

2. Facteurs cognitifs prédicteurs de la réussite arithmétique

D'après Dehaene (Dehaene, 1992, p.6), calculer, c'est « prédire par des manipulations symboliques le résultat de transformations sur des quantités concrètes sans avoir à les exécuter ». Pour cela, il est nécessaire d'avoir développé des représentations précises des quantités que l'‘on souhaite manipuler, sous leur forme analogique mais aussi et surtout, représentées par les codes symboliques, particulièrement le code arabe. En effet, la compréhension des grandeurs numériques se développe progressivement du non-symbolique vers le symbolique et des petits nombres vers les grands nombres (Siegler & Braithwaite, 2017), et cette connaissance des grandeurs des nombres est prédictrice de la réussite en arithmétique (Siegler, 2016). Chez les tout-venant, Fazio et al. (2014) ont mis en lien la précision des représentations non-symboliques du nombre et la réussite mathématique. Cependant, ce lien tend à faiblir après six ans, alors qu'un fort lien entre précision des représentations symboliques et réussite mathématique perdure. De leur côté, Noël et al., (2013) n'ont pas mis en évidence de différence significative dans la perception des quantités non-symboliques chez les dyscalculiques par rapport aux enfants tout-venant avant 10 ans. En revanche, leurs recherches et celle de Lafay et al., (2017), mettaient en évidence des imprécisions d'accès à la grandeur des nombres par le code arabe (tâche de placement de nombres arabes sur une ligne bornée à 0 et 100). Elles supposent donc que les difficultés observées à construire une représentation exacte du nombre, viendraient plutôt d'un déficit d'accès à ces quantités par les codes arabes et oraux, que d'une mauvaise représentation des quantités. De même, pour Orrantia et al. (2018), le prédicteur le plus robuste de la réussite mathématique à deux ans, (du CP au CE2), est la capacité de traitement de la grandeur symbolique de grands nombres (à deux chiffres). Par ailleurs, une bonne compréhension de la base 10 en fin de maternelle (Laski et al., 2014) et en primaire (Fuson & Briars, 1990) est corrélée à des choix stratégiques plus efficaces et à de meilleures performances en problèmes additifs à plusieurs chiffres. La compréhension de la notation positionnelle, qui peut être testée par une tâche de placement de nombres sur une ligne numérique, est aussi un prédicteur des performances futures en arithmétique (Dietrich et al., 2016, Fuson & Briars, 1990). De leur côté, Lambert & Moeller (2019), observent qu'un travail sur la notation positionnelle est aussi bénéfique ensuite pour les compétences en gestion de retenues. En revanche, des erreurs concernant les faits arithmétiques simples (impliquant des opérandes inférieurs à dix) apparaissent au sein de ces opérations chez les enfants en difficulté en mathématiques. Ce déficit était mis en lien avec des ressources limitées en mémoire de travail, qui étaient soit dévolues à la gestion des retenues, soit au traitement des faits arithmétiques simples. Ces faibles capacités en mémoire de travail sont aussi constatées par Noël et al., (2013), qui observent que les enfants étaient sensibles à l'interférence provoquée par les faits arithmétiques proches entre eux . Les performances d'encodage du lien entre résultat et opération en mémoire à long terme étaient déficitaires lorsque les associations à mémoriser partageaient des traits communs (ex : 6x4 =24 et 7x4 =28) ce qui occasionne aussi des erreurs dans leur récupération. Geary et al., (2004) ont aussi déterminé que les enfants en difficulté mathématique, qui font des erreurs en arithmétique simple, ont des problèmes à inhiber les associations erronées (récupérer 8 pour 3+4) à cause d'une déficience des processus d'inhibition en mémoire de travail. Miller & Kaffar (2011) retenaient trois facteurs contribuant aux difficultés en addition à retenue : des compétences limitées en faits arithmétiques basiques, un manque de compréhension conceptuelle des procédures de retenue et de notation positionnelle et une utilisation inappropriée des stratégies de résolution d'addition. C'est ce dernier point qui va maintenant retenir notre attention.

3. Construction et détermination des stratégies

Pour additionner, l'enfant utilise des stratégies variables selon la situation de calcul et son âge (Siegler & Shrager, 1884 ; Geary et al., 2004 ; Fayol, 2018). D'abord, vers 3 ans, il a besoin de visualiser et de compter physiquement tous les objets en jeu (count all). Ensuite, en gagnant progressivement en maîtrise de la chaîne numérique et de la cardinalité, il part de la plus grande des deux quantités à additionner et ne dénombre que la seconde (count on). Autour de 4/5 ans, il peut effectuer ces manipulations avec pour seul appui le comptage digital, puis ce sera possible mentalement, sans support physique (comptage verbal). En avançant en âge et dans sa connaissance des faits arithmétiques simples, ses stratégies évoluent vers de plus en plus de récupération directe en mémoire des résultats (Fayol, 2018). D'abord sont fixés les doubles, puis vers 9-10 ans, toutes les autres additions de nombres à un chiffre (Siegler & Braithwaite, 2017; Siegler & Shrager, 1984). Ces faits arithmétiques sont aussi utilisés pour accéder au résultat par décomposition, c'est-à-dire que l'enfant s'appuie sur des faits arithmétiques connus comme raccourci pour récupérer un résultat proche (pour 5 + 4, il récupère 4+4 qu'il connaît et ajoute 1). C'est cette stratégie d'aller récupérer directement la solution stockée en mémoire à long terme, ou du moins de procéder par décomposition, qui sera majoritairement choisie, dès que possible, par les enfants tout-venant (Siegler & Shrager, 1984), et se poursuivra ensuite de l'adolescence à l'âge adulte (Siegler & Braithwaite, 2017). Cependant, Thevenot et al. (2016) ont montré que les autres procédures conscientes de résolution persistent parallèlement, mais sont difficilement détectables par les protocoles classiques, basés sur la collecte de protocoles verbaux ou l'interprétation de temps de résolution.

La récupération instantanée permet de gagner en efficacité (rapidité et précision) de calcul. En effet, lorsque le cerveau, et particulièrement les ressources en mémoire de travail sont occupées à effectuer ces sous-opérations simples, la personne est ralentie mais aura aussi tendance à faire plus d'erreurs annexes, liées à la gestion des retenues par exemple (Lambert & Moeller, 2019). Cette implication de la mémoire de travail est encore plus importante chez les personnes en difficulté mathématique, qui n'ont pas forcément automatisé l'accès à ces faits arithmétiques simples (Cumming & Elkins, 1999). En effet, Geary et al. (2004) ont mis en évidence chez ces enfants des choix stratégiques moins matures (les CM2 agissant comme les CE2), des erreurs de calculs plus importantes et des ressources en mémoire de travail déficitaires (en retard d'un an), par rapport aux autres enfants de primaire. Concrètement, ils vont utiliser massivement le comptage sur les doigts comme support à la mémoire de travail dans les opérations aux opérandes à un chiffre, mais ont tendance à utiliser abusivement la récupération en mémoire lorsque les opérandes passent à deux chiffres : ils « devinent » la réponse. Au contraire, leurs camarades tout-venant font appel aux faits arithmétiques, encodés à bon escient, pour les opérations simples, où ils ont assez confiance dans les liens opération-résultat encodés, et privilégient des stratégies plus lentes mais plus sûres, comme le comptage sur les doigts ou une décomposition mentale de l'opération, lorsque les opérandes sont plus grands (Geary et al., 2004; Siegler & Shrager, 1984).

2. Matériel manipulable et calcul : recommandations en vigueur

1. A la recherche de caractéristiques optimales

Un matériel manipulable permet à l'enfant de vivre des expériences motrices et perceptuelles, en opposition à un support abstrait, qui n'a pas d'entrée sensorielle à proprement parler (McNeil & Fyfe, 2012). Nous évoquerons uniquement le matériel manipulable concret (MMC), bien qu'il existe également depuis l'avènement de l'informatique des matériels manipulables virtuels.

Pour être efficace, un MMC doit respecter certaines caractéristiques. Il doit être le plus neutre possible, et ne pas ressembler à un objet du quotidien ou à un jouet, pour ne pas distraire l'enfant (Laski et al., 2016 ; Carbonneau et al., 2013). En effet, pour Uttal et al., (2009), un objet attractif peut sembler faciliter l'apprentissage initial mais rend plus difficile la mise en lien avec le référent mathématique visé. De plus, face à un objet trop riche perceptuellement, l'enfant peut être amené à s'accrocher à des caractéristiques de l'objet non pertinentes pour la compétence ciblée (Carbonneau et al., 2013). Le matériel qui nous intéresse aujourd'hui est le bloc UDCM, composé d'unités présentées seules mais aussi agencées en dizaines, en centaines et en milliers. Dans leur recherche présentée en 2019, Lafay, Osana, & Hadjadj ont proposé différentes conformations de ce bloc à des enfants scolarisés en deuxième année de primaire, pour évaluer s'il favoriserait leur compréhension et leur représentation de nombres présentés en numération arabe. Il en est ressorti que la forme du matériel importe peu pour les enfants tout-venant, qui s'en saisissent et progressent dans tous les cas. En revanche, pour les enfants en difficulté en mathématiques, il est préférable que cet arrangement des unités permette de les compter, pour rendre visible la structure de la notation positionnelle du code arabe, mais qu'elle ne puisse pas être détachable, pour éviter d'user les réserves attentionnelles de l'enfant en assemblages incessants.

2. Utilisation du MMC en pédagogie et thérapie

En termes de mise en œuvre, Carbonneau et al. (2013), observaient des résultats significativement meilleurs chez les enfants tout-venant ayant bénéficié d'un enseignement avec du matériel manipulable, comparé à l'utilisation de symboles abstraits seuls. Cependant, pour une meilleure efficacité, ces chercheurs préconisent de suivre quatre recommandations que l'on retrouve aussi chez Laski et al. (2015). D'abord, il s'agit, comme décrit plus haut, de présenter un matériel neutre, limité aux seules caractéristiques nécessaires au concept étudié, pour ne pas parasiter l'enfant dans son apprentissage. La guidance de l'adulte est également essentielle, car c'est lui qui va venir expliciter la relation entre l'objet manipulé et le concept mathématique abstrait abordé (Osana et al., 2017, Carbonneau et al., 2013). Il doit également insister sur les caractéristiques pertinentes de l'objet et montrer qu'il n'est qu'une représentation possible, pas le concept en soi. Cette mise en lien est importante, car selon Alfieri et al. (2011), une exploration guidée serait plus efficace pour l'enfant que de le laisser découvrir par lui-même. Il est pareillement pertinent d'introduire d'abord le MMC, et de progresser ensuite graduellement vers l'abstrait. Cette progression est un des piliers de la méthode Concrete-Representionnal-Abstract (CRA*),* légitimée par de nombreuses études, y compris concernant la pathologie (Agrawal & Morin, 2016, Bouck & Park, 2018). Cette méthode comporte trois stades. D'abord un niveau concret, où le MMC est utilisé, ensuite un niveau représentationnel, où le support est pictographique (dessins simples, figures géométriques…) et enfin un stade abstrait avec des symboles conventionnels (Miller et al., 1992). Dans leur revue systématique, Fyfe et al., (2014) ont mis en évidence qu'une instruction passant par le concret, puis l'abstrait, donnait de meilleurs résultats que l'utilisation du concret ou de l'abstrait seul. Enfin, il serait préférable de privilégier les interventions sur un temps long, avec le même matériel pour une meilleure efficacité (Laski et al., 2015). Cet étalement temporel est nécessaire pour laisser à l'enfant le temps de cheminer d'une pensée concrète à une pensée abstraite, en intégrant solidement les acquis successifs

(McNeil & Fyfe, 2012). Cependant, Kroesbergen & Van Luit, montraient dans leur méta analyse de 2003, qu'une intervention brève pouvait aussi avoir un impact plus important que les interventions longues, possiblement car elle se concentre sur des objectifs plus ciblés. Parmi les recherches utilisant le bloc UDCM, Zhang & Okamoto (2017) ont ainsi observé une amélioration des capacités d'estimation de grandeur de nombres à deux chiffres, sur une ligne numérique graduée de 0 à 100, chez des CP tout-venant, après seulement deux séances de 15 minutes de travail de composition de nombres à deux chiffres. Osana et al. (2017) constatent une meilleure compréhension de la notation positionnelle et une meilleure utilisation de la retenue, après deux séances de 45 minutes de travail de l'addition faisant appel au bloc UDCM avant de passer à une résolution abstraite. Utiliser le bloc UDCM en addition semble donc pertinent, même sur un temps relativement court.

3. Application particulière en pédagogie Montessori

Maria Montessori (1870-1952) met au centre de sa pédagogie l'utilisation de MMC ciblés, pour accompagner l'enfant dans les périodes sensibles de ses apprentissages (Montessori, 1936, 2018). Ils ne sont pas pensés comme des jouets, mais comme de véritables outils de travail, présentant seulement les attributs nécessaires à l'apprentissage ciblé de la notion recherchée (Laski et al., 2016). Montessori affirme qu'un enfant développe mieux son intelligence s'il est engagé activement, en mouvement, et insiste sur l'importance de la motricité manuelle (Montessori 2018, Montessori, 1936). Cette intuition a été confirmée par les recherches actuelles (Lillard, A. S. 2018), Houdé, O. 2018. L'enfant traverse des étapes graduelles l'amenant progressivement du concret vers l'abstrait (Lillard, A. S. 2018), et il n'est invité à aborder une notion complexe que s'il maîtrise les prérequis nécessaires. Cela rejoint ce qui est préconisé dans l'approche CRA décrite plus haut, où l'on répète les séances jusqu'à ce que ce le concept soit acquis, avant de passer au stade d'abstraction suivant (Miller et al., 1992).

L'adulte accompagne les enfants dans une posture de guide observateur, humble et bienveillant. Il met à disposition des enfants les matériels adaptés pour poursuivre leur trajectoire individuelle d'apprentissage, et fait appel à l'apprentissage par imitation (Poussin, 2017). L'adulte fournit une démonstration commentée et en face à face de l'utilisation du matériel, qui sera ensuite accessible à volonté pour l'enfant. Le co-tutorat est encouragé entre enfants d'âges différents réunis dans une même classe ;

la guidance vient donc également des élèves plus avancés, qui en profitent pour consolider leurs connaissances en les transmettant (Alvarez, 2016).

De récentes recherches tendent à montrer des avantages en termes de résultats scolaires dans les matières académiques, mais aussi en termes de compétences sociales et de motivation intrinsèque aux apprentissages chez les enfants scolarisés en école Montessori (Lillard, A, 2006). Certaines études mettent spécifiquement en évidence de meilleurs résultats en mathématiques chez les enfants scolarisés selon cette pédagogie (Faryadi, 2017; Laski et al., 2016). Comme pour l'utilisation du matériel manipulable en général, il n'est aujourd'hui pas possible de déterminer précisément quels aspects de la pédagogie Montessori seraient responsables des progrès observés (Marshall, 2017). Cependant, la fidélité aux préceptes de Maria Montessori (Lillard, A. S. 2012), ainsi que le rôle du matériel (Laski et al., 2016) semblent jouer un rôle important dans ces écarts de résultats, observés tant dans les matières académiques que concernant les fonctions exécutives ou la gestion de problèmes relationnels. L'utilisation du MMC en pédagogie par Maria Montessori respecte donc les quatre recommandations de matériel sobre, travail dans la durée, guidance de l'adulte, et progression du concret vers l'abstrait (Laski et al., 2016). C'est pourquoi nous avons choisi pour notre travail un MMC qu'elle a pensé pour les 3-6 ans de sa « maison des enfants ». Il s'agit du matériel des perles dorées, qui reprend le principe du bloc UDCM, c'est-à-dire qu'il rend saillant la base dix en regroupant des unités (ici des perles) en barrettes de 10, en plaques de 100 et en cubes de 1000 perles. Nous l'associerons à des cartes symboles pour lier la représentation analogique du MMC choisi à sa représentation arabe. Ces cartes possèdent un code couleur et permettent de composer les nombres par superposition : pour faire 425, l'enfant associera la carte 400 rouge, la carte 20 bleue et la carte 5 verte. A noter qu'un enfant tout-venant, scolarisé selon les principes de la pédagogie Montessori, aura déjà pu se familiariser avec le bloc UDCM en numération pour composer en autonomie des nombres jusqu'à dix mille ; il sera donc familier du fonctionnement de la base 10 et de la notation positionnelle du code indo-arabe.

3. Conclusion

La recherche tend à trouver un intérêt global, validé par la preuve, de l'utilisation du MMC dans la remédiation de multiples difficultés en mathématiques chez l'enfant (Lafay, Osana, & Valat, 2019), à condition de respecter certaines recommandations de forme et d'utilisation (Carbonneau et al., 2013). Ces conditions sont respectées en pédagogie Montessori (Laski et al., 2015), ce qui en fait un cadre valable d'expérimentation d'efficacité du MMC. Cependant, la recherche peine encore à mettre en lien un matériel spécifique à l'amélioration d'une capacité précise. Dans cette démarche, nous voulons évaluer l'efficacité d'un entraînement ciblé de dix séances à l'addition avec le bloc UDCM associé aux cartes symboles Montessori, auprès d'une enfant de sept ans présentant un trouble des apprentissages mathématiques. Nous supposons que cet entraînement des capacités arithmétiques en addition, avec un matériel Montessori spécifique, permettra une amélioration des capacités de calcul d'additions simples et complexes chez notre patiente. Pour cela, nous observerons particulièrement ses compétences en gestion de retenue, en termes de précision et de rapidité de résolution, et la nature de ses stratégies additives. Ensuite, nous supposons que cette utilisation du nombre en arithmétique va venir renforcer les relations entre représentations arabes et analogiques du nombre, qui seront intensément mobilisées au cours de l'entraînement. Enfin, nous supposons que les compétences acquises se maintiendront dans le temps.

II. Méthode

1. Population

Ce travail sera présenté sous forme d'étude de cas unique pour pouvoir apprécier précisément la progression du jeune sujet sélectionné. Pour être inclus dans l'étude, l'enfant choisi devait avoir sept ans ou plus et être scolarisé en CE1, ou dans une classe supérieure. En effet, à cet âge, l'enfant est supposé avoir déjà abordé dans le cadre scolaire l'addition et l'utilisation de la retenue qui sont l'objet de notre étude. Cependant les stratégies opératoires utilisées sont encore labiles, entre besoin de support physique (au moins digital) encore prégnant, et construction de la récupération en mémoire des résultats, ce qui en fait une période intéressante à observer. Il fallait également avoir le français pour langue maternelle, ne pas avoir redoublé et présenter un déficit pathologique d'au moins une des habiletés numériques de base. La présence de troubles associés valait pour exclusion.

L'enfant retenue pour notre étude est âgée de 7 ans 6 mois en janvier 2019, et sera nommée Mila dans le cadre de ce mémoire. Elle est exposée au bilinguisme dans le cadre familial par son père qui parle espagnol à ses quatre enfants. Elle ne présente aucun trouble associé avéré, bien que l'on commence à soupçonner un déficit du langage écrit. A noter que la sœur aînée de Mila présente un TSLE. Mila est une enfant très autonome et au développement global harmonieux. Elle a précédemment bénéficié d'un an et demi de suivi orthophonique en langage oral entre la MSM et la GSM. Elle se présente chez l'orthophoniste en fin de CP à la suite de difficultés scolaires en mathématiques. La plainte porte particulièrement sur la compréhension des consignes et du vocabulaire mathématique, des opérations (par exemple 7+8=78). Elle a aussi tendance à appliquer des procédures sans forcément comprendre les concepts sous-jacents et cette utilisation plaquée des apprentissages peut mener à des contre-sens.

Le bilan effectué en juillet 2019 avec la batterie Tedimaths met en avant une fragilité du code arabe, avec une absence de maîtrise de la base 10 et de la notation positionnelle. Cela entraîne des confusions entre les unités et les dizaines, et une mise en échec sur les nombres au-delà de 100. Le système numérique oral est mieux compris. En revanche, ses capacités de transcodage se sont révélées déficitaires, signalant un lien non fonctionnel entre code oral et code arabe avec des confusions lexicales en écriture (16/17, 13/30) et en lecture (47/87, 15/50). Les capacités arithmétiques de Mila sont également déficitaires. Elle est en difficulté pour effectuer des opérations au format analogique, où il lui est nécessaire de dénombrer les éléments. Parmi les opérations utilisant les codes symboliques, les soustractions sont impossibles à réaliser, et les additions simples, aux opérandes à un chiffre sont possibles, mais uniquement avec le support du comptage digital. Les énoncés verbaux ne sont pas source de difficulté.

Pour compléter cette évaluation, nous avons choisi de faire passer les épreuves de comparaison analogique de nombres de l'Examath (Lafay & Helloin, 2016) pour affiner notre perception de son sens du nombre. Nous observons un système numérique précis déficitaire et un système numérique approximatif fonctionnel.

Un schéma du profil de la patiente est proposé en figure 1 ci-dessous. Les croix indiquent ce qui nous est apparu déficitaire.

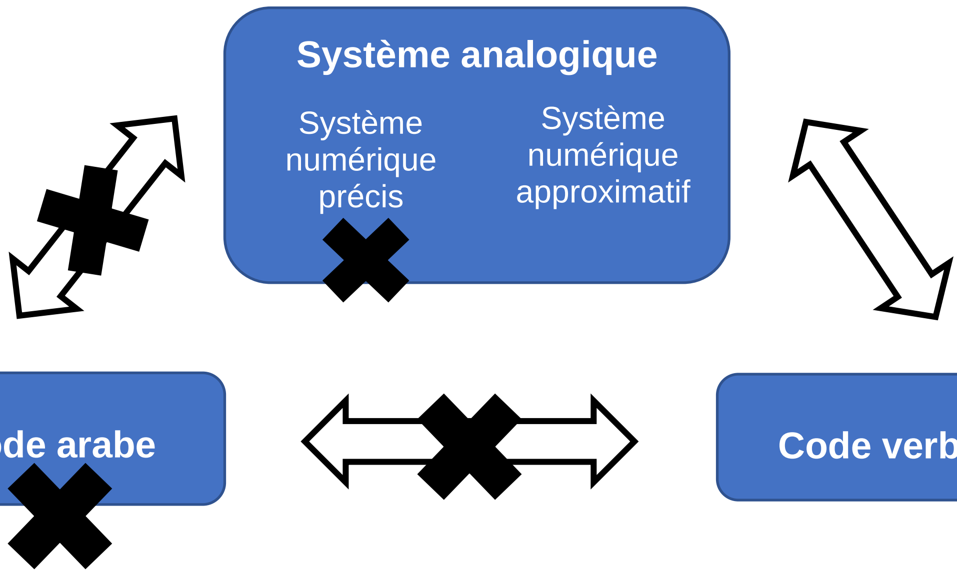


Figure 1 : Modules déficitaires chez Mila

Un bilan du raisonnement logique avait également été proposé en juillet 2019, mettant en évidence des capacités déficitaires en classification et en combinatoire, avec une sériation fonctionnelle.

2. Matériel

1. Ligne de base

Mila a participé à notre ligne de base à trois reprises : dans la semaine précédant l'entraînement, dans la semaine suivant l'entraînement, puis un mois après la fin de l'entraînement. La comparaison des performances aux deux premières lignes de base vise à évaluer si la patiente a progressé de manière significative suite à l'intervention, tandis que la troisième ligne de base permet de vérifier si cette évolution perdure dans le temps. La passation a lieu, pour partie dans le bureau de l'orthophoniste de Mila, et pour partie à son domicile. Le détail des épreuves est disponible en annexe A.

1. Présentation liste A : capacités arithmétiques

Cette liste est composée d'épreuves visant à évaluer les capacités arithmétiques de Mila en addition, en termes de performances générales mais aussi de gestion de la retenue et de stratégies de résolution privilégiées. Tout d'abord, pour évaluer la rapidité et l'exactitude de son accès à des faits arithmétiques simples, il lui est présenté deux épreuves de fluence arithmétique. La première est issue de la batterie informatisée d'examen des habiletés mathématiques Examath 8-15 (Lafay & Helloin, 2016), et implique une réponse à l'oral à un maximum d'opérations présentées successivement à l'écran en une minute. La deuxième, tirée du Tempo Test Rekennen (Lafay et al., 2015), demande une réponse écrite faisant appel à la numération arabe à un maximum d'opérations présentées en colonne sur papier. Les opérandes étant de grandeur croissante au fur et à mesure des épreuves, plus l'enfant parvient à résoudre d'opérations durant cette minute, plus il est amené à faire face à des additions complexes, nécessitant le recours à des stratégies différentes de la récupération en mémoire, comme le calcul mental ou le comptage digital. Ensuite, l'enfant fait face à une épreuve de jugement de retenue. Dix opérations posées lui sont successivement et aléatoirement présentées via des étiquettes imprimées, la moitié nécessitant l'utilisation d'une retenue et l'autre non. Mila doit expliquer oralement si elle a besoin d'utiliser une retenue ou pas, et pourquoi. Nous prenons également note des erreurs de justification éventuelles pour déterminer si elles sont le fruit d'une mauvaise application du concept de retenue ou issues d'erreurs de calcul. Enfin, une épreuve chronométrée de résolution de quatorze calculs posés est proposée. Elle comporte sept additions simples et sept additions complexes (nécessitant le recours aux retenues), qui sont présentées aléatoirement, déjà posées sur des étiquettes imprimées. Les calculs varient aussi en termes de grandeur des opérandes, allant de l'unité isolée à la centaine. Le millier n'étant abordé qu'en fin de CE1, il aurait été intéressant d'observer comment Mila réagissait à des grandeurs d'opérandes plus importantes, mais la durée de l'épreuve s'en serait trouvé encore allongée, tirant sur ses capacités attentionnelles. Il est de plus demandé à Mila d'oraliser ses stratégies et étapes de résolution.

2. Présentation liste B : impacts en numération arabe

Cette liste est composée d'épreuves d'Examath et vise à tester la maîtrise de la numération de Mila et particulièrement les liens entre code arabe et système analogique. En effet, notre travail met en lien un matériel manipulable, représentant la base 10 de manière analogique et des étiquettes écrites en numération arabe, pour mieux appréhender la notation positionnelle. Ce lien est donc intensément mobilisé et cela pourrait avoir un impact sur nos mesures. Pour cela, nous lui présentons d'abord les épreuves du module relation arabe-analogique, sur 48 points. Il comporte une épreuve de jugement sur 12 points où l'enfant doit déterminer si les quantités présentées à l'écran en format analogique et en notation arabe lui semblent égales. Par la suite, elle doit indiquer lequel des deux nombres arabes présentés à l'écran représente la plus grande quantité (petits, moyens puis grands nombres). Chaque sous-épreuve est notée sur 12. Lors de l'épreuve relation arabe/ analogique UDC, sur 12 points, l'enfant doit sélectionner des objets correspondants au nombre demandé, ou écrire le nombre correspondant aux objets présentés. Ces objets sont organisés selon les principes de la base 10 (pièces de 1 euro et billets de 10 euros, cubes présentés individuellement ou empilés par 10, billes présentées seules ou par boîtes de 10). Cela permet un aperçu de sa maîtrise de la numération décimale en lien avec le sens du nombre. Mila est également soumise à une épreuve de décomposition additive, sur 12 points, où elle doit choisir, parmi plusieurs propositions, quelle décomposition représente correctement le nombre cible. Par exemple : 98 est-il équivalent à 9+8, à 90+8 ou à 90+80 ?

3. Présentation liste C : la numération verbale comme témoin

Cette liste C, comparée avec la liste A, sert de témoin pour vérifier que les performances de la patiente sur cette liste A cible n'ont pas évolué grâce à des facteurs extérieurs à l'entraînement, ou par maturation spontanée plus globale du sujet. Pour cela, nous utilisons le module relation oral-analogique d'Examath pour observer ses compétences liées au code oral, qui est source de difficulté mesurée pour elle mais ne fait pas l'objet d'un entraînement spécifique durant notre intervention. Mila est d'abord exposée à une épreuve de jugement (sur 12 points) où elle doit déterminer si les quantités, présentées à l'écran en format analogique (nuages de points) et entendues sous forme orale, lui semblent égales. Par la suite, elle doit indiquer lequel des deux nombres entendus représente la plus grande quantité (petits, moyens et grands nombres). Chaque sous-épreuve est notée sur 12.

2. Matériel d'entraînement

Il est décidé d'utiliser une représentation rendant tangible la structure de notre système de numération décimal : le bloc UDCM. Dans le cadre de la pédagogie Montessori, ce matériel présente les unités sous la forme de perles rondes individuelles, les dizaines en barrettes de 10 perles solidarisées par une tige métallique, les centaines en plaques de 100 perles assemblées et les milliers sous formes de cubes de 1000 perles. Les perles n'étant pas opaques, l'enfant peut voir l'intérieur du cube par transparence et constater qu'il n'est pas vide. Ce matériel est dénombrable mais non détachable, ce qui serait plus favorable à la compréhension et la représentation des nombres pour les enfants en difficulté en mathématiques, d'après un projet de recherche mené chez des deuxième année de primaire par Lafay, Osana, & Hadjadj en 2018 - 2019.

Sont associées à ce matériel, dit des perles dorées, des cartes symboles en numérotation arabe pour lier cette représentation analogique et manipulable à notre système de numération arabe. Ces cartes permettent la composition de nombres par superposition. Par exemple, pour former 137, il faut superposer une carte 100, une carte 30 et une carte 7, en prenant soin d'aligner les cartes sur leur côté droit. Les différentes couches de cartes peuvent ensuite être soulevées pour participer à la compréhension de la notation positionnelle et nommer plus aisément le nombre ainsi obtenu. Les cartes symboles ont aussi la particularité de présenter un code couleur : les unités sont représentées en vert, les dizaines en bleu, les centaines en rouge et les milliers en vert.

L'enfant dispose d'un plateau pour transporter plus aisément et de manière ordonnée les quantités utilisées pendant l'entraînement, ainsi que les cartes correspondantes. Nous utilisons également des feuilles blanches et des feutres respectant le code couleur pour mieux visualiser la place des unités, dizaines et centaines tout en se détachant progressivement des cartes. Une présentation du matériel d'entraînement est visible en annexe B.

3. Procédure

Les séances ont lieu deux fois par semaine, le lundi en début d'après-midi sur l'horaire de la séance habituelle de la patiente, au cabinet de son orthophoniste, et le mercredi matin au domicile de la patiente. Ces sessions durent 45 minutes en incluant un temps d'installation et de rangement du matériel. La passation de la ligne de base s'est faite sur les mêmes créneaux et l'enfant ne sera pas suivie en parallèle par son orthophoniste sur un autre horaire, pour éviter un biais de double prise en soin.

Les deux premières séances sont centrées sur la numération pour prendre en main le matériel. La première séance permet la découverte du matériel des perles dorées en lui-même et la mise en lien explicite avec notre système en base 10 par la manipulation et la guidance de l'adulte. La deuxième séance voit l'apparition des cartes symboles et leur appariement avec le MMC. Par la suite, l'enfant sera amenée à travailler sur le sens de l'addition par l'utilisation du matériel dans la pose d'addition, d'abord sans retenue lors de la séance 3, puis avec une à deux retenues à prendre en compte lors des séances 4 et 5 pour bien ancrer cette procédure. Les séances 6 et 7 sont consacrées aux catégories décimales vides (que l'on peut représenter par un zéro), et à l'addition de termes de longueurs différentes. Les trois dernières séances visent la généralisation en se rapprochant d'un cadre plus écologique et proche du quotidien « scolaire » de la pose d'addition. Lors des septième et huitième séances, les cartes symboles sont remplacées par des nombres écrits par l'adulte puis par l'enfant en reprenant le code couleur précédemment utilisé. Lors de la dixième et dernière séance, le matériel manipulable peut encore être utilisé mais les opérations sont posées et résolues en noir.

Le détail de ce protocole d'entraînement ainsi que des extraits de productions de Mila et de l'adulte sont disponibles pour consultation en Annexe C.

III. Résultats

L’objet de notre étude est d’évaluer si notre entraînement, effectué avec un matériel manipulable Montessori auprès d’une enfant en difficulté en mathématiques, aura un impact direct sur ses capacités arithmétiques en addition, un effet indirect sur les liens entre ses représentations arabes et analogiques, et si ces évolutions se maintiennent dans le temps. Pour mettre en évidence un éventuel effet de l'entraînement sur les performances de notre sujet, nous avons analysé les écarts entre ses scores en pré et en post-test à l’aide d’un test statistique non paramétrique, le Q’ de Michael (2007). Ce test est indiqué pour comparer un unique sujet à lui-même avec un paradigme temporel, et permet une analyse de scores bruts dont le maximum est connu et inférieur à 40, ce qui est le cas de la majorité des épreuves retenues pour notre étude. En revanche, nous appliquons un autre test statistique aux épreuves de fluence, car elles ne comportent par un nombre fini d’essais prédéterminés, mais seulement un temps limité pour donner autant de réponses que possible. Pour les scores au Tempo Test Rekenen et à l’épreuve de fluence additive issue d’Examath, nous utilisons donc le test de Pocock, noté z, qui suit la loi normale. Pour être considérés comme significatifs, les résultats doivent présenter une p-value (notée *p*) inférieure à 0,05.

Trois analyses sont menées en vue de tester nos hypothèses initiales. La première rend compte de la progression après entraînement du sujet en termes de gestion de retenue, de performance en calcul et d’évolution stratégique, en analysant les épreuves de jugement de retenue, de calculs posés et de fluences à réponses orales et écrites. La seconde analyse porte sur l’évolution des compétences à mettre en lien numération arabe et analogique par les épreuves de relation arabe-analogique, relation arabe-analogique UDC et de décomposition additive. Cela nous donne aussi un aperçu de la compréhension de la notation positionnelle et de la base 10 par notre sujet. La troisième analyse vise à montrer si ces évolutions perdurent dans le temps, en comparant les scores en post-test immédiat avec ceux du post-test différé. Cette analyse quantitative est parfois complétée par une analyse qualitative basée sur nos observations.

1. Première hypothèse : effet sur les performances en addition

1. Jugement de retenue

Mila est amenée à nous dire si elle utiliserait une retenue pour résoudre les opérations qui lui sont présentées. Ce score en jugement de retenue est passé de 8/10 en pré-test à 10/10 en post-test malgré la persistance d'hésitations. Une des erreurs corrigées en post-test est que la somme d'une colonne donnant 10 est jugée source de retenue. Cette évolution n'est cependant pas significative (*Q'*(1)= 1,42, *p*= 0,23). Notre sujet justifie ses jugements de retenue en oralisant l'addition des opérandes par colonnes. Nous observons trois erreurs d'addition de ces colonnes en pré-test, uniquement sur des opérations nécessitant un passage de retenue (7+5 =17, 7+4=16 et 9+4 =14) et 4 erreurs en post-test, dont la moitié porte sur une somme inférieure à 10 (7+5 = 15, 3+4 = 8 à 2 reprises et 6+8=19). Cette évolution n'apparaît pas significative *(Q'*(1)=0,19, *p*= 0,66).

2. Rapidité et précision de résolution

Les scores en résolution de calculs posés n'ont pas évolué significativement, (*Q'*(1)= 0,24, *p*= 0,62) passant de 13/14 à 12/14 calculs réalisés sans erreurs. En pré-test, l'erreur vient d'une retenue notée mais non descendue ensuite, alors qu'en post-test, les erreurs portent sur la somme erronée de colonnes, avec un caractère impulsif des réponses. Nous avons également présenté à Mila deux épreuves de fluences arithmétiques. Le Tempo Test Rekennen (Lafay et al., 2015) impliquait une réponse écrite à un maximum d'additions en une minute. Nous ne constatons pas d'évolution significative *(z = -0,6, p* = 0,54), avec des scores passant de 11/40 à 14/40. Les scores aux fluences à réponses orales de l'Examath ne montrent pas non plus d'évolution significative, (*z* = - 0,19, *p* = 0,84). Mila passe de 13/40 à 14/40 opérations à réponses orales réussies en une minute. Nous notons des performances similaires aux épreuves de fluence, que les réponses soient données à l'oral ou à l'écrit : l'écart entre les deux modalités de réponse n'est pas significatif en pré-test avec *Q'*(1)= 0,17, *p*= 0,68 et les scores sont identiques en post- test.

Tableau 1 : Effet de l'entraînement sur les performances en addition

Epreuve	Score pré-test	Score post-test	p-value
Jugement de retenue	8	10	0,23
Erreurs d'addition de colonnes	3	4	0,66
Calculs posés	13	12	0,62
Fluences arithmétiques à réponse orale (Examath)	13	14	0, 84
Fluences arithmétiques à réponse écrite (TTR)	11	14	0,54
Écart de score entre les fluences	2	0	0,68

3. Répartition stratégique

Pour l'épreuve de calculs posés, le protocole est verbal : Mila doit détailler oralement sa démarche au fur et à mesure de la réalisation de son calcul. Nous notons également d'éventuels mouvements digitaux visibles. En pré-test, Mila nous rapporte utiliser sept fois ses doigts et calculer dans sa tête pour les sept autres calculs, sans recours à de la récupération en mémoire, ce qui semble cohérent avec le temps important consacré à chaque opération. En post-test, elle nous dit utiliser le support digital pour sept des quatorze opérations, et calculer mentalement les sept autres, toujours sans recours à la récupération directe en mémoire de faits arithmétiques. En pré-test, nos observations correspondent avec ses dires, les mouvements digitaux observés étant seulement moins nombreux que les recours décrits de support digital. En revanche, lors du post-test, nous observons des mouvements digitaux de comptage sur seulement trois opérations, dont deux ne faisant pas partie des sept décrites comme ayant nécessité un support digital. Cependant, même en donnant foi à nos observations, évoluer de sept à trois recours au comptage digital ne serait pas significatif ($Q'(1)= 2,09$, $p= 0,15$). De même, cela impliquerait un passage de 7/14 à 10/14 recours au calcul mental, ce qui ne serait pas non plus significatif ($Q'(1)= 1,12$, $p= 0,29$). La pression temporelle pesant sur le Tempo Test Rekennen ne nous permet pas d'utiliser ce protocole verbal durant l'épreuve, au risque de fausser les performances. Cependant, nous posons la question a posteriori à Mila des stratégies qu'elle pense avoir utilisées lors de cette épreuve et elle nous rapporte passer de quatre utilisations de la récupération en mémoire du résultat en pré-test à cinq en post-test, ce qui ne constitue pas une évolution significative ($Q'(1)= 0,02$, $p= 0,88$). En revanche, elle a recours au calcul mental une fois en pré-test et neuf fois en post-test, ce qui représente une évolution significative ($Q'(1)= 6,95$, $p= 0, 01$*). Par ailleurs, Mila nous dit utiliser le comptage digital cinq fois en pré-test et une fois en post-test, cette évolution est significative ($Q'(1)= 6,42$, $p= 0,01$*). Lors du pré-test, Mila utilise le comptage digital dès que la somme des opérandes dépasse 5, alors que lors du post-test, ce n'est que pour le dernier calcul, dont la somme est supérieure à 10, qu'elle y a recours. L'utilisation de la récupération lui permet d'être plus rapide, jusqu'à effectuer 15 opérations au lieu de 11 en pré-test, mais elle perd en précision, commettant une erreur qui ramène son score à 14/40 en post-test.

Tableau 2 : Effet de l'entraînement sur l'évolution des stratégies

Epreuve	Stratégies utilisées	Score pré-test	Score post-test	p-value
Calculs posés	Comptage digital	7	3	0,15
	Calcul mental	7	10	0,29
Fluences arithmétiques à réponse écrite (TTR)	Comptage digital	5	1	0,01*
	Calcul mental	1	9	0,01*
	Récupération	4	5	0,88

Si les performances de Mila en additions n'évoluent pas significativement entre le pré et le post-test, nous observons en revanche une évolution de la répartition stratégique en situation de pression temporelle.

4. Evolution de la liste C témoin : relation oral – analogique

Pour s'assurer que les évolutions de performances observées pourraient être imputées à notre entraînement, et pas seulement à une maturation indépendante du sujet, nous avons pris soin de constituer une liste C, dont les items font appel à des compétences mathématiques différentes de celles exercées pendant l'intervention. L'analyse des scores à ces épreuves de relation oral – analogique ne font pas apparaître de progrès significatifs entre le pré et le post-test. Le score global au module d'épreuves évaluant la relation oral-analogique a progressé de 30/48 à 32/48, ce qui n'est pas significatif ($Q'(1)=0,13$, $p= 0,72$). En examinant les sous - épreuves, nous observons que le score à la tâche de jugement de petits nombres n'évolue pas significativement, passant de 4/12 à 8/12 items réussis ($Q'(1)= 2,37$, $p= 0,12$). Pour les sous-épreuves de comparaisons, les progrès ne sont significatifs ni pour les petits nombres ($Q'(1)= 1,81$, $p= 0,18$), avec un score passant de 8/ 12 à 11/12, ni pour les moyens nombres ($Q'(1)= 1,81$, $p= 0,18$), avec un score évoluant de 11/12 à 8/12, ni pour les grands nombres ($Q'(1)= 0,57$, $p= 0,45$), dont le score évolue de 7/12 à 5/12.

2. Deuxième hypothèse : effet sur la numération arabe

En ce qui concerne l'épreuve de relation arabe-analogique UDC, l'évolution de son score de 22/30 à 27/30 n'est pas significative avec $Q'(1)= 1,98$, $p= 0,16$. De même, l'épreuve de décomposition additive ne montre pas d'évolution significative de ses scores qui passent de 5/12 à 6/12 avec $Q'(1)= 0,14$, $p= 0,7068$. Nous observons une différence tendancielle entre les scores en pré et post-test (de 22/48 à 33/48) du module relation arabe-analogique avec $Q'(1)= 3,78$ $p= 0,0519$.

Une partie des sous-épreuves montre un écart significatif de score entre le pré-test et le post-test. C'est le cas des épreuves de comparaison de petits nombres, avec un score évoluant de 4/12 à 10/12 et un $Q'(1)= 5,89$, $p= 0,01$* et de comparaison de grands nombres avec un score évoluant de 0/ 12 à 7/12 ($Q'(1)= 1 ,88$, $p= 0, 00$*) . Les deux autres sous-épreuves ne montrent pas d'évolution significative de leurs scores. La comparaison de moyens nombres évolue de 9/12 à 8/12, avec $Q'(1)= 0,16$, $p= 0,69$, tandis que le jugement de petits nombres évolue également de 9/12 à 8/12 avec $Q'(1)= 0,16$, $p= 0,69$.

Tableau 3 : Effet de l'entraînement sur les liens entre représentations arabes et analogiques

Epreuve	Score pré-test	Score post-test	p-value
Relation arabe- analogique	22	33	0,05
Jugement petits nombres	9	8	0,69
Comparaison petits nombres	4	10	0,01*
Comparaison moyens nombres	9	8	0,69
Comparaison grands nombres	0	7	0,00*
Relation arabe- analogique UDC	22	27	0,16
Décomposition additive	5	6	0,71

3. Troisième hypothèse : les effets de l'entraînement perdurent dans le temps

Pour évaluer cette troisième hypothèse, nous effectuons, un mois après la fin de l'entraînement, un second post-test composé des épreuves dont les scores avaient significativement augmenté entre le pré-test et le post-test réalisé dans la semaine suivant l'entraînement. Cela concerne les épreuves de comparaison de grands nombres et de petits nombres du module de relation arabe-analogique d'Examath.

1. Comparaison entre pré-test et post-test différé

L'épreuve de comparaison de petits nombres ne montre pas d'évolution significative de ses scores qui passent de 4/12 à 8/12 avec *Q'*(1)= 2,37, *p*= 0,12. En revanche, les scores de l'épreuve de comparaison de grands nombres évoluent significativement entre le pré-test et le post-test différé, passant de 0/12 à 9/12 avec *Q'*(1)= 16, 74, *p*= 0,00*.

Tableau 4 : Maintien des effets de l'entraînement sur la liste B en post test différé

Epreuve	Score pré-test	Score post-test différé	p-value
Comparaison petits nombres	4	8	0,12
Comparaison grands nombres	0	9	0,00*

IV. Discussion

Cette étude s'intéresse à la pertinence d'un entraînement de dix séances avec un MMC issu de la pédagogie Montessori, pour faire évoluer les performances en addition et optimiser la répartition stratégique d'une enfant de sept ans, présentant un trouble de la cognition mathématique. Pour mesurer d'éventuels progrès, nous avons évalué notre jeune sujet la semaine précédant l'intervention, la semaine suivant l'intervention puis un mois après la fin de l'intervention, pour évaluer un potentiel maintien des acquis. Nous allons maintenant discuter et interpréter les résultats obtenus et confirmer ou infirmer nos hypothèses originelles. Ensuite nous mettrons en évidence certaines limites à cette étude et proposerons des perspectives de poursuite et d'amélioration pour de futures recherches.

1. Mise en lien avec la littérature

1. Hypothèse 1 : évolution des performances en addition

1. Gestion de la retenue

Mila n'a pas significativement amélioré ses performances en gestion de retenue. Cette compétence était déjà majoritairement maîtrisée en pré-test et les résultats semblent montrer un effet plafond avec les items choisis. Cependant, l'évolution des erreurs observées laissent penser que Mila a affiné sa compréhension de l'utilisation de la retenue (inclusion du 10 comme nécessitant une retenue, aucune erreur de descente de retenue). En parallèle, Mila a commis une erreur supplémentaire en addition de colonnes lors de la deuxième ligne de base par rapport à la première. Ces performances évoquent celles observés par (Lambert & Moeller, 2019), qui constatent chez des enfants en difficulté mathématique une amélioration des compétences en retenue après entraînement avec un MMC, mais des erreurs plus nombreuses concernant les faits arithmétiques, du fait du coût important en mémoire de travail nécessaire pour gérer tous ces paramètres simultanément.

2. Evolution de la précision et de la rapidité de résolution

Aucune des épreuves choisies pour tester les habiletés en calcul d'addition n'a révélé d'écart de score significatif. Notre entraînement ne semble donc pas avoir impacté significativement les performances en termes de vitesse et d'exactitude de la patiente en résolution d'additions. L'épreuve de calculs posés était constituée d'associations d'opérandes de longueurs variées pour observer leur impact sur notre sujet. Cependant, il aurait peut-être été préférable de limiter davantage la diversité des opérandes mais de présenter un plus grand nombre d'opérations, comme Zhang & Okamoto (2017) ou Osana et al. (2017), qui, malgré des temps d'entraînement très courts, avaient mis en évidence des évolutions de performance en addition.

3. Evolution de la répartition stratégique

D'après nos observations et l'analyse des résultats, nous ne pouvons supposer qu'une validation partielle de notre troisième partie d'hypothèse. Pendant l'épreuve de quatorze calculs posés, initialement pensée pour évaluer la répartition stratégique via son protocole verbal, au fur et à mesure, les stratégies n'ont pas significativement évolué. Le calcul mental et le support digital sont préférés à la récupération en mémoire des résultats, qui n'est pas utilisée.

Le calcul posé est une tâche complexe où il faut à la fois gérer la répartition spatiale des opérandes, se questionner sur l'utilisation éventuelle de la retenue, dérouler la procédure pour résoudre l'addition par colonne, ne pas oublier de descendre les retenues et les nombres, etc. Cela mobilise massivement les ressources attentionnelles et en mémoire de travail de l'enfant (Geary et al., 2004; Lambert & Moeller, 2019; Noël et al., 2013). Mila doit ralentir et s'adapter pour privilégier l'exactitude des réponses en utilisant des stratégies plus sûres (Siegler & Braithwaite, 2017; Siegler & Shrager, 1984). Seule la répartition stratégique à l'épreuve de fluence à réponse écrite issue du Tempo Test Rekennen, et récoltée indirectement après l'épreuve, a montré une différence significative entre le pré-test et le post-test immédiat. Pour faire appel à une stratégie de récupération, les enfants doivent avoir assez confiance dans la véracité de leur réponse pour ne pas chercher à utiliser une autre stratégie plus fiable mais plus longue et coûteuse comme compter sur ses doigts ou mentalement (Fayol, 2018; Siegler & Braithwaite, 2017; Siegler & Shrager, 1984). Les termes de l'épreuve de fluence sont plus petits que ceux rencontrés en calculs posés, Mila a donc probablement plus confiance en sa capacité à récupérer ces faits arithmétiques en mémoire. Cependant, cette adaptation de comportement stratégique, qui consiste à privilégier le calcul mental ou le recours au support des doigts, au détriment de la récupération quand le calcul gagne en complexité, est plutôt celui observé chez des enfants tout-venant, comme chez Siegler & Shrager (1984) ou Geary et al. (2004). En revanche, dans son groupe d'enfants en difficulté mathématique avant le CE2, Geary et al. (2004) observaient au contraire une utilisation massive et supérieure au tout-venant du comptage digital pour les opérations à un chiffre, et une utilisation erronée de la récupération (devinette) pour les opérations comportant des opérandes à deux chiffres. Mila agit donc plutôt comme un enfant tout-venant que comme un enfant en difficulté mathématique dans ses choix stratégiques lors de ces épreuves. La différence entre nos observations et les stratégies rapportées par Mila posent question quant à la fiabilité de nos observations, même assorties du témoignage de l'enfant, comme recommandé par Cumming & Elkins (1999). Pourtant, Geary et al. en 2004 avaient observé une adéquation de 95% entre les stratégies relevées par les observateurs et celles données par les enfants.

2. **Hypothèse 2 : effet de l'entraînement sur la numération et particulièrement le lien entre représentations arabes et analogiques**

Cette hypothèse peut être considérée comme validée car deux sous-épreuves montrent un écart significatif : la comparaison de petits et de grands nombres dans le module de relation arabe-analogique.

Cependant, le score de comparaison de grands nombres en pré-test étant de 0/12, l'écart important observé en post-test immédiat est à nuancer et pourrait être interprété comme une homogénéisation des résultats ou une meilleure compréhension de la consigne en post-test plutôt que comme un progrès. Pris globalement, le module de relation arabe-analogique montre une tendance plutôt qu'un effet, avec une p-value tout juste supérieure à 0,05. Cela laisse supposer un effet de l'entraînement sur la perception des nombres en numération arabe de notre sujet. Ces résultats sont en accord avec Bryant et al. (2008) qui mettent en évidence un impact positif d'un entraînement avec le bloc UDCM sur les capacités en numération.

3. **Hypothèse 3 : maintien des acquisitions dans le temps**

Notre hypothèse d'un éventuel maintien de progrès liés à notre entraînement s'est retrouvée presque caduque, étant donné le peu d'améliorations significatives attribuables à l'intervention observée en post-test immédiat. La seule sous-épreuve présentant un maintien de ses progrès est la comparaison de grands nombres, issue de la liste B qui évalue les liens entre les représentations arabes et analogiques. Notre entraînement aurait donc eu un impact durable sur l'accès aux grandes quantités par le code arabe chez notre sujet, ce qui implique une utilisation mieux maîtrisée de la notation positionnelle (Laski et al., 2014). A long terme, une perception précise des grandeurs de grands nombres est un prédicteur robuste de la réussite arithmétique future (Orrantia et al., 2018; Siegler, 2016).

Toutefois, Lafay et al., en 2019**,** gardent un avis nuancé sur le maintien dans le temps des bénéfices d'un entraînement avec un MMC, dû en partie à une absence de robustesse et d'homogénéité méthodologique des études examinées. Ce paramètre mérite d'être observé et évalué précisément dans de futures recherches pour déterminer si un entraînement, suivant les recommandations de bon usage du MMC (Carbonneau et al., 2013; Fyfe et al., 2014; Laski et al., 2015) permet effectivement un ancrage durable des connaissances et compétences ciblées comme décrit par McNeil & Fyfe, (2012).

2. Limites

1. Lignes de base

Il aurait été nécessaire de faire passer un deuxième pré-test avant le début de l'entraînement pour s'assurer de la stabilité des scores de notre sujet. Les conditions de passation manquent également de stabilité, car le pré-test a été effectué au cabinet de l'orthophoniste et à domicile, alors que le post-test a été réalisé en partie à domicile et en partie à distance, au vu du confinement lié à l'épidémie de Covid 19. Le court post-test différé a également été réalisé à distance. Cela peut avoir eu une incidence sur les scores de notre patiente et a limité nos capacités d'observation de ses comportements car nous ne pouvions pas la voir.

Le choix des épreuves et le format des items auraient également pu être différents. Une autre possibilité serait de nous limiter à des opérandes à un ou deux chiffres uniquement, comme Geary et al. (2004), mais d'augmenter le nombre d'opérations présentées pour pouvoir en faire une analyse plus détaillée.

Pour augmenter la précision et l'exhaustivité des observations, il serait profitable de filmer la passation, comme l'avaient fait Siegler & Shrager en 1984 par exemple, ou encore de prévoir un adulte observateur et un autre gérant le chronométrage et l'enchaînement de la présentation des opérations. Les épreuves de jugement de retenue auraient pu être posées en ligne pour évaluer les capacités de la patiente à poser les opérations et disposer les nombres en fonction de leur valeur positionnelle. Cependant, ce choix aurait mobilisé des compétences visuo-attentionnelles, ne nous permettant plus de déterminer l'impact direct de l'entraînement sur le jugement de retenue pure. Une épreuve ciblant le système numérique précis, par le placement de nombres sur une ligne numérique, aurait également été pertinent car c'est un prédicteur des capacités arithmétiques (Lafay et al., 2017).

Un test préalable des capacités de calcul de la patiente aurait permis d'ajuster la ligne de base au plus près de ses capacités actuelles et d'éviter l'effet de plafond observé en jugement de retenue et en résolution de calculs posés, permettant potentiellement d'observer une plus grande amplitude de résultats.

2. Profil du sujet

Un enfant un peu plus âgé, de 8 ou 9 ans, scolarisé en CE2 ou CM1 plutôt qu'en CE1, aurait pu être plus pertinent pour notre étude. En effet, à cet âge, les enfants tout-venant sont censés utiliser plus largement la récupération en mémoire pour la majorité des faits arithmétiques simples (Siegler & Braithwaite, 2017; Siegler & Shrager, 1984). Ce n'est cependant pas le cas chez la plupart des enfants en difficulté en mathématiques, qui conservent des difficultés d'accès à ces faits arithmétiques (Cumming & Elkins, 1999; Geary, 2010). Nous aurions pu tenter d'observer si notre sujet parvenait à combler cet écart après l'entraînement.

3. Facteurs extérieurs

L'intervention a par ailleurs dû subir une interruption d'une semaine, car la patiente n'était pas disponible durant une partie des vacances scolaires. Cela représente un autre biais mais a aussi permis de mettre en relief la chute de performance après un arrêt de seulement une semaine. Cela laissait déjà planer le doute sur l'ancrage et les capacités de maintien des apprentissages effectués sur les compétences visées. Cependant, ces interruptions font également partie de la réalité clinique de la pratique orthophonique.

Un autre biais est l'instruction en mathématiques que Mila a continué de recevoir à l'école durant l'entraînement, et à la maison durant la période de maintien, passée confinée. En revanche, le biais de double prise en soin avait été anticipé avec son orthophoniste, qui avait prévu d'orienter sa remédiation sur les difficultés en raisonnement de Mila durant la période de maintien. Le confinement lui-même a eu une influence sur la scolarisation et probablement l'humeur et l'état général de notre patiente, autant de potentielles interférences avec nos résultats.

Le cadre de soin pourrait aussi être stabilisé et optimisé. Au domicile, la présence de frères et sœurs, curieux et plein de vie, est parfois venue interrompre la concentration des séances. Mila a également été plusieurs fois malade, entraînant un report et certaines séances plus laborieuses, où il était difficile de mobiliser son attention et sa concentration. Mila a pu être moins réceptive à notre intervention et forcément moins impliquée durant cette période.

4. Entraînement

Durant l'entraînement, dans une optique de fidélité aux principes de liberté et d'autonomie Montessori, je laissais le choix d'un des opérandes à Mila, provoquant par mon choix du second opérande, la contrainte visée à ce stade de l'entraînement. Cette liberté m'a permis de susciter l'implication et l'adhésion, voire l'enthousiasme de mon sujet, et d'entrevoir où était sa préoccupation cognitive du moment, mais ne m'a pas permis d'avoir un contrôle complet sur le déroulé de l'entraînement puisque le contenu n'était pas fixe mais amené à s'adapter à l'enfant et sa progression.

Notre recherche tentait d'évaluer en parallèle un nombre important de paramètres, ce qui nous a poussé à utiliser un nombre d'items réduit par épreuve, pour conserver un temps de passation raisonnable des lignes de bases. La conséquence est une analyse relativement superficielle des compétences visées. Se concentrer uniquement sur une sous-compétence de calcul, plus précise à travailler et à évaluer, comme Miller & Kaffar (2011), centrés sur la gestion des retenues uniquement, permettrait potentiellement une analyse plus précise et des progrès plus francs, même sur une période courte d'entraînement, comme observé par Kroesbergen & Van Luit (2003).

3. Perspectives

Cette recherche pourrait être poursuivie en modifiant certains aspects pour l'améliorer. Méthodologiquement, une ligne de base plus ciblée permettrait de présenter au sujet des items plus nombreux par épreuve, pour une analyse plus fine des réponses par la suite. L'étude gagnerait à être prolongée dans le temps pour permettre un ancrage plus durable des acquis (McNeil & Fyfe, 2012), tout en veillant à respecter les conditions d'utilisations du MMC recommandées par Carbonneau et al. (2013) et Laski et al. (2015).

Notre travail est également resté très concret, avec une utilisation permanente du MMC. Aborder les étapes suivantes de l'approche CRA comme Miller & Kaffar (2011), constitue une poursuite de recherche possible, en progressant davantage vers l'abstrait et en se détachant du MMC pour aboutir à une résolution en numération arabe pure, plus proche du quotidien scolaire.

Il serait également intéressant de pouvoir comparer notre sujet avec la norme ou un sujet contrôle et pas seulement avec lui-même. Cela serait par exemple envisageable avec un enfant de 8 ans ou plus en faisant appel aux épreuves d'Examath.

V. Conclusion

Notre entraînement avec un matériel manipulable concret, issu de la pédagogie Montessori, n'a pas eu d'impact significatif en termes de gestion de la retenue ou de précision et de rapidité de résolution d'addition de la patiente.

En revanche, il a impacté la répartition des stratégies utilisées sur les opérandes à un chiffre sous pression temporelle, et a renforcé durablement les liens entre représentations analogiques et arabes des nombres. Ce lien, ainsi que l'utilisation de stratégies adaptées, étant prédicteur d'accomplissement arithmétique dans le futur (Geary, 2011), nous pouvons envisager que cet entraînement aura un effet, indirect et à long terme, sur les capacités arithmétiques de notre patiente.

Pour envisager une utilisation éclairée de ce MMC dans le cadre de la thérapie orthophonique, il serait intéressant de reproduire cette étude en la scindant en plusieurs recherches, plus ciblées, pour permettre un examen plus approfondi des différentes composantes nécessaires à un développement efficient de l'addition chez un enfant porteur de trouble de la cognition mathématique.

VI. Références

Agrawal, J., & Morin, L. L. (2016). Evidence-Based Practices : Applications of Concrete Representational Abstract Framework across Math Concepts for Students with Mathematics Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *31*(1), 34-44. https://doi.org/10.1111/ldrp.12093

Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 1-18. https://doi.org/10.1037/a0021017

Alvarez, C. (2016). *Les lois naturelles de l'enfant*. Les Arènes.

American Psychiatric Association, & American Psychiatric Association (Éds.). (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders : DSM-5* (5th ed). American Psychiatric Association.

Barrouillet, P., Billard, C., De Agostini, M., Démonet, J.-F., & Fayol, M. (2007). *Dyslexie, dysorthographie, dyscalculie : Bilan des données scientifiques* (p. 291-296). Institut national de la santé et de la recherche médicale(INSERM); hal -01570674.

Bouck, E. C., & Park, J. (2018). A Systematic Review of the Literature on Mathematics Manipulatives to Support Students with Disabilities. *Education and Treatment of Children*, *41*(1), 65-106. https://doi.org/10.1353/etc.2018.0003

Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N., & Chavez, M. M. (2008). Mathematics Intervention for First- and Second-Grade Students With Mathematics Difficulties : The Effects of Tier 2 Intervention Delivered as Booster Lessons. *Remedial and Special Education*, *29*(1), 20-32. https://doi.org/10.1177/0741932507309712

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380-400. https://doi.org/10.1037/a0031084

Cumming, J., & Elkins, J. (1999). Lack of Automaticity in the Basic Addition Facts as a Characteristic of Arithmetic Learning Problems and Instructional Needs. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 149-180. https://doi.org/10.1080/135467999387289

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*, 1-42.

Dehaene, S., & Cohen, L. (2000). Un modèle antomique et fonctionnel de l'arithmétique mentale. In *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres* (p. 191-232). Solal.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, *14*(2), 218-224. https://doi.org/10.1016/j.conb.2004.03.008

Dietrich, J. F., Huber, S., Dackermann, T., Moeller, K., & Fischer, U. (2016). Place-value understanding in number line estimation predicts future arithmetic performance. *British Journal of Developmental Psychology*, *34*(4), 502-517. https://doi.org/10.1111/bjdp.12146

Faryadi, Q. (2017). The Application of Montessori Method in Learning Mathematics : An Experimental Research. *OALib*, *04*, 1-14. https://doi.org/10.4236/oalib.1104140

Fayol, M. (2018). *L'acquisition du nombre* (Presses Universitaires de France).

Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *123*, 53-72. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.01.013

Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First- and Second-Grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(3), 180-206.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction : A Systematic Review. *Educational Psychology Review*, *26*(1), 9-25. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9249-3

Geary, D. C. (2010). Mathematical disabilities : Reflections on cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 130-133. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.10.008

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics : A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, *47*(6), 1539-1552. https://doi.org/10.1037/a0025510

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & Catherine DeSoto, M. (2004). Strategy choices in simple and complex addition : Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *88*(2), 121-151. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2004.03.002

Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics Interventions for Children with Special Educational Needs : A Meta-Analysis. *Remedial and Special Education*, *24*(2), 97-114. https://doi.org/10.1177/07419325030240020501

Lafay, A., & Helloin, M. C. (2016). *Examath 8-15, batterie informatisée d'examen des habiletés mathématiques*. HappyNeuron.

Lafay, A., Osana, H. P., & Hadjadj, O. (2019, juin 15). *The effects of detachability and countability of manipulatives on second-graders' number knowledge.* Symposium Unpacking Manipulatives: Recommendations for the Mathematics Classroom. The 2nd Mathematical Cognition and Learning Society Conference, Ottawa, Canada.

Lafay, A., Osana, H. P., & Valat, M. (2018). *Effects of manipulatives in interventions with children with mathematics learning disabilities : A systematic review*. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.13792.38409

Lafay, A., Osana, H. P., & Valat, M. (2019). Effects of Interventions with Manipulatives on Immediate Learning, Maintenance, and Transfer in Children with Mathematics Learning Disabilities : A Systematic Review. *Education Research International*, *2019*, 1-21. https://doi.org/10.1155/2019/2142948

Lafay, A., Saint-Pierre, M.-C., & Macoir, J. (2014). *L'évaluation des habiletés mathématiques de l'enfant : Inventaire critique des outils disponibles*. 26.

Lafay, A., St-Pierre, M.-C., & Macoir, J. (2015). *Validation franco-québécoise du Tempo Test Rekenen pour l'évaluation des habiletés mathématiques auprès d'enfants de 8-9 ans*. 14.

Lafay, A., St-Pierre, M.-C., & Macoir, J. (2017). The Mental Number Line in Dyscalculia : Impaired Number Sense or Access From Symbolic Numbers? *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 672-683. https://doi.org/10.1177/0022219416640783

Lambert, K., & Moeller, K. (2019). Place-value computation in children with mathematics difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *178*, 214-225. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.09.008

Laski, E. V., Ermakova, A., & Vasilyeva, M. (2014). Early use of decomposition for addition and its relation to base-10 knowledge. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *35*(5), 444-454. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2014.07.002

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C., & Murray, A. K. (2015). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science and Montessori Education: *SAGE Open*. https://doi.org/10.1177/2158244015589588

Laski, E. V., Vasilyeva, M., & Schiffman, J. (2016). *Longitudinal Comparison of Place-Value and Arithmetic Knowledge in Montessori and Non-Montessori Students*. *2*, 15.

Lillard, A. (2006). THE EARLY YEARS : Evaluating Montessori Education. *Science*, *313*(5795), 1893-1894. https://doi.org/10.1126/science.1132362

Lillard, Angeline S. (2012). Preschool children's development in classic Montessori, supplemented Montessori, and conventional programs. *Journal of School Psychology*, *50*(3), 379-401. https://doi.org/10.1016/j.jsp.2012.01.001

Lillard, Angeline Stoll. (2018). *Montessori : Une révolution scientifique soutenue par la science*. Desclée de Brouwer.

Marshall, C. (2017). Montessori education : A review of the evidence base. *Npj Science of Learning*, *2*(1). https://doi.org/10.1038/s41539-017-0012-7

McNeil, N. M., & Fyfe, E. R. (2012). “Concreteness fading” promotes transfer of mathematical knowledge. *Learning and Instruction*, *22*(6), 440-448. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.05.001

Michael, G. A. (2007). A significance test of interaction in 2 x K designs with proportions. *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology*, *3*(1), 1-7. https://doi.org/10.20982/tqmp.03.1.p001

Miller, S. P., Mercer, C. D., & Dillon, A. S. (1992). CSA : Acquiring and Retaining Math Skills. *Intervention in School and Clinic*, *28*(2), 105-110. https://doi.org/10.1177/105345129202800206

Miller, Susan P., & Kaffar, B. J. (2011a). Developing Addition with Regrouping Competence among Second Grade Students with Mathematics Difficulties. *Investigations in Mathematics Learning*, *4*(1), 24-49. https://doi.org/10.1080/24727466.2011.11790308

Miller, Susan P., & Kaffar, B. J. (2011b). Developing Addition with Regrouping Competence among Second Grade Students with Mathematics Difficulties. *Investigations in Mathematics Learning*, *4*(1), 24-49. https://doi.org/10.1080/24727466.2011.11790308

Montessori, M. (1936). *L’enfant*. Desclée de Brouwer.

Montessori, M. (2018). *La découverte de l’enfant, pédagogie scientifique tome 1*. Desclée de Brouwer.

Noël, M.-P., Rousselle, L., & De Visscher, A. (2013). La dyscalculie développementale : À la croisée de facteurs numériques spécifiques et de facteurs cognitifs généraux. *Développements*, *15*(2), 24. https://doi.org/10.3917/devel.015.0024

Orrantia, J., Romualdo, S. S., Sánchez, R., Matilla, L., & Múñez, D. (2018). Numerical magnitude processing and mathematics achievement. *Revista de Education*, 13.

Osana, H., Adrien, E., & Duponsel, N. (2017). Effects of Instructional Guidance and Sequencing of Manipulatives and Written Symbols on Second Graders' Numeration Knowledge. *Education Sciences*, *7*(2), 52. https://doi.org/10.3390/educsci7020052

Poussin, C. (2017). *La pédagogie Montessori*. Presses universitaires de France.

Ritchie, S. J., & Bates, T. C. (2013). Enduring Links From Childhood Mathematics and Reading Achievement to Adult Socioeconomic Status. *Psychological Science*, *24*(7), 1301-1308. https://doi.org/10.1177/0956797612466268

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge : The common core of numerical development. *Developmental Science*, *19*(3), 341-361. https://doi.org/10.1111/desc.12395

Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical Development. *Annual Review of Psychology*, *68*(1), 187-213. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010416-044101

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction : How do children know what to do? In *The Origins of Cognitive Skills* (p. 229–293). Catherine Sophian, Erlbaum.

Thevenot, C., Masson, S., & Fayol, M. (2016). Le paradigme de reconnaissance des opérandes pour une identification des stratégies en arithmétique : Une synthèse. *L'Année psychologique*, *116*(03), 467-488. https://doi.org/10.4074/S0003503316000397

Uttal, D. H., O’Doherty, K., Newland, R., Hand, L. L., & DeLoache, J. (2009). Dual Representation and the Linking of Concrete and Symbolic Representations : **Dual Representation**. *Child Development Perspectives*, *3*(3), 156-159. https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00097.x

Vauclair, J. (2000). Connaissances protonumériques chez le primate et le jeune enfant. In *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres* (p. 11-32). Solal.

Zhang, Y., & Okamoto, Y. (2017). Encoding “10ness” improves first-graders’ estimation of numerical magnitudes. *Journal of Numerical Cognition*, *2*(3), 190-201. https://doi.org/10.5964/jnc.v2i3.69

VII. Annexes

1. Annexe A : description des épreuves de la ligne de base

La ligne de base est composée à la fois d'épreuves issues d'Examath (Lafay & Helloin, 2016), d'une partie du Tempo test Rekennen (Lafay et al., 2015), et d'épreuves élaborées pour l'occasion en s'inspirant de la littérature.

Liste A ciblant les compétences en addition de Mila

<u>Jugement de retenue</u>

Cette épreuve élaborée par nos soins est composée de 10 calculs, parmi lesquels la moitié nécessite l'utilisation d'une retenue, dont un en nécessitant deux. Les opérations présentées successivement et aléatoirement à l'enfant comportent des opérandes de un à trois chiffres, avec le plus grand des opérandes présenté en haut ou en bas. Les additions avec et sans retenue sont appariées en termes de grandeurs des opérandes. Les chiffres composant les opérandes des opérations à retenue sont juste plus grands pour provoquer ce recours à la retenue.

Sans retenue	Avec retenue
5+3	9+7
12+2	18+5
50+16	59+14
243+35	247+35
563+344	567+384

<u>Résolution de calculs posés</u>

Cette épreuve vise à observer comment se comporte Mila face à des opérations de différentes longueurs, tant sur le plan d'éventuelles erreurs, et leur type, que sur les stratégies de résolution choisies.

	Additions sans retenue	**Additions avec retenue**
UD+U	26+3	9+13
Dizaines entières	30+50	70+80
UD+UD	62+27	26+45
CDU+U	4+154	178+4
Centaines entières	200+600	800+500
CDU+DU	36+450	525+18
CDU+CDU	163+423	140+670

$$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 13 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 525 \\ +\quad 18 \\ \hline \end{array}$$

Exemples de présentation des opérations

<u>Fluences arithmétiques</u>

Pour évaluer comment Mila réagirait lors d'une épreuve sous pression temporelle, nous lui avons présenté deux épreuves de fluence d'une minute chacune. Cela nous permet de voir où en est son accès aux faits arithmétiques.

Le **Tempo Test Rekkennen** propose sur une même feuille 5 colonnes de 40 opérations de chaque sorte : additions, soustractions, multiplications, division et un mélange d'opérations pour évaluer la flexibilité. L'enfant doit répondre à l'écrit, nous n'avons laissé visible que la colonne des additions, masquant les autres. Ce test a été élaboré par Teije De Vos aux Pays bas en 1972 pour les enfants d'âge primaire. Lafay a proposé en 2015 un premier réétalonnage auprès d'enfants franco-québécois de 8 à 9 ans. Nous n'avons pas eu accès aux normes néerlandaises originelles, et Mila était trop jeune pour entrer dans l'étalonnage plus récent proposé par Anne Lafay.

L'épreuve de fluence de l'**Examath** présente successivement sur l'écran les additions pour un temps limité et appelle une réponse orale. L'examinateur doit indiquer via le clavier si la réponse de l'enfant est correcte ou erronée.

Liste B évaluant la numération et particulièrement des liens arabe-analogique :

Comparaison analogique : L'enfant va comparer des nuages de points et indiquer si le nombre le plus grand est à gauche ou à droite.

Relation arabe / analogique

Jugement : est-ce que la quantité présentée en nombre arabe est identique à la quantité présentée en points ? Nombres de 0 à 8

Comparaison : elle va comparer des nombres arabes et indiquer si le nombre le plus grand est à gauche ou à droite. Successivement avec des petits (0 à 8) puis des moyens (5-13), puis des grands nombres (10-81). Le temps de présentation des items ainsi que le temps de réponse sont limités.

Relation arabe-analogique- UDC :

Production arabe- analogique : elle devra sélectionner le nombre d'objets (billes seules ou par boîtes de 10, billets et pièces...) correspondant au nombre indiqué et les faire glisser dans la zone cible.

Production analogique - arabe : elle doit taper le nombre d'objets qu'il y a à l'écran.

Jugement : est-ce que la quantité présentée en nombre arabe est identique à la quantité présentée en objets ?

Décomposition additive : elle devra cliquer sur l'autre manière possible d'écrire le nombre. Par exemple, pour 48, l'ordinateur pourra proposer 40+8, 40+ 80 et 4+8 et elle devra choisir ce qui lui paraît équivalent. Dix nombres de 2 à 4 chiffres sont présentés.

Liste C témoin : relation verbale analogique

Relation oral analogique

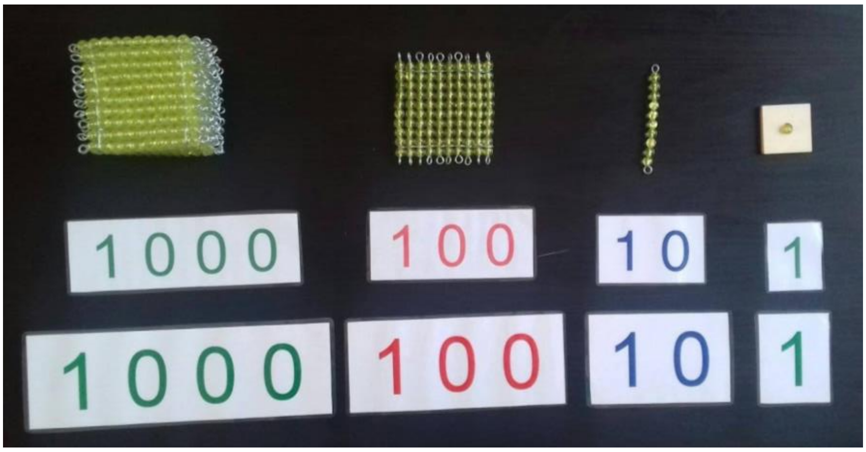
Jugement : est-ce que la quantité présentée à l'oral est identique à la quantité présentée en points ?

Comparaison : elle va comparer des nombres énoncés par l'ordinateur et indiquer si le nombre le plus grand est à gauche ou à droite.

2. Annexe B : description du matériel

Les perles dorées issues de la pédagogie Montessori

Nous disposons d'une « banque », pensée pour faire travailler ensemble plusieurs enfants Elle est composée d'une boite de perles isolées, d'une quarantaine de barrettes de 10 perles, de 10 plaques de 100 perles et d'un cube de 1000 perles. Si nécessaire, l'enfant a aussi à sa disposition des plaquettes en bois, recouvertes d'un autocollant représentant les perles, pour pouvoir utiliser davantage de centaines.



Les cartes symboles

Les cartes sont présentées en deux formats : petit pour les opérandes et grand pour le résultat, pour amplifier son caractère de somme. Les unités sont représentées en vert, de 0 à 9. Les dizaines entières sont représentées en bleu, de 10 à 90. Les centaines sont représentées en rouge, de 100 à 900. Les milliers sont représentés en vert (comme les unités) de 1000 à 9000.

Le plateau

Il est uni et assez grand pour disposer de manière ordonnée les quantités et les cartes symboles correspondantes.

Support au matériel

Les quantités sous forme de perles et les jeux de cartes symboles sont disposés sur des tissus au sol pour délimiter l'espace de travail. Le lieu de réunion des termes de l'addition était aussi matérialisé sur le bureau.

Nous avons également utilisé des feuilles blanches, des feutres (vert, bleu, et rouge) et un stylo noir.

3. Annexe C : déroulé des séances accompagné d'exemples de nos échanges

Les productions sont présentées entre guillemets et celles de l'enfant sont notées en italique. Au début de chaque séance, nous effectuons un rappel des équivalences entre unités, dizaines, centaines et millier, et lui posons des questions à ce sujet.

Séance 1

Objectif : présenter le matériel manipulable Montessori des perles dorées qui représente notre système de numération en base 10. Cette séance constitue également un état des lieux de la compréhension du système décimal par Mila, ce qui nous permettra de nous adapter à ses difficultés par la suite. **Moyens** : exploration et présentation du matériel et du vocabulaire associé, leçon en 3 temps, commandes de quantités en langage décimal (unités, dizaines, centaines, millier).

<u>Déroulement de la séance :</u>

Nous présentons d'abord à l'enfant une perle seule pour expliciter la notion d'unité : « C'est une unité. Tu sais pourquoi on appelle ça une unité ? *Parce que c'est petit ?* On ne pourrait pas avoir de grande unité alors ? Si ma bille était grosse comme un ballon ça ne marcherait pas ? *Non*

« Et bien en fait si. C'est une unité parce qu'on entend « un », il y a une seule perle, donc c'est une unité ». On compte ensuite ensemble 2 unités, 3 ……9 unités. « Qu'est-ce qu'il y a ensuite ? *Dix, onze, douze* »

Je lui donne une barrette de dix perles : « après 9 unités on a une dizaine. Une dizaine, c'est dix unités. Tu veux compter pour vérifier ? *Oui* »

On continue de compter en posant les éléments au fur et à mesure, je lui explique qu'on va compter avec les dizaines et les unités à partir de maintenant. Pour 1D1U tout va bien mais pour **1D2U elle me dit vingt**. Ensuite, tout se passe bien jusqu'à 27 où elle commence par dire *7D euh*… avant de se corriger. Après 30, on avance de dizaine en dizaine jusqu'à 9D. « Ensuite qu'est-ce qu'il y a ? *100* ! »

« C'est une centaine. Il y a 100 unités dedans. Il y a combien de dizaines à ton avis ? *100 petites dizaines* Tu comptes ? (Elle compte les barres :) *10 !* »

On compte ensuite de centaine en centaine. « Et après 9C ? Ça fait 1000 ! »

« Il y a combien de centaines dans 1000 ? *1…* » Elle tente de compter les plaques sur le côté du compte mais s'emmêle et compte les dizaines. Je l'invite à superposer les plaques de 100 jusqu'à reformer un cube et elle en compte 10 après les avoir collées au cube.

Observations : Les équivalences ne sont pas acquises entre dizaines et centaines ni entre centaines et millier. Elles seront revues et requestionnées au début de chaque séance et aussi souvent que nécessaire.

Leçon en 3 temps pour ancrer le vocabulaire :

1. Nommer les éléments : ceci est une unité, ceci est une dizaine, ceci est une centaine, ceci est un millier.
2. Désignation par l'enfant : Montre/donne moi … une dizaine, une unité, une centaine…
3. Dénomination par l'enfant : Qu'est-ce que c'est ?

Les demandes sont faites dans un ordre aléatoire : DUCMUDCUC

Commandes de nombres

D'abord d'un seul type d'éléments : 5U, 2U, 8U, 3D, **9D**, **4C**, 6C

Puis par deux catégories d'éléments :

D+U : 4D4U, 6D2U C+D : 3C6D, 5C2U C+U :4C**7U**, 9C3U
Et enfin en associant centaines, dizaines et unités :

2C5D**8U**, 7C6D1U,3C5D9U, **9C**9D5U

La chaîne verbale de Mila est encore fragile, ce qui entraîne des erreurs de comptage. Elle omet certains éléments de la chaîne ou passe la borne visée.

Ex : Pour me donner 9D, elle compte 1,2,3,4,5,**6, 8**, 9, je l'invite donc à recompter et elle se corrige. L'erreur se répète avec 2C5D8U où elle compte 1,2,3,4,5**,6, 8**

Pour 4 centaines isolées, elle m'en donne 5, et pour 4C7U, elle continue jusqu'à 9U et ne sait plus me dire ce qu'elle devait me donner.

Séance 2

Objectif : présenter les cartes symboles superposables en numération arabe permettant de se représenter les différents niveaux de notation en base 10, et les mettre en lien avec le matériel manipulable des perles dorées. **Moyens** : exploration et présentation du matériel, leçon en 3 temps, rappel des équivalences, commandes de cartes symboles par le langage décimal, puis de quantités sans parole à partir de cartes symboles.

Nous commençons par ressortir une perle isolée pour voir ce que l'enfant a retenu de la séance précédente. « Comment on l'a appelé la dernière fois ? *C'est une unité* Pourquoi c'est une unité ? *Parce que c'est une bille.* »

Nous sortons la carte marquée un et la plaçons sous la bille en insistant sur leur équivalence à représenter une unité. Nous faisons de même avec 2 perles et la carte représentant un 2, que nous enlèverons pour ne conserver que les représentations de l'unité isolée. Ensuite, nous invitons l'enfant à continuer de compter et arrivé à 9, nous lui demandons ce qui suit : « *une dizaine !* ». Nous lui tendons une barrette de 10 perles en redonnant son nom et en demandant combien d'unités elle contient, Mila recompte les perles. Nous répétons l'opération pour la centaine où elle nous dit *« ya plein de centaines* » avant de recompter les 10 barrettes. Pour le millier, Mila commence par dire qu'il y a 100D dans mille, elle veut vérifier le nombre de centaines et compte une plaque de trop (11C pour un millier) sans réaction.

Leçon en 3 temps sur le même principe que la séance précédente mais avec les cartes isolées, hors présence du matériel des perles dorées.

Commandes de nombres

Nous reprenons majoritairement la liste de la séance précédente mais en excluant les nombres comportant des catégories vides (représentées par un zéro)

D'abord d'un seul type d'éléments : 5U, **8U**, 3D, 9D, 4C, **6C**

Puis par deux catégories d'éléments : D+U : 1D7U, 4D4U, 6D2U
Et enfin en associant centaines, dizaines et unités : 2C5D8U, 7C6D1U, 9C3D7U

Observations :

Mila prend (un peu trop) confiance : au moment de donner des dizaines isolées, elle dit « trop facile ! » mais lorsque les commandes passent aux centaines, elle commence à compter des dizaines, avant de se corriger.

Mila n'est pas vraiment consciente de la base 10, elle peut arriver à 9 ou 11 éléments pour changer de catégorie sans être gênée. Elle est encore beaucoup dans le sensoriel : en manipulant le cube de mille qui l'attire, elle dit *:« Il est grand votre cube, il est lourd »*. Nous en profitons pour insister sur le fait qu'il est lourd parce que mille c'est beaucoup.

Séance 3

Objectif : faire vivre par la manipulation, l'addition, la somme comme action de mettre ensemble, ajouter des éléments.
Moyens : rappel des équivalences UDCM, remise en lien entre matériel manipulable et cartes symboles, et mise en place du matériel avec l'enfant, réalisation d'une addition « statique », sans retenue.

Rappel des équivalences :

U : « Qu'est-ce que c'est ? *Une unité.* Et pourquoi ça s'appelle comme ça ? *parce qu'il y a une seule petite unité »*

D : « *C'est une dizaine*. Combien d'unités dans 1 D ? *10 »*

C : « *C'est une centaine.* Combien de dizaines dans 1C ? *10 »* Elle les recompte.

M : « *C'est une centaine euh un million !* Tu es sûre ? C'était quoi ça, tu me disais ? (en montrant la plaque de 100) *100,* 100 quoi ? *100 unités*. Oui, et ce serait la même chose que le gros cube ? *Non, un millier c'est mille unités.* Et combien de centaines dans 1000 ? *100U, non 100D*, oui et combien de centaines ? » Après recomptage : « *10 ! »*

Avant de ressortir les cartes symboles, je lui demande ce qu'on a fait la dernière fois pour inscrire la séance dans une continuité et l'encourager à ancrer consciemment ce que l'on fait, en sachant que je la questionnerai dessus à notre prochaine rencontre.

« On a fait des dizaines. C'est tout ? Il n'y avait que des quantités ? *Non »* Je sors l'étiquette 1 « C'est quoi ? *une unité* ! Je lui tends une dizaine en barrette, elle attrape l'étiquette 10 parmi 10, 100 et 1000 qui étaient sur la table. Pareil pour 100 et 1000. Lorsqu'elle fait mine de déposer les représentations de la dizaine sous les unités, je lui explique qu'on va disposer les prochains éléments à gauche, comme pour l'écriture des nombres sur une feuille.

Utilisation du matériel en addition

Pour s'éloigner du contexte scolaire qui pourrait pousser Mila à ressortir de connaissances plaquées, et éviter qu'elle tente de les résoudre rapidement mentalement, sans recours au matériel, notre opération sommera non pas deux mais trois termes. Ils comportent des unités, des dizaines et des centaines, mais pas de catégories vides ou de chiffre présent deux fois dans le même nombre.

Composition des nombres avec le matériel

Nous proposons successivement 3 termes à l'enfant : 452, 123 et 214. Elle part des cartes symboles pour aller chercher les quantités correspondantes et les ajoute successivement sur un tissu. Nous insistons verbalement sur l'action de mettre ensemble, ajouter. Ensuite, nous la faisons soupeser la quantité totale obtenue puis compter les différents éléments en commençant par les unités. Elle compose enfin le résultat (783) avec des cartes symboles plus grandes. Nous insistons à nouveau sur le fait d'avoir mis ensemble, ajouté successivement les quantités. « Quelle opération on a fait ? *Je sais pas. »* Son orthophoniste essaie de l'aider en sortant la fiche opération qu'elles avaient constituée ensemble. Mila ne retrouve pas le terme d'addition mais dit qu'on ajoute des choses ensemble.

Observations :
Les équivalences unités-dizaine et dizaines-centaine sont en progrès, le millier est encore flou mais nous décidons de le conserver, au moins pour l'instant. Mila a tendance à prendre beaucoup d'éléments dans les quantités et à réduire après. Pour les 5D de 452, elle prend en quantité 7D, puis 6D et enfin 5. Pour le résultat, elle commence par prendre 7D pour 7C.

Séance 4

Objectifs : introduire la retenue et le change correspondant au niveau du matériel manipulable. Laisser un premier espace de liberté à l'enfant.
Moyens : rappel des équivalences UDCM, mise en place du matériel avec l'enfant, réalisation d'additions « dynamiques », avec une retenue.

Installation : les premières séances, le matériel était majoritairement installé par l'adulte ; à partir de cette séance, c'est principalement l'enfant qui installe les cartes symboles et les quantités en perles dorées. Nous amorçons juste la mise en place dans l'ordre de la notation positionnelle en rappelant : « On met les unités à droite comme quand on écrit. *Ah oui* »

Rappel des équivalences :

U : « Qu'est-ce que c'est : *une unité* ? Pourquoi ? *Parce qu'on entend un* »

D : « *C'est une dizaine.* Pourquoi ? *Parce qu'on entend 1… euh 10* ! Et pourquoi on entend dix ? *Parce qu'il y a 10 petites unités* »

C : « *Ça c'est une centaine, il y a 10 dizaines dedans. Attends je vérifie qu'il y en a bien 10.* Et combien d'unités ? *100 !*»

M : « *Ça c'est un gros cube, il y a 10 petites unités…euh 10 dizaines.* Tu es sûre ? Dans quoi on avait dit qu'il y avait 10 dizaines ? *La centaine Ah là il y a 100 dizaines !* Oui et combien d'unités ? *…* Qu'est-ce qu'on entend dans un millier ? *1000 petites unités*. »

Association réussie avec les cartes symboles donnés en vrac de 1, 10 100, 1000.

Raconter la séance précédente : elle explique en rejouant avec le plateau et les symboles 1, 10, 100 présents, qu'on faisait la magie avec les symboles, qu'on allait chercher des quantités. *« Et voilà.* On n'a fait que ça ? *Bah oui »*

« Est-ce que tu n'as fait qu'un nombre ? On a fait quoi avec les nombres ? *On faisait rajouter, pas enlever, si on soustrait pas on met le + »*
L'adulte redonne le mot « addition »

Elle dispose le reste des cartes symboles et tient à mélanger les unités avant de les poser dans l'ordre. Je préviens qu'on va refaire des additions, que je choisis les premiers termes, mais qu'ensuite ce sera son tour d'en choisir un.

Première addition

Pour la première opération, je propose à l'enfant 2 termes CDU au format symbolique, dont l'addition nécessitera l'utilisation d'une retenue. Au décompte du résultat, j'explique à Mila la procédure à suivre pour aller échanger ses 10 unités contre une dizaine en barrette, et je fais l'analogie avec le petit 1 placé en haut des opérations posées.

<u>Premier opérande</u> : 4C3D7U, de l'abstrait au concret
L'adulte dit combien de chaque catégorie elle doit aller chercher dans les symboles, l'enfant les dépose ensuite sur son plateau et va chercher les quantités correspondantes. Pour 7U en perles, elle commence par en prendre beaucoup et a besoin de vérifier 2 fois pour tomber juste sans surplus. Elle croit y être arrivée du premier coup avant de recompter. Pas d'erreur sur D et C.

<u>Deuxième opérande</u> : 1C6D5U, du concret vers l'abstrait
L'adulte donne des quantités à aller chercher, puis elle doit prendre les cartes symboles correspondantes. Comme pour le nombre précédent, elle commence par prendre beaucoup d'unités dans les quantités avant de diminuer jusqu'à 5. Passage aux cartes symboles réussi. Pour 6D, elle compose la bonne quantité, mais arrivée aux cartes symboles, elle commence par prendre 6U puis elle va chercher la bonne carte (60) quand elle voit qu'elle a déjà des unités sur le plateau.

Deuxième addition

Pour la deuxième opération de la séance, c'est l'enfant qui choisit le premier terme et je choisis le deuxième, en faisant en sorte d'introduire une deuxième retenue et donc un deuxième change pour voir sa réaction.

<u>Premier opérande</u> : 9C8D9U, de l'abstrait au concret
Après sa proposition en cartes symboles, elle demande à l'adulte d'aller chercher les quantités. Après lui avoir fait repréciser de quoi elle a besoin, nous ramenons 8C8D10U. Lorsqu'elle commence à vérifier nos quantités, nous lui rappelons de commencer par les unités car elle partait vers les centaines.

Elle compte les unités, et arrivée à 10, dit : « *Oh, vous avez fait une faute* » Elle valide les dizaines sans hésiter et ajoute la centaine manquante.

<u>Deuxième opérande</u> : 3C5D4U du concret vers l'abstrait
Elle commence bien par les unités mais ensuite pour 5D, elle se tourne vers les plaques de centaines. Les changes sont réussis, elle énonce correctement le résultat (1343) de manière décimale et semble très fière de pouvoir manipuler des nombres si grands.

Séance 5 (raccourcie)

Objectifs : renforcer la notion de retenue et la pratique du change, présence de nombres contenant des chiffres apparaissant 2 fois.
Moyens : rappel des équivalences UDCM, mise en place du matériel avec l'enfant
A partir de cette séance, l'enfant choisit le premier terme des opérations et l'adulte provoque la contrainte voulue par le deuxième.

Installation du matériel par Mila : « On commence par quoi ? *Les unités !* Et après ? *les dizaines »*. Pour les cartes symboles, elle commence par mettre les unités en ligne en partant de la droite ; sur ma suggestion, elle les installe ensuite en colonnes comme les quantités.

<u>Rappel des équivalences</u> :

D : « Une D vaut combien d'unités ? *10 »*

C : « *Il y a 10 D euh 10 U… »* : on recompte.

M : « *100 U non 10 D.* Dans quoi on avait 100 U ? Elle montre la plaque de 100 : dans ça ? Et du coup ce serait la même chose ? *Bah non »*
Elle empile et compte des plaques de centaines à côté du cube et dit que ça en fait 10. « Donc dans un millier il y a 10 centaines ?*Oui.* Et combien d'unités ? *Un milliard.* Un peu moins : 1000.Tu te souviens, on peut savoir le nombre d'unités dans un nombre, on l'entend dans son nom. Dans une centaine, tu entends quoi, combien d'unités ? *100.* Et dans une dizaine ? *10 unités.* Et du coup dans un millier tu entends quoi ? Il y a combien d'unité ? *1000 »*

<u>Rappel de la séance précédente</u> : « Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois ? *Des +* On a mis ensemble, on a ajouté, c'était quoi ? *Une addition. »*

Première addition

Premier opérande : 9D8U, de l'abstrait au concret
La séance étant plus courte aujourd'hui, elle ne peut choisir que parmi les dizaines et les unités. « *Non je veux un grand !* Tu peux choisir des grands nombres dans les unités et des dizaines. *D'accord* »

Elle prend les cartes pour 9D8U (dit 8D8U) et va chercher les quantités. Elle compte pile pour les unités mais prend un paquet sans compter pour les dizaines « Combien tu amènes de dizaines déjà ? *J'en prend plein !* »

Deuxième opérande : 4D4U, du concret vers l'abstrait
« *Trop facile* ! » Amène 4U pile puis amène 2D « *euh…* » avant d'aller chercher les autres. Elle se trompe dans la superposition des étiquettes (la magie des nombres), les unités se retrouvent à gauche et masquent les centaines, montrant 40 et pas 44. « C'est pareil que ce que tu as ramené ? » Elle vérifie et se corrige.

En voyant nos deux nombres à seulement 2 chiffres l'un au-dessus de l'autre, elle essaie de calculer en additionnant en colonne comme la technique de l'école, mais en partant des dizaines. Cela ne fonctionne pas et nous la réorientons vers l'utilisation des quantités.

Le premier change se déroule bien. En revanche pour transformer les dizaines, elle s'arrête de les compter à 9 et part faire son change avec le restant des barrettes. On redonne les équivalences dizaines – centaine et le fait qu'on ne peut échanger que si c'est la même chose. Comme nous lui avions expliqué la séance précédente, elle pose ses quantités retenues au-dessus des autres, comme le petit 1 écrit pour écrire la retenue.

Deuxième addition

Premier opérande : 1M1C1D3U, du concret vers l'abstrait
En superposant les cartes symboles, elle arrive à 1013 car le 100 se retrouve caché derrière. Elle comprend et se corrige.

Deuxième opérande : 4C4D8U, de l'abstrait vers le concret
Elle installe spontanément les symboles + et = représentés sur des cartons mobiles. Mila s'arrête de compter à 10 unités mais veut prendre une des dizaines de l'opération,

au lieu d'aller les changer à la banque contre une dizaine extérieure. Mise au point.

Observation : La notation positionnelle ne fait pas encore sens, vu l'installation encore aléatoire en colonnes ou en ligne des différentes grandeurs. Beaucoup d'impulsivité, Mila veut aller trop vite. Elle est curieuse des grands nombres, elle utilise le cube de mille dès que possible et me demande plus tard *« Est-ce que dans les milliards il y a des zéros ? »*. En fin de séance, elle prend un papier pour écrire addition et s'en souvenir, demande comment ça s'écrit. Le change est encore instable, en cours d'acquisition.

Séance 6

Objectifs : renforcer la notion de retenue et la pratique du change, introduction de catégories vides.
Moyens : rappel des équivalences UDCM, mise en place du matériel avec l'enfant. Première opération dont l'opérande comportera une catégorie vide et deuxième opération dont le résultat comportera une catégorie vide.

Cette séance vient en rattrapage pour le lundi précédent où Mila était malade, le matériel était donc resté à son domicile et elle l'a fièrement et spontanément installé à l'identique des fois précédentes avant l'heure de notre rencontre, sans erreur.

Rappel des équivalences

U et D : « Qu'est-ce que c'est ? (perle seule) *C'est une unité.* Pourquoi ? *Parce qu'il y en a une seule.* Est ce qu'on pourrait parler d'unité avec autre chose ? Par exemple si je prends le piano, est ce que ça pourrait être une unité ? *Oui parce qu'il y en a juste un.* Qu'est-ce qu'on pourrait prendre d'autre comme unité ? *Un cartable*…. »

Attrape une barrette de 10 *: « Ça ?* Ah non, ça c'est une dizaine ! *Oui*. C'est combien d'unités du coup ? *Une dizaine c'est 10 unités »*

C : « Et ça c'est quoi ? *Une centaine* ! Il y a quoi dedans ? *10 dizaines* » (sans les compter) « Et ça fait combien d'unités ? *100 »*

M : « Et ça c'est quoi ? *le gros cube …1 milliard 1 mille 1 million…*

C'est un millier, il y a combien de centaines dans un millier ? Elle compte les 10 centaines directement dessus pour la première fois. « Et combien de dizaines ? compte quelques lignes dont une jusqu'à 11 : *100 dizaines*. Combien d'unités ? *1000* »

Observations :

Mila parle de toutes petites unités et de gros cube, elle est encore beaucoup dans le perceptuel même si les rapports unité-dizaine-centaine se sont éclaircies

Première addition

Lors de cette opération nous introduisons une catégorie vide, c'est-à-dire qui s'écrit avec un zéro.

Premier opérande proposé par l'adulte : 1C0D1U, du concret vers l'abstrait

J'insiste sur le fait qu'il n'y a aucune dizaine, zéro dizaine.

« Comment on va l'écrire tu penses ? *Je sais pas* … On essaie ?» Elle part vers une feuille et un crayon, je lui demande de faire avec les cartes symboles

Deuxième opérande proposé par l'enfant : 2C0D4U, du concret vers l'abstrait

Va chercher les cartes symboles pour 2D4U, on compose donc aussi 2D4U pour comparer avec la cible.

Au moment de la résolution, elle prend bien les 5U et 3C du résultat dans les quantités mais commence par attraper les étiquettes de 5D3U avant de se corriger

Deuxième addition

Premier opérande **:** 1M3C0D3U, du concret vers l'abstrait

Deuxième opérande : 2D7U, de l'abstrait vers le concret

Le résultat est 1330, les unités donnent pile un 10, il n'en reste pas. Cela semble perturber Mila qui est confuse au moment du change des unités : « on s'arrête à 9, on prend celui-là (une dizaine à côté) et on le met en haut ». Part échanger une perle contre une perle.

Nous reprenons les équivalences qui permettent le change et effectuons le processus ensemble, étape par étape et main dans la main.

A la fin, je lui demande « qu'est-ce qu'on a fait comme opération ? *Une addition ! On a ajouté* »

Observation : Pas d'erreur de comptage aujourd'hui**.** Le sens de la catégorie vide est compris en analogique mais pas encore applicable à l'écriture symbolique, au vu des difficultés de compréhension de la notation positionnelle**.**

Séance 7

Objectifs : renforcer la notion de retenue et la pratique du change simple et multiple, mélange des longueurs de nombres à associer CDU+DU, UD+U, CDU+U
Moyens : rappel des équivalences UDCM, mise en place du matériel avec l'enfant, réalisation des additions

<u>Rappel des équivalences</u>

U : « *C'est une unité*. Pourquoi ? *Parce que c'est un, y en a un* »

D : « Combien d'unité ? *10* »

C : Dans une centaine combien de dizaines ? *10* » Elle compte « Combien d'unité ? *100 »*

M : « *Milliard…Millier ! 10C, 100D* , *100 U* . Ah bon, tu m'as dit que ça c'était 100U, c'est pareil ? *non !*» Rappel d'écouter le nom du nombre pour savoir le nombre d'unités.

Première addition

<u>Premier opérande</u> : Choix possible seulement parmi les unités en symboles : 9U
Face aux quantités, elle prend 11 puis 9 perles.

<u>Deuxième opérande</u> : 1C9D4U, du concret vers l'abstrait
Vise à provoquer un double changement et une catégorie vide

1er changement laborieux, elle veut s'arrêter à 8 ou 9 unités pour faire le changement.

2e changement : « *Attendez, mais là il y a un problème, on en a 10*. Qu'est-ce qu'on fait ? *On va les échanger à la banque ! »*

Face au résultat 203 : *« Oh mais il y a des 0 comme la dernière fois ! Et ça fait 22 !»*

« Qu'est-ce qu'il veut dire ce 0 ? *Qu'il n'y a pas de dizaines.* On a quoi alors ? *1..2 centaines et 3 unités.*

Et dans 22 (constitué avec les cartes à côté), il y aurait quoi ? *2 dizaines et 2 unités*. Est-ce que c'est la même chose ? *Non »*

Deuxième addition

<u>Premier opérande</u> : 4D7U de l'abstrait au concret
<u>Deuxième opérande</u> : 7U du concret vers l'abstrait
Elle voulait le mien en premier pour réfléchir.

Réversibilité : Mila pose 47 puis 7 avant superposition des cartes, elle s'éclaire et essaie de calculer avec support du comptage digital de 1 en 1 mais arrive à 53 au lieu de 54. J'inverse les cartes et je lui demande si ça ferait la même chose.

« *Oui mais il faut partir de 7 »*

Regarde, nous quand on met les perles ensemble, on compte tout, on ne part d'aucun nombre en particulier. Là tu peux faire pareil, partir du plus grand pour avoir moins de travail, que ce soit plus facile.

Manipulation avec les perles, arrêt et changement à 10, va chercher une dizaine

Séance 8

Objectifs : renforcer la notion de retenue et la pratique du change simple et multiple, début de généralisation.
Moyens : rappel des équivalences UDCM, mise en place du matériel avec l'enfant. Termes d'abord proposés par l'adulte ou l'enfant en quantités, puis écriture avec le code couleur des opérandes et du résultat (au lieu d'utiliser la superposition des cartes symboles).

U : « P*arce que c'est une* »

D : *« C'est une dizaine, on entend 10 parce qu'il y a 10 petites unités »*

C : *« C'est une centaine, il y en a 100, on entend 100 parce qu'on a 10 dizaines.* Alors, je suis d'accord avec toi, il y a 10 dizaines dans une centaine mais tu entends 100 toi, dans 10 dizaines ? *Non, 100U »*

M : *« Un millier il y a 10 plaques de 100 et 100 D et 1000U »*

Première addition

Premier opérande : 3C6D7U, du concret à l'abstrait
Elle attrape 5 dizaines pour 6, et pour les unités elle passe de beaucoup à 7.

Mila commence à écrire tout en rouge, je lui rappelle qu'on va écrire avec les mêmes couleurs que les cartes (elle avait su me les donner avant d'aller chercher les quantités). Je lui prépare des traits des 3 couleurs sous son nombre à écrire.

Deuxième opérande : 4C3D8U, du concret à l'abstrait
Quantités et écriture réussies :« *Je crois qu'il va y en avoir 10, ah tu m'en as fait avec 10 ! »*.
Lors de la résolution, le change des unités à la dizaine est réussi. Le résultat est 804, elle commence à écrire les 4 unités en rouge :« Tu es sûre ? *J'écris les unités, on est sûrs.* Si tu veux, on peut commencer à écrire mais on les écrit où les unités ? *Ah à droite*, et de quelle couleur ? *En vert !*»

Le chiffre à gauche est rouge, elle est donc partie de la gauche en rouge comme le veut sens de lecture.

Deuxième addition

Premier opérande proposé par l'adulte : 2C0D3U, du concret à l'abstrait
Nous représentons ce nombre qui avait amené des confusions lors de la séance précédente. Elle m'énonce correctement les quantités et prend les feutres. Elle commence par écrire = + 203 avec les bonnes couleurs. Après rappel sur l'écriture des calculs dans le sens de la lecture, elle écrit : 302 + = mais encore avec les couleurs correspondant aux quantités apportées : un 3 en vert pour les unités, un 0 bleu pour les dizaines et un 2 rouge pour les centaines. Je réexplique l'importance de la place des différents chiffres par rapport aux quantités qu'ils représentent.

Deuxième opérande : 5C1D9U, du concret vers l'abstrait
Elle écrit son terme correctement, réussi son change des 10 unités en une dizaine.

Face au résultat, nous soulignons que, même si on a 2 chiffres 2, ils ne représentent pas du tout la même chose, car ils sont à une place différente.

Troisième addition

<u>Premier opérande</u> : 7C9D9U, du concret vers l'abstrait
Elle propose d'abord 10 U, nous lui disons que 10 U ce ne sera pas possible.
« *Oh la la, j'en ai mis un peu trop...je mets 9 parce que je veux avoir une retenue !* »
Pour 9D elle prend un paquet de dizaines et compte après pour tomber juste.

<u>Deuxième opérande</u> : 2C5D6U, du concret vers l'abstrait
Ce terme permet d'obtenir à la fois 3 changes, pour automatiser le processus, et une catégorie vide dans le résultat (1055).

Mila prévoit la nécessité d'un change à la simple vue des opérandes *« Ya une retenue, va y avoir une retenue »*

Lors du change vers le millier : « *Je prends le milliard !... Non le millier* »

<u>Observations</u> : Mila a relié les quantités à la couleur des nombres mais pas encore de façon stable à leurs positions respectives, le principe de notation positionnelle est donc encore en cours d'acquisition. La retenue est mieux comprise et recherchée par Mila, qui se montre particulièrement enthousiaste lors de cette séance.

Séance 9

Objectifs : renforcer la notion de retenue et la pratique du change simple et multiple, poursuite de la généralisation.
Moyens : rappel des équivalences UDCM, mise en place du matériel avec l'enfant
Termes proposés par l'adulte ou l'enfant en quantité, puis écriture avec le code couleur des opérandes et du résultat, sans utiliser les cartes symboles.

<u>Rappel des équivalences</u>

U : *« C'est une »*

D : *« On entend 10, il y a 10U »*

C : *« Il y 10D et 100U »*

M : *« Il y a 10 C et 1000 U »*

Première addition

Premier opérande : 2C5D9U

Deuxième opérande : 3C4D7U

Nous visons un résultat comportant 2 fois le même chiffre et une catégorie vide : 606 Ecriture sans encombre des termes et du résultat dans les couleurs appropriées. Change des unités à la centaine réussi, et pas de blocage sur les 10 dizaines sans reste.

Premier opérande : 6C1D9U

Deuxième opérande : 1C5D8U

Écriture correcte des termes et du résultat (777). Une erreur de comptage lui fait d'abord écrire 8U au résultat avant de recompter.

Observations : les équivalences UDCM semblent plus stables et les retenues, même sans reste, sont bien appliquées. L'écriture des nombres n'amène pas d'erreur même en présence de catégorie vide. En revanche, quand Mila veut aller plus vite, car elle est en confiance sur la procédure à suivre après de multiples répétitions, des erreurs de comptage ressurgissent.

Séance 10

Objectifs : renforcer la notion de retenue, poursuite de la généralisation. **Moyens** : rappel des équivalences UDCM, mise en place du matériel avec l'enfant Opérandes et résultat écrits en noir, utilisation possible du MMC.

Rappel des équivalences

U : *« On entend un »*

D : *« Parce qu'il y a 10 petites unités »*

C : *« Il y a 100 unités et 10D je crois, attendez… »* Mila recompte.

M : *« 10C* (recompte) *100U 1000D »* retour sur l'intérêt d'écouter le nom du nombre pour connaître la quantité d'unités qu'il représente.

Première addition

Premier opérande : 3C1D9U, du concret vers l'abstrait

Deuxième opérande : 9D3U, du concret vers l'abstrait

Le deuxième terme est de longueur différente du premier et implique deux changes mais pas de catégorie vide, pour ne pas ajouter trop de paramètres supplémentaires à ce passage à l'écriture en noir. Mila commence par écrire 093 avant de le barrer. L'utilisation de la retenue et les changes sont appropriés. Mila repose l'opération à la verticale en faisant figurer les colonnes (intitulées c, d,u) utilisées à l'école pour nous montrer. Elle est étonnée quand nous faisons le lien entre ces c, d, u et les notions d'unités, dizaines et centaines utilisées les dernières semaines.

Deuxième addition

Premier opérande :1C2D5U, du concret vers l'abstrait
Deuxième opérande : 2C8D3U, du concret vers l'abstrait

Les 2 changes sont réussis et la catégorie vide ne semble pas poser problème au moment d'écrire le résultat (408).

Observations : A l'issue de cet entraînement, les relations entre unités, dizaines et centaines semblent s'être éclaircies, le millier reste relativement flou mais l'enfant n'a pas encore l'occasion de le croiser régulièrement hors de nos séances. L'utilisation de la retenue semble être devenu un geste porteur de sens et pas seulement une procédure plaquée. La notion de notation positionnelle reste en construction mais certaines prises de conscience ont été amorcées.