1 vol

8

COURS DE MATHÉMATIQUES,

À L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON ET DE LA MARINE.

Par M. BEZOUT, de l'Académie Royale des Sciences & de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Élèves & des Aspirans au Corps Royal de l'Artillerie, & Censeur Royal.

SECONDE PARTIE,

CONTENANT les Élémens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie sphérique.

À PARIS,

De l'Imprimerie de PH.-D. PIERRES, Imprimeur ordinaire du ROI, rue S. Jacques.

M. DCC. LXXII.

Avec Approbation, & Privilége du Roi.

COURS DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences & de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Éleves & des Aspirans au Corps Royal de l'Artillerie, & Censeur Royal.

SECONDE PARTIE,

CONTENANT les Élémens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie sphérique.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES, Premier Imprimeur Ordinaire du Roi, rue S. Jacques.

M. DCC. LXXXII.

Avec Approbation, & Privilége du Roi.

PRÉFACE.

CETTE ſeconde Partie comprend, ainſi que le titre l'annonce, les Elémens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne, & la Trigonométrie ſphérique.

Je ne m'arrêterai point à raſſembler ici les raiſons qui doivent engager les Eleves deſtinés à la Marine, à ſe rendre familiers les principes répandus dans ce Livre. S'il eſt un art auquel l'application des Mathématiques ſoit plus utile qu'à un autre, c'eſt la Navigation : duſſé-je me répéter, je dois dire que ces Sciences, qui ſont utiles dans d'autres parties, ſont indiſpenſables dans celle-ci.

Il ne faut pas en conclure, cependant, qu'un Livre de Géométrie Elémentaire deſtiné à cet objet, doive raſſembler un grand nombre de propoſitions. S'il ſuffiſoit, pour bien inculquer les principes d'une Science, de donner ce qui eſt eſſentiellement néceſſaire au but qu'on ſe propoſe, ceux qui connoiſſent un peu la Géométrie ſavent qu'on y ſatisferoit en peu de mots. Mais l'expérience démontre qu'un pareil Livre feroit utile ſeulement à ceux qui ont acquis déja des connoiſſances, & qu'il n'imprimeroit que de foibles traces dans l'eſprit des Commençans.

D'un autre côté, il n'y a pas moins d'inconvéniens à trop multiplier les conſéquences, ſurtout quand elles ne ſont (comme il arrive ſouvent) que de nouvelles traductions des principes. Il n'eſt pas douteux que des Elémens deſtinés à un grand nombre de Lecteurs, doivent ſuppléer aux conſéquences que pluſieurs n'auront pas le loiſir & peut-être la faculté de tirer; mais il faut prendre garde auſſi que ceux pour qui cette attention eſt néceſſaire, ſont le moins en état de ſoutenir la multitude des propoſitions. Le ſeul parti qu'il y ait à prendre, eſt, ce me ſemble, d'aller un peu plus loin que les principes, de s'arrêter aux conſéquences utiles, & de fixer ces deux choſes dans l'eſprit, par des applications; c'eſt ce que j'ai tâché de faire.

J'ai partagé la Géométrie en trois Sections, dont la premiere traite des Lignes, des Angles, de leur Meſure, des Rapports des Lignes, &c. La ſeconde conſidere les ſurfaces, leur meſure & leurs rapports. La troiſieme eſt deſtinée aux Solides ou Corps, & renferme les principes néceſſaires pour les meſurer, & comparer leurs capacités. Dans la Trigonométrie rectiligne, j'ai donné quelques propoſitions, qui ne ſont pas eſſentiellement néceſſaires pour le moment; mais elles ſont au moins utiles, & le ſeront encore plus, par la ſuite: d'ailleurs quelques-unes trouvent leur application dès la Trigonométrie ſphérique. Dans celle-ci, je me ſuis propoſé de réduire à un moindre nombre les principes dont on fait dépendre communément la réſolution des Triangles ſphériques. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail ; c'eſt dans l'Ouvrage même qu'il faut le chercher. Ceux qui ne veulent lire que la Préface, ne gagneroient pas beaucoup au temps que je perdrois à cette analyſe ; & ceux qui liront l'ouvrage, en jugeront mieux que par ce que je pourrois en dire ici.

Dois-je me juſtifier d'avoir négligé l'uſage des mots, *Axiôme*, *Théorême*, *Lemme*, *Corollaire*, *Scholie*, *&c ?* Deux raiſons m'ont déterminé : la premiere eſt que l'uſage de ces mots n'ajoute rien à la clarté des démonſtrations : la ſeconde eſt que cet appareil peut ſouvent faire prendre le change à des Commençans, en leur perſuadant qu'une propoſition revêtue du nom de *Théorême*, doit être une propoſition auſſi éloignée de leurs connoiſſances, que le nom l'eſt de ceux qui leur ſont familiers. Cependant afin que ceux de mes Lecteurs qui ouvriront d'autres Livres de Géométrie, ne s'imaginent pas qu'ils tombent dans un pays inconnu, je crois devoir les avertir que ;

Axiôme ſignifie une propoſition évidente par elle-même ;

Théorême, une propoſition qui fait partie de la ſcience dont il s'agit, mais dont la vérité, pour être apperçue, exige un diſcours raiſonné qu'on appelle *Démonſtration ;*

Lemme * eſt une propoſition qui ne fait pas eſſentiellement partie de la Théorie dont il s'agit ;

* Un *Lemme* eſt ſouvent une propoſition empruntée d'une autre Science.

mais qui ſert à faciliter le paſſage d'une propoſition à une autre;

Corollaire eſt une conſéquence que l'on tire d'une propoſition qu'on vient d'établir;

Scholie eſt une remarque ſur quelque choſe qui précede, ou une récapitulation de ce qui précede;

Problême eſt une queſtion dans laquelle il s'agit ou d'exécuter quelque opération, ou de démontrer quelque propoſition.

AVERTISSEMENT.

Les Nombres qu'on trouvera ſeuls entre deux parenthèſes, indiquent à quel numéro du Livre même il faut aller chercher la propoſition que le Lecteur doit ſe rappeller dans cet endroit; & ceux qui ſont précédés du mot Arith. *renvoient à pareil numéro de l'Arithmétique.*

TABLE DES MATIERES.

TROISIEME SECTION.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Fin de la Table des Matieres.

ÉLÉMENS

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

1. L'ESPACE que les corps occupent, a toujours les trois dimenſions, *Longueur*, *Largeur*, & *Profondeur* ou *Epaiſſeur*.

Quoique ces trois dimenſions ſe trouvent toujours, enſemble, dans tout ce qui eſt corps, néanmoins nous les ſéparons aſſez ſouvent, par la penſée: c'eſt ainſi que lorſque nous penſons à la profondeur d'une riviere, d'une rade, &c, nous ne ſommes point occupés de ſa longueur ni de ſa largeur; pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de vent qu'une voile peut recevoir, nous ne nous occupons que de ſa longueur & de ſa largeur, & point du tout de ſon épaiſſeur.

Nous diſtinguerons donc trois ſortes d'étendue; ſavoir, L'étendue en longueur ſeulement, que nous appellerons *Ligne.*

L'étendue en longueur & largeur ſeulement, que nous nommerons *Surface* ou *Superficie.*

Enfin l'étendue en longueur, largeur & profondeur, que nous nommerons indifféremment, *volume*, *ſolide*, *corps.*

Nous examinerons ſucceſſivement les propriétés de ces trois ſortes d'étendue ; c'eſt-là l'objet de la ſcience qu'on appelle *Géométrie.*

PREMIERE SECTION.

Des Lignes.

2. LES EXTRÉMITÉS d'une ligne, ſe nomment des *points.* On appelle auſſi de ce nom, les endroits où une ligne eſt coupée ; ou encore, ceux où des lignes ſe rencontrent.

On peut conſidérer le point comme une portion d'étendue qui auroit infiniment peu de longueur, de largeur & de profondeur.

La trace d'un point qui ſeroit mû de

maniere à tendre toujours vers un ſeul & même point, eſt ce qu'on appelle une *ligne droite*. C'eſt le plus court chemin pour aller d'un point à un autre: *A B* (*Fig.* 1.) eſt une ligne droite.

On appelle, au contraire, *ligne courbe*, la trace d'un point qui, dans ſon mouvement, ſe détourne infiniment peu, à chaque pas.

On voit donc qu'il n'y a qu'une ſeule eſpece de ligne droite, mais qu'il y a une infinité d'eſpeces de courbes différentes.

3. Pour tracer une ligne droite d'une étendue médiocre, comme lorſqu'il s'agit de conduire par les deux points *A* & *B* (*Fig.* 1.) une ligne droite ſur le papier; on ſait qu'on emploie une regle qu'on applique ſur les deux points *A* & *B*, ou très-près, & à diſtances égales de ces deux points; & avec un crayon ou une plume qu'on fait gliſſer le long de cette regle, on trace la ligne *A B*.

Mais lorſqu'il s'agit de tracer une ligne un peu grande, on fixe au point *A* l'extrémité d'une ficelle que l'on frotte avec un morceau de craie; & appliquant un autre de ſes points, ſur le point *B*, on pince la ficelle pour l'élever au-deſſus de

A B, & la laiſſant aller, elle marque, en s'appliquant ſur la ſurface, une trace qui eſt la ligne droite dont il s'agit.

Quand il eſt queſtion d'une ligne fort grande, mais dont les extrémités peuvent être vues l'une de l'autre ; on ſe contente de marquer entre ces deux extrémités, un certain nombre de points de cette ligne. Par exemple, lorſqu'on veut prendre des alignements ſur le terrein, on place à l'une des extrémités *B* (*Fig.* 2.) un bâton ou jallon *B D*, que par le moyen d'un fil à-plomb, on rend le plus vertical que faire ſe peut ; on en fixe un autre de la même maniere au point *A* ; & ſe plaçant à ce même point *A*, on fait placer ſucceſſivement pluſieurs autres jallons, à différents points *C*, *C*, &c, entre *A* & *B*, de maniere qu'appliquant l'œil le plus près qu'il eſt poſſible du jallon *A D*, & regardant le jallon *B D*, celui *C D* dont il s'agit, paroiſſe confondu avec *B D*, alors tous les points *C*, *C*, *C*, &c, déterminés de cette maniere, ſont dans la ligne droite *A B*.

Quand les deux extrémités *A* & *B* ne ſont pas viſibles l'une de l'autre, on a recours à des moyens que nous enſeignerons par la ſuite.

4. Les lignes ſe meſurent par d'autres lignes ; mais, en général, la meſure commune des lignes, c'eſt la ligne droite. Meſurer une ligne droite ou courbe, ou une diſtance quelconque, c'eſt chercher combien de fois cette ligne, ou cette diſtance, contient une ligne droite connue & déterminée que l'on conſidere alors comme unité. Cette unité eſt abſolument arbitraire. Auſſi y a-t-il bien des eſpeces de meſures différentes en fait de lignes. Indépendamment de la toiſe & de ſes parties dont nous avons fait connoître les ſubdiviſions en Arithmétique, on diſtingue encore le pas ordinaire, le pas géométrique, la braſſe, &c, pour les petites étendues; la lieue, le mille, le werſte, &c, pour les grandes étendues.

Le pas ordinaire eſt de 2 pieds & demi.

Le pas géométrique, qu'on appelle autrement pas double, eſt de 5 pieds.

La braſſe eſt de 5 pieds ; on compte par braſſes, dans la marine, les longueurs des cordages, & les profondeurs qu'on meſure à la ſonde.

La lieue eſt compoſée d'un certain nombre de toiſes ou de pas géométriques. La lieue marine eſt de 2853 toiſes. Le mille, le werste, &c, sont pareillement des mesures itinéraires, dont la valeur, ainsi que celle de la lieue, n'est pas la même dans tous les pays, tant parce que chacune de ces especes de mesures n'a pas par-tout le même nombre d'unités, c'est-à-dire, le même nombre de pas, ou de toises, ou de pieds, &c, que parce que le pied qui sert d'unité à ces toises ou à ces pas, n'est pas de même grandeur par-tout.

5. Pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire sur les lignes, nous supposerons que les figures, dans lesquelles nous les considérerons, sont tracées sur une surface *plane*. On appelle ainsi une surface à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite, dans tous les sens.

6. De toutes les lignes courbes, nous ne considérerons dans ces Elémens, que *la Circonférence du Cercle*. On appelle ainsi une ligne courbe *B C F D G*, (*Fig.* 3) dont tous les points sont également éloignés d'un même point *A*, pris dans le plan sur lequel elle est tracée. Le point *A* se nomme le *centre*; les lignes droites *A B*, *A C*, *A F*, &c, qui vont de ce point, à

la circonférence, ſe nomment *rayons* ; & tous ces rayons ſont égaux, puiſqu'ils meſurent la diſtance du centre à chaque point de la circonférence.

Les lignes, comme *B D*, qui paſſant par le centre, ſe terminent de part & d'autre à la circonférence, ſont appellées *diametres* ; comme chaque diametre eſt composé de deux rayons, tous les diametres ſont donc égaux. Il eſt d'ailleurs évident que tout diametre partage la circonférence en deux parties parfaitement égales ; car ſi l'on conçoit la figure pliée de façon que le pli ſoit dans le diametre *B D*, tous les points de *B G D* doivent s'appliquer ſur *B C E D*, ſans quoi il y auroit des points de la circonférence qui ſeroient inégalement éloignés du centre.

Les portions *B C*, *C E*, *E D*, &c, de la circonférence, ſe nomment *arcs* ; & ce qu'on appelle *cercle*, c'eſt la ſurface même renfermée par la circonférence *B C F D G B*.

Une droite, comme *D F*, qui va de l'extrémité *D* d'un arc, à l'autre extrémité *F*, s'appelle *corde* ou *ſoutendante* de cet arc.

7. Il eſt aiſé de voir que *les cordes égales d'un même cercle ou de cercles égaux*,

soutendent des arcs égaux, & réciproquement. Car si la corde *D G* est égale à la corde *D F*, en imaginant qu'on transporte la corde *D G* & son arc, pour appliquer *D G* sur *D F*, il est visible que le point *D* étant commun, & le point *G* tombant alors sur le point *F*, tous les points de l'arc *D G* doivent tomber sur l'arc *D F*, puisque si quelqu'un de ces points ne tomboit pas sur l'arc *D F*, l'arc *D G* n'auroit pas tous ses points également éloignés du centre *A*.

8. On est convenu de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales auxquelles on a donné le nom de *degrés* : on partage le degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*; chaque minute, en 60 parties égales qu'on appelle *secondes*; & de toujours subdiviser de 60 en 60, en donnant aux parties, consécutivement, les noms *minutes*, *secondes*, *tierces*, *quartes*, *quintes*, *&c.*

La marque du degré est celle-ci . . . . . °
Celle de la minute . . . . ′
De la seconde . . . . ″
De la tierce . . . . ‴
De la quarte. IV

Ainsi pour marquer 3 degrés 24 minutes 55 secondes, on écrit $3^\circ\, 24'\, 55''$.

Cette division de la circonférence est admise généralement ; mais des vues de commodité dans la pratique, ont introduit dans quelques parties des Mathématiques pratiques, quelques usages particuliers dans la maniere de compter les degrés & parties de dégré. Les Astronomes, par exemple, comptent les degrés, par trentaines qu'ils appellent *signes*, c'est-à-dire, qu'ayant à compter $66^\circ\, 42'$, par exemple ; comme ce nombre renferme 2 fois 30° & $6^\circ\, 42'$ de plus, ils compteroient 2 signes & $6^\circ\, 42'$, & ils écriroient $2^s\, 6^\circ\, 42'$.

Les Marins, pour les usages de la boussole, partagent la circonférence en 32 parties égales, dont chacune se nomme *air* ou *rhumb* de vent : chacune de ces parties est donc la 32^e partie de 360°, c'est-à-dire, qu'elle est de $11^\circ\, 15'$; ainsi au lieu de 45°, on dit 4 airs de vent, parce que 45° font 4 fois $11^\circ\, 15'$; pareillement au lieu de $18^\circ\, 27'$, on diroit 1 air de vent, & $7^\circ\, 12'$.

Des Angles, & de leur Mesure.

9. Deux lignes *A B*, *A C* qui se rencontrent, peuvent former entre elles une ouverture plus ou moins grande, comme on le voit dans les *Figures* 4, 5, 6.

Cette ouverture *B A C*, est ce qu'on appelle un *angle*; & cet angle est dit angle *rectiligne*, ou *curviligne*, ou *mixtiligne*, selon que les lignes qui le comprennent sont, ou toutes deux lignes droites, ou toutes deux lignes courbes; ou l'une, une ligne droite, & l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlons, pour le présent, que des angles rectilignes.

10. Pour se former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite *A B* étoit d'abord couchée sur *A C*, & qu'on l'a fait tourner sur le point *A*, (comme une branche de compas sur sa charniere), pour l'amener dans la position *A B* qu'elle a actuellement. La quantité dont *A B* a tourné, est précisément ce qu'on appelle un *angle*.

D'après cette idée, on conçoit que la grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ses côtés, ensorte que l'angle formé par les lignes *A C*, *A B* (*Fig.* 4.), eſt abſolument le même que celui que forment les lignes *A F* & *A E* qui ſont une extenſion de celles-là : en effet, la ligne *A B* & la ligne *A E* ont dû tourner chacune de la même quantité, pour venir dans leur poſition actuelle.

Le point *A* où ſe rencontrent les deux lignes *A B*, *A C*, s'appelle le *ſommet de l'angle ;* & les deux lignes *A B*, *A C*, en ſont les côtés.

Pour déſigner un angle, nous emploierons trois lettres, dont l'une marque le ſommet, & les deux autres ſont placées le long des côtés ; & en énonçant ces lettres nous placerons toujours celle du ſommet au milieu : ainſi pour déſigner l'angle compris par les deux lignes *A B*, *A C*, nous dirons l'angle *B A C* ou *C A B*.

Cette attention eſt principalement néceſſaire lorſque pluſieurs angles ont leur ſommet au même point, car ſi dans la *Figure* 4, par exemple, on diſoit ſimplement l'angle *A*, on ne ſauroit ſi l'on veut parler de l'angle *B A C*, ou de l'angle *B A D* ; mais lorſqu'il n'y a qu'un ſeul angle, comme dans la Figure 4*, on peut dire ſimplement l'angle *a* ; c'eſt-à-dire, le déſigner par la lettre de ſon ſommet.

11. Puiſque l'angle *B A C* (*Fig.* 4.) n'eſt autre choſe que la quantité dont le côté *A B* auroit dû tourner ſur le point *A*, pour venir de la poſition *A C* dans la poſition *A B*; & que dans ce mouvement chaque point de *A B*, le point *B*, par exemple, reſtant toujours également éloigné de *A*, décrit néceſſairement un arc de cercle qui augmente ou diminue préciſément dans le même rapport que l'angle augmente ou diminue; il eſt naturel de prendre cet arc pour meſure de l'angle; mais comme chaque point de *A B* décrit un arc de longueur différente, ce n'eſt point la longueur même de l'arc qu'il faut prendre, mais le nombre de ſes degrés & parties de degrés, qui ſera toujours le même pour chaque arc décrit par chaque point de *A B*, puiſque tous ces points commençant, continuant & finiſſant leur mouvement dans le même temps, font néceſſairement le même nombre de pas; toute la différence qu'il y a, c'eſt que les points les plus éloignés du point *A*, font des pas plus grands. Nous pouvons donc dire que . . . .

12. *Un angle quelconque* BAC (Fig. 4.) *a pour meſure le nombre des degrés & parties*

de degré de l'arc compris entre ſes côtés, & décrit de ſon ſommet comme centre.

Ainſi, quand par la ſuite nous dirons: Un tel angle a pour meſure un tel arc; on doit entendre qu'il a pour meſure le nombre des degrés & parties de degré de cet arc.

13. Donc *pour diviſer un angle en pluſieurs parties égales*, il ne s'agit que de diviſer l'arc qui lui ſert de meſure, en autant de parties égales, & de tirer par les points de diviſion, des lignes au ſommet de cet angle. Nous parlerons plus bas de la diviſion des arcs.

14. Et *pour faire un angle égal à un autre*; par exemple, pour faire au point *a* de la ligne *a c* (*Fig.* 4*), un angle égal à l'angle *B A C* (*Fig.* 4), il faut, d'une ouverture de compas arbitraire, & du point *a* comme centre, décrire un arc indéfini *c b*; poſant enſuite la pointe du compas ſur le ſommet *A* de l'angle donné *B A C*, on décrira, de la même ouverture, l'arc *B C* compris entre les deux côtés de cet angle, & ayant pris avec le compas, la diſtance de *C* à *B*, on la portera de *c* en *b*; ce qui donnera le point *b*, par lequel, & par le point *a* tirant la ligne *a b*, on aura l'angle *b a c* égal à *B A C*.

En effet l'angle $b\ a\ c$ a pour meſure $b\ c$ (12) & l'angle $B\ A\ C$ a pour meſure $B\ C$. Or ces deux arcs ſont égaux, puiſqu'appartenant à des cercles égaux, ils ont d'ailleurs des cordes égales (7); car la diſtance de b à c, a été faite la même que celle de B à C.

15. L'angle $B\ A\ C$ (*Fig.* 5.) ſe nomme angle droit, lorſque l'un $A\ B$ de ſes côtés ne panche ni vers l'autre côté $A\ C$, ni vers ſon prolongement $A\ D$.

On l'appelle angle *aigu* (*Fig.* 4) lorſque l'un $A\ B$ de ſes côtés panche plus vers l'autre côté $A\ C$, que vers ſon prolongement $A\ D$.

Enfin on l'appelle *obtus* (*Fig.* 6) lorſqu'un côté $A\ B$ panche plus vers le prolongement de l'autre côté $A\ C$, que vers ce côté même.

16. Concluons de ce qui a été dit (12) ſur la meſure des angles, 1°, *qu'un angle droit a pour meſure* 90°; *un angle aigu, moins que* 90°, *& un angle obtus, plus que* 90°.

Car ſi la ligne $A\ E$ (*Fig.* 3) ne panche ni vers $A\ B$, ni vers ſon prolongement $A\ D$, les deux angles $B\ A\ E$, $D\ A\ E$ ſeront égaux : donc les arcs $B\ E$ & $D\ E$ qui leur servent de mesure, seront aussi égaux; or ces deux arcs composant ensemble la demi-circonférence, valent ensemble 180°; donc chacun d'eux est de 90°; donc aussi les deux angles *B A E*, *D A E* sont chacun de 90°.

D'après cela il est évident que *B A C* est de moins, & *B A F* de plus que 90°.

17. 2°. *Les deux angles* B A C, B A D, (Fig. 4, 5 & 6) *que forme une ligne droite* A B *tombant sur une autre droite* C D, *valent toujours ensemble* 180°. Car on peut toujours regarder le point *A*, (*Fig.* 4.) comme le centre d'un cercle, dont *C D* est alors un diametre : or les deux angles *B A C* & *B A D*, ont pour mesure les deux arcs *B C* & *B D*, qui composent la demi-circonférence, ils valent donc ensemble 180°, ou autant que deux angles droits.

18. 3°. *Que si d'un même point* A, (Fig. 3.) *on tire tant de droites* A C, A E, A F, A D, A G, &c, *qu'on voudra; tous les angles* B A C, C A E, E A F, F A D, D A G, G A B *qu'elles comprennent, ne feront jamais que* 360°. Car ils ne peuvent occuper plus que la circonférence.

19. Deux angles tels que *B A C* &

BAD, (*Fig.* 4) qui pris enſemble font 180°, ſont dits *ſupplément* l'un de l'autre; ainſi *BAC* eſt le ſupplément de *BAD*, & *BAD* eſt le ſupplément de *BAC*; parce que l'un de ces angles eſt ce qu'il faudroit ajouter à l'autre pour faire 180°.

Les angles égaux auront donc des ſuppléments égaux; & ceux qui auront des ſuppléments égaux, ſeront égaux.

20. Concluons de-là *que les angles* BAC, EAD, (Fig. 7) *oppoſés au ſommet*, & *formés par les deux droites* BD & EC, *ſont égaux*.

Car *BAC* a pour ſupplément *CAD*, & *EAD* a auſſi pour ſupplément *CAD*.

21. On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce dont cet arc eſt plus petit ou plus grand que 90°. Ainſi (*Fig.* 3), l'angle *BAC* a pour complément *CAE*; l'angle *BAF* a pour complément *FAE*. Le complément eſt donc ce qu'il faut ajouter à un angle, ou ce qu'il faut en retrancher, pour qu'il vaille 90°.

Les angles aigus qui auront des complémens égaux, ſeront donc égaux, & réciproquement; il en ſera de même des angles obtus.

On rencontre ſans ceſſe les angles, tant

tant dans la théorie que dans la pratique. Nous aurons aſſez d'occaſions par la ſuite de nous convaincre qu'on les rencontre à chaque pas dans la théorie. Quant à la pratique, nous ferons remarquer que c'eſt par les angles qu'on juge de la route que ſuit un Navire; qu'on diſtingue ſi un Navire qu'on rencontre en mer, a le vent ſur nous, ou ſi nous l'avons ſur lui; c'eſt par les angles qu'on détermine les poſitions des objets, les uns à l'égard des autres; c'eſt en variant les angles que les voiles & le gouvernail font avec la quille, qu'on produit les différentes évolutions du Navire, qu'on change ſa route, & qu'on accélere ou qu'on retarde ſon mouvement. C'eſt encore par la meſure des angles qu'on parvient à déterminer en mer, en quel lieu on eſt.

Les inſtrumens qui ſervent à meſurer les angles, ou à former des angles tels qu'on le juge à propos, ſont en aſſez grand nombre; nous allons faire connoître les principaux.

22. L'inſtrument repréſenté par la Figure 8; & qu'on appelle *Rapporteur*, ſert à meſurer les angles ſur le papier, & à former ſur le papier les angles dont on

peut avoir beſoin. L'uſage en eſt commode & fréquent. C'eſt un demi-cercle de cuivre ou de corne, diviſé en 180°. Le centre de cet inſtrument eſt marqué par une petite échancrure *C*. Quand on veut meſurer un angle tel que *BAC* (*Fig.* 4, 5, 6, &c.) on applique le centre *C* ſur le ſommet *A* de l'angle qu'on veut meſurer, & le rayon *CB* du même inſtrument, ſur l'un *AC* des côtés de cet angle ; alors le côté *AB* prolongé, s'il eſt néceſſaire, fait connoître par celle des diviſions de l'inſtrument, par laquelle il paſſe, de combien de degrés eſt l'arc du rapporteur compris entre les côtés de l'angle *BAC*, & par conſéquent (12) de combien de degrés eſt cet angle *BAC*.

Pour faire, avec le même inſtrument, un angle d'un nombre déterminé de degrés, on applique le rayon *CB* de l'inſtrument ſur la ligne qui doit ſervir de côté à l'angle qu'on veut former, & de maniere que le centre *C* ſoit ſur le point où cet angle doit avoir ſon ſommet ; puis cherchant ſur les diviſions de l'inſtrument, le nombre de degrés en queſtion, on marque ſur le papier, un point en cet endroit ; par ce point & par le ſommet, on tire une ligne droite, qui fait alors avec la premiere, l'angle demandé.

23. Pour meſurer les angles ſur le terrein, on emploie l'inſtrument repréſenté par la Figure 9; on le nomme *Graphometre*. C'eſt un demi-cercle diviſé en 180°, & ſur lequel on marque même les demi-degrés, ſelon la grandeur de ſon diametre. Le diametre *DB* fait corps avec l'inſtrument; mais le diametre *EC*, qu'on nomme *Alidade*, n'y eſt aſſujeti que par le centre *A*, autour duquel il peut tourner & parcourir par ſon extrémité *C* toutes les diviſions de l'inſtrument. Chacun de ces deux diametres eſt garni à ſes deux extrémités, de pinnules, à travers leſquelles on regarde les objets. L'inſtrument eſt porté par un pied, & peut, ſans rien changer à la poſition du pied, être incliné dans tous les ſens, ſelon qu'on en a beſoin.

Quand on veut meſurer l'angle que forment deux lignes droites tirées d'un point *A* où l'on eſt, à deux autres objets *F* & *G*, on place le centre du graphometre en *A*, & on diſpoſe l'inſtrument de maniere que regardant à travers les pinnules du diametre fixe *DAB*, on apperçoive l'un *F* de ces deux objets, & qu'en même tems l'autre objet *G*, ſe trouve dans le prolongement du plan de l'inſtrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphometre ; alors on fait mouvoir l'alidade *EC*, juſqu'à ce qu'on puiſſe appercevoir l'objet *G* à travers des pinnules *E* & *C*; l'arc *BC* compris entre les deux diametres, eſt alors la meſure de l'angle *GAF*.

On voit auſſi, d'après ce que nous venons de dire, comment on peut former ſur le terrein un angle d'un nombre déterminé de degrés. On fait le plus ſouvent ſur la largeur, & à l'extrémité du diametre mobile, des diviſions, qui ſelon la maniere dont elles correſpondent aux diviſions même de l'inſtrument, ſervent à connoître les parties de degré de 5 en 5 minutes, ou de 3 en 3.

Cet inſtrument eſt auſſi, le plus ſouvent, garni d'une *Bouſſole* ordinaire ou ſimple: on la voit dans la même Figure 9.

L'aiguille aimantée qui en fait la piece principale, eſt ſoutenue en ſon milieu ſur un pivot ſur lequel elle a toute la mobilité poſſible. Comme ſa propriété eſt de reſter conſtamment dans une même poſition, ou d'y revenir quand elle en a été écartée (au moins dans un même lieu, & pendant un assez long intervalle de temps), on l'emploie utilement sur ces sortes d'instrumens, pour déterminer la position des objets à l'égard des points cardinaux, ou à l'égard de la ligne Nord & Sud, avec laquelle elle fait toujours le même angle dans un même lieu. Sur le bord de la cavité qui renferme l'aiguille, on marque communément les 360° de la circonférence. Quand on tourne l'instrument, l'aiguille, par la propriété qu'elle a de revenir dans une même situation, marque par la nouvelle division à laquelle elle répond, de combien de degrés l'iustrument a tourné.

On emploie aussi la boussole ordinaire sans le graphometre, mais c'est seulement pour déterminer grossiérement les points de détail d'un plan ou d'une carte, dont les points principaux ont été fixés avec exactitude, de la maniere que nous exposerons par la suite.

24. La *Boussole marine*, ou le *Compas de mer*, ou encore le *Compas de variation* (*Fig.* 10,) ne differe gueres de la boussole ordinaire que par une suspension qui lui est propre, & qui a pour objet de faire que les parties de cette machine,

qui servent à la mesure des angles; ne participent à d'autres mouvemens du vaisseau qu'à ceux qu'il peut avoir pour tourner horizontalement. Lorsqu'elle n'est employée qu'à connoître la direction de la quille du vaisseau, on l'appelle *Compas de route*. Elle est renfermée dans une espece d'armoire qu'on appelle *Habitacle*, & qui est située dans le sens de la largeur du vaisseau. L'aiguille n'est pas isolée sur son pivot comme dans la boussole ordinaire, elle seroit trop sujette à vaciller; on la charge d'un morceau de talc taillé en rond, & collé entre deux morceaux de papier; & on trace dessus, la rose des vents; c'est-à-dire, qu'on en partage la circonférence en rhumbs de vent. On conçoit donc que si le vaisseau vient à tourner d'une certaine quantité, comme l'aiguille reste toujours ou revient toujours à la même situation, elle ne répondra plus au même point de l'habitacle : en observant donc quel est le rhumb de vent qui répond à celui qu'occupoit d'abord l'aiguille, on connoîtra de combien le vaisseau a tourné. On pourra donc s'en servir pour ramener & retenir constamment le vaisseau dans une même direction.

Quand on emploie la bouſſole à *relever* des objets, c'eſt-à-dire, à reconnoître l'*air de vent* auquel ils répondent, on l'appelle *Compas de variation :* ce nom lui vient d'un autre uſage dont ce n'eſt pas ici le lieu de parler. Alors on la garnit de deux pinnules *A* & *B* (*Fig.* 10), par leſquelles on viſe aux objets dont on veut connoître la ſituation. En mer, il faut deux Obſervateurs ; l'un qui tourne & ajuſte le compas de variation de maniere à appercevoir l'objet ; & pendant ce tems, l'autre obſerve quelle eſt la poſition de l'aiguille à l'égard de la ligne *DE* qui eſt un fil tendu à angles droits ſur la ligne qu'on conçoit paſſer par *A* & *B*.

Des Perpendiculaires & des Obliques.

25. Nous avons dit (15) que la ligne *AB* (*Fig.* 5), qui ne penche ni vers *AC*, ni vers *AD*, formoit avec ces deux parties des angles qu'on appelle *droits*.

Cette même ligne *AB* eſt auſſi ce qu'on appelle *une Perpendiculaire* à la ligne *AC* ou *DC*, ou *AD*.

D'après cette définition, on doit regarder, comme vérités évidentes, les trois propositions suivantes.

26. 1°. *Quand une ligne* AB (Fig. 11) *est perpendiculaire sur une autre ligne* CD, *celle-ci est aussi perpendiculaire sur la ligne* AB.

Car lorsque *AB* est perpendiculaire sur *CD*, les angles *AEC*, *AED* sont égaux; or *AED* est égal à *BEC* (20); donc *AEC* est égal à *BEC*; donc la ligne *CE* ou *CD* ne penche ni vers *AE* ni vers *BE*; donc elle est perpendiculaire à *AB*.

27. 2°. *D'un même point* E *pris dans une ligne* CD, *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

28. 3°. *Et d'un même point* A, *pris hors d'une ligne* CD, *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

Car on conçoit qu'il n'y a qu'un seul cas où une ligne passant par le point *E* ou par le point *A*, puisse ne pencher ni vers *ED*, ni vers *EC*.

29. *Les lignes qui partant du point* A *s'écarteront également de la perpendiculaire, seront égales; & plus ces lignes s'écarteront de la perpendiculaire, plus elles seront longues, & par conséquent la perpendiculaire est la plus courte de toutes.*

Supposons que *EG* soit égale à *EF*;

ſi l'on renverſe la Figure *AEG* ſur la Figure *AEF*, la ligne *AE* reſtant commune à toutes les deux, il eſt clair qu'à cauſe de l'angle *AEG* égal à *AEF*, la ligne *EG* s'appliquera ſur *EF*, & que le point *G* tombera ſur le point *F*, puiſque *EG* eſt ſuppoſée égale à *EF;* donc *AG* s'appliquera exactement ſur *AF;* donc ces deux lignes ſont égales. Quant à la ſeconde partie de la propoſition, il eſt évident que le point *C* de la ligne *CE*, étant ſuppoſé plus loin de *AB*, que le point *F* de la même ligne *CE*, eſt néceſſairement plus éloigné de tel point de *AB* qu'on voudra, que le point *F* ne peut l'être du même point; donc *AC* eſt plus grande que *AF;* donc auſſi la perpendiculaire eſt la plus courte de toutes.

30. Les lignes *AF*, *AC*, *AG* ſont dites *obliques* à l'égard de la perpendiculaire *AE* & de la ligne *CD;* & en général; une ligne eſt oblique à une autre, quand elle fait, avec cette autre, un angle ou aigu ou obtus.

31. Puiſque (29) les obliques *AF*, *AG* ſont égales lorſqu'elles s'éloignent également de la perpendiculaire, il faut en conclure, que *lorſqu'une ligne eſt perpen-*

diculaire ſur le milieu E *d'une autre ligne* FG, *chacun de ſes points eſt autant éloigné de l'extrémité* F, *que de l'extrémité* G. Car il eſt évident que ce qu'on a dit du point *A* s'applique également à tout autre point de la ligne *AE* ou *AB*.

32. Il n'eſt pas moins évident qu'*il n'y a que les points de la perpendiculaire* AE *ſur le milieu de* FG, *qui puiſſent être également éloignés de* F *&* *de* G; car tout point qui ſera à droite ou à gauche de la perpendiculaire, eſt évidemment plus près de l'un de ces points, que de l'autre.

Donc, pour qu'une ligne ſoit perpendiculaire ſur une autre, il ſuffit qu'elle paſſe par deux points dont chacun ſoit également éloigné de deux points pris dans cette autre.

33. Concluons de là 1°, que *pour élever une perpendiculaire ſur le milieu d'une ligne* AB (*Fig.* 12), il faut poſer une pointe du compas en *B*, & d'une ouverture plus grande que la moitié de *AB* tracer un arc *IK*; poſer enſuite la pointe du compas en *A*., & de la même ouverture, tracer un arc *LM* qui coupe le premier au point *C* qui ſera également éloigné de *A* & de *B*. On déterminera enſuite, de la

même maniere, un autre point *D*, soit au-dessous, soit au-dessus de *AB*, en prenant la même ou une autre ouverture de compas. Enfin on tirera par les deux points *C* & *D* la ligne *CD* qui (32) sera perpendiculaire sur le milieu de *AB*.

34. 2°. *Si d'un point* E, *pris hors de la ligne* AB (Fig. 13), *on veut mener une perpendiculaire à cette ligne*, on placera la pointe du compas en *E*, & d'une ouverture plus grande que la plus courte distance à la ligne *AB*, on tracera avec l'autre pointe, deux petits arcs qui coupent *AB* aux points *C* & *D*, puis de ces deux points comme centres, & d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de *CD*, on tracera deux arcs qui se coupent en un point *F*, par lequel & par le point *E*, on tirera la ligne *EF*, qui sera perpendiculaire sur *AB* (32), puisqu'elle aura deux points *E* & *F* également éloignés, chacun, des deux points *C* & *D* de la ligne *AB*.

35. Si le point *E* par lequel on veut que la perpendiculaire passe, étoit sur la ligne même *AB*, on opéreroit encore de la même maniere : *voyez Figure* 14.

Enfin, si le point *E* étoit tellement placé, qu'on ne pût marquer commodément qu'un des deux points *C* ou *D*, on prolongeroit la ligne *AB*, & on opéreroit encore de même : *voyez Figures* 15 & 16. La Figure 16 est pour le cas où l'on veut élever une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne *AB*.

Des Paralleles.

36. Deux lignes droites tracées sur un même plan, sont dites *paralleles*, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes paralleles ne font donc point d'angle entre elles.

Donc deux paralleles sont par-tout également éloignées l'une de l'autre ; car il est évident que si en quelqu'endroit elles se trouvoient plus près qu'en un autre, elles seroient inclinées l'une à l'autre, & par conséquent elles pourroient enfin se rencontrer.

D'après ces notions, il est aisé d'établir les cinq propositions suivantes.

37. 1°. *Lorsque deux lignes paralleles* AB & CD (Fig. 17), *sont coupées par une troisieme ligne* EF, *qu'on appelle alors*

ſécante) *les angles* BGE, DHE *ou* AGH, CHF *qu'elles forment d'un même côté, avec cette ligne, ſont égaux.* Car les lignes *AB* & *CD* n'ayant aucune inclinaiſon entre elles (36) doivent néceſſairement être également inclinées d'un même côté, chacune à l'égard de toute ligne à laquelle on les comparera.

38. 2°. *Les angles* AGH, GHD *ſont égaux.* Car on vient de voir que *AGH* eſt égal à *CHF*; or *CHF* (20) eſt égal à *GHD*; donc *AGH* eſt égal à *GHD*.

39. 3°. *Les angles* BGE, CHF *ſont égaux.* Car *BGE* eſt égal à *AGH* (20); or on a vu (37) que *AGH* eſt égal à *CHF*; donc *BGE* eſt égal à *CHF*.

40. 4°. *Les angles* BGH, DHG *ou* AGH, CHG *ſont ſupplément l'un de l'autre*; car *BGH* eſt ſupplément de *BGE* qui (37) eſt égal à *DHG*.

41. 5°. *Les angles* BGE, DHF *ou* AGE, CHF *ſont ſupplément l'un de l'autre*; car *DHF* a pour ſupplément *DHG* qui (37) eſt égal à *BGE*.

42. Chacune de ces cinq propriétés a toujours lieu, lorſque deux lignes paralleles ſont rencontrées par une troiſieme; & réciproquement *toutes les fois que deux*

lignes droites, auront dans leur rencontre avec une troisieme, l'une quelconque de ces cinq proprietés, on doit conclure qu'elles sont paralleles ; cela se démontre d'une maniere absolument semblable.

On a donné aux angles dont nous venons d'examiner les propriétés, des noms qui peuvent servir à fixer ces propriétés dans la mémoire. Les angles *BGE*, *FHC* se nomment *alternes externes*, parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF*, & qu'ils sont tous deux hors des paralleles. Les angles *AGH*, *GHD* s'appellent *alternes internes*, parce qu'ils sont de différens côtés de la ligne *EF*, & tous deux entre les paralleles. Les angles *BGH*, *DHG* s'appellent *internes d'un même côté*, parce qu'ils sont entre les paralleles, & d'un même côté de la sécante *EF*. Enfin les angles *BGE*, *DHF* se nomment *externes d'un même côté*, parce qu'ils sont hors des paralleles & d'un même côté de la sécante.

43. Des propriétés que nous venons de démontrer, on peut conclure, 1°, *que si deux angles* ABC, DEF (Fig. 18), *tournés d'un même côté, ont leurs côtés paralleles, ils sont égaux*. Car si l'on imagine

le côté *DE* prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre *BC* en *G*, les angles *ABC*, *DGC* seront égaux (37); & par la même raison l'angle *DGC* sera égal à l'angle *DEF*; donc *ABC* est égal à *DEF*.

44. 2°. Que *pour mener par un point donné* C, *une ligne* CD, (Fig. 19) *parallele à une ligne* AB; il faut, par le point C, tirer arbitrairement la ligne indéfinie *CEF* qui coupe *AB* en un point quelconque *E*; mener selon ce qui a été enseigné (14) par le point *C*, la ligne *CD* qui fasse avec *CE*, l'angle *ECD* égal à l'angle *FEB* que celle-ci fait avec *AB*; la ligne *CD* tirée de cette maniere sera parallele à *AB*, (37).

Au reste chacune des cinq propriétés établies ci-dessus, peut fournir une maniere de mener une parallele.

45. Les perpendiculaires & les paralleles, dont nous venons de parler successivement, sont d'un usage très-fréquent dans toutes les parties pratiques des Mathématiques. Les perpendiculaires sont nécessaires dans la mesure des surfaces, & des solidités ou capacités des corps; elles reviennent à chaque pas dans toutes les opérations de l'Architecture navale.

Comme l'angle droit eſt facile à conſtruire ; on fait, autant qu'on le peut, dépendre la conſtruction des Figures, plutôt des perpendiculaires que de toute autre ligne.

Les paralleles, outre leur grand uſage dans la théorie, pour démontrer facilement un grand nombre de propoſitions, ſont la baſe de pluſieurs opérations utiles. On les emploie beaucoup dans le pilotage, principalement pour marquer, ſur les cartes marines, la route qu'a tenue un vaiſſeau pendant ſa navigation, ce qu'on appelle *pointer* ou *faire le point*. Nous en dirons un mot par la ſuite.

Des lignes droites conſidérées par rapport à la circonference du Cercle; & des circonférences de Cercle conſidérées les unes à l'égard des autres.

46. La courbure uniforme du cercle met en droit de conclure, ſans qu'il ſoit beſoin d'en donner une démonſtration rigoureuſe. . . . .

1°. *Que une ligne droite ne peut rencontrer une crconférence en plus de deux points.*

2°.

2°. Que *dans un même demi-cercle, la plus grande corde ſoutend toujours le plus grand arc, & réciproquement.*

On appelle, en général, *ſécante* (*Fig.* 20) toute ligne, comme *DE*, qui rencontre le cercle en deux points, & qui eſt en partie au dehors : & on appelle *tangente*, celle qui ne fait que s'appliquer contre la circonférence : telle eſt *AB*.

47. *Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un ſeul point.* Car ſi elle la rencontroit en deux points, elle entreroit dans le cercle, puiſque de ces deux points il ſeroit poſſible de tirer au centre deux rayons ou lignes égales, entre leſquelles on peut toujours concevoir une perpendiculaire ſur la ligne qui joint ces deux points; & comme cette perpendiculaire (29) eſt plus courte que chacun des deux rayons, on voit que la tangente auroit des points plus près du centre que ceux où elle rencontre le cercle, elle entreroit donc dans le cercle ; ce qui eſt contre la définition que nous venons d'en donner.

La tangente n'ayant qu'un point de commun avec le cercle, il s'enſuit que le rayon *CA* (*Fig.* 21) qui va au point d'attouchement, eſt la plus courte ligne qu'on puiſſe tirer du centre à la tangente; que par conſéquent (29) il eſt perpendiculaire à la tangente. Donc réciproquement *la tangente en un point quelconque* A *du cercle, eſt perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CA *qui paſſe par ce point.*

48. On voit donc *que pour mener une tangente à un point donné* A *ſur le cercle,* il faut tirer à ce point un rayon *CA*, & mener à ſon extrémité une perpendiculaire, ſuivant la méthode donnée (35).

49. Donc *ſi pluſieurs cercles* (Fig. 22) *ont leurs centres ſur la même ligne droite* CA, *& paſſent tous par le même point* A, *ils auront tous pour tangente commune la ligne* TG *perpendiculaire à* CA, *& ſe toucheront par conſéquent tous.*

50. Ainſi *pour décrire un cercle d'une grandeur déterminée, & qui touche un cercle donné* BAD (Fig. 23) *en un point donné* A, il faut, par le centre *C* & par le point *A*, tirer le rayon *CA* qu'on prolongera indéfiniment; puis du point *A* vers *T* ou vers *V* (ſelon qu'on voudra que l'un des cercles embraſſe l'autre, ou ne l'embraſſe point) porter la grandeur du rayon du ſecond cercle; après quoi du centre *T* ou *V*, & du

rayon *TA* ou *VA*, on décrira la circonférence *EF*.

51. *La perpendiculaire élevée ſur le milieu d'une corde, paſſe toujours par le centre du cercle, & par le milieu de l'arc ſoutendu par cette corde* (Fig. 24).

Car elle doit paſſer par tous les points également éloignés des extrémités *A* & *B* (32); or il eſt évident que le centre eſt également éloigné des deux extrémités *A* & *B* qui ſont deux points de la circonférence; donc elle paſſe par le centre.

Il n'eſt pas moins évident qu'elle doit paſſer par le milieu de l'arc; car ſi *E* eſt le milieu de l'arc, les arcs égaux *AE*, *BE* ayant des cordes égales (7), le point *E* eſt également éloigné de *A* & de *B*; donc la perpendiculaire doit paſſer par le point *E*.

52. Le centre, le milieu de l'arc, & le milieu de la corde, étant tous trois ſur une même ligne droite, toutes les fois qu'une ligne droite paſſera par deux de ces trois points, on pourra conclure qu'elle paſſe par le troiſieme.

Et comme on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire ſur le milieu de la corde, on doit encore conclure que ſi une perpendiculaire ſur une corde, paſſe par l'un quelconque de ces trois points, elle paſſe néceſſairement par les deux autres.

De ces propriétés on peut conclure.

53. 1°. *Le moyen de diviſer un angle ou un arc en deux parties égales.*

Pour diviſer l'angle *BAC* (*Fig.* 25) en deux parties égales, on décrira de ſon ſommet *A* comme centre, & d'un rayon arbitraire, l'arc *DE*; puis des points *D* & *E* pris ſucceſſivement pour centres, & d'un même rayon, on tracera deux arcs qui ſe coupent en un point *G* par lequel & par le point *A* on tirera *AG* qui (32) étant perpendiculaire ſur le milieu de la corde *DE*, diviſera en deux parties égales l'arc *DIE* (51) & par conſéquent auſſi l'angle *BAC*, puiſque les deux angles partiels *BAG*, *CAG* ont (12) pour meſure les deux arcs égaux *DI*, *EI*.

54. 2°. *Le moyen de faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne ſoient pas en ligne droite.*

Soient *A*, *B*, *C*, (*Fig.* 26) ces trois points; en tirant les lignes droites *AB*, *BC*, elles ſeront deux cordes du cercle qu'il s'agit de décrire.

Élevez une perpendiculaire (33) ſur le

milieu de *AB;* faites la même chose sur le milieu de *BC;* le point *I* où se couperont ces deux perpendiculaires, sera le centre. Car ce centre doit être sur *DE* (51); & par la même raison il doit être sur *FG;* il doit donc être à leur rencontre *I* qui est le seul point commun qu'aient ces deux lignes.

55. S'il étoit question de *retrouver le centre d'un cercle*, ou *d'un arc déja décrit*, on voit donc qu'il n'y auroit qu'à marquer trois points à volonté sur cet arc, & opérer comme on vient de l'enseigner.

56. Puisqu'on ne trouve qu'un seul point *I* qui satisfasse à la question, il faut en conclure que par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul cercle, & par conséquent que *deux circonférences de cercle ne peuvent se rencontrer en trois points sans se confondre.*

57. 3°. *Le moyen de faire passer par un point donné* B (Fig. 27 & 28) *une circonférence de cercle, qui en touche une autre, dans un point donné* A.

Il faut, par le centre *C* de la circonférence donnée, & par le point *A* où l'on veut qu'elle soit touchée, tirer le rayon *CA* qu'on prolongera de part ou d'autre, ſelon qu'il ſera néceſſaire ; joindre le point *A* au point *B* par lequel on veut que paſſe la circonférence cherchée ; & élever ſur le milieu de *AB*, une perpendiculaire *MN* qui coupera *AC*, ou ſon prolongement, en *D*. Ce point *D* ſera le centre, & *AD* ou *BD* ſera le rayon du cercle demandé ; car puiſque la circonférence qu'on veut décrire, doit paſſer par le point *A* & par le point *B*, ſon centre doit être ſur *MN* (51) ; d'ailleurs, puiſque cette même circonférence doit toucher en *A*, ſon centre doit être ſur *CA* (49) ou ſur ſon prolongement ; il eſt donc au point d'interſection de *CA* & de *MN*.

58. Si au lieu d'une circonférence, c'étoit une ligne droite qu'il s'agit de faire toucher en un point donné *A*, (*Fig.* 29) par un cercle paſſant par un point donné *B*, l'opération ſeroit la même, avec cette ſeule différence, que la ligne *AC* ſeroit une perpendiculaire élevée au point *A* ſur cette droite.

59. 4°. *Deux cordes paralleles* AB, CD, (Fig. 30) *interceptent entr'elles, des arcs égaux* AC, BD.

Car la perpendiculaire *GI* qu'on abaiſſeroit du centre *G* ſur *AB*, doit (51) divifer, en deux parties égales, chacun des deux arcs *AIB*, *CID*, puifqu'elle fera, en même tems perpendiculaire fur *AB*, & fur la parallele *CD*; donc fi des arcs égaux *AI*, *BI*, on retranche les arcs égaux, *CI*, *DI*, les arcs reftans *AC*, *BD* doivent être égaux.

Concluons de là, que, quand une tangente *HK* eft parallele à une corde *AB*, le point d'attouchement *I* eft précifément au milieu de l'arc *AIB*.

60. Les propofitions que nous avons établies (50, 57 & 58), ont leur application dans l'Architecture navale, ou la conftruction des navires; il y eft fouvent queftion d'arcs qui doivent fe toucher, ou toucher des lignes droites, & paffer par des points donnés. Ce que nous avons dit peut faciliter l'intelligence de quelques-unes des méthodes qu'on y prefcrit. L'Architecture civile fait auffi, affez fouvent, ufage d'arcs qui fe touchent.

61. La derniere propofition que nous venons de démontrer peut, entre autres ufages, fervir à mener une parallele à une ligne donnée.

Des Angles considérés dans le cercle.

62. Nous avons vu ci-dessus (12), quelle est, en général, la mesure des angles. Ce que nous nous proposons ici, n'est point de donner une nouvelle maniere de les mesurer, mais d'établir quelques propriétés qui peuvent nous être fort utiles par la suite, tant pour exécuter certaines opérations, que pour faciliter quelques démonstrations.

63. *Un angle* MAN, (Fig. 31 & 32) *qui a son sommet à la circonférence, & qui est formé par deux cordes, ou par une tangente & par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc* BFED *compris entre ses côtés.*

Menez par le centre *C*, le diametre *FH* parallele au côté *AM*; & le diametre *GE* parallele au côté *AN*: l'angle *MAN* (43) est égal à l'angle *FCE*; il aura donc la même mesure que celui-ci qui a son sommet au centre, c'est-à-dire, qu'il aura pour mesure l'arc *FE*; il ne s'agit donc que de faire voir que l'arc *FE* est la moitié de l'arc *BFED*. Or *BF* est égal à *AH* (59) à cause des paralleles *AM*, *HF*;

& à cause des paralleles *AN* & *GE*, l'arc *ED* est égal à *AG*; donc *ED* plus *BF* valent *AG* plus *AH*, c'est-à-dire, *GH*; mais *GH*, comme mesure de l'angle *GCH*, doit être égal à *FE* mesure de l'angle *FCE* qui (20) est égal à *GCH*; donc *BF* plus *ED* valent *FE*; donc *FE* est la moitié de *BFED*; donc l'angle *MAN* a pour mesure la moitié de l'arc *BFED* qu'il comprend entre ses côtés.

Cette démonstration suppose que le centre soit entre les côtés de l'angle, ou sur l'un des côtés; mais si le centre étoit hors des côtés; comme il arrive pour l'angle *MAL* (*Fig.* 32.), il n'en seroit pas moins vrai que cet angle auroit pour mesure la moitié de l'arc *BL* compris entre ses côtés. Car en imaginant la tangente *AN*, l'angle *BAL* vaut *LAN* moins *MAN*; il a donc pour mesure la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire, (puisque le centre est entre leurs côtés), la moitié de *LEA* moins la moitié de *BEA*, ou la moitié de *BL*.

64. Donc 1°, *tous les angles* BAE, BCE, BDE (Fig. 33) *qui ayant leur sommet à la circonférence, comprendront entre leurs côtés, le même arc, ou des arcs égaux*,

feront égaux. Car ils auront chacun pour mefure la moitié du même arc *BE* (63).

65. 2°. *Tout angle* BAC (Fig. 34) *qui aura fon fommet à la circonference, & dont les côtés pafferont par les extrémités d'un diametre, fera droit ou de* 90°; car il comprendra alors entre fes côtés, la demi-circonférence *BOC* qui eft de 180°; & comme il doit en avoir la moitié pour mefure (63), il fera donc de 90°.

66. La propofition qu'on vient de démontrer (65) peut, entre plufieurs autres ufages, avoir les deux fuivans.

67. 1°. *Pour élever une perpendiculaire, à l'extrémité* B *d'une ligne* FB, (*Fig.* 35), lorfqu'on ne peut prolonger affez cette ligne, pour exécuter commodément ce qui a été enfeigné (35); voici le procédé :

D'un point *D* pris à volonté hors de la ligne *FB*, & d'une ouverture égale à la diftance *DB*, décrivez la circonférence *ABCH* qui coupe *FB* en quelque point *A*; par ce point & par le centre *D*, tirez le diametre *ADC*; du point *C* où ce diametre coupe la circonférence, menez au point *B* la ligne *CB*; elle fera perpendiculaire à *FB*. Car l'angle *CBA* qu'elle forme avec *FB*, a fon fommet à la circonférence, & ſes côtés paſſent par les extrémités du diametre *AC*; cet angle eſt donc droit (65); donc *CB* eſt perpendiculaire ſur *FB*.

68. 2°. *Pour mener d'un point donné* E (Fig. 36), *hors du cercle* ABD, *une tangente à la circonférence de ce cercle.* Joignez le centre *C* & le point *E* par la droite *CE*: décrivez ſur *CE* comme diametre la circonférence *CAED*; elle coupera la circonférence *ABD* en deux points *A* & *D*, par chacun deſquels & par le point *E*, tirant les lignes *DE* & *AE*, vous aurez les deux tangentes qu'on peut mener du point *E* à la circonférence *ABD*.

Pour ſe convaincre que ces lignes ſont tangentes, il n'y a qu'à tirer les rayons *CD* & *CA*; les deux angles *CDE*, *CAE* ont chacun leur ſommet à la circonférence *ACDE*, & les deux côtés de chacun paſſent par les extrémités du diametre *CE*; donc (65) ces angles ſont droits; donc *DE* & *AE* ſont perpendiculaires à l'extrémité des rayons *CD* & *CA*; donc (47) ces lignes ſont tangentes en *D* & en *A*.

69. Si l'on prolonge le côté *BA* (*Fig.* 31) indéfiniment vers *I*, on aura un angle *NAI* qui aura auſſi ſon ſommet à la

circonférence ; cet angle qui n'eſt point formé par deux cordes, mais ſeulement par une corde & par le prolongement d'une autre corde, n'aura point pour meſure la moitié de l'arc *AD* compris entre ſes côtés, mais la moitié de la ſomme des deux arcs *AD* & *AB* ſoutendus par le côté *AD* & par le côté *AI* prolongé ; car *DAI* valant avec *DAB*, deux angles droits, ces deux angles doivent avoir enſemble pour meſure la moitié de la circonférence ; or on vient de voir (63) que *DAB* avoit pour meſure la moitié de *DB*; donc *DAI* a pour meſure la moitié de *AD* & la moitié de *AB*.

70. *Un angle* BAC (Fig. 37) *qui a ſon ſommet entre le centre & la circonférence, a pour meſure la moitié de l'arc* BC *compris entre ſes côtés, plus la moitié de l'arc* DE *compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Du point *D*, où *CA* prolongé rencontre la circonférence, tirez *DF* parallele à *AB*; l'angle *BAC* eſt égal à *FDC* (37), & aura par conſéquent la même meſure que celui-ci, c'eſt-à-dire, la moitié de l'arc *FBC* (63), ou la moitié de *BC* plus la moitié de *BF*; ou (à cauſe que (59) *BF* eſt égal à *DE*), la moitié de *BC* plus la moitié de *DE*.

71. *Un angle* BAC (Fig. 38) *qui a ſon ſommet hors du cercle, a pour meſure la moitié de l'arc concave* BC *moins la moitié de l'arc convexe* ED *compris entre ſes côtés.*

Du point *D* où *CA* rencontre la circonférence, tirez *DF* parallele à *AB.*

L'angle *BAC* eſt égal à *FDC* (37); il aura donc même meſure que celui-ci, c'eſt à-dire, la moitié de *CF*, ou la moitié de *CB* moins la moitié de *BF*, ou (à cauſe que *BF* eſt (59) égal à *ED*) la moitié de *CB* moins la moitié de *ED.*

72. On voit donc que quand les côtés d'un angle interceptent un arc de circonférence, ſi cet angle a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, il a néceſſairement ſon ſommet à la circonférence; car s'il l'avoit ailleurs, les propoſitions démontrées (70 & 71) feroient voir qu'il n'a point la moitié de cet arc pour meſure. Donc, de quelque façon qu'on poſe un même angle, ſi ſes côtés (*Fig.* 33) paſſent toujours par les mêmes points *B* & *E* de la circonférence, ſon ſommet ſera toujours ſur quelque point de la circonférence. Donc, ſi deux regles *AM*, *AN* (*Fig.* 39) fixement attachées l'une à l'autre, roulent enſemble dans un même plan, en touchant continuellement deux

points fixes B & C, le ſommet A décrira la circonférence d'un cercle qui paſſera par les deux points B & C.

Ceci peut ſervir, 1°, à *décrire un cercle qui paſſe par trois points donnés* B, A, C, (Fig. 39) *lorſqu'on ne peut approcher du centre.* Il faudra joindre le point A aux deux points B & C par deux regles AM, AN: Fixer ces deux regles de maniere qu'elles ne puiſſent s'écarter l'une de l'autre ; alors en faiſant mouvoir l'angle BAC de maniere que les regles AM, AN touchent toujours les points B & C, le ſommet A décrira la circonférence demandée.

2°. *A décrire un arc de cercle d'un nombre de degrés propoſé, & qui paſſe par deux points donnés* B & C ; ce qui peut être néceſſaire dans la pratique.

Pour cet effet on retranchera de 360°, le nombre des degrés que cet arc doit avoir, & ayant pris la moitié du reſte, on ouvrira les deux regles, de maniere qu'elles faſſent un angle égal à cette moitié. Fixant alors les deux regles l'une à l'autre, & les faiſant tourner autour de deux pointes fixées en B & C, l'arc BAC que le ſommet décrira dans ce mouvement, ſera du nombre de degrés propoſé.

Il eſt facile de voir pourquoi on fait

l'angle *BAC* égal à la moitié du reſte; c'eſt qu'il a pour meſure la moitié de *BC* qui eſt la différence entre la circonférence entiere & l'arc *BAC*.

Des Lignes droites qui renferment un eſpace.

73. Le moindre nombre des lignes droites qu'on puiſſe employer pour renfermer un eſpace, eſt trois; & alors cet eſpace ſe nomme *triangle rectiligne* ou ſimplement *triangle*. *ABC* (*Fig*. 40) eſt un triangle, parce que c'eſt un eſpace renfermé par trois lignes droites, ou plus exactement, parce que c'eſt une figure qui n'a que trois angles.

Il eſt évident que dans tout triangle, la ſomme de deux côtés, pris comme on le voudra, eſt toujours plus grande que le troiſieme. *AB* plus *BC*, par exemple, valent plus que *AC*; parce que *AC* étant la ligne droite qui va de *A* à *C*, eſt le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre.

Un triangle, dont les trois côtés ſont égaux, ſe nomme triangle *équilatéral*, (*Fig*. 41).

Celui dont deux côtés ſeulement ſont égaux, ſe nomme triangle *iſoſcele*, (*Fig.* 42).

Et celui, dont les trois côtés ſont inégaux, ſe nomme triangle *ſcalêne*, (*Fig.* 40).

74. *La ſomme des trois angles de tout triangle rectiligne, vaut deux angles droits ou* 180°.

Prolongez indéfiniment le côté *A C* vers *E* (*Fig.* 40), & concevez la ligne *CD* parallele au côté *AB*.

L'angle *BAC* eſt égal à l'angle *DCE* (37), puiſque les lignes *AB* & *CD* ſont paralleles. L'angle *ABC* eſt égal à l'angle *BCD* par la ſeconde propriété des paralleles (38); donc les deux angles *BAC* & *ABC*, valent enſemble autant que les deux angles *BCD* & *DCE*, c'eſt-à-dire, autant que l'angle *BCE*; mais *BCE* eſt ſupplément (17 & 19) de *BCA*; donc les deux angles *BAC* & *ABC* forment enſemble le ſupplément de *BCA*; donc ces trois angles valent enſemble 180°.

75. La démonſtration que nous venons de donner, prouve donc en même tems que *l'angle extérieur* BCE *d'un triangle* ABC, *vaut la ſomme des deux intérieurs* BAC & ABC *qui lui ſont oppoſés.*

Concluons de ce qu'on vient de dire (74), 1°, *qu'un triangle rectiligne ne peut avoir*

avoir qu'un ſeul angle qui ſoit droit : & alors on l'appelle triangle *rectangle*, (*Fig.* 43).

2°. Qu'à plus forte raiſon *il ne peut avoir qu'un ſeul angle qui ſoit obtus ;* dans ce cas on l'appelle triangle *obtuſangle*, (*Fig.* 44).

3°. Mais *il peut avoir tous ſes angles aigus ;* & alors il eſt dit triangle *acutangle*, (*Fig.* 45.).

4°. Que *connoiſſant deux angles, ou ſeulement la ſomme de deux angles d'un triangle, on connoît le troiſieme angle*, en retranchant de 180°, la ſomme des deux angles connus.

5°. Que *lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle ; le troiſieme angle de chacun eſt néceſſairement égal ;* puiſque les trois angles de chaque triangle valent 180°.

6°. Que *les deux angles aigus d'un triangle rectangle ſont toujours complément* (21) *l'un de l'autre.* Car dès que l'un des angles du triangle eſt de 90°, il ne reſte plus que 90° pour les deux autres enſemble.

76. Nous avons vu ci-deſſus (54) qu'on pouvoit toujours faire paſſer une circonférence de cercle, par trois points qui ne ſont pas en ligne droite ; concluons-en que.........

On peut toujours faire passer une circonférence de cercle, par les sommets des trois angles d'un triangle. On appelle cela *circonscrire* un cercle à un triangle.

77. Delà il est aisé de conclure, 1°; que *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux*; & réciproquement *si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux.*

Car en faisant passer une circonférence par les trois angles *A*, *B*, *C* (*Fig.* 46) si les angles *ABC*, *ACB* sont égaux, les arcs *ADC*, *AEB*, dont les moitiés leur servent de mesure (63) seront nécessairement égaux; donc (7) les cordes *AC*, *AB* seront égales. Et réciproquement si les côtés *AC*, *AB* sont égaux, les arcs *ADC*, *AEB* seront egaux; donc les angles *ABC*, *ACB*, qui ont pour mesure la moitié de ces arcs, seront égaux.

Donc les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, & valent, par conséquent, chacun le tiers de 180°, ou 60°.

78. 2°. *Dans un même triangle* ABC (Fig. 47), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, & réciproquement.*

Car si l'angle *A B C* est plus grand que l'angle *A C B*, l'arc *A C* sera plus grand que l'arc *A B*, & par conséquent la corde *A C* plus grande que la corde *A B*. La réciproque se démontre de même.

De l'égalité des Triangles.

79. Il y a plusieurs propositions dont la démonstration est fondée sur l'égalité de certains triangles qu'on y considere ; il est donc à propos d'établir ici les caracteres auxquels on peut reconnoître cette égalité. Ils sont au nombre de trois.

80. *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Que l'angle *B* du triangle *B A C* (*Fig.* 48), soit égal à l'angle *E* du triangle *E D F* [*Fig.* 49]; que le côté *A B* soit égal au côté *D E*; & le côté *B C* égal au côté *E F*; voici comment on peut se convaincre que ces deux triangles sont égaux.

Concevez la figure *A B C* appliquée sur la figure *D E F*, de maniere que le côté *A B* soit exactement appliqué sur son égal *D E*; puisque l'angle *B* est égal à l'angle *E*, le côté *B C* tombera sur *E F*; & le point *C* tombera ſur le point *F*, puiſque *B C* eſt ſuppoſé égal à *E F*. Le point *A* étant ſur *D*, & le point *C* ſur *F*, il eſt donc évident que *A C* s'applique exactement ſur *D F*, & que par conſéquent les deux triangles conviennent parfaitement.

Donc pour conſtruire un triangle dont on connoîtroit deux côtés & l'angle compris, on tirera (*Fig.* 49) une ligne *D E* égale à l'un des côtés connus : ſur cette ligne on fera (14) un angle *D E F* égal à l'angle connu, & ayant fait *E F* égal au ſecond côté connu, on tirera *D F*, ce qui achevera le triangle demandé.

81. *Deux triangles ſont égaux, quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Que le côté *A B* (*Fig.* 48) ſoit égal au côté *D E* (*Fig.* 49), l'angle *B* égal à l'angle *E*, & l'angle *A* égal à l'angle *D*.

Concevez le côté *A B* appliqué exactement ſur le côté *D E*, *B C* ſe couchera ſur *E F*, puiſque l'angle *B* eſt égal à l'angle *E*; pareillement, puiſque l'angle *A* eſt égal à l'angle *D*, le côté *A C* ſe couchera ſur *D F*; donc *A C* & *B C* ſe rencontreront au point *F*; donc les deux triangles ſont égaux.

Donc pour conſtruire un triangle, dont on connoîtroit un côté & les deux angles adjacens, on tirera (*Fig.* 49) une ligne *D E* égale au côté connu; aux extrémités de cette ligne, on fera (14) les angles *E* & *D* égaux aux deux angles connus; alors les côtés *E F*, *D F* de ces angles, termineront, par leur rencontre, le triangle demandé.

82. La propoſition (81) peut ſervir à démontrer que *les parties* A C, B D (*Fig.* 50) *de deux paralleles, interceptées entre deux autres paralleles* A B, C D *ſont égales.*

Abaiſſez les deux perpendiculaires *A E*, *B F*; les angles *A E C*, *B F D* ſont égaux, puiſqu'ils ſont droits; & à cauſe des paralleles *A C* & *B D*, *A E* & *B F*, l'angle *E A C* eſt égal à l'angle *F B D* (43) D'ailleurs *A E* eſt égal à *B F* (36); donc les deux triangles *A E C*, *B F D* ſont égaux, puiſqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc *A C* eſt égal à *B D*.

On démontrera de même, que ſi *A C* eſt égal & parallele à *B D*, *A B* ſera égal & parallele à *C D*; car outre le côté *A C* égal à *B D*, & l'angle droit en *E* ainſi qu'en *F*, l'angle *A C E* ſera égal à *B D F*, puisque $A\,C$ est parallele à $B\,D$ (37); donc (75) le troisieme angle $E\,A\,C$ sera égal au troisieme angle $D\,B\,F$; donc les deux triangles auront un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils seront égaux; donc $A\,E$ est égal à $B\,F$, & par conséquent les deux lignes sont paralleles; or delà & de ce qu'on vient de démontrer (82) il s'en suit que $A\,B$ est égal à $C\,D$.

83. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux ehacun à chacun.*

Que le côté $A\,B$ (*Fig.* 48) soit égal au côté $D\,E$ (*Fig.* 49); le côté $B\,C$, égal au côté $E\,F$; & le côté $A\,C$, égal au côté $D\,F$.

Concevez le côté $A\,B$ exactement appliqué sur $D\,E$, & le plan $B\,A\,C$ couché sur le plan de la figure $D\,E\,F$; je dis que le point C tombe sur le point F.

Décrivez des points D & E comme centres, & des rayons $D\,F$ & $E\,F$, les deux arcs $I\,K$ & $H\,G$ qui se coupent en F; il est évident que le point C doit tomber sur quelque point de $I\,K$, puisque $A\,C$ est égal à $D\,F$; par une semblable raison le point C doit tomber sur quelque point de $G\,H$, puisque $B\,C$ est égal à $E\,F$; il doit donc tomber sur le point F qui est le seul point commun que ces deux arcs puiſſent avoir d'un même côté de DE ; donc les deux triangles conviennent parfaitement, & ſont par conſéquent égaux.

Donc pour conſtruire un triangle dont on connoîtroit les trois côtés, il faut (*Fig.* 49) tirer une droite DE égale à l'un des côtés connus ; du point D comme centre, & d'un rayon égal au ſecond côté connu, décrire l'arc IK ; pareillement du point E comme centre, & d'un rayon égal au troiſieme côté connu, décrire l'arc GH : enfin du point d'interſection F, tirer aux points D & E, les droites FD & FE.

Des Polygones.

84. Une figure de pluſieurs côtés, s'appelle en général un *Polygone.*

Lorſqu'elle a trois côtés, on l'appelle
. . . *Triangle* ou *Trilatere :*
lorſqu'elle en a 4 . . *Quadrilatere :*
5 . . *Pentagone :*
6 . . *Hexagone :*
7 . . *Heptagone :*
8 . . *Octogone :*
9 . . *Enneagone :*
10 . . *Décagone.*

Nous n'étendrons pas davantage la liste de ces noms, parce qu'une figure est aussi bien désignée en énonçant le nombre de ses côtés, qu'en employant ces différens noms, dont le grand nombre chargeroit assez inutilement la mémoire; nous n'exposons ceux-ci que parce qu'ils se rencontrent plus fréquemment que les autres.

On appelle angle *saillant*, celui dont le sommet est hors de la figure; la Figure 51 a tous ses angles saillans.

L'angle *rentrant* est, au contraire, celui dont le sommet entre dans la figure, l'angle *CDE* (*Fig.* 52) est un angle rentrant.

On appelle *diagonale*, une ligne tirée d'un angle à un autre, dans une figure quelconque. *AD*, *AC* (*Fig.* 51) sont des diagonales.

85. *Tout poligone peut être partagé, par des diagonales menées d'un de ses angles, en autant de triangles moins deux, qu'il a de côtés.*

L'inspection des *figures* 51 & 52, suffit pour faire sentir que cela est vrai généralement.

86. Donc *pour avoir la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelcon-*

que, il faut prendre 180°, autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.

Car il est évident que la somme des angles intérieurs des polygones *ABCDE* (*Fig* 51), & *ABCDEF* (*Fig.* 52) est la même que celle des angles des triangles *ABC*, *ACD*, &c. Or la somme des trois angles de chacun de ces triangles est de 180°; il faut donc prendre 180° autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire, (85) autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.

REMARQUE. Dans la figure 52, l'angle *CDE*, pour être compris dans la proposition précédente, doit être compté, non pas pour la partie *CDE* extérieure au polygone, mais pour la partie *CDE* composée des angles *ADE*, *ADC*; c'est un angle de plus de 180°, & qu'on ne doit pas moins considérer comme angle, que tout autre angle au-dessous de 180°. Car un angle n'est en général (10) que la quantité dont une ligne a tourné autour d'un point fixe; & soit qu'elle tourne de plus ou de moins que 180°, la quantité dont elle a tourné est toujours un angle.

87. *Si l'on prolonge dans le même sens;*

tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la ſomme de tous les angles extérieurs vaudra 360°, quelque nombre de côtés qu'ait le polygone. Voyez (*Fig.* 51).

Car chaque angle extérieur eſt le ſupplément de l'angle intérieur qui lui eſt contigu ; ainſi les angles, tant intérieurs qu'extérieurs, valent autant de fois 180° qu'il y a de côtés ; mais (86) les intérieurs ne different de cette ſomme, que de deux fois 180° ou 360° ; il reſte donc 360° pour les angles extérieurs.

88. On appelle polygone *régulier*, celui qui a tous ſes angles égaux, & tous ſes côtés égaux ; *voyez* (*Fig.* 53).

Il eſt donc toujours facile de ſavoir combien vaut chaque angle intérieur d'un polygone régulier ; car ayant trouvé par la propoſition enſeignée (86) combien valent enſemble tous les angles intérieurs, il n'y aura qu'à diviſer cette valeur totale, par le nombre des côtés ; par exemple, ſi l'on demande combien vaut chaque angle intérieur d'un pentagone régulier ; comme il y a 5 côtés, je prends 180°, 5 fois moins deux, c'eſt-à-dire, 3 fois ; ce qui donne 540° pour la valeur des 5 angles intérieurs ; donc puiſqu'ils ſont tous égaux, chacun doit valoir la cinquieme partie de 540°, c'est-à-dire, 108°.

89. De la définition du polygone régulier, il suit qu'*on peut toujours faire passer une même circonférence de cercle, par tous les angles d'un polygone régulier.*

Car il est prouvé (54) qu'on peut faire passer une circonférence de cercle par les trois points *A*, *B*, *C* (*Fig.* 53); or je dis qu'elle passe aussi par l'extrémité du côté *C D*; en effet il est facile de prouver que le point *D* où cette circonférence doit rencontrer le côté *C D*, est éloigné de *C* d'une quantité égale à *B C*; car l'angle *A B C* étant égal à *B C D*, les arcs *A E C*, *B F D*, dont les moitiés servent de mesure à ces angles (63), doivent être égaux; retranchant de chacun l'arc commun *A F E D*, les arcs restans *C D* & *A B*, doivent être égaux; donc aussi (7) les cordes *C D* & *A B* sont égales; donc le point *D* où le côté *C D* est rencontré par la circonférence qui passe par *A*, *B*, *C*, est le même que le sommet de l'angle du polygone. On démontrera la même chose des angles *E* & *F*.

90. On voit donc que *pour circonscrire un cercle à un polygone régulier, la question*

ſe réduit à faire paſſer un cercle par les ſommets de trois de ſes angles, ce qui ſe fait de la maniere enſeignée (54).

91. *Toutes les perpendiculaires abaiſſées du centre d'un polygone régulier, ſur les côtés, ſont égales.* Car ces perpendiculaires *O H*, *O L*, devant tomber ſur le milieu de chaque côté (52), les lignes *A H* & *A L* ſeront égales; or *A O* eſt commun aux deux triangles *O H A* & *O L A*; d'ailleurs, à cauſe des triangles *A B O*, *A O F*, qui ont tous leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles *O A H*, *O A L* ſont égaux; donc les deux triangles *O A H*, *O A L*, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ſont égaux (80). Donc *O H* eſt égal à *O L*.

Donc ſi d'un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés. Cette circonférence eſt dite *inſcrite* au polygone.

Les perpendiculaires *O H*, *O L* s'appellent, chacune, *l'apothême* du polygone.

92. Il eſt clair que ſi du centre du polygone régulier on tire des lignes à tous les angles, ces lignes comprendront entr'elles des angles égaux, puiſque ces angles auront pour meſure des arcs qui ſont

ſoutenus par des cordes égales ; donc *pour avoir l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviſer 360° par le nombre des côtés.* Car ces angles égaux ont tous enſemble pour meſure la circonférence entiere. Par exemple, pour l'hexagone, chaque angle au centre ſera la ſixieme partie de 360°, c'eſt-à-dire, ſera de 60°.

93. Donc *le côté de l'hexagone eſt égal au rayon du cercle circonſcrit.* Car en tirant les rayons *A O* & *B O*, le triangle *A O B* ſera iſoſcele, & par conſéquent (77) les deux angles *B A O* & *A B O* ſeront égaux; or comme l'angle *A O B* eſt de 60°, les deux autres doivent valoir enſemble 120° (75); donc chacun d'eux eſt de 60°; les trois angles ſont donc égaux, & par conſéquent le triangle eſt équilatéral (77); donc *A B* eſt égal au rayon *A O*.

94. Nous n'en dirons pas davantage ſur les polygones réguliers, dont les autres propriétés ſont d'ailleurs très-faciles à déduire de celles qu'on vient d'expoſer ; la ſeule choſe que nous ajouterons, eſt l'uſage de la derniere propoſition pour la diviſion de la circonférence, de 15 en 15 degrés.

On tirera deux diametres *A B*, *D E*

(*Fig* 54) perpendiculaires l'un à l'autre ; & ayant pris une ouverture de compas égale au rayon *C E*, on la portera ſucceſſivement de *E* en *F*, & de *A* en *G* ; le quart de circonférence *A E* ſera, par ce moyen, diviſé en trois parties égales *AF*, *FG*, *GE* ; car puiſqu'on a pris le rayon pour l'ouverture du compas, il ſuit de ce qui vient d'être dit (93) que l'arc *E F* eſt de 60° ; or *E A* eſt 90°, donc *A F* eſt de 30°. Par la même raiſon *A G* eſt de 60° ; & comme *A E* eſt de 90°, *G E* eſt donc de 30° ; enfin, ſi de l'arc total *A E* de 90°, vous retranchez les arcs *A F* & *G E* qui valent enſemble 60°, l'arc reſtant *F G* ſera de 30°. Ayant ainſi diviſé le quart de circonférence en arcs de 30°, il ſera facile d'avoir l'arc de 15°, en diviſant en deux parties égales, chacun des arcs *A F*, *FG*, & *G E* par la méthode donnée (53). On fera les mêmes opérations ſur chacun des trois autres quarts *A D*, *D B*, & *B E*.

Si on vouloit conduire cette diviſion jufqu'à l'arc de 1°, il faudroit y aller par tâtonnement, car il n'y a pas de méthode géométrique pour cela. Il y a cependant une méthode géométrique pour venir directement juſqu'à l'arc de 30', mais comme les propoſitions qui y conduiſent ne peuvent nous être d'aucune autre utilité, nous n'en parlerons point.

Remarquons ſeulement que ce que nous entendons ici par opérations géométriques, ce ſont celles dans leſquelles la choſe dont il s'agit, peut être exécutée par un nombre *déterminé* d'opérations faites avec la regle & le compas ſeuls.

Des Lignes proportionnelles.

95. Avant que d'entrer en matiere ſur ce qui regarde les lignes proportionnelles, nous placerons ici quelques propoſitions ſur les proportions, qui ſont une ſuite immédiate de ce que nous avons enſeigné dans l'Arithmétique. Mais pour abréger le diſcours, nous conviendrons, pour l'avenir, que lorſque deux quantités devront être ajoutées l'une à l'autre, nous indiquerons cette opération par ce ſigne $+$, qui équivaudra au mot *plus* ; ainſi $4 + 3$ ſignifiera 4 plus 3, ou 4 ajouté à 3, ou 3 ajouté à 4. Pareillement pour marquer la ſouſtraction, nous nous ſervirons de ce ſigne $-$, qui équivaudra au mot

moins ; ainſi 5 — 2 ſignifiera 5 moins 2 ; ou qu'on doit retrancher 2 de 5. Comme il n'eſt pas toujours queſtion de faire réellement les opérations, mais de raiſonner ſur des circonſtances de ces opérations, il eſt ſouvent plus utile de les repréſenter, que d'en donner le réſultat.

Pour marquer la multiplication, nous nous ſervirons de ce ſigne ×, qui équivaudra à ces mots *multiplié par* ; ainſi 5 × 4, ſignifiera 5 multiplié par 4.

Et pour marquer la diviſion, nous ferons comme en Arithmétique : nous écrirons le dividende & le diviſeur en forme de fraction dont le dividende ſera numérateur, & le diviſeur dénominateur ; ainſi $\frac{12}{7}$ marquera 12 diviſé par 7.

Cela poſé, nous avons vu (*Arith.* (185) que dans toute proportion, la ſomme des antécédens, eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent ; & qu'il en eſt de même de la différence des antécédens comparée à celles des conſéquens.

96. Nous pouvons donc conclure delà, que *dans toute proportion la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme la différence des antécédens eſt à la différence*

différence des conséquens ; car puisque dans la proportion 48 : 16 :: 12 : 4, par exemple, on a (*Arith.* 185).

$$48 + 12 : 16 + 4 :: 12 : 4$$

$$\&\ldots 48 - 12 : 16 - 4 :: 12 : 4$$

il est évident (à cause du rapport commun de 12 : 4) qu'on peut conclure 48 + 12 : 16 + 4 :: 48 — 12 : 16 — 4. Le raisonnement est le même pour toute autre proportion.

97. On peut donc, en mettant, dans cette derniere proportion, le 3^e^ terme à la place du second, & le second à la place du 3^e^, ce qui est permis (*Arith.* 182), dire aussi, que *la somme des antécédens, est à leur différence, comme la somme des conséquens, est à leur différence.*

98. Si dans la proportion 48 : 16 :: 12 : 4 on échange les places des deux moyens, ce qui donnera 48 : 12 :: 16 : 4, & qu'on applique à celle-ci la proposition qu'on vient de démontrer (96) ; on aura 48 + 16 : 12 + 4 :: 48 — 16 : 12 — 4 qui à l'égard de la proportion 48 : 16 :: 12 : 4, fournit cette proposition, *la somme des deux premiers termes d'une proportion, est à la somme des deux deniers termes, comme la différence des deux premiers, est à la diffé-*

rence des deux derniers ; ou (en mettant le troisieme terme à la place du second, & le second à la place du troisieme), *la somme des deux premiers termes, est à leur différence, comme la somme des deux derniers, est à leur différence.*

99. *Si un rapport est composé du produit de plusieurs autres rapports, on peut, à chacun des rapports composans, substituer un rapport exprimé par d'autres termes, pourvu que ces deux termes aient le même rapport que ceux auxquels on les substituera.*

Par exemple, dans le rapport de $6 \times 10 : 2 \times 5$, on peut, au lieu des facteurs 6 & 2 substituer 3 & 1, ce qui donnera le rapport composé $3 \times 10 : 1 \times 5$ qui est le même que le rapport $6 \times 10 : 2 \times 5$. En effet, puisque $6 : 2 :: 3 : 1$, on peut, sans changer cette proportion (*Arith.* 183), multiplier les antécédens par 10 & les conséquens par 5, & alors on aura $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$.

Il est facile de voir que ce raisonnement s'applique à tout autre rapport.

100. Si deux, ou un plus grand nombre de proportions sont telles que dans le premier rapport de l'une, l'antécédent se trouve égal au conséquent de l'au-

tre, on pourra, lorsqu'il s'agira de multiplier ces proportions par ordre, omettre les termes qui se trouveront communs d'antécédent à conséquent ; par exemple, si on a les deux proportions

$$6 : 4 :: 12 : 8$$
$$4 : 3 :: 20 : 15$$

on pourra conclure $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$.

Car quand on admettroit le multiplicateur commun 4, le rapport de 6×4 à 4×3 qu'on auroit alors, ne différeroit pas du rapport de 6 à 3 (*Arith.* 170) que l'on a en omettant ce facteur.

De même si on a $6 : 4 :: 12 : 8$

$$4 : 3 :: 20 : 15$$
$$3 : 7 :: 21 : 49$$

on en conclura $6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49$.

La même chose aura lieu pour les seconds rapports, & par la même raison.

Cette observation est utile pour trouver le rapport de deux quantités, lorsque ce rapport doit être composé ; parce qu'alors on compare chacune de ces quantités à d'autres quantités qu'on emploie comme auxiliaires, & qui ne doivent plus rester après la démonstration.

Nous allons, maintenant, transporter

aux lignes, les connoiſſances que nous avons tirées des nombres, ſur les proportions. Mais pour rendre nos démonſtrations plus courtes, & plus générales, nous ne donnerons aucune valeur particuliere à ces lignes, ſinon dans quelques applications; au reſte on peut toujours s'aider par des comparaiſons avec des nombres.

Les rapports que nous conſidérons ici ſont les rapports géométriques. Ainſi quand nous dirons une telle ligne eſt à une telle ligne, comme 5 eſt à 4, par exemple, on doit entendre que la premiere contient la ſeconde, autant que 5 contient 4.

101. *Si ſur un des côtés* AZ *d'un angle quelconque* ZAX (Fig. 55), *on marque les parties égales* AB, BC, CD, DE, *&c. de telle grandeur & en tel nombre qu'on voudra; & ſi après avoir tiré à volonté, par l'un* F *des points de diviſion, la ligne* FL *qui rencontre le côté* AX *en* L, *on mene par les autres points de diviſion, les lignes* BG, CH, DI, EK, *&c. paralleles à* FL; *je dis que les parties* AG, GH, HI, *&c. du côté* AX, *ſeront auſſi égales entr'elles.*

Menons par les points *G*, *H*, *I*, &c. les lignes *GM*, *HN*, *IO*, &c. paralleles à *AZ*; les triangles *ABG*, *GMH*, *HNI*, *IOK*, &c. feront tous égaux entr'eux; car 1°. les lignes *GM*, *HN*, *IO*, &c. font chacune, égales à *AB*, puifque (82) elles font égales à *BC*, *CD*, *DE*, &c; 2°. les angles *GMH*, *HNI*, *IOK*, &c. font tous égaux entr'eux, puifqu'ils font tous égaux à l'angle *ABG* (43); 3°. les angles *MGH*, *NHI*, *OIK*, &c. font tous égaux entr'eux, puifqu'ils font tous égaux à l'angle *BAG* (43).

Tous les triangles *BAG*, *MGH*, *NHI*, &c. ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; ils font donc tous égaux; donc les côtés *AG*, *GH*, *HI*, &c. de ces triangles font tous égaux entre eux; donc la ligne *AX* eft, en effet, divifée en parties égales, par les paralleles.

Il eft donc évident que fi *AB* eft telle partie que ce foit de *AG*, *BC* fera une femblable partie de *GH*, *CD*, fera une femblable partie de *HI*; fi, par exemple, *AB* eft les $\frac{2}{3}$ de *AG*, *BC* fera les $\frac{2}{3}$ de *GH*, & ainfi de fuite.

Il en fera de même de 2, 3, 4, &c. parties de *AF* comparées à 2, 3, 4, &c. parties de *AL*; donc une portion quelconque *AD* ou *DF* de la ligne *AF*, eft même partie de la portion correfpondanre *AI* ou IL de la ligne AL, que AB l'eſt de AG, c'eſt-à-dire ; que...

$$AD : AI :: AB : AG$$
$$\& \; DF : IL :: AB : AG.$$

On peut dire de même, que $AF : AL :: AB : AG$;

Donc (à cauſe du rapport de $AB : A$ u commun à ces trois proportions) on pe dire que... $AD : AI :: DF : IL$

$$\& \; AD : AI :: AF : AL.$$

102. *Donc ſi par un point* D (Fig. 56) *pris à volonté ſur un des côtés* AF *d'un triangle* AFL, *on mene une ligne* DI *parallele au côté* FL ; *les deux côtés* AF, AL *ſeront coupés proportionnellement*, c'eſt-à-dire, qu'on aura toujours $AD : AI :: DF : IL$

$$\& \; AD : AI :: AF : AL$$

ou bien, en échangeant les places des deux moyens (*Arith.* 182),

$$AD : DF :: AI : IL$$
$$\& \; AD : AF :: AI : AL$$

quel que ſoit d'ailleurs l'angle FAL.

En effet on peut toujours concevoir le côté AF coupé en tel nombre de parties égales qu'on voudra, & par conſéquent en un nombre infini de parties égales : or dans ce cas le point D ne pouvant manquer d'être un des points de diviſion, le raiſonnement de l'article précédent s'applique ici mot à mot.

103. Donc; 1°. *Si d'un point* A *pris à volonté hors de la ligne* GL (Fig. 57) *on tire à différens points de cette ligne, plusieurs lignes* AG, AH, AI, AK, AL; *toute parallele* BF *à la ligne* GL, *coupera toutes ces lignes, en parties proportionnelles*, c'est-à-dire, qu'on aura ....

$$AB : BG :: AC : CH :: AD : DI :: AE : EK :: AF : FL$$
$$\& \; AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: AE : AK :: AF : AL$$

Car en considérant successivement les angles *GAH*, *GAI*, *GAK*, *GAL*, comme on fait l'angle *FAL* dans la Figure 56, on démontrera de la même maniere que tous ces rapports sont égaux.

104. 2°. *La ligne* AD (Fig. 56*) *qui divise en deux parties égales un angle* BAC *d'un triangle, coupe le côté opposé* BC, *en deux parties* BD, DC, *proportionnelles aux côtés correspondans* AB, AC; *c'est-à-dire, de maniere qu'on a* BD : DC :: AB :: AC.

Car si par le point *B*, on mene *BE* parallele à *AD*, & qui rencontre *CA* prolongé, en *E*; les lignes *CE*, *CB*, étant alors coupées proportionnellement (102) on aura *BD* : *CD* :: *AE* : *AC*.

Or il est facile de voir que *AE* est égale à *AB*; car à cause des paralleles *AD* & *BE*, l'angle *E* eſt égal à l'angle *D A C* (37), & l'angle *E B A* eſt égal à ſon alterne *B A D* (38); donc puiſque *D A C* & *B A D* ſont égaux comme étant les moitiés de *B A C*, les angles *E* & *EBA* ſeront égaux; donc les côtés *AE* & *AB* ſont auſſi égaux ; donc la proportion *BD* : *CD* : : *AE* : *AC*, ſe change en celle-ci *B D* : *C D* : : *A B* : *A C*.

105. *Si on coupe les lignes* A F *&* A L (Fig. 56), *proportionnellement, aux points* D *&* I, *c'eſt-à-dire, de maniere que* A F : A D : : AL : AI, *la ligne* D I *ſera parallele à* F L.

Car la partie de *A L* que couperoit la parallele menée du point *D*, doit (102) être contenue dans *A L*, autant que *A D* l'eſt dans *A F*; or, par la ſuppoſition, *A I* eſt contenue dans *A L* préciſément ce même nombre de fois ; donc cette partie ne peut être autre que *A I*.

106. Donc *ſi on coupe proportionnellement aux points* B, C, D, E, F (Fig. 57), *les lignes* AG, AH, AI, AK, AL, *menées du point* A *à différens points de la ligne* GL, *la ligne* BCDEF *qui paſſera par tous ces points, ſera une ligne droite parallele à* GL.

107. Les propoſitions enſeignées, (102 *& ſuiv.*) ſont également vraies, lorſ-

que la ligne *BF*, au lieu d'être entre le point *A* & la ligne *GL*, comme dans la Figure 57, tombe au-delà du point *A*, comme dans la Figure 58. Car tout ce qui a été dit de la Figure 55, & qui sert de base aux propositions établies (102 & *suiv.*), auroit également lieu pour les paralleles qui couperoient *ZA* & *XA* prolongées dans la Figure 55.

De la similitude des Triangles.

108. On appelle côtés *homologues* de deux triangles, ou en général, de deux figures semblables, ceux qui ont des positions semblables, chacun dans la figure à laquelle il appartient.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, & sont, par conséquent, semblables.*

Si les deux triangles *ADI*, *AFL* (*Fig.* 59 & 60), sont tels que l'angle *A* du premier soit égal à l'angle *A* du second, l'angle *D* égal à l'angle *F*, & l'angle *I* égal à l'angle *L*, je dis qu'on aura $AD : AF :: AI : AL :: DI : FL$.

Car puisque l'angle *A* du premier est égal à l'angle *A* du second, on peut appliquer ces deux triangles l'un ſur l'autre de la maniere repréſentée dans la Figure 56; alors puiſque l'angle D eſt égal à l'angle F, les lignes DI & FL ſeront paralleles (42); donc ſelon ce qui a été dit (102), on aura $AD : AF :: AI : AL$.

Tirons maintenant par le point I, la droite IH parallele à AF; ſelon ce qui a été dit (102), on voit que $AI : AL :: FH : FL$, (ou à cauſe que FH eſt égal à DI (82) $:: DI : FL$; donc $AD : AF :: AI : AL :: DI : FL$.

Comme on peut échanger les places des moyens, on peut dire auſſi $AD : AI :: AF : AL$, & $AI : DI :: AL : FL$.

110. Puiſque (74) lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſieme angle eſt néceſſairement égal au troiſieme angle; concluons-en que *deux triangles ſont ſemblables lorſqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

111. On a vu (43) que deux angles qui ont les côtés paralleles, & qui ſont tournés d'un même côté, ſont égaux; donc *deux triangles qui ont les côtés paralleles, ont les angles égaux chacun à chacun, & ont, par conſéquent,* (109) *les côtés proportionnels.*

Donc *auſſi deux triangles qui ont les côtés* *perpendiculaires chacun à chacun, ont aussi ces mêmes côtés proportionnels;* car si on fait faire un quart de révolution, à l'un de ces triangles, ses côtés deviendront paralleles à ceux du second.

112. *Si de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (Fig. 43), *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC (*qu'on appelle* hypothénuse), 1°. *les deux triangles* ADB, ADC *seront semblables entr'eux & au triangle* BAC. 2°. *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD *&* DC *de l'hypoténuse.* 3°. *Chaque côté* AB *ou* AC *de l'angle droit, sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse & le segment correspondant* BD *ou* DC.

Car les deux triangles *ADB*, *ADC*, ont chacun un angle droit en *D*, comme le triangle *BAC* en a un en *A*; d'ailleurs ils ont de plus chacun un angle commun avec ce même triangle *BAC*, puisque l'angle *B* appartient tout à la fois au triangle *ADB* & au triangle *BAC*; pareillement l'angle *C* appartient tout à la fois au triangle *ADC* & au triangle *BAC*; donc (110) ces trois triangles sont semblables. Donc (109) comparant les côtés homologues des deux triangles *ADB* & *ADC*, on aura . . . .

$$BD : AD :: AD : DC$$

comparant les côtés homologues des deux triangles *ADB*, *BAC*, on aura

$$BD : AB :: AB : BC$$

enfin, comparant les côtés homologues des triangles *ADC* & *BAC*; on aura . . . .

$$CD : AC :: AC : BC$$

où l'on voit que *AD* eſt (*Arith.* 174) moyenne proportionnelle entre *BD* & *DC*; *AB* moyenne proportionnelle entre *BD* & *BC*; & enfin *AC* moyenne proportionnelle entre *CD* & *BC*.

113. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont auſſi les deux autres angles égaux, & ſont, par conſéquent, ſemblables.*

Si les deux triangles *ADI*, *AFL* (*Fig.* 59 & 60), ſont tels que l'angle *A* du premier ſoit égal à l'angle *A* du ſecond, & qu'en même tems les côtés qui comprennent ces angles, ſoient tels qu'on ait $AD : AF :: AI : AL$; je dis qu'ils ſeront ſemblables, c'eſt-à-dire, qu'ils auront les autres angles égaux chacun à chacun, & leurs troiſiemes côtés *DI* & *FL* en même rapport que *AD* & *AF*, ou que *AI* & *AL*.

Car on peut appliquer l'angle *A* du

triangle ADI ſur l'angle A du triangle AFL, de la maniere repréſentée par la Figure 56. Or puiſqu'on ſuppoſe que $AD : AF :: AI : AL$, les deux droites AF & AL ſont donc coupées proportionnellement aux points D & I; donc DI eſt parallele à FL (105); donc (37) l'angle AFL eſt égal à l'angle ADI, & l'angle ALF égal à l'angle AID.

Delà & de ce qui a été dit (109), il ſuit que $DI : FL :: AD : AF :: AI : AL$.

114. *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ont les angles égaux chacun à chacun, & ſont, par conſéquent, ſemblables.*

Si on ſuppoſe (*Fig.* 61 & 62) que $DE : AB :: EF : BC :: DF : AC$; je dis que l'angle D eſt égal à l'angle A, l'angle E égal à l'angle B, & l'angle F égal à l'angle C.

Imaginons qu'on ait conſtruit ſur DE, un triangle DGE, dont l'angle DEG ſoit égal à l'angle B, & l'angle GDE à l'angle A; le triangle DEG ſera ſemblable au triangle ABC (110); donc (109) $DE : AB :: GE : BC :: DG : AC$; mais par la ſuppoſition on a $DE : AB :: EF : BC :: DF : AC$; donc à cauſe du rapport commun de $DE:AB$, on aura ces deux proportions :

$$GE:BC::EF:BC$$
$$\&\ DG:AC::DF:AC.$$

Donc, puiſque les deux conſéquens ſont égaux entr'eux dans chacune de ces deux proportions, les antécédens ſeront auſſi égaux entr'eux; donc GE eſt égal à EF, & DG égal à DF. Le triangle DEG a donc ſes trois côtés égaux à ceux du triangle DEF; il eſt donc (83) égal à ce triangle DEF; or on vient de voir que le triangle DEG eſt ſemblable à ABC; donc DEF eſt auſſi ſemblable à ABC.

115. Nous avons prouvé ci-deſſus (111) que quand la ligne DI (*Fig.* 56), eſt parallele au côté FL, les deux triangles ADI, AFL ſont ſemblables; comme cette vérité a lieu, de quelque grandeur que puiſſe être l'angle A, on doit donc conclure (*Fig.* 57) que les triangles AGH, AHI, AIK, AKL, ſont ſemblables aux triangles ABC, ACD, ADE, AEF chacun à chacun, & que par conſéquent, (109) $KL:EF::AK:AE::KI:DE::AI:AD::IH:$

$CD :: AH : AC :: GH : BC$; donc, en ne tirant de cette ſuite de rapports, que ceux qui renferment des parties des lignes GL & BF, on aura $KL : EF :: KI : DE :: IH : CD :: GH : BC$; c'eſt-à-dire, que *ſi d'un point* A, *on tire à différens points d'une ligne droite* GL, *pluſieurs autres lignes droites ; ces lignes couperont toute parallele à* GL, *de la même maniere qu'elles coupent* GL, *c'eſt-à-dire, en parties qui auront entr'elles les mêmes rapports que les parties correſpondantes de* GL.

116. Les principes que nous venons d'expoſer, ſont la baſe de toutes les parties des Mathématiques théoriques ou pratiques. Comme il importe de ſe rendre ces principes familiers, nous inſiſterons un peu ſur leur uſage, tant par cette vue, que parce que cela nous fournira l'occaſion d'expliquer pluſieurs pratiques utiles.

117. La propoſition enſeignée (101) fournit un moyen bien naturel de diviſer une ligne donnée en parties égales, ou en parties qui aient entr'elles des rapports donnés. Suppoſons que AR (*Fig.* 55) ſoit une ligne qu'on veut diviſer en deux parties qui aient entr'elles un rapport

donné, par exemple, celui de 7 à 3; on tirera par le point *A*, & sous tel angle qu'on voudra, une ligne indéfinie *AZ*, & ayant pris arbitrairement une ouverture de compas *AB*, on la portera dix fois le long de *AZ*; je suppose que *Q* soit l'extrémité de la derniere partie; on joindra les extrémités *Q* & *R* de la ligne *AQ*, & de la ligne donnée *AR*; alors si par le point *D*, extrémité de la troisieme division, on tire *DI* parallele à *QR*, la ligne *AR* sera divisée en deux parties *RI* & *AI* qui seront entr'elles : : 7 : 3, car (101 & 102) elles sont entr'elles : : *DQ* : *AD* que l'on a faites de 7 & de 3 parties.

On voit par-là que si l'on vouloit diviser la ligne *AR* en un plus grand nombre de parties, par exemple, en 5 parties qui fussent entr'elles comme les nombres 7, 5, 4, 3, 2 : on ajouteroit tous ces nombres entr'eux, ce qui donneroit 21; on porteroit 21 ouvertures de compas sur la ligne *AZ*, & on tireroit des paralleles à la ligne *QR* par les extrémités de la 7^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e}, 2^{e} division.

118. Si les rapports étoient donnés en lignes, on mettroit toutes ces lignes bout-à-bout sur la ligne *AZ*.

On

On voit donc ce qu'il y auroit à faire, si l'on vouloit diviser la ligne AR en parties égales.

Mais quand les parties de la ligne qu'on doit diviser, doivent être petites, ou quand cette ligne elle-même est petite, le plus léger défaut dans les paralleles influe beaucoup sur l'égalité ou l'inégalité des parties, c'est pourquoi il ne sera pas inutile d'exposer la méthode suivante.

119. fg (*Fig.* 63) est la ligne qu'il s'agit de diviser en parties égales, en 6, par exemple : on tirera une ligne indéfinie BC sur laquelle on portera six fois de suite une même ouverture de compas, arbitraire : soit AC la ligne qui comprend ces six parties ; on décrira sur AC un triangle équilatéral BAC, en décrivant des deux points B & C comme centres, & de l'intervalle BC comme rayon, deux arcs qui se coupent en A. Sur les côtés AB, AC, on prendra les parties AF, AG égales chacune à fg; & ayant tiré FG, cette ligne sera égale à fg; on menera du point A à tous les points de division de BC, des lignes droites, qui couperont FG de la même maniere que BC est coupée.

Car ces lignes AF, AG étant égales entr'elles, & les lignes AB, AC aussi égales entr'elles, on a $AB : AF :: AC : AG$; donc AB, AC sont coupées proportionnellement en F & G; donc FG est parallele à BC, & par conséquent (111) le triangle FAG est semblable à ABC; donc FAG est équilatéral; donc AG est égal à AF; & par conséquent à fg; de plus FG étant parallele à BC, ces deux lignes (115) doivent être coupées proportionnellement par les lignes menées du point A à la droite BC.

Ce que nous venons d'exposer peut servir à former & à diviser l'échelle qui doit servir lorsqu'on veut réduire une figure, du grand au petit; mais l'échelle la plus commode dans un grand nombre d'opérations, est celle qu'on appelle échelle de *dixme :* voici comment elle se construit. Aux extrémités A & B de la ligne AB (*Fig.* 64) qu'on veut diviser en 100 parties, on éleve les perpendiculaires AC, BD sur chacune desquelles on porte dix ouvertures de compas égales entr'elles, mais de grandeur arbitraire; ayant tiré CD, on divise AB en dix parties, & on porte ces parties sur CD, après quoi on tire des transversales, comme on le voit dans la figure; & par les points de division correspondans de *CA* & de *BD*, on tire des lignes droites qui sont autant de paralleles à *AB*; alors on est dans le même cas que si l'on avoit divisé *AB* en 100 parties: si l'on veut, par exemple, avoir 47 parties dont *AB* en contient 100, je prends sur la ligne qui passe au n° 7, la partie 7 *H* depuis *CA* jusqu'à la transversale qui passe par le n° 40, & ainsi pour tout autre nombre.

En effet, à cause des triangles semblables *C7v*, *CAx*, il est évident que 7*v* contient 7 parties dont *Ax* en contiendroit 10; donc puisque *vH* contient 4 intervalles égaux à *Ax*, la ligne entiere 7 *H* vaut 47 parties dont *Bx* en contiendroit 10, c'est-à-dire, 47 parties dont *AB* en contiendroit 100.

120. La proposition démontrée (102) peut servir à *trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données* ab, cd, ef (*Fig.* 56) c'est-à-dire, une ligne qui soit le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers seroient *ab*, *cd*, *ef*. Pour cet effet, après avoir tiré deux droites indéfinies *AF*, *AL*, qui fassent entr'elles

tel angle qu'on voudra, on portera *ab* de *A* en *D*, & *cd* de *A* en *F*; on portera pareillement *ef* de *A* en *I*; & ayant joint les deux points *D* & *I* par la droite *DI*, on menera par le point *F* la ligne *FL* parallele à *DI* qui déterminera *AL* pour la quatrieme proportionnelle cherchée.

On peut aussi, en vertu de la proposition enseignée (109), s'y prendre de cette autre maniere. Prendre sur une ligne indéfinie *AF* (*Fig.* 56), les deux parties *AD*, *AF* égales à *ab*, *cd*, respectivement; & ayant tiré *DI* égal à *ef*, & sous tel angle qu'on voudra, on tirera par le point *A* & le point *I*, la droite *AL* que l'on coupera par une ligne *FL* parallele à *DI*; cette parallele sera le quatrieme terme cherché.

Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, le quatrieme terme s'appelle, alors, *troisieme proportionnel*, parce qu'il n'y a que trois quantités différentes dans la proportion. Ainsi quand on demande une troisieme proportionnelle à deux lignes données, il faut entendre qu'on demande le quatrieme terme d'une proportion dans laquelle la seconde des deux lignes données fait l'office des deux moyens, & l'opération est la même que celle qu'on vient d'enſeigner.

121. Les proportions enſeignées (109, 113 & 114) peuvent ſervir à réſoudre ce problême général; *Etant données trois des ſix choſes* (angles & côtés) *qui entrent dans un triangle, trouver les trois autres, pourvu que parmi les trois choſes connues il y ait un côté.*

Nous allons en donner quelques exemples.

Suppoſons qu'étant au point *B* (*Fig.* 65) dans la campagne, on veut ſavoir quelle diſtance il y a de ce point *B* à un objet *A* dont on ne peut approcher.

On plantera un piquet à une certaine diſtance *BC* que l'on meſurera, & qu'on fera à peu-près égale à *BA* eſtimée groſſiérement. Puis avec le graphometre que nous avons décrit (23), on meſurera les angles *ABC*, *ACB* que font avec la ligne *BC* les deux lignes qu'on imaginera aller de ſes extrémités au point *A*. Cela poſé, on tirera ſur le papier une ligne *bc* (*Fig.* 66) qu'on fera d'autant de parties d'une échelle que l'on conſtruira arbitrairement, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de pieds dans *BC*, ſi l'on a meſuré en pieds; & avec le rapporteur décrit (22) ou fera au point b, un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle B ; & au point c un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle C; alors les deux lignes ab, ac se rencontreront en un point a qui repré-ſentera le point A ; enſorte que ſi vous meſurez ab ſur votre échelle, le nombre de parties que vous lui trouverez, ſera le nombre de pieds que contient AB. Car les deux angles b & c ayant été faits égaux aux deux angles B & C, le triangle bac eſt ſemblable au triangle BAC (110), & par conſéquent leurs côtés ſont proportionnels.

C'eſt ainſi qu'on peut meſurer la diſtance d'une île à une Côte, lorſqu'on peut obſerver cette île de deux points de cette Côte, dont la diſtance ſeroit connue.

122. Par la propoſition démontrée (114) on peut ſe diſpenſer de meſurer les angles, dans le cas dont nous venons de parler. En effet, il ſuffit, après avoir planté un piquet en un point E (*Fig.* 65) qui ſoit ſur l'alignement des points A & B, & un autre en un point F qui ſoit ſur l'alignement des deux points A & C, il ſuffit, dis-je, de meſurer les lignes BC, BE, CE, BF & CF; alors on fera un triangle bec

(*Fig. 66*) dont les côtés *bc*, *be*, *ce* aient autant de parties d'une même échelle, que *BC*, *BE*, *CE* ont de pieds; on fera de même ſur *bc* un autre triangle *bcf* dont les côtés *bf*, *cf*, aient autant de parties de l'échelle, que *BF* & *CF* ont de pieds; alors prolongeant les côtés *be* & *cf*, ils ſe rencontreront en un point *a*, qui repréſentera le point *A*; enſorte que meſurant *ba* ſur l'échelle, on jugera par le nombre de parties qu'on trouvera, combien de pieds doit avoir *AB*.

En effet, le triangle *bec* ayant les côtés proportionnels à ceux du triangle *BEC*, ces deux triangles doivent avoir les angles égaux; donc l'angle *EBC* ou *ABC* eſt égal à l'angle *ebc* ou *abc*: la même raiſon prouve que l'angle *FCB* ou *ACB* eſt égal à l'angle *fcb* ou *acb*; donc les deux triangles *ACB* & *acb* ſont ſemblables.

On voit en même tems, que par cette conſtruction on peut déterminer les angles *ABC* & *ACB* en meſurant, avec le rapporteur, les angles *abc* & *acb* ſur le papier.

Au reſte, quoique ces expédiens & beaucoup d'autres qu'on peut facilement imaginer d'après eux, puiſſent être ſouvent utiles, nous ne nous y arrêterons pas plus long-tems, parce que la Trigonométrie que nous enseignerons par la suite, nous fournira des moyens plus expéditifs & plus susceptibles de précision; car, quoique les opérations que nous venons de décrire, soient rigoureusement exactes dans la théorie, elles ne donnent, cependant, qu'une exactitude assez bornée dans la pratique, parce que les erreurs qu'on peut commettre dans la figure *a b c*, toutes petites qu'elles puissent être, peuvent influer sensiblement sur les conclusions qu'on en tire pour la figure *A B C* qui est toujours incomparablement plus grande.

Des lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

123. Deux lignes sont dites coupées en raison *inverse*, ou *réciproque*, lorsque pour former une proportion avec les parties de ces lignes, les deux parties de l'une se trouvent être les extrêmes, & les deux parties de l'autre, les moyens de la proportion.

Et deux lignes sont dites réciproquement proportionnelles à leurs parties, lorſqu'une de ces lignes & ſa partie forment les extrêmes, tandis que l'autre ligne & ſa partie forment les moyens.

124. *Deux cordes* AC *&* BD (Fig. 67) *qui ſe coupent dans le cercle, en quelque point* E *que ce ſoit, & ſous quelque angle que ce ſoit, ſe coupent toujours en raiſon réciproque.* C'eſt-à-dire, que AE : BE :: DE : CE.

Car ſi l'on tire les cordes *AB*, *CD*, on forme deux triangles *BEA*, *CED* qu'il eſt aiſé de démontrer être ſemblables, puiſqu'outre l'angle *BEA* égal à *CED* (20) l'angle *ABE* ou *ABD* eſt égal à l'angle *DCE* ou *DCA*; car ces deux angles ont leur ſommet à la circonférence, & s'appliquent ſur le même arc *AD* (63). Donc les triangles *BEA* & *CED* ſont ſemblables (110); donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels, c'eſt-à-dire, que *AE* : *BE* :: *DE* : *CE*; où l'on voit que les parties de la corde *AC* ſont les extrêmes; & les parties de la corde *BD* ſont les moyens.

125. Puiſque la propoſition qu'on vient de démontrer, a lieu, quelque part que ſoit le point *E*, & ſous quelque angle que

ſe coupent les deux cordes *A C* & *B D*, elle a donc lieu auſſi lorſque les deux cordes (*Fig.* 68) ſont perpendiculaires l'une à l'autre, & que l'une des deux, *A C*, par exemple, paſſe par le centre; or, dans ce cas, la corde *B D* étant coupée en deux parties égales (51), les deux termes moyens de la proportion *A E* : *B E* : : *D E* : *C E*, deviennent égaux, & la proportion ſe change en cette autre *AE* : *BE* : : *BE* : *CE*; donc *toute perpendiculaire* B E *abaiſſée d'un point* B *de la circonférence, ſur le diametre, eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties* A E, C E *de ce diametre.*

126. Cette propoſition a pluſieurs applications utiles. Nous n'en expoſerons qu'une pour le préſent. C'eſt pour *trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données*, a e, e c (*Fig.* 70).

On tirera une droite indéfinie *A C* ſur laquelle on placera bout à bout, deux lignes *A E*, *E C* égales aux lignes *a e*, *e c*; & ayant décrit ſur la totalité *A C* comme diametre, le demi-cercle *A B C*, on élevera au point de jonction *E*, la perpendiculaire *E B* ſur *A C*; cette perpendiculaire ſera la moyenne proportionnelle demandée.

127. *Deux sécantes* AB, AC, (Fig. 69) *qui partant d'un même point* A *hors du cercle, vont se terminer à la partie concave de la circonférence, sont toujours réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AD, AE, *à quelque endroit que soit le point* A *hors du cercle, & quelque angle que fassent entr'elles ces deux sécantes.*

Concevez les cordes *CD* & *BE*, vous aurez deux triangles *ADC*, *AEB* dans lesquels 1°, l'angle *A* est commun : 2°, l'angle *B* est égal à l'angle *C*, parce que l'un & l'autre ont leur sommet à la circonférence, & embrassent le même arc *DE* (63); donc (110) ces deux triangles sont semblables, & ont par conséquent les côtés proportionnels; donc *AB* : *AC* : : *AE* : *AD*, où l'on voit que la sécante *AB* & sa partie extérieure *AD* forment les extrêmes, tandis que la sécante *AC* & sa partie extérieure *AE* forment les moyens.

128. Puisque cette proposition est vraie, quel que soit l'angle *BAC*; si l'on conçoit que le côté *AB* demeurant fixe, le côté *AC* tourne autour du point *A* pour s'écarter de *AB*, les deux points de section *E* & *C* s'approcheront conti-

nuellement l'un de l'autre; jusqu'à ce qu'enfin la droite AC tombant sur la tangente AF, ces deux points se confondront, & AC, AE deviendront chacune égale à AF; ensorte que la proportion $AB : AC :: AE : AD$ deviendra $AB : AF :: AF : AD$; donc.

129. *Si d'un point* A, *pris hors du cercle, on mene une secante quelconque* AB *& une tangente* AF, *cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la secante* AB *& la partie extérieure* AD *de cette même sécante.*

130. Cette proposition peut, entre autres usages, servir à *couper une ligne en moyenne & extrême raison.* On dit qu'une ligne AB (*Fig.* 71) est coupée en moyenne & extrême raison, lorsqu'elle est coupée en deux parties AC, BC, telles que l'une BC de ces parties est moyenne proportionnelle entre la ligne entiere AB & l'autre partie AC, c'est-à-dire, telles que l'on ait

$$AC : BC :: BC : AB.$$

Voici comment on y parvient. On éleve à l'une A des extrémités, une perpendiculaire AD égale à la moitié de AB: du point D comme centre, & d'un rayon égal à AD; on décrit une circonférence qui coupe en E la ligne BD qui joint les deux points B & D. Enfin on porte BE de B en C, & la ligne AB eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, au point C.

En effet, la ligne AB étant perpendiculaire ſur AD, eſt tangente (48); & puiſque BF eſt ſécante, on a (129) $BF : AB :: AB : BE$ ou BC. Donc (*Arith.* 185) $BF—AB : AB—BC :: AB : BC$; or AB eſt égal à FE, puiſque AB eſt double de AD; donc $BF—AB$ eſt égal à BE ou BC; & comme $AB—BC$ eſt AC, on a donc $BC : AC :: AB : BC$, ou (*Arith.* 181) $AC : BC :: BC : AB$.

Des Figures ſemblables.

131. Deux figures d'un même nombre de côtés, ſont dites *ſemblables*, lorſqu'elles ont les angles homologues égaux, & les côtés homologues proportionnels.

Les deux figures $ABCDE$, $abcde$, (*Fig.* 72 & 73) ſont ſemblables ſi l'angle A eſt égal à l'angle a; l'angle B égal à l'angle b; l'angle C, égal à l'angle c, & ainſi de ſuite; & ſi en même tems, le côté AB contient le côté ab, autant que BC contient bc, autant que CD contient cd, & ainſi de ſuite.

Ces deux conditions ſont néceſſaires à

la fois, dans les figures de plus de trois côtés. Il n'y a que dans les triangles où l'une de ces conditions suffise, parce qu'elle entraîne nécessairement l'autre (109 & 114).

132. *Si de deux angles homologues* A *&* a, *de deux polygones semblables, on mene des diagonales* AC, AD, ac, ad *aux autres angles; les deux polygones seront partagés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.*

Car l'angle B est (par la supposition) égal à l'angle b & le côté $AB : ab :: BC : bc$; donc les deux triangles ABC, abc qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables (113); donc l'angle BCA est égal à l'angle bca, & $AC : ac :: BC : bc$.

Si des angles égaux BCD, bcd, on ôte les angles égaux BCA, bca, les angles restans ACD, acd, seront égaux. Or $BC : bc :: CD : cd$; donc, puisqu'on vient de prouver que $BC : bc :: AC : ac$, on aura $CD : cd :: AC : ac$; donc les deux triangles ACD, acd sont aussi semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés ptoportionnels. On prouvera la même chose, & de la même maniere, pour les triangles *ADE* & *ade*, & pour tous les autres triangles qui ſuivroient, ſi ces polygones avoient un plus grand nombre de côtés.

133. *Si deux polygones* ABCDE, abcde *ſont composés d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, & ſemblablement diſpoſés, ils ſeront ſemblables.*

Car les angles *B* & *E* ſont égaux aux angles *b* & *e*, dès que les triangles ſont ſemblables; & par cette même raiſon, les angles partiels *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE* ſont égaux aux angles partiels *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; donc les angles totaux *BCD*, *CDE* ſont égaux aux angles totaux *bcd*, *cde*, chacun à chacun. D'ailleurs la ſimilitude des triangles fournit cette ſuite de rapports égaux $AB:ab::BC:bc::AC:ac::CD:cd::AD:ad::DE:de::AE:ae$; ne tirant de cette ſuite que les rapports qui renferment les côtés des deux polygones, on a $AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de::AE:ae$. Donc ces polygones ont auſſi les côtés homologues proportionnels; donc ils ſont ſemblables.

Donc pour conſtruire une figure ſemblable à une figure propoſée *ABCDE*

(*Fig.* 72), & qui ait pour côté homologue à AB, une ligne donnée; on portera cette ligne donnée ſur AB, de A en f; par le point f, on tirera fg parallele à BC, & qui rencontre AC en g; par le point g, on menera gh parallele à CD, & qui rencontre AD en h; enfin par le point h, on tirera hi parallele à DE, & l'on aura le polygone $Afghi$ ſemblable à $ABCDE$.

134. *Les contours de deux figures ſemblables ſont entr'eux comme les côtés homologues de ces figures*; c'eſt-à-dire, que la ſomme des côtés de la figure $ABCDE$ contient la ſomme des côtés de la figure $abcde$, autant que le côté AB contient le côté ab.

Car dans la ſuite de rapports égaux $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae$, la ſomme des antécédens, eſt (*Arith.* 186), à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent, :: $AB : ab$; or il eſt évident que ces ſommes ſont les contours des deux figures.

135. Si l'on conçoit la circonférence $ABCDEFGH$ (*Fig.* 74) diviſée en tel nombre de parties égales qu'on voudra; & ſi ayant tiré du centre I, aux points de diviſion, des rayons IA, IB, &c. on décrit d'un autre rayon Ia, la circonfé-

rence

rence *a b c d e f g h*, rencontrée par ces rayons aux points *a*, *b*, *c*, *d*, &c; il eſt évident que ſi, dans chaque circonférence, on joint les points de diviſion par des cordes, on formera deux polygones ſemblables; car les triangles *A B I*, *a b I*, &c, ſont ſemblables, puiſqu'ils ont un angle commun en *I* compris entre deux côtés proportionnels; car *I A* étant égal à *I B*, & *I a* égal à *I b*, on a évidemment *A I* : *B I* : : *a I* : *b I*, & la même choſe ſe démontre de même pour les autres triangles. Delà & de ce qui vient d'être dit (134), on conclura donc que le contour *ABCDEFGH* eſt au contour *a b c d e f g h* : : *A B* : *a b*, ou (à cauſe des triangles ſemblables *A B I*, *a b I*) : : *A I* : *a I*. Comme cette ſimilitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu lorſque le nombre des côtés de chacun ſera multiplié à l'infini : or dans ce cas on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence & le polygone inſcrit ; donc les circonférences mêmes *ABCDEFGH*, *a b c d e f g h* feront entr'elles : : *A I* : *a I*, c'eſt-à-dire, comme leurs rayons, & par conſéquent auſſi comme leurs diametres.

136. Concluons donc, 1°, qu'on *peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.*

2°. *Les cercles sont des figures semblables.*

3°. *Les circonférences des cercles sont en-tr'elles comme leurs rayons, ou comme leurs diametres.*

137. En général, si dans deux polygones semblables, on tire deux lignes également inclinées à l'égard de deux côtés homologues, & terminées à des points semblablement placés à l'égard de ces côtés, ces lignes qu'on appelle *lignes homologues*, seront entr'elles dans le rapport de deux côtés homologues quelconques. Car dès qu'elles font des angles égaux avec deux côtés homologues, elles feront aussi des angles égaux avec deux autres côtés homologues quelconques, puisque les angles des deux polygones semblables, sont égaux chacun à chacun; or si dans ce cas elles n'étoient pas dans le même rapport que deux côtés homologues, il est facile de sentir que les points où elles se terminent, ne pourroient pas être semblablement placés comme on le suppose.

138. C'est sur les principes que nous

venons de poser, concernant les figures semblables, que porte, en grande partie, l'art de lever les plans. Nous disons, en grande partie, parce que, lorsque l'espace dont il s'agit de former le plan, est d'une très-grande étendue, comme l'Europe, la France, &c, l'art d'en fixer les points principaux tient à d'autres connoissances, dont ce n'est point encore ici le lieu de parler. Mais pour les détails d'un pays, d'une côte, d'une rade, &c, on peut les déterminer & les représenter ensuite sur un plan, de la maniere que nous allons décrire. Observons auparavant que nous supposons ici, que tous les angles qu'il va être question de mesurer, sont tous dans un même plan horizontal, ou à peu-près. S'ils n'y étoient point, il faudroit, avant de former le plan, les y réduire; nous en donnerons les moyens dans la Trigonométrie.

Supposons donc que *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, (*Fig.* 75) soient plusieurs objets remarquables dont on veut représenter les positions respectives sur un plan.

On dessinera grossierement sur un papier, ces objets, dans les positions qu'on leur juge à l'œil; & pour cet effet, on se transportera aux différents lieux où il sera nécessaire pour prendre une connoissance légere de tous ces objets. Ce premier dessin qu'on appelle un *croquis*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On mesurera une base *A B*, dont la longueur ne soit pas moindre que la dixieme ou la neuvieme partie de la distance des deux objets les plus éloignés qu'on puisse voir de ses extrémités, & qui soit telle en même-temps, que de ces mêmes extrémités, on puisse appercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra; alors avec un instrument propre à mesurer les angles, avec le graphometre, par exemple, on mesurera au point *A* les angles *EAB*, *FAB*, *GAB*, *CAB*, *DAB* que font au point *A* avec la ligne *A B*, les lignes qu'on imaginera menées de ce point, aux objets *E*, *F*, *G*, *C*, *D* que je suppose pouvoir être apperçus des extrémités *A* & *B* de la base. On mesurera de même au point *B*, les angles, *E B A*, *FBA*, *GBA*, *CBA*, *DBA*, que font en ce point, avec la ligne *A B*, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point *B*, aux mêmes objets que ci-dessus. S'il y a des objets, comme *H*, *I*, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités *A* & *B*, on se transportera en deux des lieux *E* & *F* qu'on vient d'observer, & d'où l'on puisse voir ces deux points *H* & *I*; alors regardant *E F* comme une base, on mesurera les angles *HEF*, *IEF*, *HFE*, *IFE*, que font avec cette nouvelle base, les lignes qui iroient de ses extrémités aux deux objets *H* & *I*; enfin s'il y a quelqu'autre objet, comme *K*, qu'on n'ait pu voir ni des extrémités de *A B*, ni de celles de *E F*, on prendra encore pour base quelque autre ligne comme *F G* qui joint deux des points observés, & on mesurera de même à ses extrémités les angles *KFG*, *KGF*.

Toutes ces opérations faites, & après avoir déterminé & construit l'échelle du plan qu'on se propose de faire, on tirera sur ce plan, une ligne *a b* qu'on fera d'autant de parties de l'échelle, que l'on a trouvé de toises ou de pieds dans *A B*, selon qu'on aura mesuré en toises ou en pieds. On fera ensuite au point *a*, avec le rapporteur, un angle *b a e*, d'autant de degrés & minutes qu'on en a trouvé pour

BAE ; & au point *b*, un angle *e b a* d'autant de degrés & minutes qu'on en a trouvé à l'angle *E B A* ; les deux lignes *a e*, *b e*, qui formeront ces angles avec *a b*, se couperont en un point *e* qui représentera, sur la carte, la position de l'objet *E* sur le terrein ; car, par cette construction, le triangle *a b e* sera semblable au triangle *ABE*, puisqu'on a fait deux angles de celui-là égaux à deux angles de celui-ci (110). On se conduira précisément de la même maniere pour déterminer les points *f*, *g*, *d*, *c* qui doivent représenter les points ou objets *F*, *G*, *D*, *C*. Pour avoir ensuite les points *h*, *i* & *k*, on tirera les lignes *e f* & *f g* que l'on considérera comme bases ; & on déterminera la position des points *h* & *i* à l'égard de *e f*, & du point *k* à l'égard de *f g* de la même maniere qu'on a déterminé celles des autres points à l'égard de *a b*. Bien entendu que toutes les lignes qu'on tirera dans ces différentes opérations, seront tracées au crayon seulement, parce qu'elles n'ont d'autre usage que de déterminer les points *c*, *d*, *e*, &c ; lorsqu'ils sont une fois trouvés, on efface tout le reste.

Je ne m'arrête pas à démontrer en

détail, que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k* sont placés entr'eux de la même maniere que les objets *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, &c. le sont entr'eux ; il suffit d'observer que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g* sont (par la construction) placés à l'égard de *a b*, comme les points *C*, *D*, *F*, *G* le sont à l'égard de *A B*, puisque les triangles *c a b*, *d a b*, *e a b*, &c. ont été faits semblables aux triangles *C A B*, *D A B*, *E A B*, & disposés de la même maniere ; ainsi la difficulté, s'il y en a, ne peut tomber que sur les points *h*, *i* & *k* ; or (par la construction) les points *h* & *i* sont placés à l'égard de *e f*, comme les points *H* & *I* le sont à l'égard de *E F* ; donc puisque ces deux dernieres lignes sont placées de la même maniere à l'égard des lignes *a b* & *A B*, les points *h* & *i* seront aussi placés à l'égard de *a b* de la même maniere que *H* & *I* le sont à l'égard de *A B*. Ainsi les distances respectives des points *a*, *e*, *f*, *g*, &c., mesurées sur l'échelle du plan, feront connoître les distances des objets *A*, *E*, *F*, *G*, &c.

On voit assez, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, que cette même méthode peut servir à vérifier des points que l'on soupçonneroit douteux ſur une carte ; ainſi qu'à y ajouter des points qu'on auroit omis.

On peut auſſi employer la bouſſole à déterminer la poſition des objets *E*, *F*, *G*, &c, & on l'y emploie même aſſez ſouvent ; mais alors on obſerve au point *A*, non pas les angles *EAB*, *FAB*, mais les angles que les lignes *AE*, *AF*, &c, & la baſe même *AB*, font avec la direction de l'aiguille aimantée ; on fait la même choſe au point *B* : & pour marquer les objets ſur la carte, on tire par le point *a* une ligne qui repréſente la direction de l'aiguille aimantée, & on mene les lignes *ab*, *ac*, *af*, &c. de maniere qu'elles faſſent avec celle-là, les angles qu'on a obſervés au point *A* ; fixant enſuite la grandeur qu'on veut donner à *a b*, on ſe conduit à l'égard du point *b* de la même maniere qu'on a fait à l'égard du point *a*. Quant aux autres points *H* & *I* qui n'étoient point viſibles de *A* & *B*, on les détermine à l'égard de *E F*, de la même maniere qu'on a déterminé les autres à l'égard de *AB* ; enfin on marque ces points en *h* & *i* en les déterminant à l'égard de *e f*, de la même maniere que les autres points *e*, *f*, &c. ont été déterminés à l'égard de *a b*.

Au reſte, on ne doit, autant qu'on le peut, lever ainſi à la bouſſole, que les petits détails, comme les détours d'un chemin, les ſinuoſités d'une riviere, &c; quand les points principaux ont été déterminés avec exactitude, on peut prendre ces détails avec une attention moins ſcrupuleuſe, parce que les objets qu'on releve alors, étant peu diſtants entr'eux, l'erreur qu'on peut commettre ſur les angles ne peut pas être d'une grande conſéquence.

Lorſque quelques circonſtances déterminent à marquer ſur la carte déja conſtruite, quelque nouveau point, il n'eſt pas indiſpenſable d'obſerver ce point, de deux autres points connus: on le détermine ſouvent au contraire en obſervant de ce point, deux autres points connus; par exemple, ſuppoſons que le point H ſoit un point d'une rade où l'on a meſuré la profondeur, à la ſonde, & qu'on veut marquer cette ſonde, ſur la carte; on obſervera du point H, les angles EHM, FHM, que font avec la direction LM de l'aiguille aimantée, les deux lignes EH, FH, qui vont à deux objets connus E, F; puis, pour marquer le point H

ſur la carte, on tirera à part, (*Fig.* 77) une ligne $l\,m$ qui marque la direction de l'aiguille aimantée, & en un point n de cette ligne, on fera les angles $o\,n\,m$, $p\,n\,m$, égaux aux angles $E\,H\,M$, $F\,H\,M$; enfin par le point f on menera $f\,h$ parallele à $p\,n$, & par le point e, la ligne $e\,h$ parallele à $n\,o$, ces deux lignes ſe rencontreront au point cherché h.

Cette même méthode ſert auſſi à ſe reconnoître en mer, à la vue de deux terres. Au reſte, la roſe des vents, qui eſt marquée ſur les cartes marines, fournit des expédients pour abréger quelques-unes de ces opérations; nous ne pouvons entrer dans ces détails qui appartiennent immédiatement au pilotage: il nous ſuffit d'expoſer les principes ſur leſquels ces différentes pratiques ſont fondées.

Obſervons, cependant, qu'on ne doit déterminer les ſondes, de cette maniere, que quand les circonſtances ne permettent pas de faire autrement; car quelque exercé qu'on puiſſe être à ſe ſervir du compas de variation, on ne parvient jamais à relever du point H en mer, les objets E, F, avec une préciſion ſur laquelle on puiſſe autant compter, que ſur le relévement qu'on feroit d'un objet *H*, tel que feroit une chaloupe, une bouée, &c. en obfervant des points *E* & *F* à terre. Les fondes font affez importantes pour qu'on doive autant qu'on le peut, employer, pour les déterminer, la méthode la plus fufceptible d'exactitude.

Il y a encore une autre maniere de lever un plan qui eft d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, & qu'en même temps qu'on obferve les différents points dont on veut avoir les pofitions, on les trace fur le plan fans les perdre de vue. L'inftrument qu'on emploie à cet effet, eft repréfenté par la Figure 78. *ABCD* eft une planche de 15 à 16 pouces de long, & à peu-près de pareille largeur, portée fur un pied comme le graphometre. Sur cette planche, on étend une feuille de papier qu'on arrête par le moyen d'un chaffis qui entoure la planche. *LM* eft une regle garnie de pinnules à fes deux extrémités.

Lorfqu'on veut faire ufage de cet inftrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne ; on prend une bafe *am*, comme dans les opérations ci-deffus, & pofant le pied de l'inftrument en a; on fait planter un piquet en m. On applique la regle $L\ M$ ſur le papier, & on la dirige de maniere à voir le piquet m à travers des deux pinnules; alors on tire le long de la regle, une ligne $E\ F$, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on aura trouvé de pieds entre le point E d'où l'on obſerve d'abord, & le point f d'où l'on obſervera à la ſeconde ſtation. On fait enſuite tourner la regle autour du point E, juſqu'à ce qu'on rencontre, en regardant à travers des pinnules, quelqu'un des objets I, H, G; & à meſure qu'on en rencontre un, on tire le long de la regle une ligne indéfinie. Ayant ainſi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorſqu'on eſt en a, on tranſporte l'inſtrument en m, & on laiſſe un piquet en a. Alors on fait au point f les mêmes opérations à l'égard des objets I, H, G, qu'on a faites à l'autre ſtation. Les lignes fI, fH, fG, qui dans ce ſecond cas vont, ou ſont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premieres aux points g, h, i, qui ſont la repréſentation des objets G, H, I.

C'eſt encore ſur la théorie des figures ſemblables, qu'eſt fondée la méthode de faire *le point*, c'eſt-à-dire, de repréſenter ſur une carte, la route qu'a tenue un vaiſſeau pendant ſa navigation, ou pendant une partie de ſa navigation.

Suppoſons qu'un vaiſſeau parti d'un lieu connu, ait d'abord couru 28 lieues au Sud-Eſt, puis 20 lieues au Sud, & enfin 26 lieues au Sud-Oueſt; on veut déterminer, ſur la carte, la route qu'a tenue le vaiſſeau & le lieu de l'arrivée.

On cherche d'abord ſur la carte, le point du départ; je ſuppoſe que ce ſoit le point *d* (*Fig.* 79). On cherche pareillement, parmi les diviſions de la roſe des vents marquée ſur la carte, quelle eſt la ligne qui va au Sud-Eſt; je ſuppoſe que ce ſoit ici la ligne *CF*; on tire par le point *d* la ligne *d e* parallele à *C F*, & on donne à *d e* autant de parties de l'échelle de la carte, que l'on a couru de lieues au Sud-Eſt. Par le point *e* on tire pareillement une ligne *e b* parallele à la ligne *C E* qui eſt dirigée au Sud; & on fait *e b* d'autant de parties de l'échelle, qu'on a couru de lieues au Sud; enfin par le point *b*, on mene *b a* parallele à *C D* qui va au Sud-Oueſt; & ayant fait *b a* d'autant de parties de l'échelle, qu'on a couru de lieues au

Sud-Oueſt, le point *a* eſt le point d'arrivée, & la trace *d e b a* repréſente la route qu'a tenue le vaiſſeau. En effet les lignes *d e*, *e b*, *b a* font entr'elles les mêmes angles qu'ont fait entr'elles ſucceſſivement les différentes parties de la route du vaiſſeau ; & d'ailleurs les parties *e d*, *e b*, *b a*, ont entr'elles les mêmes rapports que les eſpaces que le vaiſſeau a réellement décrits ; donc la figure *d e b a* eſt (131) abſolument ſemblable à la route qu'a tenue le vaiſſeau ; enfin le point *d* eſt ſitué ſur la carte comme le point de départ l'eſt à l'égard de la terre (*) ; donc *d e b a* eſt non-ſeulement ſemblable à la route du vaiſſeau, mais encore ſituée à l'égard des différents points de la carte, comme la route du vaiſſeau l'a été à l'égard des différents points de la terre.

(*) Cette expreſſion n'eſt pas rigoureuſement exacte, ſans doute ; mais ce n'eſt point ici le lieu d'en fixer le ſens rigoureux. Les points d'une carte, ſur-tout d'une carte réduite, ne ſont pas ſitués entr'eux comme les points de la terre qu'ils repréſentent, mais il ſuffit ici qu'ils aient le même uſage. Nous reviendrons ailleurs ſur cet objet.

II. SECTION.

Des Surfaces.

139. NOUS voici arrivés à la seconde des trois sortes d'étendue que nous avons distinguées, c'est-à-dire, à l'étendue en longueur & largeur.

Nous ne considérerons, dans cette Section, que les *surfaces* ou *superficies planes*; nous nous bornerons, même, à celle des figures rectilignes, & du cercle.

La mesure des surfaces se réduit à celle des triangles, ou des quadrilateres.

On distingue les quadrilateres en *Quadrilatere* simplement dit, *Trapeze*, & *Parallélogramme*.

La figure de quatre côtés, qu'on appelle simplement *Quadrilatere*, est celle parmi les côtés de laquelle il ne s'en trouve aucun qui soit parallele à un autre. *Voyez Figure* 80.

Le *Trapeze* est un quadrilatere dont deux côtés seulement sont paralleles (*Fig.* 81).

Le *Parallélogramme* est un quadrilatere dont les côtés opposés sont paralleles (*Fig.* 82, 83, 84, 85, 86, 86 *); on distingue quatre sortes de Parallélogrammes : le *rhomboïde*, le *rhombe*, le *rectangle* & le *quarré*.

Le *rhomboïde*, est le parallélogramme dont les côtés contigus, & les angles, sont inégaux (*Fig* 82).

Le *rhombe*, autrement dit *lozange*, est celui dont les côtés sont égaux, & les angles inégaux (*Fig.* 83).

Le *rectangle*, est celui dont les angles sont égaux, & les côtés contigus inégaux (*Fig.* 84).

Le *quarré* est celui dont les côtés & les angles sont égaux (*Fig.* 85).

Quand les angles d'un quadrilatere sont égaux, ils sont nécessairement droits, parce que les quatre angles de tout quadrilatere, valent ensemble quatre angles droits (86).

La perpendiculaire *E F* (*Fig.* 82), menée entre les deux côtés opposés d'un parallélogramme, s'appelle la *hauteur* de ce parallélogramme; & le côté *B C* sur lequel tombe cette perpendiculaire, s'appelle la *base*.

La hauteur d'un triangle *A B C* (*Fig.*

87,

87, 88, & 89), eſt la perpendiculaire *AD* abaiſſée d'un angle *A* de ce triangle, ſur le côté oppoſé *BC*, prolongé, s'il eſt néceſſaire; & ce côté *BC* ſe nomme alors la *baſe*.

140. *Un triangle rectiligne quelconque* ABC (Fig. 89) *eſt toujours la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui.*

Car on peut toujours concevoir tirée, par le ſommet de l'angle *C*, une ligne *CE* parallele au côté *BA*, & par le ſommet de l'angle *A*, une ligne *AE* parallele au côté *BC*; ce qui forme avec les côtés *AB* & *BC*, un parallélogramme *ABCE* de même baſe & de même hauteur que le triangle *ABC*; cela poſé, il eſt aiſé de voir que les deux triangles *ABC*, *CEA* ſont égaux; car le côté *AC* leur eſt commun; d'ailleurs les angles *BAC*, *ACE* ſont égaux, à cauſe des paralleles (38); & par la même raiſon, les angles *BCA* & *CAE* ſont égaux : ces deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, ſont donc égaux; donc le triangle *ABC* eſt la moitié du parallélogramme *ABCE*.

141. *Les parallélogrammes* ABCD

EBCF (Fig. 86 & 86*) *de même base & de même hauteur, sont égaux en surface.*

Les deux parallélogrammes *ABCD*, *EBCF* (*Fig.* 86) ont une partie commune *EBCD*; ainsi leur égalité ne dépend que de l'égalité des triangles *ABE*, *DCF*; or il est aisé de prouver que ces deux triangles sont égaux : car *AB* est égale à *CD*, ces lignes étant des paralleles comprises entre paralleles (82); & par la même raison, *BE* est égal à *CF*; d'ailleurs (43) l'angle *ABE* est égal à l'angle *DCF*; ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ils sont donc égaux; donc aussi le parallélogramme *ABCD* & le parallélogramme *EBCF* sont égaux.

Dans la Figure 86*, on démontrera de la même maniere, que les deux triangles *ABe*, *DCF* sont égaux; donc, retranchant de chacun le triangle *DIE*, les deux trapèzes restans *ABID*, *EICF* seront égaux; enfin ajoutant à chacun de ces trapèzes le triangle *BIC*, le parallélogramme *ABCD* & le parallélogramme *EBCF* qui en résulteront, seront égaux.

142. On peut donc dire aussi, que *les*

triangles de même base & de même hauteur, ou de bases égales & de hauteurs égales, sont égaux. Puisqu'ils sont moitié de parallélogrammes de même base & de même hauteur qu'eux (140).

143. De cette derniere proposition on peut conclure que *tout polygone peut être transformé en un triangle de même surface.* Par exemple, soit $ABCDE$ (*Fig.* 91) un pentagone; si l'on tire la diagonale EC qui joigne les extrémités de deux côtés contigus ED, DC, & qu'après avoir mené DF parallele à EC, & qui rencontre en F, le côté AE prolongé, on tire CF, on aura un quadrilatere $ABCF$ égal en surface au pentagone $ABCDE$; car les deux triangles ECD, ECF ont pour base commune EC; & étant de plus, compris entre mêmes paralleles EC, DF, ils sont de même hauteur; donc ils sont égaux; donc si l'on ajoute à chacun le quadrilatere $EABC$, on aura le pentagone $ABCDE$ égal au quadrilatere $ABCF$.

Or de même qu'on vient de réduire le pentagone, à un quadrilatere, on réduira de même le quadrilatere, à un triangle, donc, &c.

De la mesure des Surfaces.

144. *Mesurer une surface*, c'est déterminer combien de fois cette surface contient une autre surface connue.

Les mesures qu'on emploie sont ordinairement des quarrés; quelquefois aussi ce sont des parallélogrammes rectangles : ainsi, mesurer la surface *ABCD* (*Fig.* 90), c'est déterminer combien elle contient de quarrés tels que *abcd*, ou de rectangles tels que *abcd*; si le côté *ab* du quarré *abcd* est d'un pied, c'est déterminer combien la surface *ABCD* contient de pieds quarrés; si le côté *ab* du rectangle *abcd* étant d'un pied, le côté *bc* est de 3 pieds, c'est déterminer combien la surface *ABCD* contient de rectangles de 3 pieds de long sur un pied de large.

Pour mesurer en parties quarrées, la surface du rectangle *ABCD*, il faut chercher combien de fois le côté *AB* contient le côté *ab* du quarré *abcd* qui doit servir d'unité ou de mesure; chercher de même combien de fois le côté *BC* contient *ab*; & alors multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura le nombre de quarrés tels que *abcd*, que la surface

ABCD peut renfermer. Par exemple, ſi *AB* contient *ab* quatre fois; & ſi *BC* contient *ab*, 7 fois; je multiplie 7 par 4, & le produit 28 marque que le rectangle *ABCD* contient 28 quarrés tels que *abcd*.

Car ſi par les points de diviſion *E*, *F*, *G*, on mene des paralleles à *BC*, on aura quatre rectangles égaux, dont chacun pourra contenir autant de quarrés tels que *abcd* qu'il y a de parties égales à *ab* dans le côté *BC*; donc il faut répéter les quarrés contenus dans l'un de ces rectangles, autant de fois qu'il y a de rectangles, c'eſt-à-dire, autant de fois que le côté *AB* contient *ab*; & comme le nombre des quarrés contenus dans chaque rectangle, eſt le même que le nombre des parties de *BC*, il eſt donc évident qu'en multipliant le nombre des parties de *BC*, par le nombre des parties égales de *AB*, on a le nombre de quarrés tels que *abcd*, que le rectangle *ABCD* peut renfermer.

Quoique nous ayons ſuppoſé dans le raiſonnement que nous venons de faire, que les côtés *AB* & *BC* contenoient un nombre exact de meſures *ab*, ce raiſonnement ne s'étend pas moins au cas où la meſure *ab* n'y ſeroit pas contenue exactement. Par exemple, si *BC* ne contenoit que *6* mesures & $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendroit que *6* quarrés & $\frac{1}{2}$; & si le côté *AB* ne contenoit que *3* mesures & $\frac{1}{3}$, il n'y auroit que *3* rectangles & $\frac{1}{3}$, chacun de *6* quarrés & $\frac{1}{2}$, il faudroit donc multiplier *6* $\frac{1}{2}$ par *3* $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, le nombre des mesures de *BC* par le nombre des mesures de *AB*.

145. Puisque (141) le parallélogramme rectangle *ABCD* (*Fig.* 86 & 86*) est égal au parallélogramme *EBCF* de même base & de même hauteur; il s'ensuit donc que pour avoir la surface de celui-ci, il faudra multiplier le nombre des parties de sa base *BC*, par le nombre des parties de sa hauteur *BA*; on peut donc dire en général...

Pour avoir le nombre de mesures quarrées contenues dans la surface d'un parallélogramme quelconque ABCD (Fig. 82) *il faut mesurer la base* BC, *& la hauteur* EF, *avec une même mesure; & multiplier le nombre des mesures de la base, par le nombre des mesures de la hauteur.*

On voit donc, par ce qui a été dit (144), que lorsqu'on veut évaluer la surface *ABCD* (*Fig.* 90) on ne fait autre chose que répéter la surface *GBCH* ou le nombre de quarrés qu'elle contient, autant de fois que ſon côté GB eſt contenu dans le côté AB; ainſi le multiplicande eſt réellement une ſurface, & le multiplicateur eſt un nombre abſtrait qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande.

On dit cependant, très-communément, que *pour avoir la ſurface d'un parallélogramme, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur*; mais on doit regarder cela comme une expreſſion abrégée, dans laquelle on ſous-entend le *nombre* des quarrés correſpondants aux parties de la baſe; & le *nombre* des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'eſt prendre un certain nombre de fois; de ſorte que quand on multiplie une ligne, on ne peut jamais avoir qu'une ligne; & quand on multiplie une ſurface, on ne peut jamais avoir qu'une ſurface. Une ſurface ne peut avoir d'autres éléments que des ſurfaces; & quoiqu'on diſe ſouvent que le parallélogramme $ABCD$ (*Fig.* 82) peut être conſidéré comme compoſé d'autant de lignes égales & paralleles à BC, qu'il y a de points dans la hauteur EF, on doit ſous-entendre que ces lignes ont une largeur infiniment petite ; (Car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas composer une surface) ; & alors chacune de ces lignes est une surface qui étant répétée autant de fois que sa hauteur est dans la hauteur *AE*, donne la surface *ABCD*.

Nous adopterons néanmoins cette expression, *multiplier une ligne par une ligne*; mais on ne doit pas perdre de vue, que ce n'est que comme maniere abrégée de parler. Ainsi nous dirons que le produit de deux lignes exprime une surface, quoique, dans le vrai, on dût dire, le *nombre* des parties d'une ligne multiplié par le nombre des parties d'une autre ligne, exprime le nombre des parties quarrées contenues dans le parallélogramme qui auroit une de ces lignes pour hauteur, & l'autre ligne pour base.

Pour marquer la surface du parallélogramme *ABCD* (*Fig.* 82) nous écrirons $CB \times EF$; dans la figure 84, nous écrirons $BA \times BC$; & dans la figure 85 où les deux côtés *AB* & *BC* sont égaux, au lieu de $AB \times BC$ ou $AB \times AB$, nous écrirons $\overline{AB}^2$; de sorte que $\overline{AB}^2$ signifiera la ligne *AB* multipliée par elle-même, ou la ſurface du quarré fait ſur la ligne AB; de même, pour marquer que la ligne AB eſt élevée au cube, nous écrirons $\overline{AB}^3$, qui équivaudra à $AB \times AB \times AB$ ou $\overline{AB}^2 \times AB$.

146. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que pour que deux parallélogrammes ſoient égaux en ſurface, il ſuffit que le produit de la baſe de l'un, multipliée par la hauteur, ſoit égal au produit de la baſe du ſecond, multipliée par la hauteur. *Donc lorſque deux parallélogrammes ſont égaux en ſurface, ils ont leurs baſes réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs*; c'eſt-à-dire, que la baſe & la hauteur de l'un peuvent être conſidérées comme les extrêmes d'une proportion, dont la baſe & la hauteur de l'autre formeront les moyens; car en les conſidérant ainſi, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens; or dans ce cas il y a néceſſairement proportion (*Arith.* 180).

Au reſte, on peut voir cette vérité immédiatement : en faiſant attention que ſi la baſe de l'un eſt plus petite, par exemple, que celle de l'autre, il faut que ſa hauteur ſoit plus grande à proportion, pour former le même produit.

147. Puiſqu'un triangle eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur (140), il ſuit de ce qui vient d'être dit, (145) que *pour avoir la ſurface d'un triangle, il faut multiplier la baſe par la hauteur, & prendre la moitié du produit.*

Ainſi, ſi la hauteur *AD* (*Fig.* 87) eſt de 34 pieds, & la baſe *BC* de 52, la ſurface contiendra 884 pieds quarrés; c'eſt la moitié du produit de 52 par 34.

Il eſt inutile, je penſe, d'inſiſter pour faire ſentir qu'on aura le même produit en multipliant la baſe par la moitié de la hauteur, ou la hauteur par la moitié de la baſe.

148. Donc, 1°, *pour avoir la ſurface du trapèze*, il faut ajouter enſemble les deux côtés paralleles, prendre la moitié de la ſomme, & la multiplier par la perpendiculaire menée entre ces deux paralleles. Car ſi l'on tire la diagonale *BD* *Fig.* 81), on a deux triangles *ABD*, *BDC* dont la hauteur commune eſt *EF*. Pour avoir la ſurface du triangle *ABD*, il faudroit donc multiplier la moitié de *AD* par *EF*; & pour le triangle *BDC*, il faudroit multiplier la moitié de *BC*,

aussi par *EF;* donc la surface du trapèze, vaut la moitié de *AD* multipliée par *EF*, plus la moitié de *BC* multipliée par *EF*, c'est-à-dire, la moitié de la somme *AD*, plus *BC*, multipliée par *EF*.

Si par le milieu *G* de la ligne *AB*, on tire *GH* parallele à *BC*, cette ligne *GH* sera la moitié de la somme des deux lignes *AD* & *BC*. Car, soit *I* le point où *GH* coupe la diagonale *BD*, les triangles *BAD*, *BGI*, semblables à cause des paralleles *AD* & *GI* font connoître (109) que *GI* est moitié de *AD*, puisque *BG* est moitié de *AB*. Or *GH* étant parallele à *BC* & à *AD*, *DC* (102) est coupée de la même maniere que *AB;* on prouvera donc de même que *IH* est moitié de *BC*, en considérant les triangles semblables *BDC* & *IDH*.

Donc, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, on peut dire *que la surface d'un trapèze* ABCD, *est égale au produit de sa hauteur* EF *par la ligne* GH *menée à distances égales des deux bases opposées.*

149. 2°. *Pour avoir la surface d'un polygone quelconque*, il faut le partager en triangles, par des lignes menées d'un même point à chacun de ses angles, & cal-

culer séparément, la surface de chacun de ces triangles; en réunissant tous ces produits, on aura la surface totale du polygone. Mais pour avoir le moindre nombre de triangles, qu'il soit possible, il conviendra de faire partir toutes ces lignes de l'un des angles; *voyez Figure 92.*

150. *Si le polygone étoit régulier* (*Fig.* 53) : comme tous les côtés sont égaux, & que toutes les perpendiculaires, menées du centre, sont égales; en le concevant composé de triangles qui ont leur sommet au centre, on auroit la surface en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, & multipliant ce produit par le nombre des côtés; ou ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire.

151. Puisqu'on peut (136) considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure *que pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon.*

Car la perpendiculaire menée sur un des côtés ne differe pas du rayon, lorsque le nombre des côtés est infini.

152. Puiſque les circonférences des cercles ſont entr'elles comme les rayons ou comme les diametres (136) il eſt viſible que ſi l'on connoiſſoit la circonférence d'un cercle d'un diametre connu, on ſeroit bientôt en état de déterminer la circonférence de tout autre cercle dont on connoîtroit le diametre, puiſqu'il ne s'agiroit que de calculer le quatrieme terme de cette proportion : *le diametre de la circonférence connue, eſt à cette même circonférence, comme le diametre de la circonférence cherchée, eſt à cette ſeconde circonférence.*

On ne connoît point exactement le rapport du diametre à la circonférence; mais on en a des valeurs aſſez approchées, pour qu'un rapport plus exact puiſſe être regardé comme abſolument inutile dans la pratique.

Archimede a trouvé qu'un cercle qui auroit 7 pieds de diametre, auroit 22 pieds de circonférence, à très-peu de choſe près. Ainſi, ſi l'on demande quelle ſera la circonférence d'un cercle qui auroit 20 pieds de diametre, il faut chercher (*Arith.* 179) le quatrieme terme de la proportion, dont les trois premiers ſont

7 : 22 : : 20 :

Ce quatrieme terme qui eſt $62\frac{6}{7}$, eſt à très-peu de choſe près, la longueur de la circonférence d'un cercle de 20 pieds de diametre. Je dis à très-peu de choſe près; car il faudroit que le cercle n'eût pas moins de 800 pieds de diametre, pour que la circonférence déterminée d'après le rapport de 7 à 22, fût fautive d'un pied. Au reſte, en employant le rapport de 7 à 22, on peut ſe diſpenſer de faire la proportion; il ſuffit de tripler le diametre, & d'ajouter au produit la ſeptieme partie de ce même diametre; parce que $3\frac{1}{7}$ eſt le nombre de fois que 22 contient 7.

Adrien Métius a donné un rapport beaucoup plus approché; c'eſt celui de 113 à 355. Ce rapport eſt tel, qu'il faudroit que le diametre d'un cercle fût de 1000000 pieds ou moins, pour qu'on fît, en ſe ſervant de ce rapport, une erreur d'un pied ſur la circonférence (*). Enfin, ſi l'on veut avoir la circonférence, avec encore plus de préciſion, il n'y a qu'à employer le rapport de 1 à 3, 14159265358979З2,

(*) Pour retenir aiſément ce rapport, il faut faire attention que les nombres qui le compoſent, ſe trouvent, en partageant en deux parties égales, les trois premiers nombres impairs 1, 3, 5 écrits deux fois de ſuite en cette maniere 113, 355.

qui passe de beaucoup les limites des besoins ordinaires, & dont on peut supprimer plus ou moins de chiffres sur la droite, selon qu'on a moins ou plus besoin d'exactitude. Comme ce rapport a pour premier terme l'unité, il est assez commode en ce que, pour trouver la circonférence d'un cercle proposé, l'opération se réduit à multiplier le nombre $3,1415926$ &c, par le diametre de ce cercle.

Il est donc facile actuellement, de trouver la surface d'un cercle proposé, du moins aussi exactement que peuvent l'exiger les besoins les plus étendus de la pratique.

Si l'on demande de combien de pieds quarrés est la surface d'un cercle qui auroit 20 pieds de diametre; je calcule sa circonférence comme ci-dessus; & ayant trouvé qu'elle est de 62 pieds & $\frac{6}{7}$, je multiplie $62\frac{6}{7}$, par 5 qui est la moitié du rayon (151) & j'ai $314\frac{2}{7}$ pieds quarrés, pour la surface de ce cercle.

153. On appelle *secteur de cercle*, la surface comprise entre deux rayons IA, IB (*Fig.* 74) & l'arc AVB. Et on appelle *segment*, la surface comprise entre l'arc AVB & sa corde AB.

Puiſque le cercle peut être conſidéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, un ſecteur de cercle peut donc être conſidéré comme une portion de polygone régulier, & ſa ſurface comme composée d'une infinité de triangles qui ont tous leur ſommet au centre, & pour hauteur le rayon. Donc *pour avoir la ſurface d'un ſecteur de cercle*, il faut multiplier l'arc qui lui ſert de baſe, par la moitié du rayon.

A l'égard du ſegment, il eſt évident que pour en avoir la ſurface, il faut retrancher la ſurface du triangle *IAB*, de celle du ſecteur *IAVB*.

Il eſt évident que, dans un même cercle, les longueurs des arcs ſont proportionnelles à leurs nombres de degrés; que par conſéquent, quand on connoît la longueur de la circonférence, on peut avoir celle d'un arc de tel nombre de dégrés qu'on voudra, en faiſant cette proportion : 360°, *ſont au nombre de degrés de l'arc dont on cherche la longueur, comme la longueur de la circonférence, eſt à celle de ce même arc.*

S'il s'agit de trouver la ſurface d'un ſecteur dont on connoît le nombre de degrés

grés & le rayon ; on cherchera, par la proportion qu'on vient de donner, la longueur de l'arc qui eſt la baſe de ce ſecteur, & on la multipliera par la moitié du rayon. Par exemple, ſi l'on demande qu'elle eſt la ſurface du ſecteur de $32^\circ\ 40'$ dans un cercle qui a 20 pieds de diametre ; on trouvera, comme ci-deſſus (152), que la circonférence eſt de $62\frac{6}{7}$ pieds ; cherchant le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers ſont $360^\circ : 32^\circ\ 40' :: 62\frac{6}{7}$: ce quatrieme terme qu'on trouvera de $5\frac{19}{27}$, ſera la longueur de l'arc de $32^\circ\ 40'$, laquelle étant multipliée par 5, moitié du rayon, donne $28\frac{14}{27}$ pour la ſurface du ſecteur de $32^\circ\ 40'$.

Il eſt aiſé, d'après cela, d'avoir la ſurface du ſegment, en déterminant (*Fig.* 74) le côté *AB* & la hauteur *IZ* du triangle *IAB*, par une opération fondée ſur les mêmes principes que celle que nous avons enſeignée (121) ; mais la Trigonométrie, que nous verrons par la ſuite, nous donnera des moyens encore plus expéditifs & plus ſuſceptibles d'exactitude.

154. Quoique ce que nous avons dit (149), ſuffiſe pour meſurer toute eſpece de figure rectiligne ; néanmoins, il eſt à

propos que nous expoſions ici, une autre méthode qui eſt plus ſimple dans la pratique. Elle conſiſte (*Fig.* 93) à tirer dans la figure, une ligne *AG;* abaiſſer de chacun des angles, des perpendiculaires *BM*, *LC*, *DK*, *EI*, *FH;* ſur cette ligne *AG;* meſurer chacune de ces lignes, ainſi que les intervalles *AN*, *NO*, *OP*, *PQ*, *QR*, *RG;* alors la figure eſt partagée en pluſieurs parties, dont les deux extrêmes, tout au plus, ſont des triangles, & les autres ſont des trapèzes; les premiers ſe meſurent en multipliant la hauteur par la moitié de la baſe (147); à l'égard des trapèzes, chacun ſe meſure en multipliant la moitié de la ſomme des deux côtés paralleles, par la diſtance perpendiculaire de ces mêmes côtés (148).

Lorſque la figure eſt une ligne courbe, on la meſurera avec une exactitude ſuffiſante pour la pratique, en partageant la ligne *AT* (*Fig.* 94) qu'on tirera ſuivant ſa plus grande longueur, en un aſſez grand nombre de parties pour que les arcs interceptés *AB*, *BC*, *CD*, &c. puiſſent être regardés comme des lignes droites, & pour rendre le calcul le plus ſimple qu'il ſoit poſſible, on fera les parties AO, OP, &c. égales entr'elles ; alors pour avoir la ſurface, on ajoutera enſemble toutes les lignes BN, CM, DL, EK, FI, & la moitié ſeulement de la derniere GH, ſi la courbe eſt terminée par une droite GH perpendiculaire à AT: on multipliera le tout, par l'un des intervalles AO, & le produit ſera la ſurface cherchée ; c'eſt une ſuite immédiate de ce qui a été dit (148) ; car pour avoir la ſurface ABN, il faut multiplier AO par la moitié de BN; pour avoir celle de $BCMN$; il faut multiplier OP ou AO, par la moitié de BN & de CM; pour avoir celle de $CDLM$, il faut multiplier AO, par la moitié de CM & de DL, & ainſi de ſuite ; donc, en réuniſſant ces produits, on voit que AO ſera multiplié par 2 moitiés de BN, plus 2 moitiés de CM, plus 2 moitiés de DL, plus 2 moitiés de EK, plus 2 moitiés de FI, plus enfin une moitié ſeulement de GH; c'eſt-à-dire, que AO doit être multiplié par la totalité des lignes BN, CM, DL, EK, FI, plus la moitié de la derniere.

S'il s'agiſſoit de l'eſpace $BNHG$ terminé par les deux lignes BN, GH; on prendroit non pas BN entiere, mais sa moitié seulement.

La regle que nous venons d'exposer pour mesurer les surfaces planes terminées par des courbes, peut être employée fort utilement dans diverses recherches relatives aux Navires. On a souvent besoin, dans ces recherches, de connoître la surface de quelques coupes horizontales du Navire ; nous aurons occasion d'en faire usage par la suite.

Du Toisé des Surfaces.

155. Ce qu'on entend par *Toisé* des surfaces, c'est la méthode de faire les multiplications nécessaires pour évaluer les surfaces, lorsqu'on a mesuré les dimensions en toises & parties de toise.

Il y a deux manieres d'évaluer les surfaces, en toises quarrées & parties de la toise quarrée.

Dans la premiere on compte par toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, lignes quarrées, &c.

La toise quarrée contient 36 pieds quarrés, parce que c'est un rectangle qui a 6 pieds de long, sur 6 pieds de large. Le pied quarré contient 144 pouces quarrés, parce que c'eſt un rectangle qui a 12 pouces de long, ſur 12 pouces de large. Par une raiſon ſemblable on voit que le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées, &c.

Ainſi, pour évaluer une ſurface en toiſes quarrées & parties quarrées de la toiſe quarrée, il n'y a autre choſe à faire qu'à réduire les deux dimenſions qu'on doit multiplier, chacune à la plus petite eſpece (en lignes, ſi la plus petite eſpece eſt des lignes); & après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces quarrés, enſuite en pieds quarrés, & enfin en toiſes quarrées, en diviſant ſucceſſivement par 144, 144 & 36. Par exemple, pour trouver la ſurface d'un rectangle qui auroit $2^T\ 3^P\ 5^p$ de long, & $0^T\ 4^P\ 6^p$ de large; je réduis ces deux dimenſions, en pouces, & j'ai 185^p à multiplier par 54^p, ce qui me donne 9990 pouces quarrés, & s'écrit ainſi 9990^{pp}. Pour les réduire en pieds quarrés, je diviſe par 144; j'ai 69 pieds quarrés & 54^{pp} de reſte, c'eſt-à-dire, $69^{PP}\ 54^{pp}$; pour réduire les 69^{PP} en toiſes quarrées, je diviſe par 36; j'ai une toiſe quarrée ou 1^{TT} pour quotient, & 33^{PP}

de reſte ; enſorte que la ſurface cherchée eſt de 1^{TT} 33^{PP} 54^{pp}.

Dans la ſeconde maniere d'évaluer les ſurfaces, en toiſes quarrées & partie de la toiſe quarrée, on conçoit la toiſe quarrée compoſée de ſix rectangles qui ont tous une toiſe de haut & un pied de baſe, & que pour cette raiſon, on nomme *Toiſes-pieds:* on ſubdiviſe chaque toiſe-pied en 12 parties ou rectangles qui ont chacun une toiſe de haut, & un pouce de baſe, & qu'on appelle *Toiſes-pouces :* on ſubdiviſe chacune de celles-ci en 12 parties qui ont chacune une toiſe de haut & une ligne de baſe, & qu'on appelle *Toiſes-lignes ;* en un mot, on ſe repréſente la toiſe quarrée diviſée & ſubdiviſée continuellement en rectangles, qui ont conſtamment une toiſe de haut ſur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un point de baſe. Les ſubdiviſions qui paſſent le point, ſe marquent comme les ſecondes, tierces, quartes, &c. pour les degrés, excepté qu'on fait précéder la marque par un T, ſigne de la toiſe ; ainſi les marques ſucceſſives & les valeurs des ſubdiviſions de la toiſe quarrée, ſont telles qu'on les voit dans la Table ſuivante.

TABLE des Subdivisions de la Toise quarrée en Rectangles d'une Toise de haut, & caractères qui représentent ces parties.

La Toise-quarrée vaut 6 Toises-pieds, ou 6^{TP}
La Toise-pied vaut 12 Toises-pouces, ou 12^{TP}
La Toise-pouce. . . . . 12^{Tl}
La Toise-ligne. . . . . 12^{Tpt}
La Toise-point . . . . $12^{T'}$
La T' ou Toise-prime. . . . . $12^{T''}$
La T'' ou Toise-seconde. . . . . $12^{T'''}$
La Toise-tierce . . . . 12^{Tiv}
& ainsi de suite.

Quand on aura donc à multiplier les parties de deux lignes, pour évaluer une surface; il faut concevoir que les toises du multiplicande sont des toises quarrées; les pieds, des toises-pieds; les pouces, des toises-pouces, & ainsi de suite; à l'égard du multiplicateur, il représentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande. Par exemple, si ayant à mesurer la surface du rectangle *ABCD* (*Fig.* 95), je trouve le côté *AD* de $4^T\ 3^P\ 6^p$, & le côté *AB* de $2^T\ 3^p$; je vois que si *AE* représente une toise, la surface *ABCD* est composée de deux rectangles qui ont chacun une toise de haut sur 4^T

3^P 6^p de long, & d'un rectangle qui a 3^P ou une demi-toise de haut, sur 4^T 3^P 6^p de long, & qui par conséquent est la moitié de l'un des deux autres; de sorte que je vois qu'il s'agit de répéter, 2 fois $\frac{1}{2}$ un rectangle de 1^T de haut sur 4^T 3^P 6^p de long, c'est-à-dire, de répéter 2 fois $\frac{1}{2}$ la quantité 4^{TT} 3^{TP} 6^{Tp}. Ceci prouve ce que nous avons dit dans la Note du n° 47 de l'Arithmétique, sur la nature des unités du produit & de ses facteurs dans la multiplication géométrique.

On voit, en même tems, qu'il n'y a ici aucune nouvelle regle à apprendre pour faire ces sortes de multiplications qui sont évidemment les mêmes que celles que nous avons données en Arithmétiqne sous le nom de *Multiplication des Nombres complexes.* Ainsi, pour nous borner à un exemple, si l'on me demande quelle est la surface d'un rectangle qui auroit 52^T 4^P 5^p de long, & 44^T 4^P 8^p de large; je fais l'opération comme il suit :

52^T	4^P	5^P		
44^T	4^P	8^P		
208^{TT}	0^{TP}	0^{Tp}	0^{Tl}	0^{Tpt}
208				
22				
7	2			
2	2	8		
0	3	8		
26	2	2	6	
8	4	8	10	
2	5	6	11	4
2	5	6	11	4
2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}

C'eſt-à-dire, je multiplie 52 par 44; puis les 4^P du multiplicande, par 44, en prenant pour 3^P la moitié de 44, & pour 1^P le tiers de ce que j'aurai eu pour 3^P; enſuite je multiplie 5^P par 44, en prenant pour 4^P le $\frac{1}{3}$ de ce que j'ai eu pour 1^P; & pour 1^P je prends le quart de ce que j'ai eu pour 4^P.

Pour multiplier enſuite, par les 4^P qui ſe trouvent dans le multiplicateur; je prends pour 3^P, la moitié du multiplicande total, & pour 1^P, le tiers de ce que j'ai eu pour 3^P. Enfin, pour multiplier par 8^P, je prends le tiers de ce que j'ai eu pour 1^P, &

je l'écris deux fois ; réunissant tous ces produits particuliers, j'ai 2361^{TT} 2^{TP} 5^{Tp} 2^{Tl} 8^{Tpt} pour produit total. Ainsi on voit que nous avons été fondés à dire, dans l'Arithmétique, que les regles que nous donnions pour les nombres complexes, renfermoient le toisé, & qu'il n'y avoit autre chose à exposer, que la nature des unités du produit & des facteurs.

Quand on a ainsi évalué une surface, en toises-quarrées, toises-pieds, toises-pouces, &c, il est fort aisé d'en trouver la valeur en toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, &c. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 & $\frac{1}{2}$ sous les parties de la toise, à commencer des toises-pieds, comme on le voit ci-dessous; multiplier chaque partie, par le nombre inférieur qui lui répond, & porter les produits des deux nombres consécutifs 6 & $\frac{1}{2}$ dans une même colonne ; lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{2}$ il restera 1, écrivez 72 sous ce multiplicateur $\frac{1}{2}$, pour commencer une seconde colonne. Ainsi, pour réduire en toises quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, &c, les parties du produit que nous avons trouvé ci-dessus, j'écris :

$$\begin{array}{lllll} 2361^{TT} & 2^{TP} & 5^{Tp} & 2^{Tl} & 8^{Tpt} \\ & 6 & \frac{1}{2} & 6 & \frac{1}{2} \\ \hline 2361^{TT} & 12^{PP} & 72^{PP} & & \\ & 2 & 12 & & \\ & & 4 & & \\ \hline 2361^{TT} & 14^{PP} & 88^{PP} & & \end{array}$$

Et je multiplie les toiſes-pieds par 6; parce que la toiſe-pied vaut 6 pieds quarrés, ayant 6 pieds de haut ſur un pied de baſe. Je multiplie les toiſes-pouces par $\frac{1}{2}$, & je porte les deux entiers, que me donne cette multiplication, au rang des pieds quarrés; parce que la toiſe-pouce étant la 12^e^ partie de la toiſe-pied, doit valoir la 12^e^ partie de 6 pieds quarrés, c'eſt-à-dire, un demi-pied quarré; donc les 5 toiſes-pouces valent 2 pieds quarrés & demi; & comme le demi-pied quarré vaut 72 pouces quarrés, au lieu du demi, j'écris 72; enſuite pour réduire les toiſes-lignes, je les multiplie par 6, parce que la toiſe ligne étant la douzieme partie de la toiſe-pouce, doit valoir la douzieme partie de 72 pouces-quarrés, c'eſt-à-dire, 6 pouces quarrés; un raiſonnement ſemblable prouve qu'on doit multiplier enſuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, &c, ainſi que nous venons de le dire.

Donc réciproquement ſi l'on veut réduire en toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c, des parties quarrées de la toiſe quarrée, l'opération ſe réduira 1°, à prendre le ſixieme du nombre des pieds quarrés ; ce qui donnera des toiſes-pieds. 2°. On doublera le reſte, s'il y en a, & on y ajoutera une unité ſi le nombre des pouces quarrés, eſt, ou excede 72 ; & l'on aura les toiſes-pouces. 3°. Ayant retranché 72, du nombre des pouces quarrés, lorſque ce nombre ſera ou excédera 72, on diviſera le reſte par 6, & l'on aura les toiſes-lignes. 4°. On doublera le reſte, & on y ajoutera une unité ſi le nombre des lignes quarrées excede 72, & on aura le nombre des toiſes-points. On voit par-là comment on doit continuer, pour avoir les parties ſuivantes lorſqu'il doit y en avoir. Ainſi ſi l'on propoſoit de réduire 52^{TT} 25^{PP} 87^{pp} 92^{ll}, en toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. je diviſerois 25 par 6, & j'aurois 4^{TP}, & 1 de reſte ; je double cet 1, & j'y ajoute 1, parce que le nombre des pouces quarrés excede 72 ; j'ai donc 3^{Tp}. Je retranche 72 de 87, & je diviſe le reſte 15, par 6 ; j'ai 2^{Tl} ; & 3 de reſte. Je double ce reſte, & j'y ajoute une unité, parce que le nombre des lignes quarrées excede 72 ; j'ai 7^{Tpts}. Je retranche 72 de 92, & je divise le reste 20, par 6 ; j'ai $3^{T'}$, & 2 de reste ; je double ce reste, & j'ai $4^{T''}$; ensorte que j'ai en total, $52^{TT}\ 4^{TP}\ 3^{Tp}\ 2^{Tl}\ 7^{Tpts}\ 3^{T'}\ 4^{T''}$.

156. Puisque pour avoir la surface d'un parallélogramme il faut multiplier le nombre des parties de la base, par le nombre des parties de la hauteur ; il s'ensuit (*Arith.* 74) que si connoissant la surface & le nombre des parties de la hauteur ou de la base, on veut avoir la base ou la hauteur, il faudra diviser le nombre qui exprime la surface, par le nombre qui exprime celle des deux dimensions qui sera connue. Mais il faut bien observer que ce n'est point une surface que l'on divise alors par une ligne ; la division d'une surface par une ligne, n'est pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne, par une ligne. Ce que l'on fait véritablement, alors on divise une surface par une surface.

En effet, selon ce que nous avons dit (155) lorsqu'on évalue la surface du rectangle *ABCD* (*Fig.* 95), on répete la surface du rectangle *ED* de même base, & qui a pour hauteur l'unité ou la mesure principale *AE*, on répete, dis-je, cette surface autant de fois que sa hauteur *AE* est comprise dans la hauteur *AB*; ainsi, quand on veut connoître le nombre de parties de *AB*, ou le nombre des unités *AE* qu'il contient, il faut chercher combien de fois la surface *ABCD*, contient celle du rectangle *ED*. Donc, si la surface *ABCD* étant exprimée par 361^{TT} 2^{TP} 5^{Tp} 2^{Tl} 8^{Tpts}, la base *AD* est de 4^{T} 3^{P} 6^{p}; pour avoir la hauteur *AB*, il faut concevoir que l'on a 361^{TT} 2^{TP}, &c. à diviser, non par 4^{T} 3^{P} 6^{p}, mais par 4^{TT} 3^{TP} 6^{Tp}; & comme la toise est alors facteur commun du dividende & du diviseur, il est évident que le quotient sera le même que si l'un & l'autre exprimoient des toises & parties de toises linéaires; donc l'opération se réduit à diviser 361^{T} 2^{P}, &c. par 4^{T} 3^{P}, &c. C'est-à-dire, que l'on considéra le dividende & le diviseur, comme exprimant des toises linéaires, & par conséquent comme étant de même espece; & comme l'état de la question fait voir que le quotient doit être aussi de cette même espece, c'est-à-dire, exprimer des toises & parties de toises linéaires, il s'ensuit que la division doit se faire alors précisément selon la regle donnée (*Arith.* 126 & 128).

Si la surface étoit donnée en toises quarrées & parties quarrées de la toise quarrée ; alors pour plus de simplicité, on réduiroit ces parties en toises-pieds, toises-pouces, &c, par ce qui vient d'être dit (155) ; après quoi on opéreroit comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la hauteur d'un parallélogramme ou d'un rectangle qui auroit $2^{T}\ 5^{P}$ de base, & $120^{TT}\ 29^{PP}\ 54^{PP}$ de surface. On réduira (155) cette surface a $120^{TT}\ 4^{TP}\ 10^{TP}\ 9^{Tl}$; & la question d'après ce qui precede, sera réduite à diviser $120^{T}\ 4^{P}\ 10^{P}\ 9^{l}$, par $2^{T}\ 5^{P}$, ce qui, en suivant la regle donnée (*Arith.* 126 & 128), donne $42^{T}\ 3^{P}\ 10^{P}\ 1^{l}\frac{13}{17}$.

De la comparaison des Surfaces.

157. *Les surfaces des parallélogrammes sont entr'elles, en général, comme les produits des bases par les hauteurs.*

C'est-à-dire, que la surface d'un parallélogramme, contient celle d'un autre parallélogramme, autant que le produit de la base du premier par sa hauteur, contient le produit de la baſe du ſecond par ſa hauteur.

Cela eſt évident, puiſque tout parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur.

Delà il eſt aiſé de conclure que lorſque deux parallélogrammes ont même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes ; & que lorſqu'ils ont même baſe, ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs. Car le rapport des produits ne changera point ſi l'on omet, dans chaçun, le facteur qui leur eſt commun (*Arith.* 170).

158. Puiſque les triangles ſont (140) moitiés de parallélogrammes de même baſe & de même hauteur, il faut donc conclure que *les triangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes ; & les triangles de même baſe, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.*

159. *Les ſurfaces des parallélogrammes ou des triangles ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

Car les ſurfaces des deux parallélogrammes $ABCD$ & $abcd$ (*Fig.* 96 & 97), ſont entr'elles (157) comme les produits des baſes par leurs hauteurs ; c'eſt-à-dire, que $ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$.

Mais

Mais si les parallélogrammes *ABCD*, *abcd* sont semblables, & si *AB* & *ab* sont deux côtés homologues, les triangles *AEB*, *aeb*, seront semblables, parce qu'outre l'angle droit en *E* & en *e*, ils doivent avoir de plus l'angle *B* égal à l'angle *b*; on aura donc (109) $AE : ae :: AB : ab$, ou :: $BC : bc$ à cause des parallélogrammes semblables; on peut donc (99) dans les produits $BC \times AE$ & $bc \times ae$, substituer le rapport de $BC : bc$ à celui de $AE : ae$; & alors le rapport de ces produits sera celui de $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; donc $ABCD : abcd :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; & comme on peut prendre indifféremment pour base tel côté qu'on voudra, on voit donc qu'en général les surfaces des parallélogrammes semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

160. A l'égard des triangles semblables, il est évident qu'ils ont la même propriété, puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base & de même hauteur.

161. En général, *les surfaces de deux figures semblables quelconques, sont entr'elles comme les quarrés des côtés, ou des lignes homologues de ces figures.*

Car les ſurfaces de deux figures ſemblables peuvent toujours être regardées comme composées d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun ; alors la ſurface de chaque triangle de la premiere figure, ſera à celle du triangle correſpondant dans la ſeconde, comme le quarré d'un côté du premier, eſt au quarré du côté homologue du ſecond (160) ; donc, puiſque tous les côtés homologues étant en même rapport, leurs quarrés doivent être auſſi tous en même rapport (*Arith.* 191), chaque triangle du premier polygone, ſera au triangle correſpondant du ſecond, comme le quarré d'un côté quelconque du premier polygone, eſt au quarré du côté homologue du ſecond ; donc (*Arith.* 186) la ſomme de tous les triangles du premier, ſera à la ſomme de tous les triangles du ſecond, ou la ſurface du premier, à la ſurface du ſecond, auſſi dans ce même rapport.

162. *Les ſurfaces des cercles ſont donc entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres.*

Car les cercles ſont des figures ſemblables (136), dont les rayons & les diametres ſont des lignes homologues.

On doit dire la même chose des secteurs, & des segments de même nombre de degrés.

On voit donc qu'il n'en est pas des surfaces des figures semblables, comme de leurs contours ; les contours suivent le rapport simple des côtés (134) ; c'est-à-dire, que de deux figures semblables, si un côté de l'une est double, ou triple, ou quadruple, &c, d'un côté homologue de l'autre, le contour de la premiere sera aussi double, ou triple, ou quadruple du contour de la seconde : mais il n'en est pas ainsi des surfaces ; celle de la premiere figure seroit alors quatre fois, 9 fois, 16 fois, &c, aussi grande que celle de la seconde.

On peut rendre cette vérité sensible par les figures 98 & 99, où l'on voit (*Fig* 98) que le parallélogramme *ABCD*, dont le côté *AB* est double du côté *AG* du parallélogramme semblable *AGIE*, contient quatre parallélogrammes parfaitement égaux à celui-ci ; & dans la Figure 99, le triangle *ADF* dont le côté *AD* est double du côté *AB* du triangle semblable *ABC*, contient quatre triangles égaux à celui-ci ; pareillement le triangle *AGK* dont le côté *AG* est triple de *AB*, contient 9 triangles égaux à *ABC*. Il en seroit de même des cercles ; un cercle qui auroit un rayon du double, ou triple, ou quadruple, &c, de celui d'un autre cercle, auroit 4 fois, ou 9 fois, ou 16 fois, &c, autant de surface que celui-ci.

On voit par-là, que deux Navires qui seroient parfaitement semblables, auroient des voilures dont les surfaces seroient entr'elles comme les quarrés des hauteurs des mâts, c'est-à-dire, comme nous le verrons par la suite, comme les quarrés des longueurs des Navires, ou de leurs largeurs ; & par conséquent, on peut dire que deux Navires semblables, & qui présentent leurs voiles au vent de la même maniere, reçoivent des quantités de vent qui sont comme les quarrés des longueurs de ces Navires. Il n'en faut pas conclure pour cela que leurs vîtesses seront dans ce rapport. Nous verrons en Méchanique ce qui doit en être.

Au reste nous n'examinons pas ici, si les Navires semblables doivent avoir des voilures semblables ; c'est un examen qui appartient aussi à la Méchanique.

163. Si l'on vouloit donc construire une figure semblable à une autre, & dont la surface fût à celle de celle-ci, dans un

rapport donné, par exemple, dans le rapport de 3 à 2; il ne faudroit pas faire les côtés homologues, dans le rapport de 3 à 2, car alors les ſurfaces ſeroient comme 9 à 4; mais il faudroit faire ces côtés, de telle grandeur que leurs quarrés fuſſent entr'eux : : 3 : 2; c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que le côté *A B* de la Figure *X* (*Fig.* 100), ſoit de 50^p, par exemple, il faudroit, pour trouver le côté homologue *a b* de la figure cherchée *x* (*Fig.* 101) calculer le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers ſeroient $3 : 2 :: \overline{50}^2$ ou 50×50 eſt à un quatrieme terme; ce quatrieme terme qui eſt $1666\frac{2}{3}$ ſeroit le quarré du côté *a b*; c'eſt pourquoi, tirant la racine quarrée (*Arith.* 145) de $1666\frac{2}{3}$, on trouveroit 40^p, 824, c'eſt-à-dire, $40^p\ 9^p\ 10^l$ à peu-près, pour le côté *ab*. Quand on a un côté de la figure *x*, il eſt aiſé de conſtruire cette figure, ſelon ce qui a été dit (133).

164. *Si ſur les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle rectangle* ABC (Fig. 102), *on conſtruit trois quarrés* BEFA, BGHC, AILC, *celui qui occupera l'hypothénuſe, vaut toujours la ſomme des deux autres.*

Abaiſſons, de l'angle droit B, ſur l'hypothénuſe AC, la perpendiculaire BD; les deux triangles BAD, BDC ſeront chacun ſemblable au triangle ABC (112), & par conſéquent les ſurfaces de ces trois triangles, ſeront entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; on a donc cette ſuite de rapports égaux $ABD : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2 :: ABC : \overline{AC}^2$ ou $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC$; donc (*Arith.* 186) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC$. Or il eſt évident que ABC vaut les deux parties $ABD + BDC$; donc $AILC$ vaut $ABEF + BGHC$, ce qu'on peut encore exprimer en cette maniere $\overline{AC}^2$ vaut $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. Puiſque le quarré de l'hypothénuſe vaut la ſomme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, concluons donc que *le quarré d'un des côtés de l'angle droit, vaut le quarré de l'hypothénuſe, moins le quarré de l'autre côté*; c'eſt-à-dire, que $\overline{BC}^2$ vaut $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, & $\overline{AB}^2$ vaut $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. Donc *lorſqu'on connoît deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours calculer le troiſieme.* Suppoſons, par exemple,

que le côté *A B* ſoit de 12 pieds, le côté *B C* de 25 ; on demande l'hypothénuſe *A C*. J'ajoute 144 qui eſt le quarré du côté *A B*, avec 625 qui eſt le quarré du côté *B C* ; la ſomme 769 eſt égale au quarré de l'hypothénuſe *A C* ; donc ſi je tire la racine quarée de 769, j'aurai l'hypothénuſe *A C* ; cette racine eſt 27, 73 à moins d'un centieme près ; donc le côté *A C* eſt de 27, 73 pieds, c'eſt-à-dire, de $27^p\ 8^p\ 9^l$.

Si au contraire on donnoit l'hypothénuſe & un des côtés, on trouveroit le ſecond côté par ce qui vient d'être dit (165). Par exemple, ſi l'hypothénuſe *A C* étoit de 54 pieds, & le côté *B C* de 42, & qu'on demandât de combien eſt le côté *A B* ; alors de 2916 qui eſt le quarré de l'hypothénuſe 54, je retrancherois 1764 qui eſt le quarré du côté *B C* ; le reſte 1152 ſeroit donc la valeur du quarré du côté *AB* ; tirant la racine quarrée de 1152, cette racine qui eſt 33, 94 ſeroit la valeur de *A B* ; c'eſt-à-dire que *A B* ſeroit de 33^p, 94 ou $33^p\ 11^p\ 3^l$ à-peu-près.

Cette propoſition eſt d'une très-grande utilité ; nous aurons plus d'une occaſion de nous en convaincre par la ſuite.

167. Puiſque le quarré de l'hypothé-

nuſe vaut la ſomme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, il s'enſuit que ſi le triangle rectangle eſt iſoſcele, comme il arrive, par exemple, dans un quarré lorſqu'on tire la diagonale *A C* (*Fig.* 103), alors le quarré de l'hypothénuſe ſera double du quarré d'un de ſes côtés: donc la ſurface d'un quarré eſt à celle du quarré fait ſur la diagonale, comme 1 eſt à 2; donc (*Arith.* 192) le côté d'un quarré eſt à ſa diagonale, comme 1 eſt à la racine quarrée de 2; & comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'enſuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un quarré à ſa diagonale, c'eſt-à-dire, que la diagonale eſt *incommenſurable*, ou n'a aucune commune meſure avec ſon côté.

168. Dans la démonſtration du nº 164, on a vu que la ſimilitude des triangles ABC, ADB, CDB: donne $ABC : \overline{AC}^2 :: ADB : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2$, ou bien $ABC : ADB : BDC :: \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2$; mais les triangles ABC, ADB, BDC étant tous trois de même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes (158); donc $ABC : ADB : BDC ::$

$AC : AD : DC$, donc aussi $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AC : AD : DC$; donc *le quarré fait sur l'hypothénuse, est à chacun des quarrés faits sur les deux autres côtés, comme l'hypothénuse est à chacun des segments correspondants à ces côtés.*

169. De-là on peut conclure le moyen de faire, par lignes, ce que nous avons enseigné à faire par nombres (163); c'est-à-dire de construire une figure x semblable à une figure proposée X (*Fig.* 100 & 101), & dont la surface soit à celle de celle-ci, dans un rapport donné.

On tirera (*Fig.* 104) une ligne indéfinie DE sur laquelle on prendra les deux parties DP & PE telles que DP soit à PE comme la surface de la figure donnée X (*Fig.* 100) doit être à celle de la figure cherchée x (*Fig.* 101), c'est-à-dire, $:: 3 : 2$, si l'on veut que x soit les $\frac{2}{3}$ de X. Sur DE (*Fig.* 104) comme diametre, on décrira le demi-cercle DBE, & ayant élevé au point P la perpendiculaire PB, on menera, du point B où elle rencontre la circonférence, aux deux extrémités D & E, les cordes DB, BE. Sur DB on prendra BA égal à un côté AB

de la figure X, & ayant mené AC parallele à DE, on aura BC pour le côté homologue de la figure cherchée x, qu'on construira ensuite comme il a été dit (133). En voici la raison : la surface de la figure X doit être à celle de la figure x, comme le quarré du côté AB est au quarré du côté cherché ab, c'est-à-dire, $:: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; or on veut que ces deux surfaces soient aussi l'une à l'autre $:: 3 : 2$; il faut donc que $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: 3 : 2$. Or (*Fig.* 104) $AB : BC :: BD : BE$, & par conséquent (*Arith.* 191.) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$; mais comme le triangle DBE est rectangle, on a (168) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 :: DP : PE$, c'est-à-dire, $:: 3 : 2$; donc $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: 3 : 2$; donc aussi $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; donc ab doit être égal à BC.

170. Il suit encore de ce qu'on vient de dire (168), que *les quarrés des cordes* AC, AD, *&c*, *menées par l'extrémité d'un diametre* AB (Fig. 105) *sont entr'eux comme les parties* AP, AO *que coupent sur ce diametre, les perpendiculaires abaissées des extrémités de ces cordes.*

Car en tirant les cordes BC & BD, on aura (168) dans le triangle rectangle ABC;

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP,$$

& dans le triangle rectangle ADB,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 : AO : AB$$

donc (100) $\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: AO : AP.$

Des Plans.

171. Après avoir établi la mesure & les rapports des surfaces planes, il ne nous reste plus, pour pouvoir passer aux solides, qu'à considérer les propriétés des lignes droites dans leurs différentes positions à l'égard des plans, & celles des plans dans leurs différentes positions les uns à l'égard des autres, c'est ce dont nous allons nous occuper actuellement.

Nous ne supposons aux plans dont il va être question, aucune grandeur, ni aucune figure déterminée; nous les supposons étendus indéfiniment dans tous les sens; ce n'est que pour aider l'imagination que nous leur donnons les figures par lesquelles nous les représentons ici.

172. *Une ligne droite ne peut être en*

partie dans un plan, & en partie élevée ou abaissée à son égard.

Car (5) le plan est une surface à laquelle une ligne droite s'applique exactement.

173. *Il en est de même d'un plan à l'égard d'un autre plan.*

Car une ligne droite qu'on tireroit dans la partie plane commune à ces deux plans, pouvant être prolongée indéfiniment dans l'un & dans l'autre, se trouveroit en partie dans l'un de ces plans, & en partie élevée ou abaissée à son égard, ce qui ne peut être (172).

174. *Deux lignes* AB, CD (Fig. 106), *qui se coupent, sont dans un même plan.*

Car il est évident qu'on peut faire passer un plan par l'une *AB* de ces lignes, & par un point pris arbitrairement dans la seconde; & comme le point d'intersection *E*, entant qu'appartenant à *AB*, est dans ce même plan, la ligne *CD* a donc deux points dans ce plan : elle y est donc toute entiere.

175. *La rencontre ou l'intersection de deux plans, ne peut être qu'une ligne droite.*

Il est évident qu'elle doit être une ligne, puisqu'aucun des deux plans n'a d'épaiſſeur : de plus, elle doit être une ligne droite ; car une ligne droite qu'on tireroit par deux points de cette interſection, eſt néceſſairement toute entiere dans chacun des deux plans; elle eſt donc l'interſection même.

176. *On peut donc faire paſſer par une même ligne droite, une infinité de plans différens.*

177. Nous diſons qu'*une ligne eſt perpendiculaire à un plan*, quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan.

178. *Une perpendiculaire* AB *à un plan* GE (Fig. 107) *eſt donc perpendiculaire à toutes les lignes* BC, BC, BC, *&c, qu'on peut mener par ſon pied, dans ce plan;* car s'il y en avoit une à laquelle elle ne fût pas perpendiculaire, elle inclineroit vers cette ligne, & par conſéquent vers le plan.

179. *La ligne* AB (Fig. 108) *étant perpendiculaire au plan* GE, *ſi par ſon pied* B *on tire une ligne* BC *dans le plan* GE, *& qu'on conçoive que le plan* ABC *tourne autour de* AB; *je dis que, dans ce mouvement, la ligne* BC *ne ſortira point du plan* GE.

Imaginons le plan *AB* arrivé dans une poſition quelconque *ABD;* ſi la ligne *BC* qui alors eſt en *BD*, n'étoit point dans le plan *GE*, le plan *ABD* rencontreroit donc le plan *GE* dans une ligne droite *BF*, à laquelle *AB* feroit perpendiculaire (178); *BF* feroit donc auffi perpendiculaire fur *AB*; & comme *BD* eft fuppofée perpendiculaire fur *AB* au même point *B*, il s'enfuivroit donc, qu'au même point *B* & dans un même plan *ABD*, on pourroit élever deux perpendiculaires à *AB*, ce qui (27) eft impoffible; donc *BF* ne peut, être différente de *BD*; donc *BC* ne peut, dans fon mouvement autour de *AB*, fortir du plan *GE*.

180. *Donc, pour qu'une ligne droite* AB (Fig. 108) *foit perpendiculaire à un plan* GE, *il fuffit qu'elle foit perpendiculaire à deux lignes* BC, BD *qui fe rencontrent à fon pied dans ce plan.*

Car fi l'on conçoit que le plan de l'angle droit *ABC*, tourne autour de *AB*, la ligne *BC* tracera (179) un plan auquel *AB* fera perpendiculaire; or je dis que ce plan ne peut être autre que le plan *GE* des deux lignes *BC* & *BD*; car l'angle *ABD* étant droit ainfi que l'angle *ABC*, la ligne *BC*, en tournant autour de *AB*, aura néceffairement la ligne *BD* pour une de fes pofitions; donc *BD* eft dans le plan tracé par *B C*; donc *A B* est perpendiculaire au plan *C B D*.

181. *Si d'un point* A *d'une droite* AF *oblique à un plan* GE, (Fig. 109) *on abaisse une perpendiculaire* AB *sur ce plan, & qu'ayant joint les pieds* B & F *de la perpendiculaire & de l'oblique, par une droite* BF, *on mene à cette derniere, une perpendiculaire* CD *dans le plan* GE; *je dis que* AF *sera aussi perpendiculaire* à CD.

Prenons, à commencer du point *F*, les parties égales *FC*, *FD*, & tirons les lignes *B C* & *B D*; ces deux dernieres lignes seront égales entr'elles (29); donc les deux triangles *A B C*, *A B D* seront égaux; car outre l'angle *A B C* égal à l'angle *A B D*, comme étant chacun droit, le côté *A B* est commun, & *B C* est égal à *B D* selon ce qu'on vient de prouver: ils ont donc un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; donc *A D* est égal à *A C*; la ligne *A F* a donc deux points *A* & *F* également éloignés du point *C* & du point *D*; elle est donc perpendiculaire sur *C D* (32).

182. *Un plan* est dit *perpendiculaire à un autre plan*, quand il ne penche ni

d'un côté, ni de l'autre, de ce dernier.

183. Donc, *par une même ligne* CD (Fig. 110) *prise dans un plan* GE, *on ne peut conduire plus d'un plan perpendiculaire à ce plan* GE.

184. *Un plan* CK *est perpendiculaire à un autre plan* GE, *quand il passe par une droite* AB *perpendiculaire à celui-ci;* car il est évident qu'il ne peut incliner d'aucun côté du plan *GE*.

185. *Si par un point* A *pris dans le plan* CK *perpendiculaire au plan* GE, *on mene une perpendiculaire* AB *à la commune section* CD, *cette ligne sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car si elle ne l'étoit pas, on pourroit par le point *B* où elle tombe, élever une perpendiculaire au plan *GE*, & conduire par cette perpendiculaire & par la commune section *CD*, un plan qui (184) seroit perpendiculaire au plan *GE*; on pourroit donc, par une même ligne *CD*, prise dans le plan *GE*, mener deux plans perpendiculaires à celui-ci; ce qui est impossible (183); donc *AB* est perpendiculaire au plan *GE*.

186. Donc *le plan* CK *étant perpendiculaire au plan* GE, *la perpendiculaire* AB *qu'on*

qu'on élevera sur le plan GE, *par un point* B *de la section commune, sera nécessairement dans le plan* CK.

De cette proposition il suit que *deux perpendiculaires* BA, LM *à un même plan* GE *sont paralleles.*

Car si l'on joint leurs pieds *B* & *L* par une ligne *BL*, & que par cette ligne & par *AB* on conduise un plan *CK*, ce plan sera perpendiculaire au plan *GE* (184); & puisque *LM* est alors une perpendiculaire au plan *GE*, menée par un point *L* du plan *CK*, elle sera donc dans le plan *CK* (186); or, puisque les deux lignes *AB*, *LM* sont toutes deux dans un même plan & perpendiculaires à la même ligne *BL*, elles sont paralleles (*36* & *37*).

187. Donc, *si deux droites* AB, CD (Fig. 112) *sont paralleles chacune à une troisieme* HF, *elles seront aussi paralleles entr'elles;* car les lignes *AB*, *HF* étant paralleles, peuvent être toutes deux perpendiculaires à un même plan *GE;* par la même raison *CD* & *HF*, peuvent être perpendiculaires au même plan *GE;* donc *AB* & *CD* étant perpendiculaires à un même plan, seront paralleles.

188. *Si deux plans* CK, NL (Fig. 111)

sont perpendiculaires à un troisieme GE, *leur commune section* AB *sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car la perpendiculaire qu'on éleveroit par le point *B* sur le plan *GE*, doit être dans chacun de ces deux plans (186); elle ne peut donc être autre que l'intersection commune.

189. On appelle *angle-plan*, l'ouverture de deux plans *GF*, *GE* (*Fig.* 113) qui se rencontrent : cet angle s'appelle aussi l'*inclinaison* de l'un de ces plans à l'égard de l'autre.

L'angle-plan formé par les deux plans *GF*, *GE*, n'est autre chose que la quantité dont le plan *GF* auroit dû tourner autour de *AG* pour venir dans sa situation actuelle, s'il avoit été d'abord couché sur le plan *GE*.

190. De-là il est aisé de voir que si par un point *B* pris dans la commune section *AG*, on mene dans le plan *GE* la perpendiculaire *BD* à *AG*, & dans le plan *GF* la perpendiculaire *BC* à la même ligne *AG*, l'angle formé par les deux plans, est la même chose que l'angle formé par les deux lignes *BD* & *BC*; car il est facile de voir que pendant le mouvement du

plan GF, la ligne BC s'écarte de la ligne BD ſur laquelle elle étoit couchée au commencement du mouvement, s'écarte, dis-je, de BD, préciſément ſelon la même loi, ſelon laquelle le plan GF s'écarte du plan GE.

191. Donc *un angle plan a même meſure que l'angle rectiligne compris entre deux lignes tirées, dans chacun des deux plans qui le forment, perpendiculairement à la commune ſection, & d'un même point de cette ligne.*

De-là il eſt ſi aiſé de conclure les propoſitions ſuivantes, que nous nous contenterons de les énoncer.

192. *Un plan qui tombe ſur un autre plan, forme deux angles, qui, pris enſemble, valent* 180°.

193. *Les angles formés par tant de plans qu'on voudra, qui paſſent tous par une même droite, valent* 360°.

194. *Deux plans qui ſe coupent, ſont les angles oppoſés au ſommet, égaux.*

195. On appelle *plans paralleles*, ceux qui ne peuvent jamais ſe rencontrer, à quelque diſtance qu'on les imagine prolongés.

196. *Les plans paralleles ſont donc par-tout également éloignés.*

197. *Si deux plans paralleles ſont coupés par un troiſieme plan* (Fig. 114), *les interſections* AB, CD *ſeront deux droites paralleles;* car comme elles ſont dans un même plan *ABCD*, elles ne pourroient manquer de ſe rencontrer ſi elles n'étoient pas paralleles, & alors il eſt évident que les plans ſe rencontreroient auſſi.

198. *Deux plans paralleles, coupés, par un troiſieme, ont les mêmes propriétés, dans les angles qu'ils forment avec ce troiſieme, que deux lignes droites paralleles, à l'égard d'une troiſieme droite qui les coupe.* C'eſt une ſuite de ce qui a été dit (191).

Propriétés des lignes droites coupées par des Plans paralleles.

199. *Si d'un point* I *pris hors du plan* GE (Fig. 115) *on tire à différens points* K, L, M, *de ce plan, des droites* IK, IL, IM, *& qu'on coupe ces droites par un plan* g e *parallele au plan* GE; *je dis,* 1°. *que ces droites ſeront coupées proportionnellement;* 2°. *que la figure* klm *ſera ſemblable à la figure* KLM.

Ne ſuppoſons d'abord que trois points *K, L, M*. Puiſque les droites *kl, lm, mk,* ſont les interſections des plans *IKL,* *ILM*, *IKM* avec le plan *ge*, elles ſont paralleles aux droites *KL*, *LM*, *MK*, interſections des mêmes plans avec le plan *GE* (197); donc les triangles *IKL*, *ILM*, *IMK*, ſont ſemblables aux triangles *Ikl*, *Ilm*, *Imk* chacun à chacun; donc $IK : Ik :: KL : kl :: IL : Il :: LM : lm :: IM : Im :: MK : mk$; or, 1°. ſi de cette ſuite de rapports égaux on tire ſeulement ceux qui renferment les droites qui partent du point *I*, on aura $IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im$; donc les droites *IK*, *IL*, *IM* ſont coupées proportionnellement.

2°. Si de la même premiere ſuite de rapports égaux on tire ceux qui renferment les lignes compriſes dans les deux plans paralleles, on aura $KL : kl :: LM : lm :: KM : km$; donc les deux triangles *KLM*, *klm* ſont ſemblables, puiſqu'ils ont les côtés proportionnels.

Suppoſons maintenant, tel nombre de points *A*, *B*, *C*, *D*, *F*, &c. qu'on voudra; on démontrera préciſément de la même maniere, que les droites *IA*, *IB*, *IC*, &c. ſont coupées proportionnellement; & ſi l'on imagine les diagonales *AC*, *AD*, &c. *ac*, *ad*, &c, menées des deux angles correſpondants *A* & *a*, on démontrera, aussi de la même maniere; que les triangles ABC, ACD, &c. sont semblables aux triangles abc, acd, &c. chacun à chacun; donc les deux polygones $ABCDF$, $abcdf$ étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, & semblablement disposés, sont semblables (133).

200. Puisque les deux figures KLM, klm sont semblables, concluons-en que l'angle KLM est égal à l'angle klm, & par conséquent, *si deux droites* KL, LM, *qui comprennent un angle* KLM, *sont paralleles à deux droites*, kl, lm *qui comprennent un angle* klm, *l'angle* KLM *sera égal à l'angle* klm, *lors même que ces deux angles ne seront pas dans un même plan :* nous avons donné cette même proposition (43); mais nous supposions que les deux angles étoient dans un même plan.

201. Il suit encore de ce que les deux figures $ABCDF$ & $abcdf$ sont semblables, & de ce que les deux figures KLM, klm sont semblables; il suit, dis-je, que *les surfaces des deux sections* abcdf, klm *sont entr'elles comme celles des deux figures* ABCDF, KLM.

Car $ABCDF : abcdf :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (161).

Mais les triangles ſemblables IAB, Iab donnent $AB : ab :: IA : Ia$.

Et par conſéquent (*Arith.* 191) $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$ ou (199) $:: \overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$, ou (à cauſe des triangles ſemblables IML, Iml) $:: \overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$; & par conſéquent (161) $:: KLM : klm$; donc $ABCDF : abcdf :: KLM : klm$, ou (*Arith.* 182) $ABCDF : KLM :: abcdf : klm$.

202. Cette démonſtration fait voir en même tems que les ſurfaces $ABCDF$, $abcdf$ ſont entr'elles comme les quarrés de deux droites IA & Ia tirées du point I à deux points correſpondans de ces deux figures, & par conſéquent (199) comme les quarrés des hauteurs ou perpendiculaires IP, Ip menées du point I ſur les plans GE & ge.

Concluons donc, 1°, que ſi les deux ſurfaces $ABCDF$, KLM étoient égales, les deux ſurfaces $abcdf$, klm ſeroient auſſi égales.

2°. Que tout ce que nous venons de dire, auroit encore lieu ſi le point I, au lieu d'être commun aux droites IA, IB, IC, &c, & aux droites IM, IL, &c,

étoit différent pour chaque figure; pourvu qu'il fût à même hauteur au-dessus du plan *ge*.

III^e SECTION.

Des Solides.

203. Nous avons nommé *Solide*, ou *Volume*, ou *Corps* (1), tout ce qui a les trois dimensions, *Longueur*, *Largeur* & *Profondeur*.

Nous allons nous occuper de la mesure & des rapports des solides.

Nous considérerons les solides terminés par des surfaces planes : & de ceux qui sont renfermés par des surfaces courbes, nous ne considérerons que le *cylindre*, le *cône*, & la *sphere*.

Les solides terminés par des surfaces planes, se distinguent en général par le nombre & la figure des plans qui les renferment; ces plans doivent être, au moins, au nombre de quatre.

204. Un solide, dont deux faces op-

posées sont deux plans égaux & paralleles, & dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes, s'appelle en général un *Prisme*. *Voyez figures* 116, 117, 118, 119.

On peut donc regarder le prisme, comme engendré par le mouvement d'un plan *BDF* qui glisseroit parallélement à lui-même le long d'une ligne droite *AB* (*Fig.* 116).

Les deux plans paralleles se nomment les *bases* du prisme, & la perpendiculaire *LM* menée d'un point de l'une des bases, sur l'autre base, se nomme la *hauteur*.

De l'idée que nous venons de donner du prisme, il suit, qu'à quelque endroit qu'on coupe un prisme par un plan parallele à sa base, la section sera toujours un plan parfaitement égal à la base.

Les lignes telles que *BA* qui sont les rencontres de deux parallélogrammes consécutifs, sont nommées les *arrêtes du prisme*.

Le prisme est *droit*, lorsque les arrêtes sont perpendiculaires à la base; alors elles sont toutes égales à la hauteur; *voyez figures* 117 & 119.

Au contraire le prisme est *oblique*, lorsque ses arrêtes inclinent sur la base.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leur base; si la base est un triangle, le prisme est dit *prisme triangulaire* (*Fig.* 116) : si la base est un quadrilatere, on l'appelle *prisme quadrangulaire* (*Fig.* 117); & ainsi de suite.

Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue plus particuliérement le *parallélipipede* & le *cube*.

Le *parallélipipede* est un prisme quadrangulaire dont les bases, & par conséquent toutes les faces, sont des parallélogrammes; & lorsque le parallélogramme qui sert de base est un rectangle, & qu'en même tems le prisme est droit, on l'appelle *Parallélipipede* rectangle. *Voyez Fig.* 117.

Le parallélipipede rectangle prend le nom de *cube*, lorsque la base est un quarré, & que l'arrête *AB* (*Fig.* 119) est égale au côté de ce quarré.

Le cube est donc un solide compris sous six quarrés égaux. C'est avec ce solide qu'on mesure tous les autres, comme nous le verrons dans peu.

205. Le *cylindre* est le solide compris entre deux cercles égaux & paralleles, & la surface que traceroit une ligne *AB* (*Fig.* 120 & 121), qui glisséroit parallélement

à elle-même le long des deux circonférences. Le cylindre eſt *droit* quand la ligne *CF*, (*Fig.* 120) qui joint les centres des deux baſes oppoſées, eſt perpendiculaire à ces cercles : cette ligne *CF* s'appelle l'*axe* du cylindre. Et le cylindre eſt *oblique*, quand cette même ligne *CF* incline ſur la baſe.

On peut conſidérer le cylindre droit, comme engendré par le mouvement du parallélogramme rectangle *FCDE* tournant autour de ſon côté *CF*.

206. La *pyramide* eſt un ſolide compris ſous pluſieurs plans, dont l'un, qu'on appelle la *baſe*, eſt un polygone quelconque, & les autres, qui ſont tous des triangles, ont pour baſes les côtés de ce polygone, & ont tous leurs ſommets réunis en un même point, qu'on appelle le *ſommet* de la pyramide. *Voyez figures* 122, 123, 124.

La perpendiculaire *AM* menée du ſommet ſur le plan qui ſert de baſe, s'appelle la *hauteur* de la pyramide.

Les pyramides ſe diſtinguent par le nombre des côtés de leurs baſes ; en ſorte que celle qui a pour baſe un triangle, eſt appellée *pyramide triangulaire ;* celle qui a pour baſe un quadrilatere, *pyramide quadrangulaire ;* & ainſi de ſuite.

La pyramide eſt dite *réguliere*, lorſque le polygone qui lui ſert de baſe eſt régulier, & qu'en même tems la perpendiculaire *AM* (*Fig.* 124), menée du ſommet, paſſe par le centre de ce polygone.

La perpendiculaire *AG* menée du ſommet *A* ſur l'un *DE* des côtés de la baſe, s'appelle *apothême.*

Il eſt clair que tous les triangles qui aboutiſſent au point *A*, ſont égaux & iſoſceles; car ils ont tous les baſes égales, & les arrêtes *AB, AC, AD*, &c, ſont toutes égales, puiſque ce ſont toutes des obliques également éloignées de la perpendiculaire *AM* (29).

Il n'eſt pas moins évident que tous les apothêmes ſont égaux.

207. Le *cône* (*Fig.* 125 & 126) eſt le ſolide renfermé par le plan circulaire *BGDH* qu'on appelle la baſe du cône, & par la ſurface que traceroit une ligne *AB* tournant autour du point fixe *A*, & raſant toujours la circonférence *BGDH.*

Le point *A* s'appelle le *ſommet* du cône.

La perpendiculaire, menée du ſommet ſur le plan de la baſe, ſe nomme la *hauteur* du cône : & le cône eſt *droit* ou *oblique*, ſelon que cette perpendiculaire paſſe (*Fig.* 125) ou ne paſſe point (*Fig* 126) par le centre de la baſe.

On peut concevoir le cône droit, comme engendré par le mouvement du triangle rectangle *ACD*, (*Fig.* 125) tournant autour du côté *AC*.

208. La *ſphere* eſt un ſolide terminé de toutes parts par une ſurface dont tous les points ſont également éloignés d'un même point.

On peut conſidérer la ſphere comme le ſolide qu'engendreroit le demi-cercle *ABD* (*Fig.* 128), tournant autour du diametre *AD*.

Il eſt évident que toute *coupe*, ou toute *ſection* de la ſphere par un plan, eſt un cercle. Si ce plan paſſe par le centre, la ſection s'appelle *grand cercle* de la ſphere. Et on appelle, au contraire, *petit cercle*, toute ſection de la ſphere, par un plan qui ne paſſe point par le centre.

Le *ſecteur ſphérique* eſt le ſolide qu'engendreroit le ſecteur circulaire *BCA* tournant autour du rayon *AC*. La ſurface que décriroit l'arc *AB* dans ce mouvement, s'appelle *calotte ſphérique*.

Le *ſegment ſphérique* eſt le ſolide qu'engendreroit le demi-ſegment circulaire *AFB*, tournant autour de la partie *AF* du rayon.

Des Solides ſemblables.

209. Les *ſolides ſemblables* ſont ceux qui ſont compoſés d'un même nombre de faces ſemblables chacune à chacune, & ſemblablement diſpoſées dans les deux ſolides.

210. *Les arrêtes homologues & les ſommets des angles ſolides homologues, ſont donc des lignes & des points ſemblablement placés dans les deux ſolides;* car les arrêtes homologues, & les ſommets des angles ſolides homologues, ſont des lignes & des points ſemblablement placés à l'égard des faces auxquelles ils appartiennent, puiſque ces faces ſont ſuppoſées ſemblables; or ces faces ſont ſemblablement diſpoſées dans les deux ſolides; donc, &c.

211. Donc *les triangles qui joignent un angle ſolide & les extrémités d'une arrête homologue, dans chaque ſolide, ſont deux figures ſemblables, & ſemblablement diſpoſées dans les deux ſolides;* car les extrémités des arrêtes homologues ſont elles-mêmes

les ſommets d'angles ſolides homologues, qui ſont (210) ſemblablement placés à l'égard des ſolides.

212. *Les diagonales qui joignent deux angles ſolides homologues, ſont donc entr'elles comme les arrêtes homologues de ces ſolides;* car elles ſont les côtés des triangles ſemblables dont on vient de parler, & qui ont pour un de leurs côtés, des arrêtes homologues.

Donc deux ſolides ſemblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides ſemblables chacune à chacune, par des plans conduits par deux angles homologues, & par deux arrêtes homologues. Car les faces de ces pyramides ſeront compoſées de triangles ſemblables, & ſemblablement diſpoſés dans les deux ſolides (211); & les baſes de ces mêmes pyramides ſeront auſſi ſemblables, puiſqu'elles ſont des faces homologues des deux ſolides; donc (209) ces pyramides ſeront ſemblables.

213. *Si de deux angles homologues on abaiſſe des perpendiculaires ſur deux faces homologues, ces perpendiculaires ſeront entr'elles dans le rapport de deux arrêtes homologues quelconques.*

Car les deux angles homologues étant semblablement disposés à l'égard de deux faces homologues (210) doivent nécessairement être à des distances de ces faces, qui soient entr'elles dans le rapport des dimensions homologues des deux solides.

De la Mesure des Surfaces des Solides.

214. Les surfaces des prismes & des pyramides, étant composées de parallélogrammes, de triangles & de polygones rectilignes, nous pourrions nous dispenser de rien dire ici sur la maniere dont on doit s'y prendre pour les mesurer, puisque nous avons donné (145, 147 & 149) les moyens de mesurer les parties dont elles sont composées. Mais on peut tirer de ce que nous avons dit à ce sujet, quelques conséquences, qui non-seulement serviront à simplifier les opérations qu'exigent ces mesures, mais nous serons encore utiles pour évaluer les surfaces des cylindres, des cônes & même de la sphere.

215. *La surface d'un prisme quelconque (en n'y comprenant point les deux bases) est*

eſt égale au produit de l'une des arrêtes de ce priſme, par le contour d'une ſection b d f h k, (Fig. 118) *faite par un plan auquel cette arrête ſeroit perpendiculaire.*

Car puiſque l'arrête *A B* eſt ſuppoſée perpendiculaire au plan *b d f h k*, les autres arrêtes qui ſont toutes paralleles à celle-là, ſeront auſſi perpendiculaires au plan *b d f h k*; donc réciproquement les droites *b d*, *d f*, *f h*, *h k*, &c, ſeront perpendiculaires chacune ſur l'arrête qu'elle coupe ; en conſidérant donc les arrêtes comme les baſes des parallélogrammes qui enveloppent le priſme, les lignes *b d*, *d f*, *f h* en ſeront les hauteurs. Il faudra donc, pour avoir la ſurface du priſme, multiplier l'arrête *A B*, par la perpendiculaire *b d*; l'arrête *C D*, par la perpendiculaire *d f*, & ainſi de ſuite ; & ajouter tous ces produits : mais comme toutes les arrêtes ſont égales, il eſt évident qu'il revient au même d'en multiplier une ſeule *A B*, par la ſomme de toutes les hauteurs, c'eſt-à-dire, par le contour *b d f h k*.

216. Quand le priſme eſt droit, la ſection *b d f h k* ne différe pas de la baſe *B D F H K*, & l'arrête *A B* eſt alors la hauteur du priſme ; donc *la ſurface d'un priſme*

droit (en n'y comprenant point les deux bases), est égale au produit du contour de la base, multiplié par la hauteur.

217. Nous avons vu ci-dessus (136) qu'on pouvoit considérer le cercle, comme un polygone régulier d'une infinité de côtés ; donc le cylindre peut être considéré comme un prisme dont le nombre des parallélogrammes qui composent la surface, seroit infini. Donc,

La surface d'un cylindre droit est égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de sa base. Nous avons vu (152) comment on doit s'y prendre pour avoir cette circonférence.

A l'égard du cylindre oblique, il faut multiplier sa longueur *A B*, par la circonférence de la section *b g d h* (*Fig.* 121), cette section étant faite comme il a été dit (215). La méthode pour déterminer la longueur de cette section, dépend de connoissances plus étendues que celles que nous avons données jusqu'ici ; dans la pratique, il faut se contenter de la mesurer méchaniquement, en enveloppant le cylindre avec un fil (ou autre chose équivalente) qu'on aura soin d'assujettir dans un plan auquel la longueur

A B de ce cylindre, ſoit perpendiculaire.

218. *Pour la pyramide*, ſi elle n'eſt pas réguliere, il faut chercher ſéparément la ſurface de chacun des triangles qui la compoſent, & ajouter ces ſurfaces.

Mais ſi elle eſt réguliere, on peut avoir ſa ſurface plus briévement, en multipliant le contour de ſa baſe, par la moitié de l'apothême *A G*, (*Fig* 124); car tous les triangles étant de même hauteur, il ſuffit de multiplier la moitié de la hauteur commune, par la ſomme de toutes les baſes.

219. En conſidérant encore la circonférence d'un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on voit que le cône n'eſt, au fond, qu'une pyramide réguliere, dont la ſurface (non compris celle de la baſe) eſt compoſée d'une infinité de triangles, & que par conſéquent, *la ſurface convexe d'un cône droit, eſt égale au produit de la circonférence de ſa baſe, par la moitié du côté* A B *de ce cône* (Fig. 125).

A l'égard de la ſurface du cône oblique, elle dépend d'une géométrie plus compoſée; ainſi nous n'en parlerons point ici. Au reſte, la maniere dont nous venons de conſidérer le cône, donne le moyen de le mesurer à peu-près, lorsqu'il est oblique. Il faut partager la circonférence de la base en un assez grand nombre d'arcs, pour que chacun puisse être considéré, sans erreur sensible, comme une ligne droite; & alors on calculera la surface, comme pour une pyramyde qui auroit autant de triangles qu'on a d'arcs.

220. *Pour avoir la surface d'un tronc de cône droit, dont les bases opposées* BGDH, b g d h (*Fig.* 127) *sont paralleles; il faut multiplier le côté* B b *de ce tronc, par la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées.*

En effet, on peut concevoir cette surface, comme l'assemblage d'une infinité de trapezes tels que *E F f e* dont les côtés *E e*, *F f* tendent au sommet *A*; or la surface de chacun de ces trapezes, est égale à la moitié de la somme des deux bases opposées *E F*, *e f*, multipliée par la distance de ces deux bases (148) mais cette distance ne differe pas des côtés *E e*, *F f* ou *B b*; donc pour avoir la somme de tous ces trapezes, il faut multiplier la moitié de la somme de toutes les bases opposées, telles que *E F*, *e f*, c'est-à-dire, la moitié de la somme des deux circonférences, par la ligne *B b* hauteur commune de tous ces trapezes.

221. Si par le milieu *M* du côté *B b*, on conduit un plan parallele à la base, la section (199) sera un cercle dont la circonférence sera la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées, puisque son diametre *M N* (148) est la moitié de la somme de ceux des bases, & que (136) les circonférences sont entr'elles comme leurs diametres. Donc *la surface d'un cône tronqué, à bases paralleles, est égale au produit du côté du tronc, par la circonférence de la section faite à distances égales des deux bases opposées.* Cette proposition va nous servir pour la démonstration de la suivante.

222. *La surface d'une sphere est égale au produit de la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diametre.*

Concevez la demi-circonférence *A K D* (*Fig.* 129) divisée en une infinité d'arcs; chacun de ces arcs, tel que *K L*, étant infiniment petit, se confondra avec sa corde.

Menons par les extrémités de *K L* les perpendiculaires *KE*, *LF* au diametre *AD*; & par le milieu *I* de *KL* ou de sa corde, menons IH parallele à KE, & le rayon IC; ce rayon sera perpendiculaire sur KL (52); tirons enfin KM perpendiculaire sur IH ou sur LF. Si l'on conçoit que la demi-circonférence AKD tourne autour de AD, elle engendrera la surface de la sphere, & chacun de ses arcs KL engendrera la surface d'un cône tronqué, qui sera un élément de celle de la sphere. Nous allons voir que la surface de ce cône tronqué est égale au produit de KM ou EF multiplié par la circonférence qui a pour rayon IC ou AC.

Le triangle KML est semblable au triangle IHC, puisque ces deux triangles ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, d'après ce qu'on vient de prescrire. Ces triangles semblables donneront donc (112) cette proportion $KL : KM :: IC : IH$; ou (puisque (136) les circonférences sont entr'elles comme leurs rayons) $KL : KM :: cir.\ IC : cir.\ IH$ (*); donc puisque (*Arith.* 178) dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, $KL \times cir.\ IH$ est égal à $KM \times$

(*) Par ces expressions $cir.\ IC$, $cir.\ IH$, nous entendons la circonférence qui a pour rayon IC, la circonférence qui a pour rayon IH.

cir. IC, ou (ce qui revient au même) eſt égal à $EF \times$ *cir.* AC. Or (221) le premier de ces produits exprime la ſurface du cône tronqué engendré par KL; donc ce cône tronqué eſt égal à $EF \times$ *cir.* AC, c'eſt-à-dire, au produit de ſa hauteur EF par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere. Et comme en prenant tout autre arc que KL, on démontreroit la même choſe & de la même maniere, on doit conclure que la ſomme des petits cônes tronqués qui compoſent la ſurface de la ſphere, eſt égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la ſomme des hauteurs de ces cônes tronqués, laquelle ſomme compoſe évidemment le diametre. Donc la ſurface de la ſphere eſt égale à la circonférence d'un de ſes grands cercles, multipliée par le diametre.

223. Si l'on conçoit un cylindre (*Fig.* 130) qui entoure la ſphere en le touchant, & qui ait pour hauteur le diametre de cette ſphere; c'eſt-à-dire, ſi l'on conçoit un cylindre circonſcrit à la ſphere, on pourra conclure que la *ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit;* car (217) la ſurface de ce

cylindre eſt égale au produit de la circonférence de la baſe, multipliée par la hauteur ; or la circonférence de la baſe eſt celle d'un grand cercle de la ſphere ; & la hauteur eſt égale au diametre ; donc, &c.

224. Puiſque (151) pour avoir la ſurface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diametre, & que pour avoir celle de la ſphere, il faut multiplier la circonférence par le diametre, on doit donc dire que *la ſurface de la ſphere eſt quadruple de celle d'un de ſes grands cercles.*

225. La démonſtration que nous venons de donner de la meſure de la ſurface de la ſphere, prouve également que pour avoir la ſurface convexe du ſegment ſphérique qu'engendreroit l'arc *AL* (*Fig.* 131) tournant autour du diametre *AD*, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la ſphere, par la hauteur *AH* de ce ſegment ; & que pour avoir celle d'une portion de ſphere compriſe entre deux plans paralleles tels que *LKM*, *NRP*, il faut pareillement multiplier la circonférence d'un grand cercle de la ſphere, par la hauteur *IO* de cette portion de ſphere. Car on peut conſidérer

ces ſurfaces, ainſi qu'on l'a fait pour la ſphere entiere, comme compoſées d'une infinité de cônes tronqués, dont chacun eſt égal au produit de ſa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere.

Des rapports des Surfaces des Solides.

226. Si deux ſolides dont on a deſſein de comparer les ſurfaces, ſont terminés par des plans diſſemblables & irréguliers, le ſeul parti qu'il y ait à prendre pour trouver le rapport de leurs ſurfaces, eſt de calculer ſéparément la ſurface de chacun en meſures de même eſpece, & de comparer le nombre des meſures de l'une, au nombre des meſures de l'autre; c'eſt-à-dire, par exemple, le nombre des pieds quarrés de l'une, au nombre des pieds quarrés de l'autre.

227. *Les ſurfaces des priſmes (en n'y comprenant point les baſes oppoſees) ſont entr'elles comme les produits de la longueur de ces priſmes, par le contour de la ſection faite perpendiculairement à cette longueur.*

Car ces ſurfaces ſont égales à ces produits (215).

228. Donc *si les longueurs sont égales, les surfaces des prismes seront entr'elles comme le contour de la section faite perpendiculairement à la longueur de chacun.* Car le rapport des produits de la longueur par le contour de cette section, ne changera point si l'on omet, dans chacun de ces produits, la longueur qui en est facteur commun.

229. Donc *les surfaces des prismes droits ou des cylindres droits de même hauteur, sont entr'elles comme les contours des bases, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces bases.*

Et si, au contraire, *les contours des bases sont les mêmes, & les hauteurs différentes, ces surfaces seront comme les hauteurs.*

230. *Les surfaces des cônes droits sont entr'elles, comme les produits des côtés de ces cônes, par les circonférences des bases, ou par les rayons, ou par les diametres de ces bases.*

Car ces surfaces étant égales chacune au produit de la circonférence de la base par la moitié du côté du cône (219), doivent être entr'elles comme ces produits, & par conséquent comme le double de ces produits. D'ailleurs, comme les circonférences ont entr'elles le même rapport que leurs rayons ou leurs diametres, on peut (99) ſubſtituer dans ces produits, le rapport des rayons, ou celui des diametres, à celui des circonférences.

231. *Les ſurfaces des ſolides ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs lignes homologues.*

Car elles ſont compoſées de plans ſemblables, dont les ſurfaces ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés ou de leurs lignes homologues, leſquelles lignes ſont lignes homologues des ſolides, & proportionnelles à toutes les autres lignes homologues.

232. *Les ſurfaces de deux ſpheres, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres.* Car la ſurface d'une ſphere étant quadruple de celle de ſon grand cercle, les ſurfaces de deux ſpheres doivent être entr'elles comme le quadruple de leurs grands cercles, ou ſimplement comme leurs grands cercles; c'eſt-à-dire, (162) comme les quarrés des rayons ou des diametres.

De la ſolidité des Priſmes.

233. Pour fixer les idées ſur ce qu'on

doit entendre par la *ſolidité* d'un corps ; il faut ſe repréſenter, par la penſée, une portion d'étendue de telle forme qu'on voudra, de la forme d'une cube, par exemple, mais qui ait infiniment peu de longueur, de largeur & de profondeur, & concevoir que la capacité d'un corps eſt entiérement remplie de pareils cubes que nous nommerons *points ſolides*. La totalité de ces points forme ce que nous entendons par *ſolidité* d'un corps.

234. *Deux priſmes ou deux cylindres, ou un priſme & un cylindre de même baſe & de même hauteur, ou de baſes égales & de hauteurs égales, ſont égaux en ſolidité, quelque différentes que ſoient d'ailleurs les figures des baſes.*

Car ſi l'on imagine ces corps, coupés par des plans paralleles à leurs baſes, en tranches infiniment minces, & d'une épaiſſeur égale à celle des points ſolides dont on peut imaginer que ces corps ſont remplis, il eſt viſible que, dans chacun, chaque ſection étant égale à la baſe (204), le nombre de points ſolides dont chaque tranche ſera compoſée, ſera par-tout le même, & égal au nombre des points ſuperficiels de la baſe : & comme on ſuppose même hauteur aux deux solides, ils auront chacun le même nombre de tranches ; ils contiendront donc, en totalité, le même nombre de points solides ; donc ils sont égaux en solidité.

De la mesure de la solidité des Prismes & des Cylindres.

235. La considération des points solides dont nous venons de faire usage, est principalement utile lorsque pour démontrer l'égalité de deux solides, on est obligé de considérer ces solides dans leurs éléments mêmes, en les décomposant en tranches infiniment minces ; nous aurons encore occasion de les considérer de cette maniere. Mais lorsqu'on veut mesurer les capacités ou solidités des corps, pour les usages ordinaires, ce n'est point en cherchant à évaluer le nombre de leurs points solides qu'on y parvient ; car on conçoit très-bien que dans tel corps que ce soit, il y a une infinité de ces sortes de points.

Que fait-on donc, à proprement parler, quand on mesure la solidité des corps? on cherche à déterminer combien de fois le corps dont il s'agit, contient un autre corps connu. Par exemple, quand on veut mesurer le parallélipipede rectangle *ABCDEFGH*, (*Fig.* 132) on a pour objet de connoître combien ce parallélipipede contient de cubes tels que le cube connu x; c'est ordinairement en mesures cubiques qu'on évalue les solidités des corps.

Pour connoître la solidité du parallélipipede rectangle *ABCDEFGH*, il faut chercher combien sa base *EFGH* contient de parties quarrées telles que *efgh*; chercher pareillement combien la hauteur *AH* contient de fois la hauteur *ah*; & multipliant le nombre des parties quarrées de *EFGH*, par le nombre des parties de *AH*, le produit exprimera combien le parallélipipede proposé, contient de cubes tels que x; c'est-à-dire, combien il contient de pieds-cubes, ou de pouces-cubes, &c, si le côté *ah* du cube x est d'un pied, ou d'un pouce.

En effet, on voit qu'on peut placer sur la surface *EFGH* autant de cubes tels que x, qu'il y a de quarrés tels que *efgh* dans la base *EFGH*. Tous ces cubes formeront un parallélipipede dont la hauteur *HL* ſera égale à *a h*; or il eſt évident qu'on pourra placer dans le ſolide *ABCDEFGH* autant de parallélipipedes tels que celui-là, que la hauteur *H L* ſera contenue de fois dans *A H*; donc il faut répéter ce parallélipipede ou le nombre des cubes répandus ſur *E F G H*, autant de fois qu'il y a de parties dans *AH*; ou puiſque le nombre de ces cubes eſt le même que le nombre des quarrés contenus dans la baſe, il faut multiplier le nombre des quarrés contenus dans la baſe, par le nombre des parties de la hauteur, & le produit exprimera le nombre de cubes contenus dans le parallélipipede propoſé.

236. Puiſqu'on a démontré (234) que les priſmes de baſes égales & de hauteurs égales, ſont égaux en ſolidité, il ſuit de cette propoſition, & de ce que nous venons de dire, que pour avoir le nombre des meſures cubes que renfermeroit le priſme quelconque *A C E G I K B D F H*, (*Fig.* 118) il faut évaluer ſa baſe *K B D F H* en meſures quarrées, & ſa hauteur *L M* en parties égales au côté du cube qu'on prend pour meſure, & multiplier le nombre des meſures quarrées qu'on aura trouvées dans la baſe, par le nombre des meſures

linéaires de la hauteur, ce qu'on exprime ordinairement en disant : *la solidité d'un prisme quelconque est égale au produit de la surface de sa base, par la hauteur de ce prisme.*

Mais nous devons observer ici la même chose que nous avons fait remarquer (145) à l'occasion des surfaces : de même qu'on ne peut pas dire avec exactitude, qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une surface par une ligne. C'est, ainsi qu'on vient de le voir, un solide (dont le nombre des cubes est le même que le nombre des quarrés de la base) qu'on répete autant de fois que sa hauteur est comprise dans celle du solide total ; c'est-à-dire, autant de fois qu'il est dans le solide qu'on veut mesurer.

237. Concluons de ce qui précede, que *pour avoir la solidité d'un cylindre droit ou oblique, il faut pareillement multiplier la surface de sa base, par la hauteur de ce cylindre*, puisqu'un cylindre est égal à un prisme de même base & de même hauteur que lui (234).

De la solidité des Pyramides.

238. Rappellons-nous ce qui a été dit (201); & en l'appliquant aux pyramides, nous en conclurons que si l'on coupe deux pyramides *IABCDF*, *IKLM*, (*Fig.* 115) de même hauteur, par un même plan *ge* parallele au plan de leur base (*), les sections *abcdf*, *klm* seront entr'elles dans le rapport des bases *ABCDF*, *KLM*, & seront par conséquent égales si ces bases sont égales. Si l'on conçoit de nouveau ces pyramides coupées par un plan parallele au plan *ge* & infiniment près de celui-ci, on voit que les deux tranches solides comprises entre ces deux plans infiniment voisins doivent être aussi entr'elles dans le rapport des bases; car le nombre des points solides nécessaires pour remplir ces deux tranches d'égale épaisseur, ne peut dépendre que de la grandeur des sections correspondantes. Cela posé, comme les deux pyramides sont de même hauteur, on ne peut pas concevoir plus de tranches dans l'une

(*) Nous supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait rendu le sommet commun, & qu'on ait placé les bases sur un même plan *GE*.

que dans l'autre; ainsi les tranches correspondantes étant toujours dans le rapport des bases, les totalités de ces tranches, & par conséquent les solidités des pyramides, seront entr'elles comme les bases. Donc *les solidités de deux pyramides de même hauteur, sont entr'elles comme les bases de ces pyramides*, & par conséquent, *les pyramides de bases égales & de hauteurs égales, sont égales en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Mesure de la solidité des Pyramides.

239. Puisque mesurer un corps, n'est autre chose que chercher combien de fois il contient un autre corps connu; ou, en général, chercher quel est son rapport avec un autre corps connu; il ne s'agit donc, pour pouvoir mesurer les pyramides, que de trouver leur rapport avec les prismes, c'est ce que nous allons établir dans la proposition suivante.

240. *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base, & de même hauteur qu'elle.*

La démonstration de cette proposition

ſe réduit à faire voir qu'une pyramide triangulaire eſt le tiers d'un priſme triangulaire de même baſe & de même hauteur qu'elle, car on peut toujours concevoir un priſme, comme composé d'autant de priſmes triangulaires, & une pyramide comme composée d'autant de pyramides triangulaires qu'on peut concevoir de triangles dans le polygone qui ſert de baſe à l'un & à l'autre : *voyez Figure* 118.

Or voici comment on peut ſe convaincre de la vérité de la propoſition, pour la pyramide triangulaire. Soit *ABCDEF* (*Fig.* 133) un priſme triangulaire : concevez que ſur les faces *AE*, *CE* de ce priſme on ait tiré les deux diagonales *BD*, *BF*, & que ſuivant ces diagonales on ait conduit un plan *BDF*; ce plan détachera du priſme une pyramide de même baſe & de même hauteur que ce priſme, puiſqu'elle a ſon ſommet en *B* dans la baſe ſupérieure, & qu'elle a pour baſe, la baſe même inférieure *DEF* du priſme : on voit cette pyramide iſolée dans la Figure 134, & la Figure 135 repréſente ce qui reſte du priſme.

On peut ſe repréſenter ce reſte comme renverſé ou couché ſur la face *ADFC*;

& alors on voit que c'eſt une pyramide quadrangulaire qui a pour baſe le parallélogramme *ADFC*, & pour ſommet le point *B*; donc ſi l'on conçoit que dans la baſe *ADFC* on ait tiré la diagonale *CD*, on pourra ſe repréſenter que la pyramide totale *ADFCB* eſt composée de deux pyramides triangulaires *ADCB*, *CFDB* qui auront pour baſes les deux triangles égaux *ACD*, *CDF*, & pour ſommet commun le point *B*, & qui, par conſéquent, ſeront égales (238). Or de ces deux pyramides, l'une, ſavoir la pyramide *ADCB* peut être conçue comme ayant pour baſe le triangle *ABC*, c'eſt-à-dire, la baſe ſupérieure du priſme, & pour ſommet le point *D* qui a appartenu à la baſe inférieure; cette pyramide eſt donc égale à la pyramide *DEFB* (*Fig.* 134), puiſqu'elle a même baſe & même hauteur que celle-ci; donc les trois pyramides *DEFB*, *ADCB*, *CFDB*, ſont égales entr'elles; & puiſque réunies, elles compoſent le priſme, il faut en conclure que chacune eſt le tiers du priſme; ainſi la pyramide *DEFB* eſt le tiers du priſme *ABCDEF* de même baſe & de même hauteur qu'elle.

241. Puiſqu'un cône peut être conſidéré comme une pyramide dont le contour de la baſe auroit une infinité de côtés, & le cylindre comme un priſme dont le contour de la baſe auroit auſſi une infinité de côtés, il faut en conclure, qu'*un cône droit, ou oblique, eſt le tiers d'un cylindre de même baſe & de même hauteur.*

242. Donc *pour avoir la ſolidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il faut multiplier la ſurface de la baſe, par le tiers de la hauteur.*

243. A l'égard du tronc de pyramide ou de cône, lorſque les deux baſes oppoſées ſont paralleles, ce qu'il y a à faire pour en trouver la ſolidité, conſiſte à trouver la hauteur de la pyramide retranchée, & alors il eſt aiſé de calculer la ſolidité de la pyramide entiere & de la pyramide retranchée, & par conſéquent celle du tronc. Par exemple, dans la Figure 115, ſi je veux avoir la ſolidité du tronc KLM klm, je vois (242) qu'il faut multiplier la ſurface KLM par le tiers de la hauteur IP; multiplier pareillement la ſurface klm par le tiers de la hauteur Ip, & retrancher ce dernier produit, du premier; mais comme on ne connoît ni la hauteur de la

pyramide totale, ni celle de la pyramide retranchée, voici comment on déterminera l'une & l'autre. On a vu ci-dessus (199) que les lignes IL, IM, IP, &c. sont coupées proportionnellement par le plan ge, & qu'elles sont à leurs parties Il, Im, Ip comme $LM : lm$; on aura donc

$LM : lm :: IP : Ip$:

Donc (*Arith.* 184) $LM - lm : LM :: IP - Ip : IP$.

C'est-à-dire, $LM - lm : LM :: Pp : IP$.

Or quand on connoît le tronc, on peut aisément mesurer les côtés Lm, lm & la hauteur Pp; on pourra donc, par cette proportion, calculer le quatrieme terme IP (*Arith.* 179) ou la hauteur de la pyramyde totale; & en retranchant celle du tronc, on aura la hauteur de la pyramide retranchée.

De la solidité de la Sphere, de ses Secteurs, & de ses Segments.

244. *Pour avoir la solidité d'une sphere, il faut multiplier sa surface par le tiers du rayon.*

Car on peut considérer la surface de la

ſphere comme l'aſſemblage d'une infinité de plans infiniment petits, dont chacun ſert de baſe à une petite pyramide qui a ſon ſommet au centre de la ſphere, & qui, par conſéquent, a pour hauteur le rayon. Puis donc que chacune de ces petites pyramides eſt égale (242) au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, c'eſt-à-dire, par le tiers du rayon, elles ſeront toutes enſemble égales au produit de la ſomme de toutes leurs baſes, par le tiers du rayon, c'eſt-à-dire, égales au produit de la ſurface de la ſphere, par le tiers du rayon.

245. Puiſque la ſurface de la ſphere eſt (224) quadruple de celle d'un de ſes grands cercles, *on peut donc, pour avoir la ſolidité d'une ſphere, multiplier le tiers du rayon par quatre fois la ſurface d'un des grands cercles, ou quatre fois le tiers du rayon par la ſurface d'un des grands cercles, ou enfin les $\frac{2}{3}$ du diametre par la ſurface d'un des grands cercles.*

246. Pour avoir la ſolidité d'un cylindre, nous avons vu qu'il falloit multiplier la ſurface de la baſe par la hauteur s'il s'agit donc du cylindre circonſcrit à la ſphere (*Fig.* 130), on peut dire que

ſa ſolidité eſt égale au produit d'un des grands cercles de la ſphere, par le diametre ; or celle de la ſphere (245) eſt égale au produit d'un des grands cercles par les $\frac{2}{3}$ du diametre ; donc *la ſolidité de la ſphere n'eſt que les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre circonſcrit.*

247. La calotte ſphérique *AGBHEA* qui ſert de baſe à un ſecteur ſphérique *CBGEHA* (*Fig.* 128) peut être auſſi conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de plans infiniment petits ; & par conſéquent le ſecteur ſphérique lui-même, peut être conſidéré comme l'aſſemblage d'une infinité de pyramides qui ont toutes pour hauteur le rayon, & dont la totalité des baſes forme la ſurface de ce ſecteur ; donc *le ſecteur ſphérique eſt égal au produit de la ſurfaee de la calotte, par le $\frac{1}{3}$ du rayon.* Nous avons vu (225) comment on trouve la ſurface de la calotte.

248. A l'égard du ſegment, comme il vaut le ſecteur *CBGEHA* moins le cône *CBGEH;* ayant enſeigné (247) & (242) la maniere de trouver la ſolidité de ces deux corps, il ne nous reſte rien à dire ſur cet article.

De la mesure des autres Solides.

249. Pour les autres solides terminés par des surfaces planes, la méthode qui se présente naturellement pour les mesures, c'est de les imaginer composés de pyramides qui aient pour bases ces surfaces planes, & pour sommet commun, l'un des angles du solide dont il s'agit; mais outre que cette méthode est rarement la plus commode, elle est d'ailleurs moins expéditive & moins propre pour la pratique, que la suivante que nous exposerons ici d'autant plus volontiers qu'elle peut être employée utilement à la mesure de la solidité de la carene des Vaisseaux, comme nous le ferons voir quand nous aurons établi les propositions suivantes.

250. Nous appellerons *prisme tronqué*, le solide *ABCDEF* (*Fig* 136) qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme, par un plan *ABC* incliné à la base.

251. *Un prisme triangulaire tronqué, est composé de trois pyramides qui ont chacune pour base, la base* DEF *du prisme, & dont la premiere a son sommet en* B, *la seconde en* A, *& la troisieme en* C.

Avec une légere attention, on peut se représenter le prisme tronqué, comme composé de deux pyramides, l'une triangulaire qui aura son sommet au point *B*, & pour base le triangle *DEF*; la seconde qui aura aussi son sommet au point *B*, mais qui aura pour base le quadrilatere *ADFC*.

Si l'on tire la diagonale *AF*, on peut se représenter la pyramide quadrangulaire *BADFC* comme composée de deux pyramides triangulaires *BADF*, *BACF*; or la pyramide *BADF* est égale en solidité à une pyramide *EADF* qui ayant la même base *ADF*, auroit son sommet au point *E*; car la ligne *BE* étant parallele au plan *ADF*, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la pyramide *EADF* peut être considérée comme ayant pour base *EDF*, & son sommet au point *A*; voilà donc, jusqu'ici, deux des trois pyramides dont nous avons dit que le prisme tronqué doit être composé; il ne reste donc plus qu'à faire voir que la pyramide *BACF* est équivalente à une pyramide qui auroit aussi pour base *EDF*, & qui auroit son sommet en *C*; or c'est ce qu'il est facile de voir en tirant la diagonale *CD*, & faisant attention que la pyramide $BACF$ doit être égale à la pyramide $EDCF$; parce que ces deux pyramides ont leurs sommets B & E dans la même ligne BE parallele au plan $ACFD$ de leurs bases; & que ces bases ACF & CFD sont égales, puisque ce sont des triangles qui ont même base CF & qui sont compris entre les paralleles AD & CF. Ainsi, la pyramide $BACF$ est égale à la pyramide $EDCF$; mais celle-ci peut être considérée comme ayant pour base DEF, & son sommet en C; donc en effet le prisme tronqué est composé de trois pyramides qui ont pour base commune le triangle DEF, & dont la premiere a son sommet en B, la seconde en A, la troisieme en C.

252. Donc *pour avoir la solidité d'un prisme triangulaire tronqué, il faut abaisser, de chacun des angles de la base supérieure, une perpendiculaire sur la base inférieure, & multiplier la base inférieure, par le tiers de la somme de ces trois perpendiculaires.*

253. On peut tirer de cette proposition plusieurs conséquences pour la mesure des prismes tronqués autres que les triangulaires, & même pour d'autres solides; si l'on conçoit, par exemple, que

de tous les angles d'un ſolide terminé par des ſurfaces planes, on mene ſur un même plan, pris comme on le voudra, des perpendiculaires, on fera naître autant de priſmes tronqués qu'il y aura de faces dans le ſolide; comme chaque priſme tronqué devient facile à meſurer, d'après ce que nous venons de dire, tout ſolide terminé par des ſurfaces planes, ſe meſurera donc, auſſi facilement par les mêmes principes : nous n'entrerons pas dans ce détail ; nous nous bornerons à en tirer une conſéquence utile à notre objet.

254. Soit donc *ABCDEFGH* (*Fig* 137) un ſolide compoſé de deux priſmes triangulaires tronqués *ABCEFG*, *ADCEHG*, dont les arrêtes *AE*, *BF*, *CG*, *DH* ſoient perpendiculaires à la baſe, & qui ſoient tels que les baſes *EFG*, *EHG* forment le parallélogramme *EFGH*, & que les baſes ſupérieures ſoient, pour plus de généralité, deux plans différemment inclinés à la baſe *EFGH*. Il ſuit de ce qui a été dit ci-deſſus (252) que le ſolide *ABCDEFGH* eſt égal au triangle *EFG* multiplié par $\frac{BF+2AE+2CC+HD}{3}$; car le priſme tronqué *ABCEFG* eſt égal (252) au triangle *EFG*

multiplié par $\frac{BF+AE+GC}{3}$; & par la même raiſon, le priſme tronqué *ADCEHG* eſt égal au triangle *EHG*, ou (ce qui revient au même) au triangle *EFG* multiplié par $\frac{AE+GC+HD}{3}$; donc la totalité de ces deux priſmes tronqués, eſt égale au triangle *EFG* multiplié par $\frac{BF+2AE+2GC+HD}{3}$.

Soit maintenant un ſolide (*Fig.* 138) compris entre deux plans *ABLM*, *ablm* paralleles, deux autres plans *ABba*, *MLlm*, paralleles entr'eux & perpendiculaires aux deux autres, un plan *BLlb* perpendiculaire à ceux-là ; & enfin la ſurface courbe *AHMmha* ; & concevons ce ſolide coupé par des plans *Cd*, *Ef*, *Gh*, &c, paralleles à *ABba*, également diſtants les uns des autres, & aſſez près pour qu'on puiſſe regarder *AD*, *ad*, *DF*, *df*, &c, comme des lignes droites : ſuppoſons enfin que les deux plans *ABLM*, *ablm* ſont aſſez près l'un de l'autre pour qu'on puiſſe regarder, ſans erreur ſenſible, les ſections *Dd*, *Ff*, *Hh*, &c, comme des lignes droites ; il eſt viſible que les ſolides partiels

ADdabBCc, *DFfdcCEe*, &c, font dans le cas du folide de la *Figure* 137. Donc la totalité de ces folides fera égale au triangle bBC multiplié par $\frac{AB+2ab+2CD+cd}{3}+\frac{CD+2cd+2EF+ef}{3}+\frac{EF+2ef+2GH+gh}{3}+\frac{GH+2gh+2IK+ik}{3}+\frac{IK+2ik+2LM+lm}{3}$, c'eft-à-dire, en réuniffant les quantités femblables, fera égale au triangle bBC multiplié par $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$; & comme le triangle bBC eft égal à $\frac{Bb\times BC}{2}$, le folide entier fera égal à $\frac{Bb\times BC}{2}\times(\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+CD+cd+EF+ef+GH+gh+IK+ik+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm)$.

Dans la vue de rendre cette expreffion plus fimple, remarquons que fi au lieu de $\frac{1}{3}AB+\frac{2}{3}ab+\frac{2}{3}LM+\frac{1}{3}lm$ que l'on a entre les deux parenthefes, on avoit la quantité $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}LM+\frac{1}{2}lm$ le folide en queftion feroit égal à la moitié de la fomme des deux furfaces $ABLM$, $ablm$, multipliée par l'épaiffeur Bb; car (154) la furface $ABLM$ eft égale à $BC \times (\frac{1}{2} AB + CD + EF + GH + IK + \frac{1}{2} LM)$ & la ſurface $ablm$ eſt, par la même raiſon, égale à bc ou $BC \times (\frac{1}{2} ab + cd + ef + gh + ik + \frac{1}{2} lm)$; donc la moitié de la ſomme de ces deux ſurfaces multipliée par l'épaiſſeur Bb, ſeroit $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2} LM + \frac{1}{2} lm)$; donc le ſolide en queſtion ne differe de ce produit, que de la quantité dont $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3} AB + \frac{2}{3} ab + \frac{2}{3} LM + \frac{1}{3} lm)$ ſurpaſſe la quantité $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} LM + \frac{1}{2} lm)$; or il eſt aiſé de voir (*Arith.* 103) que cette différence eſt $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6} ab - \frac{1}{6} AB + \frac{1}{6} LM - \frac{1}{6} lm)$; donc le ſolide cherché eſt égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2} LM + \frac{1}{2} lm) + \frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6} ab - \frac{1}{6} AB + \frac{1}{6} LM - \frac{1}{6} lm)$; or il eſt aiſé de remarquer que $\frac{1}{6} ab - \frac{1}{6} AB + \frac{1}{6} LM - \frac{1}{6} lm$ eſt une quantité fort petite en comparaiſon de celle qui eſt entre les deux premieres parentheſes, puiſque les deux plans $ABLM$,

ablm étant supposés peu distants, la différence de AB à ab, & celle de LM à lm ne peuvent être que de fort petites quantités ; on peut donc réduire la valeur de ce solide, à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2} LM + \frac{1}{2} lm)$, c'est-à-dire, à $Bb \times \left(\frac{ABLM + ablm}{2}\right)$.

On peut donc dire que pour avoir la solidité d'une tranche de solide comprise entre deux surfaces planes paralleles, de telle figure qu'on voudra, & peu distantes l'une de l'autre ; il faut multiplier la moitié de la somme de ces deux surfaces, par l'épaisseur de cette tranche.

255. Si l'épaisseur Bb de la tranche étoit trop considérable pour qu'on pût regarder Aa, Dd comme des lignes droites, il faudroit concevoir le solide partagé en plusieurs tranches d'égale épaisseur, par des plans paralleles à l'une des surfaces $ABLM$, $ablm$, & mesurant ces surfaces $ABLM$, $ablm$ & leurs paralleles, on auroit la solidité en ajoutant toutes les surfaces intermédiaires, & la moitié de la somme des deux extrêmes $ABLM$, $ablm$, & multipliant le tout par l'épaisseur

seur d'une des tranches ; c'est une suite immédiate de ce que nous venons de dire.

L'application de ceci, à la mesure de la partie de la carene, que la charge du navire fait plonger dans la mer, est maintenant très-facile. On mesurera la surface des deux coupes horizontales faites à fleur d'eau, lorsque le navire est chargé, & lorsqu'il est vuide. On ajoutera ces deux surfaces, & on multipliera la moitié de leur somme, par la distance de ces deux surfaces, c'est-à-dire, par l'épaisseur de la tranche qu'elles comprennent.

Si l'on vouloit avoir la solidité de la carene entiere, on feroit usage de ce qui vient d'être dit (255); mais il faudroit la considérer comme coupée en plusieurs tranches, non pas paralleles à la coupe faite à fleur d'eau, mais perpendiculaires à la longueur du navire.

Lorsqu'on mesure le volume de la partie de la carene que la charge fait plonger, on peut se contenter de mesurer la surface de la coupe prise à égale distance de deux coupes dont nous avons parlé ci-dessus, & la multiplier, comme ci-devant, par l'épaisseur de la tranche ; car cette coupe moyenne différera toujours très-peu de la moitié de la ſomme des deux autres.

Parmi quelques-uns des objets que nous conſidérerons dans l'application de l'Algebre à la Géométrie, on trouvera des méthodes plus rigoureuſes ; néanmoins celles que nous venons d'expoſer, ſeront toujours ſuffiſantes, tant qu'on aura ſoin de meſurer les ſurfaces avec aſſez d'exactitude, & de multiplier les tranches lorſque l'épaiſſeur eſt conſidérable.

Nous verrons, dans la quatrieme Partie de ce Cours, que la charge du navire eſt égale au poids d'un volume d'eau égal au volume de la partie de la carene qu'elle fait plonger ; lors donc qu'on a évalué ce volume en pieds-cubes, ſi l'on veut connoître la peſanteur de la charge, il n'y a qu'à multiplier le nombre des pieds-cubes par 72 ℔ qui eſt à-peu-près le poids d'un pied-cube d'eau de mer ; mais comme on évalue toujours cette charge en tonneaux, au lieu de multiplier par 72, pour diviſer enſuite par 2000, ce qui ſeroit néceſſaire pour réduire en tonneaux, on diviſera ſeulement le nombre des pieds-cubes par 28, parce que 28 fois 72 faiſant à peu-près 2000, autant de fois il y aura 28 dans la ſolidité mesurée, autant il y aura de tonneaux.

Du Toisé des Solides.

256. Après ce que nous avons dit (155) sur le toisé des surfaces, il doit y avoir fort peu de choses à dire sur le toisé des solides.

Pour évaluer un solide en toises-cubes, & en parties de la toise-cube, on peut s'y prendre de deux manieres principales. La premiere est de compter par toises-cubes & par parties-cubes de la toise-cube, c'est-à-dire, par toises-cubes, pieds-cubes, pouces-cubes, &c.

La *toise-cube* ou *cubique* contient 216 pieds-cubes, parce que c'est un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, & 6 pieds de haut.

Le *pied-cube* contient 1728 pouces-cubes, parce que c'est un cube qui a 12 pouces de long, sur 12 pouces de large, & 12 pouces de haut.

Par la même raison on voit que le *pouce-cube* contient 1728 lignes-cubes, & ainsi de suite.

257. Donc pour évaluer un solide, en

toiſes-cubes & parties-cubes de la toiſe-cube, il faudra réduire chacune de ſes trois dimenſions, à la plus petite eſpece; multiplier deux de ces dimenſions ainſi réduites, l'une par l'autre, & le produit réſultant, par la troiſieme; & pour réduire en lignes - cubes, pouces-cubes, pieds-cubes & toiſes-cubes (en ſuppoſant que la plus petite eſpece ait été des points), on diviſera ſucceſſivement par 1728, 1728, 1728 & 216; ou ſeulement par 1728, 1728 & 216, ſi la plus petite eſpece eſt ſeulement des lignes, & ainſi de ſuite.

Par exemple, ſi l'on a un parallélipipede qui ait $2^T\ 4^P\ 8^p$ de long, $1^T\ 3^P$ de large, & $3^T\ 5^P\ 7^p$ de haut, on réduira ces trois dimenſions à 200^p, 108^p, & 283^p qui étant multipliés, ſavoir 200 par 108, & le produit 21600^{pp} par 283^p donneront 6112800 pouces-cubes, ou 6112800^{ppp}; diviſant donc par 1728, on aura 3537 pieds-cubes ou 3537^{PPP} & 864 de reſte, c'eſt-à-dire, 864^{ppp}; diviſant 3537^{PPP} par 216, on aura 16 toiſes-cubes ou 16^{TTT} & 81^{PPP}; enſorte que le parallélipipede en queſtion, contient $16^{TTT}\ 81^{PPP}\ 864^{ppp}$.

258. Dans la ſeconde maniere d'éva-

luer les ſolides, en toiſes-cubes & parties de la toiſe-cube, on ſe repréſente la toiſe-cube partagée en ſix parallélipipedes, qui ont tous une toiſe quarrée de baſe, ſur un pied de haut, & que pour cette raiſon on appelle *toiſe-toiſe-pieds*. On conçoit de même, la toiſe-toiſe-pied, partagée en 12 parallélipipedes, qui ont chacun une toiſe quarrée de baſe & un pouce de haut, & qu'on appelle *toiſe-toiſe-pouces* ; on ſubdiviſe de même, chacune de celles-ci, en 12 parallélipipedes, qui ont chacun une toiſe quarrée de baſe ſur une ligne de haut ; & on continue de ſubdiviſer en parallélipipedes, qui ont conſtamment une toiſe quarrée de baſe ſur un point, une prime, une ſeconde, &c. de haut ; enſorte que les ſubdiviſions ſont abſolument analogues à celle de la toiſe linéaire, comme nous avons vu que l'étoient celles de la toiſe quarrée ; & les noms de ces différentes ſubdiviſions ne different de ceux qui ſont relatifs à la toiſe quarrée, qu'en ce que le mot *toiſe* y eſt énoncé deux fois.

Les multiplications relatives à cette diviſion de la toiſe-cube, ſont abſolument les mêmes que celles que nous avons enſeignées relativement à la toiſe-quarrée.

A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'un d'entr'eux comme exprimant des toises-cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, &c; & les deux autres comme marquant des nombres abstraits, dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur. Par exemple, en reprenant le parallélipipede que nous venons de calculer ci-dessus, & supposant que la longueur *AD* (*fig.* 139) est de $2^T\ 4^P\ 8^p$, la largeur *AB* de $1^T\ 3^P$, & la hauteur *AL* de $3^T\ 5^P\ 7^p$; si l'on prend *AI* & *AE* chacun d'une toise, & qu'on se représente le parallélipipede *AIFEHGKD*, il est visible que ce parallélipipede est de $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$, puisqu'il a une toise quarrée de base sur une longueur de $2^T\ 4^P\ 8^p$. Or pour avoir la solidité du parallélipipede total, on voit qu'il faut répéter ce parallélipipede partiel, d'abord autant de fois que sa largeur *AI* est contenue dans la largeur *AB*, c'est-à-dire, une fois & demie, ou autant que le marque $1^T\ 3^P$; puis répéter ce produit autant de fois que la hauteur *AE* est contenue dans la hauteur *AL*, c'est-à-dire, autant de fois que le marque $3^T\ 5^P\ 7^p$, considéré comme nombre abstrait.

Mais pour se guider aisément, dans ces multiplications, on laissera aux facteurs les signes de la toise tels qu'ils les ont; il suffit de savoir que le produit doit être des toises-cubes, toises-toises-pieds, &c; ainsi, en opérant comme au toisé des surfaces, on trouvera comme il suit :

2^{T}	4^{P}	8^{p}	
1^{T}	3^{P}		
2^{TT}	0^{TP}	0^{Tp}	
0	3		
0	1		
0	0	4	
0	0	4	
1	2	4	
4^{TT}	1^{TP}	0^{Tp}	
3^{T}	5^{P}	7^{p}	
12^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTp}	0^{TTl}
0	3	0	
2	0	6	
0	4	2	
0	4	2	
0	2	1	
0	0	4	2
16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}

259. Il est aisé de convertir ces parties

de la toiſe, en parties cubes, c'eſt-à-dire, pieds-cubes, pouces-cubes, &c. Il faut écrire ſous les parties de la toiſe, à commencer des toiſe-toiſe-pieds, les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$; 36, 3, $\frac{1}{4}$ conſécutivement, & multiplier chaque nombre ſupérieur par ſon correſpondant inférieur; porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$ chacun au-deſſous du premier de ces nombres; & lorſqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il reſtera 1 ou 2 ou 3, on écrira ſous le nombre 36 ſuivant, 432, ou 864 ou 1296, pour commencer une ſeconde colonne. Appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner.

$$\begin{array}{llllll}
16^{TTT} & 2^{TTp} & 3^{TTp} & 2^{TTl} & 0^{TTpt} \\
 & 36 & 3 & \frac{1}{4} & 36 \\
\hline
16^{TTT} & 72^{ppp} & \ldots\ldots & & .864 \\
 & 9 & & & \\
\hline
16^{TTT} & 81^{ppp} & 464^{ppp} & &
\end{array}$$

on trouve le même produit que par la premiere méthode.

On multiplie les toiſe-toiſe-pieds par 36, parce que la toiſe-toiſe-pied ayant un pied de haut ſur une toiſe quarrée ou 36 pieds quarrés de baſe, doit contenir 36 pieds-cubes. La toiſe-toiſe-pouce étant la douzieme partie de la toiſe-toiſe-pied, doit contenir la douzieme partie de 36 pieds-cubes, c'eſt-à-dire, trois pieds-cubes; il faut donc multiplier par 3, les toiſe-toiſe-pouces. Pareillement la toiſe-toiſe-ligne étant la douzieme partie de la toiſe-toiſe-pouce, doit contenir la douzieme partie de 3 pieds-cubes ou un quart de pied-cube, ou (à cauſe que le pied-cube vaut 1728 pouces-cubes) elle doit contenir 432^{ppp}; en raiſonnant de même, on voit que la toiſe-toiſe-point vaudroit 36^{ppp}, parce qu'elle eſt la douzieme partie de la toiſe-toiſe-ligne qui vaut 432^{ppp}, dont la douzieme partie eſt 36; donc, &c.

Donc, réciproquement, pour ramener les parties-cubes de la toiſe-cube, à des toiſe-toiſe-pieds, toiſe-toiſe-pouces, &c. il faudra diviſer par 36, le nombre des pieds-cubes, & l'on aura les toiſe-toiſe-pieds: on diviſera le reſte de cette diviſion, par 3, & l'on aura les toiſe-toiſe-pouces. On multipliera par 4, le reſte de cette ſeconde diviſion, & au produit on ajoutera 1, ou 2, ou 3 unités, ſelon que le nombre des pouces-cubes ſera entre 432 & 864, ou 864 & 1296, ou 1296 & 1728, & l'on aura les toiſe-toiſe-lignes ; puis retranchant du nombre des pouces-cubes, le nombre 432, ou 864, ou 1296, ſelon qu'on aura ajouté 1, ou 2, ou 3 unités, on opérera ſur le reſte, comme on a opéré ſur les pieds-cubes, & l'on aura conſécutivement les toiſe-toiſe-points, les toiſe-toiſe-primes, & les toiſe-toiſe-ſecondes ; enfin on continuera de la même maniere, pour les lignes-cubes, &c.

Par exemple ; ſi l'on demande de réduire en toiſe-toiſe-pieds, toiſe-toiſe-pouces, &c. le nombre 47^{TTT} 52^{PPP} 932^{PPP} ; je diviſe 52 par 36, & j'ai 1^{TTP}, & un reſte de 16 ; je diviſe celui-ci par 3, & j'ai 5^{TTp} & un reſte de 1 ; je quadruple ce reſte, & j'y ajoute 2 unités, parce que le nombre des pouces-cubes eſt entre 864 & 1296, & j'ai 6^{TTl}. Retranchant 864, de 932, il reſte 68 ; je le diviſe par 36, & j'ai 1^{TTpt}, & 32 de reſte ; je diviſe celui-ci par 3, & j'ai $10^{T\prime}$, & 2 de reſte ; je quadruple ce reſte, & j'ai $8^{T\prime\prime}$; en ſorte que j'ai, en total, 47^{TTT} 1^{TTP} 5^{TTp} 6^{TTl} 1^{TTpt} $10^{TT\prime}$ $8^{TT\prime\prime}$

260. Puiſque, pour avoir la ſolidité d'un priſme, il faut multiplier la ſurface

de ſa baſe, par ſa hauteur; il s'enſuit que ſi connoiſſant la ſolidité & la baſe, ou la hauteur, on veut avoir la hauteur, ou la baſe, il faut diviſer la ſolidité par celui de ces deux facteurs, que l'on connoîtra. Mais il faut obſerver que dans l'exactitude, ce n'eſt point véritablement la ſolidité que l'on diviſe par la ſurface ou par la hauteur, mais c'eſt un ſolide que l'on diviſe par un ſolide. En effet, d'après ce qui a été dit ci-deſſus, on voit que lorſqu'on évalue un ſolide, on répete un autre ſolide de même baſe, autant de fois que la hauteur de celui-ci eſt contenue dans la hauteur du premier; ou bien on répete un ſolide de même hauteur, autant de fois que la ſurface de la baſe de celui-ci, eſt compriſe dans la baſe de celui-là. Donc quand on voudra, connoiſſant la ſolidité & la ſurface de la baſe, par exemple, connoître la hauteur; il faudra chercher combien de fois la ſolidité propoſée, contient celle d'un ſolide de même baſe, & le quotient marquera par le nombre de ſes unités, le nombre des parties de la hauteur.

Cela poſé, ſi ayant, par exemple, un priſme dont la ſolidité ſoit de

$16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$, & la surface de la base, de $12^{TT}\ 0^{TP}\ 0^{Tp}$, on veut savoir quelle est la hauteur; on considérera le diviseur, non pas comme $12^{TT}\ 0^{TP}\ 0^{Tp}$, mais comme $12^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}$, & alors la question se réduira à diviser $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$ par $12^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}$; mais comme la toise quarrée est facteur commun, le quotient sera le même que si le dividende & le diviseur marquoient des toises linéaires; on aura donc simplement $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$, à diviser par $12^{T}\ 0^{P}\ 0^{p}$, c'est-à-dire, par 12^{T}; & comme la nature de la question fait voir que le quotient doit être des toises linéaires, la division se fera donc selon la regle prescrite (*Arith.* 124 *& suiv.*)

Si la solidité & la hauteur étant données, on cherche quelle doit être la surface de la base; par exemple, si la solidité est de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 2^{TTl}$, & la hauteur de $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; on considérera le diviseur comme étant $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTp}$; & par la même raison que dans le cas précédent, l'opération se réduira à diviser $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{p}\ 2^{l}$, par $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; mais comme le quotient doit évidemment être une surface, on le comptera, non pas pour des toises linéaires, mais pour des toises quarrées, toise-pieds, &c. du reste il n'y aura aucune différence dans la maniere de faire l'opération qui se fera toujours en vertu des regles données (*Arith.* 124 & *suiv.*); c'est-à-dire, qu'après avoir trouvé le quotient, comme s'il devoit exprimer des toises linéaires, on affectera le signe de chaque partie, de la lettre *T*. Par exemple, dans le cas présent, on trouveroit pour quotient $5^T\ 5^p\ 4^p\ 6^l$; on écrira donc $5^{TT}\ 5^{Tp}\ 4^{Tp}\ 6^{Tl}$.

Si la solidité étoit donnée en toises-cubes, & parties cubes de la toise-cube, on la convertiroit en toises-cubes, toise-toise-pieds, &c. par ce qui a été dit (259), & l'opération seroit ramenée au cas précédent.

Du Toisé des Bois.

261. Ce qu'on vient de dire du toisé en général, ne nous laisse que fort peu de choses à dire sur le toisé des bois.

Dans la marine, on mesure les bois en pieds-cubes & parties cubes du pied-cube; ainsi il ne s'agit que de mesurer les dimensions en pieds & parties du pied, & les ayant multipliées (après les avoir réduites à la plus petite eſpece; on réduira en lignes-cubes, pouces-cubes, pieds-cubes, comme il a été dit ci-deſſus, mais en s'arrêtant aux pieds-cubes.

Dans les bâtimens civils & les fortifications, l'uſage eſt de réduire en ſolives.

Par *ſolive,* on entend un parallélipipede de deux toiſes de haut, ſur ſix pouces d'équarriſſage, ou 36 pouces quarrés de baſe; ce qui eſt équivalent à un parallélipipede de 1 toiſe de haut ſur $\frac{1}{2}$ pied quarré ou 72 pouces quarrés de baſe, & qui par conſéquent contient 3 pieds-cubes.

On partage la ſolive, en ſix parties, chacune d'un pied de haut & des 72 pouces quarrés de baſe, & chacune de ces parties s'appelle *pied de ſolive.* On partage de même, le pied de ſolive, en douze parties d'un pouce de haut & de 72 pouces quarrés de baſe chacune, qu'on appelle *pouces de ſolive*, & ainſi de ſuite.

Puiſque la ſolive contient 3 pieds-cubes, ou la 72^e^ partie d'une toiſe-cube, & que les ſubdiviſions ſont les mêmes que celles de la toiſe-cube en toiſe toiſe-pieds, &c, il s'enſuit que le nombre qui exprimeroit un ſolide quelconque en ſolives & parties de ſolives, eſt 72 fois plus grand que celui qui l'exprimeroit en toises-cubes; toise-toise-pieds, &c.

Ainsi, pour évaluer la solidité d'un corps en solives, il n'y a qu'à l'évaluer en toises-cubes, toise-toise-pieds, &c, & multiplier ensuite le produit par 72. Mais on peut éviter cette multiplication en faisant une réflexion assez simple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimensions comme douze fois plus grande, c'est-à-dire, regarder les lignes comme exprimant des pouces, les pouces comme exprimant des pieds, & ainsi de suite. Regarder pareillement une autre des trois dimensions comme six fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pouces, les pouces comme exprimant des demi-pieds; alors multipliant ces deux nouvelles dimensions entr'elles, & le produit par la troisieme, on aura tout de suite, la solidité en solives, pieds de solive, &c. Par exemple, si l'on a une piece de bois de $8^T\ 5^P\ 6^p$ de long, sur $1^P\ 7^p$ de large, & $1^P\ 5^p$ d'épaisseur; au lieu de $1^P\ 7^p$, je prends $3^T\ 1^P$, c'est-à-dire, douze fois plus; & au lieu de $1^P\ 5^p$, je prends $1^T\ 2^P\ 6^p$, c'est-à-dire, six fois plus; & multipliant $8^T\ 5^P\ 6^p$, par $3^T\ 1^P$; puis le produit, par $1^T\ 2^P\ 6^p$, je trouve 40^{TTT} 0^{TTP} 0^{TTp} 1^{TTl} qu'il faut compter pour 40^{sol} 0^{p} 0^{p} 1^{l} dont les pieds, pouces, &c, sont des pieds, pouces, &c. de solive.

Des Rapports des Solides en général.

262. *Comparer deux solides*, c'est chercher combien de fois le nombre de mesures d'une certaine espece contenues dans l'un de ces solides, contient le nombre de mesures de même espece contenues dans l'autre.

263. *Deux prismes, ou deux cylindres, ou un prisme & un cylindre, sont entr'eux comme les produits de leur base par leur hauteur.* Cela est évident, puisque chacun de ces solides est égal au produit de sa base par sa hauteur, quelle que soit d'ailleurs la figure de la base.

Donc *les prismes ou les cylindres, ou les prismes & les cylindres de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases; & les prismes & les cylindres de même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs.* Car le rapport des produits des bases par les hauteurs, ne change point lorsqu'on y omet le facteur commun qui s'y trouve lorsque la base

base ou la hauteur se trouve être la même dans les deux solides.

Donc *deux pyramides quelconques, ou deux cônes, ou une pyramide & un cône sont dans le rapport des hauteurs, lorsque les bases sont égales;* car ces solides sont chacun le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur (240).

264. *Les solidités des pyramides semblables, sont entr'elles comme les cubes des hauteurs de ces pyramides, ou en général, comme les cubes de deux lignes homologues de ces pyramides.*

Car deux pyramides semblables peuvent être représentées par deux pyramides telles que *IABCDF, Iabcdf*, (*Fig.* 115), puisque ces deux pyramides sont composées d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, & semblablement disposées. Puis donc que deux pyramides sont, en général, comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, les bases qui sont ici des figures semblables, étant entr'elles comme les quarrés des hauteurs *IP*, *Ip* (202), les deux pyramides seront entr'elles comme les produits des quarrés des hauteurs, par les hauteurs mêmes; car on pourra (99) ſubſtituer au rapport des baſes, celui des quarrés des hauteurs. Et puiſque (213) les hauteurs ſont proportionnelles à toutes les autres dimenſions homologues, leurs cubes ſeront donc auſſi proportionnels aux cubes de ces dimenſions homologues (*Arith.* 191); donc en général deux pyramides ſemblables ſont entr'elles comme les cubes de leurs dimenſions homologues.

265. Donc *en général les ſolidités de deux corps ſemblables, ſont entr'elles comme les cubes des lignes homologues de ces ſolides.* Car les ſolides ſemblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides ſemblables chacune à chacune; & comme deux quelconques de ces pyramides ſemblables, ſeront entr'elles en même rapport, puiſqu'elles ſont entr'elles comme les cubes de leurs dimenſions homologues, leſquelles ſont en même rapport que deux autres dimenſions homologues quelconques; il s'enſuit que la ſomme des pyramides du premier ſolide, ſera à la ſomme des pyramides du ſecond, auſſi dans le même rapport des cubes des dimenſions homologues.

Donc *les ſolidités des ſpheres ſont entr'elles* *comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diametres.*

Donc en ſe rappellant tout ce qui a précédé, on voit 1°, que les contours des figures ſemblables, ſont dans le rapport ſimple des lignes homologues. 2°, Que les ſurfaces des figures ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés des côtés ou des lignes homologues. 3°, Que les ſolidités des corps ſemblables, ſont entr'elles comme les cubes des lignes homologues.

Ainſi, ſi deux corps ſemblables, deux ſpheres, par exemple, avoient leurs diametres dans le rapport de 1 à 3, les circonférences de leurs grands cercles ſeroient auſſi dans le rapport de 1 à 3; les ſurfaces de ces ſpheres ſeroient comme 1 à 9, & les ſolidités comme 1 à 27; c'eſt-à-dire, que la circonférence d'un des grands cercles de la premiere vaudroit trois fois celle d'un des grands cercles de la ſeconde; la ſurface de la premiere vaudroit neuf fois celle de la ſeconde; & enfin la premiere ſphere vaudroit 27 ſpheres telles que la ſeconde.

Donc pour faire un ſolide ſemblable à un autre & dont la ſolidité ſoit à celle de celui-ci, dans un rapport donné, par exemple, dans celui de 2 à 3; il faut lui donner des dimenſions telles, que le cube de l'une quelconque de ces dimenſions ſoit au cube d'une dimenſion homologue du ſolide auquel il doit être ſemblable, comme 2 eſt à 3. Par exemple, ſi l'on a une ſphere qui ait 8 pouces de diametre, & qu'on demande quel doit être le diametre d'une ſphere qui en ſeroit les $\frac{2}{3}$, il faudra chercher le quatrieme terme de cette proportion 1 : $\frac{2}{3}$ ou 3 : 2 : : le cube de 8, c'eſt-à-dire : : 512 eſt à un quatrieme terme. Ce quatrieme terme qui eſt 341 $\frac{1}{3}$, ſera le cube du diametre cherché : c'eſt pourquoi tirant la racine cubique (*Arith.* 159) on aura 6^p, *99* pour ce diametre; c'eſt à-dire, 7^p à très-peu près; ce qu'on peut vérifier aiſément en cette maniere. Cherchons quelles ſont les ſolidités de deux ſpheres, l'une de 8 pouces, l'autre de 7 pouces de diametre. La circonférence de leur grand cercle ſe trouvera par ces deux proportions (152) 7 : 22 : : 8 :

7 : 22 : : 7 :

les quatriemes termes ſont 25 $\frac{1}{7}$ & 22; multipliant ces circonférences, chacune par ſon diametre, on aura (222) les ſurfaces de ces ſpheres, leſquelles ſeront par conſéquent 201 $\frac{1}{7}$ & 154; enfin multipliant ces ſurfaces par le $\frac{1}{3}$ de leur rayon, c'eſt-à-dire, reſpectivement par le ſixieme de 8 ou de 7, on aura, pour les ſolidités 268 $\frac{4}{21}$ & 179 $\frac{2}{3}$, dont le rapport eſt le même que celui de $\frac{5632}{21} : \frac{539}{3}$, en réduiſant en fractions, ou (en multipliant les deux termes de la derniere fraction par 7, & ſupprimant le dénominateur commun) le même que de 5632 à 3773; or (*Arith.* 167) le rapport de ces deux quantités eſt $1\frac{1850}{3373}$, c'eſt-à-dire, en réduiſant en décimales 1, 49; & le rapport de 3 à 2 eſt 1, 5 ou 1, 50 (*Arith.* 30); la différence n'eſt donc que de $\frac{1}{100}$; cette différence vient de ce que le diametre n'eſt calculé qu'à-peu-près; d'ailleurs le rapport de 7 à 22 n'eſt pas exactement celui du diametre à la circonférence.

Dans les corps composés de la même matiere, les poids ſont proportionnels à la quantité de matiere, ou à la ſolidité; ainſi connoiſſant le poids d'un boulet d'un diametre connu, pour trouver celui d'un boulet d'un autre diametre & de la même matiere, il faut faire cette proportion: Le cube du diametre du boulet dont le poids eſt connu, eſt au cube du diametre du ſecond, comme le poids du premier, eſt à un quatrieme terme qui ſera le poids du ſecond.

Nous avons vu (162) que dans deux Vaiſſeaux parfaitement ſemblables, les voilures ſeroient comme les quarrés des hauteurs des mâts, & par conſéquent, avons-nous dit, comme les quarrés des longueurs des Navires, parce que toutes les dimenſions homologues des ſolides ſemblables ſont en même rapport. Or on voit ici que les poids des ſolides ſemblables & de même matiere, ſont comme les cubes des dimenſions homologues; on voit donc que ſi deux Navires ſemblables étoient mâtés proportionnellement, les quantités de vent qu'ils pourroient recevoir, ſeroient comme les quarrés de leur longueur, tandis que les poids ſeroient comme les cubes; & comme la raiſon des quarrés n'eſt pas la même, & eſt plus petite que celle des cubes, ainſi qu'il eſt facile de s'en convaincre, cette ſeule conſidération fait voir que la voilure qui ſeroit propre pour un certain Navire, ne le ſeroit pas pour un Navire plus petit, ſi l'on diminuoit proportionnellement les deux dimenſions de cette voilure. Il y a encore d'autres conſidérations à faire entrer dans l'examen de cette queſtion, qui appartient proprement à la Méchanique. Nous ne nous propoſons ici que de préparer les eſprits à prévoir les uſages qu'on peut faire des principes établis juſqu'ici, pour la diſcuſſion de ces ſortes de queſtions.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

266. LE MOT *Trigonométrie* ſignifie meſure des triangles. Mais on comprend généralement ſous ce nom, l'art de déterminer les poſitions & les dimenſions des différentes parties de l'étendue, par la connoiſſance de quelques-unes de ces parties.

Si l'on conçoit que les différents points qu'on ſe repréſente dans un eſpace quelconque, ſoient joints les uns aux autres par des lignes droites, il ſe préſente trois choſes à conſidérer : 1°, la longueur de ces lignes ; 2°, les angles qu'elles forment entr'elles ; 3°, les angles que forment entre eux, les plans dans leſquels ces lignes ſont ou peuvent être imaginées compriſes. C'eſt de la comparaiſon de ces trois objets que dépend la ſolution de toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur la meſure de l'étendue & de ſes parties ; & l'art de déterminer toutes ces choſes, par la connoiſſance de quelques-unes d'entr'elles, ſe réduit à la réſolution de ces deux queſtions générales.

1°, Connoiſſant trois des ſix choſes (angles & côtés) qui entrent dans un triangle rectiligne, trouver les trois autres, lorſque cela eſt poſſible.

2°. Connoiſſant trois des ſix choſes qui compoſent un triangle ſphérique, (c'eſt-à-dire, un triangle formé ſur la ſurface d'une ſphere, par trois arcs de cercle qui ont tous trois pour centre, le centre de cette même ſphere) trouver les trois autres, lorſque cela eſt poſſible.

La premiere queſtion, eſt l'objet de la Trigonométrie qu'on nomme *Trigonométrie plane*, parce que les ſix choſes qu'on y conſidere ſont dans un même plan : on la nomme auſſi *Trigonométrie rectiligne.*

La ſeconde queſtion appartient à la *Trigonométrie ſphérique.* Les ſix choſes qu'on y conſidere, ſont dans des plans différents, comme nous le verrons par la ſuite.

De la Trigonométrie plane ou rectiligne.

267. La *Trigonométrie plane* eſt une partie de la Géométrie, qui enſeigne à déterminer ou à calculer trois des ſix parties

d'un triangle rectiligne, par la connoiſſance des trois autres parties, lorſque cela eſt poſſible.

Je dis, lorſque cela eſt poſſible, parce que ſi l'on ne connoiſſoit que les trois angles, par exemple, on ne pourroit pas déterminer les côtés. En effet, ſi par un point *D* pris à volonté ſur le côté *AB* du triangle *ABC* (*Fig.* 140) dont je ſuppoſe qu'on connoiſſe les trois angles, on mene *DE* parallele à *BC*, on aura un autre triangle *ADE* qui aura les mêmes angles que le triangle *ABC* (39); & on voit qu'on en peut former ainſi une infinité d'autres qui auront les mêmes angles. Il faudroit donc que le calcul donnât tout à la fois une infinité de côtés différents.

La queſtion eſt donc alors abſolument indéterminée.

Nous verrons, cependant, que ſi l'on ne peut déterminer les valeurs des côtés, on peut, du moins, déterminer leur rapport.

Mais lorſque parmi les trois choſes connues ou données, il entrera un côté, on peut toujours déterminer tout le reſte. Il y a cependant un cas où il reſte quelque choſe d'indéterminé : le voici. Suppoſé que dans le triangle *ABC* (*Fig.* 141) on connoiſſe les deux côtés *AB* & *BC*, & l'angle *A* oppoſé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer la valeur de l'angle *C* ou celle du côté *AC*, qu'autant qu'on ſaura ſi cette angle *C* eſt aigu ou obtus; en effet, ſi l'on conçoit que du point *B* comme centre & d'un rayon égal au côté *BC*, on ait décrit un arc *CD*, & que du point *D* où cet arc rencontre *AC*, on ait tiré *BD*; on aura un nouveau triangle *ABD*, dans lequel on connoîtra les mêmes choſes qu'on connoît dans le triangle *ABC*, ſavoir, l'angle *A*, le côté *AB*, & le côté *BD* égal à *BC*; on a donc ici les mêmes choſes pour déterminer l'angle *BDA*, qu'on avoit dans le triangle *ABC* pour déterminer l'angle *C*.

Mais il y a cette différence entre ce cas-ci & le précédent, qu'on peut ici aſſigner la valeur de l'angle *C* & de l'angle *BDA*, comme nous le verrons ci-après : la ſeule choſe qui ſoit indéterminée, c'eſt de ſavoir laquelle de ces deux valeurs on doit adopter, & par conſéquent quelle figure doit avoir le triangle. Il faut donc, outre les trois choſes données, ſavoir encore ſi l'angle cherché doit être aigu ou obtus. Au reſte on peut remarquer, en paſſant, que les deux angles *C* & *BDA* dont il s'agit, ſont ſupplément l'un de l'autre; car *BDA* eſt ſupplément de *BDC* qui eſt égal à l'angle *C*, parce que le triangle *BDC* eſt iſoſcele.

268. Ce ne ſont pas les angles même qu'on emploie dans le calcul des triangles : on ſubſtitue aux angles, des lignes qui, ſans leur être proportionnelles, ſont néanmoins propres à repréſenter ces angles, & ſont d'ailleurs plus commodes à employer dans le calcul, parce que, comme nous le verrons ci-après, elles ſont proportionnelles aux côtés des triangles : il convient donc, avant que d'aller plus loin, de faire connoitre ces lignes, & de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles.

Des Sinus, Coſinus, Tangentes, Cotangentes, Secantes, & Coſécantes.

269. La perpendiculaire *AP* (*Fig.* 142) abaiſſée de l'extrémité d'un arc *AB* ſur le rayon *BC* qui paſſe par l'autre extrémité *B* de cet arc, s'appelle le *ſinus droit*, ou ſimplement le *ſinus* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La partie *BP* du rayon, compriſe entre le ſinus, & l'extrémité de l'arc s'appelle le *ſinus-verſe*.

La partie *BD* de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon, interceptée entre ce rayon *BC* & le rayon *CA* prolongé, s'appelle la *tangente* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La ligne *CD*, qui n'eſt autre choſe que le rayon *CA* prolongé juſqu'à la tangente, s'appelle *ſécante* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

Si l'on mene le rayon *CF* perpendiculaire à *CB*, & à ſon extrémité *E* la perpendiculaire *FE* qui rencontre en *F* le rayon *CA* prolongé, & qu'enfin on mene *AQ* perpendiculaire ſur *CF*; il ſuit des définitions précédentes, que *AQ* ſera le ſinus, *FQ* le ſinus-verſe, *FE* la tangente, & *CF* la ſécante de l'arc *AF* ou de l'angle *ACF*.

Mais comme l'angle *ACF* eſt complément de *ACB*, puiſque ces deux angles font enſemble un angle droit, on peut dire que *AQ* eſt le ſinus du complément; *FQ*, le ſinus-verſe du complément; *FE*, la tangente du complément; & *CE*, la ſécante du complément de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

Pour abréger ces dénominations, on est convenu de dire *Cosinus*, au lieu de sinus du complément; *Cosinus-verse*, au lieu de sinus-verse du complément; *cotangente*, au lieu de tangente du complément; & *cosécante*, au lieu de sécante du complément. Ensorte que les lignes *AQ*, *FQ*, *FE*, *CE*, seront dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, & la cosécante de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*; de même les lignes *AP*, *BP*, *BD*, *CD* pourront être dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, & la cosécante de l'arc *AF* ou de l'angle *ACF*; car *AB* est complément de *AF*, comme *AF* l'est de *AB*.

Pour désigner ces lignes, lorsqu'il sera question d'un angle ou d'un arc, nous mettrons devant les lettres qui servent à nommer cet angle ou cet arc, les expressions abrégées, *sin*, *cos*, *tang*, *cot*; ainsi *sin AB*, signifiera le sinus de l'arc *AB*; *sin ACB* signifiera le sinus de l'angle *ACB*; de même *cos AB*, *cos ACB*, signifieront le cosinus de l'arc *AB*, le cosinus de l'angle *ACB*; & pour désigner le rayon, nous prendrons la lettre *R*.

270. Il est évident, 1°, que *le cosinus*

AQ *d'un arc quelconque* AB, *eſt égal à la partie* CP *du rayon, compriſe entre le centre & le ſinus.*

2°, Que *le ſinus-verſe* BP *eſt égal à la différence entre le rayon & le coſinus.*

3°, Que *le ſinus d'un arc quelconque* AB, *eſt la moitié de la corde* AG *d'un arc double* ABG. Car le rayon *CB* étant perpendiculaire ſur la corde *A G*, diviſe cette corde & ſon arc en deux parties égales (52).

271. De cette derniere propoſition, il ſuit que *le ſinus* de 30°, *vaut la moitié du rayon;* car il doit être la moitié de la corde de 60°, ou du côté de l'hexagone, que nous avons vu (93) être égal au rayon.

272. *La tangente de* 45° *eſt égale au rayon.* Car ſi l'angle *ACB* eſt de 45°, comme l'angle *CBD* eſt droit, l'angle *CDB* vaudra auſſi 45°; le triangle *CBD* ſera donc iſoſcele; & par conſéquent *BD* ſera égal à *CB*.

273. A meſure que l'arc *AB* ou l'angle *ACB* augmente, ſon ſinus *AP* augmente, & ſon coſinus *AQ* ou *CP* diminue juſqu'à ce que l'arc *AB* ſoit devenu de 90°; alors le ſinus *AP* devient *FC*, c'eſt-à-dire, égal au rayon, & le coſinus eſt zéro; parce que le point *A* tombant en

F, la perpendiculaire *AQ* devient zéro.

A l'égard de la tangente *BD*, & de la cotangente *FE*, il eſt viſible que la tangente *BD* augmente continuellement, & que la cotangente, au contraire, diminue; mais, l'une & l'autre de maniere que quand l'arc *AB* eſt devenu de 90°, ſa tangente eſt infinie, & ſa cotangente eſt zéro : en effet, plus l'arc *AB* devient grand, plus le point *D* s'éleve au-deſſus de *BC*, & quand le point *A* eſt infiniment près de *F*, les deux lignes *CD* & *BD* ſont preſque paralleles, & ne ſe rencontrent plus qu'à une diſtance infinie; donc *BD* eſt alors infinie; donc elle l'eſt quand le point *A* tombe ſur le point *F*.

274. Ainſi *pour l'arc de 90°, le ſinus eſt égal au rayon, le coſinus eſt zéro, la tangente eſt infinie, & la cotangente eſt zéro.*

Comme le ſinus de 90° eſt le plus grand de tous les ſinus, on l'appelle, pour le diſtinguer des autres *ſinus total;* enſorte que ces trois expreſſions, le *ſinus de 90°*, le *rayon*, le *ſinus total*, ſignifient la même choſe.

275. Lorſque l'arc *AB* paſſe 90° (*Fig.* 143) ſon ſinus *AP* diminue, & ſon coſinus *AQ* ou *CP* qui tombe alors au delà du centre

centre par rapport au point *B*, augmente jusqu'à ce que l'arc *AB* soit devenu de 180°, auquel cas le sinus est zéro, & le cosinus est égal au rayon. On voit aussi que le sinus *AP*, & le cosinus *CP* de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB* plus grand que 90°, appartiennent en même tems à l'arc *AH* ou à l'angle *ACH* moindre que 90° & supplément de celui-là ; de sorte que *pour avoir le sinus & le cosinus d'un angle obtus, il faut prendre le sinus & le cosinus de son supplément.* Mais il faut bien remarquer que le cosinus tombe du côté opposé à celui où il tomberoit, si l'arc *AB* ou l'angle *ACB* étoit moindre que 90°.

A l'égard de la tangente, comme elle est déterminée (269) par la rencontre de la perpendiculaire *BD* (*Fig.* 142) avec le rayon *CA* prolongé, il est visible que lorsque l'arc *AB* (*Fig.* 143) est de plus de 90°, elle est alors *BD*; mais en élevant la perpendiculaire *HI*, il est aisé de voir que le triangle *CBD* est égal au triangle *CHI*, & que par conséquent *BD* est egal à *HI*.

276. Donc *la tangente d'un arc ou d'un angle plus grand que 90°, est la même que celle du supplément de cet arc :* toute la différence qu'il y a, c'est qu'elle tombe

au-dessous du rayon BC. Pour la cotangente EF, elle est aussi la même que la cotangente du supplément ; & elle tombe aussi du côté opposé à celui où elle tomberoit, si l'arc AB ou l'angle ACB étoit moindre que $90°$. On voit encore, & par la même raison que ci-dessus, que pour $180°$, la tangente est zéro, & la cotangente infinie.

277. Ces notions supposées, concevons que le quart de circonférence BF (*Fig.* 142) soit divisé en arcs de $1'$, c'est-à-dire, en 5400 parties égales, & que de chaque point de division, on abaisse des perpendiculaires ou sinus tels que AP, sur le rayon BC; concevons aussi ce rayon BC divisé en un très-grand nombre de parties égales, en 100000, par exemple; chaque perpendiculaire contiendra un certain nombre de ces parties du rayon : si donc, par quelque moyen que ce soit, on pouvoit parvenir à déterminer le nombre de parties de chacune de ces perpendiculaires, il est visible que ces lignes pourroient être employées pour fixer la grandeur des angles ; ensorte que si ayant écrit par ordre, dans une colonne, toutes les minutes depuis zéro jusqu'à $90°$, on

écrivoit dans une colonne à côté & vis-à-vis de chaque minute, le nombre de parties de la perpendiculaire correſpondante, on pourroit, par le moyen de cette table, aſſigner quel eſt le nombre de degrés d'un angle dont le nombre de parties de la perpendiculaire on du ſinus, ſeroit connu; & réciproquement, connoiſſant le nombre des degrés & parties de degré de l'angle, on pourroit aſſigner le nombre des parties de ſon ſinus. Cette table auroit cette utilité, non-ſeulement pour tous les arcs ou angles dont le rayon auroit le même nombre de parties qu'on en auroit ſuppoſé à celui d'après lequel on a conſtruit la table, mais encore pour tout autre dont le rayon ſeroit connu; par exemple, ſuppoſons un angle *DCG* (*Fig.* 144) dont le côté ou rayon *CD* ſoit de 8 pieds, & la perpendiculaire *DE*, de 3 pieds; & imaginons que *CA* ſoit le rayon ſur lequel on a calculé les tables; ſi l'on imagine l'arc *AB* & la perpendiculaire *AP*, cette perpendiculaire ſera le ſinus des tables; or je puis trouver aiſément de combien de parties eſt cette perpendiculaire; car comme les triangles *CDE*, *CAP* ſont ſemblables (à cauſe des paralleles *DE* & *AP*), j'aurai (109) $CD : DE :: CA : AP$, c'est-à-dire, $8^p : 3^p :: 100000 : AP$; je trouverai donc (*Arith.* 179) que AP vaut 37500; je n'aurai donc qu'à chercher ce nombre dans la table parmi les sinus, & je trouverai à côté, le nombre des degrés & minutes de l'angle DCG ou DCE.

Réciproquement si l'on donnoit le nombre des degrés & minutes de l'angle DCG & son rayon CD, on détermineroit de même la valeur de la perpendiculaire DE; car sachant quel est le nombre de degrés & minutes de cet angle, on trouveroit dans la table, quel est le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus AP qui répond à ce nombre de degrés; & alors, en vertu des triangles semblables, CAP, CDE, on auroit cette proportion $CA : AP :: CD : DE$, par laquelle il seroit facile de calculer DE, puisque les trois premiers termes CA, AP & CD sont connus, savoir CA & AP par les tables, & CD est donné en pieds.

On voit par-là quelles sont ces lignes que nous avons dit ci-dessus (268) pouvoir être substituées aux angles, dans le calcul des triangles; ce sont les sinus.

278. Mais les sinus ne sont pas les

ſeules lignes qu'on emploie : on fait uſage auſſi des tangentes & même des ſécantes. Ces lignes ſont faciles à calculer quand une fois on a calculé tous les ſinus ; car comme le triangle CPA & le triangle CBD (*Fig.* 142) ſont ſemblables, on en peut tirer ces deux proportions :

$$CP : PA :: CB : BD$$

$$\& \; CP : CA :: CB : CD$$

c'eſt-à-dire, (en faiſant attention que CP eſt égale à AQ)

$$cof\, AB : fin\, AB :: R : tang\, AB$$

$$\& \; cof\, AB : R :: R : fec\, AB.$$

Or on voit que dans chacune de ces deux proportions, les trois premiers termes ſont connus, lorſqu'on connoît tous les ſinus, puiſque le coſinns d'un arc n'eſt autre choſe que le ſinus du complément de cet arc : il ſera donc aiſé d'en conclure (*Arith.* 179) la valeur du quatrieme terme de chacune, & par conſéquent des tangentes & des ſécantes, & par conſéquent auſſi des cotangentes & des coſécantes, qui ne ſont autre choſe que des tangentes & des ſécantes de complément.

279. Au reſte, les deux dernieres proportions que nous venons d'établir ne ſont pas ſeulement utiles pour le calcul des tan-

gentes & des ſécantes ; elles ſont encore d'un grand uſage dans beaucoup de rencontres, comme nous le verrons dans la ſuite de ce cours : il faut donc s'appliquer à les retenir ; la ſeconde, par exemple, peut nous fournir encore une propriété, qui eſt le fondement de la conſtruction des cartes réduites, comme nous le verrons par la ſuite : voici cette propriété. De même que nous venons de démontrer que $cof\ AB : R :: R : fec\ AB$, on démontrera auſſi pour un autre arc quelconque BO, que $cof\ BO : R :: R : fec\ BO$; or ces deux proportions ayant les mêmes termes moyens, doivent avoir les produits de leurs extrêmes, égaux, (*Arith.* 178); donc on peut (*Arith.* 180) former des extrêmes de l'une & de l'autre, une nouvelle proportion, qui aura pour extrêmes les extrêmes de l'une, & pour moyens les extrêmes de l'autre, enſorte qu'on aura $cof\ AB : cof\ BO :: fec\ BO : fec\ AB$; d'où l'on conclura que les coſinus de deux arcs ſont en raiſon réciproque ou inverſe de leurs ſécantes.

280. Voici encore une autre proportion utile dans pluſieurs cas, & d'où l'on déduira de la même maniere, que les tan-

gentes de deux arcs ſont en raiſon inverſe de leurs cotangentes : les triangles CBD, CFE ſont ſemblables, parce que outre l'angle droit en B & en F, on a de plus l'angle DCB égal à l'angle CEF, à cauſe des paralleles CB, EF; on aura donc BD : CB :: CF : FE, c'eſt-à-dire, *tang* AB : R :: R : *cot* AB : on prouveroit donc de même, que *tang* BO : R :: R : *cot* BO, & par conſéquent *tang* AB : *tang* BO :: *cot* BO : *cot* AB.

Les Livres qui renferment les valeurs de toutes les lignes dont il vient d'être queſtion, ſont ce qu'on appelle des *Tables de Sinus*; elles renferment ordinairement, non-ſeulement les valeurs numériques de toutes ces lignes, mais encore leurs logarithmes qu'on emploie auſſi ſouvent qu'on le peut, à la place des valeurs numériques; ces mêmes Tables renferment auſſi les logarithmes des nombres naturels; telles ſont celles que nous avons indiquées dans l'Arithmétique, page 234 *.

Avant que d'expoſer les uſages de ces Tables, pour la réſolution des triangles, il ne nous reſte plus qu'à parler de leur

* Nous en avons donné dans le Traité de Navigation qui fait le ſixieme Volume de ce Cours.

formation, c'est-à-dire, de la méthode par laquelle on a calculé ou pu calculer les sinus, &c. Nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers, que les propositions que nous avons à établir sur ce sujet, nous serviront ailleurs.

281. *Pour avoir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu, il faut retrancher le quarré du sinus, du quarré du rayon, & tirer la racine quarrée du reste.* Car le cosinus *AQ* (*Fig.* 142) est égal à *PC* qui est côté de l'angle droit dans le triangle rectangle *APC*, dont on connoît alors l'hypothénuse *AC* & le côté *AP*. (166).

Ainsi, si l'on demandoit le cosinus de 30°, comme nous avons vu (271) que le sinus de 30° est la moitié du rayon que nous supposerons ici de 100000 parties, ce sinus seroit 50000; retranchant son quarré 2500000000, du quarré 10000000000 du rayon, on a 7500000000, dont la racine quarrée 86603 est le cosinus de 30°, ou le sinus de 60°.

282. *Connoissant le sinus d'un arc* AB, (Fig. 145), *pour avoir celui de sa moitié,* il faut d'abord calculer le cosinus de ce premier arc; ce cosinus étant calculé, on le retranchera du rayon, ce qui donnera le sinus verse *BP*; on quarrera la valeur de *BP*, & on

ajoutera ce quarré avec celui du sinus *AP*; la somme (166) sera le quarré de la corde *AB*; tirant la racine quarrée de cette somme, on aura *AB*, dont la moitié est le sinus *BI* de l'arc *BD* moitié de *ADB* (270).

283. *Connoissant le sinus* BI, *d'un arc* BD, (Fig. 145), *pour trouver le sinus* AP *du double* ADB *de cet arc*, on calculera le cosinus *CI* de *BD*, & on fera cette proportion, $R : cos\ BD :: 2\ sin\ BD : sin\ ADB$ dans laquelle les trois premiers termes seront alors connus, & dont il sera facile de calculer le quatrieme.

Cette proportion est fondée sur ce que les deux triangles *CBI* & *BAP* sont semblables; parce qu'outre l'angle droit en *P* & en *I*, ils ont d'ailleurs l'angle *B* commun; ainsi on a $CB : CI :: AB : AP$. Or *CI* (270) est le cosinus de *BD*, & *AB* le double de *BI* sinus de *BD*; *AP* est le sinus de *ADB*; & *CB* est le rayon; donc $R : cos\ BD : 2\ sin\ DB : sin\ ADB$.

284. *Connoissant les sinus de deux arcs* AB, AC, (Fig. 146), *pour trouver le sinus de leur somme ou de leur différence*; il faut, après avoir calculé (281) les cosinus de ces mêmes arcs, multiplier le sinus du premier par le cosinus du second, & le sinus

du ſecond par le coſinus du premier. La ſomme de ces deux produits, diviſée par le rayon, ſera le ſinus de la ſomme des deux arcs; & la différence de ces mêmes produits, diviſée par le rayon, ſera le ſinus de la différence de ces mêmes arcs.

Faites l'arc AD égal à l'arc AC, tirez la corde CD, le rayon LA qui diviſera cette corde en deux parties égales au point I; des points C, A, I & D, abaiſſez les perpendiculaires CK, AG, IH, DF, ſur BL; enfin des points I & D menez IM & DN, paralleles à BL. Puiſque CD eſt diviſée en deux parties égales en I, CN ſera auſſi diviſée en deux parties égales en M (102).

Cela poſé, CK qui eſt le ſinus de BC ſomme des deux arcs, eſt compoſé de KM & de MC, ou de IH & de MC. DF qui eſt le ſinus de BD différence des deux arcs, eſt égal à KN qui vaut KM moins MN, c'eſt-à-dire, IH moins CM; ainſi pour trouver le ſinus de la ſomme, il faut ajouter la valeur de MC à celle de IH; & au contraire l'en retrancher, pour avoir le ſinus de la différence.

Or les triangles ſemblables LAG, LIH donnent $LA : LI :: AG : IH$, c'eſt-à-dire,

$R : cof\ AC :: fin\ AB : IH$; donc (*Arith.* 179) IH vaut $\frac{fin\ AB \times cof\ AC}{R}$.

Les triangles LAG & CIM semblables, parce qu'en vertu de la construction qu'on a faite, ils ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent (112) $LA : LG :: CI : MC$, ou $R : cof\ AB ::$ $fin\ AC : MC$; donc MC vaut $\frac{fin\ AC \times cof\ AB}{R}$; donc il faut ajouter $\frac{fin\ AC \times cof\ AB}{R}$ avec $\frac{fin\ AB \times cof\ AC}{R}$ pour avoir le finus de la fomme, & l'en retrancher au contraire, pour avoir le finus de la différeuce.

285. *Pour avoir le cofinus de la fomme ou de la différence de deux arcs dont on connoît les finus*, il faut, après avoir calculé (281) les cofinus de chacun de ces deux arcs, multiplier ces deux cofinus l'un par l'autre; multiplier pareillement les deux finus; alors retranchant le fecond produit du premier, & divifant le refte par le rayon, on aura le cofinus de la fomme des deux arcs. Au contraire, pour avoir celui de la différence, on ajoutera les deux produits, & on en divifera la fomme par le rayon. Car, puifque DC eft coupée en deux parties égales en I, FK fera coupée en deux

parties égales en H; or LK qui eſt le coſinus de la ſomme, vaut LH moins HK, ou LH moins IM; & LF qui eſt le coſinus de la différence, vaut LH plus HF, ou LH plus HK, ou enfin LH plus IM: voyons donc quelles ſont les valeurs de LH & de IM.

Les triangles ſemblables LGA, LHI donnent $LA : LI :: LG : LH$,

C'eſt-à-dire, $R : cos\,AC :: cos\,AB : LH$;

Donc LH vaut $\frac{cos\,AC \times cos\,AB}{R}$.

Les triangles ſemblables LAG, CIM donnent $LA : AG :: CI : IM$,

C'eſt-à-dire, $R : sin\,AB :: sin\,AC : IM$;

Donc IM vaut $\frac{sin\,AB \times sin\,AC}{R}$;

Il faut donc, pour avoir le coſinus de la ſomme, retrancher $\frac{sin\,AB \times sin\,AC}{R}$, de $\frac{cos\,AB \times cos\,AC}{R}$; & au contraire, l'ajouter pour avoir le coſinus de la différence.

286. *La ſomme des ſinus de deux arcs* AB, AC (Fig. 147) *eſt à la différence de ces mêmes ſinus, comme la tangente de la moitié de la ſomme de ces deux arcs, eſt à la tangente de la moitié de leur différence*; c'eſt-à-dire, que $sin\,AB + sin\,AC : sin\,AB - sin\,AC ::$ $tang\,\frac{AB+AC}{2} : tang\,\frac{AB-AC}{2}$.

Après avoir tiré le diametre AM, portez l'arc AB de A en D; tirez la corde BD qui ſera perpendiculaire ſur AM. Par le point C, tirez CP perpendiculaire, & CF parallele à AM. Du point F, menez les cordes FB & FD; & d'un rayon FG égal à celui du cercle BAD, décrivez l'arc IGK rencontrant CF en G, & en ce point G, élevez HL perpendiculaire à CF; les lignes GH & GL ſont les tangentes des angles GFH & GFL, ou CFB & CFD qui ayant leurs ſommets à la circonférence, ont pour meſure la moitié des arcs CB, CD ſur leſquels ils s'appuient (63), c'eſt-à-dire, la moitié de la différence BC, & la moitié de la ſomme CD des deux arcs AB, AC; ainſi GL & GH ſont les tangentes de la moitié de la ſomme, & de la moitié de la différence de ces mêmes arcs.

Cela poſé, il eſt viſible que DS étant égal à BS, la ligne DE vaut $BS + SE$ ou $BS + CP$, c'eſt-à-dire, la ſomme des ſinus des arcs AB, AC: pareillement BE vaut $BS - SE$ ou $BS - CP$, c'eſt-à-dire, la différence des ſinus de ces mêmes arcs. Or, à cauſe des paralleles BD, HL, on a (115) $DE : BE :: GL : GH$;

Donc $\sin AB + \sin AC : \sin AB - \sin AC ::$ $tang\,\frac{AB + AC}{2} : tang\,\frac{AB - AC}{2}$.

287. Donc *la somme des cosinus de deux arcs, est à la différence de ces cosinus, comme la cotangente de la moitié de la somme de ces deux arcs, est à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car les cosinus n'étant autre chose que des sinus de complément, il suit de la proposition précédente; que la somme des cosinus est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des complémens, est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes complémens : or la moitié de la somme des complémens de deux arcs est le complément de la moitié de la somme de ces deux arcs; & la demi-différence des complémens est la même que la demi-différence des arcs; donc, &c.

288. Les trois principes posés (271, 282 & 284) suffisent pour concevoir comment on pourroit s'y prendre pour former une Table des sinus. En effet, on connoît le sinus de 30° par ce qui a été dit (271); & par ce qui a été dit (282), on peut trouver celui de 15°, & successivement ceux de 7° 30′, 3° 45′, 1° 52′ 30″,

$0^\circ\ 56'\ 15''$, $0^\circ\ 28'\ 7''\ 3'''$, $0^\circ\ 14'\ 3''\ 45'''$, $0^\circ\ 7'\ 1''\ 52'''\ 30^{\text{IV}}$.

Cela posé, on remarquera que, quand les arcs sont fort petits, ils ne different pas sensiblement de leurs sinus, & sont par conséquent, à très-peu près, proportionnels à ces sinus; ainsi pour trouver le sinus de $1'$, on fera cette proportion: *L'arc de* $0^\circ\ 7'\ 1''\ 52'''\ 30^{\text{IV}}$ *est à l'arc de* $0^\circ\ 1'$, *comme le sinus de ce premier arc, est au sinus de* $1'$.

Si dans ce calcul, on suppose le rayon de 100000 parties seulement, il faudra calculer les sinus des arcs que nous venons de rapporter, avec trois décimales pour être en droit d'en conclure les suivans, à moins d'une unité prés; alors on remontera facilement aux autres en cette maniere.

Depuis $1'$ jusqu'à $3^\circ\ 0'$, il suffira de multiplier le sinus de $1'$ successivement par 2, 3, 4, 5, &c. pour avoir le sinus de $2'$, $3'$, &c. jusqu'à 3°, à moins d'une unité près.

Pour calculer les sinus des arcs au-dessus de $3^\circ\ 0'$, on fera usage de ce qui a été dit (284); mais on abrégera considérablement le travail en ne calculant ces sinus, par ce principe, que de degrés en degrés ſeulement. Quant aux minutes intermédiaires, on y ſatisfera en prenant la différence des ſinus de deux degrés conſécutifs, & formant cette proportion : 60 *minutes ſont au nombre de minutes dont il s'agit, comme la différence des ſinus des deux degrés voiſins, eſt à un quatrieme terme*, qui ſera ce qu'on doit ajouter au plus petit des deux ſinus pour avoir le ſinus du nombre de degrés & minutes dont il s'agit. Par exemple, ſi après avoir trouvé que les ſinus de 8° & de 9°, ſont 13917 & 15643, je voulois avoir le ſinus de 8° 17′; je prendrois la différence 1726 de ces ſinus, & je calculerois le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers ſont 60′ : 17′ :: 1726.

Ce quatrieme terme qui eſt 489 à très-peu près, étant ajouté à 13917, donne 14406 pour le ſinus de 8° 17′, tel qu'il eſt dans les tables, à moins d'une unité près.

La raiſon de cette proportion eſt fondée ſur ce que lorſque l'arc KL (*fig.* 129) eſt petit, comme de 1°, par exemple, les différences LM, Iu des ſinus LF, IH, ſont à peu près proportionnelles aux différences KL, KI, des arcs correſpondans AL, AI, parce que les triangles

KML,

KML, *KuI* pouvant être considérés comme rectilignes, sont semblables.

289. Cette méthode ne doit cependant être employée que jusqu'à 87°, parce que passé ce terme, on ne peut se permettre de prendre *iu* (*Fig.* 148) pour la différence des sinus *PB*, *Qx*; car la quantité *ux*, toute petite qu'elle est, a un rapport sensible avec *iu*, & d'autant plus sensible que l'arc *AB* approche plus de 90°. Dans ce cas, il faut se rappeller que (170) les lignes *DE*, *Dt* qui sont les différences entre le rayon & les sinus *PB*, *Qx*, sont proportionnelles aux quarrés des cordes *DB* & *Dx*, ou (à cause que les arcs *DB* & *Dx* sont fort petits) aux quarrés des arcs *DB* & *Dx*; c'est pourquoi, ayant calculé le sinus de 87°, on prendra sa différence avec le rayon 100000; & pour trouver le sinus de tout autre arc entre 87° & 90°, on fera cette proportion : Le quarré de 3° ou de 180′, est au quarré du nombre des minutes du complément de l'arc en question, comme la différence du rayon au sinus de 87°, est à un quatrieme terme qui sera *Dt*, & qui étant retranché du rayon, donnera *Ct* ou *Qx* sinus de l'arc en question. Par exemple,

ayant trouvé que le ſinus de 87° eſt *99863*; ſi je veux avoir le ſinus $88^{\circ}\ 24'$, dont le complément eſt $1^{\circ}\ 36'$ ou *96'*, je ferai cette proportion, $\overline{180'}^{2} : \overline{96'}^{2} :: 137 : Dt$, par laquelle je trouve que Dt vaut *39* à très-peu de choſe près; retranchant *39*, du rayon 100000, j'ai *99961* pour le ſinus de $88^{\circ}\ 24'$, tel qu'il eſt, en effet, dans les Tables.

290. Ayant calculé ainſi les ſinus; on aura facilement les tangentes & les ſécantes, par ce qui a été dit (178).

291. Les ſinus étant calculés, on calcule leurs logarithmes, comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant obſerver que ſi l'on prenoit, dans les Tables, la valeur numérique d'un des ſinus, pour calculer ſon logarithme ſelon ce qui a été dit (*Arith.* 239), on ne trouveroit pas ce logarithme abſolument le même qu'il eſt dans la colonne des logarithmes des ſinus; la raiſon en eſt que les ſinus des tables ont été calculés originairement, dans la ſuppoſition que le rayon étoit de 10000000000 parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une telle préciſion, on a ſupprimé dans les Tables actuelles, les cinq derniers chif-

ſres des valeurs numériques des ſinus, tangentes, &c; enſorte que ces valeurs, telles qu'elles ſont actuellement dans les Tables, ne ſont approchées qu'à environ une unité près, ſur 100000. Il n'en a pas été de même des logarithmes des ſinus, tangentes, &c; on les a conſervés tels qu'ils ont été calculés pour le rayon ſuppoſé de 10000000000 parties; & c'eſt pour cette raiſon qu'on leur trouve une caractériſtique beaucoup plus forte que ne ſemble le ſuppoſer la valeur numérique du ſinus correſpondant, ou de la tangente correſpondante; enſorte que, lorſqu'on fait uſage des logarithmes des ſinus, tangentes, &c, on calcule dans la ſuppoſition tacite que le rayon ſoit de ..... 10000000000 parties; & lorſqu'on fait uſage des valeurs numériques des ſinus, tangentes, &c, on calcule dans la ſuppoſition que le rayon ſoit de 100000 parties ſeulement.

A l'égard des logarithmes des tangentes & ſécantes, on les a par une ſimple addition & une ſouſtraction, lorſqu'une fois on a ceux des ſinus; cela eſt évident d'après ce qui a été dit (278) & (*Arith.* 232).

* 292. Quoique les Tables ordinaires ne donnent les

ſinus, que pour les degrés & minutes, néanmoins on peut en déduire les valeurs de ces mêmes lignes, pour les degrés, minutes & ſecondes, & cela en ſuivant exactement ce que nous venons de preſcrire pour les degrés & minutes ſeulement. Mais comme on emploie plus ſouvent les logarithmes de ces lignes, au lieu de ces lignes elles-mêmes, nous nous arrêterons un moment ſur ce dernier objet.

Suppoſant qu'on ait les logarithmes des ſinus & des tangentes, de minute en minute; quand on voudra avoir le logarithme du ſinus d'un certain nombre de degrés, minutes & ſecondes, on prendra dans les Tables, celui du ſinus du nombre des degrés & minutes; on prendra auſſi la différence des deux logarithmes voiſins, qui eſt à côté, & on fera cette proportion : 60″ ſont au nombre de ſecondes en queſtion, comme la différence des logarithmes, priſe dans les Tables, eſt à un quatrieme terme qu'on ajoutera au logarithme du ſinus des degrés & minutes.

Si, au contraire, on avoit un logarithme de ſinus qui ne répondît pas à un nombre exact de degrés & minutes; pour avoir les ſecondes, on feroit cette proportion : La différence des deux logarithmes, entre leſquels tombe le logarithme donné, eſt à la différence entre ce même logarithme & celui qui eſt immédiatement plus petit dans la Table, comme 60″, ſont à un quatrieme terme, qui ſeroit le nombre de ſecondes à ajouter au nombre de degrés & minutes de l'arc, qui dans la Table, eſt immédiatement au-deſſous de celui que l'on cherche.

On pourra ſuivre cette regle, tant que l'arc ne ſera pas au-deſſous de 3°; lorſqu'il ſera au-deſſous, on ſe conduira comme dans cet exemple; ſuppoſons qu'on demande le ſinus de 1° 55′ 48″; on feroit cette proportion, 1° 55′ : 1° 55′ 48″ : : le ſinus de 1° 55′ eſt à un quatrieme terme, qui (à cauſe que les petits arcs ſont proportionnels à leurs ſinus) ſera ſans erreur ſenſible, le ſinus de 1° 55′ 48″. Mais pour calculer plus commodément, on réduira les deux premiers termes en ſecondes; & alors prenant dans les Tables le logarithme du ſinus de 1° 55′ qui eſt le troiſieme terme, on lui ajoutera le logarithme de 1° 55′ 48″ réduits en ſecondes, enfin du total on retranchera le logarithme de 1° 55′ réduits en ſecondes, le reſte (*Arith.* 232) sera le logarithme du quatrieme terme, c'est-à dire, le logarithme cherché.

Réciproquement, pour trouver le nombre de degrés, minutes & secondes d'un arc au-dessous de 3°, & dont on a le sinus; on chercheroit d'abord dans les Tables, quel est le nombre de degrés & minutes; puis on feroit cette proportion : le sinus du nombre de degrés & minutes trouvé, est au sinus proposé, comme ce même nombre de degrés & minutes réduits en secondes, est au nombre total de secondes de l'arc cherché; ainsi par logarithmes, l'opération se réduira à prendre la différence entre le logarithme du sinus proposé, & celui du sinus du nombre de degrés & minutes immédiatement au-dessous, & à ajouter ce logarithme, au logarithme de ce nombre de degrés & minutes réduits en secondes; la somme sera le logarithme du nombre de secondes que vaut l'arc cherché. Par exemple, si l'on me donne 8,6233427 pour logarithme du sinus d'un arc; je trouve dans les Tables, que le nombre de degrés & minutes le plus approchant, est 2° 24′, & que la différence entre le logarithme du sinus proposé, & celui du sinus de ce dernier arc, est 0013811; j'ajoute cette différence avec 39365137, logarithme de 2° 24′ réduits en secondes, la somme de 3,9378948 répond dans les Tables de logarithmes, à 8667; c'est le nombre de secondes de l'arc cherché, qui par conséquent est de 2° 24′ 27″. Cette regle est l'inverse de la précédente.

A l'égard des logarithmes des tangentes, on suivra les mêmes regles en changeant le mot de *sinus* en celui de *tangente*. Il faut seulement en excepter les arcs qui sont entre 87° & 90°, pour lesquels on suivra celle-ci. Calculez le logarithme de la tangente du complément, par la regle qu'on vient de prescrire pour les tangentes, & retranchez ce logarithme, du double du logarithme du rayon. En effet, selon ce qui a été dit (280), la tangente est le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers sont, la cotangente, le rayon & le rayon.

Et si au contraire on avoit le logarithme de tangente d'un arc qui devant être entre 87° & 90°, devroit avoir des secondes, on retrancheroit ce logarithme, du double du logarithme du rayon, & on auroit le logarithme de la tangente du complément qui étant néceſſairement entre 0° & 3°, ſe détermineroit facilement d'après ce qui précede; prenant le complément de l'arc ainſi trouvé, on auroit l'arc cherché.

293. Puiſque le ſinus d'un arc eſt la moitié de la corde d'un arc double, ſi l'on deſcendoit par le principe donné (282), juſqu'au ſinus de l'arc le plus approchant de 1″, & qu'en doublant ce ſinus, on répétât ce double autant de fois que l'arc dont il eſt la corde, eſt contenu dans la demi-circonférence, il eſt viſible qu'on auroit un nombre fort approchant de la longueur de la demi-circonférence, mais plus petit; & ſi par la proportion donnée (278) on calculoit la tangente du même arc, & que l'ayant doublée, on répétât ce double autant de fois que le double de cet arc eſt contenu dans la demi-circonférence, on trouveroit un nombre fort approchant de la demi-circonférence, mais plus grand; on peut donc, par le calcul des ſinus, approcher du rapport du diametre à la circonférence: nous ne nous arrêtons pas à ce calcul, parce que nous donnerons ailleurs une méthode plus expéditive. Quoi qu'il en ſoit, on trouveroit par cette méthode, que le rayon étant ſuppoſé de 10000000000, la demi-circonférence ſeroit entre 31415926536 &

3141592653 5. Concluons donc de-là que le rayon étant 1, les 180° de la demi-circonférence valent 3,141592653 5; le degré vaut 0, 0174532925 2; la minute vaut 0,000290888208; & ainsi de suite. Nous rapportons ici ces nombres, parce qu'ils peuvent souvent être utiles. Par exemple, veut-on savoir quel espace occuperoit une minute de degré sur l'octans avec lequel on observe les hauteurs à la mer, cet octans étant supposé de 20 pouces de rayon. Par la construction de cet instrument, les 90° sont représentés par un arc de 45; ainsi l'intervalle entre deux divisions consécutives, est celui qu'occuperoit un degré, dans un cercle dont le rayon seroit moitié moindre, ou de 10 pouces; donc la minute sur un pareil instrument, ne répond qu'à l'espace qu'elle occuperoit sur une circonférence de 10 pouces, ou 120 lignes. Multiplions donc 120 par 0,00029 valeur de la minute, en se bornant aux 5 premiers chiffres, nous aurons 0,03480 ou 0,0348, c'est-à-dire, $\frac{348}{10000}$ de ligne, ou $\frac{1}{29}$ de ligne à peu près. On voit par-là qu'on ne peut gueres répondre d'une minute en observant avec cet instrument. Nous aurons occasion d'en parler ailleurs

De la Résolution des Triangles Rectangles.

294. Nous avons dit ci-dessus (267), que pour être en état de calculer ou de résoudre un triangle, il falloit connoître trois des six parties qui le composent, & que parmi les trois choses connues, il falloit qu'il y eût au moins un côté. Comme l'angle droit est un angle connu, il suffit donc dans les triangles rectangles, de connoître deux choses différentes de l'angle droit; mais il faut qu'une au moins, de ces deux choses, soit un côté. Il faut encore remarquer que comme les deux angles aigus d'un triangle rectangle valent ensemble un angle droit, dès que l'un des deux est connu, l'autre l'est aussi.

La résolution des triangles rectangles se réduit à quatre cas; ou les deux choses connues sont un des deux angles aigus, & un côté de l'angle droit; ou elles sont un angle aigu & l'hypothénuse; ou un côté de l'angle droit & l'hypothénuse; ou enfin les deux côtés de l'angle droit.

Ces quatre cas trouveront toujours leur résolution dans l'une des deux proportions ou analogies suivantes.

295. 1°, *Le rayon des Tables, eſt au ſinus d'un des angles aigus comme l'hypothénuſe, eſt au côté oppoſé à cet angle aigu.*

296. 2°, *Le rayon des Tables, eſt à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle, eſt au côté oppoſé à ce même angle.*

Pour démontrer la premiere de ces deux analogies, il n'y a qu'à ſe repréſenter (*Fig.* 144) que dans le triangle rectangle *CED*, la partie *CA* de l'hypothénuſe ſoit le rayon des Tables; alors en imaginant l'arc *AB*, la perpendiculaire *AP* ſera le ſinus de l'angle *ACB* ou *DCE*; or à cauſe des paralleles *AP* & *DE*, on aura, dans les triangles ſemblables *CAP*, *CDE*; $CA : AP :: CD : DE$, c'eſt-à-dire, R : *ſin* $DCE :: CD : DE$, ce qui eſt préciſément la premiere analogie.

On prouvera de même, que R : *ſin* $CDE :: CD : CE$.

Pour la ſeconde, il faut ſe repréſenter, dans le triangle rectangle *CEF* (*Fig.* 149) que la partie *CA* du côté *CE* ſoit le rayon des Tables; & ayant imaginé l'arc *AB*, la perpendiculaire *AD* élevée ſur *AC* au point *A*, ſera la tangente de l'angle *C* ou *FCE*; alors à cauſe des triangles ſemblables CAD, CEF, on aura $CA : AD ::$ $CE : EF$, c'eſt-à-dire, R, $tang\ FCE :: CE :$ EF, ce qui fait la ſeconde des deux analogies énoncées ci-deſſus.

On prouvera de la même maniere, que $R : tang\ CFE :: EF : CE$.

297. Dans les applications qui vont ſuivre, nous emploierons toujours les logarithmes des ſinus, tangentes, &c. au lieu des ſinus, tangentes, &c; & pour familiariſer les Commençants avec l'uſage des compléments arithmétiques, nous en ferons uſage dans tous les calculs, à l'exception des cas, où le logarithme à retrancher ſeroit celui du rayon, dont la caractériſtique étant 10, la ſouſtraction eſt très-facile. Mais pour ne point obliger ceux qui n'auroient que la premiere édition de l'Arithmétique, à recourir à la ſeconde, nous allons expoſer ici, en peu de mots, l'idée & l'uſage des compléments arithmétiques.

Le complément arithmétique d'un nombre ſe prend en retranchant de 9, chacun des chiffres de ce nombre, excepté le dernier ſur la droite, qu'on retranche de 10. Ainſi le complément arithmétique d'un nombre peut ſe prendre à l'inſpection de ses chiffres, sans aucune opération.

Les compléments arithmétiques servent à changer les soustractions en additions. Ainsi, si de 78549 je veux retrancher 65647, je puis à cette opération substituer l'addition de 78549 avec 34353 qui est le complément arithmétique de 65647; alors il ne s'agit plus que d'ôter une unité au premier chiffre de la gauche de la somme, on ôteroit deux unités si l'on avoit ajouté deux compléments arithmétiques; & ainsi de suite. Dans le cas présent, la somme seroit 112902, de laquelle supprimant une unité au premier chiffre, il reste 12902, qui est précisément ce que l'on auroit eu, si de 78549 on avoit retranché 65647 selon la regle ordinaire.

La raison est facile à appercevoir en observant que le complément arithmétique de 65647, n'est autre chose que 100000 moins 65647; ainsi quand on a ajouté le complément arithmétique, on ajoute 100000 & on retranche 65647; le résultat renferme donc 100000 de trop; c'est-à-dire, que son premier chiffre est trop fort d'une unité.

Donc puisque (*Arith.* 232) pour faire une regle de *Trois*, par logarithmes, il faut ajouter les logarithmes des deux moyens ; & retrancher le logarithme du premier terme, on pourra, en vertu de l'obſervation précédente, faire une ſomme des logarithmes des deux moyens, & du complément arithmétique du logarithme du premier terme ; & l'on diminuera d'une unité le premier chiffre de la gauche du réſultat.

Après ces obſervations venons à l'application des deux analogies démontrées ci-deſſus, aux quatre cas dont nous avons parlé.

EXEMPLE I. Suppoſons qu'il s'agit de déterminer la hauteur AC d'un édifice (*Fig.* 150) par des meſures priſes ſur le terrein.

On s'éloignera de cet édifice, à une diſtance CD, telle que l'angle compris entre les deux lignes qu'on imaginera menées du point D au pied & au ſommet de l'édifice, ne ſoit ni trop aigu ni fort approchant de 90°, & ayant meſuré cette diſtance CD, on fixera au point D le pied d'un graphometre. On diſpoſera cet inſtrument de maniere que ſon plan ſoit vertical & dirigé vers l'axe AC de la tour, & que ſon diametre fixe HF, ſoit horizontal ; ce qui se fera à l'aide d'un petit poids suspendu par un fil attaché au centre. Ce fil doit alors raser le bord de l'instrument & répondre à 90°. On fera mouvoir le diametre mobile jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir à travers les pinnules ou la lunette dont il est garni, le sommet *A* de l'édifice. Alors on observera sur l'instrument, le nombre des degrés de l'angle *FEG*, qui est aussi celui de son opposé au sommet *AEB*.

Cela posé, la hauteur *AC* de l'édifice, étant perpendiculaire à l'horison, est perpendiculaire à *BE*; c'est pourquoi on a un triangle rectangle *ABE*, dans lequel, outre l'angle droit, on connoît *BE* égal à *CD* qu'on a mesuré, & l'angle *AEB*; on cherche la valeur de *AB*; on voit donc que les trois choses connues, & celle que l'on cherche sont les termes de l'analogie du n° 296 ; donc pour trouver *AB*, on fera cette proportion, $R : tang\, AEB :: BE : AB$.

Supposons, par exemple, que la distance *CD* ou *BE* ait été trouvée de 132 pieds, & l'angle *AEB* de 48° 54′.

On aura $R : tang\ 48^{\circ}\ 54' :: 132^{p} : AB$; de sorte que prenant dans les Tables la valeur de la tangente de 48°. 54′, la multipliant par 132, & divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les Tables, on aura le nombre de pieds de *AB*, auquel ajoutant la hauteur *ED* de l'instrument, on aura la hauteur cherchée *AC*.

Mais on peut abréger considérablement le calcul en employant, au lieu de ces nombres, leurs logarithmes; parce qu'alors il ne s'agit plus (*Arith.* 232) que d'ajouter les logarithmes du second & du troisieme termes, & de retrancher le logarithme du premier; c'est pourquoi on fera le calcul comme il suit :

Log Tang 48° 54′	10,0593064
Log 132	2,1205739
Somme	12,1798803
Log du Rayon	10,0000000
Reste ou *Log* de *AB*	2,1798803

qui répond dans les tables à 151, 32 à moins d'un centieme près. Ainsi *AB* est de 151^p & 32 centiemes, ou $151^p\ 3^p\ 10^l$.

Remarquons en passant, que le logarithme du rayon, ayant 10 pour caractéristique & des zéros pour ses autres chiffres, on peut, lorsqu'il s'agit de l'ajouter ou de le retrancher, se dispenser de l'écrire, & se contenter d'ajouter ou d'ôter une unité aux dixaines de la caractéristique du logarithme auquel il doit être ajouté, ou dont il doit être retranché.

EXEMPLE II. On a couru, en partant d'un point connu *A* (*Fig.* 151), 32 lieues sur la ligne *AB* parallele à la ligne *GF* qui marque le Nord-Nord-Eſt : on demande combien on a avancé vers l'Eſt, & de combien vers le Nord.

On imaginera par les deux points *A* & *B* les deux lignes *AC* & *BC* paralleles, la premiere à la ligne Nord & Sud *NS*, & la ſeconde à la ligne Eſt & Oueſt *EO*; comme ces deux lignes font un angle droit, le triangle *ACB* ſera rectangle en *C*; on connoît dans ce triangle, le côté *AB* qui eſt de 32 lieues, & l'angle *CAB* qui, à cauſe des paralleles, eſt égal à l'angle *NDF*, lequel, à cauſe que *DF* marque le Nord-Nord-Eſt, eſt de $22^\circ\ 30'$ ou le quart de 90°.

On fera donc, pour trouver *BC*, cette analogie (285), $R : \mathit{ſin}\ 22^\circ\ 30' :: 32^l : BC$.

Et pour trouver *AC*, on remarquera que l'angle *B* eſt complément de l'angle *A*; c'eſt pourquoi on fera cette analogie (295) $R : \mathit{ſin}\ 67^\circ\ 30' :: 32^l : AC$.

On fera ces deux opérations, par logarithmes, comme il ſuit :

Log sin 22° 30′	9,5828397
Log 32	1,5051500
Somme	11,0879897
Log du Rayon	1
Reste ou *log* de *BC*	1,0879897

Qui répond à 12, 25 à moins d'un centième près.

Log sin 67° 30′	9,9656153
Log 32	1,5051500
Somme	11,4707653
Log du Rayon	1
Reste ou *log* de *AC*	1,4707653

Qui répond à 29,56 à moins d'un centième près.

Ainsi on s'est avancé de 12 lieues & 25 centièmes ou $\frac{1}{4}$, vers l'Est, & de 29 lieues & 56 centièmes, vers le Nord.

Le nombre de lieues qu'on a courues selon l'une & l'autre de ces deux directions sert à déterminer le lieu *B* de la terre où se trouve un Vaisseau lorsqu'il a parcouru *AB*; mais le nombre de lieues courues vers l'Est, a besoin d'une correction dont ce n'est pas encore ici le lieu de parler. Il ne s'agit, quant à présent, que des premiers usages de la Trigonométrie.

EXEMPLE III. On a couru 42 lieues selon la ligne *AB* dont la position est inconnue;

connue, & on ſait qu'on a avancé de 35 lieues au Nord : on demande la direction de la route *AB*, c'eſt-à-dire, quel air de vent on a ſuivi ?

On connoît donc ici le côté *AC* de l'angle droit & l'hypothénuſe, & il s'agit de trouver l'angle *CAB*. Comme les deux angles *A* & *B* ſont enſemble un angle droit, nous connoîtrons l'angle *A*, ſi nous pouvons déterminer l'angle *B*. Or, pour trouver celui-ci, nous n'avons qu'à faire cette analogie (295) $R : \sin B :: AB : AC$.

C'eſt-à dire ; $R : \sin B :: 42 : 35$ ou bien en écrivant le ſecond rapport à la place du premier, $42 : 35 :: R : \sin B$.

Faiſant l'opération par logarithmes ; on a :

Log 35	1,5440680
Log du Rayon	10,.......
Complément arithmétique du log de 42	8,3767507
Somme ou *log* du Sinus de *B*	19,9208187

Qui dans les Tables répond, à 56° 27′ ; donc l'angle *A*, ou l'air de vent, eſt de 33° 33′.

EXEMPLE IV. On a couru ſelon la ligne *AB*, dont la poſition & la grandeur ſont inconnues ; mais on ſait qu'on a avancé de 15 lieues à l'Eſt, & de 35 lieues au Nord : on demande la direction & la longueur de la route.

On connoît donc ici les deux côtés *A B* & *B C* de l'angle droit, & l'on demande les angles & l'hypothénuse. Pour trouver l'angle *A*, on fera cette analogie (296) *AC* : *BC* :: *R* : *tang A*, c'est-à-dire, 35 : 15 :: *R* : *tang* A.

Et faisant l'opération par logarithmes :

Log 15	1,1760913
Log du Rayon	10.......
Complément arithmétique du log de 35	8,4559320
Somme ou *log tang A*	19,6320233

Qui dans la Table, répond à 23° 12'.

Pour avoir *A B*, on peut, quand on a déterminé l'angle *A*, se conduire comme dans l'Exemple III. Mais il n'est pas nécessaire de calculer l'angle *A* ; la proposition démontrée (164 & 166) suffit : ainsi prenant le quarré de 15 qui est 225, & l'ajoutant au quarré de 35 qui est 1225, on aura 1450 pour le quarré de *A B* ; & tirant la racine quarrée, on aura 38,08 pour la valeur de *AB* à moins d'un centieme près.

Par la même raison, si l'hypothénuse *AB*, & l'un *A C* des côtés de l'angle droit, étant donnés, on demandoit l'autre côté *B C* ; il ne feroit pas nécessaire de calculer l'angle *A* ; on retrancheroit (166) le quarré du côté connu *AC*, du quarré de l'hypothénuse *AB*; la racine quarrée du reste, seroit la valeur du côté *BC*.

C'est encore par la résolution des triangles rectangles qu'on peut déterminer de combien il s'en faut que le rayon *AD* (*Fig.* 152) par lequel on vise à l'horizon de la mer lorsqu'on est élevé d'une certaine quantité *AB* au-dessus d'un point *B* de sa surface, ne soit parallele à la surface de la mer.

Comme le rayon visuel *AD* est alors une tangente, si l'on imagine le rayon *CD*, l'angle *D* sera droit (48) ; or on connoît le rayon *CD* de la terre qui est 19611500 pieds. Et si au rayon *CB* de 19611500, on ajoute la hauteur *AB* à laquelle on est au-dessus de *B*, on aura le côté *AC*; on connoîtra donc deux choses outre l'angle droit ; on pourra donc calculer l'angle *CAD*, dont la différence *DAO* avec un angle droit, sera l'abaissement du rayon *AD* au dessous du rayon *AO* parallele à la surface de la mer en *B*.

Si dans le même triangle *ADC* on calcule le côté *AD*, on aura la plus grande distance à laquelle la vue puisse s'étendre, lorsque l'œil est à la hauteur *AB*. Mais comme les Tables ordinaires ne peuvent pas donner l'angle CAD, & le côté AD, avec une précision suffisante, lorsque AB est une très-petite quantité à l'égard du rayon de la terre ; voici comment on peut y suppléer.

On concevra AC prolongé jusqu'à la circonférence, en E ; alors AE étant une sécante, & AD une tangente ; selon ce qui a été dit (129) on aura $AE : AD :: AD : AB$; ainsi pour avoir AD, on prendra (*Arith.* 178) une moyenne proportionnelle entre AE & AB.

Par exemple, si l'œil A étoit élevé de 20 pieds au-dessus de la mer ; AB seroit de 20 pieds, & AE seroit de deux fois 19611500 pieds, plus 20, c'est-à-dire, de 39223020 pieds ; le quarré de AD seroit donc de 39223020 × 20 ou de 784460400, donc (*Arith.* 178 & 179) AD seroit de 28008 pieds, c'est-à-dire, qu'un œil élevé de 20 pieds au-dessus de la surface de la mer, peut découvrir jusqu'à 28008 pieds, ou une lieue & $\frac{2}{3}$, à la ronde.

Maintenant, pour savoir de combien le rayon visuel AD est abaissé à l'égard de l'horizontale AO ; on remarquera que vu la petitesse de AB, la ligne AD ne peut différer sensiblement de l'arc BD ; ainsi l'arc *BD* eſt 28008 pieds. Or puiſque le rayon eſt de 19611500 pieds, on trouvera facilement (152) que la circonférence eſt 123222688; & par conſéquent (153) on trouvera le nombre de degrés de l'arc *BD*, par cette proportion 123222688 : 28008 :: 360° : à un quatrieme terme : que l'on trouve $0^\circ\ 4'\ 54''$; ainſi l'angle *ACD*, & par conſéquent *DAO*, eſt de $0^\circ\ 4'\ 54''$, lorſque *AB* eſt de 20 pieds.

Réſolution des Triangles Obliquangles.

298. On ſe ſert du terme de *triangles obliquangles*, pour déſigner en général, les triangles qui n'ont point d'angle droit.

299. *Dans tout triangle rectiligne, le ſinus d'un angle, eſt au côté oppoſé à cet angle, comme le ſinus de tout autre angle du même triangle, eſt au côté qui lui eſt oppoſé.*

Car ſi l'on imagine un cercle circonſcrit au triangle *ABC* (*Fig.* 153), & qu'ayant tiré les rayons *DA*, *DB*, *DC*, on décrive d'un rayon *Db* égal à celui des Tables, le cercle *abc*; qu'enfin on tire les cordes *ab*, *bc*, *ac* qui joignent les points de ſection *a*, *b*, *c*; il eſt facile de voir que le triangle abc est semblable au triangle ABC; car les lignes Da, Db étant égales, sont proportionnelles aux lignes DA, DB; donc (105) ab est parallele à AB; on prouvera de même que bc est parallele à BC, & ac parallele à AC; donc (111) $AB : ab :: BC : bc$ ou $AB : \frac{1}{2} ab :: BC : \frac{1}{2} bc$; or la moitié de la corde ab est (270) le sinus de ah moitié de l'arc ahb: & cette moitié de l'arc ahb est la mesure de l'angle acb qui a son sommet à la circonférence, & qui est égal à l'angle ACB; donc $\frac{1}{2} ab$ est le sinus de l'angle ACB; on prouvera de même que $\frac{1}{2} bc$ est le sinus de l'angle BAC; donc $AB : \sin ACB :: BC : \sin BAC$.

300. Cette proposition sert à résoudre un triangle. 1°, Lorsqu'on connoît deux angles & un côté. 2°, Lorsqu'on connoît deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés.

I. Cas. Si l'on connoît l'angle B, l'angle C, & le côté BC (*Fig.* 65) on aura l'angle A, en ajoutant les deux angles B & C, & retranchant leur somme de 180°; & pour avoir les deux côtés AC & AB, on fera les deux proportions :

$$\sin A : BC :: \sin B : AC$$
$$\sin A : BC :: \sin C : AB$$

C'eſt ainſi qu'on peut réſoudre par le calcul, la queſtion que nous avons examinée (121). Par exemple, ſi l'angle B a été obſervé de 78° 57′, l'angle C de 47° 34′, & le côté BC de 184 pieds, on aura 53° 29′ pour l'angle A, & l'on trouvera les deux autres côtés, par ces deux proportions.

$$\textit{ſin}\ 53^\circ\ 29' : 184 :: \textit{ſin}\ 78^\circ\ 57' : AC$$
$$\textit{ſin}\ 53^\circ\ 29' : 184 :: \textit{ſin}\ 47^\circ\ 34' : AB$$

Faiſant ces opérations par logarithmes comme il ſuit :

Log 184	2,2648178
Log ſin 78° 75′	9,9918727
Complément arithmétique du log ſin 53° 29′	0,0949148
Somme ou log A C	12,3516053
Log 184	2,2648178
Log ſin 47° 34′	9,8680934
Complément arithmétique du log ſin 53° 29′	0,0949148
Somme *ou log A B*	12,2278260

On trouvera que AC eſt de 224^p, 7, & AB, de 169^p.

II. Cas. Si l'on connoît le côté AB (*Fig.*) 141, le côté BC & l'angle A, on déterminera l'angle C en calculant ſon ſinu par cette proportion :

$$BC : \textit{ſin}\ AB :: AB : \textit{ſin}\ C.$$

Mais il faut remarquer, ſelon ce que

nous avons déja dit ci-dessus (267), que l'angle C ne sera déterminé qu'autant qu'on saura s'il doit être aigu ou obtus.

Par exemple, que AB soit de 68 pieds; BC de 37, & l'angle A de 32° 28', la proportion sera $37 : \textit{finus}\ 32° 28' :: 68 : \textit{fin}\ C$.

On trouvera, en opérant comme ci-dessus, que ce sinus répond, dans les Tables, à 80° 36'; mais comme le sinus d'un angle appartient aussi au supplément de cet angle, on ne sait si l'on doit prendre 80° 36', ou son supplément 99° 24'; mais si l'on sait que l'angle cherché doit être aigu, alors on est sûr qu'il est, dans ce cas-ci, de 80° 36', & le triangle a alors la figure ABC; si au contraire il doit être obtus, il sera de 99° 24', & le triangle aura la figure ABD.

Avant d'établir les deux propositions qui servent à résoudre les autres cas des triangles, il convient de placer ici une proposition qui nous sera utile pour l'application de ces deux propositions.

301. *Si l'on connoît la somme de deux quantités & leur différence, on aura la plus grande de ces deux quantités, en ajoutant la moitié de la différence, à la moitié de la somme; & la plus petite, en retranchant*

au contraire, la moitié de la différence, de la moitié de la ſomme.

Par exemple, ſi je ſais que deux quantités font enſemble 57, & qu'elles différent de 17, j'en conclus que ces deux quantités font 37 & 20; en ajoutant d'une part la moitié de 17 à la moitié de 57, & retranchant de l'autre part, la moitié de 17, de la moitié de 57.

En effet, puiſque la ſomme comprend la plus grande & la plus petite, ſi à cette ſomme on ajoutoit la différence, elle comprendroit alors le double de la plus grande; donc la plus grande vaut la moitié de ce tout, c'eſt-à-dire, la moitié de la ſomme des deux quantités, plus la moitié de leur différence.

Au contraire, ſi de la ſomme on ôtoit la différence, il reſteroit le double de la plus petite; donc la plus petite vaudroit la moitié du reſte, c'eſt-à-dire, la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence.

302. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (*Fig.* 154. & 155), *ſi de l'un des angles on abaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé; on aura toujours cette proportion: le côté* AC *ſur lequel tombe, ou ſur le prolongement duquel*

tombe la perpendiculaire, est à la somme A B + BC *des deux autres côtés, comme la différence* A B — B C *de ces mêmes côtés, est à la différence des segments* A D & D C, *ou à leur somme, selon que la perpendiculaire tombe en dedans ou au dehors du triangle.*

Décrivez du point B comme centre, & d'un rayon égal au côté BC, la circonférence $CEHF$, & prolongez le côté AB, jusqu'à ce qu'il la rencontre en E. Alors AE & AC sont deux sécantes tirées d'un même point pris hors du cercle; donc, selon ce qui a été dit (127), on aura cette proportion $AC : AE :: AG : AF$.

Or AE est égal à $AB + BE$ ou $AB + BC$; AG est égal à $AB - BG$ ou $AB - BC$; & AF est (*Fig.* 154) égal à $AD - DF$ ou (52) à $AD - DC$; donc $AC : AB + BC :: AB - BC : AD - DC$. Dans la figure 155, AF est égal à $AD + DF$; ou $AD + DC$; on a donc, dans ce cas, $AC : AB + BC :: AB - BC : AD + DC$.

303. Donc lorsqu'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut, par cette proposition, connoître les segments formés par la perpendiculaire menée d'un des angles, sur le côté opposé; car alors on connoît (*Fig.* 154) la somme AC de

ces segments, & la proportion qu'on vient d'enseigner, fait connoître leur différence; puisqu'alors les trois premiers termes de cette proportion sont connus; on connoîtra donc chacun des segments, par ce qui a été dit (301). Dans la *Figure* 155, on connoît la différence des segments *AD* & *CD*, qui est le côté même *AC*, & la proportion détermine la valeur de leur somme.

304. Il est aisé, d'après cela, de résoudre cette question, *Connoissant les trois côtés d'un triangle, déterminer les angles.*

On imaginera une perpendiculaire abaissée de l'un de ces angles, ce qui donnera deux triangles rectangles *ADB*, *CDB*.

On calculera par la proposition précédente (303), l'un des segments, *CD*, par exemple; & alors dans le triangle rectangle *CDB*, connoissant deux côtés *BC* & *CD* outre l'angle droit, on calculera facilement l'angle *C*, par ce qui a été dit (295).

Exemple. Le côté *AB* est de 142 pieds, le côté *BC* de 64, & le côté *AC* de 184; on demande l'angle *C*.

Je calcule la différence des deux segments *AD* & *DC*, par cette proportion $184 : 142+64 :: 142-64 : AD-DC$, ou 184: 206 :: 78 : *AD—DC* que je trouve valoir 87,32 ; donc (301) le petit ſegment *CD* vaut la moitié de 184, moins la moitié de 87,32, c'eſt-à-dire, qu'il vaut 48, 34.

Cela poſé, dans le triangle rectangle *CDB*, je cherche l'angle *CBD*, qui étant une fois connu, fera connoître l'angle *C* ; & pour trouver cet angle *CBD*, je fais cette proportion (295) *BC* : *CD* :: *R* : *ſin CBD*, c'eſt-à-dire, 64 : 48, 34 :: *R* : *ſin CBD*.

Opérant par logarithmes ;

Log de 48,34	1,6843066
Log du Rayon	1 ....
Complément arithmétique du log de 64	8,1938200
Somme *ou log ſin CBD*	19,878 266

Qui, dans les Tables, répond à 49° 3′ ; donc l'angle *C* eſt de 40° 57′.

On peut réſoudre ce même cas, par cette autre regle, dont nous ne donnerons la démonſtration que dans la troiſieme Partie de ce Cours.

De la moitié de la ſomme des trois côtés, retranchez ſucceſſivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux reſtes.

Faites enſuite cette proportion :

Le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, eſt au produit des deux reſtes, comme le quarré du rayon eſt au quarré du ſinus de la moitié de l'angle cherché; ce qui, en employant les logarithmes, ſe réduit à cette regle.

Au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes des deux reſtes, & du tout retranchez la ſomme des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; ce qui reſtera, ſera le logarithme du quarré du ſinus de la moitié de l'angle cherché; prenez la moitié de ce reſte, ce ſera (*Arith.* 230) le logarithme de ce ſinus, que vous chercherez dans les Tables; ayant alors la moitié de l'angle, il n'y aura plus qu'à doubler cette moitié.

Ainſi, dans l'exemple que nous venons de propoſer, j'ajouterai les trois côtés 184, 64, 142, & de 195 moitié de leur ſomme, je retrancherois ſucceſſivement 184 & 64, ce qui me donneroit 11 & 131 pour reſtes. Alors ajoutant à 20,0000000 double du logarithme du rayon, les logarithmes, 1,0413927; 2, 1172713 des reſtes 11 & 131, j'aurois 23,1586640, duquel retranchant la ſomme 4,0709978 des logarithmes 1,8061800 & 2,2648178 des côtés 64 & 184, il me resteroit 19,0876662, dont la moitié 9,5438331 est le logarithme du sinus de la moitié de l'angle C; on trouve dans les Tables, que cette moitié est $20^\circ\ 28'\frac{1}{2}$ à peu près, dont le double est $40^\circ\ 57'$, comme ci-dessus.

En faisant usage des Compléments arithmétiques, l'opération se réduit à l'addition suivante 20,0000000

	1,0413927
	2,1172713
	8,1938200
	7,7351822
Somme ...	39,0876662

diminuant le premier chiffre de deux unités, on a le même résultat que par l'opération précédente, mais plus briévement.

Cette proposition peut servir à calculer les distances, lorsqu'on n'a point d'instrument pour mesurer les angles; c'est le moyen de faire, par le calcul, ce qu'il étoit question de faire par lignes, au n° (122).

Le cas où l'on a à résoudre un triangle dont on connoît les trois côtés, peut arriver souvent, lorsqu'on a à calculer pluſieurs triangles dépendants les uns des autres.

305. *Dans tout triangle rectiligne, la ſomme de deux côtés eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des deux angles oppoſés à ces côtés, eſt à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car ſelon ce qui a été dit (299) on a (*Fig.* 156) $AB : \sin C :: AC : \sin B$; donc (67) $AB + AC : AB - AC :: \sin C + \sin B : \sin C - \sin B$; or (286) $\sin C + \sin B : \sin C - \sin B :: \text{tang}\,\frac{C+B}{2} : \text{tang}\,\frac{C-B}{2}$; donc $AB + AC : AB - AC :: \text{tang}\,\frac{C+B}{2} : \text{tang}\,\frac{B-C}{2}$.

306. Cette propoſition ſert à *réſoudre un triangle dont on connoît deux côtés & l'angle compris*. Car ſi l'on connoît l'angle *A*, par exemple, on connoît auſſi la ſomme des deux angles *B* & *C*, en retranchant l'angle *A* de 180°. Donc en prenant la moitié du reſte qu'on aura, par cette ſouſtraction, & cherchant ſa tangente dans les Tables, on aura, avec les deux côtés *AB* & *AC* ſuppoſés connus, trois termes de connus dans la proportion qu'on vient de démontrer; on pourra donc calculer le quatrieme, qui fera connoître la moitié de

la différence des deux angles B & C. Alors connoiſſant la demi-ſomme & la demi-différence de ces angles, on aura (301) le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-ſomme; & le plus petit, en retranchant, au contraire, la demi-différence, de la demi-ſomme. Enfin ces deux angles étant connus, on aura aiſément le troiſieme côté, par la propoſition enſeignée (299).

EXEMPLE. Suppoſons que le côté AB ſoit de 142 pieds, le côté AC de 120, & l'angle A de 48°; on demande les deux angles C & B & le côté BC.

Je retranche 48°, de 180°, & il me reſte 132° pour la ſomme des deux angles C & B, & par conſéquent 66° pour leur demi-ſomme.

Je fais cette proportion $142+120 : 142-120 :: tang\ 66° : tang\ \frac{C-B}{2}$.

Ou $262 : 22 :: tang\ 66° : tang\ \frac{CB}{2}$.

Et opérant par logarithmes,

Log tang 66	10,3514169
Log 22	1,3424227
Complément arithmétique du log de 262........	7,5686987
Somme ou *log* de la demi-différence........	X9,2755383

Qui dans la Table, répond à 10 41′

Ajoutant.

Ajoutant cette demi-différence à la demi-somme 66°, & la retranchant de cette même demi-somme, j'aurai, comme on voit ici :

	66° 0′		66° 0′
	10° 41′		10° 41′
L'angle *C*..	76° 41′.	L'angle *B*..	55° 19′.

Enfin, pour avoir le côté *BC*, je fais cette proportion *sin C* : *AB* :: *sin A* : *BC*, c'est-à-dire, *sin* 76° 41′ : 142ᵖ :: *sin* 48° : *BC*.

Opérant comme dans les exemples ci-dessus, on trouvera que *BC* vaut 108ᵖ, 4.

307. Tels sont les moyens qu'on peut employer pour la résolution des triangles : voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on en peut faire aux figures plus composées.

308. Supposons que *C* & *D* (*Fig.* 157) sont deux objets dont on ne peut approcher, mais dont on a cependant besoin de connoître la distance.

On mesurera une base *AB* des extrémités de laquelle on puisse appercevoir les deux objets *C* & *D*. On observera au point *A* les angles *CAB*, *DAB*, que font, avec la ligne *AB*, les lignes *AC*, *AD*, qu'on imaginera aller du point *A* aux deux objets C & D; on obſervera de même au point B, les angles CBA, DBA. Cela poſé, on connoît dans le triangle CBA, les deux angles CAB, CBA & le côté AB, on pourra donc calculer le côté AC, par ce qui a été dit (300). Pareillement dans le triangle ADB, on connoît les deux angles DAB, DBA & le côté AB; ainſi on pourra, par le même principe, calculer le côté AD: alors en imaginant la ligne CD, on aura un triangle CAD, dans lequel on connoît les deux côtés AC, AD qu'on vient de calculer, & l'angle compris CAD, car cet angle eſt la différence des deux angles meſurés CAB, DAB; on pourra donc calculer le côté CD (306).

309. On peut auſſi, par ce même moyen, ſavoir quelle eſt la direction de CD, quoiqu'on ne puiſſe approcher de cette ligne. Car dans le même triangle CAD, on peut calculer l'angle ACD que CD fait avec AC; or ſi par le point C on imagine une ligne CZ parallele à AB, on fait que l'angle ACZ eſt ſupplément de CAB, à cauſe des paralleles (40); donc prenant la différence de l'angle connu ACZ, à l'angle calculé ACD, on aura

l'angle *DCZ* que *CD* fait avec *CZ* ou avec ſa parallele *AB*; & comme il eſt fort aiſé d'orienter *AB*, on aura donc auſſi la direction de *CD*.

310. Nous avons dit en parlant des lignes (3), que nous donnerions le moyen de déterminer différens points d'un même alignement, lorſque des obſtacles empêchent de voir les extrémités, l'une de l'autre. Voici comment on peut s'y prendre.

On choiſira un point *C* (*Fig.* 158) hors de la ligne *AB* dont il s'agit, & qui ſoit tel qu'on puiſſe, de ce point, appercevoir les deux extrémités *A* & *B*; on meſurera les diſtances *AC* & *CB*, ſoit immédiatement, ſoit en formant des triangles dont ces lignes deviennent côtés, & qu'on puiſſe calculer comme dans l'exemple précédent (308). Alors dans le triangle *ACB*, on connoîtra les deux côtés *AC* & *CB* & l'angle compris *ACB*; on pourra donc (306) calculer l'angle *BAC*. Cela poſé, on fera planter ſelon telle direction *CD* qu'on voudra, pluſieurs piquets; & ayant meſuré l'angle *ACD*, on connoîtra dans le triangle *ACD*, le côté *AC* & les deux angles *A* & *ACD*; en pourra donc (300) calculer le côté *CD*, alors on continuera de faire planter des piquets dans la direction *CD*, jusqu'à ce qu'on ait parcouru une longueur égale à celle qu'on a calculée, & le point *D* où l'on s'arrêtera, sera dans l'alignement des deux points *A* & *B*.

311. S'il n'étoit pas possible de trouver un point *C*, duquel on pût appercevoir à la fois les deux points *A* & *B*, on pourroit se retourner de la maniere suivante.

On chercheroit un point *C* (*Fig.* 159), d'où l'on pût appercevoir le point *B*, & un autre point *E* d'où l'on pût voir le point *A* & le point *C*. Alors mesurant, ou déterminant, par quelque expédient tiré des principes précédens, les distances *AE*, *EC* & *CB*, on observeroit au point *E* l'angle *AEC*, & au point *C* l'angle *ECB*. Cela posé, dans le triangle *AEC*, connoissant les deux côtés *AE*, *EC*, & l'angle compris *AEC*, on calculeroit, par ce qui a été dit (306), le côté *AC* & l'angle *ECA*; retranchant l'angle *ECA*, de l'angle observé *ECB*, on auroit l'angle *ACB*; & comme on vient de calculer *AC*, & qu'on a mesuré *CB*, on retomberoit dans le cas précédent, comme si les deux points *A* & *B* eussent été visibles du point *C*; on achevera donc de la même maniere.

312. S'il s'agit de meſurer une hauteur & qu'on ne puiſſe approcher du pied, comme ſeroit la hauteur d'une montagne (*Fig.* 160); on meſurera ſur le terrein une baſe *FG* des extrémités de laquelle on puiſſe appercevoir le point *A* dont on veut connoître la hauteur; enſuite avec le graphometre dont *BF* & *CG* repréſentent la hauteur, on meſurera les angles *ABC*, *ACB* que font, avec la baſe *BC*, les lignes *BA*, *CA*, qu'on imagine aller des deux points *B* & *C* au point *A*; enfin à l'une des ſtations, en *C*, par exemple, on diſpoſera l'inſtrument comme on l'a fait dans l'exemple relatif à la *figure* 150, & on meſurera l'angle *ACD*, qui eſt l'inclinaiſon de la ligne *AC*, à l'égard de l'horizon. Alors connoiſſant dans le triangle *ABC*, les deux angles *ABC*, *ACB* & le côté *BC*, il ſera facile (300) de calculer le côté *AC*; & dans le triangle *ADC*, où l'on connoît maintenant le côté *AC*, l'angle meſuré *ACD*, & l'angle *D* qui eſt droit, puiſque *AD* eſt la hauteur perpendiculaire, il ſera facile de calculer *AD*; & on aura la hauteur du point *A* au-deſſus du point *C*. Si l'on veut ſavoir enſuite quelle eſt la hauteur du point *A* au-deſſus du point *B*

ou de toût autre point environnant, il ne s'agira plus que de niveller, ou de trouver la différence de hauteur entre les points C & B; c'est ce dont nous allons parler dans un moment.

313. Nous avons dit (153) que pour calculer la surface d'un segment $AZBV$ (*Fig.* 74) dont le nombre des degrés de l'arc AVB & le rayon sont connus, il falloit calculer la surface du triangle IAB, pour la retrancher de celle du secteur $IAVB$; c'est une chose facile actuellement; car dans le triangle rectangle IZB, on connoît, outre l'angle droit, le côté IB & l'angle ZIB moitié de AIB mesuré par l'arc AVB; on calculera donc facilement (295) IZ qui est la hauteur du triangle, & BZ, qui est moitié de la base.

On peut encore conclure de ce qui précede, le moyen de faire un angle ou un arc d'un nombre déterminé de degrés & minutes. On tirera une droite CB (*Fig.* 145) de grandeur arbitraire, que l'on prendra pour côté de l'angle; & ayant imaginé l'arc BDA décrit du point C, le rayon CA & la corde BA, si l'on imagine la perpendiculaire CI & si l'on mesure CB, on connoîtra, dans le triangle rectangle CIB, l'angle droit, le côté *CB* & l'angle *BCI* moitié de celui dont il s'agit ; on pourra donc calculer *BI*, dont le double sera la valeur de la corde *AB* ; ainsi, prenant une ouverture de compas, égale à ce double, du point *B* comme centre, on marquera le point *A* sur l'arc *BDA*, & tirant *CA*, on aura l'angle demandé.

Nous pourrions indiquer ici, une infinité d'autres usages de la Trigonométrie : mais en voilà assez pour mettre sur la voie ; d'ailleurs nous aurons assez d'occasions, par la suite, d'avoir recours à cette partie.

Du Nivellement.

314. Plusieurs observations démontrent que la surface de la terre n'est point plane, comme elle le paroît, mais courbe, & même sphérique, ou, à tres-peu de chose près, sphérique. Lorsqu'un vaisseau commence à découvrir une côte, les premiers objets qu'on remarque sont les objets les plus élevés. Or si la surface de la terre étoit plane, en même-tems qu'on découvre la Tour *B* (*fig.* 161), on devroit appercevoir tout le terrein adjacent *ABC*. Ce qui fait qu'il n'en est pas ainsi, c'est que

la surface *DAC* de la terre s'abaisse de plus en plus à l'égard de la ligne horizontale *BD* du Vaisseau. Deux points *D* & *B* peuvent donc paroître dans une même ligne horizontale *DB*, qnoiqu'ils soient fort inégalement éloignés de la surface, & par conséquent, du centre *T* de la terre. Ce qu'on appelle *ligne horizontale*, c'est une ligne tirée dans un plan qui touche la surface de la mer, ou parallélement à ce plan qu'on appelle *plan horizontal;* & une ligne *verticale* est une perpendiculaire à un plan horizontal.

Ce qu'on appelle *niveller*, c'est déterminer de combien un objet est plus éloigné qu'un autre, à l'égard du centre de la terre.

315. Lorsque l'un de ces objets vu de l'autre, paroît dans la ligne horizontale qui part de celui-ci, alors ils sont différemment éloignés du centre de la terre. Pour connoître cette différence, il faut remarquer que la distance à laquelle on peut appercevoir un objet terrestre, ou du moins que la distance à laquelle on observe dans le nivellement, est toujours assez petite, pour que cette distance *DI* (*Fig.* 162) mesurée sur la surface de la terre, puisse être regardée comme égale

à la tangente *DB*; or on a vu (129) que la tangente *DB* étoit moyenne proportionnelle, entre toute sécante menée du point *B*, & la partie extérieure *BI* de cette même sécante; mais à cause de la petitesse de l'arc *DI*, on peut regarder la sécante qui passe par le point *B* & le centre *T*, comme égale au diametre, c'est-à-dire, au double de *IT* ou au double de *DT*; donc *BI* sera le quatrieme terme de cette proportion $2DT:DI::DI:BI$.

Supposons, par exemple, que *DI* mesuré sur la surface de la terre, soit de 1000 toises ou 6000 pieds; comme le rayon de la terre est de 19611500 pieds, on trouvera *BI* par cette proportion $39223000:6000::6000:BI$; en faisant le calcul, on trouve $0^p, 91783$, qui reviennent à $11^p\ 0^l\ 2^{pts}$; c'est-à-dire, qu'entre deux objets *B* & *D* éloignés de mille toises, & qui seroient dans une même ligne horizontale, la différence *BI* du niveau ou distance au centre de la terre, est de $11^p\ 0^l\ 2^{pt}$.

316. Quand on a calculé une différence de niveau, comme *BI*, on peut calculer plus facilement celles qui répondent à une moindre distance, en faisant attention que

les diſtances *Bi*, *bi* ſont preſque paralleles & égales aux lignes *DQ*, *Dq*, qui (170) ſont entr'elles comme les quarrés des cordes ou des arcs *DI*, *Di*; car ici, les cordes & les arcs peuvent être pris l'un pour l'autre; ainſi pour trouver la différence *bi* de niveau, qui répondroit à 5000 pieds, je ferai cette proportion $\overline{6000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0{,}91783 : bi$, que je trouve, en faiſant le calcul, de 0,63738 ou $7^{p}\ 7^{l}\ 9^{pts}\ \frac{2}{5}$.

317. Ces notions ſuppoſées, pour connoître la différence de niveau de deux points *B* & *A* (*Fig.* 163) qui ne ſont pas dans la ligne horizontale menée par l'un d'entre eux, on emploiera un inſtrument propre à meſurer les angles, que l'on diſpoſera, comme il a été dit dans l'exemple relatif à la *fig.* 150; on obſervera l'angle *BCD*, & ayant meſuré la diſtance *CD* ou *CI* à l'aide d'une chaîne qu'on tend horizontalement & à diverſes repriſes, au-deſſus du terrein *AVB*, on pourra, dans le triangle *CDB*, conſidéré comme rectangle en *D*, calculer *BD*, auquel on ajoutera la hauteur *CA* de l'inſtrument, & la différence *DI* de niveau, caculée par ce qui vient d'être dit (315 & 316).

Mais comme cette maniere d'opérer ſuppoſe une grande exactitude dans la meſure de l'angle BCD & un inſtrument bien exact ; on préfere ſouvent d'aller au même but, par une voie plus longue, que nous allons décrire.

318. On emploie, à cet effet, un inſtrument tel que le repréſente la *figure* 164. C'eſt un tuyau creux de fer-blanc ou d'un autre métal, coudé en A & en B; dans les deux parties éminentes & égales AC & BD, on fait entrer deux tuyaux de verre I & K, maſtiqués avec les parties AC & BD. On remplit d'eau tout le canal, jusqu'à ce qu'elle s'éleve dans les deux tuyaux de verre ; quand elle eſt à égale hauteur dans chacun, on eſt ſur que la ligne qui paſſe par la ſuperficie de l'eau élevée dans chacun de ces deux tuyaux, eſt une ligne horizontale, & on l'emploie de la maniere ſuivante.

On fait pluſieurs ſtations, par exemple, aux points D, C, B (*Fig.* 165) : ayant fait élever aux deux points A & N, deux jallons, l'obſervateur qui eſt en D, viſe ſucceſſivement à chacun de ces deux jallons, & fait marquer les deux points E & F, qu'on nomme points de *mire*. Faiſant enſuite planter un autre jallon en quelque point *P* au-delà de *G*, on fait marquer de même les deux points de mire *G* & *H*; on meſure à chaqne ſtation, les hauteurs *AE*, *GF*, *IH*, &c, & après leur avoir appliqué (316) la correction de niveau qui convient aux diſtances *KE*, *KF*, *LG*, &c. eſtimées groſſiérement, on ajoute ces hauteurs, & on a la différence de niveau entre *A* & *B*.

Si, dans le cours de ces opérations, on n'alloit pas toujours en montant, on ſent bien qu'au lieu d'ajouter, il faudroit retrancher les quantités dont on a deſcendu.

Comme nous ne nous propoſons pas de donner ici un Traité détaillé du Nivellement, nous ne nous arrêterons pas à décrire les autres méthodes & les autres inſtrumens qu'on peut employer.

On peut voir ſur cette matiere, le *Traité du Nivellement de* M. PICARD; *Paris*, 1728.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Notions préliminaires.

319. UN TRIANGLE ſphérique, eſt une partie de la ſurface de la ſphere, compriſe entre trois arcs de cercle, qui ont tous trois pour centre commun, le centre de la ſphere; & qui ſont par conſéquent trois arcs de grand cercle de cette même ſphere.

Si des trois angles *A*, *F*, *G*, du triangle ſphérique *AFG* (*Fig.* 166), on imagine trois rayons *AC*, *FC*, *GC* menés au centre *C* de la ſphere, on peut ſe repréſenter l'eſpace *CAFG*, comme une pyramide triangulaire qui a ſon ſommet *C* au centre de la ſphere, & dont la baſe *AFG* eſt courbe, & fait partie de la ſurface de cette ſphere. Les arcs *AF*, *FG*, *AG*, qui ſont les côtés curvilignes de la baſe, ſont les rencontres de la ſurface de la ſphere avec les plans *ACF*, *FCG*, *GCA* qui forment les faces de cette pyramide.

L'angle *A* compris entre les deux arcs *AF*, *AG* se mesure par l'angle rectiligne *IAK*, compris entre les tangentes *AI*, *AK* de ces deux arcs. Chacune de ces tangentes est dans le plan de l'arc auquel elle appartient, & elles sont toutes deux perpendiculaires au rayon *CA* (48), qui est l'intersection des deux plans *ACF*, *ACG*; donc (191) l'angle compris entre ces deux tangentes, est le même que l'angle compris entre les plans *ACF*, *ACG* des deux arcs; donc,

320. 1°. *Un angle sphérique quelconque* FAG, *n'est autre chose que l'angle compris entre les plans de ses deux côtés* AF, AG.

321. 2°. *Les angles que forment les arcs de grand cercle qui se rencontrent sur la surface d'une sphere, ont les mêmes propriétés que les angles-plans;* c'est-à-dire, les propriétés énoncées (192, 193 & 194).

322. Donc *deux côtés d'un triangle sphérique sont perpendiculaires entr'eux, quand les plans qui les renferment, sont perpendiculaires entr'eux.*

Si l'on conçoit les deux plans *ACG*, *ACF*, prolongés indéfiniment dans tous les sens, il est visible que la section que chacun formera dans la sphere, sera un grand cercle, & que ces deux grands cercles ſe couperont mutuellement en deux parties égales aux points *A* & *D* de l'interſection commune *AC* prolongée; car les deux plans paſſant par le centre, ont pour interſection commune, un diametre de la ſphere.

323. Donc *deux côtés contigus* AG, AF, *d'un triangle ſphérique, ne peuvent plus ſe rencontrer qu'à une diſtance* AGD *ou* AFD *de* 180°, *depuis leur origine.*

324. Si l'on prend les deux arcs *AB*, *AE* chacun de 90°, & que par les deux points *B* & *E* & le centre *C*, on conduiſe un plan dont la ſection avec la ſphere forme le grand cercle *BENMO*; je dis que ce cercle ſera perpendiculaire aux deux cercles *ABD*, *AED*.

Car ſi l'on tire les rayons *BC*, *EC*, les angles *ACB*, *ACE* qui ont pour meſure les arcs *AB*, *AE*, de 90° chacun, ſeront droits; donc la ligne *AC* eſt perpendiculaire aux deux droites *CE*, *BE*; donc (180) elle eſt perpendiculaire à leur plan, c'eſt-à-dire, au cercle *BENMO*; donc les deux cercles *AED*, *ABD*, qui paſſent par la droite *AD*, ſont auſſi perpendiculaires à ce même cercle (184); donc réciproquement ce cercle leur eſt perpendiculaire.

Comme nous n'avons ſuppoſé aucune grandeur déterminée à l'angle *GAF* ou *EAB*, il eſt viſible que la même choſe aura toujonrs lieu, quelle que ſoit la grandeur de cet angle, & que par conſéquent, le cercle *BENMO* eſt perpendicnlaire à tous les cercles qui paſſent par la droite *AD*.

La droite *AD* s'appelle *l'axe du cercle* *BENMO*; & les deux points *A* & *D*, qui ſont chacun ſur la ſurface de la ſphere, ſont dits les *poles* de ce même cercle.

325. Concluons donc, 1°, que *les poles d'un grand cercle quelconque, ſont également éloignés de tous les points de la circonférence de ce grand cercle; & leur diſtance à chacun de ces points, meſurée par un arc de grand cercle, eſt un arc de 90°.*

Et réciproquement, *ſi un point quelconque* A *de la ſurface de la ſphere ſe trouve éloigné de 90°, de deux points* B & E *pris dans un arc de grand cercle, ce point* A *eſt le pole de ce grand cercle.*

326. 2°. Que *quand un arc* B F *de grand cercle eſt perpendiculaire ſur un autre arc* BE *de grand cercle, il paſſe néceſſairement*

ment par le pole de celui-ci, ou du moins, il y passeroit, étant prolongé suffisamment.

327. 3°, Que *si deux arcs* BF, EG *de grand cercle, sont perpendiculaires à un troisieme arc de grand cercle* BE, *le point* A *où ils se rencontrent, est le pole de celui ci.*

328. Puisque les deux droites *B C*, *E C* sont perpendiculaires au même point *C* de la droite *A D*, l'angle *B C E* qu'elles forment, est donc (191) la mesure de l'inclinaison des deux plans *A B D*, *A E D*; ou de l'angle sphérique *E A B* ou *G A F*; donc.

Un angle sphérique G A F *a pour mesure l'arc* B E *de grand cercle, que ses côtés (prolongés s'il est nécessaire) comprennent à la distance de 90° depuis le sommet.*

329. Si l'on conçoit que le demi-cercle *A B D* tourne autour du diametre *A D*, & que de différents point *R*, *B*, *H* de sa circonférence, on abaisse sur *A D*, les perpendiculaires *R Q*, *B C*, *H P*; il est évident.

1°, Que *chacun de ces points décrit une circonférence de cercle, qui a pour centre le point de* A D *sur lequel tombe cette perpendiculaire, & pour rayon cette perpendiculaire même.*

2°, Que *les arcs* R S, B E, H L *décrits dans ce mouvement, & interceptés entre les deux plans* A B D, A E D, *sont tous d'un même nombre de degrés*; car si l'on tire les lignes *S Q*, *E C*, *L P*, elles seront toutes perpendiculaires sur *A D*, puisqu'elles ne sont autre chose que les rayons *R Q*, *B C*, *H P*, parvenus dans le plan *A E D*; donc (191) chacun des angles *RQS*, *BCE*, *HPL*, ou chacun des arcs *R S*, *B E*, *H L* mesure l'inclinaison des deux plans *ABD*, *AED*; donc tous ces arcs sont d'un même nombre de degrés.

3°, *Les longueurs de ces arcs* R S, B E, H L, *sont proportionnelles aux sinus des arcs* AR, AB, AH *qui mesurent leurs distances à un même pole* A; *ou, ce qui revient au même, aux cosinus de leurs distances au grand cercle auquel ils sont paralleles.* Car il est évident, que ces arcs étant semblables, sont proportionnels à leurs rayons *R Q*, *B C*, *HP* qui sont évidemment les sinus des arcs *A R*, *A B*, *A H*, ou les cosinus des arcs *B R*, o & *B H*.

330. Si l'on imagine que la sphere *A B D M O B N* représente la terre, & *A D* son axe, ou celui de ses diametres autour duquel elle fait sa révolution jour-

naliere ; le cercle *BENMO* également éloigné des deux poles *A* & *D*, eſt ce qu'on appelle l'*Equateur*. Les cercles *ABD*, *AED* & tous leurs ſemblables, dont les plans paſſent par l'axe *AD*, ſe nomment des *Méridiens ;* les petits cercles dont *RS*, *HL* repréſentent ici des parties, ſe nomment des *paralleles à l'équateur* ou ſimplement des *paralleles*. Les arcs *BH*, *EL* qui meſurent la diſtance d'un parallele juſqu'à l'équateur, s'appellent la *latitude* de ce parallele ou d'un lieu qui ſeroit ſitué ſur ſa circonférence.

Pour déterminer la poſition d'un lieu ſur la terre, on le rapporte à deux cercles fixes perpendiculaires entr'eux, tels que *ABDM*, *BNEMO*, en cette maniere. On prend pour cercle de comparaiſon, un méridien *ABDM* qui paſſe par un lieu connu & déterminé : & pour fixer la poſition d'un autre lieu *L*, on imagine par celui-ci un autre méridien *AELD*. Il eſt viſible que la poſition de ce méridien eſt connue, ſi l'on ſait quel eſt le nombre de degrés de l'arc *BE* compris entre le point *B*, & le point *E* où ce même méridien rencontre l'équateur. Le point *B* étant donc le point fixe auquel on rapporte tous les autres méridiens, l'arc $B\ E$ s'appelle alors *la longitude* (*) du méridien $A\ E\ D$, & de tous les lieux ſitués ſur ce même méridien; il ne s'agit donc plus, pour déterminer la poſition du lieu L, que de connoître le nombre des degrés de l'arc $E\ L$, ce qu'on appelle *la latitude* du lieu L, & qui eſt auſſi la latitude de tous les lieux ſitués ſur le parallele dont $H\ L$ fait partie.

On voit par-là que tous les lieux ſitués ſur un même méridien, ont une même longitude, & que tous ceux qui ſont ſitués ſur un même parallele ont une même latitude; mais il n'y a qu'un ſeul point L, (au moins dans une même moitié de la ſphere, ou dans un même hémiſphere) qui puiſſe avoir en même temps une longitude & une latitude propoſées. La poſition d'un lieu eſt donc déterminée quand on connoît ſa longitude & ſa latitude, mais pour la latitude, il faut ſavoir de plus, vers quel pole on la compte. Ainſi ſuppoſant que le pole A ſoit celui du midi ou le pole *auſtral*, & D le pole du nord

(*) On eſt dans l'uſage de compter les longitudes, d'Occident en Orient; le cercle d'où l'on part pour compter les longitudes, s'appelle *premier Méridien*: les François ont choiſi celui qui paſſe par l'iſle de Fer, la plus occidentale des Canaries.

ou le pole *boréal*, il faut savoir si la latitude est australe ou boréale ; car on conçoit aisément qu'il peut y avoir & qu'il y a, en effet, un point dans l'hémisphere austral qui est situé de la même maniere que le point *L* l'est dans l'hémisphere boréal.

La longueur terrestre d'un degré de grand cercle est de 20 lieues marines, c'est-à dire, de 20 lieues de 2853 toises chacune ; ainsi si l'on s'avance sur l'équateur, à chaque 20 lieues on change d'un degré en longitude ; & si l'on marche sur un même méridien, à chaque 20 lieues on change d'un degré en latitude. Mais si l'on marche sur un parallele à l'équateur, il est évident qu'à chaque 20 lieues on change de plus d'un degré en longitude, & d'autant plus que le parallele sur lequel on s'avance est plus éloigné de l'équateur, c'est-à-dire, est par une plus grande latitude. Pour trouver à combien de degrés de longitude répond un certain nombre de lieues *H L*, parcourues sur un parallele connu, il faut faire cette proportion : *Le cosinus de la latitude est au rayon, comme le nombre de lieues parcourues sur le parallele, est à un quatrieme terme* qui sera le nombre de lieues de l'arc correspondant *B E* de l'équateur qui marque le changement en longitude. C'eſt une ſuite immédiate de ce qui a été dit (329). Par exemple, ſuppoſant que par la latitude de $47^\circ\ 20'$, on ait couru 18 lieues ſur un parallele à l'équateur, ſi l'on demande combien on a changé en longitude, on fera cette proportion *coſ* $47^\circ\ 20'$ ou *ſin* $42^\circ\ 40'$: R : : 18^l eſt à un quatrieme terme qu'on trouvera de $26^l, 56$, leſquelles étant diviſées par 20, à raiſon de 20 lieues par degré, donnent $1^\circ, 328$ ou $1^\circ\ 19'\ 41''$ à peu près, pour le changement en longitude.

Revenons aux propriétés de la ſphere.

331. Suppoſons, que *AFIG*, *BFHG* (*Fig.* 167) ſont deux grands cercles de la ſphere; & *ABDEIH* un troiſieme grand cercle qui coupe perpendiculairement ces deux-là, il ſuit de ce qui a été dit (326), que le cercle *ABDEIH*, paſſe par les poles des deux cercles *AFIG*, *BFHG*; ſoient *D* & *E* ces poles, & *DK*, *EL* les deux axes; puiſque les angles *ACD*, *BCE* ſont droits, ſi de chacun on retranche l'angle commun *BCD*, les angles reſtants *ACB*, *DCE* ſeront égaux, & par conſéquent auſſi les arcs *AB*, *DE*; donc *l'arc* DE *qui meſure la plus courte diſtance*

des poles de deux grands cercles, eſt égal à l'arc A B *qui meſure le plus petit des deux angles que l'un de ces cercles fait avec l'autre.*

Propriétés des Triangles Sphériques.

332. Il eſt évident que par deux points pris ſur la ſurface d'une ſphere, on ne peut faire paſſer qu'un ſeul arc de grand cercle. Car ce grand cercle eſt l'interſection de la ſphere, par un plan qui eſt aſſujetti à paſſer par le centre ; or il eſt évident que par trois points donnés on ne peut faire paſſer qu'un ſeul plan.

333. Quoiqu'un triangle ſphérique puiſſe avoir quelques-unes de ſes parties de plus de 180°, néanmoins nous ne conſidérerons que ceux dont chacune des parties eſt moindre que 180° ; parce qu'on peut toujours connoître l'un de ces triangles par l'autre. Par exemple, ſi l'on ſe repréſente le triangle *ABEMV* (*Fig* 166) formé par les arcs quelconques *AB*, *AV*, & par l'arc *BMV* de plus de 180° ; en imaginant le cercle entier *BMVB*, on pourra ſubſtituer le triangle *BOVA* dont l'arc *BOV* eſt moindre que 180°, au triangle *ABEMV* ; parce que les parties du pre-

mier ſont ou égales à celles du ſecond, ou leur ſupplément à 180° ou à 360°, en ſorte que l'un de ces triangles eſt connu par l'autre.

334. *Chaque côté d'un triangle ſphérique eſt plus petit que la ſomme des deux autres.*

Cela eſt évident.

335. *La ſomme des trois côtés d'un triangle ſphérique eſt toujours moindre que 360°.*

Car il eſt évident (334) que FG eſt plus petit que $AG + AF$; or $AG + AF$ ajoutés avec $DG + DF$ ne font que 360°; donc $AG + AF$ ajoutés avec FG, feront moins que 360°.

336. *Soit* ABC (*Fig.* 168) *un triangle ſphérique quelconque;* DEF *un autre triangle ſpérique tel que le point* A *ſoit le pole de l'arc* EF; *le point* C, *le pole de l'arc* DE; *& le point* B, *le pole de l'arc* DF; *chaque côté du triangle* DEF *ſera ſupplément de l'angle qui lui eſt oppoſé dans le triangle* ABC, *& chaque angle de ce même triangle* DEF *ſera ſupplément du côté qui lui eſt oppoſé dans le triangle* ABC.

Car puiſque le point A eſt le pole de l'arc EF, le point E doit être éloigné du point A de 90° (325) ; par la même raison, puisque C est le pole de l'arc DE ; le point E doit être à 90° du point C ; donc (325) le point E est le pole de l'arc AC ; on prouvera de même que D est le pole de BC, & F le pole de AB.

Cela posé, prolongeons les arcs AC, AB jusqu'à ce qu'ils rencontrent l'arc EF en G & H. Puisque le point E est pole de ACG, l'arc EG est de 90° ; & puisque F est pole de ABH, l'arc FH est de 90° ; donc $EG+FH$ ou $EG+FG+GH$ ou $EF+GH$ est de 180° ; or GH est la mesure de l'angle A (328), puisque les arcs AG, AH sont de 90° ; donc $EF+A$ est de 180° ; donc EF est supplément de l'angle A. On prouvera, de la même maniere, que DE est supplément de C, & DF supplément de B.

Prolongeons l'arc AB jusqu'à ce qu'il rencontre DE en I. Les deux arcs AH & BI sont chacun de 90°, puisque A & B sont les poles des arcs EF, DF ; donc $AH+BI$ ou $AH+AB+AI$ ou $HI+AB$ est de 180° ; mais HI est la mesure de l'angle F (328) puisque le point F est pole de HI ; donc $F+AB$ est de 180° ; donc F est supplément de AB. On prouvera de même que E est supplément de AC, & D supplément de BC,

337. Concluons de-là que *la ſomme des trois angles d'un triangle ſphérique, vaut toujours moins que 540°, ou que 3 fois* 180°, *& plus que* 180°

Car la ſomme des trois angles *A*, *B*, *C* avec la ſomme des trois côtés *EF*, *DF*, *DE*, vaut trois fois 180° (336); donc, 1°, La ſomme des trois angles *A*, *B*, *C* eſt moindre que trois fois 180° ou que 540°. 2°, la ſomme des trois côtés *EF*, *DF*, *DE* eſt (335) moindre que 360°, ou deux fois 180°; donc il reſte plus de 180° pour la ſomme des trois angles *A*, *B*, *C*.

338. *Un triangle ſphérique peut donc avoir ſes trois angles droits, & même ſes trois angles obtus.*

On voit donc que la ſomme des trois angles d'un triangle ſphérique, n'eſt pas une quantité qui ſoit toujours la même, comme dans les triangles rectilignes; & par conſéquent, on ne peut pas, de deux angles connus, conclure le troiſieme.

339. Comme les parties du triangle *DEF* ſont, chacune, ſupplément de celle qui lui eſt oppoſée dans le triangle *ABC*, il s'enſuit que l'un de ces triangles peut être réſolu par l'autre, puiſque connoiſſant les parties de l'un, on a celles de

l'autre. Nous ferons uſage de cette remarque ; & comme les deux triangles *ABC*, *DEF* reviendront ſouvent, nous nommerons le triangle *DEF*, *triangle ſupplémentaire*, pour abréger le diſcours.

340. *Deux triangles ſphériques tracés ſur une même ſphere, ou ſur des ſpheres égales, ſont égaux, 1°, lorſqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. 2°, Lorſqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. 3°, Lorſqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun. 4°, Lorſqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.*

Les trois premiers cas ſe démontrent préciſément de la même maniere que pour les triangles rectilignes ; *voyez* (80, 81 & 83).

A l'égard du quatrieme, comme il n'a pas lieu pour les triangles rectilignes, il exige une démonſtration à part ; la voici.

Concevez que pour chacun des deux triangles *ABC* & *abc* (*Fig.* 168 & 169) on ait tracé le triangle ſupplémentaire *DEF* & *def*. Si les angles *A*, *B*, *C* ſont égaux aux angles *a*, *b*, *c* chacun à chacun, les côtés *EF*, *DF*, *DE* ſuppléments des premiers angles, ſeront donc égaux

aux côtés $e\,f$, $d\,f$, $d\,e$ suppléments des derniers ; donc par le troisieme des quatre cas qu'on vient d'énoncer, ces deux triangles DEF & def seront parfaitement égaux ; donc les angles D, E, F, seront égaux aux angles d, e, f, chacun à chacun ; donc les côtés $B\,C$, $A\,C$, $A\,B$ suppléments de ces trois premiers angles, seront égaux aux côtés $b\,c$, $a\,c$, $a\,b$ suppléments des trois derniers.

341. *Dans un triangle sphérique isoscele, les deux angles opposés aux côtés égaux, sont égaux ; & réciproquement si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés qui leur sont opposés, sont aussi égaux.*

Prenez sur les côtés égaux $A\,B$, $A\,C$, (*Fig.* 170) les arcs égaux $A\,D$, $A\,E$, & concevez les arcs de grand cercle $D\,C$, $B\,E$; les deux triangles ADC, AEB qui ont alors un angle commun compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, seront égaux (340). Donc l'arc $B\,E$ est égal à l'arc CD; donc les deux triangles $B\,D\,C$ & $B\,E\,C$ sont égaux, puisqu'outre $D\,C$ égal à $B\,E$, comme on vient de le voir, ils ont de plus le côté $B\,C$ commun, & que d'ailleurs les parties $B\,D$, $C\,E$ sont égales, puisque ce sont les restes de deux arcs égaux $A\,B$, $A\,C$ dont on a retranché des arcs égaux *AD*, *AE*. De ce que ces deux triangles ſont égaux, on peut donc conclure que l'angle *DBC* ou *ABC* eſt égal à l'angle *ECB* ou *ACB*.

Quant à la ſeconde partie de la propoſition, elle eſt une ſuite de la premiere, en imaginant le triangle ſupplémentaire ; car ſi les deux angles *B* & *C* (*Fig.* 168) ſont égaux, leurs ſuppléments *DF*, *DE* ſeront égaux ; le triangle *DEF* ſera donc iſoſcele ; donc les angles *E* & *F* ſeront égaux ; donc leurs ſuppléments *AC* & *AB* ſeront égaux.

342. *Dans tout triangle ſphérique* ABC (Fig. 171), *le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle, & réciproquement.*

Si l'angle *B* eſt plus grand que l'angle *A*, on pourra conduire en dedans du triangle un arc *BD* de grand cercle, qui faſſe l'angle *ABD* égal à l'angle *BAD*, & alors *BD* ſera égal à *AD* (341) ; or *BD*+*DC* eſt plus grand que *BC*, donc auſſi *AD*+*DC* ou *AC* eſt plus grand que *BC*.

La réciproque ſe démontrera facilement & d'une maniere analogue, en employant le triangle ſupplémentaire.

Les dernieres propoſitions que nous venons d'établir, ſont utiles pour ſe diriger dans la résolution des triangles sphériques, où tout ce que l'on cherche, se détermine par des sinus ou des tangentes, qui appartenant indifféremment à des arcs plus petits que 90°, ou à leurs suppléments, peuvent souvent laisser dans l'incertitude sur celui de ces deux arcs qu'on doit adopter ; mais ces connoissances ne sont pas suffisantes pour découvrir dans quels cas ce que l'on cherche doit être plus grand ou plus petit que 90°, & dans quels cas il peut être indifféremment plus grand ou plus petit.

Moyens de reconnoître dans quels cas les angles ou les côtés qu'on cherche dans les Triangles sphériques Rectangles, doivent être plus grands ou plus petits que 90°.

343. Quoique deux angles & même les trois angles d'un triangle sphérique rectangle puissent être droits, & que par conséquent, il puisse y avoir deux ou trois hypothénuses, néanmoins nous n'appellerons *hypothénuse*, que le côté opposé à l'angle droit que nous considérerons ; & nons appellerons les deux autres angles, *angles obliques*.

344. *Chacun des deux angles obliques d'un triangle ſphérique rectangle, eſt de même eſpece que le côté qui lui eſt oppoſé ; c'eſt-à-dire, qu'il eſt de 90°, ſi ce côté eſt de 90° ; & plus grand ou plus petit que 90°, ſelon que ce côté eſt plus grand ou plus petit que 90°.*

Que *B* (*Fig.* 172) ſoit l'angle droit ; ſi *BC* eſt moindre que 90°, en le prolongeant juſqu'en *D*, de maniere que *BD* ſoit de 90°, le point *D* ſera le pole de l'arc *AB* (326) ; donc l'arc de grand cercle *DA*, conduit à l'extrémité du côté *BA*, ſera perpendiculaire ſur *BA* ; donc l'angle *DAB* ſera droit ; donc *CAB* eſt moindre que 90°. On prouvera, d'une maniere ſemblable les deux autres cas.

345. *Si les deux côtés, ou les deux angles d'un triangle ſphérique rectangle ſont tous deux plus petits ou tous deux plus grands que 90°, l'hypothénuſe ſera toujours plus petite que 90° ; & au contraire, elle ſera plus grande que 90°, ſi les deux côtés, ou les deux angles ſont de différente eſpece.*

Car, en ſuppoſant la même conſtruction que dans la propoſition précédente, ſi *AB* eſt auſſi moindre que 90°, l'angle *ADB* qui doit (344) être de même eſpece que le côté *AB*, ſera moindre que 90° ; par la même raiſon ; l'angle ACB ſera moindre que 90° ; donc ACD ſera obtus, & par conſéquent plus grand que ADC ; donc AD ſera plus grand que AC (342) ; or AD eſt de 90°, donc AC eſt moindre que 90°.

Pareillement ſi les deux côtés BC & AB de l'angle droit B (*Fig.* 173), ſont tous deux plus grands que 90°, l'hypothénuſe AC ſera encore plus petite que 90° ; car ſi l'on prend BD de 90°, D étant le pole de l'arc AB. DA ſera de 90° ; or puiſque AB eſt de plus de 90°, l'angle ACB ſera obtus (344) ; il en ſera de même, & par la même raiſon, de l'angle ADB ; donc ADC eſt aigu, & par conſéquent plus petit que ACD ; donc auſſi AC ſera plus petit que AD (342) ; c'eſt-à-dire, moindre que 90°.

Au contraire, ſi AB (*Fig.* 174) eſt moindre que 90°, & BC plus grand ; alors l'angle ACB qui eſt de même eſpece que AB (344), ſera aigu ; il en ſera de même de l'angle ADB ; donc ADC ſera obtus, & par conſéquent plus grand que ACD ; donc AC ſera plus grand que AD ; c'eſt-à-dire, plus grand que 90°.

Quant aux angles comparés à l'hypothénuſe, la vérité de cette propoſition ſuit de ce que ces angles ſont, chacun, de

même

même eſpèce que le côté qui lui eſt oppoſé (344).

346. Donc 1°. *Selon que l'hypothénuſe ſera plus petite ou plus grande que 90°, les côtés ſeront de même ou de différente eſpece entr'eux; & il en ſera de même des angles obliques.*

347. 2°. *Selon que l'hypothénuſe & un côté ſeront de même ou de différente eſpece, l'autre côté ſera plus petit ou plus grand que 90°, & il en ſera de même de l'angle oppoſé à ce dernier côté.*

Principes pour la Réſolution des Triangles Sphériques Rectangles.

348. La réſolution des triangles ſphériques rectangles ne dépend que de trois principes que nous allons expoſer ſucceſſivement, & que nous éclaircirons enſuite par des exemples. Le premier de ces principes eſt commun aux triangles rectangles & aux triangles obliquangles.

Chaque cas des triangles ſphériques rectangles peut être réſolu par une ſeule proportion, que l'on trouvera toujours par l'un ou l'autre des trois principes ſuivans.

349. *Dans tout triangle ſphérique* ABC

(Fig. 175), *on a toujours cette proportion: Le ſinus d'un des angles, eſt au ſinus du côté oppoſé à cet angle, comme le ſinus d'un autre angle, eſt au ſinus du côté oppoſé à celui-ci.*

Soit H le centre de la ſphere, BH, AH, CH trois rayons: du ſommet de l'angle A abaiſſons ſur le plan du côté oppoſé BC la perpendiculaire AD, & par cette ligne conduiſons deux plans ADE, ADF, de maniere que les rayons BH, CH leur ſoient perpendiculaires reſpectivement; les lignes AE, DE ſections des deux plans ABH, CBH, avec le plan ADE ſeront perpendiculaires ſur l'interſection commune BH de ces deux plans, & par conſéquent, l'angle AED ſera l'inclinaiſon de ces deux plans (191); donc il ſera égal à l'angle ſphérique ABC (320); par la même raiſon l'angle AFD ſera égal à l'angle ſphérique ACB.

Cela poſé, les deux triangles ADE, ADF étant rectangles en D, on aura (295)

$$R : \mathit{ſin}\ AED :: AE : AD$$
$$\&\ \mathit{ſin}\ AFD : R :: AD : AF$$

donc (100) $\mathit{ſinus}\ AFD : \mathit{ſin}\ AED :: AE : AF.$

Or les lignes AE, AF étant des perpendiculaires abaiſſées de l'extrémité A

des arcs AB, AC, ſur les rayons BH, CH qui paſſent par l'autre extrémité de ces arcs ; ſont (269) les ſinus de ces mêmes arcs ; donc & à cauſe que les angles AED & AFD ſont égaux aux angles B & C, on a enfin $\sin C : \sin B :: \sin AB : \sin AC$.

On démontreroit de la même maniere, que $\sin C : \sin A :: \sin AB : \sin BC$.

350. Si l'un des angles comparés, eſt droit ; comme ſon ſinus eſt alors égal au rayon (274) la proportion peut être énoncée ainſi : *Le rayon, eſt au ſinus de l'hypothénuſe, comme le ſinus d'un des angles obliques, eſt au ſinus du côté oppoſé.*

351. *Dans tout triangle ſphérique rectangle, le rayon eſt au ſinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique adjacent à ce côté, eſt à la tangente du côté oppoſé.*

Soit B (*Fig.* 176) l'angle droit : de l'extrémité C du côté BC, menons CI perpendiculaire ſur le rayon BD de la ſphere ; & par cette droite CI, conduiſons le plan CIE de maniere que le rayon DA lui ſoit perpendiculaire. Alors l'angle IEC ſera égal à l'angle ſphérique A : & puiſque les deux plans DBC, DBA ſont ſuppoſés perpendiculaires entr'eux, la ligne CI perpendiculaire à leur commune section DB, sera (185) perpendiculaire au plan DBA, & par conséquent (178) à la droite IE.

Cela posé, dans le triangle rectangle DIC, on a (296) $DI : CI :: R : tang\ IDC$, & dans le triangle rectangle EIC, on a, par le même principe,

$$CI : IE :: tang\ IEC : R$$

donc (100) $DI : IE :: tang\ IEC : tang\ IDC$ ou $:: tang\ A : tang\ BC$, puisque l'angle IDC a pour mesure l'arc BC. Or dans le triangle rectangle IED on a (295) $DI : IE :: R : sin\ IDE$ ou $sin\ AB$; donc à cause du rapport commun de DI à IE, on aura $R : sin\ AB :: tang\ A : tang\ BC$.

352. *Dans tout triangle sphérique rectangle* ABC (Fig. 177), *si l'on prolonge les deux côtés* BC, AC *d'un des angles obliques, jusqu'en* D & E, *de maniere que* DB, AE *soient chacun de 90°, & qu'on joigne les extrémités* D & E *par un arc de grand cercle* DE; *on aura un nouveau triangle* CED *rectangle en* E, *dont les parties seront, ou égales à celles du triangle* ABC, *ou leur complément.*

Imaginons les côtés AB & DE prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F; puisque BD est de 90° & perpendiculaire sur AB, le point D est le pole de l'arc AB (326); donc DF eſt de 90°, & perpendiculaire ſur AF; par la même raiſon, DA eſt de 90°.

Puiſqu'on a fait AE de 90°, & que DA eſt auſſi de 90°, le point A eſt le pole de DF (325); donc AE eſt perpendiculaire ſur DE, & par conſéquent le triangle CED eſt rectangle en E.

Cela poſé, il eſt évident que l'angle E eſt égal à l'angle B; & que l'angle DCE eſt égal à l'angle ACB (321); que le côté DC eſt complément de CB; que DE complément de EF, qui (328) eſt la meſure de l'angle CAB, eſt complément de cet angle CAB; que CE eſt complément de AC; & que l'angle D qui (328) a pour meſure BF complément de AB, eſt complément de AB; donc, en effet, les parties du triangle DCE ſont, ou égales aux parties du triangle ACB, ou leur complément.

On démontreroit la même choſe du triangle AHI qu'on formeroit, en prolongeant de même au-deſſus de A les côtés BA & AC de l'angle oblique BAC, juſqu'à ce qu'ils fuſſent de 90° chacun.

353. On voit donc que dès qu'on connoît trois choſes dans le triangle ABC,

on connoît auſſi trois choſes dans chacun des deux triangles *CED*, *AHI*. On voit en même tems, que les trois autres parties qui reſteroient à trouver dans le triangle *ABC*, feroient connoître les trois autres parties de chacun de ces deux triangles *CED*, *AHI*, & réciproquement.

Donc, lorſqu'ayant à réſoudre le triangle *ABC*, on ne pourra faire uſage immédiatement, ni de l'un ni de l'autre des deux principes poſés (349 & 351) on aura recours à l'un ou à l'autre des deux triangles *CED*, *AHI*; & alors l'application de l'un ou de l'autre de ces deux principes, aura lieu, & fera connoître les parties de ces triangles, qui donneront enſuite la connoiſſance des parties du triangle *ABC*, par le principe qu'on vient de poſer en dernier lieu. Nous nommerons dorénavant les triangles *CED*, *AHI*, *triangles complémentaires*.

Si les côtés *AB*, *AC*, ou *AC*, *BC* que la propoſition démontrée (352) ſuppoſe tous deux plus petits que 90°, étoient tous deux plus grands, ou l'un plus grand & l'autre plus petit que 90°, comme il arrive dans le triangle *FBC* (*Fig.* 178); au lieu de calculer ce triangle *FBC*, on calculeroit le triangle *ABC* formé par les arcs *FC*, *FB* prolongés juſqu'à 180°; les parties de celui-ci étant connues, feroient connoître celles du triangle *FBC*. Au reſte, il n'eſt pas indiſpenſable d'avoir recours à cet expédient; la proportion que donnera la figure 177, a toujours lieu, ſoit que les parties du triangle ſoient plus petites que 90°, ſoit qu'elles ſoient plus grandes.

Remarquons, à l'égard des triangles ſphériques rectangles, comme nous l'avons fait pour tous les triangles rectilignes rectangles, que l'angle droit étant un angle connu, il ſuffit, pour être en état de réſoudre un triangle rectangle, de connoître deux choſes outre l'angle droit. Paſſons aux exemples.

EXEMPLE I. Suppoſons le côté *BC* (*Fig.* 177) de 15° 17′, l'angle *A* de 23° 42′; on demande l'hypothénuſe *AC*.

Pour trouver l'hypothénuſe, on peut faire immédiatement uſage du principe donné (349), en faiſant cette proportion, *ſin A* : *ſin BC* : : *R* : *ſin AC*, qui n'eſt autre choſe que la proportion énoncée (350), mais dont on a tranſpoſé les deux rapports. Cette proportion, dans le cas préſent, revient à *ſin* 23° 52′ : *ſin* 15° 17′ : : *R* : *ſin AC*.

Opérant par logarithmes, on a . . . . . .

Log ſin 15° 17′	9,4209330
Log du Rayon	10, ...
Complément arithmétique du log ſin de 23° 42′	0,3958304
Somme ou *log ſin A C*	19,8167634

Qui, dans les Tables, répond à 40° 59′; en ſorte que l'hypothénuſe *A C* eſt 40° 59′, ſi elle doit être moindre que 90°; ou bien elle eſt de 139° 1′, ſupplément de 40° 59′, ſi elle doit être plus grande que 90°; car rien, ici, ne détermine ſi l'hypothénuſe *A C* eſt moindre ou plus grande que 90°; & ces deux ſolutions ſont également poſſibles, comme il eſt aiſé de s'en convaincre, par la *figure* 178 dans laquelle les deux triangles *A B C*, *A D E* peuvent, avec le même angle *A*, avoir le côté *B C* égal au côté *D E*, & les hypothénuſes *A C*, *A E* différentes; mais en prolongeant *A C*, *A B* juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en *F*, on voit que *A E* eſt ſupplément de *A C*, parce qu'il eſt ſupplément de *F E* qui eſt égal à *A C*, lorſque *DE* eſt égal à *B C*.

EXEMPLE II. Pour avoir le côté *A B* du même triangle *A B C* (*Fig.* 177) on peut appliquer directement la propoſition enſeignée (351), qui fournit cette proportion R : *ſin* AB : : *tang* AB : *tang* BC ou *tang* A : *tang* BC : : R : *ſin* AB, c'eſt-à-dire, *tang* 23° 42′ : *tang* 15° 17′ : : R : *ſin* AB. Opérant par logarithmes, on aura

Log tang 15° 17′	9,4365704
Log du Rayon	10,.......
Complément arithmétique du log tang 23° 42′	0,3575658
Somme ou *log ſin* AB	19,7941362

Qui, dans les Tables, répond à 38° 30′; enſorte que le côté AB eſt de 38° 30′, ou 141° 30′, ſelon qu'il doit être plus petit ou plus grand que 90°, c'eſt-à-dire, (*Fig.* 178), ſelon qu'il doit appartenir au triangle ABC ou au triangle ADE.

EXEMPLE III. L'angle droit, l'angle A & le côté BC étant toujours les ſeules choſes connues, pour trouver l'angle C du même triangle (*Fig.* 177), je remarque que je ne puis appliquer aucune des deux analogies enſeignées (349 & 351), parce que je n'aurois que deux termes de connus, ſoit dans l'une, ſoit dans l'autre; c'eſt pourquoi j'ai recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel le côté DE complément de l'angle A de 23° 42′, ſera de 66° 18′; le côté ou l'hypothénuſe DC complément de BC ou de 15° 17′, ſera de 74° 43′, & l'angle DCE eſt égal à l'angle ACB qu'il s'agit de trouver ; or dans ce triangle DCE, je puis appliquer le principe donné (350), en disant *sin* DC : R : : *sin* DE : *sin* DCE ; c'est-à-dire, *sin* 74° 43′ : R : : *sin* 66° 18′ : *sin* DCE.

Opérant par logarithmes :

Log sin 66° 18′	9,9617355
Log du Rayon	10,.......
Complement arithmétique du log sin 74° 43′	0,0156374
Somme ou *Log sin* DCE	19,9773729

Qui, dans les Tables, répond à 71° 40′ ; donc l'angle DCE, & par conséquent l'angle demandé ACB est de 71° 40′ ou de 108° 20′ supplément de 71° 40′ ; car puisque rien ne détermine ici, si le triangle ACB est tel que le triangle ACB de la *Figure* 178, ou tel que le triangle AED de la même *Figure*, il demeure incertain, si l'on doit prendre l'angle ACB ou l'angle AED qui en est le supplément.

EXEMPLE IV. Que le côté AB du triangle ABC (*Fig.* 177) soit de 48° 51′, & le côté BC de 37° 45′ ; si l'on veut avoir l'hypothénuse AC, on aura recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel on connoît alors l'hypothénuse DC complément de BC ou de 37° 45′, & qui sera, par conséquent, de 52° 15′ ; on connoît aussi l'angle D qui a pour mesure BF complément de AB ou de $48°\ 51'$, & qui sera, par conséquent, de $41°\ 9'$; & pour avoir l'hypothénuse AC, il n'y aura qu'à calculer le côté CE, qui étant son complément, la fera connoître. Or dans le triangle DCE, pour avoir CE, on fera cette proportion (350) $R : \mathit{sin}\ DC :: \mathit{sin}\ D : \mathit{sin}\ CE$, c'est-à-dire, $R : \mathit{sin}\ 52°\ 15' :: \mathit{sin}\ 41°\ 9' : \mathit{sin}\ CE$. Opérant par logarithmes, on aura . . . .

Log sin 41° 9'............................	9,8182474
Log sin 52° 15'...........................	9,8980060
Somme....................................	19,7162534
Log du Rayon..............................	10,.......
Reste ou *log sin CE*..........................	9,7162534

Qui, dans les Tables, répond à $31°\ 21'$; donc AC qui en est le complément, ne peut être que $58°\ 39'$; car les deux côtés AB, BC étant de même espece, l'hypothénuse doit (345) être moindre que $90°$.

EXEMPLE V. Les mêmes choses étant données; pour trouver l'angle C ou l'angle A, on appliquera directement la proposition (351) qui pour l'angle A donne $R : \mathit{sin}\ AB :: \mathit{tang}\ A : \mathit{tang}\ BC$, ou $\mathit{sin}\ AB : R :: \mathit{tang}\ BC : \mathit{tang}\ A$, c'est-à-dire, $\mathit{sin}\ 48°\ 51' : R :: \mathit{tang}\ 37°\ 45' : \mathit{tang}\ A$. Et par la même raison, on aura pour l'angle C, *sin* $BC : R :: $ *tang* $AB :$ *tang* C, c'est-à-dire, *sin* $37^\circ\ 45' : R ::$ *tang* $48^\circ\ 51' :$ *tang* C. Opérant par logarithmes, on aura . . . .

pour l'angle A

Log tang 37° 45′.......................9,8888996
Log du Rayon..........................10,.......
Complément arithmétique du log sin 48° 51′.....0,1232111

Somme ou *log tang* A....................10,0121107

pour l'angle C

Log tang 48° 51′......................10,0585415
Log du Rayon..........................10,.......
Complément arithmétique du log sin 37° 45′....0,2130944

Somme ou *log tang* C....................10,2716359
après avoir ôté une unité au premier chiffre, selon ce qui a été dit (297).

Qui, dans les Tables, répondent à 45° 48′ & 61° 51′, qui sont, le premier, la valeur de l'angle A; & le second, la valeur de l'angle C; parce que les deux côtés AB, BC étant tous deux plus petits que 90°, les deux angles A & C doivent aussi (344) être tous deux plus petits que 90°.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on doit se conduire dans les autres cas; mais pour épargner, à ceux qui auroient de ces sortes de calculs à faire, la peine de recourir aux triangles complémentaires; nous joignons ici une Table qui indique quelle proportion il faut faire dans chaque cas.

Table pour la résolution de tous les cas possibles des Triangles Sphériques Rectangles (a).

Etant donnés	*Trouver*	*Proportion à faire.*	*Cas où ce que l'on cherche doit être moindre que 90°.*
AB, AC	C	*Sin* AC : R : : *sin* AB : *sin* C	Si AB est moindre que 90°.
	A	*Cot* AB : *cot* AC : : R : *cos* A	Si AB & AC sont de même espece.
	BC	*Cos* AB : *cos* AC : : R : *cos* BC	Si AB & AC sont de même espece.
AB, BC	A	*Sin* AB : R : : *tang* BC : *tang* A	Si BC est moindre que 90°.
	C	*Sin* BC : R : : *tang* AB : *tang* C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : *cos* BC : : *cos* AB : *cos* AC	Si AB & BC sont de même espece.
AB, A	C	R : *cos* AB : : *sin* A : *cos* C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : *cos* A : : *cot* AB : *cot* AC	Si AB & A sont de même espece.
	BC	R : *sin* AB : : *tang* A : *tang* BC	Si A est moindre que 90°.
AB, C	A	*Cos* AB : R : : *cos* C : *sin* A	Douteux.
	AC	*Sin* C : *sin* AB : : R : *sin* AC	Douteux.
	BC	*Tang* C : *tang* AB : : R : *sin* BC	Douteux.
BC, AC	A	*Sin* AC : R : : *sin* BC : *sin* A	Si BC est moindre que 90°.
	C	*Cot* BC : *cot* AC : : R : *cos* C	Si AC & BC sont de même espece.
	AB	*Cos* BC : *cos* AC : : R : *cos* AB	Si AC & BC sont de même espece.
BC, A	C	*Cos* BC : R : : *cos* A : *sin* C	Douteux.
	AC	*Sin* A : *sin* BC : : R : *sin* AC	Douteux.
	AB	*Tang* A : *tang* BC : : R : *sin* AB	Douteux.
BC, C	A	R : *cos* BC : : *sin* C : *cos* A	Si BC est moindre que 90°.
	AC	R : *cos* C : : *cot* BC : *cot* AC	Si BC & C sont de même espece.
	AB	R : *sin* BC : : *tang* C : *tang* AB	Si C est moindre que 90°.
AC, A	C	*Cos* AC : R : . *cot* A : *tang* C	Si AC & A sont de même espece.
	AB	*Cos* A : R : : *cot* AC ; *cot* AB	Si AC & A sont de même espece.
	BC	R : *sin* AC : : *sin* A : *sin* BC	Si A est miondre que 90°.
AC, C	A	R : *cos* AC : : *tang* C : *cot* A	Si AC & C sont de même espece.
	AB	R : *sin* AC : : *sin* C : *sin* AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	*Cos* C : R : : *cot* AC : *cot* BC	Si AC & C sont de même espece.
A, C	AC	*Tang* C : *cot* A : : R : *cos* AC	Si A & C sont de même espece.
	AB	*Sin* A : *cos* C : : R : *cos* AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	*Sin* C : *cos* A : : R : *cos* BC	Si A est moindre que 90°.

(a) Cette Table se rapporte au triangle *ABC* de la *Figure* 177, dans laquelle *B* est l'angle droit.

Les proportions que renferme cette Table, ſont toutes fondées ſur les deux principes enſeignés (349 & 351), & appliquées, ſoit immédiatement au triangle *ABC*, ſoit aux triangles complémentaires, puis transportées au triangle *A B C*. Par exemple, la premiere eſt la proportion même du n° 349 ou du n° 350 appliquée immédiatement au triangle *A B C*, en renverſant ſeulement les deux rapports. La ſeconde eſt la proportion du n° 351 appliquée au triangle complémentaire *CED*, dans lequel on a $R : \mathit{ſin}\ DE :: \mathit{tang}\ D : \mathit{tang}\ CE$, ou, en rapportant au triangle *A B C*, $R : \mathit{coſ}\ A :: \mathit{cot}\ AB : \mathit{cot}\ AC$, ou, en mettant le premier rapport à la place du ſecond, $\mathit{cot}\ AB : \mathit{cot}\ AC :: R : \mathit{coſ}\ A$.

On trouvera, de même, les autres proportions que renferme cette Table; les inverſions qu'on y a faites dans les proportions que donneroient immédiatement les deux principes (349 & 351) ne ſont pas indiſpenſables; elles n'ont pour objet que de faire que la quantité cherchée ſoit le quatrieme terme de la proportion.

C'eſt par des triangles ſphériques rectangles qu'on calcule les aſcenſions droites,

& les déclinaiſons des aſtres, par le moyen de leur longitude & de leur latitude, & réciproquement; mais ce n'eſt point encore ici le lieu d'expoſer les notions d'Aſtronomie que ces objets ſuppoſent.

Des Triangles Sphériques Obliquangles.

354. Les triangles ſphériques rectangles ſe réſolvent, dans tous les cas, par une ſeule analogie, ainſi qu'on vient de le voir. Il n'en eſt pas de même des triangles ſphériques obliquangles : dans pluſieurs cas, il faut faire deux analogies. Ces cas exigent qu'on abaiſſe, de l'un des angles du triangle propoſé, un arc de grand cercle, perpendiculairement ſur le côté oppoſé. Comme cet arc peut tomber ou ſur le côté même, ou ſur le prolongement de ce côté, ſelon les différens rapports de grandeur des côtés & des angles, il convient, avant d'établir les principes de la réſolution de ces ſortes de triangles, de faire diſtinguer les cas où l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle, de ceux où il tombe au dehors.

355. *L'arc de grand cercle* AD (*Fig.* 180) *abaissé perpendiculairement de l'angle* A *d'un triangle sphérique, sur le côté opposé, tombe dans le triangle quand les deux autres angles* B *&* C *sont de même espece; & au dehors quand ils sont de différente espece.*

Car dans les triangles rectangles *ADC*, *ADB* (*Fig.* 180) les deux angles *B* & *C* doivent être chacun de même espece que le côté opposé *AD* (344); donc ils doivent être de même espece entr'eux.

Dans les triangles rectangles *ADC*, *ADE* de la *Figure* 181, les angles *ACD*, *ABD* doivent être de même espece chacun que le côté opposé *AD*; donc puisque *ABC* est supplément de *ABD*, *ABC* & *ACD* doivent être de différente espece.

Principes

Principes pour la Résolution des Triangles Sphériques Obliquangles.

356. La résolution de tous les cas possibles des triangles sphériques obliquangles, porte sur cinq principes que nous allons faire connoître, & sur la résolution des triangles rectangles; tous ces principes ne sont pas nécessaires à la fois pour chaque cas; mais ils le sont pour être en état de les résoudre tous.

De ces cinq principes, nous en avons déja établi deux; ce sont ceux qui sont énoncés aux numéros 336 & 349; voici les trois autres.

357. *Dans tout triangle sphérique* ABC (Fig. 179), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc de grand cercle* AD *perpendiculairement sur le côté opposé* BC, *on aura toujours cette proportion: Le cosinus du segment* BD, *est au cosinus du segment* CD, *comme le cosinus du côté* AB, *est au cosinus du côté* AC.

Soit G le centre de la sphere: du sommet de l'angle A abaissons sur le plan BGC de l'arc BC, la perpendiculaire AI; elle sera dans le plan AGD de l'arc AD. Conduisons par AI les deux plans AIE, AIF, de maniere que les rayons GB, GC leur soient respectivement perpendiculaires; & du point D, menons les perpendiculaires DH, DK sur les mêmes rayons.

Les triangles GIE, GDH seront semblables, à cause des lignes IE, DH perpendiculaires sur GB; par une raison semblable, les triangles GDK, GIF sont semblables. On a donc ces deux proportions $GH : GE :: GD : GI$

& $GK : GF :: GD : GI$.

Donc, à cause du rapport commun de GD à GI, on a $GH : GE :: GK : GF$. Or GH est le cosinus de BD (270); GE, le cosinus de AB; GK, le cosinus de CD; & GF, celui de AC; donc $cos\,BD : cos\,AB :: cos\,CD : cos\,AC$, ou en mettant le troisieme terme à la place du second, & le second à la place du troisieme.

$cos\,BD : cos\,CD :: cos\,AB : cos\,AC$.

358. *Les mêmes choses étant supposées que dans la proposition précédente, on a cette autre proportion : Le sinus de* BD, *est au sinus de* CD, *comme la cotangente de l'angle* B, *est à la cotangente de l'angle* C.

Car les angles AEI, AFI sont égaux

aux angles B & C chacun à chacun, ainſi que nous l'avons vu dans la démonſtration du n° 349 : donc, puiſque les triangles AIE, AIF ſont rectangles, les angles EAI, FAI ſont compléments des angles AEI, AFI, & par conſéquent des angles B & C.

Cela poſé, dans le triangle AEI, on a (296) $R : tang\ EAI$ ou $cot\ B :: AI : IE$; & dans le triangle rectangle AIF, on a $tang\ AIF$ ou $cot\ C : R :: IF : AI$; donc (100) $cot\ C : cot\ B :: IF : IE$;

Mais les triangles ſemblables GFI, GDK, & les triangles ſemblables GFI, GHD donnent

$$IF : DK :: GI : GD$$
$$\& \ IE : DH :: GI : GD$$
$$\text{Donc } IF : DK :: IE : DH$$
$$\text{ou } IF : IE :: DK : DH$$

Donc auſſi $cot\ C : cot\ B :: DK : DH$: or DK & DH ſont les ſinus des ſegments DC & DB; donc enfin $cot\ C : cot\ B :: ſin\ DC : ſin\ DB$.

359. *Dans tout triangle ſphérique* ABC (Fig. 180) *ſi d'un angle* A *on abaiſſe l'arc perpendiculaire* AD *ſur le côté oppoſé* BC, *on a cette proportion : La tangente de la moitié du côté* BC *eſt à la tangente de la moitié de*

la somme des deux autres côtés, comme la tangente de la moitié de leur différence, est à la tangente de la moitié de la différence des deux segments CD, BD, *ou* (Fig. 181) *à la tangente de la moitié de leur somme.*

On vient de voir (357) que $cos\ AB : cos\ AC :: cos\ BD : cos\ CD$; donc (98) $cos\ AB + cos\ AC : cos\ AB - cos\ AC :: cos\ BD + cos\ CD : cos\ BD - cos\ CD$; mais (287) $cos\ AB + cos\ AC : cos\ AB - cos\ AC :: cot\ \frac{AC+AB}{2}\ tang : \frac{AC-AB}{2}$; & par la même raison, $cos\ BD + cos\ CD : cos\ BD - cos\ CD :: cot\ \frac{CD+BD}{2} : tang\ \frac{CD-BD}{2}$; donc $cot\ \frac{AC+AB}{2} : tang\ \frac{AC-AB}{2} :: cot\ \frac{CD+BD}{2} : tang\ \frac{CD-BD}{2}$, ou $cot\ \frac{AC+AB}{2} : cot\ \frac{CD+BD}{2} :: tang\ \frac{AC-AB}{2} : tang\ \frac{CD-BD}{2}$, ou à cause que (280) les cotangentes sont réciproquement proportionnelles aux tangentes, $tang\ \frac{CD+BD}{2} : tang\ \frac{AC+AB}{2} :: tang\ \frac{AC-AB}{2} : tang\ \frac{CD-BD}{2}$. Or dans la Figure 180, $CD + BD$ est BC; & dans la Figure 181, $CD - BD$ est BC; donc, pour la Figure 180, on a

$tang\ \frac{BC}{2} : tang\ \frac{AC+AB}{2} :: tang\ \frac{AC-AB}{2} :$ $tang\ \frac{CD-BD}{2}$; & pour la Figure 181, on a $tang\ \frac{CD+BD}{2} : tang\ \frac{AC+AB}{2} :: tang\ \frac{AC-AB}{2} :$ $tang\ \frac{BC}{2}$, ou $tang\ \frac{BC}{2} : tang\ \frac{AC+AB}{2} ::$ $tang\ \frac{AC-AB}{2} : tang\ \frac{CD+BD}{2}$.

Résolution des Triangles Sphériques Obliquangles.

360. Les principes que nous venons d'expofer, & la feconde proportion de la Table que nous avons donnée pour les triangles rectangles, fuffifent pour la réfolution des triangles fphériques obliquangles, ou du moins, pour déterminer les finus ou les tangentes des différentes parties qui les compofent; il y a plufieurs cas où trois chofes données fuffifent pour déterminer tout le refte; mais il y en a plufieurs auffi, où la queftion refte indéterminée, parce que ces données ne font pas fuffifantes pour décider fi la chofe cherchée eft moindre ou plus grande que 90°. Cependant, quoiqu'à envifager la

chose généralement, le nombre de ces derniers cas soit assez considérable, il est très-rare, dans les usages ordinaires de la Trigonométrie sphérique, qu'on ne sache pas de quelle espece doit être le côté ou l'angle qu'on demande.

Avant que d'entrer en matiere, rappellons-nous que le sinus, le cosinus, la tangente & la cotangente d'un angle ou d'un arc, sont les mêmes pour cet angle ou cet arc, que pour son supplément.

361. On peut réduire le calcul des triangles obliquangles, aux six cas que nous allons d'abord résoudre : & nous en déduirons ensuite la résolution des autres.

QUESTION I. *Etant donnés deux côtés* AB, AC *& un angle opposé* B (Fig. 180), *trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.*

Faites cette proportion (349) *sin AC* : *sin AB* : : *sin B* : *sin C*. L'angle *C* peut être de plus ou de moins de 90°.

QUESTION II. *Etant donnés deux côtés* AB, AC (Fig. 180) *& un angle opposé* B, *trouver le troisieme côté* BC.

De l'angle *A* opposé au côté cherché, imaginez l'arc perpendiculaire *AD*; & dans le triangle rectangle *ADB*, calculez le ſegment *BD* par cette proportion, qui revient au même que la ſeconde de la Table ci-deſſus, *page* 333.

$$cof\,B : R :: cot\,AB : cot\,BD$$

Ou bien par cette autre . . . .

$$R : cof\,B :: tang\,AB : tang\,BD$$

qui revient au même, puiſque (280) les tangentes ſont réciproquement proportionnelles aux cotangentes.

Et pour avoir le ſecond ſegment *CD*, faites cette autre proportion (357) :

$$cof\,AB : cof\,AC :: cof\,BD : cof\,CD.$$

Alors, ſelon que *AD* tombe dans le triangle, ou hors du triangle, vous aurez *BC*, en prenant ou la ſomme ou la différence de *BD* & *DC*.

QUESTION III. *Etant donnés les deux angles* B & C (Fig. 180), *& un côté oppoſé* AB, *trouver le côté intercepté* BC.

De l'angle *A* oppoſé au côté cherché *BC*, imaginez l'arc perpendiculaire *AD*, & dans le triangle rectangle *ADB*, calculez *BD* par la même proportion que dans la queſtion II, ſçavoir :

$$R : cof\,B :: tang\,AB : tang\,BD$$

Pour avoir le ſecond ſegment *CD*, faites cette autre proportion (358) :

$$cot\,B : cot\,C :: ſin\,BD : ſin\,CD.$$

Et pour avoir BC, prenez la somme ou la différence de CD & de BD, selon que la perpendiculaire tombe dans le triangle, ou hors du triangle.

QUESTION IV. *Etant donnés deux côtés* AB, BC (Fig. 180), *& l'angle compris* B, *trouver le troisieme côté* AC.

De l'un A des deux angles inconnus, imaginez l'arc perpendiculaire AD sur le côté opposé BC. Calculez le segment BD par la même proportion que dans la question II.

$$R : cos\,B :: tang\,AB : tang\,BD.$$

Retranchez BD du côté connu BC (*Fig.* 180), ou ajoutez-le à ce côté (*Fig.* 181); & vous aurez le segment CD; alors pour avoir AC, faites cette proportion (357) $cos\,BD : cos\,CD :: cos\,AB : cos\,AC$.

QUESTION V. *Etant donnés deux côtés* AB, BC (Fig. 180), *& l'angle compris* B, *trouver l'un des deux autres angles; par exemple, l'angle* C.

Du troisieme angle A, abaissez l'arc perpendiculaire AD sur le côté opposé BC. Calculez le segment BD par la même proportion que dans la question II.

$$R : cos\,B :: tang\,AB : tang\,BD.$$

Retranchez BD du côté connu BC

(*Fig.* 180), ou ajoutez-le à ce côté (*Fig.* 181), & vous aurez le ſegment *CD*; & pour avoir l'angle *C*, faites cette proportion (358) *ſin BD* : *ſin CD* :: *cot B* : *cot C*.

QUESTION VI. *Etant donnés les trois côtés* AB, AC, BC (Fig. 180), *trouver un angle; par exemple, l'angle* B.

Ayant imaginé l'arc *AD* perpendiculaire ſur le côté *BC* adjacent à l'angle cherché, calculez la demi-différence des deux ſegments *BD*, *DC* par cette proportion (359) $tang\,\frac{BC}{2} : tang\,\frac{AB+AC}{2} :: tang\,\frac{AC-AB}{2} : tang\,\frac{CD-DB}{2}$; ayant trouvé cette demi-différence, retranchez-la de la moitié de *BC*, & vous aurez (301) le plus petit ſegment *BD*. Alors, pour avoir l'angle *B*, vous ferez cette proportion, qui eſt toujours celle de la queſtion II, mais que l'on a renverſée :

$$tang\,AB : tang\,BD :: R : coſ\,B.$$

Si la perpendiculaire devoit tomber hors du triangle, la premiere proportion, au lieu de donner la demi-différence, donneroit la demi-ſomme : c'eſt pourquoi il faudroit alors, pour avoir le plus petit ſegment BD (*Fig.* 181), retrancher la moitié de BC, de cette demi-ſomme, parce que c'eſt BC qui eſt la différence des deux ſegments.

On peut encore réſoudre cette queſtion par une regle ſemblable à celle que nous avons donnée pour un cas analogue dans les triangles rectilignes. Voici cette regle.

Prenez la moitié de la ſomme des trois côtés : de cette demi-ſomme, retranchez ſucceſſivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux reſtes.

Alors, au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes des ſinus de ces deux reſtes, & du total retranchez la ſomme des logarithmes des ſinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché. Le reſte ſera le logarithme du quarré du ſinus de la moitié de cet angle. Prenez la moitié de ce logarithme reſtant, & cherchez à quel nombre de degrés & minutes elle répond dans la Table, ce ſera la moitié de l'angle demandé.

Nous démontrerons ce regle dans la troiſieme Partie.

362. Ces ſix cas expoſés; voici com-

ment on peut en déduire les six autres.

QUESTION VII. *Etant donnés deux angles* F & G (Fig. 182) *& un côté opposé* GE, *trouver le côté* EF *opposé à l'autre angle connu* G.

Imaginez le triangle supplémentaire *ABC*; prenant les suppléments des angles *F* & *G* & du côté *GE*, vous aurez (336) les côtés *AC*, *AB* & l'angle *B*; si vous calculez l'angle *C* par ce qui a été dit dans la question I, son supplément sera le côté *EF* (336).

Au reste, ce n'est que pour conserver l'analogie avec les cas suivants, que nous donnons cette solution; car la question présente se résout immédiatement par la proposition enseignée (349), en faisant cette proportion :

$$\sin F : \sin GE :: \sin G : \sin FE.$$

QUESTION VIII. *Etant donnés deux angles* F & G (Fig. 182) *& un côté opposé* GE, *trouver le troisieme angle* E.

Prenez les suppléments des trois choses données, & vous connoîtrez dans le triangle supplémentaire, *AC*, *AB* & l'angle *B*; calculez donc le côté *BC*, par la question II, le supplément de ce côté sera la valeur de l'angle *E* (336).

QUESTION IX. *Etant donnés les deux côtés* EG, EF (Fig. 182) *& un angle opposé* G, *trouver l'angle* E *compris entre les deux côtés connus.*

Prenez les ſuppléments des trois choſes données, & dans le triangle ſupplémentaire *ABC*, vous connoîtrez l'angle *B*, l'angle *C* & le côté *AB*; il s'agira de calculer le côté *BC*, ce qui ſe fera par la queſtion III. Le ſupplément de *BC* ſera la valeur de l'angle *E* (336).

QUESTION X. *Etant donnés deux angles* G & E (Fig. 182) *& le côté intercepté* GE, *trouver le troiſieme angle* F.

Prenez les ſuppléments des trois choſes données, & dans le triangle ſupplémentaire *ABC*, vous connoîtrez *AB*, *BC*, & l'angle compris *B*; il s'agira de calculer *AC*, ce qui ſe fera par la queſtion IV. Le ſupplément de *AC* ſera l'angle demandé *F* (336).

QUESTION XI. *Etant donnés deux angles* G & E (Fig. 182) *& le côté intercepté* GE, *trouver l'un des deux autres côtés; trouver* FE, *par exemple.*

Prenez les ſuppléments des trois choſes données, & dans le triangle ſupplémentaire *ABC*, vous connoîtrez *AB*, *BC*, &

l'angle compris *B*; il s'agira de calculer l'angle *C*, ce qui ſe fera par la queſtion V. Le ſupplément de *C* ſera la valeur du côté *FE* (336).

QUESTION XII. *Etant donnés les trois angles* E, F, G (Fig. 182), *trouver l'un des côtés; le côté* EG, *par exemple.*

Prenez les ſuppléments des trois choſes données, & dans le triangle ſupplémentaire *ABC*, vous connoîtrez les trois côtés *BC*, *AC*, *AB*; il s'agira de calculer l'angle *B*, ce qui ſe fera par la queſtion VI. Le ſupplément de *B* ſera la valeur du côté cherché *EG* (336).

Avant de paſſer aux exemples, remarquons que quoique pluſieurs cas des triangles obliquangles, exigent deux analogies, il y a cependant une eſpece de triangles obliquangles qui peut toujours être réſolue par une ſeule analogie, ce ſont ceux dont un côté eſt de 90°; car en employant le triangle ſupplémentaire, ce triangle devient un triangle rectangle.

Donnons maintenant quelques exemples.

EXEMPLE de la queſtion IV. Suppoſons que le point *F* (*Fig.* 166) marque la poſition de Paris ſur la terre; le point *G*, celle de Toulon : on ſait, par les Obſervations Aſtronomiques, que la latitude de Paris, ou l'arc *BF* eſt de 48° 50′ *; que la latitude de Toulon, ou l'arc *GE* eſt de 43° 7′; & que la différence de longitude entre Paris & Toulon, ou l'arc *BE*, ou l'angle *BAE* ou *FAG* eſt de 3° 37′. On demande quelle eſt la plus courte diſtance de Paris à Toulon.

Le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre ſur la ſurface d'une ſphere, eſt l'arc de grand cercle qui paſſe par ces deux points. Imaginons l'arc *FG* de grand cercle. Si des arcs *AB*, *AE* de 90° chacun, nous retranchons les arcs *BF*, *GE* qui ſont de 48° 50′ & 43° 7′, nous aurons les arcs *AF*, *AG* de 41° 10′ & 46° 53′. Nous connoîtrons donc, dans le triangle *AFG*, les deux côtés *AF*, *AG* & l'angle compris *FAG*; il eſt queſtion de calculer le troiſieme côté *FG*.

Repréſentons le triangle *FAG*, par le triangle *ABC* (*Fig.* 283), & ſuppoſons *AB* de 41° 10′, *BC* de 46° 53′ & l'angle *B* de 3° 37′; alors, ſelon la regle donnée dans la queſtion IV, je calcule le

* Nous négligeons les ſecondes dans cet exemple.

ſegment BD par cette proportion :

$$R : cof\ 3^\circ\ 37' :: tang\ 41^\circ\ 10' : tang\ BD.$$

Opérant par logarithmes, jai . . . .

Log coſ 3° 37'...........................	9,9991342
Log tang 41° 10...........................	9,9417135
Somme...........................	19,9408477
Log du Rayon...........................	10.......
Reſte ou *log tang BD*...........................	9,9408477

Qui, dans la Table, répond à 41° 7'; retranchant 41° 7', de BC, c'eſt-à-dire, de 46° 53'; nous aurons 5° 46' pour le ſegment CD.

Pour trouver le côté AC, je fais, conformément à ce qui a été preſcrit dans la queſtion VI, cette proportion :

$$cof\ 41^\circ\ 7' : cof\ 5^\circ\ 46' :: cof\ 41^\circ\ 10' : cof\ AC.$$

Et opérant par logarithmes, j'ai. . . . .

Log coſ 41° 10'...........................	9,8766785
Log coſ 5° 46'...........................	9,9977966
Complément arithmétique du log coſ 41° 7'.....	0,1229904
Somme *ou log coſ AC*...........................	19,9974655

D'où, par les Tables, on conclut que AC eſt de 6° 11', qui, à raiſon de 20 grandes lieues par degré, valent 124 grandes lieues, à très-peu près; mais en lieues moyennes ou de 25 au degré, cela revient à 154 lieues, environ.

Exemple de la queſtion VI. Nous avons dit (138), en parlant de la maniere de lever les plans, que nous donnerions les moyens de réduire les angles obſervés au-deſſus ou au-deſſous d'un plan horizontal, à ceux qu'on obſerveroit dans ce plan même. En voici la méthode.

Suppoſons que *A*, *B*, *C* (*Fig.* 184), ſoient trois points différemment élevés au-deſſus du plan horizontal *HE*, & imaginons les perpendiculaires *Bb*, *Aa*, *Cc* ſur ce plan; on aura un triangle *abc* dont les ſommets *a*, *b*, *c*, repréſentent les objets *A*, *B*, *C* de la maniere dont ils doivent être repréſentés ſur une Carte.

Suppoſant qu'on ait pu, du point *A*, obſerver les deux points *B* & *C*, on demande ce qu'il faut faire pour déterminer l'angle *a*.

On meſurera au point *A* l'angle *BAC* & les angles *BAa*, *CAa*; le premier peut être meſuré ſans aucune difficulté; à l'égard de chacun des deux autres, de l'angle *BAa*, par exemple, on diſpoſera l'inſtrument dans le plan vertical qu'on imagine paſſer par *AB*, & plaçant un des diametres horizontalement, par le moyen du fil à plomb qui alors marquera la ligne

ligne $A a$, on dirigera l'autre diametre au point B, & on verra sur l'instrument combien il y a de degrés entre le fil à plomb & le diametre dirigé au point B, ce qui donnera l'angle $B A a$; on trouvera de même l'angle $C A a$.

Cela posé, si l'on conçoit que d'un rayon quelconque $A D$ & du point A comme centre, on ait décrit les arcs $D F$, $D G$, $G F$, dans les plans des angles $B A C$, $B A a$, $C A a$, on aura un triangle sphérique $D G F$, dans lequel on connoîtra les côtés $D F$, $D G$, $G F$ mesures des angles $B A C$, $B A a$, $C A a$ qu'on a observés, l'angle $D G F$ de ce triangle sera égal à l'angle $b a c$, puisque les deux droites $b a$, $a c$ étant perpendiculaires à l'intersection $A a$ des deux plans $A b$, $A c$, font le même angle que ces plans, & par conséquent (320) un angle égal à l'angle sphérique $D G F$.

Supposons donc que les angles observés $B A C$, $D A a$, $C A a$ soient respectivement de $82^\circ\ 10'$, $77^\circ\ 42'$, $74^\circ\ 24'$; il s'agit donc (*fig.* 180) de calculer l'angle B opposé au côté $A C$ de $82^\circ\ 10'$ dans le triangle sphérique $A B C$ dont les trois côtés AB, AC, BC sont respectivement de $7^\circ\ 24'$, $82^\circ\ 10'$, $77^\circ\ 42'$. Donc, conformément à ce qui a été dit dans la question VI, je calcule la demi-différence des deux segmens BD & CD, par cette proportion $tang\,\frac{BC}{2} : tang\,\frac{AC+AB}{2} :: tang\,\frac{AC-AB}{2} : tang\,\frac{CD-BD}{2}$; c'est-à-dire $tang\ 38^\circ\ 51' : tang\ 78^\circ\ 17' :: tang\ 3^\circ\ 53' : tang\,\frac{CD-BD}{2}$.

Opérant par logarithmes, j'ai......

Log tang $3^\circ\ 53'$	8,8317478
Log tang $78^\circ\ 17'$	10,6832050
Complément arithmétique du log tang $38^\circ\ 51'$ ...	0,0939569
Somme ou *log tang* $\frac{CD-BD}{2}$	19,6089097

Qui répond à $22^\circ\ 7'$.

Retranchant $22^\circ\ 7'$ qui est la demi-différence, de la moitié de BC, c'est-à-dire, de $38^\circ\ 51'$, nous aurons (301) le plus petit segment BD de $16^\circ\ 44'$; alors dans le triangle rectangle ADB, pour avoir l'angle B, je fais, conformément à ce qui a été dit dans la Question VI, cette proportion.

$tang\ AB : tang\ BD :: R : cos\ B$, c'est-à-dire, $tang\ 74^\circ\ 24' : tang\ 16^\circ\ 44' :: R : cos\ B$;

Et opérant par logarithmes, j'ai . . . . .

Log tang 16° 44′ 9,4780592

Log du Rayon . . . . 10, ...

Complément arithmétique du log tang 74° 24′ . . 89,4459232

Somme *ou log cos B* 108,9239824

Qui répond à 4° 48′, dont le complément 85° 12′ est la valeur de l'angle *B*; c'est-à-dire, (*Fig* 184) de l'angle *b a c*.

Pour réduire l'angle *C* à l'angle *c*, on feroit un calcul semblable en supposant qu'on eût observé l'angle *A C B*, l'angle *A C c*, & l'angle *B C c*.

A l'égard du troisieme angle *b*, il n'est pas nécessaire de le calculer, parce que le triangle *a b c* étant rectiligne, ses trois angles valent deux droits.

Remarque.

En supposant toujours qu'aucune partie d'un triangle sphérique n'est de plus de 180°, on peut déterminer par une regle assez simple, si ce qu'on cherche doit être moindre que 90°, ou s'il peut indifféremment être plus grand ou plus petit. Voici cette regle.

Si le quatrieme terme de l'analogie ou proportion que vous êtes obligé de faire pour résoudre un triangle sphérique, est un sinus, l'arc auquel il appartiendra peut indifféremment être de moins, ou de plus que 90°, excepté le cas où le triangle étant rectangle, il se trouveroit parmi les trois choses connues, une qui seroit opposée dans le triangle à celle que l'on cherche. Dans ce cas (344) ces deux dernieres quantités sont toujours de même espece entr'elles.

Mais si le quatrieme terme est un cosinus, ou une cotangente, ou une tangente, alors observez à l'égard des termes connus de la proportion, la regle suivante. Donnez le signe + au rayon & à tous les sinus, soit que les arcs auxquels ils appartiennent soient plus grands, soit qu'ils soient plus petits que 90°. Donnez pareillemenr le signe + à tous les cosinus, tangentes & cotangentes des arcs plus petits que 90°; & au contraire donnez le signe —, à tous les cosinus, tangentes & cotangentes des arcs plus grands que 90°. Alors si le nombre de signes —, est zéro, ou pair, l'arc qui répond au quatrieme terme sera toujours moindre que 90°; il sera au contraire plus grand que 90°, si le nombre des signes — est impair.

Cette regle est fondée, 1°. sur la regle pour la multiplication & la division des quantités considérées par rapport à leurs signes; on verra cette derniere dans l'Algèbre. 2° Sur ce qui a été observé (273 & *suiv.*) relativement aux sinus, cosinus, &c. des arcs plus petits ou plus grands que 90°.

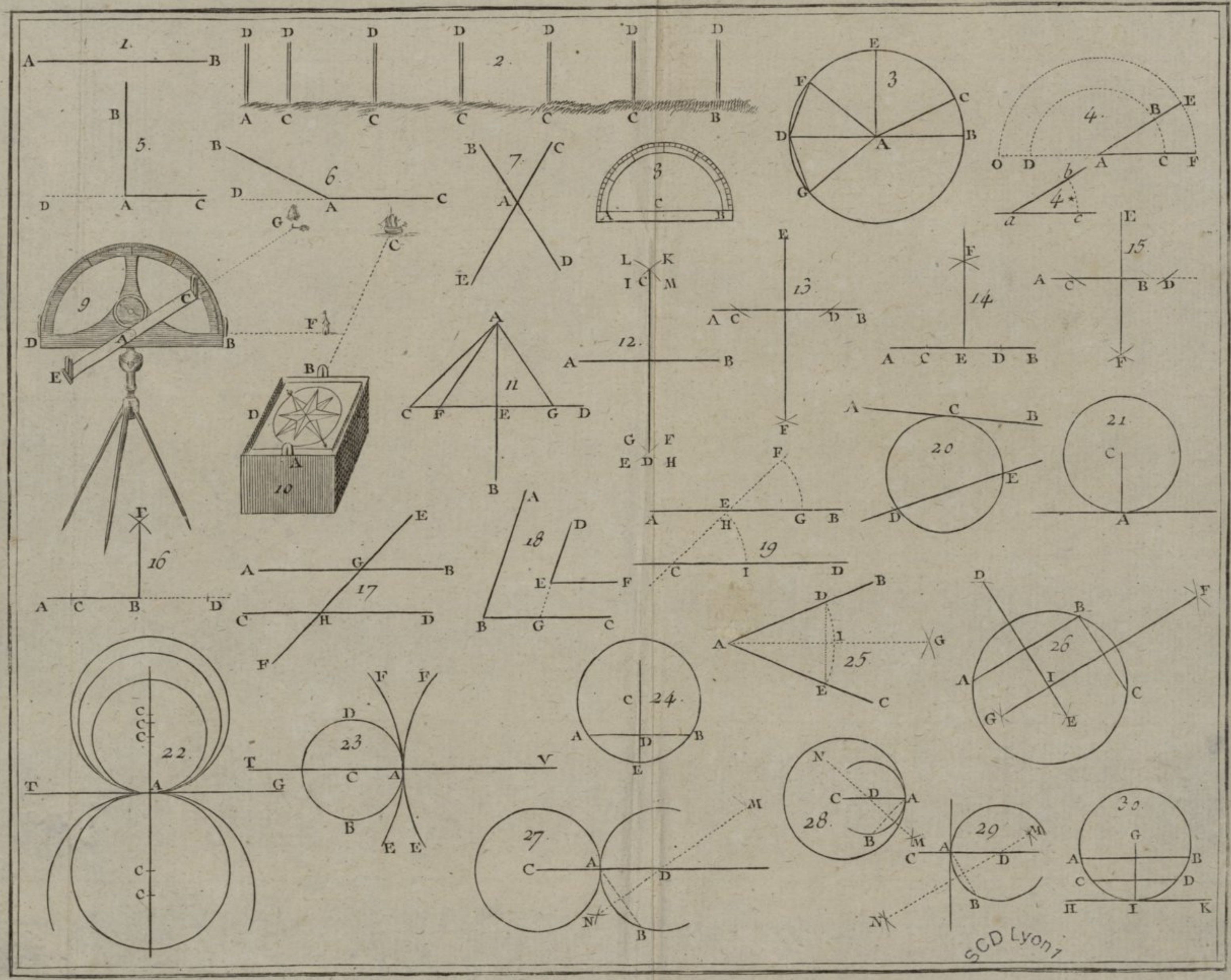
FIN.

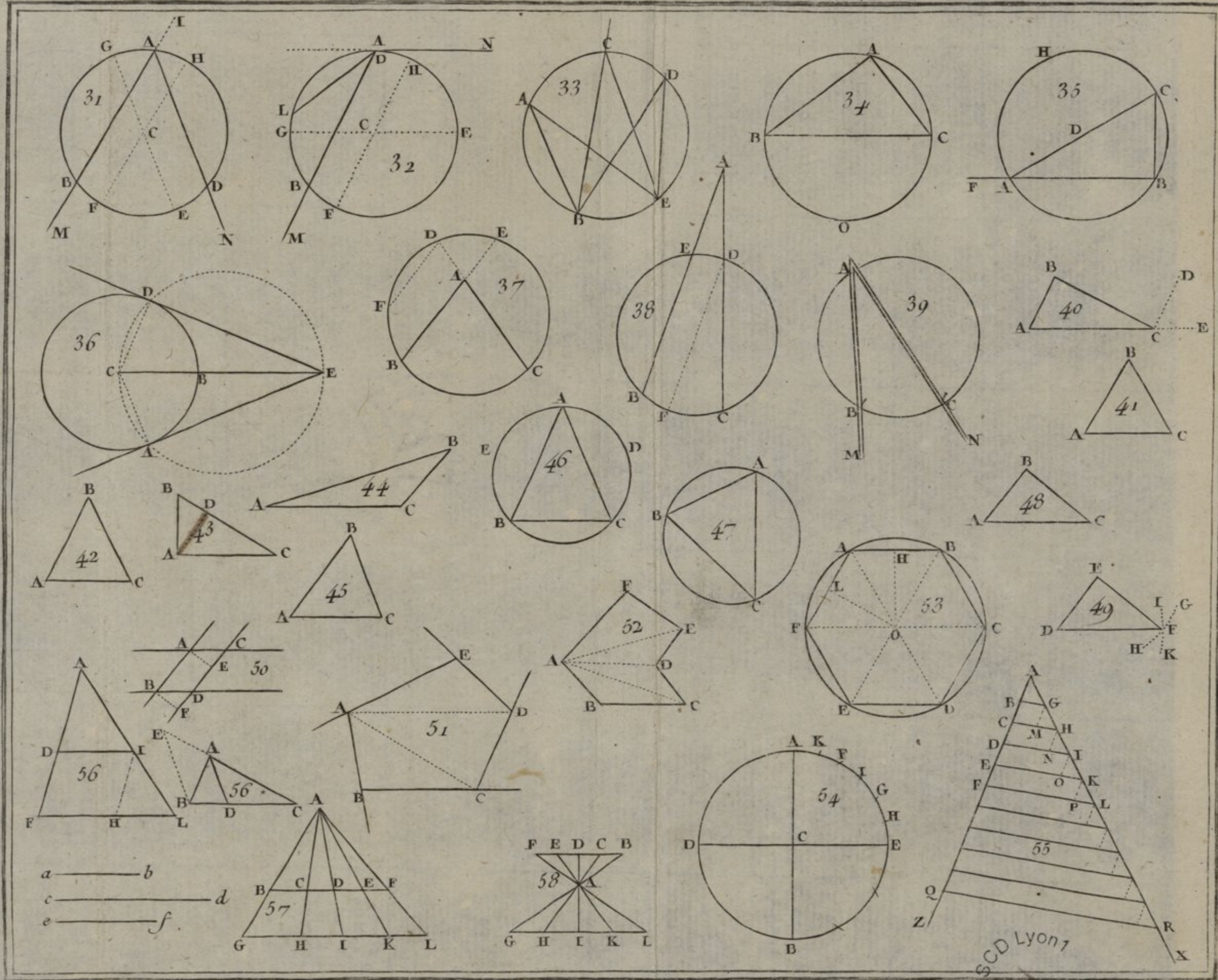
Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

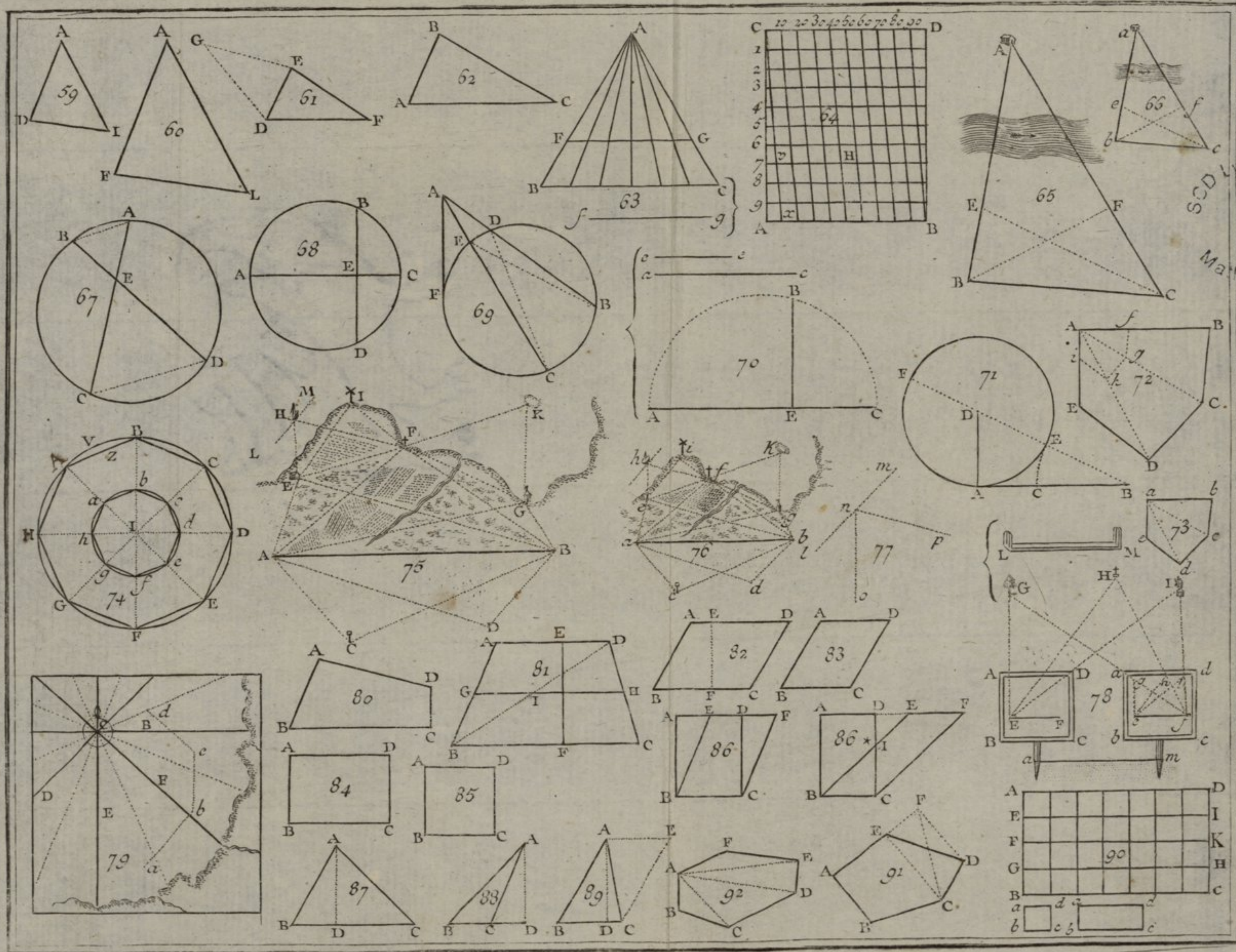
Du 20 Mars 1765.

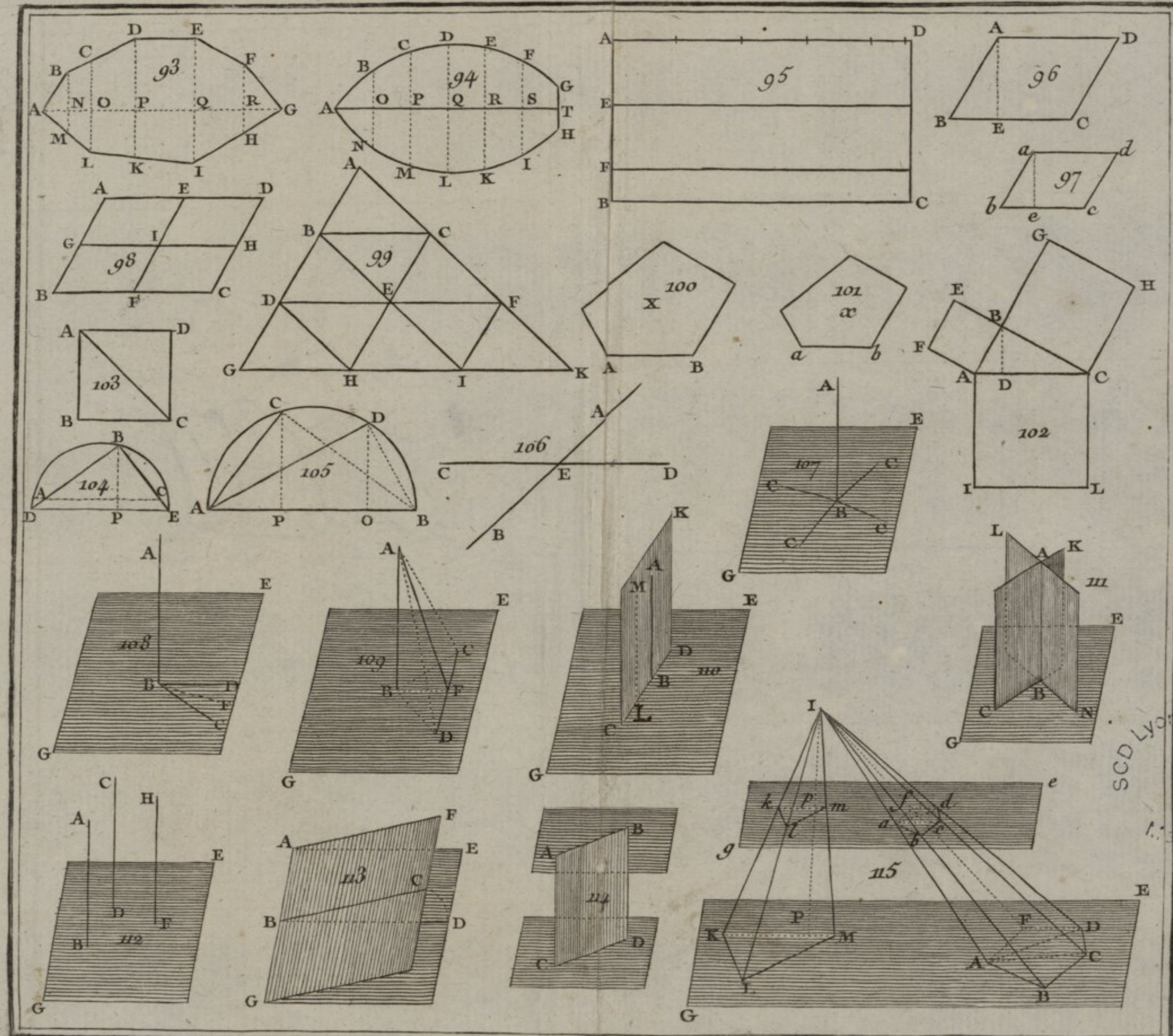
MEssieurs DUHAMEL, CLAIRAUT & D'ALEMBERT, qui avoient été nommés pour examiner *le second Volume du Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine, comprenant les Elémens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie sphérique*, par M. BÉZOUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris le 20 Mars 1765.

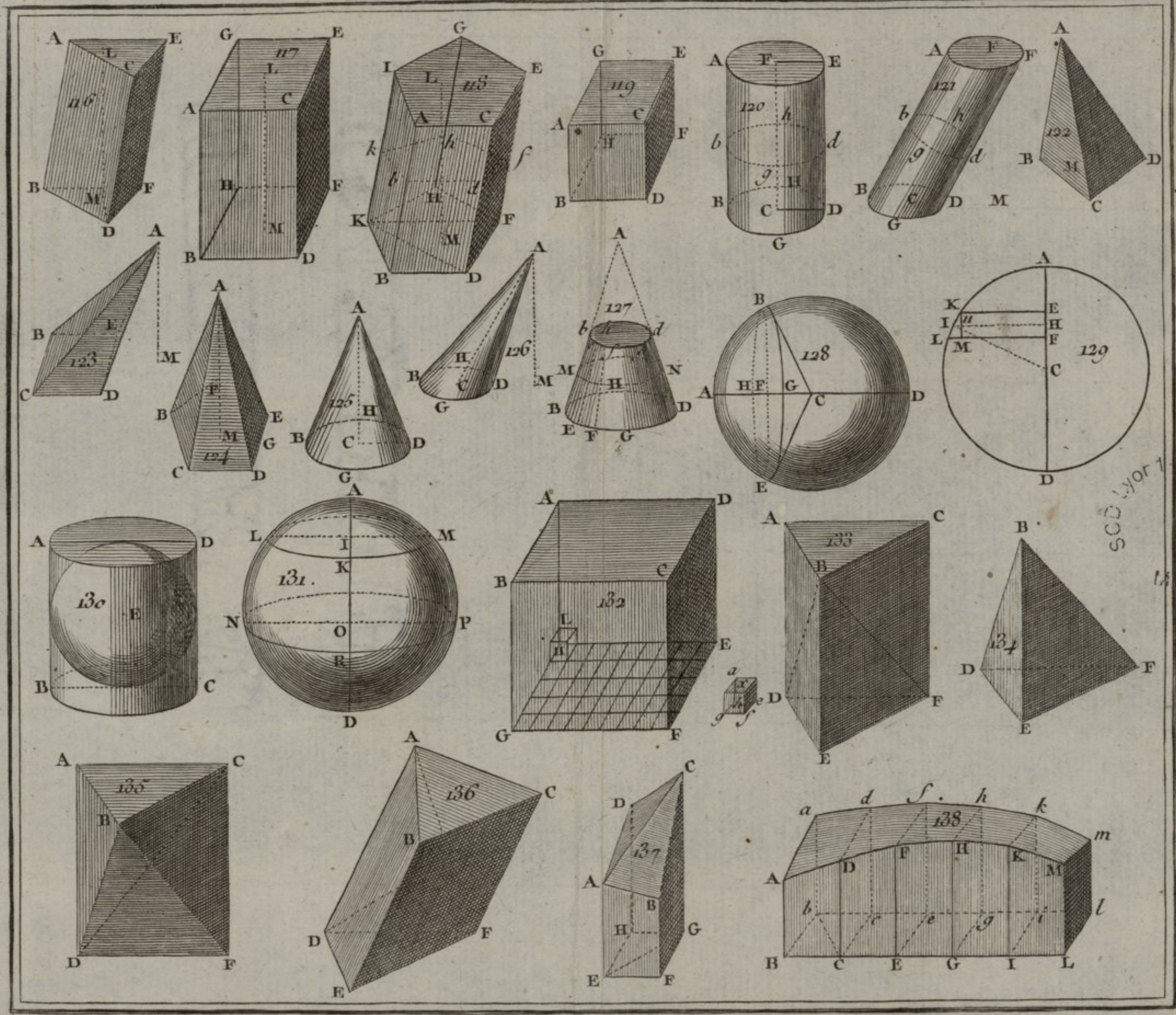
GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secr. perp. de l'Ac. R. des Sciences.*

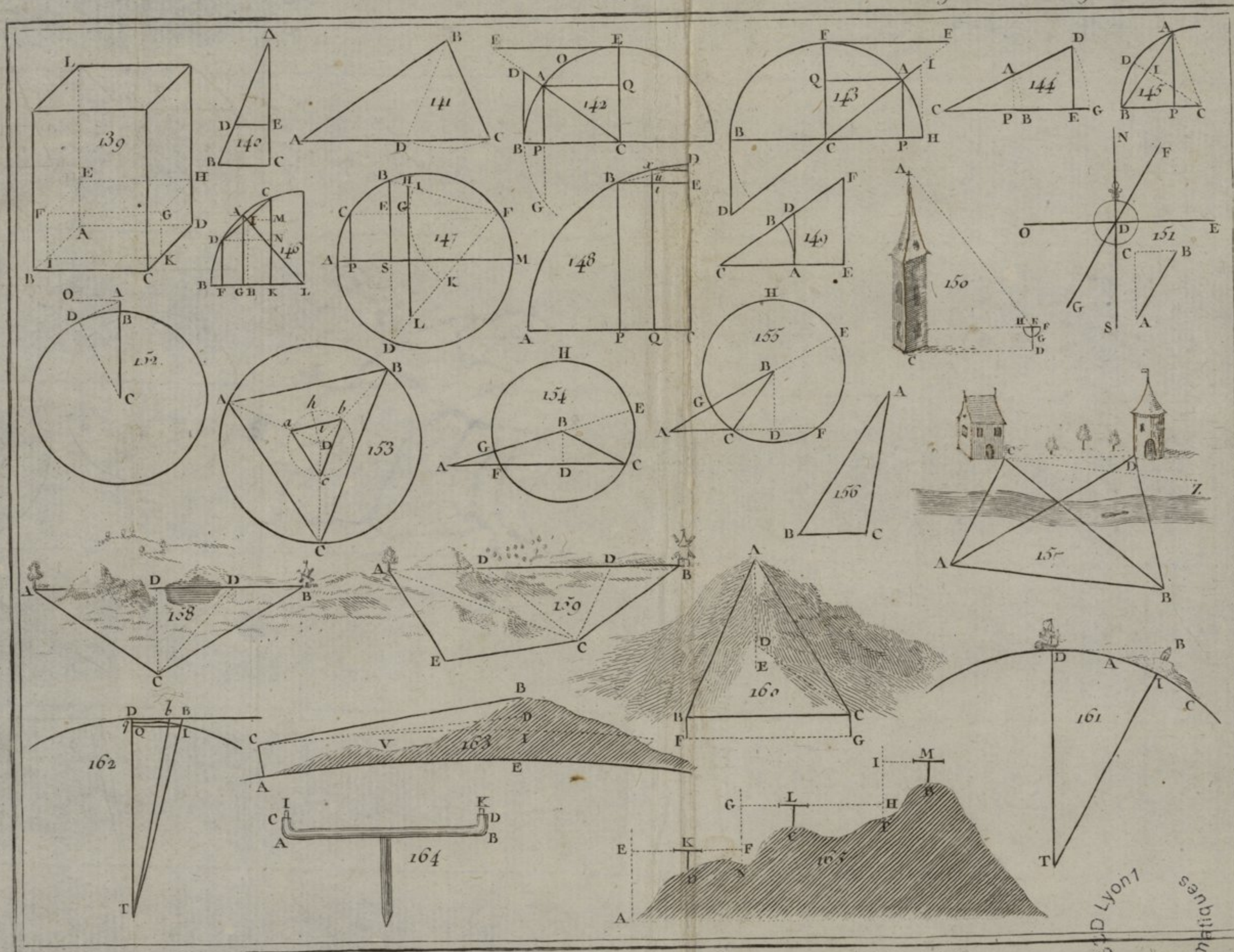


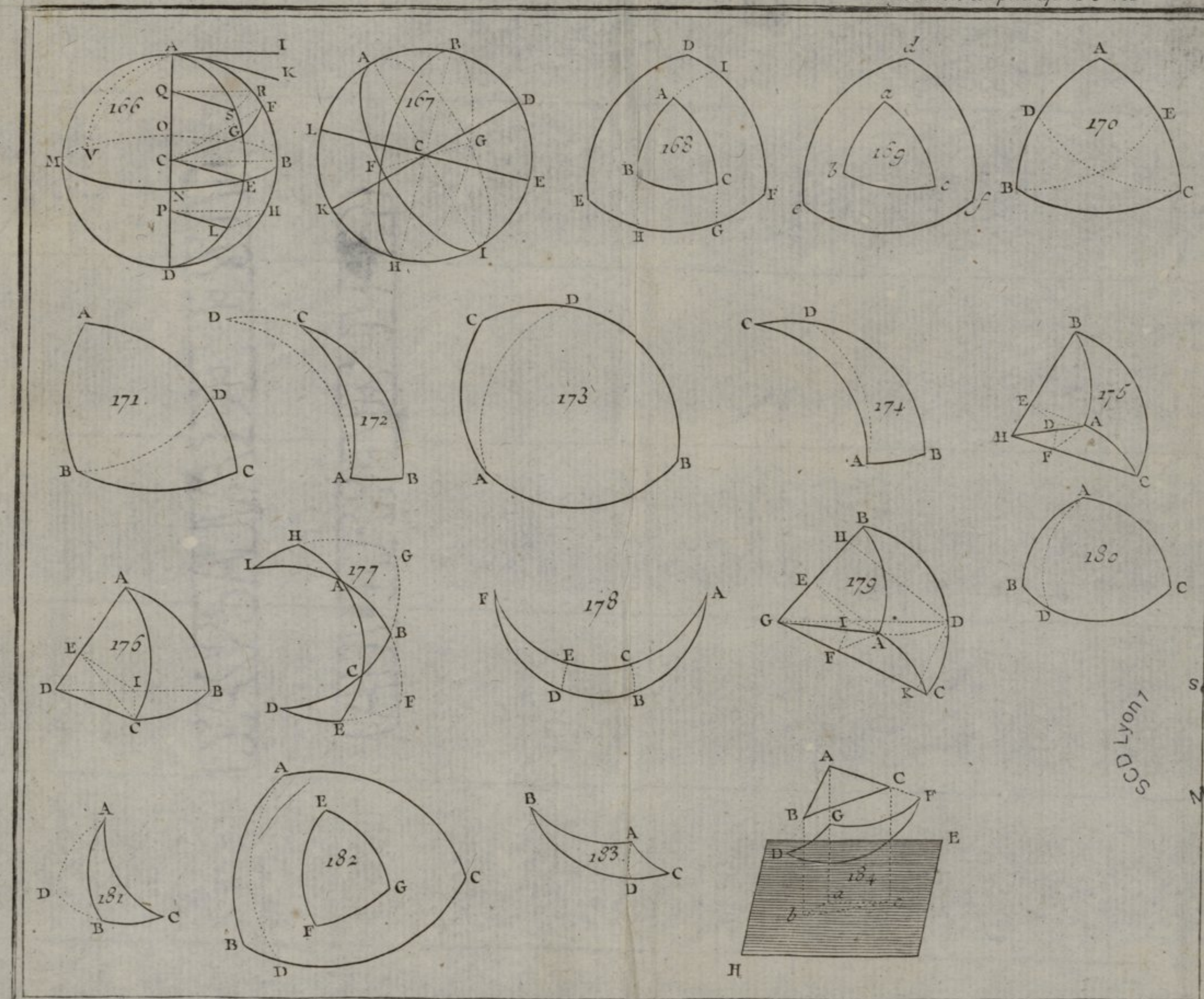

31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
56
57
58


59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
86
87
88
89
90
91
92




116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138


139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165



Gravées par Dheulland