OURRAND

ÉCANIQU

FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

Cours populaire de Mécanique expérimentale.

Par Mr. H. Durrande.
Professeur de Mathématiques appliquées.

1re Leçon.

Objet du cours — Principes fondamentaux de la mécanique — Loi de l'inertie — Des forces — Comparaison des forces — Dynamomètres — Mode d'action des forces — Egalité de l'action et de la réaction — De ce que l'on doit entendre par force d'inertie.

— 1. *Objet du cours.* — Ces leçons de mécanique forment la suite du cours de cinématique (1) que j'ai fait dans le premier semestre de l'année dernière. Nous avons jusqu'ici considéré le mouvement au point de vue purement géométrique; nous avons acquis les notions de vitesse, d'accélération, et nous nous sommes surtout préoccupés des transformations de mouvement et de la manière de les produire au moyen des divers mécanismes dont se compose une machine.

Cette première étude, d'ailleurs très importante pour l'ouvrier, n'est, pour ainsi dire, qu'une introduction à celle de la mécanique. Nous devons nous occuper de savoir comment les moteurs mettent les machines en mouvement, comment leur action se transforme et fournit à l'industrie le travail mécanique qui lui est nécessaire. C'est là le but essentiel que je me propose d'atteindre cette année.

— 2. *Principes fondamentaux de la mécanique.* — Il est évident que la première question qui se pose à notre esprit est celle de savoir comment les corps sont mis en mouvement. Or je dois dire tout d'abord que nous n'en savons absolument rien et que nous ne pourrons faire que des conjectures à ce sujet. Personne ne met en doute que le mouvement ne soit le résultat d'une cause antérieure; mais sur la nature de cette cause notre ignorance est presque complète.

Le mouvement n'est-il que la conséquence d'un autre mouvement qui se transmet d'une partie à une autre de la matière, ou bien est-il le produit de l'action des agents plus

(1) *Cours de Cinématique, 1874. Autographié in-4°, Paris, Gauthier-Villars, impr. libraire.*

ou moins mystérieux qui produisent les phénomènes dont nous sommes témoins, et que l'on nomme la Pesanteur, l'Attraction universelle, l'Électricité, le magnétisme. Il serait certainement désirable de le savoir; mais heureusement pour l'étude que nous avons à faire, cette recherche nous est inutile.

Quelle que soit en effet la cause qui fait tomber les corps à la surface de la terre, les choses se passent exactement comme s'ils étaient sollicités par une action dirigée vers le centre de la terre; il en est de même des mouvements des corps célestes, des corps électrisés ou magnétiques.

Toutefois notre ignorance de la nature intime des causes du mouvement nous impose l'obligation de prendre comme point de départ certains <u>principes</u> que nous ne pourrons même vérifier à <u>priori</u> par l'expérience, mais dont les conséquences mathématiques nous fourniront par la suite de nombreuses vérifications expérimentales.

3. Premier principe ou Loi de l'inertie —

La matière ne peut d'elle-même modifier son état de mouvement ou de repos.

Qu'un corps ne puisse de lui même se mettre en mouvement, c'est-à-dire modifier son état de repos, c'est ce que personne, je crois, ne conteste; mais il paraît moins évident qu'un corps en mouvement ne peut modifier cet état de mouvement, et certains faits semblent même prouver le contraire. Une bille qu'on fait rouler sur le sol s'arrête au bout de quelques instants; le boulet de canon lancé dans une certaine direction l'abandonne aussitôt pour retomber sur le sol après quelque temps. Mais ces corps ont-ils bien eux-mêmes modifié le mouvement qui leur a été communiqué?

Il est presque superflu de faire remarquer que le mouvement de la bille dure d'autant plus longtemps que la surface sur laquelle elle roule est plus polie; c'est donc une cause étrangère qui le modifie. Pour le boulet, tout le monde sait bien que c'est la pesanteur, c'est-à-dire une cause étrangère, qui le fait dévier de sa direction primitive.

D'ailleurs, comment ces corps qui n'auraient pu d'eux-mêmes se mettre en mouvement, seraient-ils plus aptes à modifier le mouvement qu'on leur a communiqué? Faire sortir un corps de l'état de repos, ou modifier d'une manière quelconque son état de mouvement sont deux phénomènes du même ordre, et nous entendons par la <u>loi d'inertie</u>, que la matière isolée, ou plus exactement ce qu'on appelle en mécanique le <u>point matériel</u>, est incapable de produire ces deux phénomènes sans l'intervention d'une cause étrangère.

Dans tout ce que je viens de dire je n'ai pas la prétention de démontrer le principe de l'inertie, puisque le point matériel, auquel seul il s'applique, est un être de raison, une pure abstraction, mais j'ai seulement voulu essayer de le faire comprendre.

Cette tendance des corps à conserver le mouvement antérieurement acquis, tant qu'une cause étrangère ne vient pas le modifier, se manifeste fréquemment à nous. C'est en vertu de l'inertie que les bateaux halés sur un canal peuvent s'avancer encore après que la traction a cessé, et qu'un train de chemin de fer continue à se mouvoir alors que la locomotive a cessé de fonctionner. C'est elle encore qui occasionne des accidents souvent funestes lorsqu'un cheval attelé à une voiture à deux roues vient à s'abattre, les personnes placées dans la voiture sont projetées en avant avec la vitesse que possédait celle-ci au moment de l'arrêt brusque. On utilise même cette propriété de l'inertie pour emmancher certains outils tels que les marteaux. Après avoir placé le marteau au bout du manche, on frappe l'extrémité opposée contre un obstacle fixe; la masse de fer, animée de la vitesse que possède le manche au moment du choc, continue de se mouvoir en vertu de l'inertie et il s'enfonce de plus en plus à chaque choc.

— 4. *Définition de la force.* — Nous appellerons <u>force</u> toute cause de mouvement ou de modification de mouvement.

Les principales forces que l'on rencontre dans la nature sont :

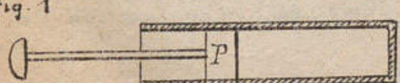
1°. <u>L'attraction universelle</u>, cause des mouvements des corps célestes; c'est elle qui fait décrire aux planètes des ellipses dont le soleil occupe un des foyers; c'est elle encore qui occasionne le phénomène des marées.

2°. La <u>pesanteur</u>, qui n'est qu'un cas particulier de l'attraction universelle, produit la chute des corps, ou la tendance à cette chute.

3°. Les <u>forces intérieures</u> ou <u>élastiques</u>. Ce sont les forces qui exercent leur action entre les particules de matière d'un même corps, et qui se manifestent à nous toutes les fois que nous cherchons à déformer un corps; mais elles sont évidentes au suprême degré dans les corps connus sous le nom de corps élastiques.

Les gaz, comme l'air, sont éminemment élastiques; pour nous en convaincre,

fig. 1



enfonçons dans un tube cylindrique à parois épaisses, un piston P (fig. 1); l'air se laisse comprimer, mais dès que l'on cesse d'agir sur la tige du piston, celui-ci revient sur lui-même, l'air tendant à reprendre son volume primitif.

Une lame d'acier B (fig. 2) fixée par une de ses extrémités A, et que l'on écarte de sa

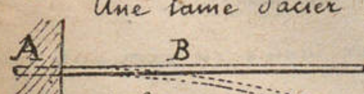


fig. 2.

position, y revient en oscillant, en vertu des forces intérieures qui agissent sur ses molécules.

On désigne souvent ces forces qui jouent un si grand rôle dans les phénomènes de l'acoustique sous le nom de <u>forces élastiques</u> ou <u>moléculaires</u>, et la propriété de la matière de tendre à reprendre la forme qu'une action passagère lui a fait perdre, sous le nom d'<u>élasticité</u>.

4°. Les forces électriques et magnétiques, dont on étudie les effets en physique.

5°. La force calorifique qui peut être rattachée aux forces intérieures ou moléculaires, et que je ne mentionne à part qu'à cause de sa grande importance; car la chaleur est une cause presque universelle de mouvement.

6°. Les forces développées par l'homme et les animaux, et connues sous le nom de moteurs animés.

Quelle que soit la cause des effets divers que nous attribuons aux forces que je viens d'énumérer, nous considérons une force comme ayant pour effet de donner ou de tendre à donner

au point A sur lequel elle agit, un mouvement dans une direction déterminée AF, que nous appellerons la direction de la force; le point A d'un corps sur lequel elle agit immédiatement porte le nom de point d'application de la force.

5. *Effets divers des forces — Intensité — Egalité des forces.*

Les forces agissant sur un corps produisent des effets extrêmement variés : elles peuvent le laisser en repos si d'autres forces s'opposent à son action; elles peuvent modifier sa forme, le briser, l'écraser; le mettre en mouvement ou bien modifier son mouvement. Dans tous les cas nous jugeons de l'intensité de la force par l'énergie des effets qu'elle produit. De plus nous regardons comme égales deux forces qui agissant dans des circonstances identiques produisent les mêmes effets.

L'effet d'une force, consiste souvent à détruire l'effet produit par une autre force; par exemple si on place un poids sur le plateau d'une balance, il tend à faire pencher le plateau; on peut s'opposer à ce mouvement en exerçant un effort avec la main, ou en plaçant un poids dans le second plateau. Nous dirons encore que : deux forces qui dans les mêmes circonstances détruisent l'effet d'une même troisième force sont égales. Et ceci nous amène naturellement à la comparaison des forces entre elles ou avec des poids, et à l'évaluation de leur intensité en Kilogrammes.

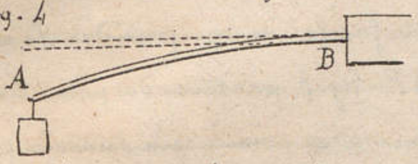
6. *Comparaison et mesure des forces.*

Quand nous soulevons un poids ou que nous poussons ou tirons un corps quelconque, nous exerçons dans tous les cas des actions analogues que l'on désigne sous les noms de pression et de traction.

On est porté à imaginer par là que toutes les forces agissent de même en exerçant une pression ou une traction sur les molécules d'un corps, et dès lors on a dû songer à comparer leur action à celle de l'une d'elles; la Pesanteur. Une pression ou une traction exercée sur un corps n'entraînent pas nécessairement le mouvement du point sur lequel elles s'exercent; si le corps dont ce point fait partie est soumis à une force opposée; il peut arriver qu'il n'y ait qu'une déformation de ce corps. C'est ainsi qu'un poids posé sur une table ne tombe pas parce qu'il est retenu par l'action de la table ; il presse et déforme la table. De même un poids suspendu par un fil à un point fixe ne tombe pas mais produit une tension du fil. Nous pouvons comparer les intensités de ces pressions ou de ces tensions, en interposant entre l'obstacle et la force un corps élastique dont les déformations très sensibles serviront à la mesure de l'intensité de la force.

Si l'on imagine une lame d'acier AB encastrée par une extrémité B, en exerçant

fig. 4



une pression en A, nous la recourbons ; mais si je suppose qu'on peut produire cette même flexion, en suspendant à l'extrémité A un poids de 3 Kilogrammes, on regardera la pression exercée primitivement comme équivalente à 3 Kilogrammes.

Dès lors un effort quelconque (pression ou traction) pourra être mesuré par sa comparaison à un poids.

Pour rendre cette comparaison commode on a imaginé des appareils de formes variés appelés Dynamomètres.

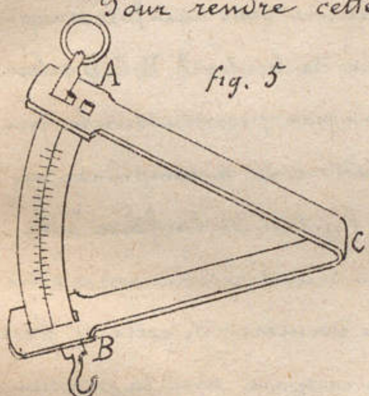


fig. 5

Ainsi on peut employer l'appareil représenté par la fig. 5 et composé d'une lame d'acier recourbée ACB, dont les extrémités sont reliées par deux arcs de fer divisés, tels que chacun d'eux rivé à l'une des branches, traverse l'autre. En tirant les extrémités libres des arcs, on rapproche les branches de la lame. Si la traction exercée par une force produit le même rapprochement qu'un poids de 5 Kilogrammes, on dira que la force équivaut à 5 Kilogrammes.

La fig. 6 indique une disposition bien fréquemment employée aujourd'hui ;

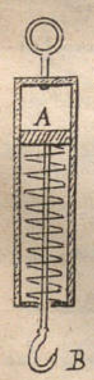
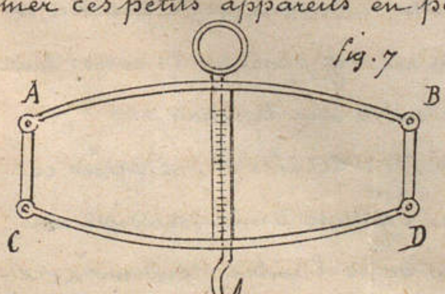


fig. 6

Dans un tube cylindrique un piston A faisant corps avec une tige AB terminée par un crochet, peut se mouvoir dans le tube en pressant sur un ressort à boudin qu'il comprime plus ou moins suivant l'intensité de la traction opérée. Une graduation extérieure, parcourue par une aiguille ou tout autre index, donne la valeur du poids ou de la force. Avec des ressorts un peu forts on peut peser des poids assez considérables ; avec des ressorts très faibles, on peut transformer ces petits appareils en pèse-lettres

fig. 7



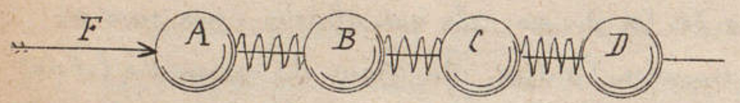
Poncelet a imaginé un dynamomètre très remarquable et dont nous reconnaîtrons surtout l'utilité dans l'évaluation du travail des forces : deux lames d'acier AB, CD, recourbées sont réunies par deux petites bielles AC, BD ; et leur écartement qui varie suivant la traction opérée au moyen d'un anneau et d'un crochet, est indiqué par deux règles divisées fixées respectivement à chacune des lames. Poncelet a démontré que l'accroissement d'écartement est proportionnel à la traction qui le détermine.

Voulons-nous par exemple mesurer l'effort qu'exerce un cheval traînant une charette? interposons entre les traits et le point d'attelage un dynamomètre, celui de Poncelet, par exemple; et on mesurera sur l'échelle de la graduation le nombre de Kilogrammes équivalent à l'effort exercé.

Maintenant que nous savons mesurer une force, il est facile de comprendre le mode employé en mécanique pour les représenter. Une droite AF fig. 3 partant du point d'application A et dirigée dans le sens du mouvement qu'elle tend à donner à ce point, sera terminée par une flèche indiquant sa direction, et on prendra sa longueur proportionnelle au nombre de Kilogrammes auquel elle équivaut, après avoir choisi une longueur convenable pour représenter le Kilogramme ou unité de force

7. *Mode d'action des forces.* Pour nous représenter la manière dont une force appliquée en un point d'un corps agit sur ce corps, imaginons une série de boules A, B, C, D, reliées entre elles par des ressorts à boudin, et supposons qu'une force F agisse par pression sur la pre-

fig. 8



mière A; le premier ressort va se comprimer et communiquer ensuite l'action de la force à la seconde boule, puis le second ressort après s'être comprimé la transmettra à la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière; si celle-ci n'est arrêtée par rien, après que tous les ressorts auront pris une forme en rapport avec la pression exercée par la force F, le système se mettra en mouvement tout d'une pièce; si la dernière boule est appliquée contre un obstacle fixe, la pression exercée par la force ne se manifestera que par la compression des ressorts. Si au lieu de presser la force F exerce une traction, cette traction se transmettra absolument de la même manière que dans le cas précédent, avec cette différence que les ressorts se distendront au lieu de se comprimer. C'est à très peu près de cette manière que l'action de la locomotive se communique de proche en proche aux divers wagons dont se compose le train. Dans les corps réputés solides, les petits ressorts sont remplacés par les actions ou forces moléculaires qui maintiennent à une certaine distance les molécules des corps; exerce-t-on une pression en un point d'un corps, elle se transmet de proche en proche par l'intermédiaire des ressorts moléculaires, et si rien ne s'y oppose le corps tout entier obéit à la pression exercée. Il en est de même dans le cas d'une traction.

8. *Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* D'après ce qu'on vient de voir, il est clair que lorsque le corps reçoit l'action d'une pression ou d'une traction, les ressorts comprimés dans un cas ou distendus dans l'autre tendent à reprendre leur forme primitive et réagissent en sens contraire de la force.

Newton a énoncé ce principe que l'on doit regarder comme un des principes fondamentaux de la mécanique : L'action exercée par la force est égale à la réaction. Ce principe important recevra de nombreuses vérifications dans la suite de ces leçons, et je ne crois pas utile de m'y arrêter davantage ; mais nous pouvons y rattacher une notion également importante, et sur laquelle on émet souvent des idées fausses.

—— 9. *De ce qu'il faut entendre par force d'inertie.* En vertu de la loi de l'inertie tout corps animé d'une certaine vitesse doit se mouvoir en ligne droite et d'un mouvement uniforme tant qu'aucune cause étrangère ne vient pas modifier ce mouvement. Si le corps en mouvement rencontre un obstacle qui l'arrête ou qui change la direction de son mouvement, il y a une action produite par l'obstacle sur le mobile, et une réaction égale du mobile sur l'obstacle. C'est cette réaction exercée par le mobile contre tout ce qui tend à modifier son mouvement qu'on appelle la force d'inertie. Une erreur assez répandue consiste à croire que cette force d'inertie anime le mobile et peut déterminer son mouvement ; or pour peu qu'on réfléchisse, on verra sans peine qu'aucune force n'est nécessaire pour faire mouvoir un corps qui possède déjà une certaine vitesse, et qu'il en faut une au contraire pour la lui faire perdre ou même simplement pour la modifier.

Prenons dans la main un corps un peu lourd, une balle de plomb par exemple et donnons lui un mouvement arbitraire, nous éprouverons une résistance continuelle de sa part à chaque modification que nous lui ferons éprouver dans son mouvement ; nous pourrons même mesurer cette résistance en interposant entre le corps mobile et la main un dynamomètre qui indiquera constamment la grandeur de l'action exercée par la main et de la réaction ou force d'inertie du mobile.

fig. 9

Lorsque descendant d'une voiture en marche, d'un train qui n'est pas encore arrêté, nous nous sentons le haut du corps porté en avant au moment où les pieds touchent le sol, nous ne dirons plus que c'est la force d'inertie qui nous pousse, mais nous dirons au contraire que c'est le sol qui arrête nos pieds et non le haut du corps qui possède encore l'impulsion du véhicule qu'on vient de quitter.

C'est surtout quand on imprime un mouvement de rotation (1) à un corps qu'on peut remarquer les effets de la force d'inertie qui prend alors le nom de force centrifuge.

C'est encore là un mot dont on se sert souvent sans le bien comprendre.

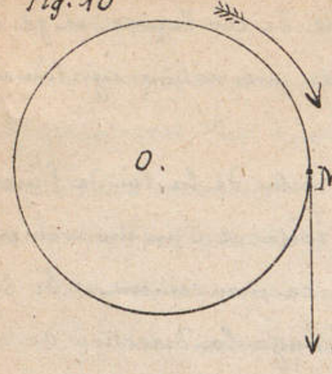
Essayons de nous en faire une idée nette.

Un mobile assujetti à décrire un cercle fig. 10 et abandonné dans une certaine

(1) Voir Cynématique, p. 33.

position M, part suivant la direction MT de la tangente au cercle.

Fig. 10



C'est ce que prouve l'expérience de la fronde; le mouvement des gouttes d'eau qui s'échappent d'un corps mouillé qui tourne; pour empêcher le mobile M de s'échapper suivant la tangente, il faut donc exercer un effort dirigé vers le centre du cercle et d'autant plus grand que la vitesse de rotation est plus grande; mais le mobile ainsi gêné continuellement dans sa tendance à prendre un mouvement rectiligne réagit sur le cordon ou la main ou le lien quelconque qui le ramène sans cesse vers le centre. C'est cette réaction que l'on nomme la <u>force centrifuge</u>.

Considérons maintenant l'un des appareils au moyen desquels on met en évidence les effets de la force centrifuge; une boule A fig. 11 peut glisser le long d'une tige horizontale que l'on fait tourner autour d'un axe vertical; on voit aussitôt la boule A s'éloigner de l'axe de rotation et glisser vers l'extrémité de la tige, comme si elle était réellement poussée par une force dirigée vers l'extrémité de la tige.

fig. 11 (élévation)

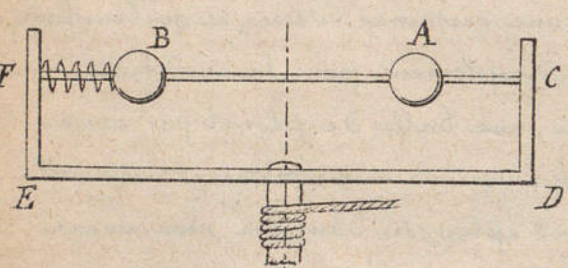
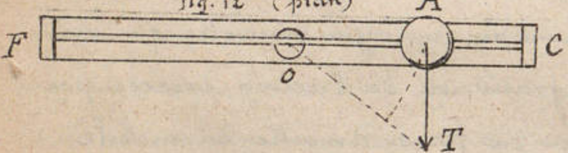


fig. 12 (plan)



En réalité la seule force qui agisse sur la boule A, c'est la pression de la tige qui la traverse, et cette pression s'exerce justement dans un sens latéral à la tige; or en vertu de cette pression AT fig. 12 elle tend à décrire la droite AT qui l'éloigne nécessairement du centre, et comme rien ne l'oblige à ne pas s'en écarter, elle s'en éloigne en effet et glisse le long de la tige. C'est donc par une pure fiction que l'on peut dire que la <u>force centrifuge</u> pousse le mobile A à s'écarter du centre de rotation. Mais à partir du moment où la boule A sera arrêtée par le cadre ou un obstacle quelconque la réaction de la boule contre l'obstacle se manifestera, et par le moyen d'un ressort il sera facile d'en mesurer l'intensité.

2e. Leçon.

Principe de l'indépendance de l'effet des forces — Une force constante imprime un mouvement uniformément varié — La Pesanteur est une force constante — Lois de la chute des corps — Machine d'Atwood — Appareil de Mr Morin. Emploi du Diapason — Proportionnalité des forces aux vitesses qu'elles impriment à un même mobile dans le même temps — Masse d'un mobile.

---

10. *Principe de l'indépendance de l'effet des forces.* — Admettre qu'un corps ne peut de lui-même modifier son état de repos ou de mouvement c'est dire qu'un point matériel qui n'est sollicité par aucune force restera en repos s'il est en repos ou conservera, s'il est en mouvement, un mouvement rectiligne et uniforme. Le mouvement sera rectiligne, car aucune cause ne tend à lui faire quitter la direction qu'il doit à sa vitesse actuelle, et sa vitesse conservera toujours la même valeur puisqu'aucune cause accélératrice ou retardatrice ne viendra en modifier la grandeur.

Si nous supposons le mobile soumis à l'action d'une seule force, et si de plus nous supposons qu'il parte du repos, on voit encore très bien qu'il va se mettre en mouvement dans la direction de la force, et acquérir une certaine vitesse. Mais le corps une fois lancé, comment agira la force sur le point déjà en mouvement? Et si au lieu d'une seule force nous supposons qu'il y en ait plusieurs agissant simultanément sur le point mobile, quel sera le résultat de leur action commune?

Nous nous trouvons évidemment là en présence d'un problème nouveau, que nous ne pouvons résoudre avec les seules notions exposées dans la leçon précédente. Il nous faut admettre un troisième principe, connu sous le nom de : Loi de l'indépendance des effets des forces et que l'on énonce ainsi :

Si plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel, on doit retrouver dans le résultat de leur action commune l'effet que produirait chacune d'elles si elle agissait seule.

Voici comme il faut entendre cet énoncé : imaginons que sous l'action d'un certain nombre de forces, un point matériel soit animé d'un certain mouvement ; si une nouvelle force F vient à agir sur le mobile, elle modifiera son mouvement antérieurement acquis et cette modification équivaudra à l'effet qu'aurait produit la force F agissant seule sur le mobile partant du repos. On peut donc encore énoncer le principe précédent en disant :

L'effet d'une force sur un point matériel est indépendant de l'état de repos ou de mouvement de ce point.

On a coutume de citer comme exemples propres à confirmer ce nouveau principe ce qui se passe dans un bateau en mouvement sur une eau tranquille ; tous les mouvements qu'on y peut produire sur les corps pesants s'effectuent de la même manière que si le bateau était immobile ; ainsi, si on lance une balle verticalement, elle retombe en paraissant décrire constamment la verticale de celui qui la lance. De même, si d'un wagon animé d'une grande vitesse on lance un corps assez lourd pour que la résistance de l'air n'ait pas d'influence sur lui on lui verra décrire la même trajectoire que pendant un arrêt du wagon.

Tous ces exemples ne démontrent pas le principe de l'indépendance des effets des forces, parce qu'il est à peu près impossible de faire la part d'influence de chaque force dans les observations que nous pouvons faire.

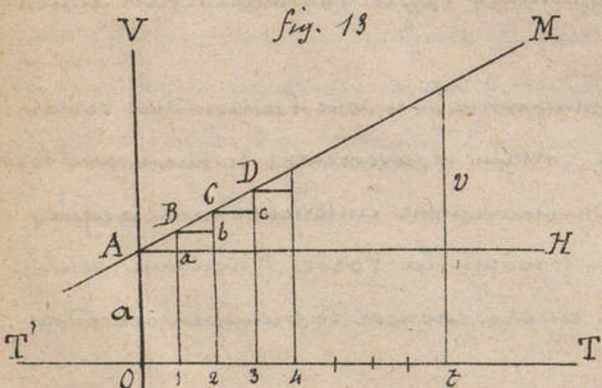
La seule manière rigoureuse de le justifier consiste à en tirer des conséquences faciles à vérifier ; et c'est ce que nous allons faire.

11 Durée de l'action d'une force — Forces continues — Percussions.

Toute force doit nécessairement employer un certain temps pour produire une modification quelconque dans l'état de repos ou de mouvement d'un corps ; seulement on peut remarquer que certaines forces telles que la pesanteur, par exemple, agissent constamment, continuellement sur le point mobile et ne produisent que peu à peu les changements de grandeur et de direction de la vitesse du mobile ; tandis que d'autres tels que les chocs, les coups de marteau &c.. produisent une altération sensible dans l'état du corps en un temps très petit ; mais non pas infiniment petit. On donne le nom de <u>percussions</u> à de pareilles forces qui n'ont pas du tout le même caractère que les autres qu'on nomme <u>forces continues</u>, et que nous devons concevoir comme des pressions ou des tractions agissant sans cesse. C'est de l'action des forces continues qu'il va être question dans ce qui suit.

12. Action d'une force constante sur un point matériel.

fig. 13



Supposons qu'une force constante agisse sur un point matériel déjà animé d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire dans lequel le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, ou ce qui revient au même dans lequel la vitesse est constante ; nous supposerons de plus que la force agit dans la direction même du mouvement primitif. Partageons le temps en intervalles très petits que nous représenterons par les divisions de l'échelle OT (échelle du temps, voir Cinématique.) et imaginons que la force au lieu d'agir continuellement sur le mobile, procède par impulsions intermittentes identiques, au commence-

-ment de chacun des intervalles de temps. Soit OA la vitesse constante du mouvement uniforme; sous l'action de la force, elle resterait telle et la courbe des vitesses serait la parallèle AH à l'échelle du temps. (1)

En vertu de la première impulsion de la force la vitesse va s'accroître pendant le premier intervalle de temps d'une certaine quantité aB (fig. 13), et si la force cessait d'agir le mobile conserverait un mouvement uniforme dont la vitesse aurait pour valeur 1. B; mais en vertu de la seconde impulsion de la force, la vitesse va encore s'accroître pendant le second intervalle de temps, et si nous admettons que l'effet de la force est indépendant de l'état antérieur du corps nous devons obtenir un accroissement bC de vitesse identique au premier; le même raisonnement prouve qu'il en sera de même dans le troisième, dans le quatrième intervalle; d'où il suit que la vitesse s'accroîtra de quantités égales en temps égaux; or ce résultat est évidemment indépendant de la petitesse des divisions du temps; donc si nous restituons à la force son caractère de continuité, c'est-à-dire si nous supposons que les pressions au lieu de se renouveler à des intervalles de temps finis, se succèdent constamment, le résultat est toujours le même, et la vitesse s'accroîtra toujours de quantités égales en temps égaux, en d'autres termes le mouvement du mobile est uniformém varié.

Désignons par a la vitesse primitive OA, et supposons que les divisions de l'échelle du temps, au lieu de représenter des intervalles très petits, soient maintenant égales à l'unité de temps, et appelons j la quantité constante dont s'accroît la vitesse dans l'unité de temps; on aura pour la vitesse :

après la première seconde (par exemple) $v_1 = a + j$

.. 2e ... $v_2 = a + 2j$

... 3e ..... $v_3 = a + 3j$ .....

Et après un nombre de secondes désigné par t,

$$v = a + j \times t. \tag{1}$$

Cette quantité constante j dont s'accroît la vitesse dans l'unité de temps est ce que nous avons appelé l'accélération, ou la vitesse de la vitesse.

Nous avons vu également dans la 3e leçon de Cinématique, que l'espace parcouru par le mobile dans le mouvement uniformément varié était représenté fig. 13 par l'aire du trapèze ayant pour bases parallèles a, et v, et pour hauteur le nombre t des divisions du temps, en sorte que cet espace est donné par la formule

$$e = \left(\frac{a+v}{2}\right)t = a \times t + \frac{1}{2} j \times t^2, \tag{2}$$

En remplaçant v par sa valeur tirée de l'équation (1)

En particulier si la vitesse antérieure à l'action de la force est nulle, $a = 0$, et les formules (1) et (2) deviennent

(1) Cinématique 3e Leçon.

$$v = j \times t \quad , \qquad e = \frac{1}{2} j \times t^2$$

C'est ce qu'on exprime en disant que la vitesse est proportionnelle au temps et l'espace proportionnel au carré du temps.

J'ai supposé que la force constante agissait dans le sens du mouvement antérieur ou sur un corps partant du repos, dans ce cas elle produit un mouvement uniformément accéléré.

Si elle agissait en sens contraire du mouvement elle produirait un mouvement uniformément retardé.

— 13 *Action d'une force constante qui n'agit pas dans la direction du mouvement.*

Si la force constante a une direction différente de celle du mouvement antérieur, il y a autre chose qu'une simple modification dans la grandeur de la vitesse ; sa direction change aussi par degrés insensibles pour se rapprocher de celle de la force et le mobile décrit alors une courbe.

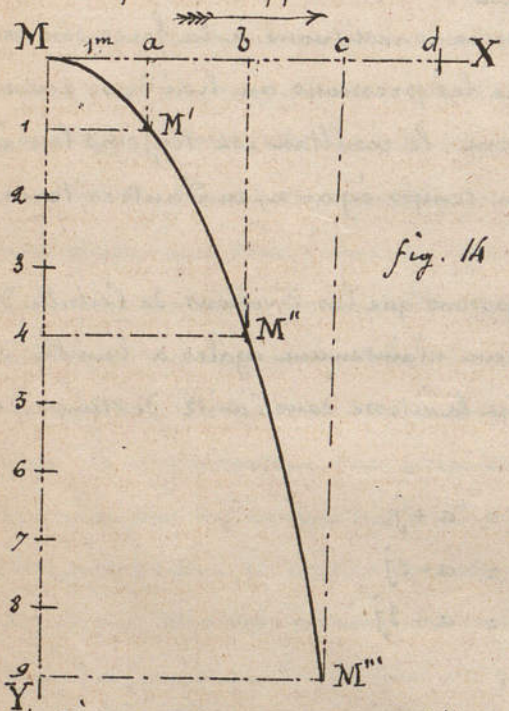


fig. 14

Considérons un mobile M animé d'une vitesse Ma (1m par seconde, par exemple) dans une direction MX ; de telle sorte que le mobile se serait éloigné de 1m, 2m, 3m, ... dans cette direction après 1s, 2s, 3s, ... ; d'autre part ce même mobile est sollicité par une force constante qui agit dans la direction MY, et qui, si elle agissait seule sur le corps M partant du repos, lui communiquerait un mouvement rectiligne uniformément varié. Si par exemple sous l'action de cette force le mobile parcourt 0m,5 dans la 1re seconde, il aura parcouru 0m,5 × 4 après 2s ; 0m,5 × 9 après 3s ; 0m,5 × 16 après 4s etc.. D'après le principe de l'indépendance des effets des forces, le mobile se trouvera en M', M'', M''', ... après 1s, 2s, 3s, .. ; c'est-à-dire aux sommets de parallélogrammes ayant pour côtés les espaces que le mobile aurait parcourus, soit en vertu du mouvement uniforme, soit en vertu de l'action de la force.

— 14 *La Pesanteur est une force constante.* La pesanteur avons nous dit, est la cause de la chute des corps ; cette force agit sur tous les corps, et sur les dernières molécules des corps ; de plus elle agit également sur tous quoique tous cependant ne tombent pas en apparence avec la même vitesse ; cela tient uniquement à la résistance de l'air qui s'oppose davantage à la chute des corps légers. Si l'on fait le vide dans un long tube, on remarque que des corps, les uns lourds, comme des grains de plomb, les autres légers, comme du papier, des plumes tombent ensemble avec une même vitesse quand on renverse le tube.

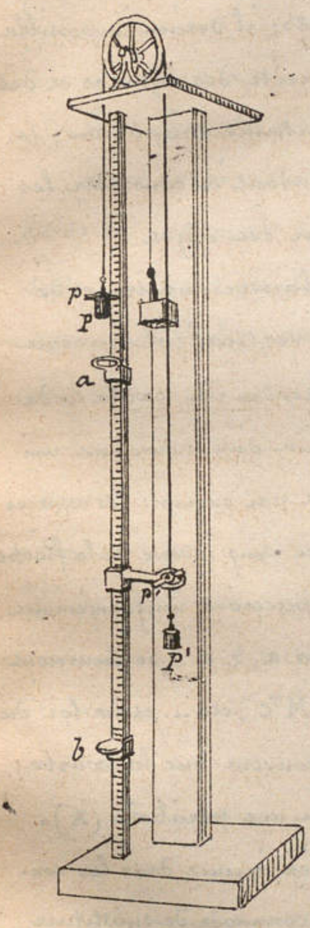
Pour montrer que la pesanteur est une force constante il suffit d'étudier les lois de la chute des corps et de s'assurer qu'elles satisfont bien aux conditions trouvées précédemment.

c'est-à-dire que le mouvement des corps pesants est bien un mouvement uniformément varié.

On en donne plusieurs vérifications expérimentales que je vais indiquer rapidement.

15 Machine d'Atwood. Cet appareil se compose dans sa partie essentielle d'une poulie extrêmement mobile sur laquelle s'enroule un fil supportant deux poids égaux P, P'; si l'on place sur l'un d'eux un poids additionnel p, il détermine le mouvement des deux autres et ce mouvement est bien uniquement dû à l'action de la pesanteur; le mouvement doit donc être uniformément accéléré, et la vitesse doit croître proportionnellement au temps. Or si on se rappelle la définition de la vitesse dans un mouvement varié (x) on voit que pour avoir la vitesse du système des poids à un moment donné, il suffit d'arrêter à ce moment le poids additionnel p, car l'action de la pesanteur sur le poids P est équilibrée par celle qu'elle exerce sur le poids P' et de mesurer l'espace parcouru pendant la seconde qui suit l'arrêt. On obtient ce résultat, en plaçant le long d'une règle divisée et verticale un curseur annulaire a pouvant laisser passer le poids P et arrêter le poids additionnel, et un curseur plan b, destiné à indiquer exactement à quelle division de la règle se trouve le poids à un instant donné. Au moyen du curseur plan, et du mécanisme d'horlogerie adapté à l'appareil qui fait mouvoir un pendule à secondes, on peut déterminer la position du poids P après la première seconde de chute; on substituera alors au curseur plan, le curseur annulaire pour arrêter le poids p dans cette position, et on mesurera comme je l'ai dit avec le curseur plan l'espace parcouru par le poids P pendant la seconde qui suit l'arrêt. En procédant de même après 1 seconde, 2 secondes, 3 secondes, ... etc, on trouve que les vitesses des mouvements uniformes qui succèdent au mouvement varié à ces divers instants croissent proportionnellement au temps. Le mouvement du système est donc bien uniformément varié.

Fig. 15.



En plaçant le curseur plan aux divers points où passe le mobile après 1s, 2s, 3s... ce à quoi l'on parvient par tâtonnement, on peut aussi déterminer les espaces parcourus pendant ces différents intervalles et s'assurer qu'ils croissent bien proportionnellement aux carrés de ces nombres de secondes, c'est-à-dire qu'ils sont comme les nombres 1, 4, 9, 16, ...

(x) Cinématique, p. 18.

La machine d'Atwood peut encore servir à vérifier les lois du mouvement ascensionnel des corps pesants ; il suffit pour cela d'avoir un curseur annulaire pour chacun des poids P, P' et deux poids additionnels égaux p, p' disposés de telle sorte qu'au moment où le poids P abandonnera son poids additionnel p, le poids P' en remontant prendra le sien ; le mouvement du système se ralentira, et il s'arrêtera lorsque le poids P' surchargé de p' sera remonté à la hauteur d'où était descendu P chargé de p ; c'est-à-dire que la vitesse qui fait monter verticalement un corps pesant d'une certaine hauteur, est justement celle qu'acquerrait un mobile abandonné à lui même et tombant de cette hauteur.

—— 16. *Appareil à indications continues de Mr. Morin.* La machine d'Atwood a l'inconvénient de ne pas indiquer le mouvement réel des corps pesants ; il serait impossible, en effet, de pouvoir appliquer le principe de cette méthode à la mesure directe des espaces et des vitesses en chute libre. Toutefois si le mouvement est ralenti dans une certaine proportion, les lois n'en sont pas altérées ainsi que nous le verrons. On a cherché cependant à constater les lois du mouvement en chute libre, et voici une méthode très simple pour cet objet.

fig. 16.

Imaginons qu'un mobile pesant, pouvant laisser une trace de son passage, tombe devant un tableau vertical ; il tracera sur le tableau une verticale ce qui ne nous apprendra rien sur la loi de la chute. Mais si le tableau passe horizontalement d'un mouvement uniforme devant le corps qui tombe, et s'il parcourt par exemple les espaces Ma, ab, bc, ... (fig. 14) dans chaque seconde, en sens inverse de la flèche, les hauteurs verticales dont tombe le mobile s'espaceront uniformément sur le tableau et vis-à-vis chacune des divisions a, b, c, .. se trouveront les hauteurs de chute correspondantes M'a, M''b, M'''c, etc ... et la loi du mouvement sera connue. C'est ainsi qu'on trouvera que la courbe, lieu des positions successives du mobile, est bien une parabole (x).

Il n'est pas absolument impossible de réaliser l'expérience dans les conditions que je viens d'indiquer ; mais il est plus commode de substituer au tableau vertical un cylindre vertical qui ne serait autre chose que la surface du tableau rectangulaire enroulé. On n'ignore pas en effet qu'une feuille rectangulaire de carton ou de tôle, peut facilement se transformer en un cylindre ; les poêliers ne confectionnent pas autrement leurs tuyaux. Or il est plus facile de faire tourner un cylindre d'un mouvement uniforme au moyen d'un mécanisme d'horlogerie ; l'appareil ci-dessus, fig. 16, du Général Morin réalise cette disposition ; On enroule et on colle préalablement sur un cylindre de bois une feuille de papier rectangulaire ; un poids P muni d'une pointe traçante

---

(x) Cinématique, p. 23.

et guidé par deux fils de fer tombe verticalement le long du cylindre au moment même où celui-ci commence à tourner et la pointe traçante dessine une courbe parabolique sur le papier qu'on déroule ensuite et sur lequel on reconnait facilement la loi indiquée du mouvement uniformément varié. Il semble que cet appareil ne puisse donner que la loi des espaces parcourus par le mobile dans sa chute. Soit a la vitesse constante du mouvement du cylindre; l'arc développé OP (fig. 17) décrit dans un nombre de secondes t est $a \times t$; l'espace correspondant parcouru par le poids est MP et on doit avoir en appelant g l'accélération due à l'action de la pesanteur

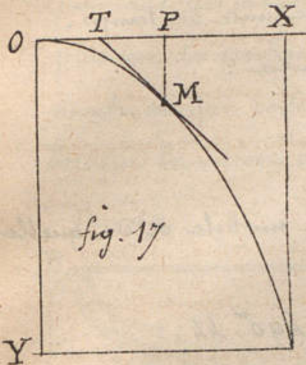


fig. 17

$$MP = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{(formule (2) , page 11)}$$

Comme $OP = a \times t$, on en conclut par une transformation simple

$$MP = \frac{1}{2} g \frac{OP^2}{a^2} .$$

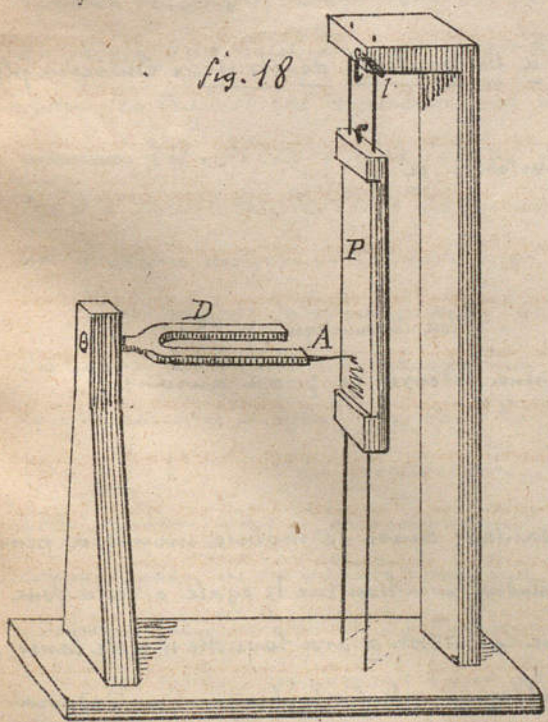
Cette formule permettra, en étudiant la forme de la courbe, de déterminer l'accélération $g = 9^{m},8088$.

Mais on peut encore déterminer très bien la loi des vitesses avec la même courbe; car nous avons là une courbe représentative du mouvement du point pesant et nous avons démontré, (Cinématique, 3e leçon) que la vitesse correspondant à l'espace MP est le rapport $\frac{MP}{TP}$ qui donne l'inclinaison de la tangente à la courbe au point M, et j'ai montré page 24 de cette même leçon que par suite d'une propriété géométrique de la parabole, $TP = \frac{1}{2} OP$; donc $\frac{MP}{TP} = 2 \frac{MP}{OP} = \frac{g}{a^2} \times OP = \frac{g}{a} \times t$.

La vitesse croît donc proportionnellement au temps comme nous l'avions déjà trouvé.

17. *Emploi du diapason.* A la fin du cours de Cinématique (X) nous avons dit que l'on employait fréquemment le diapason pour déterminer la loi d'un mouvement. Mon savant collègue, Mr. Gripon, a eu l'idée (XX) de s'en servir pour vérifier les lois de la chute des corps. On sait qu'un diapason exécute un certain nombre de vibrations d'égale durée en une seconde, et que ce nombre de vibrations caractérise le son qu'il rend. Mr. Gripon fait donc vibrer horizontalement un diapason muni d'une pointe traçante A fig. 18. devant une plaque de verre noirci P, guidée par un dispositif analogue à celui de l'appareil de M. Morin et dont la fig. ci-contre donne une idée suffisamment nette. La plaque retenue par un levier l est abandonnée à elle même, et la pointe du diapason trace sur le noir de fumée une ligne sinueuse dont les côtés s'espacent de plus en plus. Le même nombre de sinuosités répondant à une même durée; il est aisé de s'assurer que les espaces parcourus croissent proportionnellement au carré du temps; c'est-à-dire proportionnellement aux carrés des nombres

fig. 18



(X) Cinématique, p. 95. (XX) L'idée appartient à Mr. Bourbouze, préparateur à la Sorbonne de vibrations exécutées par le diapason.

18 *Problèmes sur le mouvement vertical des corps pesants.* Le mouvement vertical des corps pesants étant, comme on vient de le voir, un mouvement uniformément varié, on peut lui appliquer les formules générales de ce mouvement, en désignant par la lettre $g = 9^m,8088$, l'accélération due à l'action de la pesanteur, la seconde étant prise pour unité de temps.

1°. Le point est abandonné à lui même sans vitesse initiale; on aura:

$$v = gt \quad , \qquad h = \frac{1}{2} g t^2 ,$$

en désignant maintenant par $\underline{h}$ au lieu de $\underline{e}$ la hauteur de chute.

Exemple numérique: après 10 secondes, quelle sera la vitesse du mobile et de quelle hauteur sera-t-il tombé?

$$v = 9^m,8088 \times 10 = 98^m,08 \qquad h = 4,9044 \times 100 = 490^m,44 .$$

Après dix secondes le mobile aura acquis une vitesse de 98^m par seconde, et il sera tombé d'une hauteur de 490^m.

Le carré de la vitesse est donné par la formule $v^2 = g^2 \times t^2$; d'autre part si on multiplie h et son expression par $2g$, on a aussi:

$$2g \times h = g^2 t^2 ;$$

donc

$$v^2 = 2g \times h$$

et par suite

$$v = \sqrt{2g \times h} .$$

Relation très précieuse, qui nous fait connaître la vitesse acquise par un mobile pesant tombant d'une certaine hauteur, sans nous préoccuper de la durée de la chute.

La formule $v^2 = 2gh$ montre que <u>le carré de la vitesse est proportionnel à la hauteur de chute</u>. On verra plus loin le parti que nous tirerons de cette relation.

2°. Le mobile est lancé de haut en bas avec une vitesse $\underline{a}$.

On aura alors:

$$v = a + g \times t$$
$$h = at + \frac{1}{2} g \times t^2 .$$

(Voir Cinématique p. 23)

3°. Le mobile est lancé de bas en haut avec une vitesse $\underline{a}$; on aura:

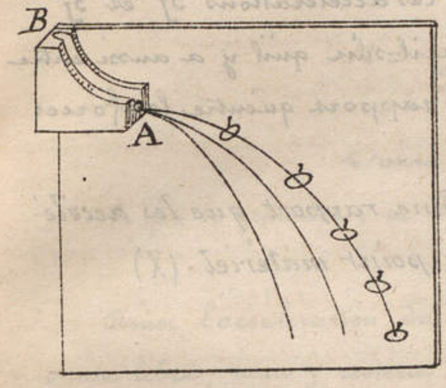
$$v = a - g \times t$$
$$h = at - \frac{1}{2} g \times t^2 .$$

On tire de ces relations des conséquences intéressantes; ainsi le mobile montera pendant un nombre de secondes égal au quotient $\frac{a}{g}$; et il atteindra une hauteur h égale à celle dont il devrait tomber pour acquérir au bas de sa chute justement la vitesse $\underline{a}$ avec laquelle il a été lancé.

Avec quelques notions très simples, mais indispensables de calcul algébrique, on déduira aisément toutes ces conséquences des formules ci-dessus.

19. Mouvement parabolique des corps pesants. Tout ce qui précède prouve, je crois, surabondamment, que la pesanteur est une force constante, puisque lorsqu'elle agit sur un mobile partant du repos, ou sur un mobile animé d'une vitesse verticale, elle lui communique un mouvement uniformément varié (acceléré ou retardé). Nous pouvons pousser plus loin la vérification des conséquences du principe de l'indépendance des effets des forces, en montrant que cette force constante, la pesanteur, produit bien un mouvement parabolique, lorsque la vitesse du mobile est inclinée sur la verticale.

fig. 19



On peut se servir pour cela de l'appareil de S'Gravesende, représenté fig. 19.

Il se compose d'un tableau en bois sur lequel on a tracé plusieurs paraboles partant du même point A et devant servir de trajectoire d'après les principes précédents, à un mobile lancé horizontalement du point A avec des vitesses différentes.

Une pièce de bois AB, placée en avant dans un coin du tableau est creusée d'une rigole courbe qui force une petite bille à prendre au point A une direction horizontale; la vitesse de la bille dépend de la hauteur du point d'où on la lance. Pour rendre l'expérience plus nette on a placé sur le trajet parabolique du mobile des anneaux vissés dans le tableau et dans lesquels la bille passe facilement.

Le mouvement des projectiles offre encore une vérification nouvelle des lois que nous venons d'exposer, et on peut se faire une idée des diverses circonstances qu'il présente au moyen d'un petit appareil, dans lequel un jet d'eau lancé sous diverses inclinaisons reproduit les trajectoires paraboliques dues à une même vitesse initiale du mobile.

20. Mesure des forces par les accélérations qu'elles communiquent à un même point matériel. Le principe de l'indépendance des effets des forces va nous fournir un nouveau moyen de les comparer.

Nous venons de voir qu'une force constante f agissant sur un point matériel partant du repos lui donne un mouvement uniformément varié avec une certaine accélération j, ce qui revient à dire, que dans la 1re seconde, elle lui fait parcourir un espace $\frac{1}{2}j$, $(e = \frac{1}{2} j \times t^2)$. Une seconde force identique à la première produirait un effet identique aussi; donc ces deux forces agissant ensemble, dans la même direction, produiront un effet double, et communiqueront au même point une accélération $2j$; trois forces identiques à F agissant ensemble, une accélération $3j$, etc...

Ceci posé, considérons deux forces constantes F, F' agissant successivement sur un même point matériel et lui communiquant des accélérations j, j'. je dis qu'on aura la proportion

$$\frac{F}{F'} = \frac{J}{J'}$$

ou ce qui revient au même,

$$\frac{P}{J} = \frac{P'}{J'}$$

Pour le démontrer, supposons que la force P soit équivalentes à 5 forces égales f, et que la force P' soit équivalente à 3 de ces mêmes forces; on aura

$$P = 5f \quad , \quad P' = 3f \quad ,$$

et par suite il y a entre les forces P et P' un rapport égal à $\frac{5}{3}$. si la force f agissant seule est capable de donner au point matériel une accélération j, une force 5f lui imprimera une accélération 5j, et une force 3f une accélération 3j; or ces accélérations 5j et 3j sont précisément les accélérations J, J' dues aux forces P, P', d'où il suit qu'il y a aussi entre les accélérations J, J' le rapport $\frac{5}{3}$, c'est-à-dire le même rapport qu'entre les forces elles-mêmes.

Deux forces constantes sont donc entre elles dans le même rapport que les accélérations qu'elles communiqueraient isolément à un même point matériel. (X)

Cette proportion écrite sous la forme

$$\frac{P}{J} = \frac{P'}{J'} \quad ,$$

montre qu'il y a un rapport constant entre une force constante et l'accélération qu'elle communique à un point matériel; ce rapport constant est ce qu'on nomme la <u>masse</u> du point, et nous la désignerons toujours par la lettre <u>m</u>, en sorte qu'on pourra écrire

$$P = mJ.$$

Ou bien qu'<u>une force est égale au produit de la masse du point sur lequel elle agit, par l'accélération qu'elle lui communique</u>.

Ce théorème nous fournira un nouveau moyen de connaître la grandeur d'une force, d'après l'accélération du mouvement qu'elle communique au point sur lequel elle agit. Il faut toutefois connaître la masse; or si nous considérons en particulier le poids du point matériel, nous savons que l'accélération correspondante est le nombre $g = 9^m,8088$, double de l'espace parcouru pendant la 1re seconde de chute; on aura alors:

$$P = mg. \quad d'où \quad m = \frac{P}{g}.$$

<u>Ainsi la masse d'un point matériel n'est autre chose que le quotient de son poids par le nombre g</u>. (*accélération due à l'action de la pesanteur*).

Cas des forces variables. — Ce résultat si important obtenu pour les forces constantes peut être étendu facilement aux forces variables. Il suffit de remarquer que comme nous ne nous occupons ici que des forces continues, une force variable peut être considérée comme constante pendant un intervalle de temps très petit, et le mouvement varié comme uniformément varié pendant ce même intervalle; dès

(X) C'est ce qu'on peut vérifier expérimentalement avec la machine d'Atwood (P. 13) lors les résultats précédents peuvent être étendus à deux forces variables. Il faut d'ailleur noter que les effets que ces forces vont produire dépendent uniquement des valeurs actuelles et non des valeurs futures des forces, et ces effets immédiats doivent être proportionnels aux valeurs actuelles des forces.

Application — Nous pourons maintenant justifier d'une manière complète la théorie de la machine d'Atwood, du moins autant qu'on peut le faire dans un cours aussi élémentaire.

Désignons par M la masse de chacun des poids égaux ; par m celle des poids additionnels ; la masse totale mise en mouvement est $2M + m$, et la force motrice p ; donc, si on désigne par j l'accélération du mouvement, on aura d'après le principe précédent :

$$p = (2M + m) \times j$$

$$M = \frac{P}{g} \quad , \quad m = \frac{p}{g} ; \quad \text{donc}$$

$$p = \left(\frac{2P + p}{g}\right) \times j .$$

$$\text{Donc enfin} \quad \frac{j}{g} = \frac{p}{2P + p}$$

Si $p = 10$ grammes, et $P = 50$ grammes, on aura :

$$\frac{j}{g} = \frac{10}{110} = \frac{1}{11}$$

Ainsi l'accélération du mouvement sera la 11^e partie de l'accélération d'un mobile en chute libre ; mais j restera constant aussi bien que g, et le mouvement est toujours uniformément varié, et les lois de ce mouvement ne sont pas altérés.

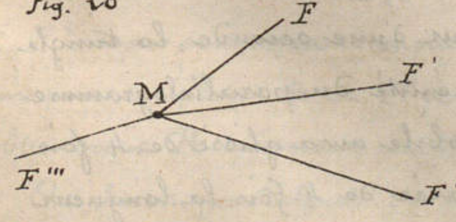
3^e Leçon.

Action combinée de plusieurs forces sur un même point — Composition des forces. — Résultante — Parallélogramme des forces — Polygone des forces — Propriété caractéristique des résultantes — Théorème des projections — Vérification expérimentale de la composition des forces — Décomposition d'une force donnée — Applications.

---

21. *Action combinée de plusieurs forces sur un même point.* Dans la précédente leçon nous avons étudié l'action d'une force agissant seule sur un point en repos ou animé d'un mouvement ; nous avons à examiner maintenant l'action combinée de plusieurs forces agissant simultanément sur le même point mobile.

fig. 20



Si nous considérons un point M sollicité par plusieurs forces F, F', F''..... si chacune d'elles agissait seule, elle communiquerait au mobile partant du repos un mouvement dans sa propre direction ; mais il est évident que par suite de l'action combinée de toutes les forces, le mobile n'obéira exclusivement à aucune des forces, mais prendra un mouvement unique et parfaitement déterminée. Or admettre le principe de l'indépendance des effets des forces, c'est admettre que le mouvement du mobile est le mouvement résultant des mouvements simultanés que tend à prendre le mobile en vertu des actions des diverses forces qui le sollicitent.

On n'a pas oublié, je pense, ce qui a été dit en Cinématique (x) sur la composition des mouvements. Par exemple: un mobile est lancé sur un bateau qui lui même descend le courant d'un fleuve; le mouvement absolu du mobile, résultant du mouvement relatif qu'il possède par rapport à un observateur placé dans le bateau, et du mouvement d'entraînement du bateau reproduit dans son ensemble l'effet de chacun des mouvements qui le composent.

C'est en partant de cette idée très simple que nous allons pouvoir nous faire une idée de l'action combinée de plusieurs forces sur un point matériel.

—— 22. *Composition des forces – Résultante.* Puisqu'un mobile sollicité par les actions simultanées de plusieurs forces prend un mouvement unique, il est clair qu'on peut concevoir la possibilité de produire ce mouvement en faisant agir sur le mobile une seule force, qui pourrait ainsi remplacer toutes les forces appliquées au mobile.

Une pareille force qui n'existe d'ailleurs que dans notre pensée, est ce qu'on nomme leur Résultante.

L'opération qui a pour but de déterminer la résultante de plusieurs forces est désignée sous le nom de composition des forces. Ainsi donc, composer des forces appliquées à un point, c'est déterminer par quelle force unique on pourrait les remplacer sans modifier l'effet qu'elles produisent.

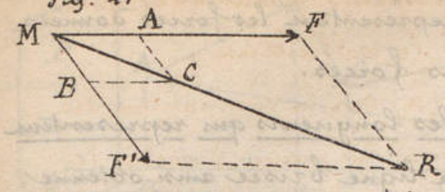
—— 23. *Règle du parallélogramme des forces.* Imaginons un mobile M sollicité par deux forces MF, MF' constantes en grandeur et en direction. Si la force F agissait seule le mobile prendrait un mouvement uniformément accéléré dans sa direction, et dans la première seconde il parcourrait un espace MA égal à la demi accélération; de même sous l'action de la force MF' il prendrait un mouvement uniformément varié, dans sa direction, et parcourrait dans la première seconde l'espace MB égal aussi à la demi accélération correspondante. Or en vertu de l'indépendance des effets des forces, les choses doivent se passer comme si le point M glissait à la manière d'un anneau sur une tringle MF d'un mouvement uniformément varié pendant que la tringle elle même se transporterait parallèlement à elle même dans la direction MF'. Quand le point M sera venu en A au bout d'une seconde, la tringle sera venue en BC, et le point M sera venu en C à l'extrémité du parallélogramme ayant pour côtés MA, MB; au bout de deux secondes, le mobile aura glissé de 4 fois la longueur de MA ($e = MA \times t^2$), et la tringle se sera déplacée de 4 fois la longueur

---

(x) Cinématique (4e leçon) p. 25 et suivantes.

de MB ($e' = MB \times t^2$) ; et par suite le mobile sera encore à l'extrémité de la diagonale d'un

fig. 21



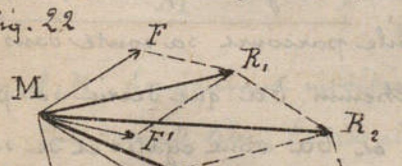
parallélogramme de dimensions quatre fois plus grandes que le premier mais de proportions identiques, et il en serait ainsi à tous les instants du mouvement. donc le mobile se déplace sur la diagonale MC du parallélogramme des demi accélérations ; son mouvement est uniformément varié comme les mouvements composants, et MC en est aussi la demi accélération ; car si on appelle E l'espace parcouru par le mobile sur la direction MC, on a $\frac{E}{e} = \frac{MC}{MA}$, à cause de la similitude des parallélogrammes, et on déduit de là $E = MC \times t^2$, ce qui est bien la loi d'un mouvement uniformément varié dont MC est la demi accélération.

Mais les forces F, F' sont les produits des accélérations 2MA, 2MB, par la masse du du point M ; donc le parallélogramme ayant pour cotés les forces F, F' est semblable à celui des demi accélérations ; et comme la force qui pourrait produire le mouvement résultant doit évidemment avoir la direction de ce mouvement, cette résultante des forces est donc dirigée suivant la direction MC, qui est aussi celle de la diagonale du parallélogramme des forces. Et puisque F est le produit de 2MA par la masse du point, que F' est le produit de 2MB par cette masse et enfin que la résultante R doit être le produit de 2MC par la masse, il s'en suit qu'il existe entre les trois forces R, F, F' les mêmes proportions qu'entre MC, MA, MB.

Donc enfin : *La résultante de deux forces appliquées à un même point est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces données.*

24. *Règle du polygone des forces.* Sachant composer deux forces, il ne sera pas difficile d'en composer un nombre quelconque ; nous allons retrouver là les règles déja données pour la composition des vitesses. (x)

fig. 22



Soit F, F', F'', F''' un certain nombre de forces agissant simultanément sur un même point M ; nous composerons d'abord les deux forces F, F', d'après la règle du parallélogramme et nous obtiendrons une première résultante R_1 qui pourrait à elle seule remplacer les deux forces F, F' : nous composerons ensuite R_1 et F'', et nous obtiendrons une seconde résultante R_2 qui peut remplacer R_1 et F'' et par suite F, F', F'' ; enfin en composant R_2 et F''' nous obtiendrons R qui peut remplacer R_2 et F''' et par suite toutes les forces données.

Or il n'est pas difficile de voir que cette résultante finale R est la droite qui,

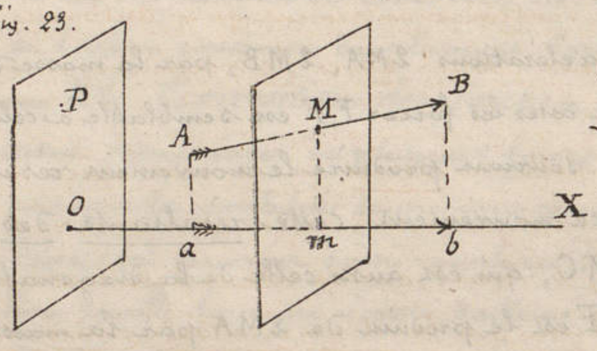
(x) Cinématique p. 27.

partant du point M fermerait la ligne brisée MFR_1R_2R formée en plaçant bout-à-bout dans leur direction propre les longueurs MF, MF', MF'', ... qui représentent les forces données et on en conclut la règle suivante, dite règle du polygone des forces.

Si l'on place bout-à-bout, avec leur direction propre, les longueurs qui représentent les forces appliquées à un même point, la droite qui ferme la ligne brisée ainsi obtenue, et la transforme en un polygone, représente en grandeur et en direction la résultante de ces forces données.

25. *Propriété caractéristique d'une résultante — Notions fondamentales et théorème sur les projections.*

fig. 23.



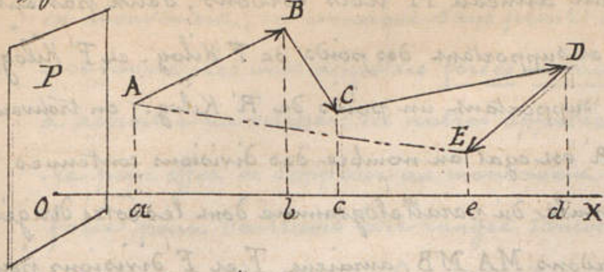
Imaginons qu'un mobile M parcoure un chemin rectiligne AB dans le sens indiqué par la flèche, et demandons nous de combien il s'est éloigné d'un certain plan fixe P, ou quel chemin il aura fait dans un sens OX perpendiculaire à P. Ce chemin est ce que nous appellerons le déplacement AB du mobile estimé dans le sens OX, et nous l'indiquerons par la notation $\overline{AB}^x$. Pour avoir la grandeur du chemin ainsi estimé, nous imaginerons un plan mobile, parallèle au plan fixe P, et perpendiculaire à OX par conséquent; ce plan coupe la droite OX en un point m qu'on appelle la projection du mobile M et qui se déplace avec le point M. La portion ab de la droite OX, comprise entre les projections des positions A et B du mobile est dite la projection de AB sur OX. On a donc :

$$ab = \overline{AB}^x ;$$

Ainsi, projection d'un chemin sur une droite OX, ou chemin estimé suivant cette direction, c'est tout un. La droite OX porte le nom d'axe de projection.

En parcourant sa route dans le sens AB, il est clair que le mobile s'éloigne du plan P; sa projection m s'éloigne de la même quantité du point O; si le mobile parcourt sa route dans le sens BA, il se rapproche du plan P d'une quantité égale au chemin ba que décrit sa projection sur OX. Nous dirons alors que les deux projections ab et ba sont égales et de sens contraires et que leur somme est nulle, puisque, ajoutées, leur effet est de ramener le mobile à sa position primitive, c'est-à-dire de n'éloigner, ni de rapprocher le mobile du plan P.

Ceci bien établi, supposons que le mobile parcoure un chemin formé de lignes droites ABCDE, et estimons comme tout-à-l'heure le chemin fait dans la direction OX, ou ce qui revient au même le chemin fait par le mobile projeté sur OX; il est clair que cette projection du mobile parcourt successivement les projections ab, bc, cd, de, des diverses parties du chemin réel; en réalité le mobile s'est écarté finalement du plan P de la quantité ae, projection fig. 24



de la droite AE qui fermerait le chemin brisé; Ainsi, si le mobile au lieu de parcourir le chemin brisé ABCDE, avait parcouru directement la ligne droite AE, l'écartement du mobile par rapport au plan P eût été exactement le même; c'est ce que nous exprimerons en disant que le chemin AE qui ferme la ligne brisée ABCDE est la résultante ou la somme géométrique du chemin brisé; et ceci reviendra à dire que ce chemin estimé dans une direction quelconque OX est la somme des chemins partiels ou composants estimés suivant la même direction.

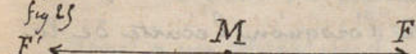
Le mot somme employé en dernier lieu doit s'entendre autrement qu'en arithmétique; c'est-à-dire que l'on doit tenir compte de ce que deux parties ed et de parcourues en sens contraire se détruisent dans le résultat final.

Substituons maintenant à l'idée de chemins celle de vitesses qui ne sont après tout que des chemins parcourus dans l'unité de temps, et nous pourrons dire, en nous reportant au mode de composition des vitesses (Cinématique, 4e leçon), que la vitesse résultante est la somme géométrique des vitesses composantes, ou bien, que la vitesse résultante estimée dans une certaine direction est la somme des vitesses composantes estimées dans la même direction.

Enfin, d'après ce que nous venons de dire sur la composition des forces, on voit que la résultante des forces appliquées à un même point, estimée dans une certaine direction est la somme des composantes estimées dans la même direction.

26 *Vérification expérimentale des règles précédentes.* Je viens d'établir la règle de la composition des forces par la considération des vitesses qu'elles impriment à leur point d'application. Mais on peut y parvenir par la considération des effets de tension ou de pression que produisent les forces et on est conduit au même résultat.

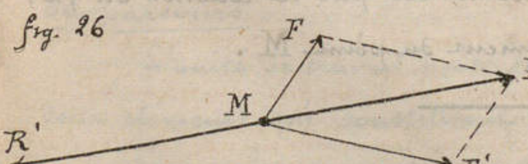
fig 25



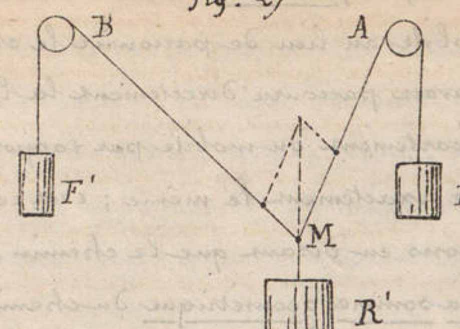
D'abord il est clair que deux forces F, F' (fig.) égales et agissant dans des directions directement opposées sur un même point matériel M, ne peuvent modifier son état de repos ou de mouvement.

En second lieu, la résultante R (fig.) de deux forces F, F' pouvant leur être substituée, une force R' égale et contraire à la résultante R devra donc détruire l'effet des forces F, F'; et inversement, lorsqu'on aura trouvé une force R' qui contrebalancera à elle seule l'effet de deux forces appliquées à un même point, on sera certain d'avoir obtenu une force égale et directement opposée à la résultante de ces forces.

fig. 26



Si donc nous voulons vérifier la règle du parallélogramme, il suffit par exemple, fig. 27

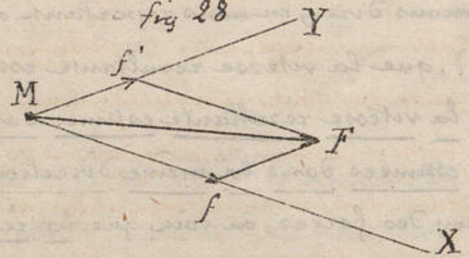


d'attacher à un anneau M trois cordons, deux passant sur des galets et supportant des poids de F Kilog. et F' Kilog; et un troisième supportant un poids de R' Kilog.; on trouvera que le poids R' est égal au nombre des divisions contenues dans la diagonale du parallélogramme dont les côtés dirigés suivant les cordons MA, MB, auraient F et F' divisions pour longueurs.

27. Décomposition d'une force donnée en deux composantes.

Si l'on conçoit la possibilité de remplacer un système de forces données par une force unique, il n'est pas plus difficile d'admettre que l'on puisse remplacer une force donnée par un système de forces dont elle serait la résultante. Cette décomposition s'opère fréquemment et est très commode. On peut remarquer d'ailleurs qu'elle peut s'effectuer d'une infinité de manières, car l'on peut regarder une même force comme la résultante d'une infinité de systèmes différents.

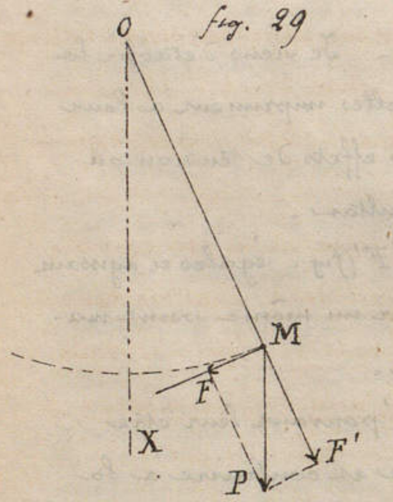
fig 28



On peut par exemple se donner à volonté les directions MX et MY des deux composantes; il n'y aura alors qu'à mener par l'extrémité F de la force donnée des parallèles aux directions MX et MY et on aura les composantes Mf, Mf'.

Exemple: On appelle pendule simple un point matériel pesant M suspendu à un fil flexible et inextensible OM, attaché à un point fixe O, appelé point de suspension; ce fil est supposé dépourvu de masse; il est donc idéal.

fig. 29



Le point M est sollicité par son poids P, force verticale; on peut décomposer ce poids en deux forces, l'une MF' dirigée suivant le prolongement du fil; l'autre MF, perpendiculaire à cette direction et tangente à l'arc de cercle que peut décrire le point M lorsqu'on l'écarte de la position d'équilibre qui correspond à la verticale du point de suspension.

Ces composantes F, F', dépendent évidemment de l'angle d'écart du pendule XOM; l'une F' est contrebalancée par la réaction du fil, l'autre MF détermine le mouvement du point M.

4e Leçon.

Travail mécanique des forces — Forces motrices — Résistances — Définition du travail — Unité de travail — Evaluation du travail — Forces constantes — Forces variables — Effort moyen — Exemples de calcul de travail — Des cas où le travail est nul.

— 28. *Forces motrices et résistances.* Pour peu que l'on considère avec attention un corps en mouvement, on remarque sans peine qu'il y a toujours deux espèces de forces tendant à modifier ce mouvement; les unes appelées forces motrices, puissances ou moteurs, tendent à favoriser ce mouvement à accroître sa vitesse; les autres appelées forces résistantes, ou simplement résistances, ont au contraire pour effet de s'opposer au mouvement, et de tendre à détruire la vitesse du mobile. La même force peut d'ailleurs être rangée tantôt parmi les moteurs, tantôt parmi les résistances; ainsi la pesanteur qui détermine la chute des corps devient une résistance quand on veut les élever. Le frottement qui est une des résistances les plus fréquentes que l'on rencontre, est indispensable à la production du mouvement des locomotives, à la marche de l'homme ainsi que nous le verrons par la suite.

— 29. *Travail mécanique des forces — Sa définition.* Dans les arts et dans l'industrie, toutes les fois qu'une force, qu'un moteur travaille, il a à vaincre une résistance et à déplacer en même temps son point d'application sur un certain parcours, en sens contraire de l'action de cette résistance. Dans l'élévation des matériaux de construction, par exemple, il faut vaincre la résistance due au poids des fardeaux, et il faut la détruire sur toute la hauteur à parcourir; le travail mécanique produit dans cette circonstance est donc le résultat d'un effort développé et d'un chemin parcouru. Il n'est pas difficile de constater qu'il en sera de même dans tous les cas analogues. Un cheval traîne une voiture en développant un certain effort; il travaille, et son travail est en raison composée de l'effort exercé et du chemin parcouru.

Il est bien évident en effet que le travail est d'autant plus considérable pour un même déplacement de la résistance que l'effort à faire est plus grand; ainsi pour un parcours de 1^{m}, un effort de 2, 3, 4... Kilog. exige 2, 3, 4... fois plus de travail qu'un effort de 1^{Kilog}; pour une même résistance, mais pour un parcours de $2, 3, 4^{m}$ le travail sera 2, 3, 4 fois plus grand que pour un mètre de parcours.

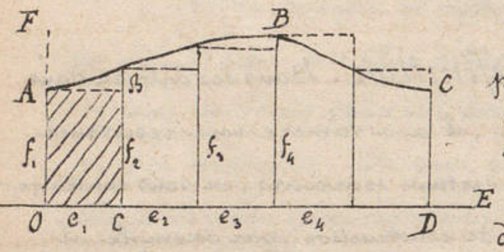
Si donc on convient de prendre pour unité de travail mécanique celui qui correspond à un effort de $1^{Kilog.}$ développé sur un parcours de 1^{m}, le travail dû à un effort constant quelconque sur un parcours également quelconque dans le sens de l'effort, sera le produit du nombre de Kilogrammes qui mesure l'effort par le nombre de mètres du parcours.

L'unité de travail porte le nom de Kilogrammètre, mot composé qui rappelle les deux éléments qui constituent le travail.

Exemples numériques. Pour élever un poids de 150^{K} à une hauteur de 20^{m}, il faudra développer un travail mécanique égal à $150 \times 20 = 3000$ Kilogrammètres.

Si un cheval développe un effort constant de 64^{K} sur un parcours de 1000^{m}, pour tirer une voiture, on dira qu'il produit un travail de $64 \times 1000 = 64000^{K.m.}$

30. *Evaluation du travail.* Rien de plus simple, comme on le voit, que d'évaluer le travail d'une force constante agissant dans le sens du déplacement de son point d'application. Mais il y a des cas où la force n'agit pas constamment avec la même intensité sur toute l'étendue du parcours. Un cheval qui traine une voiture n'exerce pas constamment le même effort, car les résistances varient aux divers points de la route. Il faut donc modifier la définition que nous avons donnée dans le cas d'un effort constant. Comme, ainsi que je l'ai dit dans une précédente leçon nous ne considérons que des forces continues, on peut toujours fractionner le temps en intervalles assez petits pour que la force puisse être regardée comme constante pendant chacun d'eux.



On appelle travail élémentaire de la force f pour un petit déplacement e dans le sens de la force le produit $f \times e$.

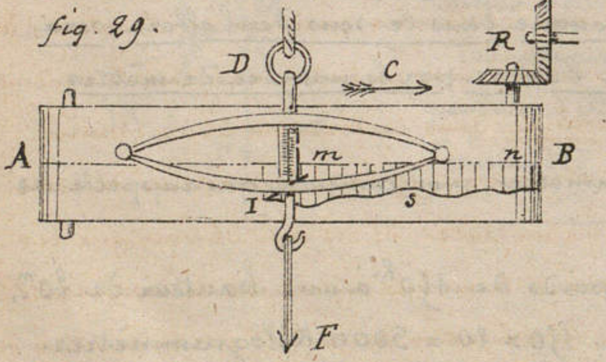
La somme des travaux élémentaires de la force pour les différents instants du mouvement sera ce qu'on appelle le travail total de la force pour le temps que l'on considère ou plutôt pour le parcours total. Car il est à remarquer que le temps n'intervient en aucune façon dans la notion du travail.

On voit sans peine sur la fig. 28 que si l'on compte les chemins parcourus sur la ligne OE, et sur des perpendiculaires à OE les valeurs correspondantes de la force, les travaux élementaires sont représentés par les aires des rectangles $f_1 \times e_1$, $f_2 \times e_2$, $f_3 \times e_3$, ... et par suite, qu'évaluer le travail total, c'est faire la somme des aires des rectangles, et plus exactement l'aire de la courbe ABCDO qui donne la loi de la variation de la force.

Si l'on rapporte les forces et les chemins à la même échelle des longueurs, autant de fois cette aire contiendra l'aire du carré construit sur l'unité de longueur de l'échelle, autant le travail en question vaudra de Kilogrammètres.

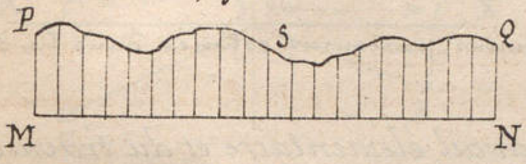
La courbe qui donne la loi de variation de la force peut quelquefois être tracée automatiquement. Imaginons par exemple qu'on veuille évaluer le travail d'un cheval tirant un fardeau ; interposons comme nous l'avons déjà indiqué un dynamomètre Poncelet complété par un appareil à indications graphiques. Une bande de papier portée par deux rouleaux A, B, se déroule de A et s'enroule sur B en recevant le mouvement des roues de la voiture au moyen d'engrenages R ; il en résulte que le mouvement de la bande de papier est proportionnel au chemin décrit par le cheval et on peut même faire en sorte qu'il soit le même ; le mouvement de la bande ayant lieu dans un sens

fig. 29.



perpendiculaire à la ligne de traction DF, la lame antérieure du dynamomètre est munie d'une pointe traçante I qui dessine une ligne sur la feuille ; si l'effort du cheval était nul, les deux lames restant à la même distance le crayon tracerait une droite mn ; si l'effort sans être nul était constant, il tracerait une droite parallèle à mn ; mais généralement on trouvera que le crayon trace une courbe S qui donne la loi de variation de la force car les perpendiculaires ou ordonnées comprises entre la courbe et la droite mn donnent l'écartement des lames du dynamomètre qui est proportionnel à la grandeur de la force. Supposons donc la bande de papier

fig. 30

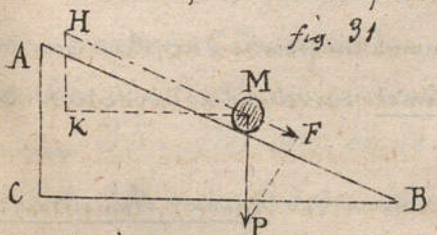


déroulée entièrement : soit MN fig. 30, la droite qu'aurait tracée le crayon si l'effort eût été nul, PSQ, la courbe tracée réellement ; il s'agit d'évaluer l'aire MPSQN qui représente le travail total.

Pour cela il faut savoir quel est le nombre de mètres qui correspond à la longueur MN, et le nombre de kilogrammes qui correspond à un écartement du dynamomètre. La graduation du dynamomètre fournit ce dernier nombre, et l'on sait d'autre part quelle est la longueur du papier enroulé à chaque tour de roue. Ceci fait, voici un moyen ingénieux, sinon parfaitement rigoureux, d'évaluer l'aire de la courbe ; supposons le papier bien homogène, c'est-à-dire partout d'égale épaisseur ; prenons un rectangle de ce papier ayant pour côtés la longueur qui représente le mètre, et celle qui représente le kilogramme à l'échelle du dynamomètre ; autant il y aurait de ces rectangles dans l'aire de la courbe, autant le travail effectué vaudrait de kilogrammètres. Or on aura ce rapport en pesant le petit rectangle de papier, et en cherchant combien de fois son poids est contenu dans celui de la courbe découpée.

—— 31. *Cas où la force n'agit pas dans la direction même du chemin parcouru.* Il peut arriver que la force n'agisse pas dans la direction même du chemin parcouru ;

fig. 31



Par exemple si un corps pesant roule ou glisse sur un plan incliné fig. 31. Le travail de son poids P n'est plus le produit de ce poids par le chemin réellement parcouru sur le plan AB. On définit alors le travail soit en disant que c'est le produit du chemin parcouru par la grandeur de la force estimée dans la direction de ce chemin, soit en disant que c'est le produit de la force par le chemin estimé dans la direction de cette force, en supposant le chemin rectiligne et la force constante. Il est aisé de voir que ces deux expressions du travail sont en effet identiques ; car si le mobile a parcouru la distance HM, il est tombé d'une hauteur HK ; d'autre part si MF est la projection du poids P sur la direction du chemin, le triangle PMF est rectangle et semblable au triangle HMK, ce qui donne la proportion $\frac{MP}{HM} = \frac{MF}{HK}$; d'où en égalant le produit des extrêmes et le produit des moyens,

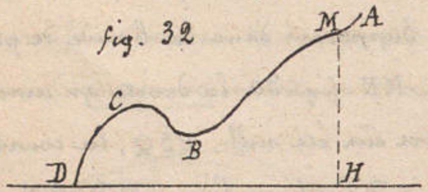
$$MP \times HK = MF \times HM .$$

Ce qui montre bien l'identité des deux expressions de travail.

Il résulte de cette définition du travail qu'une force n'a d'effet utile que par la grandeur de sa projection sur la direction du déplacement du mobile ou par ce que nous avons appelé la grandeur de la force estimée dans cette direction.

Si la force conserve une grandeur et une direction constante tandis que le mobile décrit une courbe, comme cela arriverait pour un mobile pesant M qui roulerait le long d'une

fig. 32



courbe ABCD, le travail de la pesanteur se réduit au produit du poids de ce mobile par la hauteur totale de chute, qui représente la somme des chemins parcourus estimés dans la direction de la force.

32. *Définition la plus générale du travail élémentaire et du travail total d'une force.*

Enfin il peut arriver que ni la force, ni le chemin ne conservent la même direction, et que les définitions du travail données précédemment ne s'appliquent plus.

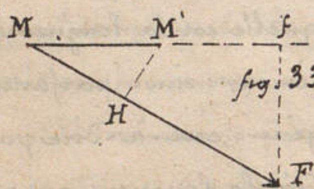


fig. 33

Quelle que soit la courbe décrite par le mobile, nous savons qu'on peut toujours considérer un petit élément MM' de cette courbe comme une ligne droite ; soit MF la force ; Mf sa projection sur MM', et MH la projection de MM sur MF. Ceci posé, on appelle travail élémentaire de la force F, soit le produit de l'élément de chemin MM' par la force estimée suivant la direction de cet élément de chemin, soit le produit de la force F elle même par l'élément MH de chemin estimé dans sa propre direction.

Ces deux expressions sont d'ailleurs identiques, car les deux triangles MM'H et MFf sont semblables et donneraient ainsi qu'on l'a vu plus haut,

$$MM' \times Mf = MH \times MF.$$

On voit donc, en somme, que pour un petit déplacement du point d'application d'une force, celle-ci n'effectue que le travail dû à sa valeur estimée suivant la direction du déplacement.

Le travail total pour un parcours quelconque sera la somme des travaux élémentaires relatifs aux diverses parties de ce parcours, et on l'évaluera d'après la méthode indiquée précédemment.

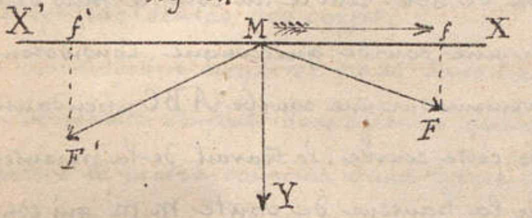
33. *Travail moteur — Travail résistant.*

Quand une force agit comme puissance le travail qu'elle produit est appelé travail moteur ; quand elle agit comme résistance, le travail correspondant est appelé travail résistant.

Remarquons à ce sujet que le travail est moteur ou résistant suivant le degré d'inclinaison de la force sur la direction du chemin parcouru.

Si le mobile se meut suivant la direction XX (fig. 34), une force MF qui fera avec cette direction un angle aigu sera une force motrice, et son travail uniquement dû à sa valeur estimée Mf, sera un travail moteur. A mesure que l'angle FMf augmente, la projection Mf diminue et le travail aussi; et si l'angle devient droit, la force ne produit plus aucun travail relatif au déplacement suivant MX. Si l'angle est supérieur à un angle droit, F'MX, par exemple, la valeur estimée de la force Mf', tend à s'opposer au déplacement; le travail est résistant. On peut se représenter ces résultats par le mouvement d'un wagon sur une voie ferrée; avec une force donnée (celle d'un cheval, par exemple), on produira le maximum de travail moteur en tirant le

Fig. 34



wagon sur la voie elle même; à mesure que l'inclinaison de la ligne de traction sur la voie augmentera le travail diminuera, et il est clair qu'en tirant le wagon perpendiculairement aux rails, on ne peut contribuer en rien au déplacement dans le sens de la voie. Enfin si la direction de la traction fait un angle obtus avec les rails, elle s'opposera au mouvement, et d'autant plus que son inclinaison se rapprochera d'avantage de 180°; et le travail résistant sera le plus grand possible pour une direction de la force diamétralement opposée au mouvement.

Nous pouvons encore appliquer ces notions au halage des bateaux. Sur un canal la traction

Fig. 35

AF peut être considérée comme sensiblement constante, et aussi à très peu près également inclinée sur l'axe AX du canal, sauf dans les courbes; par suite pour avoir le travail total développé, il suffira de multiplier l'effort, estimé dans la direction AX, par le chemin parcouru. (×)

— 34. *Effort moyen d'une force variable*. On appelle effort moyen d'une force variable, la grandeur d'une force constante qui produirait le même travail pour le même parcours. On obtiendra donc l'effort moyen en divisant le travail total de la force variable par le chemin parcouru.

— 35. *Des cas où le travail est nul*. D'après ce que nous venons de voir n° 33, le travail d'une force dépend de trois choses: sa grandeur, celle du chemin parcouru, et l'inclinaison des deux directions. Il est clair qu'une force nulle ne travaille pas. En second lieu un effort sans déplacement de son point d'application ne travaille pas d'avantage; car quelque grand que soit cet effort il ne produit aucun résultat mécanique industriel. S'il ne s'agit que de soutenir un fardeau, il n'est pas utile de faire intervenir une force active; un corps inerte, une colonne, une pierre en tiendra lieu. Enfin nous avons déjà vu que lorsque la force fait un angle droit avec la direction du chemin, le travail est

---

(×) J'indiquerai dans une note placée à la fin du cours, le moyen d'évaluer la valeur estimée d'une ligne sur une direction donnée.

encore nul. Ajoutons encore que pour qu'il y ait travail produit il faut que la force contribue bien réellement au mouvement de son point d'application ; ainsi, si ce point est entraîné avec tous les objets voisins dans un mouvement commun, et si la force ne détermine aucun mouvement relatif de ce point, il n'y a pas de travail produit. Le travail dans le cas d'un mouvement relatif s'obtiendra donc en multipliant la force par le déplacement relatif.

—— 36 Exemples de calcul de travail. 1°. Travail de la pesanteur. J'ai déjà fait observer que le travail de la pesanteur s'obtient en multipliant le poids du mobile par la hauteur de chute ; mais nous sommes en mesure maintenant de nous rendre un compte plus détaillé de ce qui se passe lorsqu'un mobile pesant se meut sur une courbe quelconque. Considérons un

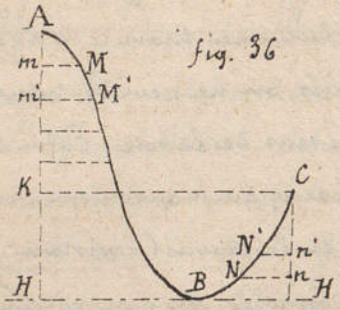


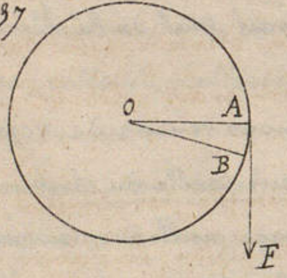
fig. 36

mobile M, fig. 36, en mouvement sur une courbe ABC ; pendant qu'il parcourt un élément MM' de cette courbe, le travail de la pesanteur est le produit du poids P par la hauteur de chute mm' qui est le chemin estimé dans le sens de la pesanteur. Faisant la somme de tous ces travaux élémentaires, pour le parcours AB, on trouve évidemment le produit $P \times AH$; le mobile continuera son mouvement et remontera de B en C en vertu de la vitesse acquise ; mais pour ce nouveau trajet, si le mobile parcourt l'élément NN', le travail de la pesanteur est résistant et égal à $P \times nn'$ en valeur absolue mais de sens contraire au travail moteur ; pour le parcours entier BC, il sera $P \times CH'$. Pour avoir le travail effectué finalement il faut retrancher le travail résistant du travail moteur et on aura $P \times AH - P \times CH' = P \times AK$.

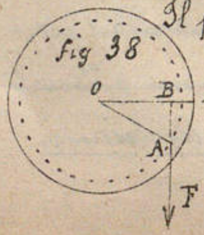
AK n'est en somme que la hauteur de chute, et on retrouve bien ainsi pour le travail total le produit du poids par la hauteur de chute.

2°. Travail d'une force agissant tangentiellement à la circonférence d'une roue. Voici encore un exemple que l'on rencontre fréquemment en mécanique : une

fig 37



force F agit tangentiellement à la circonférence d'une roue O ; pendant que la roue tourne d'un petit angle AOB, le point d'application de la force a parcouru l'arc BA, et, comme l'arc AB et la force se confondent en direction, le travail élémentaire correspondant sera égal au produit $F \times AB$ si le mouvement de la roue a lieu dans le sens de la force, ou $-F \times AB$, s'il a lieu en sens contraire. Si la force est constante, on aura le travail total pour un tour de roue en multipliant la force par la circonférence entière.



Il peut arriver comme dans la roue des carrières, que la force, qui est ici le poids de l'ouvrier A ne soit pas tangente à la circonférence des chevilles : (Voir treuil des carrières, dans le cours de cinématique page 55) Dans ce cas, c'est comme si elle agissait tangentiellement à la circonférence qui aurait pour rayon OB, valeur du rayon OA estimé sur l'horizontale OH du centre.

3°. Travail des forces moléculaires. Quand un ressort parfaitement élastique se déforme, la force extérieure qui produit cette déformation développe un certain travail ; mais ce qu'il y a de remarquable dans ce cas, c'est que les forces élastiques en redonnant au ressort, devenu libre sa forme primitive, vont produire un travail équivalent au travail primitivement dépensé.

Pour trouver un exemple du travail considérable produit par les forces qui agissent entre les molécules des corps,

Considérons ce qui se passe dans l'allongement des fils métalliques, sous l'action d'une charge. Il résulte de faits d'expériences que sous l'action d'une charge de $P^{Kilog.}$ par millimètre carré de section le mètre courant d'une barre de fer s'allonge d'une quantité I donnée par la formule : $I = \frac{P}{20000}$.

Quel serait d'après cela l'effort nécessaire pour allonger de 0,5 de millimètre, une barre de fer de $1^{m.}$ de longueur et de 40 millimètres de côté ?

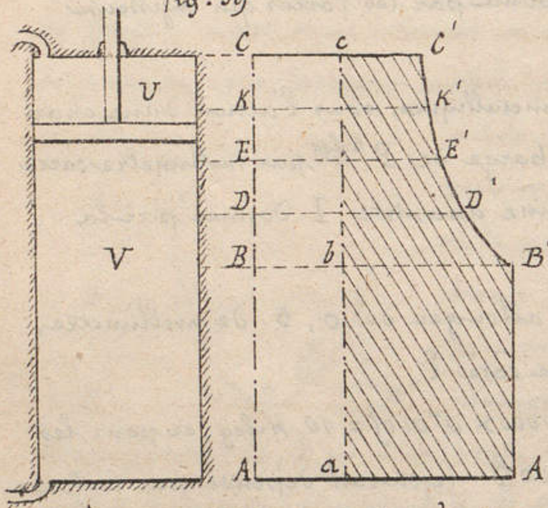
La charge par millimètre carré de section est $P = 20000 \times 0^{m.}0005 = 10$ Kilog. et pour les 1600 millimètres carrés de la section entière $1600 \times 10 = 16000^{K.}$ le travail dépensé par la force extérieure qui a produit cet allongement est le produit de l'effort P, soit $16000^{K.}$ par le déplacement $0^{m.}0005$ ou bien $16 \times 0,5 = 8^{K.m.}$; et pour une barre de $10^{m.}$ de longueur il faudrait développer 80 Kilog. mèt. de travail.

Cet allongement de la barre qui exige une charge si considérable peut être produit avec la plus grande facilité en faisant intervenir l'action de la chaleur ; il suffit en effet de chauffer de manière à élever sa température de 41°, pour obtenir un allongement de $0^{milli.},5$ par mètre. Donc la chaleur produit dans ce cas un travail qui peut se mesurer par le travail extérieur qui a produit le même effet ; lorsqu'on enlevera la chaleur à la barre, elle se contractera, et on pourra lui faire restituer le travail qu'elle avait absorbé pour son allongement.

4° Travail de la vapeur. Proposons-nous encore comme dernier exemple d'évaluation de travail, de calculer celui de la vapeur dans le cylindre où elle agit sur le piston ; la vapeur, comme tout fluide gazeux, agit par sa force élastique sur une face du piston ; si la vapeur est à 100°, sa pression est à 1 atmosphère ce qui équivaut à $103^{Kilog.}$ par décimètre carré de la surface sur laquelle elle s'exerce ; si donc la vapeur sortant de la chaudière a une pression de 5 atmosphères, elle pressera chaque décimètre carré de la face du piston avec une force de 515 Kilog. de sorte que si le piston a une surface de 50 décimètres carrés la vapeur agissant à pleine pression exercerait un effort de $25750^{Kilog.}$; si le vide existait dans la partie U du cylindre qui communique avec le condenseur, cet effort énorme serait entièrement disponible mais il n'en est pas ainsi, et sur la face opposée du piston s'exerce un effort qui peut aller dans certains cas à 1 atmosphère; la vapeur n'agira donc qu'en vertu de l'excès de sa pression dans la partie V où elle arrive sur celle de la partie U.

Pour évaluer le travail relatif à une course AC du piston, portons sur la perpendiculaire à AC une longueur AA' représentant la pression de la vapeur sortant de la chaudière, par Aa celle de la vapeur dans le condenseur; aA' sera la puissance disponible, et si elle demeurait constante pendant la course entière du piston, il suffirait pour avoir le travail, de multiplier cet effort A'a par la course AC; mais habituellement la vapeur n'agit à pleine pression que pendant une demi course, et pendant l'autre moitié elle n'agit plus que comme un ressort qui se détend, et la pression qu'elle exerce diminue à mesure que son volume s'agrandit. En admettant qu'elle suive la loi de Mariotte, c'est-à-dire que la pression devienne d'autant plus petite que le volume occupé est plus grand, on pourra diviser la seconde demi course BC en parties égales, et on aura pour les pressions de la chambre V:

fig. 39



Volume $AD = \frac{5}{4} AB$ .... Pression $DD' = \frac{4}{5}$ de BB'

" $AE = \frac{6}{4} AB$ .... " $EE' = \frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ de BB'

" $AK = \frac{7}{4} AB$ .... " $KK' = \frac{4}{7}$ de BB'

" $AC = 2\ AB$ .... " $CC' = \frac{1}{2}$ de BB'.

et on construira ainsi la courbe B'C'.

Le travail total développé par la vapeur sur la face inférieure du piston se compose de l'aire du rectangle AA'B'B, plus de l'aire de la courbe BB'C'C; d'autre part le travail résistant exercé sur la face supérieure est représenté par le rectangle AacC; donc la partie ombrée représente l'excès du travail moteur sur le travail résistant ou le travail disponible.

5e Leçon.

Les transformations du travail mécanique — Equivalence du travail et de la puissance vive — Equivalence du travail et de la chaleur — Premier principe de la théorie mécanique de la chaleur — De la mesure des percussions et des chocs par les quantités de mouvement — Pertes de puissance vive par les chocs — Applications — Battage des pilotis.

— 37. Dans la précédente leçon nous avons défini et appris à calculer le travail mécanique des forces ; aujourd'hui je me propose d'en étudier les transformations. Car ce travail mécanique qui constitue la valeur industrielle des forces est une grandeur qui ne peut disparaître mais seulement se transformer soit en travail soit en d'autres grandeurs équivalentes que nous allons étudier.

Nous avons vu dans la première leçon qu'un mobile pesant $P^{kilog.}$ et tombant d'une hauteur h produit un travail qui a pour expression $P \times h$.

D'autre part si on suppose qu'il soit tombé sans vitesse initiale, nous avons trouvé (2e leçon page 16) que la vitesse au bas de la chute est donnée par la relation :

$$v^2 = 2g \times h. \qquad (g = 9^m,8088)$$

Si nous multiplions par la masse m du mobile les deux membres de cette égalité on obtient celle-ci :

$$mv^2 = 2mg \times h,$$

Or comme on a vu que $P = mg$ (page 13),

$$mv^2 = 2P \times h$$

ou

$$\frac{1}{2} mv^2 = P \times h.$$

On a donné le nom de force vive au produit de la masse par le carré de la vitesse ; nous appellerons puissance vive la moitié de la force vive et alors nous pourrons dire que. Le travail du poids P pendant la chute est égal à la puissance vive acquise par le mobile.

Nous avons supposé que le poids tombait sans vitesse initiale ; s'il en est autrement, on démontre facilement en partant des formules de la page 16, que la différences des carrés des vitesses finales et initiales s'exprime par le produit de $2g$ par la hauteur de chute,

$$v^2 - a^2 = 2gh$$

et par suite comme tout à l'heure,

$$\frac{1}{2}(mv^2 - ma^2) = P \times h.$$

$\frac{1}{2}(mv^2 - ma^2)$ est l'accroissement de la puissance vive pendant la chute, et cette relation indique que cet accroissement est équivalent au travail correspondant de la pesanteur.

Considérons maintenant ce qui se passe dans le mouvement ascensionnel d'un corps pesant. Le mobile est lancé de bas en haut avec une certaine vitesse initiale a, et il s'élève jusqu'à ce que l'action de la pesanteur agissant alors comme résistance au mouvement, lui enlève sa vitesse. Les deux formules du mouvement ascensionnel (N°18, 2°)

$$v = a - gt$$

$$h = at - \frac{1}{2}gt^2$$

fournissent comme précédemment la relation

$$a^2 - v^2 = 2gh;$$

ce qui montre que la diminution dans le carré de la vitesse est proportionnelle à la hauteur de l'ascension ; si nous multiplions par la masse m du mobile, la relation précédente devient $\frac{1}{2}(ma^2 - mv^2) = mg \times h = Ph$.

ce qui signifie que la perte de puissance vive dans le mouvement ascensionnel est l'équivalent du travail résistant de la pesanteur.

Et ceci prouve donc que le travail moteur peut se transformer en puissance vive et que la puissance vive à son tour peut être dépensée en travail résistant.

La machine d'Atwood nous offre encore une vérification de ce fait si important au point de vue de la mécanique industrielle. Nous avons déjà remarqué, à propos de cet appareil, que si, au moment où le poids additionnel p est abandonné par le poids P, le poids P' enlève un poids additionnel p' égal à p, le mouvement du système qui a conservé la même masse se ralentit, et il s'arrête lorsque la hauteur d'ascension du poids P' surchargé de p' est égal à la hauteur de chute du poids P chargé de p. Le travail dépensé dans cette chute s'est donc transformé en puissance vive, laquelle se trouve ensuite consommée en reproduisant un travail résistant précisément équivalent au travail moteur primitif.

Rien ne distingue évidemment la Pesanteur des autres forces, et pour toutes les forces constantes le travail aura la même valeur que l'accroissement de puissance vive pendant le mouvement.

Mais pour les forces variables, que devient la relation précédente ? D'abord pendant un temps très petit les forces qui agissent d'une manière continue, comme la pesanteur, peuvent être considérées comme constantes, et dès lors on peut dire que leur travail élémentaire pendant ce temps très petit est l'équivalent de l'accroissement correspondant de puissance vive.

D'où il suit que <u>la somme des travaux élémentaires d'une force quelconque, ou son travail total, représente toujours l'accroissement de puissance vive pendant le même temps.</u>

Cette relation d'équivalence entre le travail et la puissance vive est le <u>principe fondamental</u> de la théorie des machines, ainsi que nous le verrons plus tard.

— 38. *Equivalence du travail et de la chaleur.* Cependant il est des cas où l'on ne découvre l'équivalent d'un travail moteur détruit ni sous forme de travail résistant, ni sous forme de puissance vive sensible, lorsqu'un marteau tombe sur une enclume massive et fixée au sol, toute trace du travail moteur de cette chute semble avoir disparu. Il n'en est rien cependant ; d'abord, le son que l'on entend avertit que les molécules de l'enclume vibrent, et qu'il y a de ce fait création de puissance vive.

Mais ce n'est pas tout ; l'enclume et le marteau s'échauffent et l'élévation de température est d'autant plus considérable que la quantité de travail disparue est plus grande.

Toute action mécanique produisant un travail qui ne donne pas naissance à un déplacement sensible du corps sur lequel elle s'exerce, donne bien en revanche à une élévation de température du corps. Ainsi, laissons tomber d'une certaine hauteur une masse de plomb; elle se déformera en tombant, mais son mouvement sensible s'arrêtera; il sera facile de constater au moyen des appareils thermométriques délicats, qu'il y a une élévation notable de température de cette masse. Si la déformation de la masse n'avait pas absorbé une partie du travail de la chute, l'élévation de température représenterait exactement ce travail converti en chaleur.

Le frottement de deux pièces en contact produit une très grande quantité de chaleur; On sait très bien qu'un bouton de cuivre frotté contre un morceau de bois, devient assez chaud pour brûler la main, que les essieux de voitures mal graissés s'enflamment parfois; nous pourrons mettre en évidence cette élévation de température due au frottement en faisant tourner entre les deux branches d'une pince un tube de cuivre dans lequel on a versé de l'alcool ou de l'éther; ces liquides ne tardent pas à bouillir.

Le frottement est une cause de perte de travail ainsi que nous le verrons mieux encore plus tard, et cette perte de travail équivaut à la production d'une certaine quantité de chaleur.

Sans entrer plus avant dans des détails que nous ne pourrions bien comprendre qu'après l'étude des corps solides, et que je réserve pour ce moment, j'indiquerai simplement que la disparition d'une quantité de travail mécanique de 425 Kilogrammètres équivaut à la production d'une unité de chaleur. (Calorie, ou quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° la température de 1 Kilogramme d'eau)

Réciproquement la chaleur qui est une des sources les plus universelles de travail mécanique ainsi que je le montrerai dans une des prochaines leçons, se transformera en travail mécanique à raison de $\frac{1}{425}$ de calorie par Kilogrammètre de travail fourni.

39. Quantité de mouvement — Impulsion d'une force — Percussion.

A la notion du travail et de la force vive se rattache assez naturellement celle des quantités de mouvement et des impulsions des forces.

On appelle quantité de mouvement d'un point matériel le produit de sa masse par sa vitesse, $m \times v$. Si l'on prend le mobile à deux instants de son mouvement, il aura généralement deux vitesses différentes v, v'; le produit de la masse par la différence de ces vitesses est ce que l'on appelle l'accroissement de la quantité de mouvement, $m(v'-v)$ ou $mv'-mv$.

Prenons, comme nous l'avons fait pour établir l'équivalence du travail et de la force vive, l'exemple d'un corps pesant; nous savons que les vitesses à deux instants t, t' sont données par les formules (n° 18)

$$v = a + gt$$

$$v' = a + gt',$$

d'où en retranchant membre à membre la 1re de la 2e.

$$v' - v = g(t' - t),$$

ou, en multipliant par la masse m,

$$mv' - mv = mg(t' - t),$$

mais mg c'est le poids P (n° 20), donc la relation précédente peut s'écrire:

$$mv' - mv = P(t' - t).$$

Ainsi l'accroissement de la quantité de mouvement d'un mobile soumis à l'action d'une force constante, est équivalent au produit de la force constante par le temps correspondant.

Si l'on suppose que le temps $(t' - t)$ pendant lequel agit la force est une très petite quantité; et que d'autre part la force constante soit une grandeur ordinaire comme cela a lieu pour les forces continues, le produit de la force par ce temps très petit sera lui-même fort petit, et il en sera de même de l'accroissement correspondant de la quantité de mouvement; c'est même là on se le rappelle le caractère que nous avons attribué aux forces continues telles que la pesanteur. Ce produit d'une force constante par le temps très petit pendant lequel on suppose qu'elle agit, est appelé l'impulsion élémentaire de la force; le produit de la force par un temps quelconque est donc la somme des impulsions élémentaires, et cette somme est l'équivalent de l'accroissement de la quantité de mouvement pendant le même temps.

Mais si l'on suppose une de ces forces qui pendant un temps assez petit communiquent au mobile un changement considérable de vitesse sans que son point d'application ait pu sensiblement se déplacer pendant ce temps, nous dirons que nous avons affaire à une percussion, et nous prendrons pour mesure de cette percussion l'accroissement de la quantité de mouvement pendant le temps très petit de son action. Une percussion telle qu'un coup de marteau, un coup de queue au jeu de billard, est donc assimilable à une impulsion élémentaire d'une force très grande.

Une percussion n'est donc pas la force elle même, mais le produit de cette force par le temps très petit pendant lequel elle agit. Il s'en suit que les percussions se composent comme les forces; ainsi une bille de billard soumise à l'action de deux coups de queue simultanés prendra le même mouvement que si elle était soumise à l'action d'un seul représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux composants.

— 40. *Du choc — Perte de puissance vive par le choc.* Je ne veux pas présenter ici la théorie du choc de deux corps en mouvement; je me borne à consi-

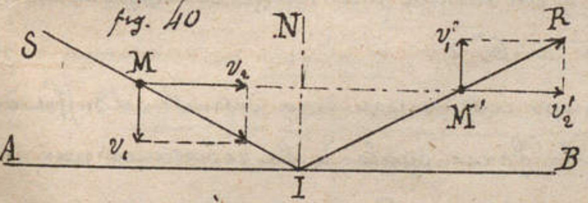
considérer ce qui arrive lorsqu'un mobile rencontre un obstacle fixe. Prenons pour exemple des billes de natures différentes, de bois, de plomb, d'ivoire, et laissons les tomber de la même hauteur sur un plan fixe et dur; la bille de plomb se déformera et perdra d'autant plus de sa vitesse que la déformation sera plus grande; il y aura donc là une perte de force vive ou de travail, une partie étant employée à la déformation du corps, une autre partie à l'élévation de température de la masse de plomb. On appelle corps mous ceux qui, à la manière du plomb, ne reprennent pas leur forme primitive lorsqu'une action passagère les a déformés; les corps élastiques jouissant de la propriété opposée.

Un corps absolument dépourvu d'élasticité perdrait donc complètement toute sa vitesse en frappant contre l'obstacle fixe; il n'en est pas ainsi d'un corps parfaitement élastique. En rencontrant l'obstacle toutes les forces intérieures que nous avons comparées à des ressorts, agissent comme des résistances pendant la compression qui constitue la première partie du choc; il arrive un moment où le mobile perd complètement sa vitesse; mais alors les ressorts moléculaires se détendent, le corps comprimé reprend sa forme primitive et une vitesse égale et contraire à la vitesse antérieure si on suppose que le choc soit direct.

Dans ce cas là il n'y aurait donc pas de perte de puissance vive, puisque la vitesse conserverait la même valeur absolue; ainsi, un corps parfaitement élastique, tombant verticalement sur un plan horizontal devrait remonter exactement à la même hauteur; le travail de la chute se trouvant ainsi reproduit dans le mouvement ascensionnel.

Si le corps au lieu de tomber verticalement, arrive obliquement sur le plan horizontal AB, les choses se passent comme si le mobile tombait avec une vitesse v_1 égale à la vitesse

fig. 40

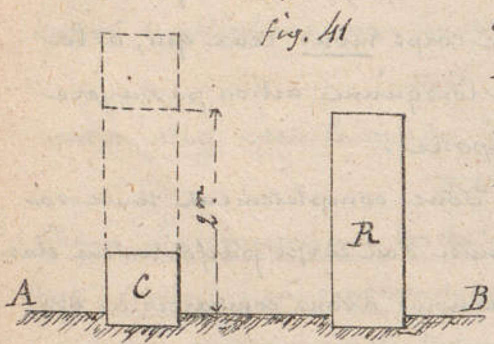


propre estimée dans le sens vertical, pendant qu'il serait entraîné horizontalement avec une vitesse v_2, égale à la composante horizontale de la vitesse réelle. La composante verticale seule changera de direction après le choc, et à deux hauteurs égales le mobile aura en M et M' des vitesses verticales v_1, v_1' égales et opposées lesquelles, composées avec la vitesse d'entraînement v_2, donnent des vitesses également inclinées sur le plan AB et situées dans le même plan vertical. En un mot la bille élastique après avoir frappé le plan AB se relèvera en faisant un angle de reflexion égal à l'angle d'incidence; c'est-à-dire qu'en menant la normale IN au plan AB, l'angle SIN est égal à l'angle RIN, et les trois droites SI, IN, IR, sont dans un même plan.

Les corps naturels ne sont ni parfaitement élastiques, ni complètement dépourvus d'élasticité; il s'en suit que les résultats que je viens d'indiquer ne s'appliqueront jamais exactement aux corps que l'on a sous les yeux. En particulier un corps réputé élastique ne possèdera pas après le choc une vitesse égale et contraire à celle qu'il avait avant; ainsi, une balle en caoutchou, tombant d'une certaine hauteur, ne remontera pas exactement au point de départ. Il y aura donc toujours diminution de vitesse et par suite perte de puissance vive par les chocs. C'est là le point important à retenir pour le moment.

41. Applications du choc direct — Battage des pilots. Supposons qu'on laisse tomber d'une hauteur de 2^m par exemple, un cube de fer pesant 300 Kilogrammes, sur le sol, que nous supposons dépourvu d'élasticité, et terminé par une surface horizontale AB; admettons qu'il s'y enfonce de $0^m,02$, en sorte qu'il aura parcouru une distance verticale de $2^m,02$; il aura produit un travail moteur égal à $300^k \times 2,02 = 606$ Kilog., et qui représente le travail nécessaire pour produire l'enfoncement de 2 centimètres.

Fig. 41



Cherchons le poids d'un prisme R de même base que le cube, qui posé doucement sur le sol produirait par la seule action de son poids le même enfoncement. Il suffit pour cela de savoir quel est le poids qui multiplié par la hauteur de chute de 2 centimètres donnerait 606 Kilogrammètres de travail; ce poids est donc le quotient $\frac{606}{0,02}$ ce qui donne 30300 K.m.

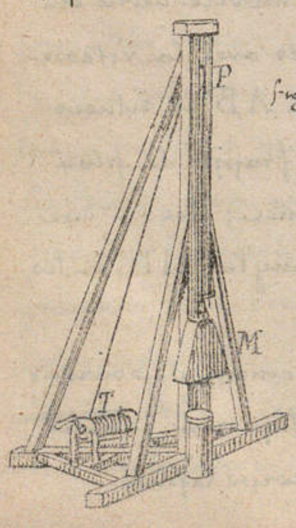
Ce poids mesure aussi la résistance, supposée constante, du sol à l'enfoncement, de sorte que la force constante qui tend à détruire la vitesse du cube est égale à 30300^K. moins le poids du cube, c'est-à-dire à 30000 Kilog.; le mouvement du poids dans le sol est donc un mouvement uniformément retardé; il y a au départ une vitesse correspondant à la hauteur de chute de 2^m., ou $v = \sqrt{2g \times 2} = 2\sqrt{g} = 6^m,2$.

Si l'on veut savoir au bout de combien de temps cette vitesse sera détruite, il suffit de remarquer que la percussion, qui est le produit de la force égale à la résistance par le temps de son action équivaut à la quantité de mouvement perdue, ce qui donne:

$$30000 \times t = mv = \frac{300}{g} \times 6,2$$

d'où $t = \frac{6,2}{g \times 100} = \frac{6.2}{981}$ ou environ $\frac{1}{155}$ de seconde.

Fig. 42.



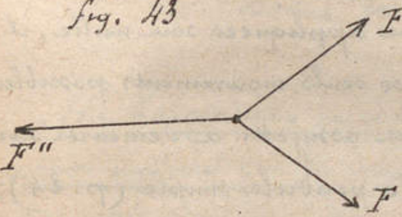
Ce résultat remarquable montre la raison qui fait employer le choc direct de préférence à une pression continue et lente dans le battage des pieux ou pilots destinés à supporter les fondations des lourds édifices. On interpose entre la masse de fer et le sol des pièces de bois affutés vers le bas et qu'on enfonce à coups de mouton. Le mouton est une masse pesante M attachée à une corde qui passe sur une poulie P, et s'enroule ensuite sur un treuil T, ou bien se divise en cordons tirés par des manœuvres. J'ai expliqué (page 92 du cours de cinématique) le système de déclic qui laisse retomber le mouton dès qu'il est arrivé au point le plus élevé de sa course.

6e Leçon.

Equilibre et mouvement d'un point matériel — Condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un groupe de forces appliquées à un même point matériel libre ou gêné par des obstacles fixes — Du travail des forces au point de vue de l'équilibre ou du mouvement uniforme — Mouvement varié — Application à l'équilibre et au mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné et sur une courbe fixe — Pendule simple — Lois des oscillations.

— 42. *Condition d'équilibre d'un groupe de forces appliquées à un même point matériel.* Nous sommes maintenant en mesure de bien comprendre ce qu'on entend quand on dit que plusieurs forces appliquées à un même point se font équilibre.

fig. 43



Concevons que le point M, que l'on peut d'ailleurs supposer en repos ou animé d'un mouvement antérieur, soit soumis à l'action combinée de plusieurs forces F, F', F'', ... ; nous dirons que ces forces se font équilibre si elles ne peuvent modifier l'état de repos ou de mouvement du point M.

Or nous avons vu (p. 21 n° 24) qu'un groupe de forces appliquées à un même point peut toujours être remplacé au point de vue de l'effet à produire par une force unique que nous avons appelée leur résultante. Je dis que, pour que les forces données se fassent équilibre, il faut et il suffit que cette résultante soit nulle si le point M est libre d'obéir à son action.

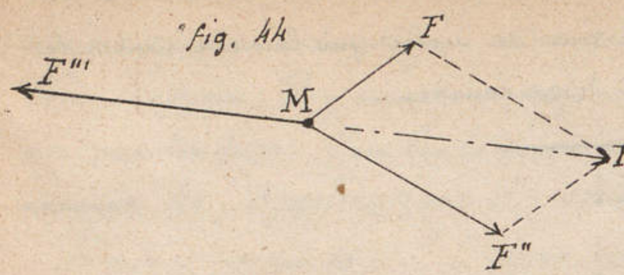
Cette condition est nécessaire, car si la résultante n'était pas nulle, son effet, équivalent à celui de l'ensemble des forces, tendrait à mettre le corps en mouvement dans sa propre direction. Elle est suffisante, car si la résultante est nulle, l'effet de l'ensemble des forces données est nul aussi. (p. 9. n° 10).

En particulier pour que deux forces appliquées à un même point se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées.

Plus généralement, lorsqu'un groupe de forces appliquées à un même point est en équilibre, l'une quelconque des forces du groupe est égale et contraire à la résultante de toutes les autres.

On peut en effet composer toutes les forces à l'exception de l'une d'elles, et on réduit ainsi le système à un autre équivalent, composé de deux forces qui, pour l'équilibre doivent être égales et directement opposées. Ainsi pour le cas de trois forces F, F', F'' (fig. 44) on peut composer F, F' en une seule R, et le groupe (R F'') équivalent au groupe (F, F', F'') doit se composer de forces égales et opposées.

fig. 44



C'est là dessus que nous avons fondé la vérification expérimentale de la règle de la composition des forces (p. 23).

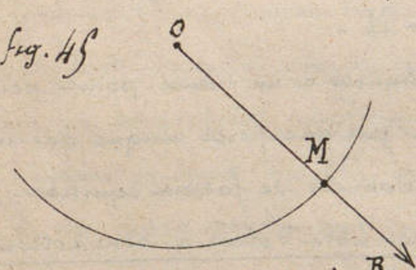
On peut remarquer encore que la condition d'équilibre que nous venons de trouver peut se traduire d'une autre manière, en faisant intervenir la notion des projections (p. 23.)

Dire qu'un groupe de forces appliquées à un point M est en équilibre, c'est dire que la somme de ces forces estimées dans une direction quelconque est nulle.

En effet cette somme est la valeur de la résultante estimée dans cette direction, et puisque la résultante est nulle, sa valeur estimée dans une direction quelconque est nulle.

43. *Equilibre d'un point gêné par un obstacle fixe.* Si l'on suppose qu'un point matériel au lieu d'être entièrement libre d'obéir à l'action des forces qui lui sont appliquées soit gêné dans ses mouvements, la condition d'équilibre n'est plus la même. Il n'est plus nécessaire en effet que la résultante des forces qui lui sont appliquées soit nulle, il suffit que cette résultante soit telle qu'elle ne puisse produire les seuls mouvements possibles pour le point matériel. Par exemple supposons que le mobile soit assujetti à demeurer sur une courbe ou sur une surface fixe, comme cela a lieu pour le pendule simple (p. 24);

fig. 45



le seul mouvement possible pour le point M fig. 45, c'est un déplacement sur la courbe ou sur la surface; il suffit donc que la résultante ait une projection nulle sur l'un quelconque de ces déplacements, en d'autres termes, elle doit être normale (perpendiculaire à la tangente) à la courbe ou à la surface; ainsi pour le pendule simple elle doit être dirigée suivant le prolongement de OM; il est bien évident qu'elle ne pourra alors modifier en rien l'état de repos ou de mouvement du point M. Il faut de plus, dans le cas où le mobile pourrait quitter la courbe ou la surface que la direction de la résultante soit telle qu'elle s'oppose à ce déplacement normal. Ainsi, si le mobile est retenu au point O par un fil, il faut que la résultante R soit dirigée de O vers M; si le mobile était placé extérieurement sur la surface d'une sphère, il faudrait pour l'équilibre que la résultante appuyât le mobile contre cette surface et fut par conséquent dirigée de l'extérieur vers l'intérieur.

44. *Du travail des forces au point de vue de l'équilibre.* Il est bon de remarquer que la considération du travail mécanique est intimement liée à celle de l'équilibre;

C'est ce que l'on va voir facilement par les propositions suivantes :

I. Le travail de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point est la somme des travaux des composantes pour tout déplacement élémentaire supposé du mobile.

Considérons en effet un système de forces F, F', F''.... appliquées à un même point M, et supposons un déplacement élémentaire MM' de ce dernier dans une direction MX. On aura, en employant la notation $\mathcal{T}e$ pour désigner le travail élémentaire (voir notions sur les projections, p. 22 et sur le travail p. 28 N° 32

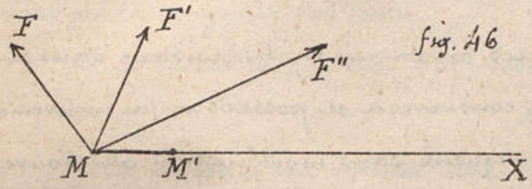


fig. 46

$$\mathcal{T}eF = MM' \times proj.\, F = MM' \times \overline{F}^x$$
$$\mathcal{T}eF' = MM' \times proj.\, F' = MM' \times \overline{F'}^x$$
$$\mathcal{T}eF'' = MM' \times proj.\, F'' = MM' \times \overline{F''}^x$$
....

Et en ajoutant membre à membre,

Somme des $\mathcal{T}e$ de toutes les forces $= MM' \times$ somme des projections de ces forces.

Or la somme des projections de toutes les forces c'est la projection de leur résultante, donc :

$$\text{Somme des } \mathcal{T}e \text{ des forces} = MM' \times \overline{R}^x = \mathcal{T}e.R$$

C. Q. F. D.

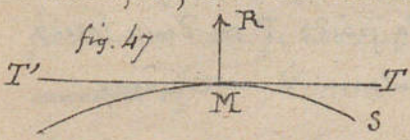
II. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de forces appliquées à un point matériel soit en équilibre, c'est que la somme de leurs travaux pour tout déplacement élémentaire supposé donné à ce point soit nulle.

1°. Cas d'un point libre. Nous avons vu que si les forces données se font équilibre c'est que leur résultante est nulle ; donc le travail de cette résultante est nul, et par suite aussi la somme des travaux des composantes.

Réciproquement, si la somme des travaux des forces appliquées à ce point est nulle pour quelque déplacement élémentaire que l'on suppose au mobile, ces forces se font équilibre. Car, puisque la somme de leurs travaux est nulle, le travail de leur résultante est donc nul aussi. Or cela ne peut arriver (p. 29 n° 35) qu'autant que cette résultante est nulle ou que le déplacement est nul ; et comme cela a lieu pour un déplacement hypothétique quelconque, il faut donc nécessairement que la résultante soit nulle.

2°. Cas d'un point gêné. Dans le cas d'un point assujetti à demeurer sur une courbe ou sur une surface fixe, la proposition précédente est encore vraie ; car pour qu'il y ait équilibre il faut que la résultante des forces appliquées au mobile soit normale à la courbe ou à la surface ; donc son travail est nul pour tous les déplacements possibles du point M (fig. 47.)

fig. 47

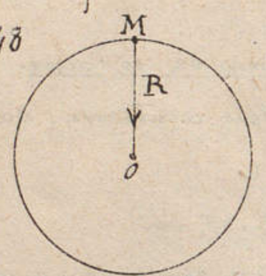


puisqu'ils ne peuvent avoir lieu que sur la courbe ou la surface, et que nous savons (n° 35) qu'une force qui fait un angle droit avec la direction du déplacement du point mobile ne produit aucun travail dans ce déplacement. Réciproquement, si la somme des travaux des forces appliquées est nulle, il en est de même du travail de la résultante pour tout déplacement possible, et comme on ne suppose pas que la résultante soit nulle, son travail ne peut être nul pour un déplacement sur la courbe ou sur la surface S. qu'autant que la résultante fasse un angle droit avec cette courbe ou cette surface, ce qui donne bien la condition d'équilibre déjà trouvée.

Ainsi, dans tous les cas, ce qui caractérise l'équilibre d'un système de forces appliquées à un même point c'est que, la somme de leurs travaux pour tout déplacement possible de ce point soit nulle.

Si le mobile soumis à un pareil système de forces est en repos, il persistera dans cet état de repos; s'il est animé d'une certaine vitesse il la conservera et possèdera un mouvement uniforme; d'où il suit que les conditions d'équilibre s'appliquent sans modification au mouvement uniforme.

fig. 48



Ainsi la condition pour qu'un mobile M (fig. 48) décrive un cercle d'un mouvement uniforme, c'est que la résultante R de toutes les forces qui lui sont appliquées soit dirigée vers le centre du cercle; la force oblique au rayon se décomposerait en deux autres, l'une dirigée suivant le rayon, l'autre suivant la tangente, et celle-ci produirait une accélération du mobile qui cesserait de parcourir la circonférence d'un mouvement uniforme.

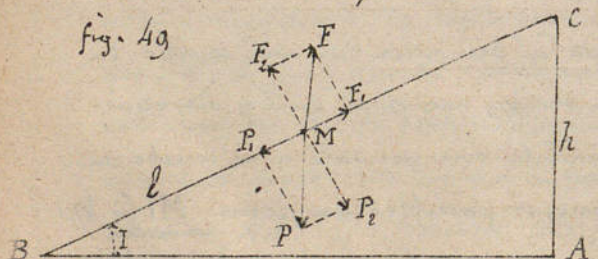
45. *Du travail au point de vue du mouvement varié.* Pour étudier le mouvement d'un point sous l'action d'un système de forces, on se servira de la relation qui lie les forces aux accélérations; mais il y aura souvent grand profit à utiliser la relation trouvée au n° 37 entre le travail des forces et la puissance vive du point.

Ainsi, ce qui caractérise le mouvement c'est que la somme des travaux des forces agissantes pour un certain parcours est toujours équivalente à l'accroissement de puissance vive correspondante.

Nous allons appliquer ces notions importantes à quelques exemples.

46. *Equilibre d'un mobile pesant sur un plan incliné.*

fig. 49



Soit M un point matériel soumis à l'action de son poids P et d'une certaine force F, et placé sur un plan incliné (voir Cinématique, p. 45) de longueur $\underline{l}$, de hauteur $\underline{h}$, et d'inclinaison $\underline{i}$ (fig. 49).

On peut décomposer le poids P en deux forces P_1, P_2, l'une parallèle à la longueur du plan, l'autre perpendiculaire à cette même direction ; on peut décomposer F de la même manière. Or nous sommes ici dans le cas d'un point assujetti à demeurer sur une surface ; pour qu'il soit en équilibre, les forces appliquées doivent se réduire à une seule normale au plan ; ce qui exige que la composante F_1 de la force, détruise la composante P_1 du poids ; c'est là la condition principale ou essentielle d'équilibre.

Il faut en outre que le mobile ne puisse quitter le plan, et pour cela il faut que la composante F_2 de la force soit inférieure ou au plus égale à la composante P_2 du poids.

Cette condition sera toujours remplie dans le cas où la force F tirerait le corps dans le sens de la longueur du plan.

Dans ce cas la condition d'équilibre devient simplement

$$F = P_1 ;$$

Mais on peut lui donner une forme plus remarquable en observant que le triangle P_1MP est semblable au triangle BAC, et que le rapport de la composante P_1 au poids P est précisément le même que celui de la hauteur $\underline{h}$ du plan, à sa longueur $\underline{l}$.

On peut donc remplacer P_1 par $\frac{h}{l}P$, et la condition d'équilibre se transforme en

$$F = \frac{h}{l}P ,$$

ou bien

$$\frac{F}{P} = \frac{h}{l}$$

Ce qu'on exprime en disant que l'effort à faire dans le sens de la longueur du plan pour maintenir le corps en équilibre est au poids de ce corps comme la hauteur du plan est à sa longueur.

Cette condition d'équilibre s'obtiendrait encore en remarquant que pour un déplacement sur le plan incliné la somme des travaux des forces appliquées doit être nulle ; il faut donc que le travail de F détruise celui de P ; or les chemins décrits dans le sens de F et dans celui de P sont proportionnels à $\underline{l}$ et à $\underline{h}$; on aura donc :

$$F \times l - P \times h = 0,$$

ce qui est bien la condition trouvée précédemment.

Cette relation s'énonce encore en disant : que <u>les efforts dans le sens de la longueur et de la hauteur sont en raison inverse des chemins parcourus dans ces deux directions</u>.

Ou bien que <u>ce que l'on gagne en force on le perd en vitesse</u>.

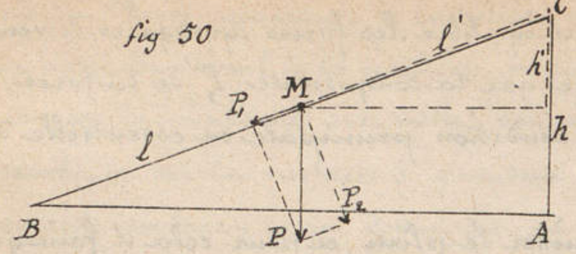
Nous retrouverons ce principe fondamental dans toutes les machines.

Remarque. Tout ce qui vient d'être dit sur le plan incliné suppose que l'on fait abstraction d'une force qui joue un grand rôle dans les applications ; je veux parler du frottement dont je m'occuperai plus tard.

47. *Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné.* Supposons

un point pesant M uniquement sollicité par son poids P, et placé sur un plan incliné BC de hauteur h et de longueur l.

fig 50



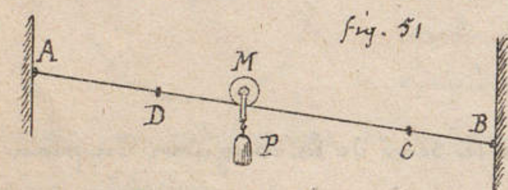
Le poids P peut être décomposé en deux autres forces comme précédemment, savoir P_1 parallèle et P_2 perpendiculaire au plan.

La composante P_2 ne fait que maintenir le point sur le plan et c'est la force P_1 qui détermine son mouvement. Or comme nous venons de le voir, cette composante P_1 est une fraction $\frac{h}{l}$ de P; or comme le poids P est constant, sa composante P_1 l'est aussi, donc le mobile est sollicité par une force constante, et par suite son mouvement sur le plan est uniformément varié comme celui d'un corps libre; il est facile d'en calculer l'accélération g', car on aura: (N°. 90)

$$\frac{P_1}{g'} = \frac{P}{g},$$

Donc le rapport de l'accélération du mobile sur le plan incliné à celle qu'il aurait en chute libre est celui de la hauteur du plan à sa longueur. On pourra donc ralentir autant qu'on voudra le mouvement tout en conservant ses lois, et c'est de cette manière que Galilée découvrit les lois de la chute des corps. Pour vérifier expérimentalement ces résultats, imaginons un fil de fer très fortement tendu entre deux points A et B et un poids P suspendu à une poulie M qui peut rouler sur le fil. Plaçons d'abord la poulie en un point C tel que l'espace BC soit parcouru en une seconde, ce à quoi l'on parviendra par tâtonnement;

Fig. 51



ceci fait on verra que le point D, où il faut le placer pour que l'espace DB soit parcouru en deux secondes, est à une distance quadruple, etc .....

Nous retrouverions la loi des espaces déjà trouvée autrement (N°s 15, 16).

Si l'expérience précédente était faite avec soin, l'espace CB parcouru dans la première seconde serait la moitié de l'accélération g'; on en conclura par la relation

$$\frac{g'}{g} = \frac{h}{l}$$

la valeur de l'accélération en chute libre.

Vitesse du mobile. La vitesse du mobile à chaque instant est la même en grandeur que celle qu'il aurait en chute libre à la même distance verticale du point de départ. En d'autres termes, la grandeur de la vitesse ne dépend que de la hauteur verticale de la chute et nullement de sa direction.

En effet, soient l' et h' les chemins parcourus par le mobile en longueur et en hauteur; m la masse, v la vitesse du mobile; d'après le principe de la transformation du travail en puissance vive on aura:

$$P_1 \times l' = \frac{1}{2} m v^2$$

mais nous savons que

$$P_1 \times l' = P \times h'$$

donc

$$\frac{1}{2} m v^2 = P \times h' = mg \times h'$$

d'où

$$v^2 = 2gh'.$$

Ce qui montre bien que la vitesse ne dépend que de la hauteur de chute. Remarquons cependant que la direction de la vitesse est celle du mouvement, c'est-à-dire parallèle au plan incliné, et non verticale.

—— 48. *Mouvement d'un point pesant sur une courbe fixe — Pendule simple. — Loi des oscillations.* Considérons un mobile M assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe CDB située dans un plan vertical, et sollicité uniquement par son poids P. On l'abandonne en un point C sans vitesse.

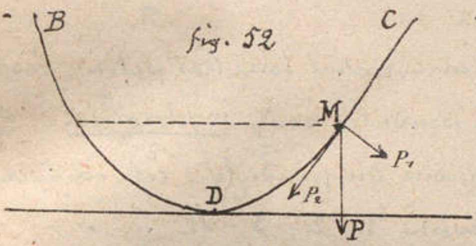


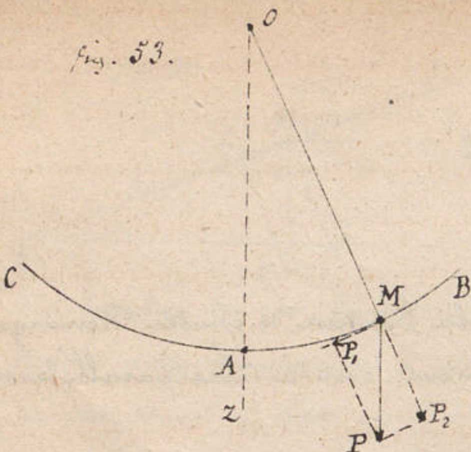
fig. 52

On peut assimiler chaque élément de courbe à un petit plan incliné, et la vitesse du mobile à chaque instant est donnée d'après la hauteur de chute par la formule

$$v^2 = 2gh.$$

Le poids P du mobile se décompose en deux forces P_1, P_2 ; la première tangente à la courbe détermine le mouvement, la seconde normale à la courbe appuie le mobile contre celle-ci. La grandeur de ces composantes dépend de la position du mobile sur la courbe et varie à chaque instant ; aussi le mouvement n'est-il pas uniformément varié comme sur le plan incliné. La vitesse croît du point C au point D le plus bas de la courbe ; en vertu de cette vitesse acquise le mobile remonte le long de la partie DB jusqu'à ce que sa vitesse soit anéantie par la pesanteur agissant comme résistance. Dans la première partie du mouvement le travail moteur de la pesanteur s'est transformé en puissance vive ; dans la seconde partie cette puissance vive est consommée par le travail résistant qui doit acquérir une valeur égale au travail moteur dépensé. Aussi, si l'on pouvait supprimer le frottement du mobile sur la courbe, il s'élèverait à une hauteur égale à celle d'où il était parti. En réalité le frottement consomme une partie de la puissance vive, et la hauteur d'ascension est toujours moindre que la hauteur de chute, et sur une même horizontale la vitesse dans le mouvement ascensionnel est moindre que dans le mouvement de descente. Après s'être ainsi élevé le mobile retombe et s'élève ensuite vers DC, sans atteindre son point de départ ; le mouvement ne persistera donc pas indéfiniment mais s'arrêtera au bout d'un temps plus ou moins long.

fig. 53.



En particulier considérons un point M suspendu par un fil OM à un point fixe O; ce point décrira un cercle BAC dans un plan vertical si on l'abandonne sans vitesse. son mouvement s'effectuera d'après les indications générales que je viens de donner.

Dans le cas où l'on écarte peu le pendule de sa position verticale d'équilibre AZ; la durée d'une oscillation simple est donnée par la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

dans laquelle π désigne le nombre 3,1416 (rapport de la circonférence au diamètre), l la longueur du fil OM, et $g = 9^{m},8088$.

Cette relation montre que la durée d'une oscillation est:

— 1°. indépendante de leur amplitude, pourvu que l'écart initial soit très petit; c'est ce qu'on exprime en disant que les petites oscillations du pendule sont isochrones.

— 2°. proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule; c'est-à-dire qu'avec des longueurs 1, 4, 9, 16, ... les durées seront 1, 2, 3, 4, ...

— 3°. en raison inverse de la racine carrée de l'intensité de la pesanteur dans le lieu où le pendule oscille.

Cette précieuse propriété a permis de constater l'aplatissement de la terre aux pôles, en montrant que l'intensité de la pesanteur varie avec la latitude.

C'est encore à Galilée que l'on doit l'observation des lois du pendule; et c'est Huyghens qui a utilisé l'isochronisme des petites oscillations du pendule pour la régularisation de la marche des horloges.

7ème Leçon.

De la composition des forces appliquées à un corps solide — Composition des forces concourantes — Composition des forces parallèles — Centre des forces parallèles — Vérification expérimentale — Centre de gravité — Sa détermination pratique.

— 49. *Composition des forces appliquées à un corps solide.* Jusqu'à présent nous avons considéré un corps réduit à des dimensions infiniment petites, sous le nom de point matériel; cela veut dire que nous faisions abstraction des dimensions du corps pour n'avoir pas à considérer les mouvements relatifs de ses diverses parties qui auraient compliqué le mouvement simple que l'on avait principalement en vue. Ainsi un corps pesant tombe; le plus souvent il tourne sur lui même en tombant; mais ce qui nous préoccupait c'était la chute elle même et non les complications de ce mouvement. Maintenant nous allons considérer des assemblages de corps ou points matériels liés entre eux par les forces moléculaires ou par des liens matériels rigides ou flexibles; ces corps seront soumis à des forces diverses dont il s'agit d'étudier les effets. Nous nous occuperons spécialement des corps désignés sous le nom de Corps solides. On désigne ainsi en mécanique un assemblage de points matériels dont les distances mutuelles sont invariables; la nature ne nous présente aucun exemple de corps semblables : les corps réputés solides, se rapprochent plus ou moins de ce type idéal, et les résultats que nous obtiendrons en admettant la solidité absolue s'appliqueront d'autant mieux aux solides naturels qu'ils seront moins susceptibles de se déformer sous l'action des forces qui leur seront appliquées.

50. Composition des forces concourantes appliquées à un corps solide.

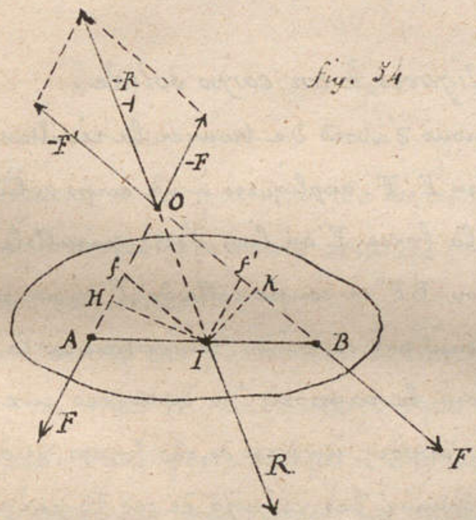


fig. 54

Considérons les deux forces F, F' (fig. 54) appliquées aux points A et B d'un même corps solide, et supposons que, prolongées au delà de leurs points d'application, elles se rencontrent en un point O. On peut imaginer de rattacher ce point O au corps solide au moyen de liens inextensibles OA, OB; et par suite on comprend qu'en appliquant en ce point deux forces $-F$, $-F'$, égales et opposées respectivement aux forces F, F', elles leur feront équilibre. Or nous pourrons remplacer ces deux dernières forces par leur résultante $-R$, diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces; donc cette résultante $-R$ ferait aussi équilibre aux forces données et par suite à leur résultante R qui doit passer par le point O, et être égale et contraire à $-R$. Cette résultante n'est donc en réalité que la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces données que l'on suppose transportées en leur point de concours.

D'ailleurs cette résultante pourra être considérée comme appliquée en un point quelconque de sa direction, sans qu'il y ait même à craindre une déformation du corps par suite de ce transport, car une résultante n'est qu'une force fictive que l'on conçoit à la place des forces données pour produire un effet équivalent.

On peut se demander par exemple, en quel point elle rencontre la droite AB qui joint les points d'application des forces données. Soit I ce point de rencontre; abaissons de ce point des perpendiculaires IH, IK sur les directions des forces F, F', et construisons le parallélogramme $IfOf'$ semblable à celui des forces données; les deux triangles IOf, IOf' sont égaux comme moitiés d'un parallélogramme; on peut donc égaler les produits de leurs bases par leurs hauteurs, ce qui donne :

$$Of \times IH = Of' \times IK ,$$

d'où l'on déduit la proportion

$$\frac{IH}{IK} = \frac{Of'}{Of} = \frac{F'}{F} .$$

Ainsi le point I (comme tout autre point de la résultante d'ailleurs) est tel que ses distances aux deux forces données sont en raison inverse de ces forces.

Quant à la grandeur de la résultante elle est la somme des valeurs des composantes estimées dans sa propre direction. (N°. 25.)

Il est bien évident que du moment que deux forces concourantes appliquées à un corps solide se composent comme si elles étaient appliquées à leur point de concours, il en est absolument de même d'autant de forces qu'on voudra, dont les directions iraient passer par un même point. On n'aura donc qu'à appliquer la règle du N°. 24.

51. *Composition des forces parallèles appliquées à un corps solide.*

1°. Forces parallèles de même direction. Proposons nous d'abord de trouver la résultante de

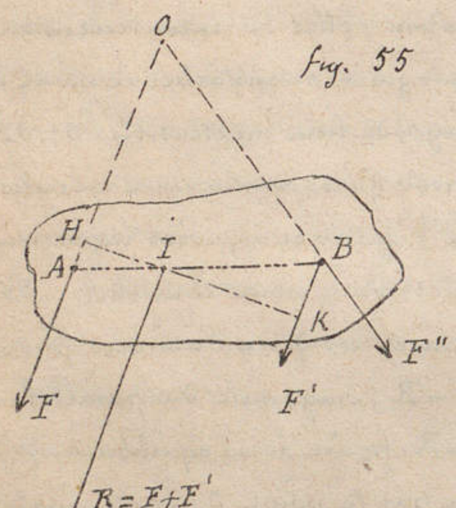


fig. 55

deux forces parallèles F, F', appliquées à un corps solide; pour cela supposons que la force F' au lieu d'être parallèle à F ait d'abord la direction BF'' et coupe celle de F en un point O; la résultante passerait par ce point, rencontrerait la droite AB en un point dont le rapport des distances aux deux forces serait dans le rapport inverse de ces forces, et dont la grandeur serait la somme des valeurs de ces forces estimées dans sa propre direction. Si nous rapprochons la force BF'' de la direction BF', le point O s'éloigne de plus en plus, et quand BF'' se confond avec BF', c'est-à-dire devient parallèle à AF, la résultante le devient aussi; elle partage la ligne AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux forces; car on a toujours :

$$\frac{IH}{IK} = \frac{F'}{F}$$

d'après le N°. précédent; et comme IH et IK sont maintenant sur une seule et même ligne droite, les deux triangles IAH, IBK, sont semblables et on a :

$$\frac{IH}{IK} = \frac{IA}{IB} ,$$

donc aussi

$$\frac{IA}{IB} = \frac{F'}{F} .$$

De plus la grandeur de la résultante est la somme des valeurs des composantes, puisque leurs valeurs estimées dans la direction de la résultante sont ces forces elles mêmes par suite de leur parallélisme.

2°. *Forces parallèles et de direction opposée* — Si, au lieu de faire tourner la force BF'' de manière à l'amener à être parallèle à F et de même direction qu'elle, on lui donne une direction BF' (fig. 56) opposée, le résultat précédent va être modifié.

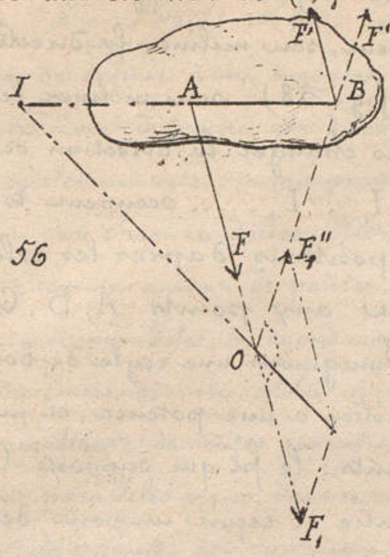


fig. 56

avant de passer au parallélisme, on voit que la résultante des forces F, F'', transportées en leur point de concours O, donnent une résultante qui rencontre la droite AB en dehors, du côté de la plus grande force; l'angle O est obtus, et les deux droites OF₁'' et OF₁ tendent à devenir directement opposées; en même temps la résultante tend aussi à prendre la direction OF₁, tout en passant par un point I tel que le rapport de ses distances aux deux forces soit inverse de celui des forces. On en conclura comme précédemment que le point I est tel que

$$\frac{IA}{IB} = \frac{F'}{F}$$

Quand à la grandeur de la résultante, comme les valeurs estimées des composantes sur la direction de la résultante sont ces forces elles mêmes prises en sens contraire, elle est égale à leur différence.

Dans le cas particulier où les forces F, F' sont égales, parallèles et de sens opposé, elles n'ont plus de résultante, ce qui veut dire qu'il est impossible de remplacer leur action par celle d'une force unique. On nomme Couple un pareil système de forces.

Imaginons maintenant un système de plusieurs forces parallèles appliquées à un corps solide (F, F', F'', F''') et A, B, C, D leurs points d'applications. On composera d'abord F, F' qui donneront une résultante R_1 de même direction, égale à leur somme $F+F'$ et rencontrant la ligne AB en un point I_1 parfaitement déterminé sur cette ligne; on composera ensuite R_1 avec la force F'' appliquée en C et on aura une seconde résultante R_2 égale à $R_1 + F''$ ou $F+F'+F''$, appliquée en un point I_2 parfaitement déterminé sur I_1C; enfin on composera R_2 avec F''' et on aura la résultante R égale à $R_2 + F''' = F+F'+F''+F'''$, et appliquée en un point I parfaitement déterminé, et on continuerait ainsi tant qu'il y aurait des forces.

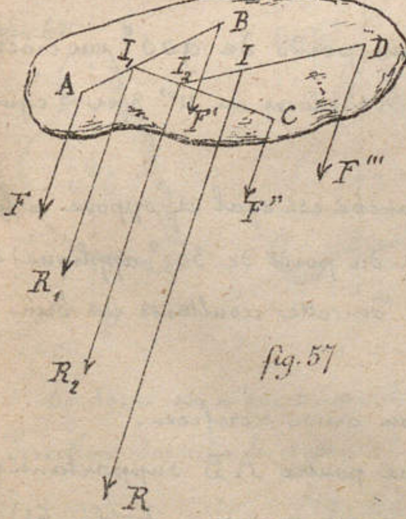


fig. 57

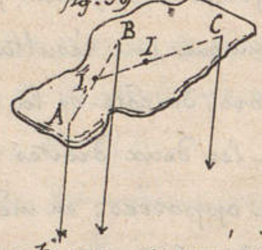
En résumé on voit que la résultante d'un système de forces parallèles est parallèle à leur direction commune, égale à leur somme si elles sont toutes de même sens, ou à la différence entre la somme de celles qui ont une direction et la somme de celles qui ont une direction contraire.

H. Durrande, Mécanique, 7e f.

52. Centre des forces parallèles. Le point I où passe la résultante définitive d'un système de forces parallèles, déterminé comme il vient d'être dit est ce qu'on nomme le centre des forces parallèles; ce point ne dépend que de la grandeur des forces que l'on a composées, et nullement de leur direction; on peut, soit incliner la direction commune des forces (fig. 58), soit incliner le corps (fig. 59) sans changer la direction des forces, les points I_1, I, ... occupent toujours les mêmes positions d'après les relations qui les lient aux points A, B, C...

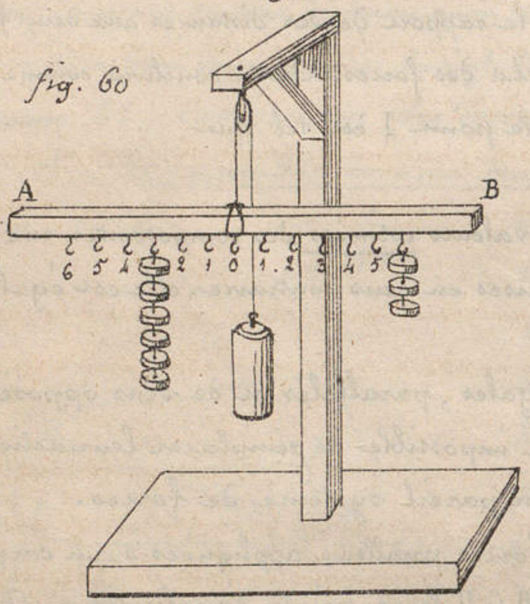
fig. 58

fig. 59



53. Vérification expérimentale. Imaginons une règle de bois AB suspendue par son milieu à une potence, et munie de crochets équidistants; le fil qui supporte la règle passe sur une poulie et reçoit un poids destiné à faire équilibre à la règle et aux poids dont on la charge.

fig. 60



Si au 3e crochet de gauche on suspend six poids égaux de 100g, et au 6e crochet de droite trois poids égaux de 100g, on détruira l'action de ces deux poids au moyen d'un poids de 900g suspendu au fil. La règle ne resterait plus en équilibre si l'on plaçait les mêmes poids en des points différents.

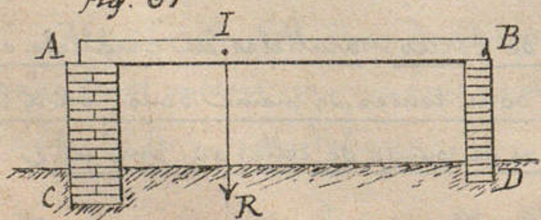
Il est clair qu'on aurait obtenu l'équilibre en plaçant un poids de 900g au crochet placé sous le point de suspension de la règle; donc les poids 600g et 300g placés au nos 3 et 6 équivalent bien au poids de 900g fixé au crochet n° 0.

De plus on voit que le poids de 600g placé au crochet 3 de gauche est égal et opposé à la résultante du poids de 900g agissant de bas en haut au crochet 0, et du poids de 300g appliqué au crochet 6 de droite; le rapport des distances du point d'application de cette résultante est bien celui de 3 à 9, c'est-à-dire le rapport inverse des forces.

La règle de la composition des forces parallèles est donc bien ainsi vérifiée.

54. Application de la règle précédente. Une poutre AB supportant une charge dont la résultante passe au point I, (fig. 61) repose sur deux murs d'appui AC, BD, on demande quelle est la charge de chaque mur?

fig. 61



Supposons que IA soit le tiers de AB ou la moitié de IB, le mur AC supportera une charge double de celle du mur BD ; il faudra évidemment tenir compte de considérations de ce genre dans la construction des édifices, pour donner aux murs des épaisseurs en rapport avec les charges qu'ils ont à supporter.

55. Poids d'un corps — Centre de gravité. Nous sommes maintenant en mesure de définir d'une manière nette ce qu'il faut entendre par poids d'un corps.

L'expérience démontre que dans le vide toutes les particules de matière qui composent un corps, tombent également vite, ce qui prouve que la cause qui les fait tomber (la Pesanteur) agit également sur chacune d'elles. Nous pouvons donc considérer les diverses actions exercées par la pesanteur, comme autant de petites forces, dirigées vers le centre de la terre, et que l'on peut con-sidérer comme parallèles, eu égard aux petites dimensions du corps par rapport à la distance qui les sépare du centre de notre globe.

La résultante de toutes ces actions partielles est ce qu'on nomme le poids du corps, et le centre des forces parallèles prend, dans ce cas, le nom de centre de gravité.

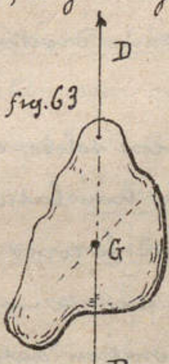
(Le mot de gravité est synonime de pesanteur ; on dit les corps graves pour les corps pesants. on a pris la lettre g pour désigner l'accélération due à la pesanteur, comme étant la lettre initiale du mot gravité)

La considération du centre de gravité d'un corps est d'une grande importance, et quand le corps a une forme géométrique, il y a des règles précises qui permettent de trouver la position de ce point.

56. Détermination expérimentale du centre de gravité. Mais quelle que soit la forme du corps, il y a toujours un procédé pratique pour déterminer le centre de gravité.

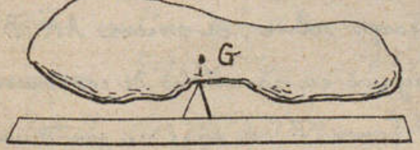
fig. 62

fig. 63



Si nous admettons que deux forces qui se font équilibre sur un corps solide libre, doivent être égales et directement opposées, il suffira de détruire l'effet du poids du corps par une force égale et opposée dont la direction devra passer par le centre de gravité. Ainsi, si l'on suspend le corps au moyen d'un fil attaché à l'un de ses points A, la direction AB du fil passera par le centre de gravité ; si on le suspend par un autre point C, la direction CD du fil passera encore par le centre de gravité ; si donc on a pu tracer les deux directions du fil sur la surface du corps, l'intersection de ces directions donnera le centre de gravité.

Fig. 64



Si le corps a une forme qui permette de le tenir en équilibre sur une arête horizontale, le plan vertical passant par cette arête contiendra le centre de gravité. En le posant de deux manières différentes, on aura deux plans contenant le centre de gravité qui se trouvera par conséquent sur leur intersection.

Ce procédé est particulièrement applicable aux corps cylindriques ou coniques, dont le centre de gravité doit déjà se trouver sur l'axe de figure; avec une seule position d'équilibre on saura quelle est la position du centre de gravité sur cet axe.

Toutes les fois que le corps possède un centre de figure et qu'il est homogène, c'est-à-dire composé de parties semblables dans toute son étendue, le centre de gravité coïncide avec le centre de figure. Exemple : cercle, sphère, polygone régulier, parallélogramme, parallélipipède.

8e Leçon

Equilibre et travail des forces appliquées à un corps solide — Du travail des forces dans les mouvements simples d'un corps solide — Translation — Rotation — Moment d'une force — Conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide — Trois sortes d'équilibre — Conditions d'équilibre d'un corps pesant.

57. *Des mouvements simples d'un corps solide et du déplacement élémentaire le plus général qu'il puisse prendre.*

Dans les leçons de cinématique (p. 32), nous avons vu que tout corps solide est susceptible de prendre deux mouvements simples : le mouvement de translation, dans lequel tous les points du corps se déplacent de quantités égales et parallèles, et le mouvement de rotation, dans lequel tous les points du corps décrivent des circonférences autour d'une droite que l'on nomme l'axe de rotation.

En outre le mouvement élémentaire le plus général d'un corps solide est le mouvement hélicoïdal, (mouvement de la vis dans son écrou) composé d'une translation et d'une rotation.

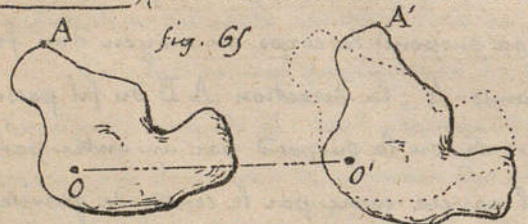
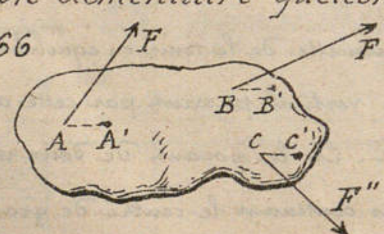


fig. 65

Car on peut toujours amener le corps solide OA dans une position quelconque O'A' par un mouvement de translation OO' et par une rotation autour du point O'. (voir cinématique. p. 38)

58. *Travail des forces appliquées à un corps solide dans une translation élémentaire quelconque.*

fig. 66



Soient F, F', F'', ... un système de forces appliquées aux points A, B, C, ... d'un corps solide, et soient AA', BB', CC', ... les déplacements égaux et parallèles de ces divers points. Le travail de la force F est égal au produit du chemin parcouru par la valeur de la force estimée dans la direction de ce chemin. Comme ce chemin est commun à tous les points du corps, il s'en suit que :

La somme des travaux de toutes les forces appliquées dans cette translation est égale au produit du chemin décrit, par la somme des valeurs des forces estimées dans la direction de ce chemin.

Si l'on transporte les points d'application de toutes les forces en un même point O du corps, en leur conservant leur grandeur et leur direction, on pourra les composer en une seule R, dont la valeur estimée sur la direction du chemin décrit sera la somme des valeurs de toutes les composantes estimées dans cette direction. Or le travail de cette résultante est précisément égal au produit du chemin décrit par la valeur estimée de cette force, ce qui reproduit la somme des travaux des composantes.

En désignant par le nom de résultante de translation du système, la force R, on peut dire que : dans tout déplacement élémentaire de translation, le travail des forces du système est égal au travail de la résultante de la translation.

Il est évident qu'au point de vue de la translation à produire, une force n'a d'effet que par sa valeur estimée dans la direction à parcourir ; il suffirait donc d'appliquer en chacun des points d'application des forces données des forces parallèles entre elles, égales et contraires aux valeurs des premières, estimées dans cette direction, pour empêcher le déplacement ; or l'effet de ces forces ainsi ajoutées est équivalent à celui de leur résultante qui serait égale à leur somme, c'est-à-dire, à la valeur de R estimée dans la direction de la translation, mais de sens opposé.

Par suite enfin, si la résultante de translation R est nulle, il sera inutile d'ajouter de nouvelles forces pour empêcher le déplacement, il ne pourra avoir lieu sous l'action des forces données. Ces forces se feront donc équilibre au point de vue de toute translation à produire.

Donc la condition pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide ne puisse lui donner un mouvement de translation c'est que la résultante de translation soit nulle.

Ou bien encore : il faut et il suffit que la somme des travaux des forces données soit nulle pour tout mouvement élémentaire de translation, supposé donné au corps solide.

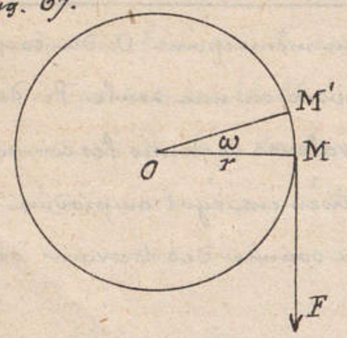
Cette condition est nécessaire et suffisante, car si les forces données se font équilibre au point de vue d'une translation quelconque, c'est que leur résultante de translation est nulle, et par suite son travail qui est la somme des travaux des forces composantes est nul.

Réciproquement : si la somme des travaux des forces appliquées au corps solide est nulle pour tout mouvement de translation supposé au système, le travail de la résultante de translation l'est aussi, ce qui exige que cette résultante le soit également. L'effet des forces données est donc nul au point de vue d'une translation quelconque.

59. *Travail des forces appliquées à un corps solide dans un mouvement de rotation — Moments des forces.* Nous avons appris dans une précédente

leçon (n°. 36, 2°) à évaluer le travail d'une force dans un mouvement de rotation, lorsque la force agit tangentiellement à la circonférence d'une roue sur laquelle se déplace son point d'application.

fig. 67.



Nous avons trouvé que le travail élémentaire de la force F, pour un déplacement angulaire MOM' de la roue a pour expression : $\mathcal{T}e\,F = F \times MM'$.

Si on désigne par r le rayon de la roue, et par ω (lisez oméga, dernière lettre de l'alphabet grec) l'angle MOM', on sait par les éléments de géométrie que :

$$MM' = r \times \omega.$$

Donc,

$$\mathcal{T}e\,F = \omega \times F \times r.$$

Or le produit d'une force F par sa distance r à un point fixe O, a reçu en mécanique le nom de moment de la force F. (Le mot de moment doit être pris ici dans le sens de puissance ; nous allons voir en effet par les considérations suivantes que c'est par son moment qu'on peut apprécier l'effet d'une force au point de vue d'une rotation à produire.)

D'après cette définition on a donc :

$$\mathcal{T}e\,F = \omega \times \text{moment de } F.$$

Ainsi, le travail élémentaire d'une force agissant tangentiellement à la circonférence d'une roue, dans un mouvement de rotation de celle-ci, est le produit du déplacement angulaire par le moment de la force par rapport au centre.

Remarques. I — Si plusieurs forces agissent tangentiellement à la circonférence de la même roue, on peut, sans changer leur effet, les remplacer par une seule égale à la différence entre la somme de toutes celles qui tendent à faire tourner la roue dans un sens, et la somme de celles qui tendent à la faire tourner en sens contraire.

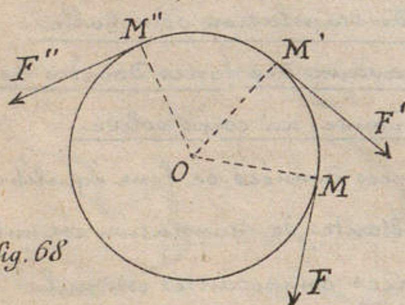


fig. 68

Il est clair, en effet, qu'il est complètement indifférent de faire agir une force en un point plutôt qu'en un autre de la circonférence de la roue ; on peut donc supposer que toutes les forces soient appliquées à un même point M. Là, elles seront toutes en ligne droite, perpendiculaire au rayon OM, et on pourra évidemment les remplacer par une seule ainsi qu'il vient d'être dit.

On peut encore voir que : le moment de la résultante ainsi obtenue est la différence entre la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens et celle des moments des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire.

car on a en désignant cette résultante par R

$$R = F + F' - F''$$

et par suite en multipliant par r (rayon de la roue)

$$R \times r = F \times r + F' \times r - F'' \times r,$$

ou

$$\text{Mom.}\,R = \text{Mom.}\,F + \text{Mom.}\,F' - \text{Mom.}\,F''$$

Enfin si nous multiplions par le déplacement angulaire ω qui est commun à tous les points de la roue

$$\omega \times \text{Mom.}\,R = \omega \times \text{Mom.}\,F + \omega \times \text{Mom.}\,F' - \omega \times \text{Mom.}\,F''$$

ou

$$\mathcal{T}_e . R = \text{somme } \mathcal{T}_e F + \mathcal{T}_e F' - \mathcal{T}_e F''$$

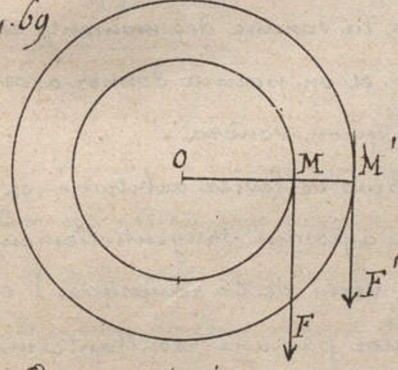
C'est-à-dire que le travail élémentaire de la résultante est la somme algébrique * des travaux des composantes.

Si la somme des forces qui tirent dans un sens est égale à la somme de celles qui tirent en sens contraires, la résultante R est nulle, et la roue ne pourra prendre de mouvement de rotation sous l'action des forces données. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que des forces appliquées tangentiellement à la circonférence d'une roue ne puissent lui donner un mouvement de rotation, c'est que la somme algébrique de leurs moments soit nulle, ou ce qui revient au même, que la somme algébrique de leurs travaux soit nulle pour toute rotation supposée.

II. La distance d'une force au point fixe O se nomme son bras de levier.

fig. 69

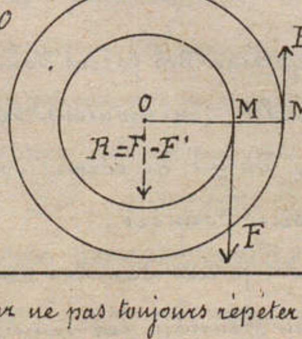


Deux forces F, F' ayant des moments égaux et telles, par conséquent, que l'on ait $OM \times F = OM' \times F'$, produisent exactement le même travail dans une rotation pour un même déplacement angulaire ω de leurs bras de levier.

Si les deux forces agissent en sens contraires, je dis que si elles ont même moment, elles ne produiront aucune rotation autour de l'axe O du corps solide.

On peut toujours amener les deux forces à avoir leurs points d'application sur un même rayon

fig. 70



OMM' ; ce sont donc des forces parallèles et de sens opposé, dont la résultante est égale à leur différence et rencontre la droite OM' en un point I, tel que

$$\frac{IM}{IM'} = \frac{F'}{F} ;$$

ou bien tel que

$$IM \times F = IM' \times F';$$

* Pour ne pas toujours répéter ; la différence entre des quantités comptées dans un sens et des quantités comptées en sens inverse, on se sert du mot somme algébrique.

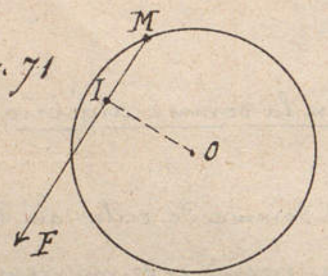
Le point I se confond donc avec le point O.

Or cette force passant par le centre ne peut rien pour la rotation autour de ce centre; et on peut remarquer en même temps que son moment est nul, ou que son travail pour un déplacement supposé ω est nul.

Ainsi, dire qu'une force ne peut produire un mouvement de rotation, revient à dire que son moment par rapport au centre ou à l'axe de rotation est nul, et qu'il en est de même pour son travail relatif à un déplacement angulaire supposé quelconque.

III. On a supposé jusqu'ici qu'une force F agit tangentiellement à la circonférence que décrit son point d'application : supposons maintenant une force F qui ne soit pas tangente à la circonférence que décrit le point M auquel elle est appliquée; abaissons du centre O la perpendiculaire OI sur cette force; l'effet de cette force ne sera pas changé si on transporte son point d'application au point I. Cela revient à dire que son travail ne dépend toujours que de son moment; car on a : (N°. 36)

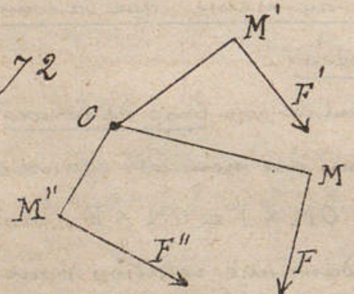
fig. 71



$$\mathcal{T}_e\ F = \omega \times F \times OI = \omega \times mom.\ F.$$

IV. Il résulte des remarques précédentes que si l'on considère plusieurs forces F, F', F'', appliquées à un corps solide pouvant tourner autour d'un axe O, et situées dans un même plan perpendiculaire à cet axe, on peut les remplacer par une seule dont le moment et le travail sera la somme des moments et des travaux des forces données, et on pourra donner à cette résultante tel bras de levier qu'on voudra.

fig. 72



On peut en effet, d'après la remarque II, choisir un bras de levier arbitraire, et remplacer les forces données par d'autres ayant mêmes moments et agissant tangentiellement à la circonférence ayant pour rayon ce bras de levier. Alors en vertu de la remarque I on pourra remplacer ce nouveau système de forces équivalent au premier par une résultante unique égale à leur somme et dont le moment et le travail sera la somme des moments et des travaux des forces données.

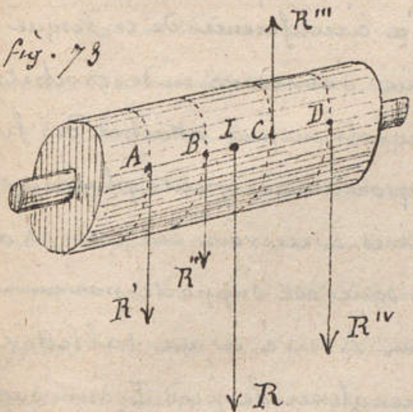
En particulier si cette résultante est nulle, l'effet du système des forces données sera nul au point de vue de la rotation à produire. Or si elle est nulle, son moment sera nul, ainsi que son travail pour tout déplacement angulaire supposé donné au corps; donc il en sera de même de la somme des moments et des travaux des forces données.

Et inversement si la somme des moments et des travaux des forces données est nulle, il en serait de même du moment et du travail de la force unique qui pourrait les remplacer. Donc

Cette force ainsi que le système auquel elle est équivalente ne peut produire de rotation autour de l'axe o.

V. — Si l'on considère ensuite des forces situées dans divers plans perpendiculaires à l'axe de rotation, on pourra, dans chacun d'eux, réduire les forces qui s'y trouvent à une seule, et donner aux résultantes de ces divers plans un même bras de levier (Remarque IV).

fig. 73



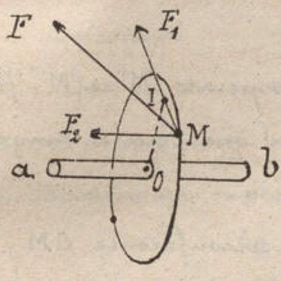
De cette manière le système de ces résultantes agira tangentiellement à la surface d'un cylindre, et on peut faire en sorte que tous leurs points d'application A, B, C, D, soient sur une même arête du cylindre ayant le bras de levier commun pour rayon.

Toutes ces forces étant parallèles peuvent être remplacées par une seule R égale à leur somme et ayant même bras de levier; le moment et par suite <u>le travail de cette résultante est donc encore la somme des moments ou des travaux des forces données</u>.

Nous arriverons encore à des conclusions identiques à celles de la remarque V, si on suppose nulle cette résultante R ou la somme des moments ou des travaux des forces données.

VI. — Nous n'avons examiné encore que l'effet des forces agissant dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation; Considérons une force F qui soit inclinée sur le plan du cercle décrit par son point d'application M. Décomposons la en deux forces rectangulaires F_1 et F_2 qui soient les projections de F sur le plan du cercle, et sur la direction de l'axe de rotation ab.

fig. 74

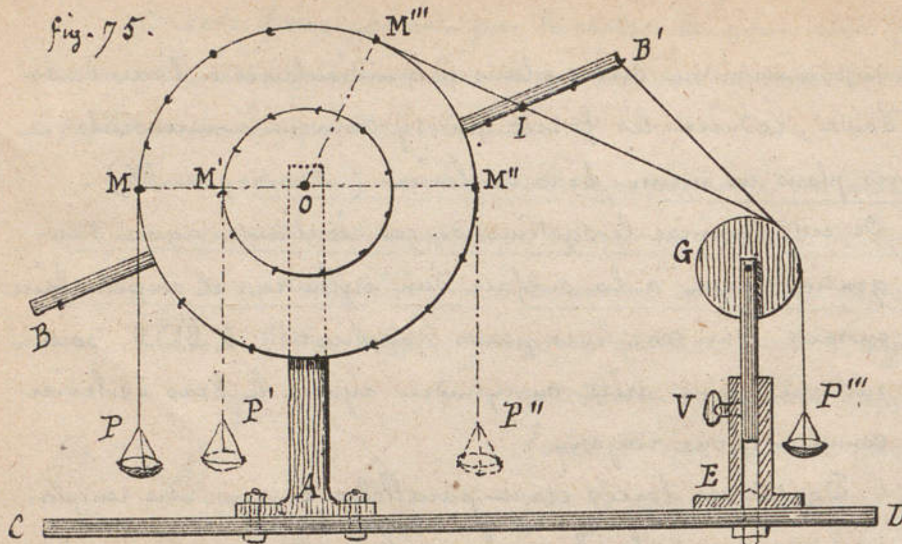


La composante F_2 ne produira aucun effet sur le mouvement de rotation; la force F n'agit donc que par sa composante F_1, et on a appelé moment de la force F par rapport à l'axe de rotation ab, le moment de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe par rapport au pied o de cet axe dans le plan. Ainsi : $\text{mom. } F = \text{mom. } F_1 = F_1 \times oI$,

On voit d'ailleurs que le travail de F dans le mouvement de rotation se compose exclusivement du travail de sa composante F_1 puisque la seconde composante F_2 est normale à l'arc décrit par le point M. Il s'en suit que le travail de la force F a encore pour expression le produit de son moment par l'angle de rotation. On en conclut encore que toutes les remarques précédentes pourront s'étendre à des forces dirigées en tous sens, en les remplaçant par leurs projections sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

— *60. Vérification expérimentale des résultats fournis par les remarques précédentes.* Pour vérifier les considérations précédentes on peut se servir de l'appareil représenté par la figure 75.

Fig. 75.



Il se compose d'un disque circulaire vertical en bois, pouvant tourner autour d'un axe qui le traverse perpendiculairement suivant le centre O.

La circonférence de ce disque est munie d'anneaux ou de crochets auxquels on peut attacher des fils supportant de petits plateaux destinés à recevoir des poids. L'axe du disque est supporté par un montant A rivé à une tablette CD, qui est traversée par une rainure dans laquelle on peut faire glisser le pied E d'un support creux dans lequel on peut enfoncer plus ou moins et fixer au moyen d'une vis de pression V, une tige servant de chape à une poulie ou galet G. Enfin une petite barre BB' également munie de crochets ou d'anneaux est fixée derrière le disque et tourne avec lui autour de l'axe O.

Il est maintenant bien facile de comprendre comment, avec cet appareil on peut vérifier toutes les remarques précédentes.

1°. Deux poids égaux placés en P'' et en P''' et agissant sur les points M'' et M''', feront également équilibre au même poids placé en P, ce qui montre d'abord que l'action tangentielle d'une force sur une roue est indépendante du point d'application.

2°. La circonférence OM' ayant un rayon moitié de celui de la circonférence OM, un poids suspendu en M' pour faire équilibre à un poids suspendu en M'' devra être double de ce dernier ce qui montre l'égalité des moments de deux forces dont l'effet se détruit au point de vue d'une rotation.

3°. Il est indifférent d'attacher le cordon qui supporte le poids P''' = P, au crochet I de la barre, ou à un crochet de la roue tel que la droite IM''' soit tangente à la roue ; ce qui montre que l'effet d'une force pour produire une rotation, ne dépend pas de la circonférence que décrit son point d'application mais uniquement de son moment.

4°. On pourra placer des poids divers appliqués en P, P', P''', et on verra que pour détruire leur effet, il suffira d'appliquer en P'' un poids tel que son moment soit la somme algébrique des moments des trois autres.

Soit $P = 200^g$ $\quad P' = 300^g$ $\quad P''' = 100^g$

$OM = 1$, $\quad OM' = \frac{1}{2}$, $\quad OM''' = 1$, La somme des moments sera :

$$200 + 150 - 100 = 250^{gr}$$

Il faudra donc appliquer un poids de 250^{gr} en M" ; ou, si on le suspend à un des crochets de la barre, supposée horizontale et à une distance double de OM", il suffira d'un poids de 125^{gr}.

En substituant au disque un cylindre également muni de crochets on vérifierait de même les résultats indiqués dans la remarque V.

Enfin en faisant agir un poids de telle sorte que le cordon qui le supporte soit oblique sur le plan du disque, on verra que le poids dont l'action tangentielle détruira la sienne, aura exactement le même moment. (Rem. VI)

— *61. Conditions générales d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide.* Si un système de forces est tel, que sous leur action un corps ne puisse prendre ni un mouvement de translation dans une direction quelconque, ni un mouvement de rotation autour d'une droite quelconque, un pareil système de forces ne peut modifier l'état de repos ou de mouvement du corps, on dit que ces forces se font équilibre.

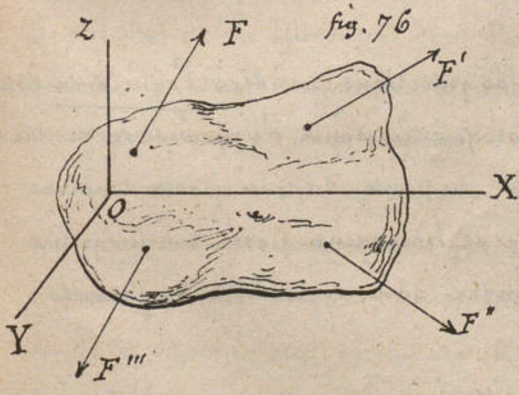
Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit :

1° que la résultante de translation, telle que nous l'avons définie soit nulle ; car l'effet des forces du système est précisément le même que celui de cette résultante au point de vue d'une translation quelconque.

2° Que le moment résultant de rotation par rapport à un axe quelconque soit nul ; car c'est uniquement de ce moment que dépend l'effet des forces pour produire une rotation autour de cet axe.

Ordinairement on choisit trois directions rectangulaires OX, OY, OZ, et il suffit de s'assurer

Fig. 76



que le système ne peut prendre de translation suivant ces trois directions, ni de rotation autour de ces mêmes droites, et on peut être certain qu'il ne peut se mouvoir dans aucune autre sous l'action des forces données. On a ainsi six conditions générales nécessaires et suffisantes pour l'équilibre.

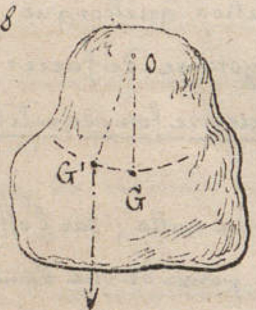
Ces conditions équivalent d'ailleurs aux suivantes : il faut et il suffit pour l'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide : 1° que la somme de leurs travaux soit nulle pour une translation supposée quelconque. 2° que la somme de leurs travaux soit nulle pour une rotation quelconque. C'est ce qui a été surabondamment démontré dans les remarques précédentes.

— *Equilibre d'un corps pesant.* Si le corps pesant est entièrement libre, il suffit, pour le tenir en équilibre de lui appliquer une force égale à son poids, dirigée de bas en haut et passant par le centre de gravité. Car la résultante des actions de la pesanteur étant son poids, et ce poids étant appliqué au centre de gravité, ne peut être détruite que par une force égale et directement opposée.

Si le corps ne peut que tourner autour d'un axe ab, il faut que le moment de son poids par rapport à cet axe soit nul, ou, ce qui revient au même, que la verticale du centre de gravité rencontre l'axe de rotation. (Rem. II).

63. *Trois sortes d'équilibre*. Il faut remarquer qu'il y a plusieurs sortes d'équilibre; le premier que l'on nomme *équilibre stable* est tel que si l'on vient à écarter le corps soumis à l'action d'un système de forces, de sa position d'équilibre, l'effet des forces le ramène à cette position. C'est ce qui arrive par exemple pour un corps pesant suspendu par un fil attaché à un de ses points O toutes les fois que le centre de gravité G est audessous du point de suspension; on voit facilem. On voit facilement en effet, que dans ce cas, si on écarte la ligne OG de sa position d'équilibre, qui est la verticale, le centre de gravité se trouve dans le cas d'un pendule simple et tend à revenir à sa position d'équilibre après un certain nombre d'oscillations.

fig. 78

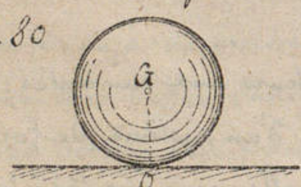


D'autres fois au contraire, le corps écarté très peu de sa position d'équilibre l'abandonne complètement par l'effet des forces qui agissent sur lui; l'*équilibre* est alors *instable*, tel est le cas d'un corps pesant dans lequel le centre de gravité serait audessus du point d'appui fig. 79. Tel est en particulier le cas d'un bateau dans lequel le point d'application de la poussée de l'eau serait audessous du centre de gravité.

fig. 79

Enfin lorsque le corps reste en équilibre dans toutes les positions possibles *l'équilibre* est dit *indifférent*. C'est ce qui arrive pour un corps pesant lorsque le point d'appui et le centre de gravité coïncident; ou bien encore lorsque la verticale du point d'appui passe toujours par le centre de gravité. Tel est le cas d'une sphère pesante et homogène posée sur un plan horizontal, ou celui d'un cylindre dont le centre de gravité est bien sur l'axe de figure.

fig. 80



En résumé le centre de gravité d'un corps pesant tend toujours à se placer le plus bas possible; lorsqu'il occupe cette position de hauteur minima l'équilibre est stable, sinon l'équilibre est instable.

II^e PARTIE.

Machines, Moteurs, Résistances.

9^e Leçon

Définition des machines au point de vue du travail — Des machines considérées à l'état d'équilibre ou de mouvement uniforme — Étude des machines simples : Levier (Balances diverses) Treuil. (ses modifications).

—— 64. *Définition des machines au point de vue du travail.* Dans le cours de cinématique nous avons considéré les machines comme des organes propres à transformer un mouvement d'une certaine nature en un mouvement de nature différente ; cette considération est évidemment très importante au point de vue du tracé des diverses pièces qui composent les machines ; mais nous n'avons envisagé ainsi qu'une partie de la question des machines.

L'emploi d'une machine a en effet pour objet :

1° de vaincre une résistance ; 2° de déplacer son point d'application en sens contraire de son action ; en d'autres termes, toute machine a pour effet de produire du travail, ou plus exactement de le transformer.

Dans les machines qui servent à soulever les fardeaux, la résistance à vaincre c'est le poids des fardeaux, et comme cela a été expliqué cette résistance doit être vaincue sur toute la hauteur à parcourir ; la machine doit donc produire un travail égal au produit du fardeau à soulever par la hauteur à laquelle il doit parvenir.

Mais pour qu'une machine développe ainsi un travail résistant, il faut lui fournir du travail moteur, car la machine ne peut donner que ce qu'elle a reçu, et elle ne donne même jamais tout ce qu'elle a reçu ainsi que nous le verrons. Il faudra donc faire agir sur une machine un moteur quelconque : puissance de l'homme ou des animaux, force motrice de l'eau, du vent, ou de la vapeur, etc ; en un mot il faut dépenser du travail moteur sur la machine, et celle-ci le transformera en travail résistant.

Une machine se trouve donc dans le cas d'un corps soumis à l'action de forces diverses les unes appelées puissances qui tendent à la mettre en mouvement, les autres appelées résistances qui tendent à s'opposer à ce mouvement.

—— 65. *Des machines à l'état d'équilibre ou de mouvement uniforme.*

Comme en définitive une machine n'est qu'un assemblage de corps qui ne peuvent prendre que certains mouvements déterminés ; si cette machine est en repos ou à l'état de mouvement uniforme, c'est qu'il y a équilibre entre les puissances et les résistances à l'aide des obstacles qui s'opposent à certains mouvements.

Donc pour tous les mouvements que l'on pourra supposer à la machine compatibles avec le mode d'assemblage de ses diverses parties, il y aura équivalence entre le travail des puissances et celui des résistances.

Quoique cette équivalence entre le travail moteur et le travail résistant caractérise en même temps, l'état d'équilibre et l'état de mouvement uniforme, il n'est pas inutile je crois d'insister sur la différence profonde qui existe entre ces deux manières d'être d'une machine.

66 Machines simples. On appelle machines simples des types que l'on rencontre comme éléments dans toute machine. Remarquons en effet que toute pièce de machine, ainsi qu'on l'a vu dans le cours de cinématique ne peut que tourner autour d'un point fixe, ou autour d'un axe fixe, sauf quelques unes qui servent à transformer deux mouvements simples l'un dans l'autre.

On ramène les machines simples à trois :

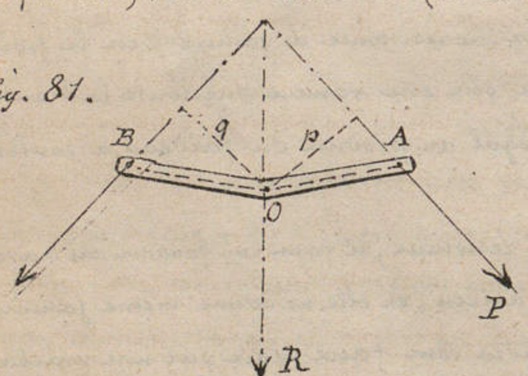
1°. Le Levier (corps qui a un point fixe)

2°. Le Treuil (corps qui a un axe fixe)

3°. Le Plan incliné (dont il a été question déjà.)

67 Levier. – Ses trois genres. Le levier consiste tout simplement en un corps rigide et inflexible, pouvant tourner autour d'un point fixe, et sollicité par deux forces, l'une motrice (la puissance), l'autre résistante (la résistance) ; Soient AOB une telle machine, P la puissance appliquée en A, Q la résistance appliquée en B ; comme le levier peut tourner en tous sens autour du point O, il suffit pour l'équilibre que les forces P et Q soient dans un même plan AOB, et que leur résultante R vienne passer par le point fixe O (point d'appui), où son effet sera détruit par la résistance du point d'appui ; sans cela cette résultante tendrait à faire tourner le levier autour de ce point.

fig. 81.



Soient p, q, les distances du point O aux deux forces P et Q ; d'après les règles des forces concourantes (n° 50) on aura :

$$P \times p = Q \times q ;$$

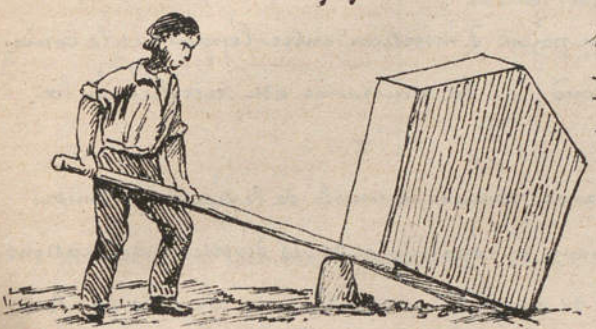
En d'autres termes nous retrouvons le théorème de l'égalité des moments (n° 59. Rem. II, III, IV.) Ainsi la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre de deux forces sur un levier, c'est que leurs moments par rapport au point d'appui soient égaux.

D'ailleurs, si on se rappelle (n° 59) que le travail de la force P dans une rotation autour d'un axe quelconque passant par le point O, est le produit $\omega \times P \times p = \omega \times$ moment de P ; ω étant un déplacement angulaire supposé donné au levier ; de même pour le travail de la résistance on aurait $\omega \times$ mom. de Q, sauf le changement de sens dans la rotation ; on en conclut que pour tout déplacement supposé donné au levier on aura toujours :

$$\mathcal{T}_e P = \mathcal{T}_e Q .$$

C'est-à-dire égalité entre le travail moteur et le travail résistant. Mais ici cette égalité est purement géométrique, car ni la puissance ni la résistance ne travaillent réellement.

fig. 82.



Supposons maintenant que l'on ne se contente plus de tenir un fardeau Q en équilibre au moyen d'une puissance P et d'un levier, mais que l'on veuille déplacer le fardeau d'un mouvement uniforme ; il faut bien, pour que le mouvement soit uniforme, que le travail de la puissance soit constamment égal au travail de la résistance, mais ici il y a consommation effective de travail moteur qui se transforme directement en travail résistant, et la relation purement géométrique qui caractérisait l'état d'équilibre devient une question industrielle du moment qu'il y a mouvement de la machine. Dans l'état d'équilibre il ne se dépense rien, il ne se consomme rien ; avec un poids P suspendu au levier, on fera équilibre au fardeau Q, et la force ne s'use pas ; tandis que dans le mouvement même uniforme, il arrive un moment où, soit fatigue du moteur, soit impossibilité de déplacer d'avantage son point d'application, il devient nécessaire d'avoir recours de nouveau à une source de travail. Je reviendrai bien des fois encore sur ce sujet qui forme comme la base de ces leçons.

Revenons au levier ; on distingue trois genres de leviers d'après la position relative des points d'application de la puissance, de la résistance et du point d'appui.

fig 83

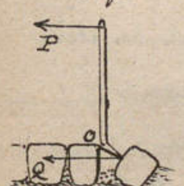


fig 84

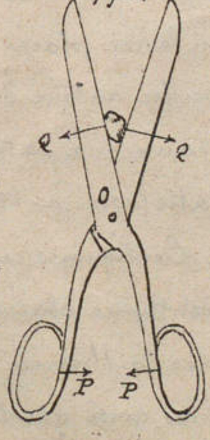
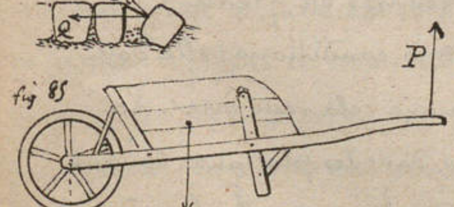


fig 85



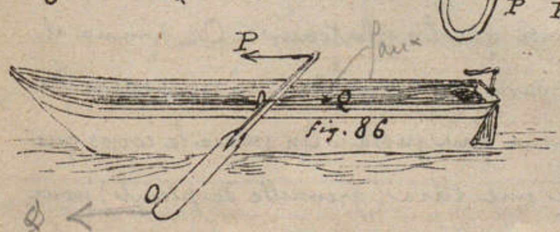


Fig. 86

1er Genre — Le point d'appui est entre les points d'application de la puissance et de la résistance. Exemple la pince des paveurs fig. 83, le fléau des balances : Les ciseaux ou sécateurs, sont formés de deux leviers du 1er genre fig. 84.

2e Genre — La résistance a son point d'application entre le point d'appui et le point d'application de la puissance. La brouette (fig. 85) l'aviron (fig. 86) sont des leviers du second genre. faux

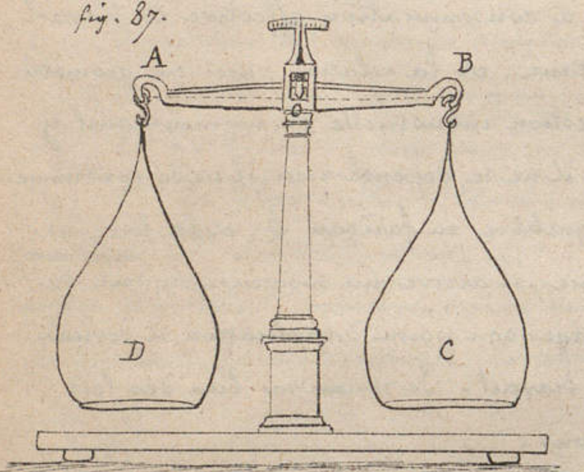
Dans les leviers du premier genre, on peut établir tel rapport qu'on veut entre la puissance et la résistance; dans ceux du second genre la puissance est toujours moindre que la résistance.

3e Genre. — Le point d'application de la puissance est entre le point d'appui et le point d'application de la résistance; aussi la puissance est-elle toujours plus grande que la résistance. et il n'y a pas économie de force avec ces leviers, mais économie dans le parcours du point d'application.

Le corps humain nous offre de nombreux exemples de leviers de ce genre; l'os de l'avant bras par exemple a pour point d'appui son articulation avec l'épaule, et la résistance peut être considérée comme appliquée à l'articulation du coude; c'est le poids du bras, de la main et du fardeau que celle-ci peut soutenir; or, le muscle moteur a justement son point d'insertion entre l'épaule et le coude et beaucoup plus près du premier de ces points que du second; ici la puissance est sacrifiée à la rapidité des mouvements.

68. *Balance*. J'ai cité le fléau des balances comme exemple de levier du premier genre ceci m'amène à dire quelques mots de cet instrument si répandu et de ses diverses modifications.

fig. 87.



Une balance se compose essentiellement d'un levier AB, nommé <u>fléau</u>, mobile autour d'un axe horizontal O et portant à ses extrémités A et B des crochets qui supportent au moyen de chaînes des bassins C et D, dans lesquels on place soit les poids, soit les objets que l'on veut peser. L'axe horizontal est représenté par l'arête d'un prisme ou couteau d'acier reposant sur un plan horizontal d'acier supporté par une colonne verticale.

fig. 88.

Dans les balances de précision on ne laisse pas le couteau reposer constamment sur le plan; une fourchette soutient habituellement les deux bras du fléau; en pesant sur un levier placé au bas du support, on élève le plan d'acier ou d'agathe, et le fléau peut alors osciller autour de l'arête du couteau.

La fig. 88 indique le mode de suspension des plateaux aux extrémités du fléau.

Pour qu'une balance soit bonne il faut qu'elle satisfasse à trois conditions: elle doit être <u>juste</u>, <u>sensible</u>, et elle ne doit pas être <u>folle</u>. Expliquons ce que cela veut dire. La balance doit être <u>juste</u>; cela signifie que deux poids identiques placés dans les plateaux doivent laisser le fléau parfaitement horizontal; ceci exige d'après la théorie du levier que les bras du fléau soient de même longueur et parfaitement semblables ainsi que les plateaux. Or, comme il est bien difficile qu'il en soit rigoureusement ainsi, on a trouvé deux procédés qui permettent de peser exactement un corps avec une balance qui n'est pas tout à fait juste. On place le corps que l'on veut peser dans le plateau C par exemple et dans l'autre une tare (grenaille de plomb) pour lui faire équilibre ; puis on enlève le corps et on met à sa place des poids marqués. Il est bien évident que ces poids et le corps s'équivalent, puisque placés dans les mêmes circonstances ils ont fait équilibre à une même tare ; c'est là la méthode des doubles pesées de Borda.

On peut procéder autrement : après avoir pesé le corps dans le plateau C, on le pesera dans le plateau D ; si la balance est juste il faudra le même poids pour faire équilibre au corps dans les deux pesées, sinon soient P, P' les deux poids qu'il a fallu pour faire équilibre au même corps, et

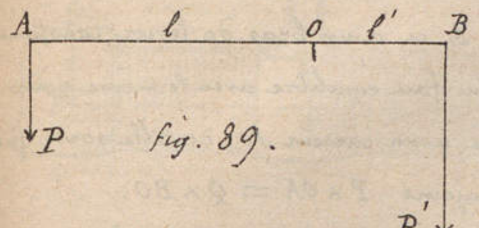


fig. 89.

soit X son poids véritable ; soient l, l' les bras OA, OB du fléau ; si dans la première pesée le corps est suspendu en B et le poids P en A on aura d'après la théorie du levier :

$$X \times l' = P \times l$$

et dans la seconde pesée

$$X \times l = P' \times l'$$

Si on multiplie membre à membre ces deux égalités, on aura :

$$X^2 = P \times P',$$

relation indépendante des bras du fléau ; on en déduit que le poids cherché est la racine carrée du produit des deux poids trouvés dans les deux pesées.

La balance doit être sensible ; cela veut dire qu'elle doit trébucher lorsqu'on ajoute un petit poids à l'un des poids égaux déjà placés sur les plateaux.

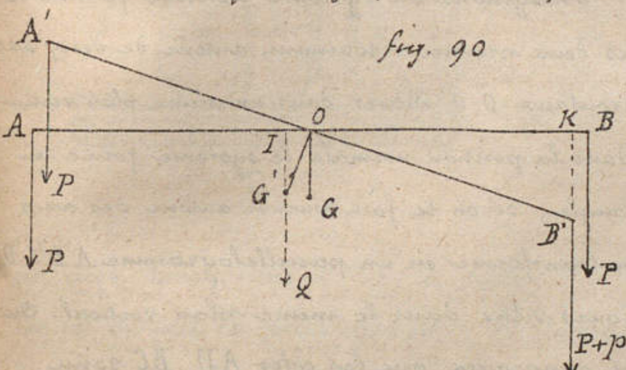


fig. 90

Pour nous rendre compte des circonstances dont dépend la sensibilité de la balance, considérons la figure théorique ci-contre (fig. 90) soit AB le fléau dont on suppose les deux bras égaux ; le centre de gravité G de ce fléau, doit, lorsqu'il est horizontal, se trouver dans la verticale de l'axe de suspension O ; de plus il ne peut se trouver au-dessus sans quoi, d'après ce que nous avons dit à propos de la stabilité de l'équilibre des corps pesants (N° 63) au moindre mouvement la balance se renverserait ; c'est ce qu'on exprime en disant que la balance serait folle ; il ne doit pas non plus se trouver sur l'axe de suspension, sans quoi l'équilibre serait toujours indifférent ; la moindre inégalité de poids dans les deux plateaux suffirait pour faire basculer le fléau d'un quart de tour. Il faut donc que le centre de gravité soit au-dessous de l'axe de suspension ; soit OG sa distance à l'axe, Q le poids du fléau appliqué en G, p le poids ajouté à l'un des poids égaux P ; la balance s'inclinera sous l'action de ce poids p, jusqu'à ce que le moment de ce poids par rapport à l'axe O contrebalance le moment du poids Q appliqué en G', par rapport au même axe, ce qui exige que l'on ait : (*)

$$p \times OK = Q \times OI$$

(*) Il n'y a pas lieu de tenir compte des moments des poids égaux P, qui se détruisent toujours, puisqu'ils sont égaux et qu'ils agissent en sens contraires. (H. Durrande. Mécanique, 9e fle)

D'où $$\frac{p}{Q} = \frac{OI}{OK}$$

On voit par là que le poids p nécessaire pour faire pencher la balance d'une certaine quantité est une fraction du poids du fléau évidemment d'autant plus grande, que la droite OG qui mesure la distance du centre de gravité à l'axe de suspension est elle même plus grande. (*) La balance sera donc d'autant plus sensible que le centre de gravité sera plus rapproché de l'axe O.

69. Balance romaine. La balance romaine est encore un levier du premier genre; le corps que l'on veut peser est suspendu à un crochet B et à un bras de levier constant BO; on lui fait équilibre avec le même poids P attaché à un curseur A, de telle sorte que l'on a toujours $P \times OA = Q \times BO$;

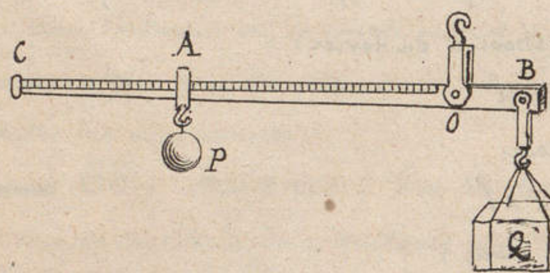


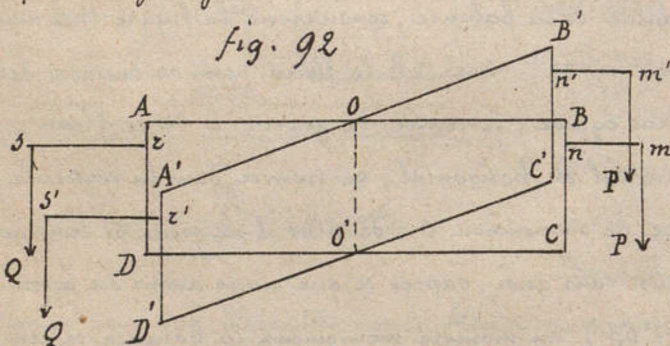
fig. 91.

C'est donc par la graduation du bras OC du fléau que l'on évalue le poids Q; on a en effet $Q = OA.\frac{P}{BO}$;

Comme P et OB sont des quantités constantes, le poids Q est proportionnel à OA. On pourra graduer OC, en suspendant en B des poids connus, par exemple 1^{Kilog}, 2^K, 3^K, ... et en leur faisant équilibre au moyen du poids P convenablement placé. On partagera ensuite les intervalles en parties égales qui donneront des fractions de Kilogrammes.

70. Balance de Roberval. Imaginons un système articulé formé de quatre tiges égales deux-à-deux AB = CD, AD = BC; les deux premières tournant autour de deux axes horizontaux O, O' situés dans un même plan vertical;

fig. 92



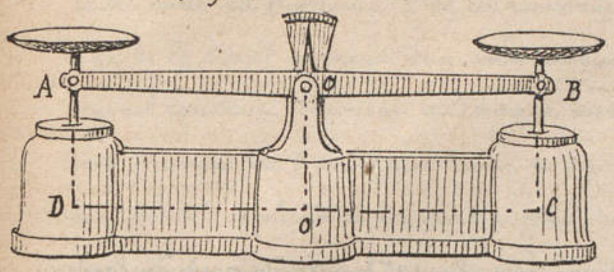
Dans la position normale le système forme un rectangle; si on le fait tourner autour des axes, il se transforme en un parallélogramme A'B'C'D', toujours situé dans le même plan vertical. On peut remarquer que les côtés AD, BC sont toujours verticaux et n'ont qu'un simple mouvement de translation, (Cinématique, p. 32) ils sont dans des conditions identiques à celles du mouvement de la bielle d'accouplement des roues de locomotive. Il s'en suit que tout corps invariablement lié à ces côtés verticaux n'aura également qu'un mouvement de translation; ainsi si l'on imagine deux règles nm, rs, ayant même des longueurs inégales, perpendiculaires aux côtés AD, BC; deux poids égaux P, Q appliqués à leurs extrémités s'y feront équilibre quoique agissant en apparence sur des bras de leviers inégaux. C'est comme s'ils agissaient en effet

---

(*) Si on appelle i l'angle B'OB (fig. 90), l'angle IOG' = 90° - i; soit OG' = OG = d, et OB' = OB = OA = l: on a $OI = d \sin. i$, $OK = l \cos. i$, $\frac{OI}{OK} = \frac{d}{l} \text{tang.} i$ d'où $\text{tang.} i = \frac{p.l}{Q.d}$. C'est là la mesure de la sensibilité de la balance. (voir à la fin les notions de trigonométrie.)

aux points n, r ; Les travaux de ces poids sont égaux et opposés pour tout déplacement du système ; car l'élévation verticale de la droite nm passant en $n'm'$ est égale à l'abaissement vertical de la droite rs passant en $r's'$ et par suite le travail de P est égal et opposé au travail de Q : donc les forces P et Q se font équilibre.

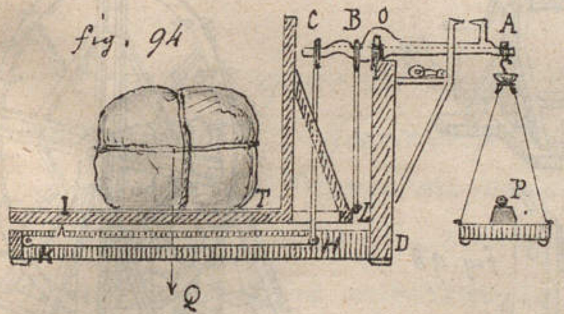
fig. 93.



Le système dont il vient d'être question est fréquemment utilisé dans la pratique ; la partie inférieure du système articulé est enfermée dans un massif en fonte, et le fléau supérieur AB est seul visible ; les tiges verticales AD, BC, sont surmontées de plateaux qui restent horizontaux dans toutes les positions de l'appareil, en vertu de ce que nous venons de dire.

71. Balance de Quintenz ou Bascule. Dans le commerce, pour les pesées courantes et spécialement pour les fardeaux un peu lourds, on se sert de la bascule dont la disposition est due à Quintenz. On la rencontre dans toutes les gares des chemins de fer pour la pesée des bagages.

fig. 94



La fig. 94 représente une coupe de la bascule : AB est un levier mobile autour d'un axe horizontal O relié à un batis D ; CH est une tringle soutenant l'extrémité H d'un levier inférieur KH relié au bâtis ; BL est une autre tringle également attachée au levier AB, et soutenant en L un tablier T sur lequel on place le corps à peser. Ce tablier repose en outre sur un axe horizontal I lié au levier KH. L'extrémité A supporte un plateau dans lequel on met les poids marqués. Le tablier T est muni d'une tablette verticale reliée au point d'articulation L de la tringle BL par une jambe de force N.

Pour nous rendre compte de la manière dont les forces en jeu dans cet appareil se font équilibre, réduisons le par la pensée à une figure plane idéale.

fig. 95.

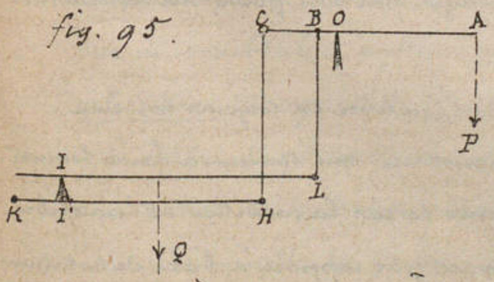


fig. 95. supposons pour fixer les idées que $OB = \frac{1}{5}$ de OC, et que $KI' = \frac{1}{5}$ de KH ; dans un mouvement de rotation autour de l'axe O le déplacement de B est le $\frac{1}{5}$ de celui de C, et par suite le point L du tablier s'élève de la $5^{ème}$ partie de l'élévation du point H ; le point I' dont la distance au point K est la $5^{ème}$ partie de KH se soulève donc de la $5^{ème}$ partie de l'élévation de ce point H ; son déplacement et par suite celui du point I sur lequel repose le tablier est

donc égal à celui du point I ; le tablier reste donc horizontal et son déplacement vertical est le même que celui de la tringle BI et du point B lui-même ; tout se passe donc comme si le poids Q placé sur le tablier était suspendu directement au point B ; le travail de ce poids Q dans un déplacement angulaire ω du levier AB sera donc :

$$Q \times \omega \times OB ;$$

Celui du poids P sera

$$P \times \omega \times OA ,$$

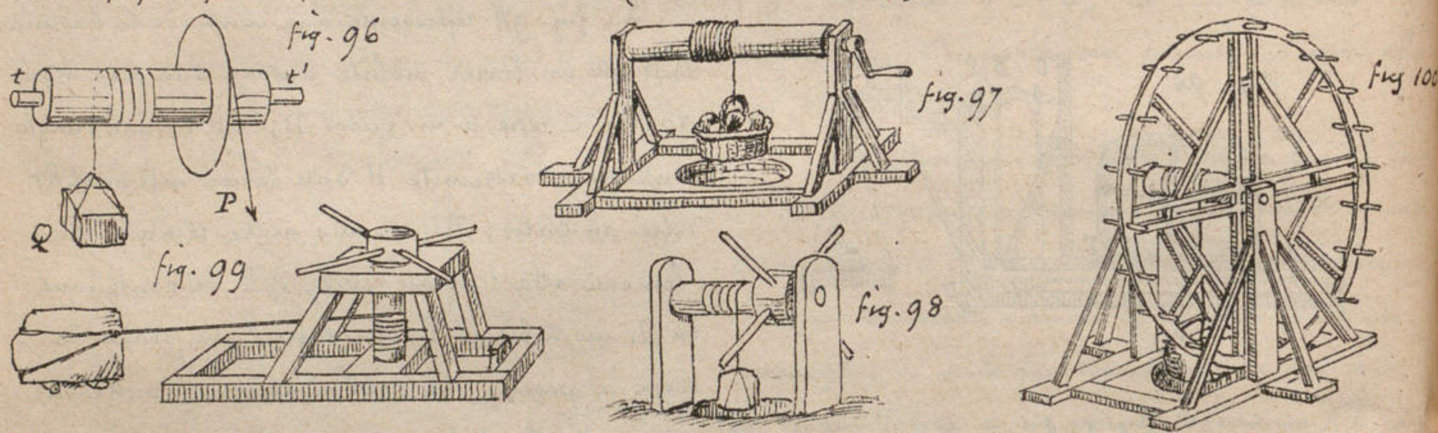
et pour l'équilibre on doit avoir

$$Q \times OB = P \times OA .$$

si donc OB est la 10e partie de OA, le poids P devra être la 10e partie du poids du fardeau.

Les grandes bascules destinées au pesage des voitures sont au 100ème.

72. *Equilibre et mouvement uniforme du Treuil*. Ainsi que nous l'avons vu dans le cours de Cinématique (page 53) le treuil se compose toujours essentiellement d'un cylindre sur lequel s'enroule une corde supportant un fardeau Q ; de tourillons cylindriques t, t', d'un rayon beaucoup plus petit reposant sur des coussinets (Voir Cinématique, guides du mouvement de rotation, p. 43)



La puissance P agit, soit tangentiellement à la circonférence d'une roue (fig. 96) ; soit à l'extrémité d'une manivelle dans le treuil des puits (fig. 97) ; soit aux extrémités de barres traversant le corps du cylindre (fig. 98), comme cela a lieu en particulier pour le cabestan (fig. 99) qui n'est qu'un treuil à axe vertical.

Dans le treuil des carrières, nous savons déjà que l'ouvrier agit par son poids sur des chevilles implantées sur la circonférence d'une grande roue. (fig. 100)

Quelle que soit d'ailleurs la forme de l'appareil, le principe de l'équilibre est toujours le même. Nous nous trouvons en présence de deux forces : la puissance et la résistance qui tendent à faire tourner un corps en sens contraire autour d'un axe, et nous savons que dans ce cas la condition de l'équilibre est que le moment de la puissance soit égal au moment de la résistance par rapport à l'axe de rotation ; en d'autres termes il faut que la puissance et la résistance soient en raison inverse des bras de levier sur lesquels elles agissent (n° 59).

Ou bien encore on peut dire (n°. 59) que pour un déplacement élémentaire de l'appareil, le travail de la puissance doit être égal au travail de la résistance.

Mais nous devons reproduire ici les reflexions déjà faites au sujet du levier ; s'il s'agit simplement d'une question d'équilibre le théorème du travail est une pure question de géométrie ; si l'équilibre existe entre la puissance P et la résistance Q, il subsistera sans dépense nouvelle indéfiniment ; tandis que si le treuil se meut d'un mouvement uniforme, le théorème de l'égalité du travail moteur et du travail résistant sera vrai à chaque instant ; mais il y aura une dépense de travail moteur, qui se transformera en travail résistant, et au bout d'un certain temps, soit que la force s'épuise, soit que son point d'application ne puisse plus s'avancer dans sa direction, il faudra avoir encore recours à une source de travail industriel.

—— 73. Remarque. Je ne devrais pas terminer les questions d'équilibre sans parler des charges que les appuis ont à supporter toutes les fois qu'un corps pesant soumis à l'action de puissances et de résistances repose sur un corps fixe ; mais le nombre de ces leçons étant très limité, j'en dirai un mot en parlant du frottement.

10ème Leçon.

Principe général de la transmission du travail dans les machines en mouvement — Différentes périodes du mouvement d'une machine (mise en train, régime, arret) — Enoncé du principe de la transmission du travail pour une période complète — (Equivalence entre le travail moteur et les travaux résistants de toute nature) — Rendement d'une machine — De la nécessité de donner aux machines un mouvement sensiblement uniforme — Volants — Régulateurs — Impossibilité du mouvement perpétuel.

—— 74. *Principe de la transmission du travail dans les machines.*

Les machines industrielles sont des assemblages de pièces liées entre elles par des liens rigides ou flexibles, de telle sorte que lorsqu'on connait le mouvement de l'une de ces pièces on peut en conclure ceux des autres ; c'est là le caractère des systèmes à liaisons complètes. Les forces qui agissent sur un semblable système sont de deux espèces, savoir : celles que l'on peut considérer comme extérieures au système (moteurs, résistance à vaincre) ; et celles que l'on peut considérer comme intérieures, et qui ne sont autres que les réactions mutuelles des diverses pièces les unes par rapport aux autres, et les actions moléculaires qui s'exercent entre tous les points du système.

On appelle les premières, forces directement appliquées, et les secondes forces de liaison.

Pour bien comprendre cette distinction, prenons un des nombreux exemples que nous avons étudiés en cinématique ; une bielle AB fait communiquer une manivelle OA avec une tige de piston BC, et transmet ainsi le mouvement de celui-ci à celle là; l'action de la tige BC sur la bielle pourrait fort bien être remplacée par une force égale appliquée en

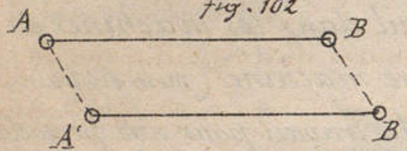
fig. 101

B; de même la réaction de la manivelle sur la bielle pourrait être remplacée par une force équivalente appliquée en A; moyennant l'adjonction de ces deux forces, on pourrait considérer la bielle comme un corps entièrement libre soumis d'une part à l'action de son poids, qui est une force extérieure, de l'autre à celle des deux forces destinées à remplacer les liaisons en A et B et que l'on nomme forces de liaison ou intérieures.

La propriété caractéristique des forces de liaison c'est qu'elles existent par groupes de deux égales et contraires: en effet, si la tige du piston exerce en B une action sur la bielle, la bielle exerce à son tour une réaction égale et opposée; d'où il suit déjà que pour les forces de liaison qui sont appliquées ainsi sur un même point, la somme de leurs travaux dans tout déplacement du système est nulle.

Les actions moléculaires, ou attractions et répulsions s'exerçant entre les diverses molécules d'un corps, sont encore égales et opposées, mais non pas les mêmes point d'application.

fig. 102



Si une molécule A attire ou repousse une molécule B, réciproquement B attire ou repousse A. On démontre que le travail de cette attraction ou de cette répulsion dépend uniquement de l'accroissement ou de la diminution de distance des deux molécules dans le mouvement général du corps; ainsi, si par suite d'un petit déplacement du corps le groupe A, B est venu en A'B', le travail de cette action mutuelle est le produit de sa grandeur par la différence $A'B' - AB$. en sorte que si la distance n'a pas varié le travail est nul; ou bien si la distance après avoir varié reprend sa valeur primitive le travail final sera encore nul. Il s'en suit que dans un corps solide parfait, les travaux des forces moléculaires seraient nuls; en réalité nous savons qu'il n'existe pas de pareils corps, d'où il suit que les travaux des forces moléculaires ne sont pas absolument négligeables, et ils peuvent même devenir assez considérables.

Par l'introduction de ces forces, nous pourrons considérer tout point d'une machine comme libre et isolé, à condition de le regarder comme sollicité d'une part, par les forces extérieures qui peuvent lui être appliquées, et d'autre part par les forces intérieures ou moléculaires qui le relient aux autres points du système.

Pour chaque point ainsi isolé, nous savons que dans un déplacement quelconque, le travail de toutes les forces qui lui sont appliquées, est l'équivalent de la puissance vive acquise pendant le temps correspondant. On aura donc pour ce point :

$$\frac{1}{2}(mv^2 - ma^2) = \mathcal{E}.F_e + \mathcal{E}.F_i \ ;$$

relation qui est une conséquence immédiate de celle que nous avons établie au n°. 37 ; F_e désigne la résultante des forces extérieures appliquées au point de masse m, F_i la résultante des forces intérieures appliquées au même point.

Si l'on écrit toutes les relations pareilles pour tous les points du système, et qu'on ajoute d'une part tous les accroissements de puissance vive, d'autre part tous les travaux des forces tant extérieures qu'intérieures, on aura le principe suivant :

Dans toute machine ou assemblage de corps en mouvement l'accroissement total de puissance vive pendant un certain temps est l'équivalent de la somme des travaux de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures qui agissent sur le système en mouvement pendant le même temps.

Nous pouvons traduire ce principe par la relation,

$$S.\frac{1}{2}mv^2 - S.\frac{1}{2}ma^2 = S.\mathcal{E}.F_e + S.\mathcal{E}.F_i$$

(La lettre S indiquant qu'il faut faire la somme des quantités analogues à celle qui l'accompagne ; c'est une manière abrégée d'écrire ce qui est en toutes lettres dans l'énoncé précédent)

Toute la théorie des machines est renfermée dans cet unique principe, que l'on appelle : principe de la transmission du travail.

Pour en comprendre l'application, partageons les forces extérieures qui agissent sur la machine en forces motrices et forces résistantes, et par suite le travail des forces en travail moteur et travail résistant.

Nous désignerons par T_m, le travail moteur, par T_r, le travail résistant (renfermant le travail des résistances de toute espèce) pendant une certaine période du mouvement de la machine, et nous savons que le travail résistant ayant pour effet le ralentissement du mouvement dû au travail moteur, doit être retranché de ce travail moteur si l'on veut obtenir l'accroissement équivalent de puissance vive. Alors la relation précédente peut être écrite :

$$(1) \qquad S.\frac{1}{2}mv^2 - S.\frac{1}{2}ma^2 = T_m - T_r \ .$$

Au moyen de cette relation nous allons étudier ce qui se passe dans les différentes périodes du mouvement d'une machine.

75. Première période. — Mise en train. Au moment où le moteur commence à agir, toutes les pièces de la machine sont au repos, leur vitesse initiale est nulle ; la relation (1) peut alors s'écrire.

$$S.\frac{1}{2}mv^2 = T_m - T_r \quad ,$$

puisque les vitesses désignées généralement par la lettre a sont nulles. Ou bien on peut encore écrire

$$T_m = S.\frac{1}{2}mv^2 + T_r \ ;$$

Sous cette forme de l'équation du travail on voit que le moteur doit, dans cette période de mise en train produire assez de travail pour vaincre le travail résistant et pour amener les diverses pièces de la machine à avoir des vitesses convenables. Ce n'est qu'une portion du travail moteur qui se transforme en travail résistant dans cette première période, le reste se transforme en puissance vive. Si donc le travail résistant est constant dans l'unité de temps, il faudra développer dans les premiers instants un excès de travail moteur.

S'il s'agit par exemple d'un moteur animé (cheval. bœuf. &) il devra donner un coup de collier; s'il s'agit d'un moteur hydraulique ou d'une machine à vapeur, il faudra donner plus d'eau ou de vapeur jusqu'à ce que la vitesse normale ait été obtenue.

—— 76. *Deuxième période — Travail normal.* Une fois que les diverses pièces de la machine ont acquis la vitesse voulue, il peut se faire que cette vitesse se maintienne constante et que le mouvement de la machine reste uniforme; tel est le cas des moulins à blé, et en général des mécanismes mus par un moteur hydraulique et dont le mouvement consiste surtout dans une rotation.

A partir du moment où il en est ainsi l'accroissement de vitesse et de puissance vive étant nul, le travail moteur dépensé est exactement l'équivalent du travail résistant produit; la relation (1) donne en effet:

$$T_m - T_r = 0$$

C'est là la relation caractéristique de la période correspondante à la vitesse de régime.

Dans les machines à vapeur fixes, le mouvement est donné à l'arbre de rotation par le piston qui n'a pas un mouvement continu et dont la vitesse varie périodiquement; il en résulte que le mouvement de rotation de l'arbre de couche ne peut être uniforme, comme celui d'une roue hydraulique; seulement la vitesse reste comprise entre certaines limites, et elle repasse à chaque tour par les mêmes valeurs; de sorte que si l'on considère un intervalle comprenant un nombre entier de tours, les vitesses ayant au commencement et à la fin de l'intervalle les mêmes valeurs, on aura encore pour cette période,

$$T_m - T_r = 0$$

Enfin dans les machines où l'on n'observe pas même cette périodicité de la vitesse, dans les locomotives par exemple, on peut remarquer que la variation de la vitesse à partir d'un certain moment est comprise entre des limites qui ne sont pas très considérables, et par suite la différence $T_m - T_r$ ne s'écarte pas sensiblement de zéro pour cette seconde période de mouvement.

On peut donc dire en général que la période de la vitesse de régime d'une machine est caractérisée par l'équivalence entre le travail moteur dépensé et le travail résistant développé.

—— 77. *Troisième période — Arret de la machine.* Lorsqu'on cesse de fournir du travail moteur à la machine, la relation (1) devient :

$$- S.\frac{1}{2} m a^2 = - T_r$$

a désignant les vitesses à cet instant ; car les vitesses finales v de cette périodes sont toutes nulles, puisque la machine arrive au repos.

On conclut de là

$$T_r = S.\frac{1}{2} m a^2 .$$

Au commencement de cette période, la machine en mouvement possède en effet une certaine quantité de puissance vive ; on supprime le travail moteur, mais les résistances continuent à agir pour ralentir le mouvement, et c'est la puissance vive qui représentait l'épargne d'une certaine quantité de travail moteur (celle qui avait été dépensée en trop dans la première période) qui se transforme à son tour en travail résistant.

—— 78. *Résumé*. Il résulte de ce qui précède, que pour l'ensemble des trois périodes du mouvement d'une machine, c'est-à-dire en la considérant comme partant du repos pour y revenir, on aura équivalence complète entre le travail moteur total et le travail résistant total, et cela quelle qu'ait été la vitesse de la machine pendant ce temps, quelle que soit la complication ou la simplicité des mécanismes.

Nous avons une remarque importante à faire au sujet des résistances que la machine doit vaincre. Il y a d'abord, en premier lieu, la résistance principale que l'on a en vue de vaincre ; c'est par exemple le grain que l'on veut moudre, le bois ou le fer que l'on veut scier ou raboter, etc... ces résistances portent le nom de résistances utiles, ou plutôt c'est la portion de travail employé à les vaincre que l'on doit désigner par le nom de travail utile, ou de travail utilisé par la machine.

Mais indépendamment de ces résistances il y en a de nuisibles qui absorbent en pure perte une notable partie du travail dépensé ; ce sont les frottements, la raideur des liens flexibles, les vibrations, les chocs, etc ... ; on les désigne ordinairement sous le nom de résistances passives.

Il résulte de là que le travail résistant total que nous avons désigné d'une manière générale par T_r se décompose en deux parties, le travail utile T_u, c'est-à-dire le travail industriel utile que l'on a pour objet de produire, et le travail nuisible T_p.

Alors l'équation générale de la transmission du travail pourra s'écrire ainsi :

$$S.\frac{1}{2} m v^2 - S.\frac{1}{2} m a^2 = T_m - T_u - T_p ,$$

ou

$$T_u = T_m - T_p - \left(S.\frac{1}{2} m v^2 - S.\frac{1}{2} m a^2 \right) .$$

Ce qui peut s'exprimer en disant que le travail utilisé est l'excès du travail moteur sur le travail des résistances passives et sur l'accroissement de la puissance vive du système.

—— 79. *Rendement d'une machine* – Si l'on divise tous les termes de la relation précédente par T_m, il vient :

H. Durrande, mécanique 10e flle

$$\frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_p}{T_m} - \frac{1}{T_m}\left[S.\frac{1}{2}mv^2 - S.\frac{1}{2}ma^2 \right].$$

Le rapport du travail utile au travail moteur total fourni par la source de travail dans le temps correspondant est ce qu'on nomme le rendement de la machine ; c'est ce qui en constitue la valeur industrielle.

Or la relation précédente montre que ce rapport est toujours moindre que l'unité, puisqu'il faut en déduire le rapport du travail des résistances et de l'accroissement de puissance vive au travail moteur ; le rendement n'est donc qu'une fraction exprimée ordinairement en centièmes, dont la grandeur permet d'apprécier la bonté de la machine et les perfectionnements qui restent à obtenir.

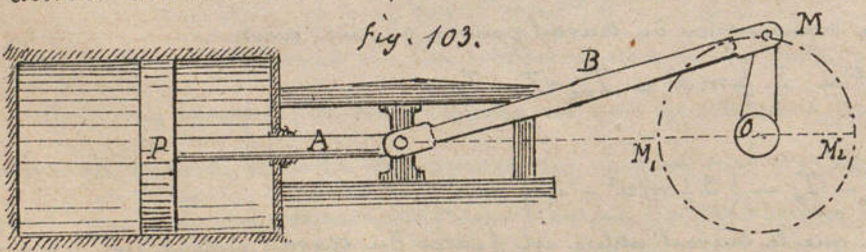
On considère comme excellentes les machines qui rendent en travail utile les 0,50 ou 0,60 de la quantité d'action absolue fournie par le moteur. Les machines dont les mécanismes sont les plus compliqués ne rendent souvent pas même $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{20}$ de cette quantité d'action.

80. *De la nécessité de donner aux machines un mouvement sensiblement uniforme*. L'expression du rendement montre que sa valeur sera d'autant plus grande que la variation de puissance vive sera moindre ; il faut donc, autant que possible faire en sorte que lorsque les diverses pièces de la machine ont atteint la vitesse de régime, cette vitesse se maintienne à peu près constante. Nous verrons d'ailleurs qu'il y a pour chaque moteur une vitesse qui convient au maximum d'effet à obtenir ; on ne doit donc pas s'écarter sensiblement de cette vitesse. D'ailleurs on y gagnera au point de vue de la conservation des mécanismes qui sont construits en vue d'efforts déterminés à supporter.

Cette constance dans la vitesse pourra facilement être obtenue dans les machines mues par un moteur hydraulique, et dont les pièces principales ont un mouvement de rotation.

Mais dans les machines à vapeur, il y a des causes de variation de vitesse inhérentes à ces machines elles-mêmes. En effet, si nous considérons une des dispositions les plus simples, celle des machines à vapeur horizontales, des locomotives, que l'on nomme machines à action directe, voici ce qu'on observe.

Fig. 103.

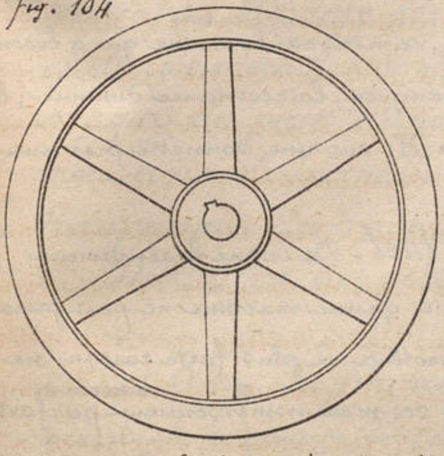


Le moteur agit sur le piston P qui a un mouvement alternatif et dont la vitesse varie périodiquement à chaque course ; ce mouvement, qui ne saurait être uniforme, se transmet de la tige du piston maintenue par des glissières, à l'arbre de couche O au moyen d'une bielle B. L'effort exercé par la tige sur la bielle varie évidemment avec l'inclinaison de celle-ci sur la direction AO, et par suite la force qui agit sur la manivelle M est donc éminemment variable et il y a deux positions opposées M_1 M_2 du bouton de la manivelle pour lesquels l'effet de la bielle sur la manivelle est nul ; c'est ce qu'on nomme les points morts. Il pourrait même arriver, si le bouton se trouvait en un de ces points au moment de la mise en train, que la machine ne put fonctionner.

De même que l'action du moteur peut changer, celle des résistances peut varier également. On a donc dû chercher un moyen de prévenir les variations de vitesse qui peuvent en résulter ou du moins de les maintenir dans des limites assez restreintes.

—— 81. *Volants*. Toute variation dans le travail moteur qui n'est pas accompagnée d'une variation égale du travail résistant se traduit par un accroissement de puissance vive ; or, la puissance vive étant en raison composée des masses et des carrés des vitesses, un même accroissement de puissance vive se traduira par une variation d'autant moins sensible de vitesse qu'elle se repartira sur une masse plus considérable ; et il en sera encore de même si le travail moteur restant constant le travail résistant vient à augmenter. Réciproquement si l'on a emmagasiné l'excès du travail moteur sur le travail résistant sous forme de puissance vive répartie sur des masses considérables, on pourra par contre sans trop faire varier la vitesse de la machine lui reprendre une notable portion de sa puissance vive pour la transformer en travail résistant si l'action du moteur vient à faiblir.

Fig. 104



Les volants sont des roues d'une masse considérable montés sur l'arbre de couche de la machine ; toute leur masse est surtout portée vers la circonférence, et la raison est facile à comprendre.

La vitesse absolue v d'un point situé à une distance r de l'axe pour une vitesse angulaire de rotation ω est $r\omega$; (Cinématique p. 33) la force vive de ce point est :

$$mv^2 = mr^2 . \omega^2 \; ; \quad (*)$$

Comme la vitesse angulaire est commune à tous les points de la roue, la force vive totale est le produit du carré de la vitesse angulaire ω^2 par la somme des produits des masses par les carrés de leurs distances à l'axe. Donc plus les masses seront éloignées du centre et plus la force vive du volant sera grande. Cependant il y a des limites à cet accroissement de diamètre, et elles sont imposées par des considérations de solidité ; la réaction d'inertie exercée par la masse circulaire sur les bras est énorme et si ceux-ci sont trop faibles, ils peuvent se briser.

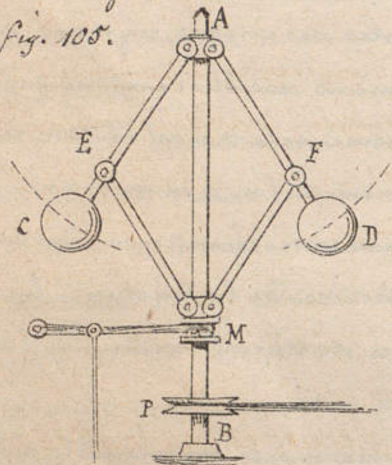
(*) La force vive du volant est $\omega \times S.mr^2$; cette dernière somme $S.mr^2$ est ce qu'on appelle le moment d'inertie du volant ; on peut le représenter par la masse totale M du volant, multipliée par le carré d'un certain rayon R que l'on sait calculer. La force vive a donc pour expression :

On comprend donc facilement que les volants soient des réservoirs de force vive ; ils reçoivent l'excès de travail et comblent le déficit en restituant la force vive qu'ils avaient absorbée. Ils aident à franchir les points morts.

A défaut de volant on se sert parfois de masses pesantes excentriques ; tel est le cas du tour à pédale.

—— 82 – *Régulateurs* – Un autre moyen de régulariser le mouvement d'une machine lorsque l'action du moteur et celle de la résistance sont susceptibles d'éprouver des variations, c'est d'adapter à la machine certains organes qui participent à son mouvement et qui peuvent servir à régler l'action du moteur. Le plus simple des régulateurs est celui que représente la fig. 105 ;

fig. 105.



Il est connu sous le nom de régulateur à force centrifuge. Un axe vertical AB reçoit de l'arbre principal un mouvement de rotation ; des boules C, D terminent les tiges AC, AD, qui peuvent s'écarter de la verticale à la manière d'un pendule ; aux points E, F, sont articulés deux autres tiges EM, FM qui soutiennent un manchon M pouvant glisser le long de la tige verticale ; lorsque le mouvement de la machine vient à s'accélérer, les boules s'écartent (n° 9) et le manchon se soulève. S'il s'agit d'une machine à vapeur le mouvement du manchon est transmis au moyen de leviers coudés à une clef qui ferme partiellement le tuyau qui conduit la vapeur. S'il s'agit d'un moulin à eau, ce n'est pas le moteur qui a besoin d'être réglé, c'est la résistance ; lorsque le grain à moudre vient à manquer, la résistance diminue, le mouvement s'accélère et le régulateur agissant par son manchon M sur une sonnette prévient le meunier de cette circonstance.

—— 83 – *Impossibilité du mouvement perpétuel.* De ce que le rendement d'une machine est toujours une fraction inférieure à l'unité, il résulte qu'une machine ne peut jamais rendre sous forme de travail utile tout ce qu'elle a reçu en travail moteur ; à plus forte raison ne pourra-t-elle jamais rendre plus qu'elle n'a reçu quand bien même ses mécanismes seraient parfaits, c'est-à-dire quand bien même la machine n'absorberait pour elle-même aucune partie de ce travail moteur. Un poids tombe d'une certaine hauteur, le travail de cette chute peut être utilisé ; mais quel que soit le mécanisme que l'on emploie on pourra tout au plus utiliser ce travail à l'élévation d'un poids égal à la même hauteur, à condition d'employer une machine parfaite, et de

---

$MR^2.\omega^2 = I.\omega^2$, en appelant I le moment d'inertie. L'accroissement de force vive du volant pour un accroissement $\omega'-\omega$ donné à la vitesse angulaire, sera $I \times (\omega'^2 - \omega^2)$; soit t_m le travail moteur en excès – ; on a (n° 74) $t_m = \frac{1}{2}(\omega+\omega')(\omega'-\omega)$; donc, $\omega'-\omega = \frac{2t_m}{I.(\omega+\omega')}$.
ce qui montre bien que la variation de vitesse est en raison inverse du moment d'inertie du volant, et de la vitesse moyenne.

ne lui faire exécuter aucun autre travail. Or comme il n'y a pas de machines dans lesquelles les pertes de travail puissent être évitées, on voit qu'il n'est pas possible de reproduire intégralement le travail primitivement dépensé sur une machine; il est donc également impossible de faire travailler utilement une machine sans avoir recours à une source de travail indépendante de la machine, en un mot sans dépenser quelque chose.

Or, qu'est-ce que le mouvement perpétuel? La recherche du mouvement perpétuel avait pour objet la découverte d'un mécanisme qui, tout en produisant un effet utile aurait reproduit en même temps le moteur et par suite le travail moteur; les considérations précédentes montrent que cette recherche est une chimère.

Tout constructeur de machines industrielles doit se préoccuper d'augmenter le rendement de ses machines par une bonne confection, en évitant surtout les complications inutiles des mécanismes; mais vouloir aller au delà, c'est de l'ignorance et de la folie.

11eme Leçon.

Des résistances passives — Frottement; ses lois au départ et pendant le mouvement — Raideur des cordes — Résistance des milieux - lois de cette résistance - effets considérables qu'elle produit — Chocs et vibrations moléculaires et calorifiques des pièces d'une machine — Rappel du premier principe de la théorie mécanique de la chaleur - Indication de sa démonstration tirée du principe de la transmission du travail.

Utilisation des résistances — Freins — Marche de l'homme - Propulseurs.

— 84. *Résistances passives.* Après avoir indiqué comme je l'ai fait dans la leçon précédente, le principe fondamental de la transmission du travail dans les machines, il semblerait assez naturel de s'occuper des moteurs qui les mettent en mouvement. Je crois cependant préférable de parler en premier lieu des résistances qui absorbent en pure perte une partie du travail moteur, et qui tiennent le plus souvent à la constitution même de la machine. Cette étude est intéressante à tous égards, et elle nous conduira à des résultats extrêmement importants.

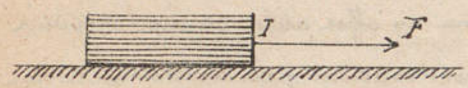
Les résistances passives inhérentes à la machine elle-même sont: la résistance au glissement des pièces en contact ou frottement de glissement; la résistance au roulement ou frottement de roulement; la raideur des cordes ou des liens flexibles (courroies) qui font partie des transmissions, les vibrations moléculaires et calorifiques.

Les résistances extérieures à la machine sont la résistance des milieux dans lesquels elle se meut.

85. Frottement de glissement – ses lois au départ et pendant le mouvement. Comme je viens de le dire le frottement de glissement est la résistance qui s'oppose au mouvement de deux pièces qui se touchent.

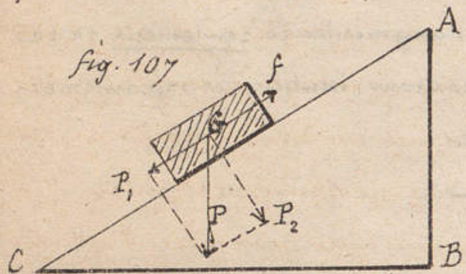
Lorsqu'un corps pesant repose sur un plan horizontal, son poids étant détruit par la résistance du plan, il semble que la plus petite force de traction F devrait suffire pour le déplacer ; on sait cependant que l'on éprouve une certaine résistance à le faire glisser, et cette résistance se manifeste non seulement au départ mais encore pendant le mouvement quoique généralement avec un moindre degré d'intensité.

fig. 106.



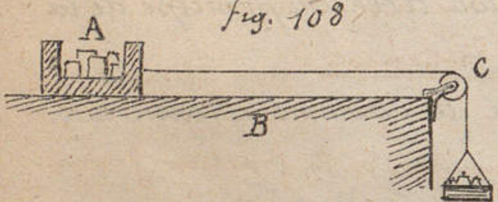
Considérons encore un corps pesant reposant par une surface plane sur un plan incliné ABC ; ce corps soumis à l'action de son poids devrait pour toute inclinaison du plan glisser le long du plan, et cependant on sait qu'il n'en est rien, et qu'il faut que le plan ait une inclinaison convenable pour que le glissement s'opère ; cela indique donc l'existence d'une force qui provient de l'adhérence entre les surfaces du corps et du plan et qui s'oppose au mouvement ; au moment où, pour une inclinaison convenable du plan, le corps se met en mouvement le frottement agit comme une force égale et contraire à la composante P_1 du poids du corps.

fig. 107



Pour déterminer les lois du frottement, Coulomb, en 1781, et en 1831 le Général Morin, ont entrepris des expériences dont voici le principe :

fig. 108



Une caisse chargée de poids est mise en mouvement sur un plan horizontal au moyen d'un cordon qui passe sur une poulie et supporte un plateau destiné à recevoir des poids. Le principal perfectionnement apporté par Mr. Morin aux expériences de Coulomb consiste dans l'emploi d'un disque centré sur la poulie et sur lequel une pointe animée elle-même d'un mouvement de rotation uniforme traçait la loi du mouvement (Voir Cinématique p. 97).

En étudiant les résultats d'un grand nombre d'expériences on est parvenu aux résultats suivants.

Le frottement pendant le mouvement est :

1°. Proportionnel à la pression qui s'exerce entre les surfaces en contact ;

2°. Indépendant de l'étendue de ces surfaces.

3°. Indépendant de la vitesse du mouvement

Le frottement au départ est, de même :

1°. Proportionnel à la pression

2°. Indépendant de l'étendue des surfaces de contact

En outre, pour les corps très durs qui se pénètrent difficilement, le frottement au départ est sensiblement le même que pendant le mouvement ; tandis que pour les corps compressibles comme le bois, le frottement au départ est plus considérable que pendant le mouvement ; il dépend même du temps plus ou moins long qu'a duré le contact.

Le frottement dépend énormément de la nature des surfaces en contact ; le frottement est presque nul entre les molécules liquides, c'est pourquoi l'interposition d'un liquide entre les surfaces frottantes diminue considérablement le frottement. De là l'effet des enduits ; seulement il y a remarquer que les lois expérimentales trouvées précédemment sont modifiées par la présence d'un enduit. Ainsi la vitesse modifie la valeur du frottement. Comme règle générale, on peut dire que le meilleur enduit est le plus <u>fluide</u> ; il y a par exemple avantage à remplacer la graisse par l'huile, l'huile par l'eau, l'eau par l'air ; il y a une condition cependant, c'est que la vitesse soit assez grande pour que dans chaque cas l'enduit ne soit pas expulsé.

Mr. Hirn a constaté une absence presque complète de frottement entre deux pièces frottant sans enduit avec une vitesse énorme ; cette suppression était due à l'action d'un coussinet d'air interposé. Dans le chemin de fer à patins de Mr. Girard, une couche d'eau interposée entre le rail et le patin au moyen d'une pression convenable a également réduit le frottement à une valeur insignifiante.

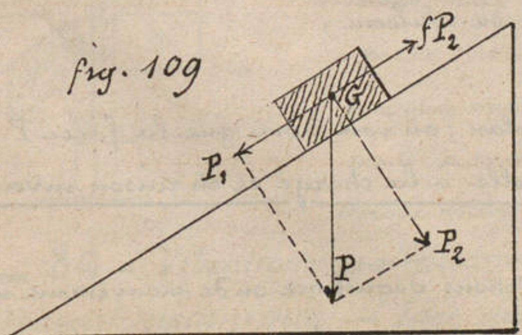
Pour les questions pratiques qui se rattachent au frottement on devra consulter les ouvrages spéciaux.

J'ajouterai toutefois qu'il y a des tables numériques donnant pour chaque couple de substances en contact ce que l'on nomme le <u>Coefficient de frottement</u>.

Nous avons vu que le frottement est proportionnel à la pression normale qui s'exerce entre les deux surfaces ; le <u>coefficient de frottement</u> est le nombre ou la fraction f par laquelle il faut multiplier la pression normale pour avoir la valeur de la force tangentielle qui constitue le frottement.

Pour fixer les idées à ce sujet et montrer en même temps le rôle que joue le frottement dans les questions de mécanique, reprenons l'exemple du plan incliné.

fig. 109



Un corps de poids P glisse sur un plan incliné ; la pression normale qu'il exerce est la composante P_2 qui ne jouait aucun rôle tant que nous faisions abstraction du frottement. Pour tenir compte de cette résistance il faut appliquer au corps en sens contraire du mouvement une force fP_2 qui détruira partiellement l'effet de la force P, si le corps descend ou qui s'ajoutera à elle pour retarder le mouvement si celui-ci est ascensionnel ; car il faut bien remarquer que le frottement agit toujours en sens contraire du mouvement.

S'il s'agit par exemple d'un morceau de bois de chêne glissant sur un plan également en chêne et sans enduit, le coefficient de frottement serait $0,48$, ce qui veut dire que la force de frottement serait $0,48 \times P_2$; avec un enduit ordinaire (suif) la valeur de f tomberait à $0,08$. On voit tout de suite par ce simple exemple l'importance des enduits.

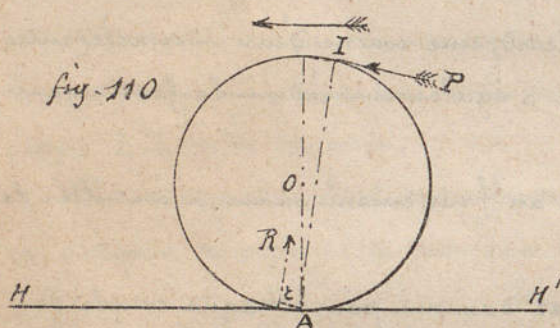
Le coefficient au départ pour les mêmes corps (sans enduit) serait de $0,62$.

Le frottement joue un rôle considérable dans l'équilibre ou le mouvement du treuil (frottement des tourillons sur les coussinets), de la vis (Impossibilité de transformer une pression dans le sens de l'axe en un mouvement de rotation, par suite des frottements énormes qui naissent de cette pression). Mais je ne puis traiter ces questions dans un cours aussi élémentaire.

Il faudra tenir également un grand compte du frottement dans les engrenages.

86. Frottement de roulement. Lorsqu'un corps de forme cylindrique est posé sur un plan horizontal, la réaction semble être normale et passer par l'arête de contact qui est l'axe instantané de rotation du cylindre. Le moment de cette réaction étant nul, la plus petite force tangentielle appliquée au rouleau devrait le mettre en mouvement. Or on constate qu'il faut un certain effort ; il y a une résistance au roulement qui provient de ce que sous la pression du corps, il y a une déformation produite, et la réaction semble partir d'un point situé un peu en avant de l'arête de contact, relativement au sens du mouvement ; le moment de cette réaction R est $R \times r$; et si on appelle P l'effort nécessaire pour mettre le rouleau en mouvement, cet effort étant appliqué dans le voisinage de la partie supérieure du rouleau, on doit avoir au départ, en égalant les moments de la puissance et de la résistance.

fig. 110



$$P \times OI = R \times r .$$

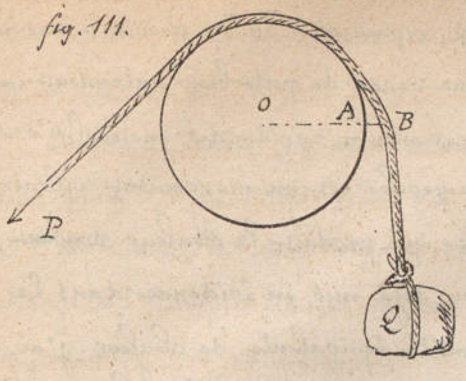
D'où, comme OI est sensiblement le diamètre D du rouleau,

$$P = \frac{R \times r}{D} ;$$

R est la réaction ou la charge du rouleau sur le plan ; on voit donc que la force P qui mesure la résistance au roulement est proportionnelle à la charge et en raison inverse du diamètre du rouleau.

87. Raideur des cordes. Les conditions d'équilibre ou de mouvement uniforme de la poulie, du treuil et de ses modifications supposent que les cordes qui soutiennent les fardeaux et s'enroulent sur ces machines sont parfaitement flexibles et prennent exactement la courbure de ces corps ; or il n'en est pas ainsi par suite de la raideur des cordes. Si la corde qui supporte un fardeau Q est très raide, il est aisé de comprendre qu'elle ne prendra pas immédiatement la courbure du cylindre sur lequel elle doit s'enrouler, ainsi que le montre d'une manière très exagérée la fig. 111 ; il en résulte que le fardeau Q agit à l'extrémité d'un bras de levier plus long qu'on ne le suppose dans la théorie ; le moment de la résistance étant plus grand, il faut donc que la puissance soit plus grande aussi qu'on ne le suppose d'après les conditions d'équilibre connues.

fig. 111.

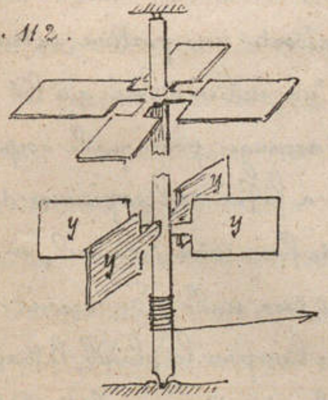


Il en est ainsi des courroies sans fin qui passent sur des tambours.

88 – Résistance des milieux. Tout corps qui se meut dans un fluide comme l'eau, l'air, éprouve de sa part une résistance qui tend à lui faire perdre son mouvement. Il est facile de comprendre que le mouvement du corps se communique aux molécules voisines du fluide ; ce qui ne peut avoir lieu sans une perte de puissance vive. La résistance des milieux modifie considérablement le mouvement des corps qui s'y meuvent, et cette modification est d'autant plus sensible que la densité du milieu est plus considérable par rapport à celle du corps. Cette résistance dépend des pressions que tout fluide exerce sur les corps qui y sont plongés, pressions qui à l'état statique ont pour résultante une force verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du fluide déplacé ; mais elle dépend surtout à l'état dynamique de la vitesse du corps en mouvement ; si le mouvement est lent on peut admettre que la résistance est simplement en raison directe ; s'il est assez rapide la résistance devient sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse, la résistance dépend aussi beaucoup de l'étendue des surfaces soumises à cette résistance.

Ce dernier résultat peut être mis en évidence au moyen d'un appareil à ailettes, dont on peut modifier l'inclinaison sur l'axe de rotation ; lorsque le plan de toutes les ailettes est perpendiculaire à l'axe, le mouvement communiqué à ce dernier au moyen d'une corde par exemple, persiste assez longtemps ; mais si on incline leurs plans de manière qu'ils tendent à passer par l'axe (y, y, y, y) le mouvement se ralentit et s'arrête presque immédiatement. L'expérience serait encore plus frappante si on la faisait dans un liquide dont la résistance serait encore plus grande.

fig. 112.



89 – Vibrations moléculaires et calorifiques — Équivalence de la chaleur et du travail mécanique — Idée des méthodes expérimentales employées pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur. Le frottement est certainement une cause importante de perte de force vive dans les machines en mouvement; il ne faut pas toutefois s'en exagérer l'importance, car on arrive aujourd'hui à donner aux pièces des machines industrielles un tel degré de perfection que les frottements sont très-peu sensibles; cependant on ne parvient pas à faire disparaître les pertes de travail, cela tient à ce qu'il y a une cause de perte bien autrement importante; c'est la transformation du mouvement sensible en un mouvement rapide des molécules voisines des pièces en contact; ce mouvement qui se propage de proche en proche est un mouvement vibratoire, analogue aux mouvements des corps sonores; c'est ce mouvement qui produit la chaleur souvent si considérable des pièces qui glissent les unes sur les autres. J'ai déjà mis en évidence dans la 5ème leçon la transformation du travail mécanique en une quantité équivalente de chaleur; j'ai ajouté que cette transformation se faisait dans un rapport constant à raison de 425 kilogrammètres par unité de chaleur produite.

Si la chaleur est le résultat d'un mouvement moléculaire, il faut évidemment une certaine dépense de travail mécanique ou de puissance vive pour le produire, et on s'explique alors aisément que du moment que les pièces d'une machine en mouvement s'échauffent (Ex: arbres et coussinets) il y ait absorption d'une partie de la puissance vive de la machine, et diminution correspondante dans le travail résistant utile produit. Si l'on pouvait évaluer toutes les autres causes de perte de travail dont il vient d'être question, l'excès du travail moteur sur le travail des résistances, pour une période complète du mouvement de la machine, représenterait la puissance vive calorifique produite.

Ceci nous amène à dire un mot des expériences au moyen desquelles on a pu démontrer qu'il y a toujours un rapport constant entre une certaine quantité de travail disparu et la quantité correspondante de chaleur développée et inversement.

Toute quantité de travail dépensée sur un corps doit produire trois effets: 1° un déplacement sensible du corps, d'où résulte un accroissement de puissance vive sensible; 2° une déformation dans laquelle les actions moléculaires produisent un travail résistant qui représente une portion du travail moteur; 3° enfin un mouvement vibratoire des molécules du corps ou d'un milieu éthéré qui les pénètre et qui constitue la chaleur ou puissance vive calorifique. Si l'on s'arrange pour que le corps ne possède pas de déplacement sensible, ou du moins pour qu'il se retrouve à la fin de l'expérience dans une position identique à celle qu'il avait en commençant, l'accroissement de force vive sera nul, et on n'aura pas à s'occuper de la perte de travail moteur correspondante qui sera nulle. En second lieu, si les actions moléculaires ont une très-faible intensité, comme cela a lieu pour le plomb, le travail de ces forces sera peu considérable, et on pourra presque regarder le travail dépensé comme l'équivalent de la puissance vive calorifique produite; il suffira donc de mesurer la température d'une masse de plomb déformée par l'action d'un travail mécanique, avant et après, et la physique enseigne le moyen de déterminer la quantité de chaleur produite.

[L'unité de chaleur est la quantité de chaleur nécessaire pour élever un kilogramme d'eau de 0° à 1°;

la chaleur spécifique d'un corps est la quantité de chaleur nécessaire pour élever un kilogramme de ce corps de 0° à 1°; si la chaleur spécifique d'un corps est de 0,03, la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 40°, la température de 25 kilogrammes de ce corps sera $0,03 \times 40 \times 25 = 30$ unités de chaleur ou 30 calories.]

Au lieu d'écraser par un choc une masse de plomb, imaginons que l'on frotte l'une contre l'autre deux plaques d'acier très-polies qui se retrouvent dans des états identiques à la fin et au commencement de l'expérience; le travail dépensé sera encore représenté ici par la chaleur produite. Car puisque rien n'est changé à l'état des plaques d'acier, il n'y a aucun travail moléculaire effectué; tout se transforme donc en puissance vive calorifique. Il en est encore ainsi dans les expériences où l'on a fait frotter des palettes planes contre un liquide, de l'eau ou du mercure; les palettes étaient mises en mouvement au moyen de la chûte d'un poids, et l'on pouvait évaluer le travail dépensé; on pouvait également mesurer l'échauffement des diverses parties de l'appareil; les résultats d'un grand nombre d'expériences se sont accordés pour montrer qu'il y avait toujours un rapport constant entre le travail dépensé et la quantité de chaleur créée.

Mais c'est surtout l'étude des gaz qui a permis de déterminer avec exactitude l'équivalent mécanique de la chaleur. Une expérience célèbre a démontré que les fluides gazeux, lorsqu'ils approchent d'un état idéal que l'on désigne sous le nom de Gaz parfait, et auquel s'appliquent les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, jouissent de cette propriété importante : que leur travail moléculaire est nul, par de l'extrême mobilité de leurs molécules. La principale difficulté pour la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur se trouve ainsi écartée, puisqu'il n'y a pas alors à tenir compte de ce travail moléculaire que nous ne pouvions ni évaluer exactement, ni éliminer entièrement. Il résulte de là que la chaleur fournie à un gaz ne peut produire que deux effets : un travail extérieur résultat de l'accroissement de volume qui ne peut se produire qu'en surmontant la pression extérieure et un accroissement de puissance vive calorifique qui se traduira par une élévation de température; mais si on empêche le gaz de se dilater, si d'autre part on ne lui fournit que la quantité de chaleur nécessaire pour produire la même élévation de température, la différence des quantités de chaleur fournies dans les deux expériences, représentera précisément l'équivalent du travail extérieur accompli dans la dilatation, et on pourra en conclure le rapport qui existe entre l'unité de travail et l'unité de chaleur.

Je reviendrai encore sur cette théorie si importante à propos des moteurs à gaz.

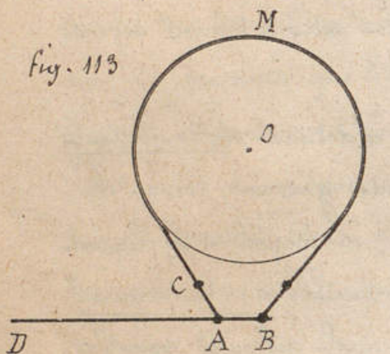
90. *Utilisation des résistances passives.* — Pour compléter cet exposé de l'influence des résistances passives sur le mouvement des machines je dois ajouter qu'on les utilise dans un certain nombre de cas et je vais citer les exemples les plus marquants de cette utilisation.

91. *Freins.* C'est en se basant sur la perte de force vive qui résulte du frottement de deux pièces qui glissent l'une contre l'autre que l'on a songé à employer les Freins qui servent à arrêter

le mouvement d'une machine. Tout le monde connaît la disposition des freins qui servent à enrayer le mouvement des voitures sur une route à pente ; mais c'est dans le mouvement des trains de chemin de fer que l'usage du frein est important. Par suite de la diminution de résistance au roulement résultant de l'emploi des rails, le mouvement d'un train persisterait bien longtemps après que la locomotive aurait cessé de fonctionner, en vertu de la puissance vive accumulée ; pour arrêter le train il faut consommer cette puissance vive sensible, ou du moins la transformer ; c'est alors que les freins fonctionnent utilement ; mais ce qui confirme la théorie mécanique de la chaleur, c'est que nous retrouvons dans l'échauffement des roues et des freins, sous forme de puissance vive calorifique, la puissance vive qui semblait anéantie.

La forme des freins dont il vient d'être question est assez connue pour que je puisse me dispenser d'en donner la description. Je vais indiquer la disposition adoptée dans les treuils à engrenage ou à rochet pour modérer le mouvement de l'appareil lorsqu'il tourne à vide.

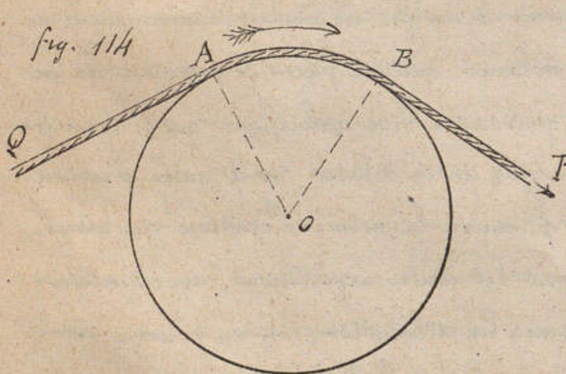
Fig. 113



Un ruban de tôle ou d'acier CMD entoure le cylindre ou une poulie montée sur l'axe tournant et se relie par ses deux extrémités à deux petits bras de levier AC, AB, d'un levier à trois branches, tournant autour d'un point fixe A ; lorsqu'on soulève le grand bras AD le ruban d'acier est serré contre le cylindre ou la poulie et le frottement augmente très-notablement ; en laissant retomber la barre AD, le ruban cesse de presser contre la poulie et le frottement disparaît.

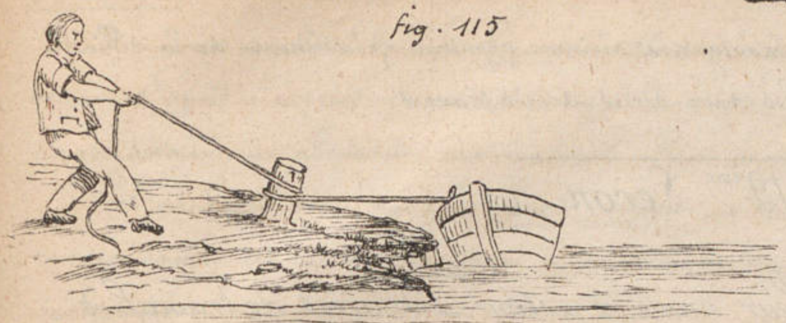
Ceci m'amène naturellement à dire un mot du frottement qui se développe lorsqu'une corde s'enroule sur un cylindre et la part qu'on en tire dans de certaines circonstances.

Fig. 114



Considérons une corde ou une courroie glissant sur un cylindre fixe, et soit AB l'arc qu'elle embrasse ; si la corde se meut dans le sens de la flèche, le frottement peut être considéré comme une force agissant tangentiellement au cylindre en tous les points de l'arc AB, et qui s'ajoute à la résistance Q ; il s'ensuit que cette résistance Q est égale à la puissance qui entraîne la corde diminuée du frottement. Or on démontre que la résistance due au frottement croît très-rapidement avec l'arc embrassé par la corde, car si le frottement pour l'arc égal à 1, est représenté par 3, la résistance due au frottement deviendra 9, 27, 81, pour un arc double, triple, etc...... Il en résulte qu'avec une très-faible résistance Q, on peut, en augmentant le frottement par un enroulement convenable de la corde modérer et même arrêter complètement le mouvement d'un corps. De là l'emploi des piquets cylindriques autour desquels on enroule une corde pour arrêter un bateau, ou pour modérer des grands fûts de boisson dans les encavages. Si la force qui détermine le glissement de la corde pour un tour est 7 fois celle de l'homme qui retient la corde, pour 2 tours elle devra être 49 fois plus grande ; pour 3 tours 343 fois, etc..... ; on voit donc quelle force énorme il faut pour faire glisser la corde lorsqu'elle a fait trois ou quatre tours.

Fig. 115



92. Marche de l'homme. — Vol des oiseaux.

— Les résistances dues au frottement, à la pression des fluides qui sont un obstacle au mouvement des corps sur lesquels elles s'exercent sont cependant indispensables dans certains cas pour déterminer le mouvement des êtres animés. On démontre dans les cours de mécanique rationnelle que le centre de gravité de tout système mobile qui n'est pas sollicité par des forces extérieures reste au repos ou possède un mouvement uniforme, quels que soient d'ailleurs les efforts développés à l'intérieur du système par les diverses parties qui le composent les unes sur les autres. Voici une observation qui peut donner une idée de ce principe important ; quelques efforts que l'on fasse à l'intérieur d'un Wagon, il est clair qu'on ne parviendra pas à le mettre en marche s'il est en repos, ni à modifier son mouvement s'il est en marche. Or les divers mouvements que peut produire un être vivant sont dus à des actions intérieures ; et s'il était abandonné complètement à lui-même sans aucune action du dehors, il lui serait tout aussi impossible de déplacer son centre de gravité, qu'au voyageur de faire avancer son véhicule par des efforts intérieurs.

Si nous considérons par exemple ce qui se passe dans la marche de l'homme, nous verrons que lorsqu'il porte une jambe en avant, l'autre tend à aller en arrière, et c'est ce qui arriverait si elle ne rencontrait la résistance du sol qui agit ici comme une force extérieure ; et on sait bien que lorsque le frottement diminue, la marche devient extrêmement pénible, et impossible même comme dans les temps de verglas ; c'est ce qui arrive encore dans un sol mouvant. Le vol des oiseaux nous offre des remarques toutes semblables ; si un oiseau s'agitait dans le vide, il lui serait impossible de se déplacer, il faut que ses ailes prennent un point d'appui sur la résistance que l'air lui oppose ; de même que l'eau sert d'appui à l'aviron.

93. Propulseurs.

C'est encore sur la résistance due au frottement ou aux milieux dans lesquels se meut un corps qu'est dû l'emploi des propulseurs : aubes de bateaux à vapeur, hélices, etc.. Une hélice qui tournerait dans le vide ou dans un milieu trop peu résistant ne pourrait en rien faire avancer le navire. C'est un phénomène du même genre que ceux que présentent les mouvements des êtres vivants.

La roue motrice de la locomotive est un véritable propulseur qui prend son point d'appui sur la résistance au roulement que présentent les rails, si le frottement du rail diminue par trop la locomotive patine sur place et n'avance pas.

En général on cherche à rendre la résistance des fluides aussi petite que possible lorsqu'elle s'oppose au mouvement, et on y parvient en donnant aux corps mobiles des formes convenables telles qu'ils présentent le moins de surface possible au milieu dans lequel ils se meuvent, tandis que l'on augmente au contraire le plus possible la surface des pièces des propulseurs qui s'appuient sur ces mêmes résistances pour donner le mouvement au corps.

La difficulté d'inventer un système de navigation aérienne provient précisément de la difficulté d'obtenir une différence assez grande entre les deux sortes de résistances.

12ème Leçon.

Des moteurs et de leur meilleur mode d'action. – Sources de travail et leur évaluation. – Cheval-vapeur. – Moteurs animés, maximum d'effet utile. – Moteurs hydrauliques. – Moteurs à gaz. – Second principe de la théorie mécanique de la chaleur. – La chaleur source universelle du travail mécanique.

94. Des moteurs et de leur meilleur mode d'emploi. J'ai déjà énuméré les principaux moteurs employés dans l'industrie ; on peut les diviser en moteurs animés et moteurs inanimés. Mais quelle que soit la nature d'un moteur il y a lieu de rechercher la manière la plus convenable de le faire agir sur la machine, ou ce qui revient au même d'utiliser la quantité de travail mécanique qu'il peut fournir.

Un moteur est donc une source de travail plus ou moins limitée ou qui fournit plus ou moins libéralement, plus ou moins économiquement le travail nécessaire. La source de travail connue est évaluée, (nous allons voir comment), il faudra étudier la disposition la plus convenable à donner aux pièces de la machine destinées à <u>recevoir</u> ce travail, et que l'on nomme <u>Récepteur</u> ; entre le récepteur et les machines-outils, il faudra disposer les <u>Transmissions de mouvement</u> de manière à perdre le moins de travail possible ; quant aux outils, c'est le praticien qui mieux que personne indiquera la meilleure disposition à donner pour que l'ouvrage soit fait d'une manière régulière.

95. Sources de Travail. – Leur évaluation. – Cheval-Vapeur. – La définition du travail mécanique ne contient pas l'idée du temps, et cela est parfaitement rationnel ; la valeur intrinsèque d'un <u>ouvrage mécanique</u> (élévation des fardeaux, travail manuel, etc.) est indépendante du temps employé. Aussi l'unité de travail, le kilogrammètre, est-elle indépendante de l'unité de temps. Mais si l'on veut apprécier la valeur d'une source de travail, le temps doit nécessairement intervenir ; car l'importance de cette source sera d'autant plus grande qu'elle pourra fournir un plus grand nombre de kilogrammètres de travail dans l'unité de temps.

Pour mesurer la valeur d'une source de travail on a pris comme unité le travail de 75 kilogrammètres effectué en une seconde et on a donné à cette unité le nom très-impropre d'ailleurs de Cheval-vapeur. De sorte que si, à la vitesse moyenne de régime, une machine peut fournir 7500 kilogrammètres de travail par seconde, on dira qu'elle est de la force de 100 chevaux.

On voit combien le mot force est détourné de sa signification ordinaire, car on pourrait croire d'après l'expression précédente que la machine pourrait être remplacée par 100 chevaux, ce qui serait une absurdité comme nous allons le voir dans un instant.

Il ne faut voir dans le cheval-vapeur qu'un terme de comparaison qui permet de se rendre compte du travail que peut fournir en un temps donné une machine, un moteur quelconque.

J'ai déjà indiqué Nº 30, en parlant de l'évaluation du travail des forces, comment on peut utiliser le Dynamomètre de Poncelet complété par un appareil à indications graphiques, pour évaluer le travail d'un moteur ; quand on a obtenu ainsi le travail total du moteur pour un certain nombre d'heures, on en déduira le nombre de kilogrammètres produits en une seconde, et le rapport de ce nombre à 75 donnera le nombre de chevaux-vapeur, ou la fraction de cheval-vapeur qui représente la valeur industrielle du travail du moteur. On peut évidemment généraliser cette manière d'opérer.

96. Frein dynamométrique. Le moyen précédent est surtout excellent pour évaluer le travail d'un moteur animé, mais il n'est pas suffisant pour apprécier la valeur industrielle d'une machine à vapeur, d'une machine hydraulique, etc. Ce qu'il faut surtout en ce cas c'est évaluer non pas seulement le travail que la vapeur, ou l'eau de la chute peut fournir, mais le travail disponible sur l'arbre de couche, c'est-à-dire ce qui reste du travail moteur après que les imperfections inhérentes à la machine en ont consommé une partie ; en un mot ce qu'il nous faut, c'est le rendement de la machine, ou le rapport du travail disponible au travail fourni par la source. Voici comment on parvient à cette évaluation.

On supprime les résistances que la machine aurait à vaincre si l'arbre de couche était en communication avec les outils, et on remplace ces résistances par celle d'un appareil agissant par frottement sur l'arbre de couche et que l'on nomme Frein dynamométrique de Prony, du nom de son inventeur.

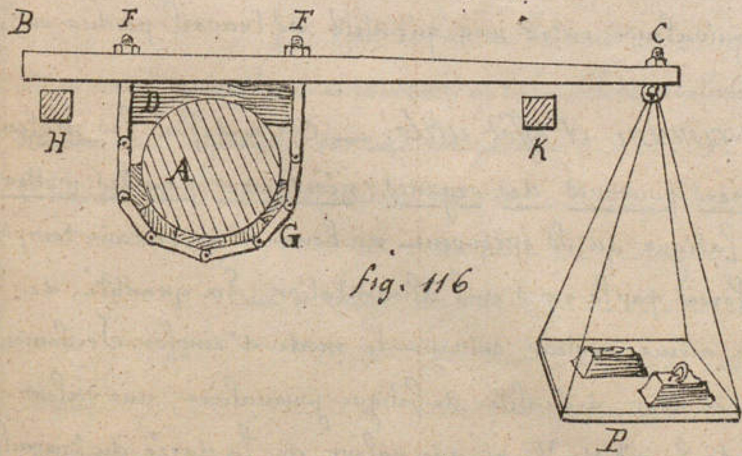


fig. 116

La surface d'un arbre de couche est ordinairement cylindrique ; si cela n'avait pas lieu, il faudrait adapter un manchon en fonte boulonné sur l'arbre et bien centré sur l'axe de rotation. On entoure l'arbre ou le manchon d'une espèce de collier formé d'un morceau de bois D qui l'enveloppe sur une partie de son contour et qui fait corps avec un levier BC en bois, et d'autres morceaux de bois formant coins, dont se trouve garnie une chaîne G, terminée par deux boulons à vis, qui traversent le levier, et que l'on serre plus ou moins au moyen des écrous F.F. On empêche le levier BC de s'écarter par trop de la position horizontale au moyen d'arrêts H, K.

On comprend sans peine qu'au moyen de cette disposition on peut en serrant les écrous, produire un frottement très. considérable sur l'arbre de couche, de telle sorte que l'arbre ayant sa vitesse de régime, ce frottement équivaut aux résistances supprimées. Il suffit alors d'évaluer le travail correspondant à ce frottement et l'on aura ainsi le travail rendu disponible.

Pour évaluer ce travail, empêchons le levier qui tendrait à tourner avec l'arbre de suivre ce mouvement en mettant des poids convenables dans le plateau P. Soit Q la valeur résultante des frottements qui agissent tangentiellement à la circonférence de l'arbre, R le rayon de celui-ci; l la longueur du bras de levier auquel est suspendu le poids P; on aura

$$Q \times R = P \times l; \quad (\text{N}^o\ 59,\ R\ 21)$$

et en multipliant par 6,28, on aura

$$\text{Tr. } Q = \text{T. } P = P \times l \times 6{,}28. \ (\text{N}^o\ 36, 2^o)$$

On aura ainsi le travail pour un tour de l'arbre; par suite il sera facile de connaître celui qui correspond au nombre de tours faits en une seconde, d'où l'on déduira la force de la machine en chevaux.

On comprend dans le poids P le poids de l'appareil, ou du moins la composante de ce poids appliquée en C, et que l'on peut déterminer facilement une fois pour toutes.

Le frein de Prony nous offre un exemple bien remarquable d'un anéantissement apparent du travail de la machine; car nous ne voyons aucun mouvement sensible résulter de celui de la machine; ce mouvement se transforme en effet en un mouvement invisible moléculaire; la force vive perdue devient de la force vive calorifique et la quantité de chaleur développée dans les pièces en contact représente précisément cette perte de travail. Nous retrouvons là une confirmation éclatante du principe de l'équivalence entre une quantité de travail perdue et la quantité correspondante de chaleur créée.

— 97. *Moteurs animés. — Maximum d'effet utile.* — On a défini les moteurs animés (l'homme, les animaux,) des forces pourvues des organes nécessaires pour les mettre en action; ce qui les caractérise, c'est la fatigue qu'ils éprouvent au bout d'un certain temps, et par suite la nécessité de réparer leurs forces par le repos et l'alimentation. La quantité de travail journalière varie beaucoup pour un même moteur suivant le mode d'emploi. Seulement on a remarqué qu'il existe pour chaque moteur, à égalité de fatigue journalière, une valeur de l'effort moyen développé F, une valeur de la vitesse V, et une valeur de la durée du travail D, pour lesquelles l'effet utile est maximum.

F, est le nombre de kilogrammes qui mesure l'effort moyen;

V, est le nombre de mètres parcourus en 1 seconde par son point d'application;

D, la durée du travail de la journée, exprimée en secondes.

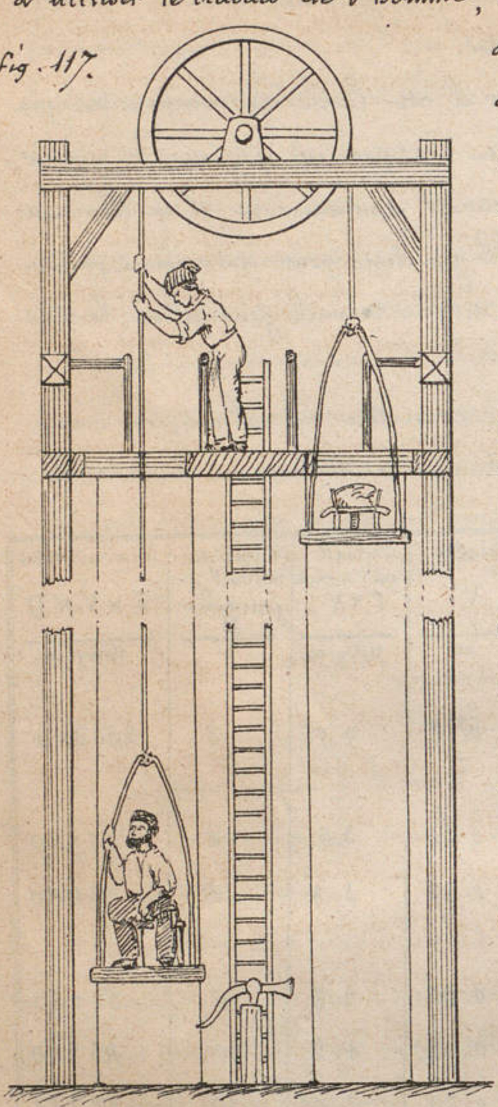
Le travail de la journée aura pour valeur $F \times V \times D$; or il est facile de comprendre que si l'effort développé est plus considérable que celui que peut produire en moyenne le moteur, naturellement la rapidité du mouvement, et la durée du travail diminueront; il en serait de même si l'on augmentait la vitesse, ou la durée du travail. Il y a donc pour des valeurs particulières de F, V, D, qui rendent le produit $F \times V \times D$, c'est-à-dire le travail journalier, le plus grand possible.

Bien entendu c'est l'expérience seule qui peut nous faire connaître ces valeurs, et voici quelques-uns des résultats indiqués par Poncelet (Introduction à la Mécanique Industrielle.)

Nature du Travail	Poids élevé F	Vitesse V	Travail par seconde F×V	Durée du travail journalier D	Travail total F×V×D
1° Élévation verticale d'un poids.	K.g.	m.	Kilog. m.	h.	Kilog. m.
Un homme montant une rampe douce ou un escalier sans fardeau, élevant seulement le poids de son corps. -----	65	0.m15	9.75	8	280800
Un manœuvre élevant des poids avec une corde et une poulie, ce qui l'oblige à faire descendre la corde à vide	18	0.20	3.6	6	77760
Un manœuvre élevant des poids en les soulevant avec les mains	20	0.17	3.4	6	73440
Un manœuvre élevant des poids sur son dos du haut d'une rampe douce, ou d'un escalier, et revenant à vide.	65	0.04	2.6	6	56160
Un manœuvre élevant des matériaux avec la brouette (rampe au 1/12)	60	0.02	1.2	10	43200
Un manœuvre élevant des terres à la pelle (haut 1m.60.)	2.7	0.40	1.08	10	38880
2° Action sur les machines et outils.					
Manœuvre agissant sur une roue à cheville ou à tambour:					
1° Au niveau de l'axe -------	60	0.15	9.	8	259200
2° Vers le bas de la roue ------	12	0.70	8.4	8	241920
Manœuvre marchant et poussant en tirant horizontalement	12	0.60	7.2	8	207360
Manœuvre agissant sur une manivelle ---------	8	0.75	6.	8	172800
Cheval attelé à une voiture au pas. -----------	70	0.90	63	10	2168000
d° d° au trot ----------	44	2.20	96.8	4.5	1568160
d° au manège au pas. -----------	45	0.90	40.5	8	1116400
d° d° au trot -----------	30	2.00	60	4.5	972400
Bœuf d° au pas. -----------	60	0.60	36	8	1036800
Mulet d° au pas -----------	30	0.90	27	8	777600
Âne d° d° -----------	14	0.80	11.2	8	322560

A l'inspection de la première partie de ce tableau, on voit que la meilleure manière d'utiliser le travail de l'homme, comme manœuvre, c'est celle qui consiste dans l'élévation de son propre poids; car on peut employer le travail ainsi développé à remonter des fardeaux, et la figure ci-contre empruntée à la mécanique élémentaire de Delaunay, peut donner une idée de ce mode d'emploi du travail de l'homme. Le manœuvre après avoir chargé sa brouette remonte à l'échelle, tandis qu'un second manœuvre descend sur un plateau en remontant la brouette placée sur l'autre; les deux plateaux sont reliés par une corde qui s'enroule sur une roue. La figure est coupée en deux, l'une représentant la partie supérieure, l'autre la partie inférieure.

Fig. 117.



On voit encore par la seconde partie du tableau que le travail maximum journalier d'un cheval s'obtient en le faisant tirer au pas.

Ainsi le cheval au pas, dans les conditions du tableau précédent, fait environ 63 kilogrammètres de travail par seconde, et il peut fournir 10 heures de ce travail dans une journée avec des relais convenables; le cheval au trot peut bien donner 96 kilogrammètres par seconde, mais il ne peut travailler de cette manière qu'environ 4 heures 5 par jour; on comprend qu'on pourrait lui faire produire beaucoup plus encore en une seconde, mais ce serait au détriment du travail total de la journée.

On peut remarquer que le travail du cheval au manège est bien inférieur à celui du cheval de roulier; cela tient évidemment au changement continuel de direction de la traction; c'est ainsi que la manivelle est un des modes d'emploi du manœuvre qui donnent le moins de travail.

98. Marche et transport horizontal.

— Un moteur peut développer une certaine quantité d'action, sans produire à proprement parler un travail mécanique tel que nous l'avons défini et considéré jusqu'à présent. Ainsi nous avons vu (Nos 33, 35) que tout effort exercé perpendiculairement au chemin parcouru par le mobile ne produit aucun travail mécanique. Voici un cas remarquable et qui semble singulier au premier abord: un homme ou un cheval marchant sur une route, se fatigue, dépense une certaine quantité d'action, et cependant il n'y a là aucun travail mécanique, car le poids transporté est perpendiculaire au chemin parcouru; on peut même supposer que le moteur transporte avec lui un fardeau sur son dos. Il est incontestable que ce transport constitue un travail utile, au point de vue du résultat; mais ce n'est plus le travail mécanique, susceptible de se transformer en un travail équivalent ou en puissance vive sensible, comme le poids que l'on élève et dont on utilise ensuite la chute. C'est même là un caractère essentiel du travail correspondant au transport horizontal des fardeaux.

Quoi qu'il en soit, on a été conduit à prendre pour unité de travail de transport horizontal, le poids de 1 kilogramme transporté à une distance de 1 mètre, et le travail journalier utile aura pour expression, comme précédemment $F \times V \times D$. Et ce produit est également susceptible d'un maximum pour des valeurs convenables de l'effort F (charge) de la vitesse V et du temps D.

99. *Notions sur les moteurs ou récepteurs hydrauliques.* —— Tout poids qui tombe produit un travail mécanique que l'on peut utiliser et transformer en travail utile; il s'en suit que l'eau d'une rivière en coulant produit une certaine quantité de travail mécanique que l'on peut aussi transformer en travail utile, comme pour la chute d'un poids quelconque.

Pour se rendre compte de la quantité de travail qu'une eau courante peut fournir, il faut estimer la quantité d'eau qui passe en une seconde à travers une section transversale et pour cela il suffit de mesurer l'aire de la section et la vitesse moyenne de l'eau qui la traverse. Pour mesurer l'aire de la section d'un cours d'eau, on mesure les profondeurs à des points équidistants et on a facilement, par les procédés que j'ai indiqués en plusieurs circonstances, l'aire de la courbe qui forme le profil de la section.

fig. 118.

Quant à la vitesse moyenne, on la détermine approximativement au moyen de flotteurs placés en divers points du lit du cours d'eau, et dont on détermine la vitesse au moyen de jalons placés sur la rive; on prend ensuite la moyenne de toutes ces vitesses.

Si la section a 100 mètres carrés et que la vitesse soit de 3 mètres cela veut dire qu'il passe $100 \times 3 = 300$ mètres cubes d'eau par seconde à travers la section.

Ceci posé, si l'on peut établir un barrage et établir une différence de niveau entre l'amont et l'aval du barrage, on pourra utiliser l'eau qui passerait par-dessus le barrage ou une fraction de cette eau en la dirigeant, dans un canal particulier, sur un moteur ou récepteur hydraulique; si on dispose d'un débit de 10 mètres cubes par seconde, et d'une hauteur de chute de 4 mètres, il tombe par seconde un poids de 10000 kilogrammes d'eau d'une hauteur de 4 mètres, ce qui produit un travail de 40000 kilogrammètres par seconde ou $\frac{40000}{75} = 533$ chevaux-vapeur.

Pour utiliser ce travail, on fait arriver l'eau dont on dispose sur une roue hydraulique, dont la forme et les dimensions varient avec la hauteur de chute.

Mais de même que pour les moteurs animés, comme pour toutes les machines, il y a pour tout moteur hydraulique une vitesse pour laquelle on obtient le maximum d'effet utile. On conçoit en effet que la quantité de travail moteur étant limitée, un accroissement de vitesse de la roue ne peut correspondre qu'à une diminution dans les résistances; si au contraire on augmente beaucoup les résistances, le mouvement de la roue sera très lent; dans l'un et l'autre cas le travail utile sera petit; tandis qu'il existe une vitesse convenable pour laquelle on obtient un travail utile maximum.

En outre il y a des règles générales à suivre dans l'établissement de tout moteur hydraulique: 1° L'eau doit être amenée du bief d'amont dans la machine, en éprouvant le moins possible de perte de vitesse; 2° elle doit agir sans choc, 3° elle doit quitter la machine sans vitesse. Le principe général de la transmission du travail (10ème Leçon) rend parfaitement compte de ces règles. On obtiendra d'ailleurs le <u>rendement</u> d'un moteur hydraulique, ainsi que je l'ai indiqué au N° 96.

Voici quelques-unes des dispositions les plus fréquemment employées; le lecteur désireux de compléter ses connaissances sur ce sujet important pourra consulter avec profit le cours professé par M. Massieu, ingénieur des mines, et mon collègue à la faculté des sciences de Rennes, en 1873.

Roue en dessous à palettes planes. — Avec une assez petite hauteur de chute et un grand débit, on emploie les <u>roues en dessous à palettes planes</u>; comme l'indique la figure 119, l'eau passe par l'ouverture d'une vanne V pour quitter le bief d'amont, et agit en vertu de sa vitesse contre les palettes de la roue, qu'elle quitte avec une certaine vitesse, celle des palettes elles-mêmes. C'est une des dispositions où la perte de travail est la plus considérable; car l'eau <u>choque</u> les palettes, et ne les abandonne pas sans vitesse. La vitesse la plus favorable à donner à la roue est les 0,45 de celle de l'eau, à son arrivée sur la roue. Le rendement n'est que 0,25.

Fig. 119

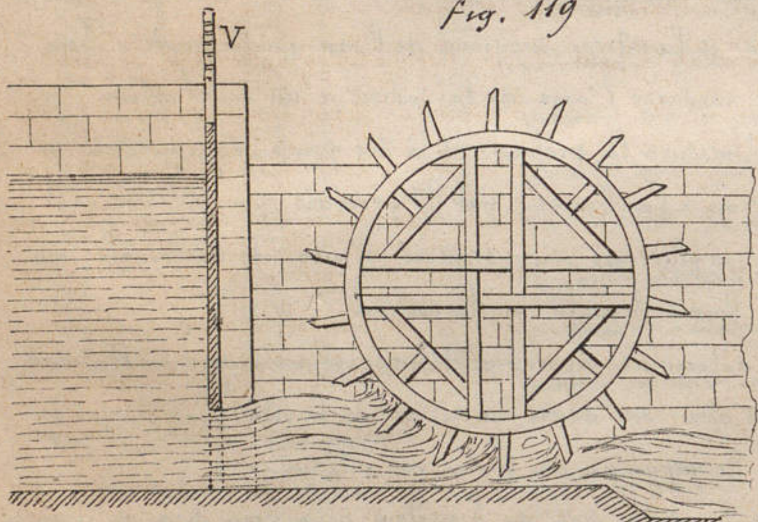
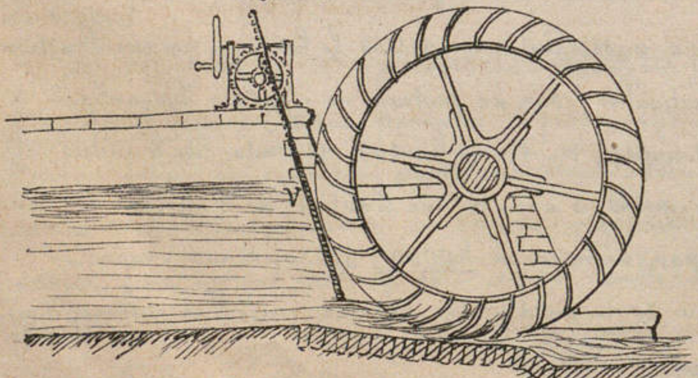


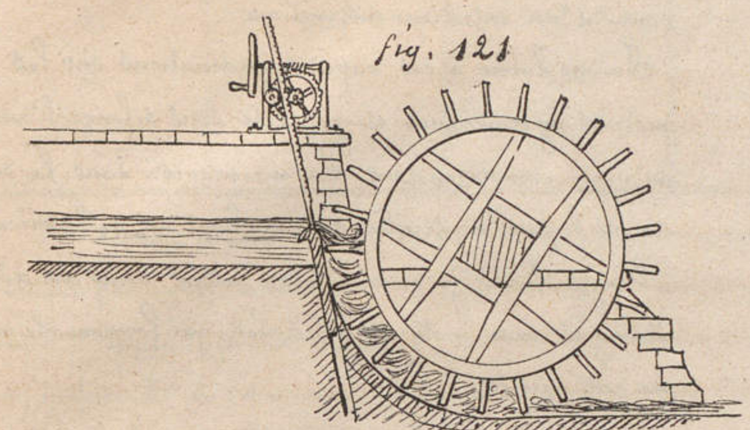
Fig. 120



Roue Poncelet à aubes courbes. Les roues en dessous à palettes planes ont été remplacées avantageusement par les roues à aubes courbes de Poncelet. On voit sans peine que l'eau arrive tangentiellement à la surface des aubes et non plus normalement; de plus elle retombe presque sans vitesse de la dernière aube dans le bief d'aval. Avec une vitesse qui est les 0.55 de la vitesse de l'eau à son arrivée, on obtient un rendement de 0,56 à 0.60.

Roues de coté. — Pour une chute moyenne, on emploie les roues de côté emboîtées dans des coursiers circulaires, comme l'indique la figure 121, et alors l'eau agit en grande partie par son poids sur les palettes de la roue. Avec ces roues on peut utiliser environ 0.65 du travail moteur de la chute.

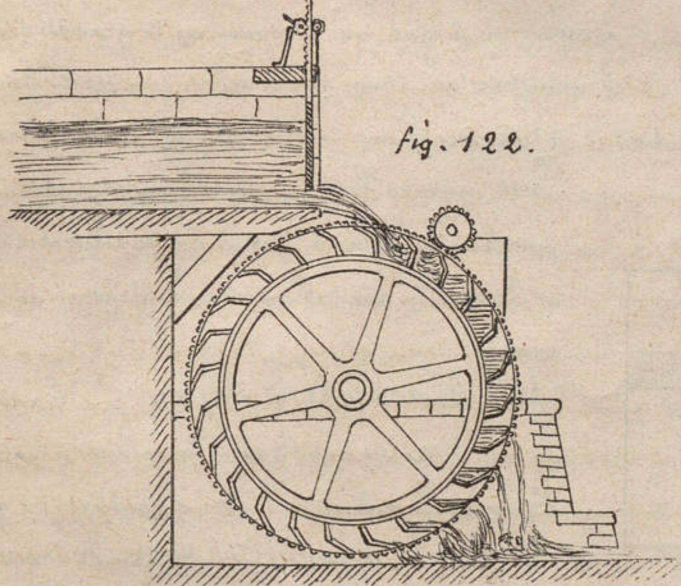
fig. 121



Roues à augets. — Pour les chutes élevées, la meilleure disposition est celle des roues à augets (figure 122) dans lesquelles l'eau agit uniquement par son poids; ces roues sont très favorables aux chutes d'un petit débit mais d'une grande hauteur, parce qu'on peut alors leur donner un grand diamètre et faire agir le poids de l'eau sur un grand bras de levier.

Pour les chutes variant entre 3 et 12 mètres il faut les préférer à toute autre roue à axe horizontal. Leur mouvement doit être assez lent, sans quoi la force centrifuge ferait vider les augets; on peut avec ces roues et une vitesse convenable utiliser les 0,75 du travail moteur de la chute.

fig. 122.



Turbines. — Mais les meilleurs moteurs hydrauliques sont les turbines.

Les turbines sont des roues hydrauliques à axe vertical (a) tournant généralement avec une grande vitesse.

L'eau descend par un cylindre qui entoure l'axe et est dirigée par des cloisons et demi-cloisons courbes et fixes (c) sur les aubes courbes d'une roue ou couronne horizontale (b) supportée par le pivot de l'axe de rotation.

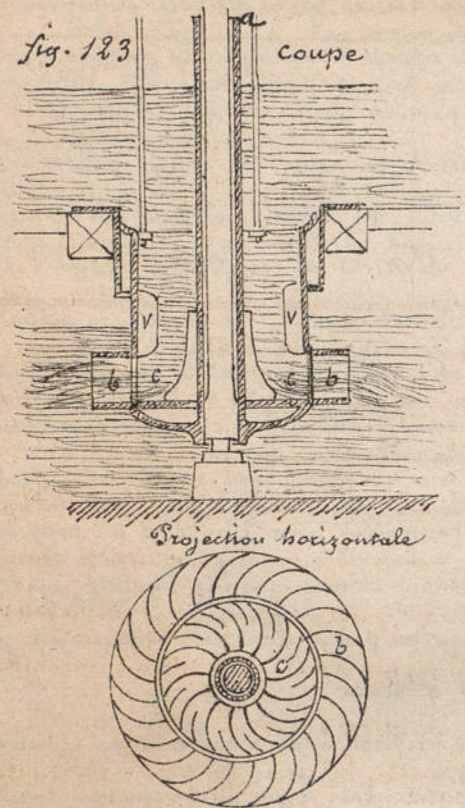
C'est à peu près la disposition de la turbine de Fourneyron; mais il y en a un grand nombre d'autres qui en diffèrent plus ou moins.

Les turbines offrent sur les autres récepteurs hydrauliques l'avantage de s'approprier à toutes les chutes, à toutes les dépenses d'eau.

Seulement l'emploi de ces appareils présente un inconvénient dans les localités dépourvues de bons ouvriers ; car il faut une certaine habileté non-seulement pour leur construction, mais encore pour les réparations qu'elles nécessitent, et par suite elles sont d'un entretien dispendieux.

Je me borne à ces rapides indications sur les moteurs hydrauliques et je passe sous silence l'emploi du vent comme moteur. Je me propose dans la suite de ces leçons de traiter des applications de la mécanique à l'agriculture, je pourrai alors entrer dans des détails étrangers aux notions générales qui forment le cours de cette année.

fig. 123

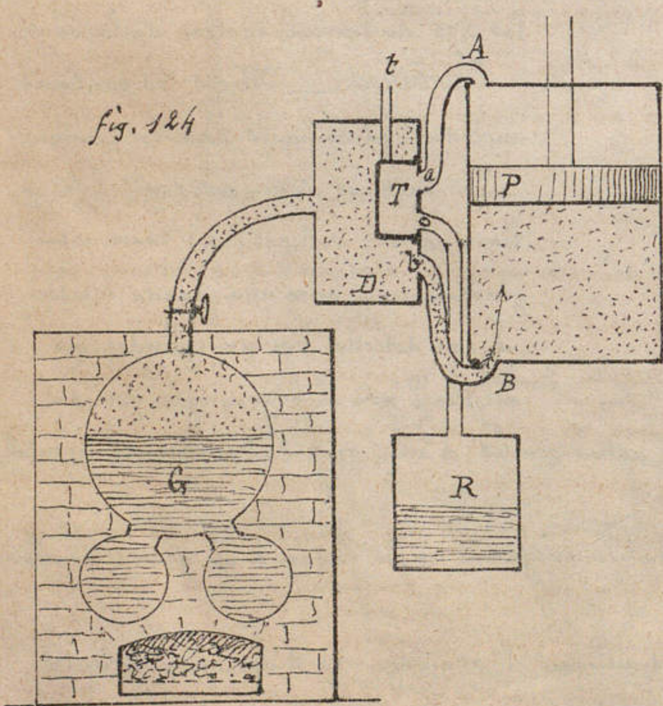


100. De l'emploi des vapeurs et des gaz comme moteurs.

— On comprend facilement que ce n'est pas non plus en quelques mots que l'on peut indiquer les dispositions si variées des machines à vapeur ou à gaz qui rendent de si grands services à l'industrie et dont le nombre s'accroît sans cesse. J'espère bien pouvoir consacrer les leçons du soir d'une prochaine année à cette étude intéressante.

Pour aujourd'hui, je me borne à indiquer le principe commun à toutes ces machines et à montrer quelle est la véritable source du travail qu'elles produisent.

fig. 124



101. Machines à vapeur.

— Examinons ce qui se passe dans toute machine à vapeur ; de l'eau renfermée dans une chaudière ou générateur G, dont la forme et les dispositions varient beaucoup suivant qu'il s'agit d'une machine fixe ou d'une locomotive, est portée à une température élevée au moyen d'un foyer de chaleur et passe à l'état de vapeur avec une tension ou force élastique d'autant plus grande que la température à laquelle elle se forme est plus élevée. Le tableau suivant indique la variation de la force élastique avec la température :

Pression en atmosphère	Pression en kilogrammes par décimètres carrés.	Température.	Pression en atmosphère	Pression en kilogrammes par décimètres carrés.	Température.
1	103.kilo.	100°	5	515 kilo.	153°
2	206	121°	6	618	160°
3	609	135°	7	721	166°
4	412	145°	8	824	172°

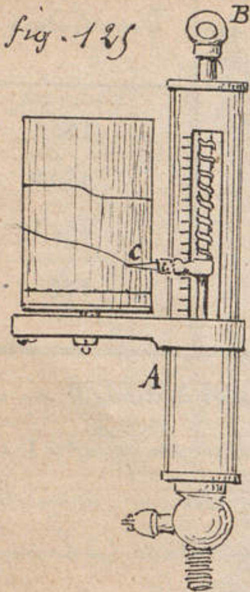
La vapeur d'eau formée dans le générateur se rend dans la boîte de distribution D qui communique par deux ouvertures a, b, avec la région supérieure et la région inférieure du cylindre C dans lequel se meut le piston moteur P, et par une troisième ouverture O avec un réservoir à une basse température R où la vapeur va se condenser, et que l'on nomme condenseur. Dans les locomotives et les machines à haute pression, le condenseur n'existe pas, c'est l'air extérieur qui le remplace.

La boîte dans laquelle arrive la vapeur est divisée en deux compartiments par un tiroir mobile T, mû par un excentrique (voir Cinématique page 83) monté sur l'arbre de la machine ; le compartiment extérieur D communiquant avec la chaudière, l'autre T avec le condenseur ; si l'orifice a est dans l'intérieur du tiroir, la vapeur arrive par l'orifice b, dans la partie inférieure du cylindre et soulève le piston en vertu de sa force élastique sur celle qui correspond à la température du condenseur (N° 36, 4°) ; quand le piston arrive au haut de sa course le tiroir s'abaisse, fait communiquer l'orifice b avec le condenseur, et démasque l'orifice a par lequel va s'introduire la vapeur et le piston descendra. Si la vapeur a une pression de 4 atmosphères cela revient à dire qu'elle presse chaque décimètre carré de la surface du piston avec une force de 412 kilogrammes ; d'autre part si l'eau du condenseur est à 30°, la tension correspondante est de $\frac{31}{760}$ d'atmosphère ou environ $\frac{1}{15}$ de 103 kilogrammes = 6 kilogrammes 8, par décimètre carré ; donc la différence de pression sur les deux faces du piston sera de 412 − 6,8 = 405.kil.2 par décimètre carré. Dans les machines sans condenseur la vapeur s'échappe du cylindre avec une pression sensiblement égale à une atmosphère ; il faut donc retrancher cette pression de celle que possède la vapeur au sortir de la chaudière.

102. *Indicateur de Watt. — Courbe du travail.* — J'ai indiqué au N° 36, comment on construirait la courbe qui permet de calculer le travail de la vapeur à chaque coup de piston, quand on connaît la pression ; mais les machines sont souvent munies d'un appareil qui non-seulement fait connaître à chaque instant la pression de la vapeur dans le cylindre, mais qui trace même la courbe du travail. Un cylindre A, dans lequel se meut un piston dont la tige fait saillie en B, est vissé par sa partie inférieure sur l'un des fonds du cylindre même de la machine ; la force élastique de la vapeur, contrebalancée partiellement par un ressort en spirale soulève le petit piston

du cylindre A, et une graduation tracée sur le cylindre AB fait connaître à chaque instant la tension de la vapeur dans la région du grand cylindre qui communique avec A ; pour rendre ces indications continues, un tambour cylindrique sur lequel est collée une bande de papier est animé d'un mouvement de rotation déterminé par le mouvement du piston moteur de la machine, et un crayon C porté par la tige du piston du cylindre A, trace une courbe qui n'est autre que celle du travail ; ainsi on trouvera assez souvent pour cette courbe une forme analogue à celle de la figure 126, et qui ne diffère de celle de la figure 39, qu'en ce que les angles sont arrondis.

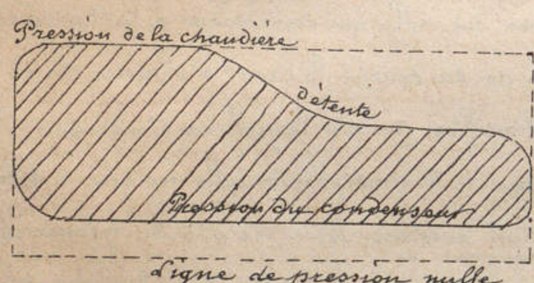
fig. 125



Nous savons donc mesurer exactement le travail fourni par la vapeur à chaque coup de piston de la machine ; d'autre part on peut savoir quelle est la quantité de vapeur employée, et par suite enfin quelle est la quantité de chaleur empruntée au foyer par cette vapeur ; connaissant ensuite la température du condenseur, on sait aussi quelle est la quantité de chaleur restituée par la vapeur après qu'elle a exécuté son travail sur le piston.

Or, il résulte des expériences du célèbre ingénieur de Colmar, Mr Hirn, que le travail transmis au piston représente exactement l'équivalent entre la chaleur empruntée à la source (foyer) par la vapeur, et celle qui a été rendue au condenseur.

fig. 126.



Et ces expériences ont confirmé le principe de l'équivalence du travail mécanique et de la chaleur.

103. Moteurs à gaz. — Si au lieu d'employer la vapeur, c'est-à-dire un corps qui change à la fois de volume et d'état sous l'action de la chaleur, on emploie un gaz permanent qui ne fait que changer de volume, la forme et la disposition des appareils changent, mais la source de travail est la même que dans les machines à vapeur. Un gaz emprunte de la chaleur à une source chaude quelconque, produit un travail mécanique en agissant sur un piston, puis est mis en communication avec un espace plus froid, auquel il rend l'excès de la chaleur empruntée sur le travail produit.

Dans le moteur Lenoir par exemple la source de chaleur est la combustion d'une petite quantité de gaz de l'éclairage qu'on fait arriver en même temps que l'air dans le cylindre, et qu'on enflamme au moyen d'une étincelle électrique.

104. Second principe de la théorie mécanique de la chaleur. — On s'est demandé naturellement quelles étaient les machines les plus avantageuses au point de vue industriel. La théorie mécanique de la chaleur a permis de résoudre complètement cette question. On démontre d'abord que dans toute machine à gaz, si aucune partie de la chaleur fournie par la source n'est employée à produire de simples variations de température, le rapport du travail effectué à la dépense totale de chaleur, ne dépend que des températures extrêmes entre lesquelles fonctionne la masse. On démontre ensuite au moyen d'un raisonnement ingénieux dû à S. Carnot et perfectionné par M. Clausius que ce rapport ne saurait être différent lorsqu'on substitue à un gaz parfait un corps quelconque, de la vapeur par exemple. Je me bornerai à reproduire ici l'énoncé de ce second principe que l'on peut considérer comme une loi de la nature.

Dans toute machine fondée sur les changements d'état ou de volume d'un corps, dans laquelle aucune partie de la chaleur n'est employée à produire des variations inutiles de température, le rapport du travail utile dépensé à la chaleur totale fournie par la source est indépendant de la nature du corps employé et déterminé seulement par les températures extrêmes entre lesquelles fonctionne la machine.

D'après ce principe, au point de vue exclusif de l'amplitude des températures extrêmes entre lesquelles agit le corps intermédiaire (gaz, ou vapeur) les machines à gaz présenteraient des avantages sur les machines à vapeur; mais ces avantages sont détruits en partie par des inconvénients sérieux, tels que l'oxydation, des pièces de la machine; l'emploi de la vapeur surchauffée semble devoir conduire au meilleur résultat.

105. *La chaleur source universelle de travail.* — Je crois ne pouvoir mieux terminer cette leçon dont l'objet est l'énumération des principales sources de travail mécanique, qu'en vous faisant remarquer, qu'au fond, c'est la chaleur seule, et même la chaleur solaire qui est la source véritable de tout le travail mécanique que nous voyons s'exécuter à la surface de la terre.

Les moteurs animés, sont au point de vue mécanique, de véritables machines thermiques; la combustion qui accompagne l'acte respiratoire est la source de chaleur destinée à réparer les pertes du corps et à produire le travail qu'il effectue; or le combustible est fourni par les aliments, qui en dernière analyse sont des végétaux. Le végétal, a besoin pour se développer de l'action de la chaleur solaire, qu'il transforme en combustible.

Les courants d'air qui meuvent les ailes des moulins, les cours d'eau qui alimentent une quantité innombrable d'usines, résultent des actions de la chaleur solaire sur le sol et sur la surface des mers dont elle produit l'évaporation; le travail de ces moteurs n'est donc que de la puissance vive calorifique transformée.

Enfin la houille elle-même, source du travail de toutes les machines industrielles, ne fait que nous rendre la quantité de chaleur que le soleil avait fournie dans les âges géologiques aux végétaux dont elle constituait la partie indestructible.

Je m'étais proposé comme objet de ces leçons élémentaires: le principe de la transmission du travail dans les machines; j'ai fait tous mes efforts pour rester fidèle à mon programme, au-dessus des questions de détail que l'on n'apprend bien que par la pratique, j'ai mis les principes qui servent à tous, sans négliger de vérifier par l'expérience les conséquences que nous avons pu en tirer.

Si j'ai réussi à intéresser quelques-uns de mes lecteurs ; et à leur faire acquérir des notions exactes et précises sur la science du mouvement et des forces, je me regarderai comme bien dédommagé de ma peine.

FIN.

Notes et Additions.

Note 1.

Sur la manière d'évaluer une longueur estimée dans une direction donnée. (Simples notions de trigonométrie)

1. A propos du théorème de la composition des forces concourantes, j'ai montré l'importance du rôle que joue la grandeur d'une droite AB estimée dans une direction OX ; toute la suite de ces leçons n'a fait que confirmer cette importance ; de sorte que ceux de mes lecteurs qui n'ont aucune notion de trigonométrie, ne seront peut être pas fachés de savoir comment on calcule la valeur d'une droite (force, vitesse, ou chemin, ...) estimée dans une direction quelconque.

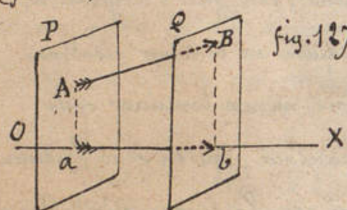


fig. 127.

Nous avons dit que la projection ab de la droite AB sur l'axe OX est la portion de cet axe comprise entre deux plans P, Q, menés par les points A et B perpendiculairement à OX. Or comme toute parallèle à OX comprise entre les deux plans P, Q aura la longueur ab, il s'en suit que <u>la valeur d'une droite estimée dans une direction ne dépend que de cette direction et non de la position absolue de la droite sur laquelle on la projette</u>. On pourra, par exemple, faire passer l'axe de projection par l'une des extrémités de la droite AB

II. *Définition du Cosinus*. Considérons donc une droite OM dont nous allons estimer la valeur OP suivant une droite OX passant par le point O. Cette valeur dépend évidemment de l'inclinaison $\widehat{MOP}$ de la droite OA sur l'axe OX, et je dis que pour l'avoir, il suffit de multiplier le nombre qui

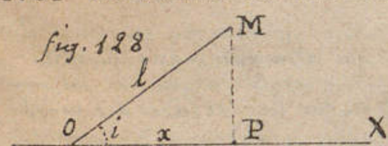


fig. 128

mesure la longueur OM par un <u>coefficient d'inclinaison</u> qui ne dépend que de l'angle $\widehat{MOP}$, et dont la connaissance équivaudra à celle de cet angle.

Remarquons que le rapport $\frac{OP}{OM}$ ne change pas tant que l'angle i reste le même ; si, par exemple OP est les $\frac{3}{4}$ de OM, la valeur de toute longueur prise sur OM, estimée suivant OX sera toujours les $\frac{3}{4}$ de cette longueur ; car, à une longueur double, triple .... de OM correspondra toujours une projection double, triple .. de OP.

C'est donc ce rapport $\frac{OP}{OM}$ qui est le <u>coefficient d'inclinaison</u> par lequel il faut multiplier OM pour avoir OP ; nous lui donnerons le nom de <u>cosinus</u> de l'angle i, et nous le désignerons par cosinus i ou, en abrégeant par cos. i ; on écrira ainsi : $\frac{OP}{OM} = \cos. i$ ou en faisant $OP = x$ et $OM = l$

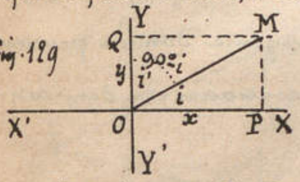
$$x = l \times \cos. i$$

Lorsque l'angle i varie de 0° à 90° le cosinus varie de 1 à 0 ; après 90° la projection de OM est dirigée en sens contraire de OX ; nous l'affectons du signe <u>moins</u> (−) ; en sorte que de 90° à 180° le cosinus varie de 0 à -1 ; l'angle i continuant à croître de 180° à 360° le cosinus reprend les mêmes valeurs en sens inverse.

Il existe des tables numériques qui font connaître les valeurs des cosinus pour les valeurs correspondantes de l'angle i ; de sorte qu'on aura la valeur de la projection x d'une droite l dès qu'on connaîtra sa longueur et l'angle qu'elle fait avec sa projection, car il suffira de multiplier la longueur par le cosinus de l'angle.

III. Définition du sinus, de la tangente et de la cotangente. A la rigueur une table numérique des valeurs du cosinus, ou du rapport $\frac{OP}{OM} = \frac{x}{l}$, suffirait pour résoudre toutes les questions dans lesquelles on a à considérer à la fois des longueurs et des angles ; mais on a trouvé plus commode d'introduire de nouveaux rapports qui se prêtent mieux, dans certains cas, à la solution des questions.

fig. 129



Ainsi il est souvent utile de considérer les projections d'une même droite OM sur deux axes rectangulaires OX, OY ; et on a donné des noms différents aux rapports $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$ de ces projections à la longueur de OM ; nous savons déjà que $\frac{x}{l}$ est le cosinus de l'angle i ; $\frac{y}{l}$ qui est le cosinus de l'angle $90°-i$, a été appelé sinus de l'angle i ; on a donc $x = l \cos. i$, $\quad y = l \sin. i$

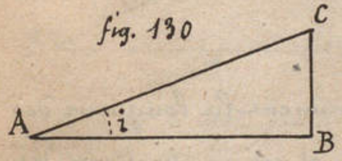
De même que le cosinus prend le signe de x et est positif ou négatif suivant que la projection du point M tombe à droite ou à gauche du point O ; de même le sinus prend le signe de y et est positif ou négatif suivant que la projection de M sur OY tombe audessus ou audessous du point O

Comme le cosinus dont il ne diffère d'ailleurs qu'en direction, il varie entre -1 et $+1$.

On a encore donné le nom de tangente de l'angle i au rapport $\frac{y}{x}$ des deux projections de la même droite OM ; et celui de cotangente au rapport inverse $\frac{x}{y}$ des mêmes projections. On en conclut en abrégeant l'écriture des mots tangente et cotangente,

$$\text{Tang.}\, i = \frac{\sin. i}{\cos. i} \quad ; \quad \text{Cot.g.}\, i = \frac{\cos. i}{\sin. i}.$$

fig. 130



La tangente de l'angle BAC que fait une droite AB avec sa projection horizontale AC est ce qu'on nomme souvent la pente de cette droite.

Ainsi, quand on dit que la pente d'une route est de $\frac{1}{40}$, cela veut dire que le rapport $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{40}$, ou que pour une projection horizontale de 40 mètres, la route s'élève de 1 mètre.

IV. Propriétés du triangle rectangle. Si l'on considère le triangle rectangle OMP (fig. 129.), on voit qu'en posant $90°-i = i'$ on a $OP = x = l \times \cos. i = l \times \sin.(90°-i) = l \times \sin. i'$

et $OQ = y = l \times \cos. i' = l \times \sin. i$.

Ainsi, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent ou par le sinus de l'angle opposé.

De plus on conclut que le cosinus d'un angle est la même chose que le sinus de son complément.

$$\cos. i' = \sin. i \quad , \quad \cos. i = \sin\, i'.$$

On voit encore que $\frac{MP}{OP} = \frac{y}{x} = \text{tang.}\, i = \text{cot.g.}\, i'$; $\quad \frac{OP}{MP} = \frac{x}{y} = \text{Cotang.}\, i = \text{tang.}\, i'$.

ce que l'on exprime en disant que le rapport des côtés de l'angle droit est égal à la tangente de l'angle opposé, ou à la cotangente de l'angle adjacent au côté qui figure au numérateur.

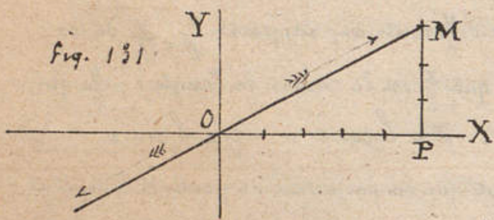
De plus, $\quad \text{tang.}\, i = \text{cotang.}\, i' \quad , \quad \text{tang.}\, i' = \text{cotang.}\, i$.

c. à-d. La tangente d'un angle est égale à la cotangente de son complément.

V. *Dépendance des quatre rapports précédents.* A l'inspection de la fig. 129, on voit que les rapports que nous venons de définir sont liés entre eux, savoir : le sinus et le cosinus, en vertu de la relation.
$$x^2 + y^2 = l^2 .$$
qui est l'une des propriétés importantes du triangle rectangle et d'où l'on déduit :
$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \cos^2 i + \sin^2 i = 1 .$$
Quand à la tangente et à la cotangente, leur définition même montre leur liaison avec le sinus le cosinus, et leur dépendance mutuelle.

Toutefois il faut remarquer qu'à un sinus donné peuvent correspondre deux cosinus égaux et de signes contraires. A un cosinus donné deux sinus égaux et de signes contraires. A une tangente donnée peuvent correspondre deux sinus égaux et de signes contraires, et deux cosinus égaux et de signes contraires.

Fig. 131

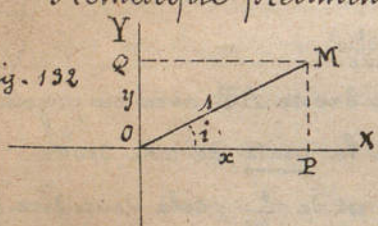


Si l'on sait que la tangente d'un angle i est $3/5$, cela veut dire que le rapport $\frac{MP}{OP} = \frac{3}{5}$; si donc on prend 5 divisions sur OX et trois de ces divisions sur OY, la droite OM diagonale du rectangle construit sur les projections 5 et 3 sera la direction déterminée par la tangente $\frac{3}{5}$. Toutefois il y a deux directions opposées indiquées par les flèches, qui correspondent à ce même rapport, mais pour lesquelles les sinus et cosinus sont de signes contraires.

VI. *D'où viennent les mots, sinus, cosinus, tangente, cotangente?*

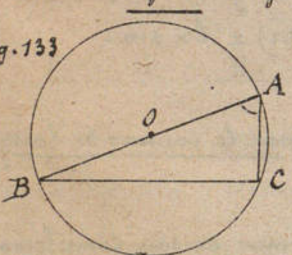
Remarque préliminaire. Si sur une droite de direction donnée par l'angle i, on prend une longueur $OM = 1$, on aura

Fig. 132



$$x = \cos. i \qquad , \qquad y = \sin. i$$
Ainsi le sinus et le cosinus d'un angle expriment la longueur des projections d'une longueur égale à l'unité, et ces nombres qui désignaient des rapports peuvent servir à mesurer des longueurs ; voilà pourquoi on les nomme souvent des <u>lignes</u> trigonométriques.

Fig. 133

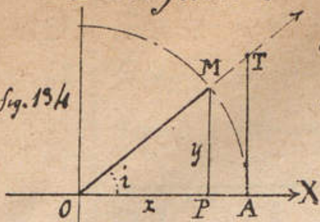


Sinus. Soit BC une corde d'un cercle, et BA un diamètre ; le triangle BAC est rectangle, et on a (IV) Corde BC = diamètre BA × sinus de l'angle A.

La corde BC peut aussi s'appeler la corde de l'angle A (en faisant correspondre la corde à l'angle inscrit et non à l'angle au centre comme on le fait ordinairement) car tous les angles inscrits dans le segment soustendu par la corde sont égaux à A ; si le rayon du cercle est égal à l'unité on aura : $\text{Corde } A = 2 \times \sin A$.
$$\text{ou} \quad \sin. A = \frac{1}{2} \text{ corde } A .$$
Or, en latin la corde se nommait <u>inscripta</u> (ligne inscrite) et le sinus <u>semi-inscripta</u>, ou par abréviation <u>s. ins.</u> et par euphonie <u>sinus</u>. Le mot <u>cosinus</u> signifie <u>associé au sinus</u>.

Tangente. Si avec la longueur $OM = 1$ on décrit un cercle du point O comme centre, et qu'on mène la tangente AT au cercle au point A situé sur la droite OX, on voit

fig. 134



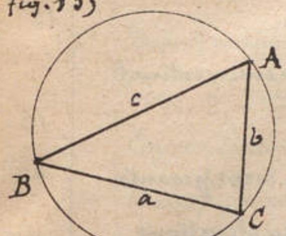
que le rapport $\frac{AT}{OA} = \frac{y}{x} = \text{tang.}\, i$;

or $OA = 1$, donc $AT = \frac{x}{y} = \text{tang.}\, i$;

ce qui justifie bien l'expression de tangente donnée au rapport $\frac{y}{x}$. Quant à celui de cotangente, l'explication est la même que pour le cosinus.

VII. Relations entre les angles et les côtés d'un triangle.

fig. 135

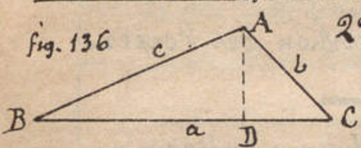


1°. En appliquant aux trois côtés du triangle ABC qu'on inscrira dans un cercle la formule qui nous a servi à la définition éthymologique de sinus, on aura, en appelant D le diamètre du cercle, $a = D \times \sin A$, $b = D \times \sin B$, $c = D \times \sin. C$.

D'où l'on conclut $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

Ce que l'on exprime en disant que les trois cotés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

fig. 136

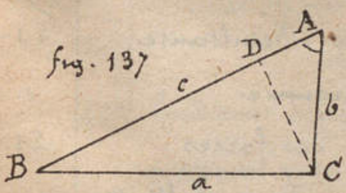


2°. On peut remarquer qu'un côté BC d'un triangle quelconque est toujours la somme algébrique des projections des deux autres côtés, ce que l'on écrit ainsi:

$$a = b.\cos C + c.\cos.B\,,$$

et l'on a deux formules analogues pour les deux autres côtés.

fig. 137



3°. On sait par la géométrie, que si l'angle A est aigu on a:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \times DA \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times DA\,,$$

mais DA, projection de b sur $AC = b \times \cos.A$

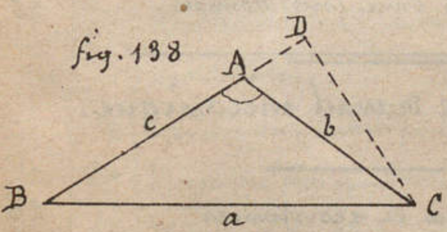
d'où $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times \cos A\,,$

et l'on a deux autres formules semblables pour les deux autres côtés.

Si l'angle A est obtus, on a:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times DA$$

fig. 138



mais DA est la projection de b non plus sur la direction AB mais sur la direction opposée, on a:

$$AD = -\, b \times \cos.A\,.$$

Donc, $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times \cos.A\,.$ (*)

Note II.

La question de l'équilibre des poulies, moufles et palans, ayant été traitée en Cinématique (pages 49 et suivantes), je n'ai pas cru devoir la reproduire dans la leçon sur l'équilibre des machines simples, le nombre de ces leçons étant limité et le programme de chacune d'elles étant suffisamment chargé.

(*) On trouvera dans les tables de logarithmes la manière de se servir des formules de la trigonométrie dans les applications.

Table des matières.

1re Partie.

1re Leçon - Les forces.

2e Leçon - La force et le mouvement.

3e Leçon - Composition des Forces.

4e Leçon - Le travail mécanique.

Suite..

Deuxième partie

Machines – Moteurs – Résistances.