LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE

MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Petersbourg, de Berlin, de Stokholm, de Gottingue, & de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au College Mazarin.*

NOUVELLE ÉDITION,

Augmentée de la résolution des Problêmes indéterminés, d'une Introduction à la Théorie des Équations des Degrés supérieurs, de la Méthode inverse des Séries, du Calcul Analytique des Logarithmes, de nouveaux Élémens de Géométrie, de Trigonométrie, & de Sections coniques, de la Description de plusieurs autres Courbes, & des Principes du Calcul Différentiel & du Calcul intégral.

Par M. l'Abbé MARIE, *de la Maison & Société de Sorbonne, Censeur Royal, ancien Professeur de Philosophie au College du Plessis, Professeur de Mathématiques au College Mazarin.*

De l'oratoire de Tournon 1785

A PARIS.

Chez DESAINT, Libraire, rue du Foin.

M. DCC. LXXII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

PRÉFACE.

En adoptant les Leçons de Mathématiques de *M. l'Abbé* DE LA CAILLE pour les expliquer dans le Cours de mes Exercices, je me proposai de les rendre plus complettes lorsqu'il s'en feroit une nouvelle Edition. Aujourd'hui que ce projet est exécuté, il ne me reste qu'à rendre compte du plan que j'ai suivi, & des principaux changemens que j'ai faits dans l'Ouvrage de ce célébre Auteur.

Les Elémens d'Arithmétique, d'Algebre, de Géométrie & de Trigonométrie rectiligne se succedent à l'ordinaire. Vient ensuite un Traité Analytique des Sections Coniques, suivi de la Description & des principales propriétés de plusieurs autres courbes: puis les principes du Calcul différentiel avec des applications à la Théorie des courbes, & enfin les principes du Calcul intégral appliqués aux Quadratures, aux Rectifications, aux Solidités, & à la méthode inverse des Tangentes.

I. Dans l'Arithmétique, les changemens ne pouvoient être considérables; aussi se réduisent-ils à quelques méthodes ajoutées, & à un petit nombre de détails utiles que l'on distinguera facilement, au moyen de la Table des Numéros ajoutés ou changés.

II. Les Elémens d'Algebre ont été augmentés de plus de la moitié; & les additions principales sont, 1.° La résolution des problêmes indéterminés du premier degré. 2.° Une introduction à la théorie des Equations, dans laquelle on trouvera la formule du Binome sous les trois différentes formes connues, la méthode des diviseurs, celles des transformations, la résolution des Equations du troisieme & du quatrieme dégré, une Méthode d'approximation, & celle de l'extraction des racines en partie rationnelles, en partie radicales. 3.° La Regle de Trois, & ses applications les plus utiles, telles que la Regle de Compagnie, la Regle d'Alliage, celle de Fausse Position & celle d'Interêt. 4.° L'usage des coefficiens indéterminés dans les Séries. 5.° La méthode inverse des Séries. 6.° Trois Chapitres sur le Calcul Analytique des Logarithmes.

III. Tous les Maîtres de Mathématiques savent que lorsque des Eleves ont pris goût à l'Analyse, les Elémens de Géométrie leur paroissent insipides. C'est pour obvier en partie à cet inconvénient, que j'ai rappellé, le plutôt qu'il m'a été possible, l'usage de l'Algebre. Mais pour ne pas tomber dans le défaut contraire, j'ai mis en petit caractere ce qui m'a paru moins utile ou moins aisé, afin que les personnes qui ne voudront prendre dans ce livre que les premieres notions de Géométrie, ne soient pas arrêtées par une Algebre importune.

IV. Pour traiter d'une maniere plus générale le calcul des Sinus dont l'usage est si étendu, il étoit nécessaire d'en démontrer analytiquement les principales formules. On les trouvera rassemblées ici avec leurs démonstrations presque toutes analytiques.

A la Théorie des Sinus succedent trois applications; l'une pour la division des Arcs de cercle; l'autre pour la résolution des Equations du troisieme degré, lorsqu'elles sont dans le cas irréductible; la troisieme pour la résolution des Triangles rectilignes.

Si je n'ai point parlé de l'usage du Graphomètre & du Niveau, c'est que je ne connois rien de mieux sur cette matiere, que l'usage même de ces instrumens, dirigé en pleine campagne par des personnes exercées.

V. Dans le Traité des Sections Coniques, on verra d'abord comment la description des courbes, leur figure, & leurs propriétés se déduisent de leurs Equations; comment ensuite l'équation générale de la Section faite dans un Cône droit par un plan quelconque, exprime les différentes Sections Coniques, suivant les diverses positions du plan coupant.

De cette Equation simplifiée découlent successivement les propriétés les plus remarquables de la Parabole, de l'Ellipse, & de l'Hyperbole. Le chapitre de leurs Quadratures est destiné à faire connoître la Méthode des Indivisibles, en attendant que l'on puisse s'assurer, par le Calcul Intégral, de la vérité de ses résultats.

VI. Les Géomêtres supposent ordinairement dans leurs écrits la connoissance de plusieurs autres courbes, telles, par exemple, que la Conchoïde, la Cissoïde, la Logarithmique, la Cycloïde, la Quadratrice, la Spirale *d'Archimede*, les Spirales Parabolique, Hyperbolique, Logarithmique, dont néanmoins peu d'Auteurs ont donné la description, les Equations, & les propriétés les plus utiles. Il étoit donc à propos d'y suppléer par un petit Abrégé; & c'est ce que l'on trouvera dans cet Ouvrage.

VII. Les principes du Calcul Différentiel sont distribués en quatre Chapitres. Le premier a pour objet quelques discussions métaphysiques. Le second apprend à différentier les Quantités Algébriques. Le suivant est pour les différences secondes, troisiemes, &c. Le dernier, pour la différentiation des Quantités

Logarithmiques, des Exponentielles, & de celles où il entre des Sinus, des Cosinus, &c.

Le détail de ces regles est suivi de quelques applications, soit à la méthode directe des Tangentes, soit à la recherche des rayons de Courbure, des points d'Inflexion, des *Maxima* & des *Minima*, & des valeurs des fractions dont le Numérateur & le Dénominateur s'évanouissent en même temps.

VIII. Dans les Elémens du Calcul intégral, on trouvera d'abord des regles, comme dans le Calcul Différentiel, puis des applications. Les regles s'étendent depuis l'intégration des Différentielles Algébriques Monomes, jusqu'à celle des Différentielles Logarithmiques, Exponentielles, &c. Les applications ont pour objet les quadratures & les rectifications des Courbes, les solidités & les surfaces des solides de révolution, la méthode inverse des Tangentes, & quelques notions sur les Equations différentielles, suivies de la résolution de plusieurs problêmes qui en dépendent.

Tel est, en général, le plan de cet Ouvrage; ceux qui ne voudront y apprendre que les premiers Elémens des Mathématiques, pourront se borner à ce qui est en gros caractere. Mais ceux qui voudront pousser plus loin cette étude, doivent, après avoir lu une premiere fois ce qui est en gros caractere, reprendre dans une seconde lecture tout le fil de ces Leçons, & sur-tout ne passer d'une partie à une autre, qu'à mesure qu'ils auront bien compris celle qui précede.

TABLE

DES NUMÉROS AJOUTÉS.

Depuis le Numéro 5 jusqu'au Numéro 15.

18 . 19
27
40 . 41
53 60
76 84
87 91
95 . 96
112
119
122 126
144
146 . 147
150 . 151
156 167
192 199
224
227
230
241
273
280
287 291
293 330
333 338
406 430
442 444
455 459
469 482

DES NUMÉROS CHANGÉS.

Depuis le Numéro 20 jusqu'au Numéro 26.

28
38 . 39
42
110
118
120 . 121
187 . 188
208 212
223
228
239
267 272
274
385
393
454

Depuis le commencement de la Géométrie, Numéro 483, jusqu'à la fin de l'Ouvrage, Numéro 970, tout a été ajouté, ou entierement changé, à l'exception des Numéros 648, 722, 744, 745 : ensorte que ce qui a été conservé de l'Edition de M. DE LA CAILLE, fait tout au plus le quart de celle-ci.

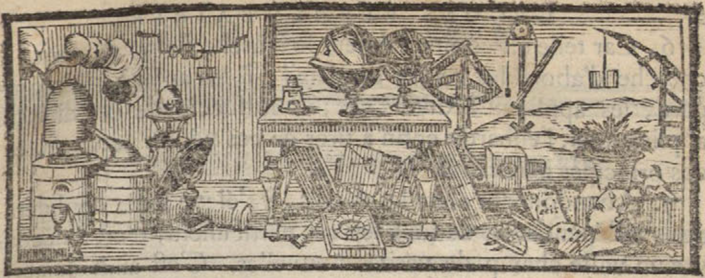
TABLE DES CHAPITRES,

Et de quelques Méthodes principales.

Du

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, 215

LEÇONS



LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE MATHÉMATIQUES.

1. **O**N appelle *Mathématiques*, toutes les Sciences qui ont pour objet la quantité.

2. Et par ce mot, *quantité*, on entend tout ce qui est susceptible d'augmentation & de diminution.

3. Lorsque les parties de la quantité sont exprimées par des nombres, la Science qui a pour objet le Calcul de ces parties, s'appelle *Arithmétique*.

4. Et quand elles sont représentées par des lignes, par des figures, &c. la Science qui s'occupe de leurs rapports, s'appelle *Géométrie*.

5. Mais parce que ce calcul & ces rapports peuvent être généralisés, en substituant aux nombres & aux lignes, des caracteres qui n'aient aucune signification, pas même arbitraire, on conçoit que l'esprit humain a dû s'élever à une science plus étendue que l'Arithmétique & la Géométrie ordinaires,

6. Car telle eſt communément la marche de notre eſprit. Il cherche d'abord les vérités de détail, il les amaſſe, les compare, les applique à divers cas; & le ſuccès de ces diverſes applications, l'enhardit enfin à tirer de ces vérités particulieres, des principes généraux.

7. Abandonnant alors les détails, il s'éleve à des conſidérations indépendantes de tous les cas particuliers, d'où il découvre un vaſte champ de vérités nouvelles. C'eſt ainſi qu'après avoir compté & meſuré long-temps telle ou telle quantité, les Inventeurs parvinrent ſans doute à traiter la quantité en général.

8. On appelle *Algebre*, la ſcience qui contient leurs découvertes ſur cet objet. C'eſt en quelque ſorte une Arithmétique & une Géométrie univerſelles.

9. Au reſte, ce n'eſt pas dans un Livre élémentaire, qu'il faut chercher les différentes routes que ces hommes rares ſe ſont frayées. Une bonne Hiſtoire des Mathématiques eſt le ſeul Livre à conſulter en pareille matiere, & nous citons avec autant de plaiſir que de juſtice, celle de M. *Montucla*.

10. Ce que l'on peut faire de mieux, en rédigeant des Élémens, c'eſt d'y mettre la préciſion, l'ordre & la clarté néceſſaires, pour faire apprendre en peu de temps les vérités fondamentales de la ſcience que l'on traite.

11. Comme l'Arithmétique eſt la partie la plus utile des Mathématiques, & que c'eſt à elle qu'il faut en revenir preſque toujours, pour avoir le réſultat d'un calcul, ceſt par elle que nous commencerons.

La Géométrie élémentaire devroit naturellement la ſuivre; mais comme l'Algebre demontre fort briévement toute la Théorie des proportions, dont l'uſage eſt ſi fréquent en Géométrie, nous placerons les élémens d'Algebre après ceux d'Arithmétique.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

12. UN tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble, & il peut être diviſé en ces parties. Cela eſt évident; mais ces parties doivent être plus grandes ou plus petites, ſuivant le nombre des Diviſions que l'on en aura faites: & alors, plus il y aura de ces parties, plus elles ſeront petites. Cela eſt encore évident.

13. Or le nombre & la grandeur de ces parties variant à chaque diviſion, il faut bien les déſigner par quelque ſigne qui leur ſoit propre: ſans cela, comment pourroit-on les diſtinguer dans tous les cas?

14. Mais faudra-t-il donc introduire un nouveau ſigne, pour chaque nombre différent? Alors, quelle multiplicité de ſignes, & par conſéquent quel embarras! Il ſeroit bien plus ſimple d'exprimer toute ſorte de nombres, en n'employant que peu de ſignes, que l'on conbineroit diverſement.

15. C'eſt à quoi l'on eſt parvenu par un procédé tout-à-fait ingénieux. Depuis un juſqu'à dix, on a repréſenté chaque nombre par un ſigne différent; & par-là, depuis dix juſqu'à l'infini, il n'eſt pas de nombre que l'on ne puiſſe exprimer par une combinaiſon facile de ces ſignes. On les appelle communément *Chiffres*, *Caracteres*, *Figures*, *&c.* Voici leur forme & leur valeur.

1 . . . ſe prononce . . . Un.	6 . . . ſe prononce . . . Six.
2 . . . . Deux.	7 . . . . Sept.
3 . . . . Trois.	8 . . . . Huit.
4 . . . . Quatre.	9 . . . . Neuf.
5 . . . . Cinq.	0 . . . . Zéro.

16. Quand 0 n'eſt précédé d'aucun nombre, il ne ſignifie rien; quand un autre chiffre le précede, alors ce chiffre vaut dix fois plus qu'il n'auroit valu ſans le zéro. Ainſi, pour

exprimer dix, il faut écrire 10; & pour ſoixante, il faut écrire 60.

17. Pareillement tout chiffre placé à la droite d'un autre, le rend dix fois plus grand. Ainſi 16 vaut ſeize; 59 vaut cinquante-neuf, &c.

18. Et c'eſt-là le principe ſimple & fécond du ſyſtême de numération adopté par tant de Peuples. Ce principe une fois poſé, on prononcera facilement tout nombre écrit en chiffres, & on écrira avec la même facilité tout nombre prononcé.

19. Mais il faut bien remarquer que ce principe eſt de pure convention, ainſi que la forme & le nombre des différens chiffres. Si l'on n'avoit voulu employer que deux chiffres, 1 & 0 par exemple, on auroit eu une Arithmétique *Binaire*, au lieu de l'Arithmétique *Décuple* dont nous nous ſervons. Avec douze ou vingt chiffres différens, on auroit eu d'autres façons de compter, & chacune auroit eu ſes avantages & ſes inconvéniens.

20. Puiſqu'un chiffre placé à la droite d'un autre, le rend dix fois plus grand, une unité ſimple peut donc devenir une dixaine, une centaine, un mille, &c. en mettant un, deux, trois, &c. zéros, ou tout autre chiffre, à la droite de 1. Cela poſé, nous diſtinguerons dans un nombre la *colonne*, ou le *rang* des unités ſimples, celui des dixaines, & celui des centaines des mêmes unités ſimples. Ces trois rangs formeront la premiere *tranche* à droite.

21. La tranche ſuivante ſera composée de trois autres rangs, celui des unités de mille, celui des dixaines de mille, & celui des centaines de mille. La tranche qui ſuivra, contiendra les millions. Celle qui viendra enſuite, ſera pour les billions, &c. Le nombre 254 678 319, ſe prononcera donc, *deux cents cinquante-quatre millions ſix cents ſoixante-dix-huit mille trois cents dix-neuf.*

22. D'où il ſuit en général, que pour exprimer des centaines, il faut, ou trois chiffres, ou ſix, ou neuf, &c. de trois en trois. Anſi pour écrire quatre cents unités ſimples, on mettra 400, & pour écrire quatre cents unités de mille, on mettra 400 000.

23. Pour exprimer des dixaines, il faudra donc ou deux chiffres, ou cinq, ou huit, &c. Le nombre vingt-quatre, par exemple, s'écrira 24; vingt-quatre mille, s'écrira, 24000; & 24000000, exprimera vingt-quatre millions.

24. Enfin pour exprimer des unités, un ſeul chiffre ſuffira, quand ce ſeront des unités ſimples; il en faudra quatre, quand ce ſeront des unités de mille; ſept pour des unités de million; & ainſi de ſuite, de trois en trois.

25. D'après cela, il ne faut qu'un peu d'uſage pour prononcer un nombre écrit, ou pour écrire un nombre prononcé. S'il eſt écrit, on le partagera en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, juſqu'à la derniere tranche qui pourra n'avoir qu'un ou deux chiffres. Puis on donnera au premier chiffre à gauche la dénomination qui lui convient. Celle des chiffres ſuivans ſe préſentera d'elle-même. Par exemple, 4527, ſe prononce, quatre mille cinq cents vingt-ſept.

724965, ... ſept cents vingt-quatre mille neuf cents ſoixante-cinq.

12000071 ...... douze millions ſoixante-onze.

Au lieu de partager le nombre en tranches, il eſt plus commode de compter ſeulement les chiffres.

26. Réciproquement pour écrire tout nombre prononcé, il ſuffit de ſavoir combien il faut de chiffres, & quels ſont ceux qu'il faut. Or pour cela, il n'y a qu'à faire attention aux différentes parties de ce nombre, à meſure qu'on le prononce. Qu'il s'agiſſe, par exemple, d'exprimer en chiffres ſept mille deux cents vingt-un, on voit d'abord qu'il faut quatre chiffres (24), & que ces quatre chiffres ſont 7221.

Pour exprimer huit cents cinquante-neuf millions, ſept cents quatre-vingts-quinze milles, ſix cents cinquante-trois, il faut les neuf chiffres ſuivants 859795653.

27. Les Commençants trouvent quelquefois de la difficulté à mettre en chiffres certains nombres, les uns parce qu'ils ſe prononcent diverſement, tel eſt le nombre onze cents onze, les autres parce qu'il doit entrer des zéros dans leur expreſſion, tel eſt le nombre un million trois mille deux. Mais un peu

d'habitude les mettra bien-tôt au-dessus de ces petits embarras.

Il suffira donc de les prévenir, 1.° que pour acquérir promptement cette habitude, il faut calculer beaucoup dans les commencemens; 2.° que pour calculer avec succès, il faut sur-tout de la netteté dans l'arrangement des chiffres. Car si les unités d'un nombre répondent aux dixaines d'un autre, ou si les chiffres ne sont pas bien distincts, on sera fréquemment obligé de recommencer le calcul.

Des Regles de l'Arithmétique.

28. PUisque les Mathématiciens considerent la quantité en tant qu'elle est susceptible d'augmentation ou de diminution, il suit *qu'on peut faire deux sortes d'opérations sur les nombres; l'une par laquelle on augmente une ou plusieurs quantités données, ce qui s'appelle faire une* Addition; *l'autre par laquelle on diminue une grandeur donnée d'une certaine quantité, ce qu'on appelle* Soustraction. Toutes les autres opérations peuvent se réduire à ces deux-là.

On distingue deux sortes de Nombres, *les entiers & les fractionnaires*. Les premiers sont ceux qui contiennent *l'unité* sans reste, tels que deux, sept, mille &c. les autres ne contiennent que des parties de l'unité, tels qu'une demi, qu'un tiers, qu'un vingtieme, &c. & il est clair que ces deux especes de nombres, étant également susceptibles d'accroissement ou de diminution, on peut les assujettir aux mêmes opérations. Nous parlerons d'abord de celles que l'on peut faire sur les entiers.

Si ces nombres ne passent pas dix, auquel cas on les appelle *nombres simples*, on n'a pas besoin de regles pour les calculer, parce qu'on opere alors très-facilement. Mais lorsqu'il s'agit de nombres *composés*, il faut avoir recours à des regles, qui ne sont autre chose que l'art de faire par parties, ce que nous ne pouvons faire tout d'un coup, à cause du peu d'étendue de notre esprit.

De l'Addition.

29. L'Addition ſert à trouver la *ſomme* de pluſieurs grandeurs données.

30. 1.° Si ces grandeurs ſont des nombres ſimples, on n'a pas beſoin de Regle pour en avoir la ſomme; en effet, perſonne n'ignore que la ſomme de 2 ajoutés à 2, eſt 4; ce qui s'exprime ainſi pour abréger; $2 + 2 = 4$ (ce ſigne $+$ ſignifie *plus*, & ce ſigne $=$ ſignifie *égal*). On ſait de même que 3, 6 & 8, ajoutés enſemble, font 17, ou $3 + 6 + 8 = 17$, &c.

31. 2.° Si les grandeurs données ſont des nombres compoſés, comme ſi l'on demandoit la ſomme de ces grandeurs 432 & 363, voici la Regle qu'il faut ſuivre. *Ecrivez ces grandeurs l'une au-deſſous de l'autre, enſorte que les unités ſoient ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c. tirez un trait au-deſſous; & allant de droite à gauche, prenez la ſomme des unités, enſuite celle des dixaines, puis celle des centaines, &c. écrivez ces ſommes ſucceſſivement au-deſſous du trait dans les colonnes correſpondantes.* Ainſi dans la premiere colonne je dis, $2 + 3 = 5$, j'écris 5 au-deſſous; dans la ſeconde, $3 + 6 = 9$, je poſe 9; dans la troiſieme, $4 + 3 = 7$, j'écris 7, & j'ai la ſomme cherchée, 795.

$$\begin{array}{r} 432 \\ 363 \\ \hline 795 \end{array}$$

32. *Lorſque la ſomme d'une des colonnes ſurpaſſe 9*, c'eſt-à-dire, *lorſqu'elle eſt compoſée de dixaines & d'unités, il faut écrire ſeulement les unités au-deſſous de la colonne, & ajouter à la colonne ſuivante le nombre de dixaines qui reſtent.* Les exemples ſuivants éclairciront ceci.

Qu'il faille ajouter enſemble ces trois nombres 6078, 9198, 483, je les écris en colonne, ſuivant la Regle, & je dis, $8 + 8 = 16$, $+ 3 = 19$; c'eſt-à-dire, la ſomme de la premiere colonne eſt 19 ou 1 dixaine & 9 unités; je n'écris que 9 au-deſſous de la colonne des unités, & je tiendrai compte de la dixaine dans la ſomme de la colonne ſuivante. Je dis donc,

$$\begin{array}{r} 6078 \\ 9098 \\ 383 \\ \hline 15759 \end{array}$$

$1+7=8$, $+9=17$, $+8=25$; par la même méthode, je n'écris que 5 sous la seconde colonne, & je retiens les deux dixaines pour la colonne suivante. Je dis donc, $2+0=2$, $+1=3$, $+4=7$, je pose 7 ; enfin je dis, $6+9=15$; & parce que c'est la derniere colonne, j'écris 15 tout de suite. Ainsi la somme cherchée est 15759.

Voici quelques Additions toutes faites pour servir de modele.

$$\begin{array}{r} 4950 \\ 5050 \\ \hline 10000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101740 \\ 270 \\ 21909 \\ \hline 123919 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 147 \\ 45 \\ 312 \\ 56 \\ 200 \\ \hline 760 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40000 \\ 59697 \\ 190 \\ 1009 \\ 9897 \\ \hline 110793 \end{array}$$

33. On voit bien qu'en ajoutant successivement toutes les parties des Nombres donnés, on doit trouver leur somme. Ainsi cette Regle est infaillible.

34. Toute infaillible qu'elle est, cependant il n'est pas rare de se tromper en la pratiquant. Il est donc à propos de la vérifier, en recommençant l'opération ; ce que l'on peut faire, en prenant la somme des colonnes de bas en haut ; car il est évident qu'elle doit être la même.

S'il failloit ajouter un nombre à lui-même plusieurs fois, comme 6, 8, 20 ou 100 fois, &c. alors on se serviroit d'une Addition abrégée, qu'on appelle *la Multiplication* ; nous en parlerons bientôt.

De la Soustraction.

35. La Soustraction sert à trouver la *différence* de deux grandeurs données. Or cette différence est toujours égale à ce qui reste de l'une de ces grandeurs, quand on en a retranché l'autre.

36. On la trouve sans calcul dans les nombres simples. Il est clair, par exemple, que *si l'on ôte 2 de 5, il reste 3*, & qu'ainsi 3 est la différence qu'il y a entre 2 & 5. Cette opération

ration s'exprime ainsi en abrégé, $5 - 2 = 3$; (ce signe — signifie *moins*); de même $9 - 4 = 5$; & $8 - 7 = 1$.

37. Voici la Regle des nombres composés. *Pour soustraire un nombre d'un autre, mettez le plus petit au-dessous du plus grand, comme dans l'Addition, & tirez un trait au-dessous; puis écrivez sous chaque colonne successivement, les excès des unités, dixaines, centaines, &c. du nombre supérieur, sur les unités, dixaines, centaines, &c. du nombre inférieur, & vous aurez l'excès total, ou la différence entre ces deux nombres.*

Ainsi pour soustraire le nombre 243, du nombre 695, je les écris d'abord comme vous le voyez 695
je dis ensuite $5 - 3 = 2$, que je pose sous la colonne des unités: $9 - 4 = 5$, que j'écris sous la colonne des dixaines: $6 - 2 = 4$, que je pose au rang des centaines. La différence cherchée est donc 452.

$$\begin{array}{r} 695 \\ \underline{243} \\ 452 \end{array}$$

38. Il est bien clair qu'en prennant toutes les différences partielles, on doit avoir pour résultat la différence totale: & c'est-là tout le fondement de cette Regle.

39. *Lorsque le chiffre inférieur est plus grand que le chiffre supérieur qui lui répond, il faut d'abord ajouter à ce chiffre supérieur une dixaine prise sur le chiffre qui le suit à gauche; écrire ensuite l'excès du supérieur ainsi augmenté, sur l'inférieur; & se souvenir que par-là on a diminué d'une unité le chiffre supérieur suivant.* Ainsi pour ôter 38 de 64, je dis $4 - 8$, cela ne se peut. Je détache une unité du 6, que je transporte sur la colonne des unités simples, où elle vaut dix, & ajoutant ces dix unités aux quatre autres, je dis $14 - 8 = 6$, que je pose au rang des unités: puis $5 - 3 = 2$. La différence est donc 26.

Par une soustraction semblable à celle-là, on trouveroit que NEWTON, cet homme à jamais célebre, a vécu 84 ans. Il étoit né en 1643, & il mourut en 1727.

40. Si le chiffre qui suit à gauche étoit un *zéro*, ou s'il étoit suivi lui-même d'autres *zéros*, on iroit de proche en proche, jusqu'à ce qu'on eût trouvé un chiffre dont on put prendre une unité. Par la décomposition de cette unité, *tous les zeros précédens deviendroient des 9*, & il resteroit une dixaine

pour l'ajouter au chiffre plus petit que le chiffre inférieur.

Si l'on vouloit, par exemple, ſouſtraire 18 de 200, on diroit 0 — 8, cela ne ſe peut. Alors il faudroit détacher une unité du 2, que l'on décompoſeroit en dix dixaines, & de ces dix dixaines, on en laiſſeroit 9 à la place du ſecond zéro. La dixieme tranſportée ſur le premier, rendroit praticable la ſouſtraction, & on diroit, 10 — 8 = 2; 9 — 1 = 8; 1 — 0 = 1, ce qui donneroit 182 pour reſte.

$$\begin{array}{r} 200 \\ 18 \\ \hline 182 \end{array}$$

Un homme qui devoit 3000₶, en a payé 1296, que lui reſte-t-il à payer? 0 — 6, cela ne ſe peut. Je détache une unité du 3. Cette unité vaut 1000 = 990 + 10. Je dis donc, 10 — 6 = 4; 9 — 9 = 0; 9 — 2 = 7; 2 — 1 = 1. Il lui reſte donc 1704₶ à payer.

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 1296 \\ \hline 1704 \end{array}$$

41. Lorſque le chiffre ſupérieur n'eſt pas aſſez grand, on peut, ſans avoir recours à ceux qui le ſuivent, lui ajouter une dixaine; mais alors, pour compenſer cette Addition, il faut ſuppoſer que le chiffre ſuivant du nombre inférieur eſt augmenté d'une unité. On voit bien que cela revient au même.

Voici quelques autres exemples.

$$\begin{array}{r} 6000 \\ 4000 \\ \hline 2000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1798 \\ 1653 \\ \hline 145 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6532 \\ 5421 \\ \hline 1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5002 \\ 4573 \\ \hline 429 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 150001 \\ 76385 \\ \hline 73616 \end{array}$$

42. *Quand une Souſtraction eſt bien faite, il faut néceſſairement que le reſte ajouté au nombre ſouſtrait, ſoit égal au nombre dont on avoit à le ſouſtraire.* Car un tout doit être égal à ſes parties priſes enſemble: & c'eſt de-là que l'on a déduit un moyen prompt & facile de vérifier les Souſtractions. Ajoutez donc chaque fois le reſte au plus petit nombre, & voyez ſi leur ſomme eſt égale au plus grand.

43. S'il falloit ſouſtraire pluſieurs fois le même nombre d'un autre, on le feroit plus brievement par la *Diviſion*, dont nous parlerons dans peu.

De la Multiplication.

44. On ſe ſert de la Multiplication pour trouver ſans beaucoup de calcul la ſomme d'un nombre que l'on veut ajouter pluſieurs fois à lui-même. Pour trouver, par exemple, la ſomme de 12 ajouté neuf fois, il faudroit (31) faire une colonne de neuf 12, & en prendre la ſomme 108; par la Multiplication, on trouve tout de ſuite cette même ſomme 108.

45. Dans cet Exemple, on appelle 12 *le Multiplicande*, 9 *le Multiplicateur*, & 108 *le Produit*; en général le multiplicande & le multiplicateur, s'appellent les *racines* ou les *facteurs* du produit.

46. *Le produit eſt donc une ſomme du multiplicande pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur:* ou ce qui eſt le même, le produit contient autant de fois le multiplicande, que le multiplicateur contient de fois l'unité.

D'où il faut conclure, que dans chaque multiplication, *l'unité eſt au multiplicateur, comme le multiplicande eſt au produit.* (Souvenez-vous-en bien).

47. Si au lieu d'écrire neuf 12 en colonne pour en prendre la ſomme, on écrivoit douze 9, il eſt clair qu'on trouveroit la même ſomme 108; d'où il ſuit que *lorſqu'on a deux nombres à multiplier, on peut indifféremment prendre celui qu'on voudra pour multiplicande, & l'autre ſera le multiplicateur.*

48. Il n'y a pas de Regle pour la Multiplication des nombres ſimples; on voit facilement que le produit de 2 multiplié par 3, eſt 6; ce qui s'exprime en abrégé $2 \times 3 = 6$, (le ſigne $\times$ ſignifie *multiplié par*); de même $3 \times 4 = 12$, $7 \times 5 = 35$, &c. Il faut même ſavoir par mémoire les produits des nombres ſimples, pour pratiquer facilement les Regles de la Multiplication.

Voici ceux qui ſont un peu grands.

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$
$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$

$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$
$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$
$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$
$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$
$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$
$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$

49. Lorſqu'on a deux nombres compoſés, comme 32 & 24, à multiplier l'un par l'autre, *il faut*, 1.° *poſer celui qu'on a choiſi pour multiplicateur*, (c'eſt ordinairement le plus petit) *au-deſſous du multiplicande*, comme dans l'Addition ; ainſi je poſe 24 ſous 32.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 768 \end{array}$$

2.° Il faut *écrire au-deſſous, en allant de droite à gauche, le produit de chaque chiffre du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur.* Ainſi *j'écris d'abord le produit de chaque chiffre du multiplicande par les unités du multiplicateur*, en diſant, $2 \times 4 = 8$, je poſe 8 ; $3 \times 4 = 12$, je poſe 12 : après cela, *j'écris auſſi de droite à gauche, en commençant par la colonne des dixaines, le produit des chiffres du multiplicande par les dixaines du multiplicateur*, en diſant, $2 \times 2 = 4$, je poſe 4 au rang des dixaines ; $3 \times 2 = 6$, je poſe 6 à gauche. 3.° *Enfin il faut prendre la ſomme de ces* deux *produits*, & j'ai 768 pour produit total.

50. Pour concevoir cette opération, on peut, en la faiſant, raiſonner de la ſorte : le produit de 32 par 24 eſt évidemment égal aux dixaines & aux unités de 32, priſes autant de fois

qu'il y a d'unités dans 24; c'est-à-dire, prises 4 fois, & 2 dixaines de fois. Il faut donc dire d'abord, les unités du multiplicande, prises 4 fois, produisent 8 unités, que j'écris. Ensuite les 3 dixaines du multiplicande, prises 4 fois, produisent 12 dixaines; j'écris 12 à gauche de 8. Ainsi les 3 dixaines & les 2 unités de 32, prises 4 fois, produisent 128.

Je viens maintenant aux 2 dixaines du multiplicateur, & je dis, les 2 unités du multiplicande, prises 2 dixaines de fois, produisent 4 dixaines. J'écris 4 dans la seconde colonne à gauche, ou, ce qui revient au même, j'écris 4 dans la colonne de son multiplicateur, parce que 4 exprime des dixaines, & qu'ainsi il doit être dans la colonne des dixaines. Enfin je dis, les 3 dixaines du multiplicande, prises 2 dixaines de fois, produisent 6 dixaines de dixaines; c'est-à-dire, 6 centaines; j'écris 6 à gauche de 4, afin qu'il se trouve dans le rang des centaines. Donc les 3 dixaines & les 2 unités du multiplicande, prises 2 dixaines de fois, produisent soixante-quatre dixaines, ou 6 centaines & 4 dixaines. J'ajoute ce produit à celui que j'ai trouvé plus haut, afin d'avoir le produit de toutes les parties du multiplicande par toutes celles du multiplicateur. Ce produit total est donc 768.

EXEMPLE de la Multiplication des nombres un peu composés. On cherche le produit de 564 par 249. Ayant disposé ces nombres suivant la Regle, je multiplie d'abord 564 par les 9 unités du multiplicateur, en disant $4 \times 9 = 36$, je pose 6, & retiens 3; $6 \times 9 = 54$; mais à cause de 3 que je viens de retenir, je dis; $54 + 3 = 57$, je pose 7, & retiens 5: $5 \times 9 = 45$: or $45 + 5$, que j'ai retenus, $= 50$, je pose 50 de suite, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier par 9.

$$\begin{array}{r} 564 \\ \underline{249} \\ 5076 \\ 2256 \\ \underline{1128} \\ 140436 \end{array}$$

Je viens ensuite aux 4 dixaines du multiplicateur, par lesquelles je multiplie 564, en disant, $4 \times 4 = 16$; je pose 6 au rang des dixaines, & retiens 1; $6 \times 4 = 24$, $+ 1 = 25$, je pose 5, & retiens 2; $5 \times 4 = 20$, $+ 2 = 22$, j'écris 22.

Enfin, je multiplie 564 par les 2 centaines du multiplicateur, en diſant $4 \times 2 = 8$, je poſe 8 au rang des centaines : $6 \times 2 = 12$, je poſe 2, & retiens 1 ; $5 \times 2 = 10$, $+ 1 = 11$: je poſe 11.

Je prends la ſomme de ces différens produits, & j'ai 140436 pour produit total.

51. Lorſqu'il y a un ou pluſieurs zéros à la fin de l'un ou des deux nombres donnés, on abrege beaucoup l'opération, en ne multipliant que les chiffres, & mettant à la ſuite de leur produit autant de zéros qu'il y en a au bout des nombres donnés.

Par exemple, pour multiplier 120 par 120, on mettra deux zéros à la ſuite de 144, produit de 12 par 12. Car il eſt bien évident, que de dixaines, multipliées par des dixaines, produiſent des centaines. Or ce ſont 12 dixaines que l'on a ici à multiplier par 12 dixaines. Leur produit doit donc être 144 centaines $= 14400$. On trouveroit de même que $406000 \times 10700 = 4\,344\,200\,000$.

Voici quelques autres exemples de Multiplication.

$$\begin{array}{r} 466 \\ 1002 \\ \hline 932 \\ 466 \\ \hline 466932 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,000\,000 \\ 1\,000 \\ \hline 1\,000\,000\,000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 65464 \\ 4053 \\ \hline 196392 \\ 327320 \\ 261856 \\ \hline 265325592 \end{array}$$

52. Pour connoître ſi l'on ne s'eſt pas trompé dans la multiplication, on peut changer l'ordre des nombres donnés, c'eſt-à-dire, du multiplicateur, en faire le multiplicande, & réciproquement ; car on doit toujours trouver le même produit (47).

53. On peut auſſi ſe ſervir de ce qu'on appelle la preuve par 9. C'eſt une opération ingénieuſe & prompte, qu'il eſt bon de ſavoir. Voici en quoi elle conſiſte.

1.° Ajoutez les chiffres du multiplicande, comme s'ils exprimoient tous des unités ſimples, & de leur ſomme retranchez

9 auſſi ſouvent que faire ſe pourra. Ou il ne vous reſtera rien après cette ſouſtraction, ou il vous reſtera un nombre moindre que 9. Dans le premier cas écrivez zéro. Dans le ſecond, écrivez le chiffre qui vous reſte.

2.° Faites de même pour les chiffres du multiplicateur, & vous aurez un ſecond reſte que vous pourrez écrire au-deſſous du premier.

3.° Multipliez ces deux reſtes, & de leur produit, retranchez 9 auſſi ſouvent que vous le pourrez. Vous aurez un troiſieme reſte, que vous mettrez à côté des deux premiers.

4.° Ajoutez les chiffres du produit, comme ceux des racines, retranchez de leur ſomme tous les 9 qu'elle contient, & mettez le quatrieme reſte au-deſſous du précédent.

Si la multiplication que vous voulez vérifier eſt bonne, ce dernier reſte doit être le même que l'avant-dernier.

Je voudrois ſavoir, par exemple, ſi 97350 eſt le véritable produit de 354 par 275.

J'ajoute les chiffres du multiplicande, en diſant $3 + 5 + 4 = 12$; j'en ôte 9; reſte 3 que je mets ainſi en réſerve.

3	6
5	6

J'écris au-deſſous le reſte 5 provenant des chiffres du multiplicateur.

Je multiplie le premier reſte 3 par le ſecond reſte 5, & du produit 15 j'ôte 9. Reſte 6, que j'écris vis-à-vis de 3.

Enfin j'ajoute de même les chiffres du produit 97350, & je trouve qu'après en avoir retranché deux fois 9, il reſte encore 6, comme dans la derniere ſouſtraction. D'où je conclus que l'opération eſt bonne. Et voici ſur quoi eſt fondée cette concluſion.

54. Si j'ôte de 10, de 100, de 1000, &c. tous les 9 qui y ſont contenus, il eſt évident par la nature même de notre Arithmétique, qu'il reſtera toujours 1. En faiſant la même opération ſur 20, ſur 200, ſur 2000, &c. je trouverai conſtamment le reſte 2. En général tout nombre exprimé par un chiffre, ſuivi d'un ou de pluſieurs zeros, donnera toujours ce chiffre pour reſte après la ſuppreſſion des 9 qu'il contient.

55. Or il n'eſt aucun nombre que l'on ne puiſſe décompoſer, aux ſeules unités près, en nombres entiers & décimaux. Notre multiplicande, par exemple, $354 = 300 + 50 + 4$. On trouvera donc le même reſte, après avoir ôté les 9 de la ſomme de $3 + 5 + 4$, ajoutés comme unités ſimples, que ſi on les avoit ôtés ſucceſſivement de $300 + 50 + 4$. Il en eſt de même pour le multiplicateur 275; & c'eſt-là le fondement des deux premieres parties de la Regle.

56. Cela poſé, je remarque qu'en multipliant un nombre, dans lequel 9 eſt contenu un certain nombre de fois ſans reſte, par un autre nombre qui contienne auſſi 9 ſans reſte, le produit doit pareillement le contenir ſans reſte.

57. Si donc 354 le contient avec un reſte 3, & ſi 275 le contient avec un reſte 5, leur produit doit évidemment le contenir avec un reſte 15. Supprimant donc le 9 contenu dans ce reſte 15, il doit reſter 6; & c'eſt effectivement ce qui eſt reſté après avoir ôté tous les 9 de 97350.

Voilà le fondement de la quatrieme partie de la Regle. Voici celui de la troiſieme.

58. Pour ſavoir ce qui reſte du produit de deux nombres quelconques, après la ſuppreſſion de tous les 9, il n'y a qu'à multiplier le reſte du multiplicande par celui du multiplicateur, & ſouſtraire de ce produit les 9 qu'il contient, le reſte ſera toujours celui que l'on cherche.

59. On peut le démontrer généralement de cette maniere. Soit le multiplicande $= 9B + m$; & le multiplicateur $= 9C + n$. (m & n ſont les deux reſtes). Le produit ſera $81BC + 9Cm + 9Bn + mn$. Or les trois premiers termes de ce produit ſont évidemment diviſibles ſans reſte par 9. Si le quatrieme l'eſt auſſi, tout le produit l'eſt de même. S'il provient un reſte de la diviſion de mn par 9, ce reſte ſera celui que l'on cherche. Donc pour ſavoir, &c.

Achevons d'éclaircir cette méthode par un autre exemple.

65464×4053, nous a donné (51) 265 325 592 pour produit. Il faut le vérifier. Je dis donc. Le premier reſte eſt 7; le ſecond eſt 3; leur produit eſt 21; ſon reſte eſt 3; celui du produit total l'eſt auſſi. L'opération eſt donc bonne.

$$\begin{array}{c|c} 7 & 3 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

60. Obſervez, 1.° qu'on peut ſouſtraire les 9 à meſure qu'on

qu'on en trouve dans le cours de l'Addition des chiffres. Cela abrege. 2.° Que 3 pourroit servir ainsi que 9. 3.° Qu'il y a deux erreurs à éviter. L'une qui consiste dans la transposition des chiffres du produit total, comme si au lieu d'écrire 97350, on écrivoit 79350., ou 57903. L'autre, qui est de mettre dans ce produit un zéro au lieu d'un 9. Car alors, le résultat de la vérification seroit le même, & cependant les produits seroient bien différens. Mais des erreurs difficiles à commettre, ne doivent pas empêcher de se servir d'une regle aussi expéditive. Au reste la division tend directement à vérifier la multiplication.

De la Division.

61. La Division sert à trouver combien de fois un nombre est contenu dans un autre ; & comme il ne peut y être contenu qu'autant de fois qu'il peut en être soustrait, la division est un moyen abrégé de faire ces soustractions.

Ainsi pour savoir combien 12 contient de fois 4, la maniere la plus naturelle est d'ôter 4 de 12 ; reste 8 : ensuite 4 de 8 ; reste 4 : enfin 4 de 4 ; reste zéro : d'où l'on voit que la quantité 12 est épuisée, après que 4 en a été retranché 3 fois, & qu'ainsi 12 contient 4 précisément 3 fois. Mais cette méthode seroit trop longue, si les nombres étoient fort grands. On a donc imaginé un moyen de trouver en peu de temps combien de fois une quantité appellée *le dividende*, contient une autre quantité appellée *le diviseur*. On appelle *Quotient* le nombre qui exprime combien de fois le dividende contieut le diviseur.

Dans cet exemple 12 est le dividende, 4 le diviseur, & 3 le quotient.

62. Il suit clairement de ces notions, I.° que *le dividende contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient de fois l'unité.*

63. *Et par conséquent on a toujours : l'unité est au quotient, comme le diviseur est au dividende.*

64. II.° Que le diviseur pris autant de fois que le quotient contient l'unité, doit être égal au dividende, (car alors c'est

remettre le diviſeur autant de fois qu'on l'a ôté, ce qui doit rétablir le dividende) : ou, ce qui eſt la même choſe, *le produit du diviſeur par le quotient eſt égal au dividende.*

65. Donc, 1.° *pour ſavoir ſi un quotient eſt exact, il faut le multiplier par le diviſeur, & en comparer le produit avec le dividende.*

66. On peut regarder le dividende comme le produit d'une multiplication, dont le diviſeur & le quotient ſont les racines. Ainſi diviſer le dividende par le diviſeur pour avoir un quotient, c'eſt la même choſe que de diviſer un produit par une de ſes racines pour trouver l'autre racine. Donc :

2.° *Quand on connoît un produit & une racine de ce produit, pour trouver l'autre racine, il faut diviſer le produit par la racine connue.*

67. III.° Par l'opération précédente, 12 ſe trouve partagé en trois parties égales, dont chacune eſt 4, ou en 4 parties égales, dont chacune eſt 3. Donc, *pour partager une quantité en autant de parties égales qu'on veut, il faut la diviſer par ce nombre de parties, & le quotient exprime de quelle grandeur eſt chacune de ces parties.*

68. I. Cas. *Lorſque le dividende & le diviſeur ſont des nombres ſimples*, on en trouve le quotient ſans opérations. Par exemple, on voit que 8 contient 4 préciſément 2 fois, ou que le quotient de 8 diviſé par 4 eſt 2. Pour abréger, on ſe ſert de cette expreſſion $\frac{8}{4} = 2$. On écrit le diviſeur immédiatement au-deſſous du dividende, & on les ſépare par un trait, qui ſignifie *diviſé par.* De même $\frac{9}{3} = 3$, puiſque $3 \times 3 = 9$. Et $\frac{6}{2} = 3$, puiſque $3 \times 2 = 6$.

69. *Quand on ne trouve pas un quotient exact*; comme ſi l'on vouloit diviſer 9 par 4, où l'on voit que 9 contient 4 plus de deux fois, mais moins que 3 fois, & qu'ainſi le quotient véritable eſt entre 2 & 3; *alors on écrit pour quotient le plus petit des deux nombres entre leſquels le vrai quotient doit ſe trouver : on multiplie ce nombre par le diviſeur, on retranche du dividende le produit de cette multiplication, & l'on a un reſte qu'on écrit à côté du quotient, en mettant le diviſeur au-deſſous de ce reſte, dont on le ſépare par un trait.* Par exemple, il faut dire,

9 contient 4 deux fois & plus, mais non pas trois fois : j'écris donc 2 pour quotient, je fais $2 \times 4 = 8$; ensuite $9 - 8 = 1$; & j'ai $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$; ce qui signifie que 9 divisé par 4, a 2 pour quotient, & qu'il reste encore une des unités de 9 à partager en quatre parties. De même $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$; $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

70. REMARQUES. I. La division consiste donc en trois opérations. 1.° *On divise le devidende par le diviseur, pour avoir un quotient :* 2.° *on multiplie le diviseur par le quotient, pour avoir un produit ;* 3.° *on ôte ce produit du dividende, pour avoir un reste.*

71. II. Si le diviseur est plus grand que le dividende, comme s'il falloit diviser 4 par 7, alors on se contente d'écrire $\frac{4}{7}$ comme un reste de division, & cette expression représente le quotient.

72. Ces sortes de Quotiens, ou ces restes de divisions, ou même, en général, toute expression qui indique une division par un trait qui sépare deux quantités écrites l'une au-dessus de l'autre, s'appellent *des fractions*, ou des *nombres rompus :* & par opposition, on appelle *des entiers* ou *nombres entiers*, les nombres ou les expressions qui sont sans ce trait.

73. III. Une Quantité qui peut se diviser exactement & sans reste par un nombre, s'appelle un *multiple* de ce nombre, parce qu'elle est égale au produit de ce nombre par le Quotient de la division. Ainsi 8 est un multiple de 4 & de 2, & 12 est un multiple de 6, de 4, de 3, & de 2 : tout nombre est un multiple de l'unité : mais 8 n'est pas un multiple de 7, ni de 6, ni de 5, ni de 3. De même 11, n'est multiple d'aucun nombre entier plus grand que 1.

74. IV. La Quantité dont une autre est multiple, s'appelle *une aliquote* ou une *partie aliquote* de ce multiple : ainsi 4 & 2 sont les aliquotes de 8.

75. V. Tout nombre entier qui n'est multiple d'aucun nombre entier plus grand que l'unité, s'appelle *nombre premier.* On trouve dans différens Auteurs des Tables de tous ces nombres. Voici ceux qui sont moindres que 100.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

76. II. Cas. *Lorsque le dividende est un nombre composé, & que le diviseur est un nombre simple.* 1.° Je cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le premier chiffre du dividende, en allant de gauche à droite, (car la division se fait toujours de gauche à droite). 2.° J'écris le chiffre qui exprime ce nombre de fois, & je multiplie le diviseur par ce chiffre. 3.° Je soustrais leur produit du premier chiffre du dividende; & j'abaisse le second chiffre à côté du reste, s'il y en a. Après quoi, je recommence les mêmes opérations, jusqu'à ce que je sois parvenu à diviser successivement tous les chiffres du dividende.

Ainsi pour diviser 7953 par 3, j'écrirai d'abord le diviseur à droite du dividende, comme on le voit ici.

7953	3
. . .	2651
6	
19	
18	
15	
15	
03	
3	
0	

Ensuite je dirai, en 7 combien de fois 3? deux fois. J'écris donc 2 au quotient. Je multiplie 3 par 2, & je soustrais le produit 6; de 7 il me reste 1, à côté duquel j'abaisse 9.

Puis je dis; en 19 combien de fois 3? six fois. Je mets 6 au quotient. Je multiplie 3 par 6, & je soustrais le produit 18, de 19. Il me reste encore 1, qui, ajouté au chiffre suivant 5, fait 15.

Le même procédé dans cette troisieme division me fait trouver 5 pour quotient, 15 pour produit, 0 pour reste.

J'abaisse le 3, & je divise comme à l'ordinaire. Le quotient est 1, le produit 3, le reste 0. D'où je conclus que 3 est contenu 2651 fois exactement dans 7953. Pour m'en assurer, je multiplie 2651 par 3, je retrouve le dividende. L'opération est donc bonne.

77. Quand le diviseur est si petit, on a plutôt fait de prendre sur chaque chiffre du dividende la partie désignée par le diviseur. On auroit pu dire, par exemple, dans la derniere division, le tiers de 7 est 2; il reste 1, qui, ajouté à 9, fait 19. Le tiers de 19 est 6; le tiers de 15 est 5; celui de 3 est 1: donc 2651 est le tiers cherché de 7953.

Voici quelques autres exemples de cette abréviation.

$$12538\left\{\begin{array}{l}2\\ \hline 6269\end{array}\right. \qquad 8764\left\{\begin{array}{l}5\\ \hline 1752\frac{4}{5}\end{array}\right. \qquad 97593\left\{\begin{array}{l}7\\ \hline 13941\frac{6}{7}\end{array}\right.$$

78. REMARQUES. I. On commence la diviſion par la gauche, afin que s'il y a des reſtes dans les premiers chiffres, on puiſſe les joindre aux chiffres ſuivants. En commençant par la droite, on ſeroit preſque toujours obligé de revenir ſur ſes pas.

79. II. Si le premier chiffre du dividende eſt plus petit que le diviſeur, il faut chercher combien de fois celui-ci eſt contenu dans les deux premiers du dividende.

80. III. Lorſqu'après une ſouſtraction il ne reſte rien, & que le chiffre abaiſſé eſt moindre que le diviſeur, il faut mettre zéro au quotient, & abaiſſer le chiffre ſuivant, s'il y en a.

81. IV. Quand après une ſouſtraction, il ſe trouve un reſte, ce reſte doit toujours être plus petit que le diviſeur. S'il lui étoit même égal, c'eſt qu'alors le chiffre mis en dernier lieu au quotient ſeroit trop petit d'une unité.

82. V. A meſure que l'on abaiſſe un chiffre, il eſt à propos de le marquer par un point : cela ſert à reconnoître chaque fois où l'on en eſt, & de combien de chiffres le quotient doit être compoſé.

83. VI. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient, parce que l'Arithmétique dont nous nous ſervons eſt décimale.

84. VII. Au lieu d'écrire le diviſeur à droite du dividende, d'autres l'écrivent à gauche, & mettent le quotient à droite, de cette maniere .... $3)7953(2651.$

$$\begin{array}{l}6\\ \hline \text{\&c.}\end{array}$$

D'autres mettent le diviſeur ſous le dividende, & le quotient à côté. Ils écriroient, par exemple, $\frac{7953}{3} = 2651$. D'autres les diſpoſent ainſi, $7953 : 3 = 2651$. Mais tout cela revient au même ; ſeulement, il paroît que la premiere de ces diſpoſitions eſt plus commode pour multiplier & ſouſtraire dans le cours de la diviſion.

85. III. Cas. *Si le dividende & le diviſeur ſont des nombres compoſés*, par exemple, s'il faut diviſer 147475 par 362, *je conſidere d'abord en combien des premiers chiffres du dividende, le diviſeur peut être contenu ;* & parce que 362 ne peuvent être contenus dans les trois premiers chiffres 147, mais ſeulement dans les quatre premiers 1474, *je mets un point ſous le* 4, *& j'écris le diviſeur* 362 *à côté du dividende.*

$$\begin{array}{r|l} 147475 & 362 \\ \dot{}\,\dot{}\,\dot{} & 407\frac{141}{362} \\ 1448 & \\ 2675 & \\ 2534 & \\ 141 & \end{array}$$

Le premier membre de la diviſion conſiſte donc à diviſer 1474 par 362.

Comme cette diviſion ne ſe peut faire tout d'un coup, je diviſe ſeulement les centaines de 1474 par les centaines de 362, en diſant, en 14 combien de fois 3 ? 4 fois & plus ; je multiplie le diviſeur 362 par le quotient trouvé 4, pour ſavoir ſi le produit peut être ſouſtrait du dividende 1474. Je vois que ce produit eſt 1448, plus petit que 1474. Je mets donc 4 au quotient. Je ſouſtrais enſuite 1448 de 1474. Il me reſte 26, & la premiere partie de la diviſion eſt faite.

J'abaiſſe à côté du reſte 26 *le premier chiffre* 7, *que je marque d'un point ; & le ſecond membre de la diviſion conſiſte à diviſer* 267 *par* 362 : je diviſe de même les centaines de 267 par celles de 362, en diſant, en deux combien de fois 3 ? Il n'y eſt pas contenu même une fois ; je poſe donc 0 au quotient, je multiplie 362 par 0, & j'ôte le produit, qui eſt auſſi 0, du dividende 267, reſtent 267 : & la ſeconde partie eſt finie.

J'abaiſſe à côté de ce reſte le dernier chiffre 5 ; *& le troiſieme membre de la diviſion conſiſte à deviſer* 2675 *par* 362. Je dis donc, en 26 combien de fois 3 ? 8 fois ; je multiplie 362 par 8, & je trouve le produit 2896, lequel étant plus grand que le dividende 2675, me fait connoître que 8 eſt trop grand. Je le diminue donc d'une unité ; & après avoir multiplié 362 par 7, je vois que le produit 2534 peut être ſouſtrait de 2675. Souſtraction faite, reſte 141 : & parce qu'il n'y a plus de chiffres à abaiſſer, la diviſion eſt finie. Ainſi le quotient eſt $407 +$ la fraction $\frac{141}{362}$, que je mets à côté.

86. *La preuve de l'exactitude de ces opérations ſe fait en ajoutant le dernier reſte de la diviſion au produit du diviſeur par le quotient.* Leur ſomme doit être le dividende. Car s'il eſt vrai, par exemple, que 362 ſoit contenu 407 fois dans 147475, avec le reſte 141, ne faut-il pas néceſſairement que $362 \times 407 + 141 = 147475$?

87. On peut auſſi s'aſſurer qu'une diviſion eſt exacte en ſupprimant les 9 contenus; 1.° dans le diviſeur; 2.° dans le quotient; 3.° dans le produit de leurs reſtes; 4.° dans le dividende. Car après ces ſouſtractions, les deux derniers reſtes doivent être égaux, comme dans la multiplication.

88. Obſervez ſeulement que lorſque la diviſion n'a pu ſe faire ſans reſte, il faut ajouter les chiffres de ce reſte comme des unités ſimples, au produit du reſte du diviſeur par celui du quotient, & ôter de cette ſomme tous les 9 qu'elle contient.

Vérifions le dernier quotient par cette méthode. Le reſte du diviſeur 362 eſt 2; celui du quotient 407 eſt 2 auſſi. Leur produit eſt 4. Le reſte 141 de la diviſion $= 6$, que j'ajoute à 4. La ſomme eſt 10. J'en ôte 9; reſte 1, qui doit reſter auſſi du dividende 147475, ſi l'opération eſt bonne; & c'eſt effectivement ce qui reſte.

2	1
2	1

89. REMARQUES. I. Au lieu de demander combien de fois tout le diviſeur eſt contenu dans tout le dividende, on demande ſeulement combien de fois le premier chiffre à gauche du diviſeur, eſt contenu dans le premier, ou dans les deux premiers chiffres du dividende. C'eſt que le produit de ce premier chiffre du diviſeur par le quotient, décide communément du nombre de fois que tout le diviſeur eſt contenu dans le dividende.

90. II. Je dis *communément*; car il arrive pluſieurs fois que ce produit peut être ſouſtrait du premier ou des deux premiers chiffres du dividende, & que lorſqu'on vient à comparer le produit total du diviſeur par le même quotient, avec la partie correſpondante du dividende, la ſouſtraction n'eſt plus poſſible.

91. III. Cela arrive ſur-tout, lorſque le ſecond chiffre du diviſeur eſt au-deſſus de 5, & que le premier eſt au-deſſous. Mais alors, on voit ce que donne le produit de ces deux premiers chiffres par celui que l'on veut mettre au quotient, & on ne tarde pas à reconnoître le chiffre qui convient.

92. IV. Quand le diviſeur eſt terminé par des zéros, on abrege la diviſion, en ſéparant à la fin du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros à la fin du diviſeur; on diviſe enſuite les autres par les chiffres ſeuls du diviſeur; on joint le reſte de la diviſion, s'il s'en trouve, à la gauche des chiffres qu'on a ſéparés, & on en fait une fraction: Par exemple, ayant à diviſer 238873 par 3600, je diviſe 2388 par 36, je trouve le quotient 66, & un reſte 12: je dis donc que le quotient cherché eſt $66\frac{1273}{3600}$. Le quotient de 324755 diviſé par 300, eſt $1082\frac{155}{300}$. Le quotient de 843554, diviſé par 1000, eſt $843\frac{554}{1000}$.

93. V. Enfin quand le dividende & le diviſeur ſont terminés par des zéros, on peut abſolument effacer le même nombre de zéros dans l'un & dans l'autre, & faire le reſte de la diviſion ſuivant les Regles & les Remarques précédentes. Ainſi ayant à diviſer 417000 par 2500; je diviſe ſeulement 4170 par 25, & le quotient eſt $166\frac{20}{25}$. Pour diviſer 43495000 par 2850000, je diviſe ſeulement 43495 par 2850; & j'ai $15\frac{745}{2850}$. De même le quotient de 100000 diviſé par 1700 eſt $58\frac{14}{17}$.

94. VI. On a dû voir par ce qui précede, que la diviſion eſt l'inverſe de la multiplication, & que par conſéquent ces deux regles peuvent ſe ſervir mutuellement de preuve.

95. VII. Ainſi pour apprendre en peu de temps la pratique de la diviſion, commencez par multiplier un nombre par un autre. Diviſez enſuite leur produit par l'un des deux (par le plus grand ordinairement, pour avoir plutôt fait): vous devez trouver l'autre pour quotient, ſans reſte. Vous ſaurez donc à chaque fois quel chiffre il faut mettre au quotient, & par-là vous acquerrez promptement la facilité de diviſer tous les autres nombres. Voici deux exemples.

Multipl

Multipl.	*Divis.*		*Multipl.*	*Divis.*	
625	46250	625	394	790758	394
74	4375	74	2007	788	2007
2500	2500		2758	2758	
4375	2500		78800	2758	
46250	0		790758	0	

DES FRACTIONS.

De la nature des Fractions en général, de leurs valeurs, & de leurs comparaisons.

96. UN Tout, quel qu'il ſoit, peut être diviſé en deux moitiés, en quatre quarts, en cinq cinquiemes, &c. & la réunion de ces parties doit reproduire le tout: mais ſi on ne les réunit pas toutes, il manquera quelque choſe à la formation du tout. On n'en aura qu'une portion plus ou moins grande, & c'eſt cette portion que l'on déſigne en général par le mot de *fraction*.

97. L'idée de fraction comprend donc *l'eſpece* & *le nombre* de parties que l'on veut prendre pour avoir une portion plus ou moins grande d'un certain tout que l'on appelle *unité*. Ainſi $\frac{1}{3}$, ſignifie que l'unité étant diviſée en 3 parties égales, on en a pris une: la fraction $\frac{4}{5}$, exprime que l'unité étant diviſée en 5 parties égales, on en a pris 4, &c.

Le nombre ou terme ſupérieur s'appelle *le numérateur* de la fraction, & l'inférieur s'appelle *le dénominateur*; ainſi dans la fraction $\frac{4}{5}$, le numérateur eſt 4, & le dénominateur eſt 5.

98. Une fraction proprement dite, eſt donc une quantité moindre que l'unité, parce que ſon numérateur eſt plus petit

que ſon dénominateur. Cependant, il arrive ſouvent qu'on rencontre des expreſſions en forme de fractions, dont le numérateur eſt égal, ou même plus grand que le dénominateur. Or quand le numérateur eſt égal au dénominateur, la fraction eſt égale à l'unité; car $\frac{4}{4}$, ſignifiant que d'une unité diviſée en 4 parties égales, on en a pris 4, il eſt clair qu'on a pris l'unité entiere, & qu'ainſi $\frac{4}{4} = 1$. Pour la même raiſon $\frac{11}{11} = 1$; $\frac{99}{99} = 1$; &c. Et quand le numérateur ſurpaſſe le dénominateur, la valeur de la fraction ſurpaſſe l'unité: ainſi $\frac{12}{4} = 3$; & $\frac{49}{7} = 7$, &c.

99. *On ne peut diſtinguer facilement quelle eſt la plus grande de deux fractions, à moins qu'elles n'aient ou un même numérateur, ou un même dénominateur;* ainſi on ne voit pas d'abord qu'elle eſt la plus grande de ces deux fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$. Mais, 1.° *ſi elles ont un même numérateur, celle qui a un dénominateur plus petit eſt la plus grande:* ainſi il eſt clair que la fraction $\frac{1}{2}$ eſt plus grande que la fraction $\frac{1}{4}$; la fraction $\frac{3}{5}$ eſt plus grande que $\frac{3}{7}$, &c.

3.° *Si deux fractions ont le même dénominateur,* alors *la plus grande eſt celle qui a le plus grand numérateur.* Ainſi il eſt clair que $\frac{2}{3}$ ſont plus que $\frac{1}{3}$; la fraction $\frac{3}{4}$ eſt plus grande que $\frac{1}{4}$.

100. Les valeurs des fractions qui ont un même numérateur, ſont entre elles réciproquement comme les dénominateurs; & celles des fractions qui ont un même dénominateur, ſont entre elles directement comme leurs numérateurs.

101. *La valeur d'une fraction ne change pas, ſoit qu'on multiplie, ſoit qu'on diviſe ſes deux termes par une même quantité.* Car il eſt évident que celui qui a $\frac{1}{2}$, a autant que celui qui a $\frac{2}{4}$, ou que celui qui a $\frac{3}{6}$ ou $\frac{4}{8}$, &c. Or $\frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$, $\frac{3}{6} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$, $\frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$, &c. De même celui qui a $\frac{4}{8}$, n'a pas plus que celui qui a $\frac{3}{6}$ ou $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$, &c. Si donc on diviſe les deux termes de la fraction $\frac{4}{8}$ par 2 ou par 4, on a des fractions de même valeur que $\frac{4}{8}$. On trouvera une démonſtration générale de cette propriété, dans l'article des raiſons géométriques.

Il ſuit de-là qu'*il y a une infinité de fractions de même valeur, quoique exprimées en termes différens.*

Des Opérations arithmétiques qu'on peut faire sur les Fractions en général.

LEs Opérations arithmétiques sur les Fractions sont de deux especes; les unes s'appellent *Réductions*, les autres sont les quatre Regles ordinaires.

Des réductions des Fractions.

102. Les réductions des Fractions sont différentes transformations qu'on leur fait subir, sans changer leur valeur, pour rendre les autres opérations plus commodes.

103. I. *Pour réduire les entiers en fractions.*

1.° On peut réduire en général tout nombre en forme de fraction, en lui mettant 1 pour dénominateur; ainsi 6 mis en forme de fraction, est $\frac{6}{1}$.

2.° Pour réduire un nombre entier en une fraction qui ait un dénominateur à volonté, on multiplie le nombre entier par le dénominateur qu'on a choïsi; le produit est le numérateur de la fraction; ainsi pour réduire 6 à une fraction, dont le dénominateur soit 7, on écrit $\frac{42}{7}$: car en faisant la division de 42 par 7, on a 6 au quotient, donc $\frac{42}{7}$ & 6 sont deux expressions équivalentes.

3.° Pour réduire en une fraction seule un nombre entier joint à une fraction, il faut multiplier le nombre entier par le dénominateur de la fraction, en ajouter le numérateur à ce produit, & de la somme faire le numérateur de la fraction cherchée; ainsi $6\frac{3}{4}$ se réduit à la fraction $\frac{27}{4}$, $3\frac{1}{2}$ se réduit à $\frac{7}{2}$.

104. II. *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur.*

Multipliez le numérateur, puis le dénominateur de chaque fraction, par chacun des dénominateurs de toutes les autres fractions.

Par exemple, pour réduire $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{4}$ au même dénominateur, je multiplie les deux termes de $\frac{1}{2}$ par 4, & j'ai $\frac{4}{8}$; je multiplie enſuite les deux termes de $\frac{3}{4}$ par 2, & j'ai $\frac{6}{8}$: les deux fractions réduites ſont donc $\frac{4}{8}$ & $\frac{6}{8}$.

Pour réduire les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, au même dénominateur, je multiplie les deux termes de $\frac{2}{3}$ par 7, puis par 4, & j'ai $\frac{2 \times 7 \times 4}{3 \times 7 \times 4} = \frac{56}{84}$. Je multiplie ceux de $\frac{5}{7}$ par 3, puis par 4, & j'ai $\frac{5 \times 3 \times 4}{7 \times 3 \times 4} = \frac{60}{84}$. Je multiplie enfin ceux de $\frac{3}{4}$ par 3 & par 7, & j'ai $\frac{3 \times 3 \times 7}{4 \times 3 \times 7} = \frac{63}{84}$; & les trois fractions réduites ſont $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$, qui ſont égales aux trois propoſées, puiſque chacun de leurs deux termes a été multiplié par les mêmes quantités.

105. On pourroit réduire par la même méthode tant de fractions qu'on voudra au même numérateur, en multipliant les deux termes de chacune par chaque numérateur des autres. Ainſi les trois fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, ſe réduiſent à celles-ci, $\frac{30}{45}$, $\frac{30}{42}$, $\frac{30}{40}$.

106. III. *Pour réduire une fraction donnée à un numérateur ou à un dénominateur quelconque.*

Puiſque des fractions ſont des rapports géométriques, on peut quelquefois changer une fraction donnée, en une autre dont le numérateur ou le dénominateur ſoit donné, & cela par une ſimple regle de trois. Par exemple, la fraction $\frac{3}{5}$ ſe peut réduire à une fraction dont le dénominateur ſoit 20, en diſant, ſi 5 ont 3 pour numérateur, qu'auront 20 pour numérateur? on trouvera 12. Donc $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$. De même on peut réduire cette fraction à une autre qui ait, par exemple, 18 pour numérateur, en diſant, ſi 3 ont 5 pour dénominateur, qu'auront 18? on trouve 30. Donc $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$. Cette réduction n'eſt poſſible, que quand le nombre donné eſt un multiple de ſon homologue dans la fraction donnée.

C'eſt par ces ſortes de réductions qu'on évalue les fractions, par exemple, celles des livres en ſols, ou en parties vingtiemes; celles des ſols en deniers ou en douziemes; celles des degrés en minutes ou ſoixantiemes, &c.

107. IV. *Pour réduire une fraction à l'expreſſion la plus ſimple.*

Il faut examiner d'abord, ſi le numérateur eſt plus grand que le dénominateur; car alors, il faut diviſer le numérateur par le dénominateur: ainſi $\frac{12}{4}$ ſe réduit à 3, ou $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{8}{3}$ ſe réduit à $2\frac{2}{3}$.

Il faut voir enſuite, ſi le numérateur & le dénominateur ne pourroient pas être diviſés tous deux ſans reſte par un même nombre; car alors l'expreſſion deviendroit plus ſimple, ſans changer de valeur. Elle deviendra d'autant plus ſimple, que ſes deux termes ſeront diviſés par un plus grand nombre.

108. Cette ſorte de réduction eſt ſouvent difficile, & même impoſſible; on ſe contente ordinairement d'en faire l'eſſai par la connoiſſance de certaines propriétés des nombres.

1.° *Tout nombre pair eſt un multiple de 2 ou eſt diviſible par 2*: donc tant que les termes d'une fraction ſeront des nombres pairs, ils pourront toujours être réduits à leur moitié. Par exemple, la fraction $\frac{128}{432}$ ſe réduit à $\frac{8}{27}$ en diviſant toujours par 2, & faiſant $\frac{128}{432} = \frac{64}{216} = \frac{32}{108} = \frac{16}{54} = \frac{8}{27}$.

2.° *Tout nombre terminé par* 0, *eſt diviſible par* 5 *& par* 10. Ainſi la fraction $\frac{20}{30}$ ſe réduit à $\frac{2}{3}$.

3.° *Tout nombre terminé par* 5, *eſt un multiple de* 5. Ainſi $\frac{15}{85}$ ſe réduit à $\frac{3}{17}$. De même $\frac{120}{215}$ ſe réduit à $\frac{24}{43}$.

4.° *Tout nombre, tel que la ſomme de ſes chiffres eſt un multiple de* 3, *eſt lui-même un multiple de* 3, *& par conſéquent diviſible par* 3. Ainſi la fraction $\frac{288}{351}$ eſt diviſible par 3, & ſe réduit d'abord à $\frac{96}{117}$, puis à $\frac{32}{39}$, parce que la ſomme des chiffres du numérateur eſt 18, & celle des chiffres du dénominateur eſt 9; & qu'après la premiere diviſion, la ſomme des chiffres 96 du numérateur étoit 15, & celle des chiffres du dénominateur 117 étoit 9. La diviſion par 9 auroit également réuſſi dans cet exemple.

Voici la méthode générale pour trouver le plus grand commun diviſeur poſſible de deux nombres quelconques: *diviſez le plus grand par le plus petit; & ſi la diviſion ſe fait ſans reſte, le plus petit nombre eſt le plus grand diviſeur cherché.*

Si après la diviſion, il ſe trouve un reſte, diviſez le plus petit nombre donné par ce reſte; & ſi la diviſion ſe fait ſans un nouveau reſte, le premier reſte eſt le plus grand diviſeur cherché.

S'il ſe trouve un ſecond reſte, diviſez le premier reſte par ce ſecond reſte; & ſi la diviſion ſe fait ſans troiſieme reſte, le ſecond reſte eſt le plus grand commun diviſeur cherché.

En général, le reſte qui diviſe exactement le reſte précédent, eſt le plus grand commun diviſeur cherché.

EXEMPLE. On veut réduire la fraction $\frac{91}{294}$ à l'expreſſion la plus ſimple qu'il ſoit poſſible. Pour cela, 1.° diviſez 294 par

91, vous trouverez 3 pour quotient, 273 pour produit, & 21 pour reſte.

2.° Diviſez 91 par ce premier reſte 21 : le quotient ſera 4, le produit 84, & le ſecond reſte 7.

3.° Diviſez le premier reſte 21 par le ſecond 7, & vous aurez 3 pour quotient exact. D'où vous conclurez que 7 eſt le plus grand commun diviſeur de 294 & de 91.

4.° Diviſant donc ces deux nombres par 7, vous aurez, ſous l'expreſſion la plus ſimple, une fraction $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$.

110. Reprenons ces diverſes opérations, & faiſons voir, 1.° que 7 eſt un diviſeur commun des nombres propoſés ; 2.° qu'il eſt le plus grand de tous leurs diviſeurs.

Puiſque 7 diviſe 21, il doit donc diviſer $21 \times 4 = 84$, & par conſéquent $84 + 7 = 91$. Mais s'il diviſe 91, il doit diviſer auſſi $91 \times 3 = 273$, & par conſéquent $273 + 21 = 294$. Il eſt donc diviſeur commun.

Il eſt auſſi le plus grand : car tout autre nombre qui diviſeroit 91 & 294, devroit diviſer 21 qui reſte de 294 après en avoir ſouſtrait $91 \times 3 = 273$: il devroit également diviſer 7, reſte de 91, après en avoir ſouſtrait $21 \times 4 = 84$. Mais un nombre plus grand que 7 peut-il le diviſer ?

Pour démontrer cette regle d'une maniere générale, il faut obſerver que deux quantités ne ſont diviſibles ſans reſte par un même nombre, que quand elles ſont des produits exacts de ce nombre. La plus grande quantité eſt produite par ce nombre pris plus de fois que dans la plus petite quantité. Or deux quantités A & B étant ainſi compoſées, ſi ayant ôté la plus petite B de la plus grande A, autant de fois qu'il eſt poſſible, par exemple trois fois, il n'y a pas de reſte, il eſt clair que A eſt compoſé de B pris trois fois, & B eſt compoſé de B pris une fois, & que par conſéquent B eſt dans ce cas le plus grand commun diviſeur des quantités A & B.

2.° Mais ſi ayant retranché B de A autant de fois qu'il eſt poſſible, (c'eſt-à-dire, trois fois dans cet exemple) il ſe trouve un reſte C. Alors A — C eſt une quantité compoſée de B pris 3 fois juſtes ; ou $A - C = 3B$; par conſéquent ſi C eſt contenu un certain nombre de fois juſte, par exemple, 4 fois dans B, il ſera auſſi contenu un nombre juſte de fois dans A — C. Il eſt clair en effet qu'on aura $B = 4C$, & $A - C = 3B$ deviendra $A - C = 3 \times 4C$, d'où l'on tire $A = 13C$. Il faut donc ôter C de B autant de fois qu'il eſt poſſible, & ſi cela ſe fait ſans reſte, C eſt la quantité qui a ſervi à compoſer les quantités A & B.

3.° Mais si ayant ôté C de B autant de fois qu'il est possible, par exemple, 4 fois, il se trouve un reste D : alors $B - D$ est une quantité composée de C pris juste 4 fois, ou $B - D = 4C$. Donc si D est contenu un certain nombre de fois juste, par exemple, 3 fois dans C, il sera justement aussi dans A & dans B, il sera le nombre qui aura servi à composer les quantités A & B. Car on aura $C = 3D$: donc dans l'équation $B - D = 4C$, on aura $B - D = 4 \times 3D$, & par conséquent $B = 13D$; & l'équation $A - C = 3B$, deviendra $A - 3D = 3 \times 13D$; donc $A = 42D$.

En continuant ce raisonnement, on verra que le dernier reste qui se peut retrancher un certain nombre de fois justes du reste précédent, est la quantité qui a servi à former les deux quantités A & B, & par conséquent qu'il est leur plus grand commun diviseur.

Il est évident aussi que c'est la même chose de diviser une quantité par une autre, que d'en retrancher cette autre autant de fois qu'il est possible.

111. Quand la fraction ne se peut réduire à une expression plus simple, ces divisions donnent enfin l'unité pour dernier reste. Car l'unité est un diviseur commun à tous les nombres.

112. On peut se rendre familiere la pratique de cette regle, en multipliant par différents nombres quelques fractions irréductibles. On verra que le plus grand diviseur commun des fractions provenues de ces multiplications, sera toujours le produit des multiplicateurs.

Par exemple, $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{12}$; $\frac{8}{12} \times 3 = \frac{24}{36}$; $\frac{24}{36} \times 7 = \frac{168}{252}$. Et pour ramener cette derniere fraction à la premiere $\frac{2}{3}$, je divise d'abord 252 par 168. Ensuite 168 par 84, reste de la premiere division. Et parce que la seconde se fait exactement, je conclus que le plus grand commun diviseur cherché est $84 = 4 \times 3 \times 7$.

Voici quelques unes de ces fractions toutes réduites. $\frac{441}{567} = \frac{7}{9}$; $\frac{48}{272} = \frac{3}{17}$; $\frac{840}{1848} = \frac{5}{11}$.

De l'Addition des Fractions.

113. Pour ajouter ensemble des fractions, *réduisez-les au même dénominateur, & de la somme de tous les numérateurs des fractions réduites, faites-en le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.*

Ainſi pour ajouter les fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, réduiſez-les à celles-ci $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, leur ſomme eſt $\frac{5}{6}$.

Pour ajouter enſemble les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, je les réduis à celles-ci (104) $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$, la ſomme des numérateurs eſt 46, j'ai donc $\frac{46}{24}$, & en réduiſant à l'expreſſion la plus ſimple, $1\frac{11}{12}$.

S'il y a des nombres entiers joints aux fractions, il faut ajouter leur ſomme à celle des fractions; ainſi $4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} = 6\frac{5}{6}$; de même $3\frac{2}{3} + 4\frac{3}{4} = 8\frac{5}{12}$.

De la Souſtraction des Fractions.

114. Pour ſouſtraire une fraction d'une autre, *réduiſez-les au même dénominateur, prenez la différence entre les deux numérateurs, & faites-en le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.*

Voulez-vous, par exemple, ſouſtraire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$? réduiſez ces fractions à celles-ci $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, il eſt clair que la différence eſt $\frac{5}{12}$.

115. S'il y a des nombres entiers à la tête des fractions, il faut les ſouſtraire à l'ordinaire, & mettre leur différence à la tête de la nouvelle fraction; ainſi pour ôter $3\frac{1}{2}$ de $4\frac{3}{4}$, il faut écrire $1\frac{2}{8}$, ou (107) $1\frac{1}{4}$.

116. Mais ſi la fraction de la quantité à ſouſtraire eſt plus grande, ou ſi l'on a une fraction à ſouſtraire d'un nombre entier, alors il faut réduire en fraction une unité de ce nombre entier. Par exemple, pour ôter $3\frac{2}{3}$ de $6\frac{1}{4}$, je réduis la quantité $6\frac{1}{4}$ à $5\frac{5}{4}$, & réduiſant $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{4}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{8}{12}$ & $\frac{15}{12}$, j'ôte $\frac{8}{12}$ de $\frac{15}{12}$, reſtent $\frac{7}{12}$, j'ôte 3 de 5, reſtent 2; enſorte que la différence cherchée eſt $2\frac{7}{12}$.

De même, pour ôter $\frac{2}{3}$ de 4, je réduis 4 à cette expreſſion $3\frac{3}{3}$, de ſorte que retranchant $\frac{2}{3}$ de $3\frac{3}{3}$, reſtent $3\frac{1}{3}$. Pour ôter $\frac{4}{5}$ de 2, je réduis 2 à $1\frac{5}{5}$, & la différence eſt $1\frac{1}{5}$.

De la Multiplication des Fractions.

117. Pour multiplier deux termes, ou tous deux fractionnaires, ou en partie fractionnaires, il faut suivre cette regle générale. *Si quelque terme n'est pas purement fractionnaire, réduisez-le tout en fraction ou en forme de fraction. Faites ensuite une nouvelle fraction, dont le numérateur soit le produit des numérateurs du multiplicande & du multiplicateur, & dont le dénominateur soit le produit de leurs dénominateurs. Enfin réduisez cette fraction à l'expression la plus simple.* Par exemple :

Pour multiplier	par	Ecrivez d'abord	produit	Expression la plus simple
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{7}{12}$	4	$\frac{7}{12}\times\frac{4}{1}$	$\frac{28}{12}$	$2\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$4\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3}\times\frac{33}{7}$	$\frac{66}{21}$	$3\frac{1}{7}$
$3\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}\times\frac{11}{2}$	$\frac{165}{8}$	$20\frac{5}{8}$

Pour concevoir la raison de cette Regle, il faut se ressouvenir que multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$, par exemple, n'est autre chose que de prendre $\frac{2}{3}$ autant de fois que l'unité est contenue dans $\frac{1}{2}$; or l'unité n'est qu'une demi-fois dans $\frac{1}{2}$, donc il ne faut prendre $\frac{2}{3}$ qu'une demi-fois; donc $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. Donc aussi $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; & $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$; &c.

118. REMARQUES. I. Par le second Exemple, on voit que *lorsqu'on doit multiplier un entier par une fraction, ou réciproquement, il faut ou multiplier le numérateur de la fraction, ou diviser son dénominateur par cet entier*; car on a le même résultat $2\frac{1}{3}$, soit qu'on dise $4\times7=28$, & qu'on écrive $\frac{28}{12}$, ou qu'on dise $\frac{12}{4}=3$, & qu'on écrive $\frac{7}{3}$. Mais cette seconde maniere n'est pas toujours possible comme l'autre.

II. Lorsque le nombre qui doit multiplier une fraction, est le même que son dénominateur, le produit est le numérateur même. Ainsi $\frac{5}{6}\times6=5$.

III. Si l'on avoit plusieurs fractions à multiplier les unes par les autres, il faudroit effacer les termes communs au numérateur & au dénominateur. Par-là, on trouveroit tout de suite que $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; que $\frac{3}{7}\times\frac{21}{20}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{4}$; &c.

119. Le produit de deux fractions proprement dites, est

donc toujours moindre que chacune des racines ; car tout produit doit être à l'une de ſes racines, comme l'autre racine eſt à l'unité (46), Or une fraction proprement dite eſt moindre que l'unité.

De la Diviſion des Fractions.

120. La Diviſion des fractions ne differe de leur Multiplication, qu'en ce qu'il faut renverſer les termes du diviſeur, en mettant ſon numérateur en-bas, & ſon dénominateur en-haut. Par exemple..........

Pour diviſer	par	Ecrivez d'abord	enſuite	Quotient	Expreſſion la plus ſimple.
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$	$\frac{6}{4}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{3} : \frac{5}{1}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{4}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} : \frac{5}{2}$	$\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$2\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1} : \frac{7}{3}$	$\frac{3}{1} \times \frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$1\frac{2}{7}$

C'eſt-à-dire, 1.° multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, & faites de ce produit le numérateur du quotient.

2.° Multipliez le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur ; leur produit ſera le dénominateur du quotient.

Pour concevoir cette regle, il faut ſe rappeller que le quotient doit être contenu autant de fois dans le dividende que l'unité l'eſt dans le diviſeur. Or l'unité n'eſt contenue qu'une demi-fois dans $\frac{1}{2}$, par exemple ; donc le quotient de $\frac{3}{4}$ diviſés par $\frac{1}{2}$, ne doit être contenu qu'une demi-fois dans $\frac{3}{4}$. Mais une quantité qui n'eſt contenue qu'une demi-fois dans une autre, eſt double de cet autre ; donc le quotient de $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$ eſt double de $\frac{3}{4}$, c'eſt-à-dire, eſt $\frac{6}{4}$ ou $1\frac{1}{2}$.

On vérifiera le quotient, en le multipliant à l'ordinaire par le diviſeur, pour retrouver le dividende. Ainſi $1\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

121. REM. I. Une portion de fraction, par exemple, les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$ s'appelle *une fraction de fraction*. Il eſt évident que $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$ ſignifie qu'il

faut prendre 3 fois le quart de $\frac{2}{7}$. Il faut donc diviser $\frac{2}{7}$ par 4, ce qui donne $\frac{2}{28}$, & en multiplier le quotient par 3, ce qui donne $\frac{6}{28}$ ou $\frac{3}{14}$. Or $\frac{6}{28}$ est le produit de $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{7}$; donc, 1.° *la valeur d'une fraction de fraction est le produit de ces deux fractions* : 2.° les $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{4}$, ou les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$ sont de même valeur.

Ainsi on trouveroit que les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{4}{5}$ d'un de nos petits écus $= \frac{2}{5} = 24$ sous (118).

122. II. Il arrive souvent que l'on a *un entier à diviser par une fraction.* Alors on multiplie cet entier par le dénominateur de la fraction, & le produit sert de numérateur à une nouvelle fraction, qui, pour dénominateur, doit avoir le numérateur de la premiere. Par exemp. pour diviser 6 par $\frac{2}{3}$, on écriroit d'abord $\frac{6}{\frac{2}{3}}$: ensuite $\frac{18}{2} = 9$. En divisant 10 par $\frac{5}{6}$ on auroit $\frac{60}{5} = 12$; &c. Ce n'est qu'une application de la regle générale.

123. III. Quand le numérateur du dividende peut se diviser sans reste par celui du diviseur, & qu'il en est de même des deux dénominateurs, on a bientôt la plus simple expression du quotient, en effectuant les divisions. $\frac{9}{33}$, par ex. divisés par $\frac{3}{11} = \frac{3}{3} = 1$.

124. IV. Quelquefois les deux numérateurs, ou les deux dénominateurs, sont divisibles par un même nombre. Il convient alors d'exécuter cette division. Soit donc $\frac{15}{16}$ à diviser par $\frac{5}{8}$, je divise les numérateurs par 5, & les dénominateurs par 8. Le quotient cherché sera $1\frac{1}{2}$.

125. V. Quelquefois aussi le dénominateur est le même dans les deux fractions. Alors on a pour quotient la fraction des deux numérateurs. Ainsi pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{5}$, on écriroit $\frac{3}{4}$.

126. Il est clair que le quotient d'une quantité divisée par une fraction proprement dite, doit être toujours plus grand que le dividende. Car le quotient est d'autant plus graud, que le diviseur est plus petit. Puis donc qu'il est égal au dividende, quand le diviseur est 1, il sera plus grand que lui, lorsque le diviseur sera moindre que l'unité.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

De leur nature.

127. L'Usage des fractions décimales est très-fréquent & fort commode. Ce sont des fractions qui ont toujours pour dénominateur l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de

chiffres dans le numérateur ; c'eſt pour cela qu'on n'écrit pas ce dénominateur, mais ſeulement le numérateur dont les chiffres ſont précédés d'un point ou d'une virgule, pour les diſtinguer des nombres entiers. Par exemple, pour exprimer $19\frac{4}{10}$, on écrit 19, 4 ; pour exprimer $19\frac{4}{100}$, on écrit 19, 04 ; afin que par le zéro mis devant le 4, on connoiſſe que le dénominateur eſt 100 : pour exprimer $19\frac{4}{1000}$, on écrit 19, 004 ; de même $49,01742 = 49\frac{1742}{100000}$; $0,035 = \frac{35}{1000}$.

On peut ne pas mettre de zéro avant le point ou la virgule, pour exprimer une fraction ſeule : pour marquer, par exemple, $\frac{35}{1000}$, on peut écrire 035, ou . 035 ; & $\frac{4}{10000} = ,0004 = .0004$.

128. La premiere des décimales, c'eſt-à-dire, le premier chiffre à droite après la virgule, exprime des dixiemes ; la ſeconde décimale exprime des centiemes ; la troiſieme, des milliemes, &c. Ainſi 4,217 eſt la même choſe que $4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Car c'eſt la même choſe que $4 + \frac{200}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{7}{1000}$, qui ſe réduit à $4\frac{217}{1000}$. Pareillement 57, 8634 eſt l'expreſſion abrégée de $57\frac{8634}{10000} = 57 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000}$.

129. Pour multiplier un nombre entier par 10, 100, 1000, &c. il ſuffit d'y mettre à droite un, deux, trois, &c. zéros. Si donc on met un, deux, trois, &c. zéros à la droite des chiffres d'une fraction décimale, le numérateur & le dénominateur de cette fraction ſont alors multipliés tous deux par 10, 100, &c. Donc la valeur de cette fraction eſt encore la même. Ainſi les fractions 0, 1 ; 0, 100 ; 0, 1000 ſont égales. De même $4,7 = 4,7000$, &c.

130. De-là il ſuit que 4, 7 eſt plus grand que 4, *69*, ou même que 4, *699999*, &c. car $4,7 = 4\frac{7}{10} = 4\frac{70}{100} = 4\frac{700000}{1000000}$, & $4,69 = 4\frac{69}{100}$; $4,699999 = 4\frac{699999}{1000000}$; or $\frac{70}{100}$ eſt plus grand que $\frac{69}{100}$ (*99*), & $\frac{700000}{1000000}$ eſt plus grand que $\frac{699999}{1000000}$: donc 4, 7 eſt plus grand que 4, *69* ou que 4,*699999*, ou enfin que 4 ſuivi d'une fraction d'autant de chiffres qu'on voudra, dont le premier ſera moindre que 7.

131. Mais on voit que 4, *699999* approche plus d'être égal à 4, 7 que 4, *69*, ou que 4, *6999* ; que 4, *6999* approche plus de la valeur de 4, 7 que 4, *69* ; parce qu'il ne s'en faut que

de $\frac{1}{1000000}$, que 4,699999 ne ſoit $=$ 4,700000 $=$ 4,7, au lieu qu'il s'en faut de $\frac{1}{10000}$ que 4,6999 ne ſoit $=$ 4,7000 $=$ 4,7, & qu'il s'en faut de $\frac{1}{100}$ que 4,69 ne ſoit $=$ 4,70 $=$ 4,7; or $\frac{1}{1000000}$ eſt beaucoup plus petit que $\frac{1}{10000}$, & $\frac{1}{10000}$ eſt beaucoup plus petit que $\frac{1}{100}$; donc la différence entre 4,7 & 4,699999 eſt beaucoup plus petite que la différence entre 4,7 & 4,6999; & celle qui eſt entre 4,6999 & 4,7, eſt beaucoup plus petite que celle qui eſt entre 4,69 & 4,7; donc 4,699999 approche beaucoup plus d'être égal à 4,7 que 4,6999; & 4,6999 approche beaucoup plus de la valeur de 4,7 que 4,69.

132. *Une fraction décimale eſt donc plus grande qu'une autre, ſi ſes premiers chiffres ſont préciſément les mêmes que tous ceux de cette autre, & ſi elle a outre cela quelques autres chiffres qui ne ſoient pas tous des zéros.*

133. *Lorſqu'on a une fraction décimale compoſée de pluſieurs chiffres, on en peut retrancher quelques-uns ſur la droite, ſans beaucoup diminuer la valeur de la fraction.*

Par exemple, le réſultat d'un calcul donnant 2,4546 toiſes, ſi je retranche le dernier chiffre, en n'écrivant que 2,454, je diminue la valeur de la fraction de $\frac{6}{10000}$ d'une toiſe, ce qui vaut environ une demi-ligne; ſi j'en retranche les deux derniers, en n'écrivant que 2,45, je diminue la valeur de la fraction de $\frac{46}{10000}$ d'une toiſe, ce qui vaut environ 4 lignes.

134. *Il ne faut donc employer beaucoup de chiffres dans le calcul des décimales*, comme cinq ou ſix, *que lorſqu'on a beſoin d'une grande préciſion; il ſuffit ordinairement d'en employer un ou deux, ou tout au plus trois.*

Car, par exemple, ſi l'on ne payoit que 3 livres la toiſe d'ouvrage, il eſt clair que la $\frac{6}{10000}$, ou même la $\frac{46}{10000}$ partie d'une toiſe, ſeroit de peu de conſéquence, puiſque la $\frac{46}{10000}$ partie ne vaudroit qu'environ 3 deniers $\frac{1}{3}$, & que par conſéquent dans ce cas on peut négliger les deux derniers chiffres de la fraction, 2,4546: mais ſi on payoit 10000 l. la toiſe, alors la $\frac{6}{10000}$ vaudroit 6 l. & la $\frac{46}{10000}$ vaudroit 46 l. ce qui pourroit être de conſéquence; donc en ce cas il faut ſe ſervir de pluſieurs chiffres.

135. Quand on veut ſupprimer les derniers chiffres d'une fraction décimale, *il faut ajouter une unité au chiffre qui reſte le dernier, ſi le premier des chiffres qu'on néglige ſurpaſſe 5.* Par exemple, ſi dans la fraction 0,4864 je néglige les deux der-

niers chiffres, je dois écrire 0,49, & non pas 0,48 ; car 0,49 = 0,4900, & 0,48 = 0,4800 : or 0,4900 approche plus de la valeur de 0,4864, que 0,4800 n'en approche ; donc il faut écrire 0,49, & non pas 0,48 : de même, ayant à retrancher les deux derniers chiffres de 0,1953, je dois écrire 0,20, & non pas 0,19 ; mais si j'ai, par exemple, 0,455, je peux écrire à mon gré, 0,45 ou 0,46.

136. Comme les fractions ne sont souvent que des restes de divisions, si après avoir fait une division, on veut avoir au quotient une fraction décimale, au lieu d'une fraction ordinaire, il faut ajouter 0 au reste, & continuer la division par le même diviseur ; le chiffre qu'on trouvera au quotient sera la premiere décimale ; s'il y a encore un reste, on y ajoutera encore 0, & continuant la division, on aura une seconde décimale, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de reste, ou qu'on ait suffisamment de décimales.

Par exemple, ayant divisé 147475 par 362, & trouvé le quotient 407 avec le reste 141, j'ajoute 0 à ce reste, & je divise 1410 par 362, j'ai 3 au quotient & un nouveau reste 324 ; j'y ajoute 0, & divisant 3240 par 362, j'ai au quotient 8 & un reste 344 : j'y ajoute encore 0, & j'ai au quotiont 9, & le reste 182 que je néglige, parce qu'il vaut moins d'un dix-millieme ; j'ai trois décimales qui me suffisent. Ainsi le quotient de 147475 divisé par 362, est 407, 389.

137. Par la même méthode, on réduit une fraction ordinaire en fraction décimale. Par exemple, pour y réduire $\frac{3}{4}$, j'ajoute 0 au numérateur 3, & je divise 30 par 4, le quotient est 7 & le reste 2 : j'y ajoute 0, je divise 20 par 4, le quotient est 5 sans reste, d'où je conclus que $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Il est évident en effet que 25 étant le quart de 100, les trois quarts sont 75 (§).

(§) Pour convertir une fraction décimale en une autre de dénominateur usité, il faut multiplier la fraction décimale par le dénominateur de celle en laquelle on veut la changer. Je suppose qu'après un calcul on ait pour résultat 1 toise 0423, on réduira ces 0423 d'abord en pieds, en multipliant par 6, le produit 2438 apprend qu'il y a 2 pieds 0438. 0438 multiplié par 12 donnera 5 pouces 0256. Par la même méthode on trouvera combien il reste de lignes dans 0256, qui sont des parties de pouce. La raison de cette pratique est manifeste. Si l'on veut considérer la quantité comme divisée en des parties six fois plus petites, sans l'augmenter ni la diminuer, il faut donc la multiplier par six, &c.

138. Il y a un grand nombre de fractions qui ne peuvent se réduire exactement en décimales, quelque nombre de fois qu'on ajoute 0 aux restes successifs des divisions. Cela se reconnoît facilement, ou lorsqu'on parvient à avoir toujours un même reste, ou lorsqu'on voit revenir les mêmes chiffres dans le même ordre.

Par exemple, si l'on vouloit réduire $\frac{1}{3}$ en fraction décimale, on trouveroit éternellement, 0,333333, &c. En y réduisant $\frac{5}{12}$ on auroit 0,416666, &c.

On trouveroit de même que $\frac{3}{13} = 0,230769 \mid 230769 \mid 230$, &c....... que $\frac{4}{7} = 0,571428 \mid 571428 \mid 571428 \mid 5$, &c. On ne prend alors que les deux ou trois premieres décimales, & on néglige le reste : ainsi on regarde la fraction $\frac{4}{7}$ comme égale à 0,57 ; & $\frac{5}{12} = 0,417$.

139. Rem. Les chiffres qui reviennent dans le même ordre, y reviennent au plus tard au rang exprimé par le dénominateur de la fraction.

Des Opérations sur les Fractions décimales.

140. Les opérations de l'Arithmétique sur les fractions décimales, sont précisément les mêmes que celles qui se font sur les nombres entiers, il y a seulement quelques précautions à prendre pour placer la virgule qui sépare les nombres entiers des décimales, lorsqu'on a achevé une opération.

141. I. Pour ajouter ensemble ces quantités 4852,791 ; 4,00745 ; 2,7 ; 0,0049, il faut écrire en colonne les nombres entiers suivant leur valeur, ensorte que les virgules soient aussi en colonne ; il faut écrire tout de suite leurs fractions, & prendre la somme du tout, comme on voit ici.

$$\begin{array}{r} 4852,791 \\ 4,00745 \\ 2,7 \\ 0,0049 \\ \hline 4859,50335 \end{array} \quad \text{car ces quantités équivalent à celles-ci.} \quad \begin{array}{r} 4852,79100 \\ 4,00745 \\ 2,70000 \\ 0,00490 \\ \hline 4859,50335 \end{array}$$

142. II. La soustraction se fait en arrangeant les quantités de la même maniere, & en opérant à l'ordinaire.

$$\begin{array}{r} 57,02 \\ 48,1 \\ \hline 8,92 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,8274 \\ 2,0139 \\ \hline 2,8135 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6,00435 \\ 0,17 \\ \hline 5,83435 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,842 \\ 1,004554 \\ \hline 2,837440 \end{array}$$

143. III. La multiplication se fait précisément comme celle des nombres entiers, sans prendre garde d'abord à la position des virgules ; mais lorsqu'on a pris la somme de chaque produit, pour avoir un produit total, *il faut séparer par une virgule autant de chiffres sur la droite, qu'il y a de décimales dans les fractions, tant du multiplicande que du multiplicateur :* ensorte que si cette somme n'étoit pas exprimée par autant de chiffres qu'il y a de décimales dans le multiplicande & dans le multiplicateur, il faudroit mettre sur la gauche un nombre suffisant de zéros : voyez le second exemple.

43,7	2,4542	3,7	21,32
13	0,0053	4,12	0,100103
1311	73626	74	6396
437	122710	37	2132
		148	2132
568,1	0,01300726		
		15,244	2,13419596

144. Ces multiplications se vérifient promptement en supprimant les 9 (53). Mais voici comment on peut démontrer ce que la regle a de particulier. Le produit est toujours au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité (46). Donc si le multiplicateur exprime des dixiemes, ou de centiemes de l'unité, le produit doit exprimer des dixiemes ou des centiemes du multiplicande. Donc si le multiplicande exprime aussi lui-même des dixiemes ou des centiemes de l'unité, le produit doit alors donner des centiemes ou de milliemes de l'unité. Ainsi $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01$ $\frac{2}{100} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{1000}$ 0,008. Or il est clair que pour avoir dans le produit ces centiemes & ces milliemes d'unité, il faut lui donner autant de décimales qu'il y en a dans les deux racines.

145. Lorsque le multiplicande a des décimales, & que le multiplicateur est 10, ou 100, ou 1000, &c. il suffit de retirer la virgule vers la droite, d'autant de rangs qu'il y a de zéros dans le multiplicateur. Ainsi $45,3289 \times 100 = 4532,89$; $0,007854 \times 10000 = 78,54$; $36,5 \times 1000 = 36500$.

146. Si le multiplicande & le multiplicateur avoient un grand nombre de décimales, l'opération feroit fort longue, & donneroit un résultat beaucoup plus exact qu'on n'en a besoin communément. Alors on peut la simplifier ; & voici comment.

1.° Multipliez tous les chiffres du multiplicande par le premier à gauche du multiplicateur.

2.° Multipliez-les ensuite par le second chiffre à gauche du multiplicateur ; mais en écrivant ce produit, ne tenez compte que des dixaines que la multiplication du premier chiffre à droite du multiplicande pourra donner, ajoutez-les au produit de son second chiffre, & conséquemment écrivez ce produit total sous le premier.

3.° Servez-vous du troisieme chiffre du multiplicateur pour multiplier ceux du multiplicande, à ne commencer qu'au second : encore faudra-t-il ne retenir que les dixaines de ce produit pour les ajouter aux unités du suivant. Vous écrivez ce troisieme produit total sous les deux autres.

4.° A mesure que vous avancerez vers la droite du multiplicateur, vous commencerez la multiplication par un chiffre plus avancé vers la gauche du multiplicande, & retenant les dixaines de ce premier produit, vous les ajouterez aux unités du suivant, jusqu'à ce que vous soyez parvenu au dernier chiffre du multiplicateur.

5.° Ajoutez tous les produits, & dans leur somme séparez autant de décimales qu'il y en avoit dans le multiplicande, lorsque vous l'avez multiplié par les unités du multiplicateur, ou, ce qui est plus général, voyez quel rang tiennent dans les deux racines, la décimale par laquelle vous multipliez chaque fois, & celle par laquelle commence alors la multiplication. La somme de ces deux rangs indiquera toujours le nombre de décimales que doit avoir le produit général.

Deux ou trois exemples rendront cette méthode familiere.

.....	.....	....
9.34528	2.302585|09	0.234567
3.44776	0.984977	0.003431
.....	.....	....
2803584	20723266	703701
373811	1842068	93827
37381	92103	7037
6541	20723	234
654	1611	0.000804799
56	161	
32.22027	2.2679932	

Dans le premier, je multiplie d'abord par *3*, & j'écris le produit : ensuite par 4, en disant 4 fois 8 = *32*, que je n'écris pas : mais je retiens ces trois dixaines pour les ajouter au produit suivant. Je dis donc 4 fois 2 = 8, & 3 de retenues font 11. J'écris 1 sous le 4, & je continue à l'ordinaire.

Puis je multiplie par le second 4, en commençant par le 2 du multiplicande. 4 fois 2 font 8. Je retiens 1, parce que 8 approche plus de 10 que de 1. 4 fois 5 font 20, & 1 de retenu font 21. J'écris 1 dans le même rang que les premiers chiffres des autres produits, &c. &c.

Après avoir fait toutes ces multiplications, j'ajoute les produits, & je sépare cinq décimales, parce qu'il y en avoit 5 au multiplicande, lorsque j'ai multiplié par les 3 unités du multiplicateur ; ou, parce qu'en multipliant par la premiere décimale du multiplicateur, j'ai commencé par la quatrieme du multiplicande.

En faisant tout au long cette multiplication on auroit trouvé 32,2202825728, c'est-à-dire, que le produit trouvé par la méthode abrégée ne differe pas du produit exact de $\frac{2}{1000000}$.

Afin de reconnoître à quelles décimales du multiplicande & du multiplicateur on en est chaque fois, il est bon de les marquer d'un point à mesure qu'on s'en sert. Voyez les exemples.

147. Il est aisé de se rendre raison des différentes parties de cette méthode. Il est aisé aussi de voir qu'en retranchant les deux derniers chiffres du multiplicande dans le second exemple, il faut ajouter une unité au produit de 5 par 9. Enfin on voit bien, que dans le produit du troisieme exemple, il faut ajouter trois zéros, puisque 3 étant au troisieme rang des décimales dans le multiplicateur, & 7 au sixieme du multiplicande, le produit doit avoir 9 décimales.

148. IV. La division est aussi la même que celle des nombres entiers ; mais *ayant trouvé le quotient, il en faut séparer par une virgule autant de chiffres sur la droite, qu'il y a plus de décimales dans le dividende que dans le diviseur.*

6,9345 { 3 / 2,3115	8,445 { 3,22 / 2,6	49,1 { 20,074 / 2,44
6	644	40148
0,9	2005	89520
9	1932	80296
,03	73	92240
3		80296
04		11944
3		
15		
15		
0		

Ainsi dans le second exemple, on a procédé à la division, comme si l'on eût eu 8445 à diviser par 322. Le quotient s'est trouvé 26. Mais parce que le dividende avoit trois décimales, & que le diviseur n'en avoit que deux, on en a mise une au quotient, en plaçant la virgule avent le 6. La multiplication du diviseur par le quotient reproduira le dividende.

149. S'il y a plus de décimales dans le diviseur que dans le dividende, (voyez le 3^e^ exemple) alors il faut ajouter aux décimales du dividende autant de zéros qu'on voudra; ensorte cependant que cela rende le nombre des décimales du dividende un peu plus grand que celui des décimales du diviseur, afin d'en avoir quelques-unes au quotient. Ici on en a ajouté quatre au dividende; car si l'on divise 49,10000 par 20,074, on trouvera le quotient 2,44.

Si l'on veut avoir égard aux restes de ces sortes de divisions, il faut leur ajouter autant de zéros qu'on voudra, & les quotiens qu'on en tirera, en continuant la division par le même diviseur, seront autant de décimales; ainsi dans le second exemple, ajoutant trois zéros au reste 73, on aura le quotient 2,6226, avec un autre reste 228, qu'on peut négliger.

150. Cette regle est fondée sur ce que dans toutes les divisions le quotient est à l'unité, comme le dividende est au diviseur (63). D'après ce principe, il est clair en effet que le quotient doit exprimer des dixiemes ou des centiemes de l'unité, par exemple, toutes les fois que le dividende exprime des dixiemes ou des centiemes du diviseur. Or pour exprimer des dixiemes ou des centiemes du diviseur, il faut que le dividende ait une ou deux décimales de plus que lui. Il faut donc alors que le quotient ait une ou deux décimales, c'est-à-dire, autant qn'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviseur.

Quand il faut diviser par 10, par 100, ou par 1000, &c. il n'y a qu'à avancer la virgule d'un, de deux, ou de trois rangs, vers la gauche. Ainsi $\frac{124,65}{100} = 1,2465$; $\frac{8,34}{1000} =$ 0,00834.

151. Lorsque par cette méthode les divisions seroient trop longues, à cause du grand nombre de décimales, on peut abréger le calcul de la maniere suivante.

Je suppose que l'on veut vérifier le produit 32,22027 trouvé ci-dessus, en le divisant par 9.34528. Après avoir disposé ces deux nombres comme dans la division ordinaire, je demande en 32 combien de fois 9? Je mets 3 au quotient. Ensuite je multiplie tout le diviseur par 3, & je soustrais le produit du dividende; reste 418443.

Je divise ce reste, en disant, combien de fois 9 est-il contenu dans 41? Je mets 4 au quotient; & je multiplie le diviseur par 4; je dis donc 4 fois 8 font 32, que je n'écris pas. Je retiens seulement les trois dixaines que j'ajoute au produit suivant, comme on l'a vu dans la multiplication. Car ce n'est ici que l'opération inverse.

Soustrayant de 418443 ce qui provient de cette multiplication, je divise le reste 44632 par le même diviseur, & je mets au quotient un second 4 par lequel je multiplie le diviseur, à commencer au 2. 4 fois 2 font 8. Je retiens 1, que j'ajonte à $20 = 5 \times 4$; & ainsi de suite, jusqu'à ce que j'aie retrouvé 3,44776.

32,22027	9,34528
28 03584	3,44776
418443	
373811	
44632	
37381	
7251	
6541	
710	
654	
56	
56	
0	

Des autres especes de Fractions.

COmme on est obligé d'employer dans les différentes parties des Mathématiques, & dans le Commerce, diverses sortes de mesures, les parties de ces mesures font autant d'especes de fractions. Voici les mesures les plus en usage.

152. Le Cercle se divise en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés*; le degré se divise en 60 minutes, chaque minute

en 60 secondes ; chaque seconde en 60 tierces, &c. de sorte qu'un degré, 10 degrés, 20 degrés, &c. sont $\frac{1}{360}$, $\frac{10}{360}$, $\frac{20}{360}$ d'un cercle ; une minute, 15 minutes, &c. sont $\frac{1}{60}$, $\frac{15}{60}$, &c. d'un degré ; une seconde, dix secondes, &c. sont $\frac{1}{60}$, $\frac{10}{60}$ d'une minute, &c. Ces parties s'expriment ainsi : 1°, 10°, 20° ; $1'$, $15'$; $1''$, $10''$, &c.

Un cercle est donc de $21600'$, de $1296000''$, de $77760000'''$, &c. un degré est de $3600''$, de $216000'''$, &c.

Le Temps se divise en jours, chaque jour en 24 parties égales appellées *heures ;* chaque heure en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes, &c. Un espace de temps, par exemple, de 10 heures 17 minutes 44 secondes, est égal à $\frac{10}{24}$ d'un jour $+ \frac{17}{60}$ d'une heure $+ \frac{44}{60}$ d'une minute ; on l'exprime ainsi, $10^h\ 17'\ 44''$.

Un jour est de $1440'$, de $86400''$, de $5184000'''$, &c. une heure est de $3600''$, de 216000 tierces, &c. une minute est de $3600'''$, &c.

Les distances terrestres se mesurent en toises ; chaque toise a 6 pieds, chaque pied a 12 pouces, chaque pouce a 12 lignes, & chaque ligne a 12 points ; de sorte qu'un espace de 4 toises 2 pieds 4 pouces 6 lignes 3 points, se peut exprimer par 4 toises $+ \frac{2}{6}$ de toise, $+ \frac{4}{12}$ de pied, $+ \frac{6}{12}$ de pouce, $+ \frac{3}{12}$ de ligne.

Une toise contient 72 pouces, ou 864 lignes, ou 10368 points : un pied est de 144 lignes, de 1728 points : un pouce est de 144 points.

La Monnoie se divise chez nous en livres, sous & deniers ; la livre contient 20 sous, le sou 12 deniers ; ensorte qu'une somme de 19 l. 15 s. 10 d. est égale à 19 l. $+ \frac{15}{20}$ de livre, $+ \frac{10}{12}$ de sol.

Une livre de monnoie est donc de 240 deniers.

Les poids s'expriment par des livres ; la livre contient 16 onces, l'once 8 gros, le gros 72 grains. Un poids de 15 livres 4 onces 7 gros 60 grains, est donc égal à 15 l. $+ \frac{4}{16}$ de livre $+ \frac{7}{8}$ d'once $+ \frac{60}{72}$ de gros, &c.

Le poids d'une livre est de 128 gros, de 9216 grains. Celui d'une once est de 576 grains.

153. D'où l'on peut conclure en général, 1.° *que dans une mesure quelconque les parties qui ont un même nom, sont des fractions qui ont un même dénominateur.* 2.° *Que ce dénominateur est égal au nombre des parties égales que contient la partie ou la mesure qui précede immédiatement*; ainsi toutes les onces sont des fractions, dont le dénominateur est toujours 16, & est égal au nombre des parties que contient la partie qui précede immédiatement l'once. Tous les pouces sont des fractions dont le dénominateur est 12; parce que le pied qui est la mesure qui précede immédiatement le pouce, est divisé en 12 parties égales; il en est ainsi des autres mesures.

154. I. Pour ajouter ces fractions, il faut les disposer en colonnes, chacune selon leur dénomination, prendre la somme de chaque colonne, en allant de droite à gauche; diviser cette somme par le dénominateur commun, lorsqu'elle est plus grande que ce dénominateur; écrire le reste de la division au-dessous de cette colonne, & garder le quotient pour l'ajouter à la colonne suivante.

36°	$25'$	$47''$
49	33	28
55	31	49
141	31	4

3^{j}	17^{h}	$42'$	$16''$
9	13	25	33
11	23	17	42
	12	0	0
25	18	25	31

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
9	3	11	2	7
100	0	0	0	0
47	5	3	8	0
11	0	10	8	4
168	4	1	6	11

livres.	onces.	gros.	grains.
10	15	7	70
9	10	4	18
47	3	6	40
	13	0	55
68	11	3	39

livres.	sous.	den.
325	17	4
15	11	6
25	1	8
4	10	0
371	0	6

155. Pour soustraire une de ces fractions d'une autre, il faut l'écrire sous celle-ci en colonnes, suivant les noms de chaque partie. Il faut faire ensuite la soustraction de chaque colonne à l'ordinaire ; mais il faut remarquer que, quand un terme inférieur surpasse le supérieur, il faut ajouter à ce supérieur son dénominateur, puis faire la soustraction, & alors il faut retrancher une unité du nombre supérieur de la colonne qui suit à gauche. Ainsi dans le second exemple, pour ôter 43 minutes de 19 minutes, j'ajoute 60 minutes à 19 minutes, & j'ôte 43 minutes de la somme 79 minutes ; j'écris au-dessous le reste 36 minutes ; mais dans la colonne suivante, au lieu de 14 heures je ne compte plus que 13 heures. La raison en est, que retrancher 11 heures 43 minutes de 14 heures 19 minutes, c'est la même chose que d'ôter 11 heures 43 minutes de 13 heures 79 minutes. Voici des exemples.

48°	$16'$	$17''$
25	3	12
23	13	5

19^{j}	14^{h}	$19'$	$40''$
3	11	43	30
16	2	36	10

17^{j}	11^{h}	$47'$	$5''$
13	18	55	40
3	16	51	25

toises.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
100	0	0	0	0
17	4	5	11	8
82	1	6	0	4

livres.	onces.	gros.	grains.
47	10	2	55
12	12	5	12
34	13	5	43

livres.	sous.	deniers.
655	3	4
30	0	0
625	3	4

156. La multiplication & la division de ces sortes de frac-

tions, n'ont gueres lieu dans les Mathématiques, excepté pour les fractions de meſures de longueur ou largeur. Cependant comme elles ſont d'uſage dans la Société, il ne ſera pas inutile de les traiter ſuccintement.

157. On voudroit ſavoir, par exemple, le prix de 34 aunes $\frac{3}{4}$ d'une certaine étoffe, à raiſon de 6 l. 12 ſ. 6. d. l'aune.

Il eſt clair que la valeur de 34 aunes à 6 l. $=$ 204 l.	204 l.
que celle de 34 aunes à 2 ſ. qui ſont la dixieme partie de la livre, $=$ 3 l. 8 ſ. Donc à raiſon de 12 ſ. elle doit être $=$ 20 l. 8 ſ. . . .	20 l. 8 ſ.
Mais ſi à raiſon de 2 ſ. 34 aunes valent 3 l. 8 ſ. elles ne doivent valoir que 17 ſ.	17 ſ.
à raiſon de 6 d. qui ſont le quart de 2 ſ. En réuniſſant ces trois valeurs on auroit donc celle de 34 aunes à 6 l. 12 ſ. 6 d. l'aune.	
Reſte encore à trouver celle des $\frac{3}{4}$ d'aune $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Or la valeur d'une demi-aune eſt évidemment 3 l. 6 ſ. 3 d.	3 l. 6 ſ. 3 d.
Donc celle de $\frac{1}{4}$ d'aune eſt 1 l. 13 ſ. $1\frac{1}{2}$ d. . . .	1 l. 13 ſ. $1\frac{1}{2}$ d.
Ajoutant ces deux valeurs à celles que l'on a déja trouvées, la ſomme eſt 230 l. 14 ſ. $4\frac{1}{2}$ d.	230 l. 14 ſ. $4\frac{1}{2}$ d.

Chaque opération dans cette regle porte ſa preuve avec elle. Tout l'artifice conſiſte à décompoſer les quantités de différente dénomination en parties aliquotes de l'entier qui les précede immédiatement : & c'eſt de l'uſage, qu'il faut attendre la facilité de faire ces décompoſitions. Les deux exemples ſuivans acheveront d'éclaircir cette méthode.

Dans le premier on demande ce qu'il faut payer pour 42 toiſes 5 pieds 9 pouces, à raiſon de 12 l. 19 ſ. 8 d. la toiſe.

On demande dans le ſecond quel eſt le prix de 36 marcs 6 onces 4 gros d'argent à 51 liv. 15 ſ. 9 d. le marc.

	12 liv.	19 ſols.	8 d.	
	42 toiſ.	5 pieds	9 p.	
	24	. . . . .	. . .	
42 toiſ. à 2 ſ.	48	. . . . .	. . .	pour 42 toiſ. à 12 l.
valent 4 l. 4 ſ.	37	16 . . .	. . .	à 18 ſ.
	2	2 . . .	. . .	à 1 ſ.
	1	1 . . .	. . .	à 6 d.
		7 . . .	. . .	à 2 d.
Le pied vaut	10	16	$4\frac{2}{3}$ . . .	prix de 5 pieds
2 l. 3 ſ. $3\frac{1}{3}$ d.	1	1	$7\frac{2}{3}$ . . .	de 6 pouc.
		10	$9\frac{5}{6}$ . . .	de 3 pouc.
	557 l.	14 ſ.	$10\frac{1}{6}$ d.	

	51 liv.	15 ſols	9 d.	
	36 m.	6 onc.	4 g.	
	306	. . . . .	. . .	
	153	. . . . .	. . .	pour 36 m. à 51 l.
	18	. . . . .	. . .	à 10 ſ.
	9	. . . . .	. . .	à 5 ſ.
		18 ſ. . . .	. . .	à 6 d.
		9 . . .	. . .	à 3 d.
Une once vaut	38	16	$9\frac{3}{4}$	prix de 6 onc.
6 l. 9 ſ. $5\frac{5}{8}$ d.	3	4	$8\frac{13}{16}$	de 4 gros.
	1906 l.	8 ſ.	$6\frac{9}{16}$ d.	

158. Remarquez en paſſant, que pour prendre le dixieme d'un nombre de livres, il n'y a qu'à doubler le chiffre des unités, & le regarder enſuite comme exprimant des ſous. Les chiffres qui reſteront à gauche exprimeront des livres. Ainſi $\frac{12}{10}$ l. $=$ 1 l. 4 ſ.; $\frac{347}{10} =$ 34 l. 14 ſ. &c. &c. La raiſon en eſt évidente.

159. Au lieu de ſe ſervir des parties aliquotes, on auroit pu réduire le multiplicande & le multiplicateur à leur plus petite

espece actuelle, & après avoir multiplié l'une par l'autre les sommes réduites, diviser le produit par le nombre qui marque combien de fois la plus petite espece du multiplicateur est contenue dans la plus grande; mais cette méthode est moins directe que la premiere, quoiqu'elle soit également sure.

160. Quant à la division de ces sortes de quantités, on n'y trouve gueres de difficulté *dans le cas où le diviseur ne contient qu'une seule espece de grandeur.* Supposons, par exemple, qu'un ouvrier ait reçu 151 l. 14 s. 6 d. pour 42 jours de travail, & que l'on veuille savoir ce qu'il gagnoit par jour.

On divisera d'abord 151 par 42. Le quotient sera 3, le produit 126, & le reste 25; réduisant ce reste de livres en sous, on en aura 500, qui avec les 14 du dividende, formeront le second membre de division, & ainsi des autres. Le quotient cherché sera donc 3 l. 12 s. 3 d.

161. *Mais s'il entre dans le diviseur des quantités de différente espece*, alors il faut le réduire à la plus petite de celles qu'il contient dans l'exemple proposé; & après avoir réduit de même le dividende à sa plus petite espece, il faut le diviser à l'ordinaire.

Il est vrai que par cette réduction, le quotient sera beaucoup trop petit. Mais on le rendra tel qu'il doit être, en le multipliant par le nombre qui marque combien de fois la plus petite espece du diviseur est contenue dans la plus grande. Le reste va de suite.

Appliquons cette Regle à la recherche du prix de la toise, dans la supposition que 42 toises 5 pieds 9 pouces aient coûté 557 l. 14 s. 10 $\frac{1}{6}$ d. comme nous l'avons déja trouvé.

$$\begin{array}{rcr} 557 \text{ l.} & = & 133680 \text{ d.} \\ 14 \text{ s.} & = & 168 \text{ d.} \\ & & 10 \text{ d.} \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

$$557 \text{ l. } 14 \text{ s. } 10 \text{ d.} \tfrac{1}{6} = 133858\tfrac{1}{6} = \tfrac{803149}{6} \text{ de denier.}$$

Voilà le dividende réduit à sa plus petite espece.

$$\begin{array}{rcr} 42 \text{ toises} & = & 3024 \text{ points.} \\ 5 \text{ pieds} & = & 60 \\ & & 9 \\ \hline \end{array}$$

42 tois. 5 pieds 9 pouc. $=$ 3093. Voilà le diviseur réduit aussi.

Pour ſimplifier, je le multiplie par 6, dénominateur du dividende, & j'ai :

$$\begin{array}{r|l} 803149 & 18558 \\ \hline 74232 & 43\frac{5155}{18558}\text{ d.} \\ \hline 60829 & \\ 55674 & \\ \hline 5155 & \end{array}$$

Le quotient trouvé eſt le prix du pouce. Pour avoir celui de la toiſe, il faut donc le multiplier par 72, qui marque combien il y a de pouces dans la Toiſe. Multipliant d'abord la fraction, je trouve $\frac{371160}{18558}$ d. = 20 d. . . . . . multipliant enſuite l'entier 43 par 72, le produit eſt 3096 d. ajoutant 20, j'ai 3116 d. pour le prix de la toiſe ; & diviſant ce nombre par 240, il vient enfin 12 l. 19 ſ. 8 d. qu'il falloit trouver.

162. Voilà à peu près à quoi ſe réduiſent les principales Regles d'Arithmétique. Pour traiter d'une maniere plus générale la formation des puiſſances, l'extraction des racines, la Regle de Trois, & celles qui en dépendent, il eſt à propos d'expoſer auparavant les principes du Calcul Algébrique.

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

163. UN chiffre peut bien, à la vérité, repréſenter indifféremment toute ſorte de grandeurs. Le chiffre 3, par exemple, peut auſſi-bien exprimer 3 pouces, que 3 toiſes, que 3 lieues, que 3 heures, &c. mais à quelque eſpece de quantité qu'on l'applique, ſa valeur eſt déterminée par la convention générale des Peuples qui l'emploient. On n'eſt plus le maître de lui faire ſignifier 4 ou 2, &c.

164. Un des moyens, par conſéquent, de donner à la ſcience de la grandeur toute la généralité dont elle eſt ſuſceptible, eſt d'employer des ſignes qui n'aient aucune valeur, ni par

leur nature, ni par l'uſage. Par-là on s'éleve à une Arithmétique univerſelle, dont la fécondité plaît de plus en plus à meſure que l'on y fait des progrès.

165. Cette Arithmétique univerſelle eſt généralement connue ſous le nom d'*Algebre*. Il eſt aſſez indifférent de ſavoir l'étymologie de ce nom, quand on ſait ce qu'il ſignifie. C'eſt la ſcience de la quantité en général.

166. Les premieres notions de cette ſcience ont quelque choſe de rebutant, il eſt vrai. Un eſprit peu accoutumé aux abſtractions, trouve d'abord de la difficulté dans ce nouveau langage; mais on peut aſſurer que l'Algebre élémentaire eſt fort aiſée.

Elle ne devient intéreſſante cependant, que lorſqu'on l'applique à la ſolution de quelque problême. Auſſi, quand on a le génie des Mathématiques en partage, eſt-ce alors communément que l'on en ſent les premieres impulſions.

Définitions de quelques termes uſités en Algebre.

167. Une expreſſion algébrique, ou une quantité algébrique, eſt une ou pluſieurs grandeurs, déſignées par une ou pluſieurs lettres de l'alphabet; ce ſont ordinairement des lettres minuſcules.

168. Une quantité algébrique peut être *complexe* ou *incomplexe*.

Une quantité incomplexe eſt celle qui n'eſt ni précédée ni ſuivie d'aucune autre quantité jointe par le ſigne $+$, ou ſéparée par le ſigne $-$, ainſi a, ab, acd, $-b$, $-abd$, $3abc$, ſont des quantités incomplexes.

169. Une quantité complexe, eſt celle qui eſt compoſée de pluſieurs quantités jointes ou ſéparées par les ſignes $+$ ou $-$. Par exemple, $a+b$, $aa-b+cdd$, &c. ſont des quantités complexes.

170. Une quantité incomplexe s'appelle un *Monome*. Une quantité complexe s'appelle un *Polynome*; elle s'appelle *Binome*; *Trinome*, &c. ſuivant le nombre de ſes termes.

171. On appelle *termes* les parties comprises entre les signes d'un polynome : & on appelle *terme positif* celui qui est précédé du signe $+$, & *terme négatif* celui qui est précédé du signe $-$; ainsi la quantité $+a-b+c-dd$ est un quadrinome, dont deux termes sont positifs, savoir, $+a$, & $+c$; & deux sont négatifs, $-b$, & $-dd$.

172. Le premier terme d'une quantité complexe, ou le terme d'une quantité incomplexe, n'étant précédé d'aucun signe, est censé positif : ainsi $a+b$ sont deux termes positifs : c'est la même chose que $+a+b$.

173. Un chiffre qui précede un terme quelconque, par exemple, 3 dans cette quantité $3abc$, s'appelle *le Coefficient* de ce terme, & signifie que le terme abc est pris trois fois. La quantité $ab-3cc+2dd$ a deux coefficiens, savoir, 3 & 2 ; $-3cc$ signifie que le second terme $-cc$ est triplé, & $+2dd$, signifie que le troisieme terme $+dd$ est doublé.

174. *Un terme qui n'est précédé d'aucun coefficient, est supposé avoir l'unité pour coefficient* ; par exemple, $aa = 1aa$.

175. Un chiffre mis au-dessus d'une lettre, comme 3 dans cette expression a^3, s'appelle un *Exposant* ; il signifie que cette lettre devroit être écrite autant de fois de suite que cet exposant contient d'unités. Ainsi a^3 est mis au lieu de aaa, de même $a^4 b^3 c^2$ est mis pour $aaaa\,bbb\,cc$.

Une lettre qui n'a pas d'exposant, est supposée avoir l'unité pour exposant. Par exemple, ab est la même chose que $a^1 b^1$; de même a^3bcc est la même chose que $a^3 b^1 c^2$.

La différence qu'il y a entre un exposant & un coefficient est sensible ; $4a$ est mis pour $a+a+a+a$, mais a^4 est mis pour $aaaa$. Nous verrons bientôt que le coefficient exprime une somme, & que l'exposant indique un produit.

176. On appelle *termes semblables*, ceux qui contiennent les mêmes lettres écrites le même nombre de fois, de quelques signes, & de quelques coefficiens qu'ils soient d'ailleurs précédés. Par exemple, $2bc+3bc$ sont deux termes semblables. $2bc+3bbc$ ne le sont pas. $4a^3-5a^3$ le sont. $4a^3-5a^2$ ne le sont pas. $2mnp+7mpn-6pnm$ sont tous trois semblables. Dans $ab-cd+a^3b-c^2d^2+xy-xy^2$, il n'y en a point.

Des Opérations Algébriques.

LEs Opérations algébriques ſont la Réduction, l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, & la Diviſion.

De la Réduction.

177. La Réduction eſt l'art d'arranger les termes des quantités algébriques, & de les exprimer le plus ſimplement qu'il eſt poſſible, ce qu'il faut toujours faire après quelques opérations.

178. I. REGLE. *Il faut que les termes & les lettres de chaque terme gardent, autant qu'il eſt poſſible, l'ordre alphabétique;* ainſi la quantité complexe $ab + c - b + ed + db - cba$ doit être arrangée de cette ſorte, $ab - abc - b + bd + c + de$.

179. II. REGLE. *Quand il y a pluſieurs termes ſemblables dans une expreſſion, il faut les réduire à un ſeul terme, ou les effacer s'ils ſe détruiſent.* Cette Regle renferme trois cas.

I. *Tous les termes ſemblables précédés du même ſigne ſe réduiſent à un ſeul précédé auſſi du même ſigne & d'un coefficient égal à la ſomme des coefficiens de tous ces termes* Ainſi au lieu de $ab + ab - cd$, on écrira $2ab - cd$; au lieu de $aa + 2ac + 3ac$, on écrira $aa + 5ac$; au lieu de $bb - 3bc - bc + bd$, on écrira $bb - 4bc + bd$.

180. II. *Quand ces termes ſemblables ſont précédés de différents ſignes, alors il faut ſouſtraire le plus petit coefficient du plus grand, & écrire la différence avec le ſigne du plus grand coefficient.* Par exemple, la quantité $3ab + 2abb - ab$ ſe réduit à $2ab + 2abb$. La quantité $7bb - 3bb + 8bb - 18bb$ ſe réduit à $-6bb$. La quantité $ab + 4ad - add + 2ad + 3add - 4ad$ ſe réduit à celle-ci, $ab + 2ad + 2add$; de même on réduira la quantité $bd - 2bd + bdd - 3bdd$ à celle-ci $-bd - 2bdd$.

181. III. *Quand des termes ſemblables précédés de ſignes*

contraires, ont des coefficiens égaux, on efface entierement ces termes; ainſi la quantité $aa + 2ab - 2ab + bb$, ſe réduit à celle-ci $aa + bb$. De même $bd - bdf + 2bd + 2bdf - 3bd$ devient ſeulement bdf.

De l'Addition.

182. *Pour ajouter les quantités algébriques, on les écrit toutes de ſuite avec leurs mêmes ſignes, & on fait enſuite les réductions néceſſaires.*

Ainſi pour ajouter ab à bc, on écrit $ab + bc$.

La ſomme de $ab + c$, & de $b - c$, eſt $ab + c + b - c$, & en réduiſant $ab + b$.

La ſomme de $- b$, & de a, eſt $a - b$.

Pour ajouter $ab - ad + 3bd$ à $ad - bd$, & à $ab - ad + dd$, on écrit $ab - ad + 3bd + ad - bd + ab - ad + dd$, ce qui ſe réduit à $2ab - ad + 2bd + dd$.

183. Si on avoit des fractions algébriques à ajouter avec des quantités entieres ou fractionnaires, on ſuivroit les regles déja preſcrites pour les réduire au même dénominateur dans le beſoin. Ainſi $\frac{m}{a} + 1 = \frac{a + m}{a}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

De la Souſtraction.

184. *La Souſtraction ſe fait en écrivant à la ſuite de la quantité donnée, celle qu'on veut ſouſtraire, après en avoir changé les ſignes + en —, & les ſignes — en +.*

Par exemple, pour ôter b de a, écrivez $a - b$.

Pour ôter $b - c$ de $a + c$, on écrit $a + c - b + c$, & en réduiſant $a - b + 2c$.

Pour ôter $ab - bc + dd$ de $ab + abb - dd$, il faut écrire $ab + abb - dd - ab + bc - dd$; & en réduiſant, la différence eſt $abb + bc - 2dd$.

185. C'eſt par uue compenſation néceſſaire, qu'on change — en + dans la quantité qu'on ſouſtrait. Car lorſque pour retrancher $b - d$ de a, on écrit d'abord $a - b$, on retranche

trop ; puiſque ce n'eſt pas b tout entier, mais $b - d$ qu'il faut ſouſtraire ; on ôte donc trop de toute la quantité d : & par conſéquent, pour que la ſouſtraction ſoit exacte, il faut ajouter d à $a - b$, & écrire $a - b + d$.

On peut ſe convaincre plus aiſément de cette vérité dans les nombres : Si je veux retrancher $5 - 3$ de 6, ſuivant cette regle, je dois écrire $6 - 5 + 3$, & en réduiſant, la différence eſt 4, ce qui eſt évident ; car ſi j'écrivois $6 - 5 - 3$, je reteancherois 8 de 6, ce qui n'eſt pas ce qu'on ſe propoſe de faire ; car $5 - 3$ étant $= 2$, il ne faut retrancher de 6 que 2.

186. Lorſque les quantités que l'on ſouſtrait, ont une forme fractionnaire, ainſi que celles dont on les ſouſtrait, il faut ſuivre les regles de la ſouſtraction des fractions. On voudroit, par ex. ſouſtraire $\frac{p+q}{r}$ de $\frac{2c}{r} - 3d$; on écrira $\frac{2c - 3dr - p - q}{r}$.

De la Multiplication.

187. Pour multiplier deux termes algébriques, il faut opérer ſur quatre choſes ; ſur les ſignes, ſur les coefficiens, ſur les lettres, & ſur les expoſans.

La Regle des Signes eſt, que le produit des mêmes ſignes doit être poſitif, & le produit des ſignes différens, négatif.

Ainſi $+ \times + = +$ $\qquad$ $+ \times - = -$

$- \times - = +$ $\qquad$ $- \times + = -$

La Regle des Coefficients eſt de les multiplier l'un par l'autre.

La Regle des Lettres eſt de les écrire toutes de ſuite par ordre alphabétique, ſans mettre de ſignes entr'elles.

La Regle des Expoſans eſt que ſi on a à multiplier une lettre qui ait un expoſant par la même lettre qui en ait auſſi, il ne faut écrire au produit cette lettre qu'une ſeule fois, mais avec un expoſant égal à la ſomme des deux expoſants.

EXEMPLES. Pour multiplier $4b^2c$ par $-3dd$, je dis $+ \times - = -$, $4 \times 3 = 12$, $b^2c \times dd = b^2cdd$. Donc le produit eſt $-12b^2cdd$.

Pour

Pour multiplier $-3bb$ par $-b^3$, je dis $- \times - = +$, $3 \times 1 = 3$, (car tout terme qui n'a pas de coefficient exprimé, en a un ſous-entendu qui eſt 1) ; $bb \times b^3$ ou $b^2 \times b^3 = b^5$; donc le produit eſt $+3b^5$, ou ſimplement $3b^5$.

On trouvera de même que . . . . .

$a \times b = ab$.

$-bc^3 \times 3b^3d = -3b^4c^3d$.

$3aac \times -2bc = -6a^2bc^2$.

$a^3 \times a^4 = a^7$. Car $a^3 = aaa$, & $a^4 = aaaa$; donc $a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7$. Ce qui démontre la Regle des expoſans.

$abc \times 3a^2b^3cd = 3a^3b^4c^2d$. $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$.

$4a^3b^5 \times -7a^2b^3cd^4 = -28a^5b^8cd^4$.

La multiplication des Polynomes ſe fait, comme dans l'Arithmétique ordinaire, *en faiſant des produits partiaux de chaque terme*, ſuivant les regles preſcrites ci-deſſus (187), *& en prenant la ſomme de ces produits pour le produit total.* Toute la différence qu'il y a entre la multiplication des nombres & celle des polynomes, c'eſt que dans celle-ci il n'eſt pas néceſſaire de ſuivre l'ordre des termes, il ſuffit qu'on ait la ſomme des produits de chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur.

Par exemple, pour multiplier $a + 3c - d$ par $2a - d$, je diſpoſe ces termes comme dans l'Arithmétique, je multiplie d'abord a par $2a$, le produit eſt $2aa$; enſuite $+3c$ par $2a$, le produit eſt $+6ac$; puis $-d$ par $2a$, le produit eſt $-2ad$. Je paſſe au ſecond terme du multiplicateur, & & je multiplie a par $-d$, le produit eſt $-ad$; je multiplie $+3c$ par $-d$, le produit eſt $-3cd$; enfin je multiplie $-d$ par $-d$, le produit eſt $+dd$; j'ajoute tous ces produits enſemble, & ayant fait

$$\begin{array}{l} a + 3c - d \\ \quad 2a - d \\ \hline 2aa + 6ac - 2ad \\ \quad - ad - 3cd + dd \\ \hline \text{Red. } 2aa + 6ac - 3ad - 3cd + dd \end{array}$$

la réduction, j'ai le produit total $= 2aa + 6ac - 3ad - 3cd + dd$.

Autres exemples.

$$\begin{array}{r} a^3 - 3ab^4 + bb \\ aabb - b^3 \\ \hline a^5bb - 3a^3b^6 + aab^4 \\ - a^3b^3 + 3ab^7 - b^5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a - 2b \\ 2a + 2b \\ \hline 4aa - 4ab \\ + 4ab - 4bb \\ \hline 4aa - 4bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline a^3 + 2aac - abc \\ - aab - 2abc + bbc \\ \hline a^3 - aab + 2aac - 3abc + bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + x \\ a - x \\ \hline a^2 + ax \\ - ax - xx \\ \hline a^2 - x^2 \end{array}$$

185. Les fractions algébriques se multiplient comme les numériques: $\frac{x}{y} \times \frac{u}{z} = \frac{ux}{yz}$; $\frac{c}{d} \times \frac{m+n}{p+q} = \frac{cm+cn}{dp+dq}$; $\frac{a+b}{1-x} \times \frac{a-b}{1+x} = \frac{a^2-b^2}{1-x^2}$.

186. Il arrive souvent qu'au lieu d'effectuer la multiplication, on ne fait que l'indiquer, en écrivant le signe $\times$ entre le multiplicande & le multiplicateur. Alors on les couvre chacun d'un trait. Par exemple, pour exprimer le produit de $a + 3c - dd$ par $bb - 6dd$, on écrit $\overline{a + 3c - dd} \times \overline{bb - 6dd}$. D'autres les écrivent sans les joindre par le signe $\times$, mais renfermés entre deux parentheses, de cette sorte $(a + 3c - dd)(bb - 6dd)$. Ces parentheses sont fort commodes. D'autres enfin se servent d'autres expressions qu'on apprendra par l'usage.

187. II. *Démonstration de la Regle des signes.* Il faut démontrer que $+ \times - = -$, & que $- \times - = +$.

1.° Quand pour multiplier a par $b - c$, on écrit d'abord le produit de a par b qui est ab, il est clair que ce produit est trop grand ; car ce n'eſt pas b en entier, mais $b - c$ par lequel on veut multiplier a. Donc c entre autant de fois de trop dans le produit ab, que la quantité b y entre de fois. Or a exprime combien de fois b entre dans le produit ab, donc il en faut retrancher c autant de fois que a contient d'unités ; ou ce qui eſt le même, il en faut retrancher $c \times a$ ou ac. Donc le produit de a par $b - c$ eſt $ab - ac$.

Autrement. $b - b = 0$. donc $\overline{b - b} \times c$ doit être auſſi $= 0$; ce qui ne peut avoir lieu, qu'autant que $- b \times c = - bc$.

Par les nombres. Quand pour multiplier 5 par $6 - 4$, on dit d'abord, $5 \times 6 = 30$; ce produit 30 eſt trop grand ; car $6 - 4$ ne vaut que 2 : & il eſt trop grand, parce qu'on y a fait entrer 5 fois le nombre 4 qui eſt retranché de 6. Pour avoir un produit juſte, il faut donc de 30 ôter 5 fois 4, c'eſt-à-dire, 20, & le reſte 10 eſt le vrai produit; donc pour écrire le produit de 5 par $6 - 4$, il faut mettre $30 - 20$.

2.° Quand on multiplie $a - b$ par $c - d$, il eſt conſtant que le premier produit de cette multiplication, ſavoir $ac - bc$, eſt trop grand, parce que c eſt diminué de la quantité d; il faut donc de ce produit $ac - bc$, ôter autant de fois d, que c y entre de fois : or $a - b$ marque combien de fois c eſt entré dans le produit $ac - bc$; donc il faut en ôter d multiplié par $a - b$; c'eſt-à-dire, il faut ôter $ad - bd$ de $ac - bc$: or pour ôter $ad - bd$ de $ac - bc$, il faut écrire $ac - bc - ad + bd$; donc dans la multiplication de $a - b$ par $c - d$, le produit de $- b$ par $- d$, doit par compenſation, être $+ bd$.

Si à la place de a, b, c, d, on met des nombres, comme 6, 4, 7, 3, on fera la même démonſtration ſur ces nombres.

On peut auſſi multiplier $(b - b)$ par $(c - c)$. Le produit doit être 0. Il faut donc que $- b \times - c = + bc$.

De la Diviſion.

188. Quand on veut diviſer une quantité algébrique par une autre, on les met ordinairement en fraction. Ainſi pour diviſer $2bc$ par mn, on écrit $\frac{2bc}{mn}$, & parce que le numérateur de

cette fraction n'a rien de commun avec ſon dénominateur, elle eſt cenſée irréductible à de moindres termes. On ſe contente alors d'indiquer la diviſion.

189. Mais lorſqu'on peut réduire la fraction algébrique à une plus ſimple expreſſion, il ne faut pas manquer de le faire. On y réuſſira communément au moyen des quatre regles ſuivantes. (Je dis *communément*, parce qu'il faut employer quelquefois outre cela la méthode du plus grand commun diviſeur.)

I. Pour les Signes. *Le quotient de deux termes qui ont un même ſigne, eſt poſitif; & le quotient de deux termes qui ont différens ſignes, eſt négatif.*

II. Pour les Coefficiens. *Si l'on peut les diviſer ſans reſte l'un par l'autre, il faut les effacer tous deux, & mettre leur quotient à la place du plus grand coefficient: s'ils ne ſont pas diviſibles ſans reſte, il faut les laiſſer en fraction tels qu'ils ſont; enfin s'ils ſont égaux, il faut les effacer.*

III. Pour les Lettres. *Effacez celles qui étant communes au dividende & au diviſeur, ont le même expoſant dans les deux termes; & ſi elles y ſont ſeules, écrivez* 1 *pour quotient.*

IV. Pour les Expoſans. *Quand une même lettre ſe trouve avec des expoſans différens dans le dividende & dans le diviſeur, on l'efface dans le terme où elle a l'expoſant le plus petit, ou on met* 1 *à ſa place, ſi elle y eſt ſeule, & dans l'autre terme, on ne lui laiſſe pour expoſant que la différence de ces expoſans.*

Cette Regle a lieu, quand même la lettre n'auroit pas d'expoſant, puiſqu'alors ſon expoſant eſt 1.

EXEMPLES. Pour diviſer $4ac^3de^3$ par $-2bd^3e^3f$, je dis d'abord, $+$ diviſé par $- = -$; enſuite, $\frac{4}{2} = 2$ que je mets au quotient, dont il ſera le coefficient. Je paſſe à la Regle des lettres, en diſant, les lettres a & c ne ſe trouvent que dans le dividende, & les lettres b & f ne ſe trouvent que dans le diviſeur, il faudra donc les mettre au quotient, chacune à leur place. Puis, je vois par la Regle des expoſans que $\frac{d}{d^3} = \frac{1}{d^2}$, & que $\frac{e^3}{e^3} = 1$. D'où je conclus que le quotient cherché eſt $-\frac{2ac^3}{bd^2f}$.

Pareillement, je trouverai que $= \frac{3a^3}{-12a^4b^3} = -\frac{1}{4ab^3}$

en disant $\frac{+}{-} = -$; $\frac{12}{3} = 4$. J'efface 3 dans le dividende, & je mets 3 à la place de 12 dans le diviseur : puis je vois que selon la Regle des exposans, il faut mettre 1 dans le dividende à la place de a^3, & laisser a^1 ou a seulement dans le diviseur. Ainsi le quotient est $-\frac{1}{4ab^3}$. On trouvera de même que $\frac{3abc}{3abc} = \frac{1}{1} = 1$; que $\frac{-4bd}{2bd} = -\frac{2}{1} = -2$; que $\frac{3aab}{5ac} = \frac{3ab}{5c}$; que $\frac{-12abd}{3a} = -\frac{4bd}{1} = -4bd$; que $\frac{4a^3bbd}{4abd} = \frac{aab}{1} = aab$, &c.

189. La Regle des coefficiens & celle des exposans, ne sont que des réductions de fractions aux expressions les plus simples ; celle des exposans est fondée sur ce que, quand une même quantité se trouve dans le dividende & dans le diviseur, leur quotient est 1 (98).

Ainsi $\frac{a^3}{a^5}$ étant la même chose que $\frac{aaa}{aaa \times aa}$, il est évident que $\frac{aaa}{aaa} = 1$, ou $\frac{1}{1}$, on peut donc écrire $\frac{1}{1 \times aa}$ ou simplement $\frac{1}{aa}$ ou $\frac{1}{a^2}$; d'où l'on voit que cette réduction exige qu'on ne laisse que la différence des exposans à la lettre dont l'exposant est le plus grand, & qu'on substitue 1 à celle dont l'exposant est le plus petit.

190. Ces Regles ou réductions se peuvent appliquer aux fractions des polynomes, lorsqu'il se trouve une ou plusieurs mêmes quantités dans tous les termes, tant du dividende que du diviseur. Ainsi $\frac{ax - 2abx}{ax + axx}$ se réduit à $\frac{1 - 2b}{1 + x}$, en effaçant ax dans tous les termes, & mettant 1 à sa place dans ceux où il se trouve seul. De même $\frac{3xx}{3axx + 3bbxx}$ se réduit à $\frac{1}{a + bb}$.

Cette expreſſion $\frac{4a^2xx + 3a^3bbx}{aax - aabx}$ ſe réduit à $\frac{4x + 3abb}{1 - b}$. Celle-ci $\frac{4abxx - 2ab}{2aabb + 4abb}$ ſe réduit à $\frac{2xx - 1}{ab + 2b}$.

191. On diviſe auſſi les polynomes comme dans l'Arithmétique ordinaire ; & quoiqu'il arrive rarement que cette diviſion ſe puiſſe faire, il faut cependant l'eſſayer avant que de ſe contenter de faire quelques-unes des réductions précédentes.

192. Mais pour s'épargner bien des tâtonnemens, il faut arranger les termes du dividende & ceux du diviſeur, de façon que de part & d'autre, celui-là ſoit le premier, ou une lettre commune à tous les deux ait le plus grand expoſant : que celui-là ſoit le ſecond, ou la même lettre ait l'expoſant prochainement moindre, & ainſi de ſuite. Cela s'appelle *ordonner* une quantité. Voici un exemple dans lequel le dividende & le diviſeur ſont ordonnés par rapport à la lettre a.

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \left\{ a^2 + 2ab + b^2 \right.$$

On auroit pu l'ordonner de même par rapport à la lettre b. Quelquefois cependant il eſt plus commode de préférer une lettre à un autre. C'eſt lorſque celle-ci ſe trouve avec le même expoſant dans pluſieurs termes, par exemple, on a préféré la lettre x aux lettres b & c, dans cette diviſion, dont nous allons détailler le procédé.

$$\begin{array}{rrrr|l}
9b^2x^5 & -3b^2cx^4 & -3b^2cx^3 & +b^2c^2x^2 & -3b^2x^2+b^2cx \\
\cline{5-5}
-9b^2x^5 & +3b^2cx^4 & & & -3x^3+cx \\
\cline{1-2}
 & 0 & -3b^2cx^3 & +b^2c^2x^2 & \\
 & & +3b^2cx^3 & -b^2c^2x^2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Je dis donc $\frac{9b^2x^5}{-3b^2x^2} = -3x^3$ que je mets au quotient. Je multiplie le diviſeur par ce terme, & je ſouſtrais le produit $9b^2x^5 - 3b^2cx^4$ des deux premiers termes du dividende. Il ne me reſte rien. J'abaiſſe les deux termes ſuivans, & je dis $\frac{-3b^2cx^3}{-3b^2x^2} = +cx$, que je mets au quotient. Multipliant ensuite le diviseur par ce nouveau terme, je soustrais le produit $-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$ des deux termes abaissés, reste zéro. Il ne reste plus rien au dividende. La division est donc finie, & le quotient exact est $-3x^3 + cx$. Je le vérifie, en le multipliant par le diviseur; je retrouve le dividende, l'opération est donc bonne. Au reste, pour acquérir de la facilité dans ces sortes de calculs, il n'y a qu'à multiplier d'abord deux quantités algébriques l'une par l'autre, & qu'à diviser ensuite leur produit par l'une des deux. Le quotient doit être l'autre quantité.

193. On peut aussi s'exercer sur des expressions semblables à celle-ci $\frac{a^5 + m^5}{a + m}$.

On trouvera pour quotient $a^4 - a^3m + a^2m^2 - am^3 + m^4$. En divisant $1 - x^{12}$ par $1 - x$, le quotient sera $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11}$. Il en seroit de même pour les exposans plus élevés. Aussi avec un peu d'usage voit-on sans division quels doivent être les quotiens dans tous les cas semblables.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & a^5 + m^5 & a + m \\
 & -a^5 - a^4m & \overline{a^4 - a^3m + a^2m^2 -} \\
\hline
\text{1. reste.} & 0 - a^4m + m^5 & \quad - am^3 + m^4 \\
 & + a^4m + a^3m^2 & \\
\hline
\text{2. r.} & 0 + a^3m^2 + m^5 & \\
 & - a^3m^2 - a^2m^3 & \\
\hline
\text{3. r.} & 0 - a^2m^3 + m^5 & \\
 & + a^2m^3 + am^4 & \\
\hline
\text{4. r.} & 0 + am^4 + m^5 & \\
 & - am^4 - m^5 & \\
\hline
\text{5. r.} & 0 &
\end{array}
$$

On trouveroit de même que $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 +$, &c. &c. sans fin; & que $\frac{1}{1 + xx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$, &c. $+$, &c. à l'infini pareillement.

194. La division des fractions algébriques par des entiers ou par d'autres fractions, ou d'un entier par une frac-

tion, ne peut ſouffrir aucune difficulté. 1.° $\frac{\frac{b}{c}}{4m} = \frac{b}{4cm}$; 2.° $\frac{\frac{b}{c}}{\frac{4m}{p}} = \frac{bp}{4cm}$. 3.° $\frac{4m}{\frac{b}{c}} = \frac{4cm}{b}$. On peut s'en aſſurer, en ſubſtituant des nombres à ces lettres. Mais il eſt bon de s'accoutumer aux expreſſions générales. Rien ne plait davantage aux Mathématiciens que la généralité dans les opérations.

195. J'ai dit (189) que pour réduire certaines expreſſions algébriques à leurs moindres termes, il falloit ſe ſervir de leur plus grand diviſeur. Voici la maniere de le trouver. Elle ne differe de celle qui a été preſcrite pour les nombres, que dans quelques cas particuliers.

Après avoir ordonné les deux quantités, il faut diviſer la plus grande par la plus petite. Si la diviſion ſe fait ſans reſte, la plus petite eſt le diviſeur cherché : auquel cas il faut effectuer les deux diviſions, & ſubſtituer les deux quotiens aux quantités propoſées.

Ex. $\frac{a+x}{aa-xx} = \frac{1}{a-x}$; $\frac{px+xx}{bmp+bmx} = \frac{x}{bm}$.

En diviſant $aa-xx$ par $a+x$, la diviſion ſe fait exactement. Donc $a+x$ eſt le plus grand commun diviſeur. Quel plus grand diviſeur en effet pourroit avoir $a+x$ que lui-même ? Mais $\frac{a+x}{a+x} = 1$; & $\frac{aa-xx}{a+x} = a-x$. Donc $\frac{a+x}{aa-xx} = \frac{1}{a-x}$.

Si toutefois la plus grande quantité ne pouvoit ſe diviſer ſans reſte par la plus petite, on diviſeroit à ſon tour celle-ci par le reſte de la premiere ; & ce reſte ſeroit le plus grand commun diviſeur, s'il diviſoit exactement la plus petite, &c.

Juſques-là c'eſt la même méthode pour les lettres & pour les nombres : mais cette méthode ne s'étend pas à tous les cas, comme nous allons le faire voir, après ces deux remarques.

196.

196. 1.° Il n'eſt pas rare de trouver dans l'une des deux quantités propoſées un diviſeur commun à tous ſes termes. Quand on en trouve, il faut l'effacer avant que de commencer la diviſion. Le calcul n'en ſera que plus ſimple, & le plus grand commun diviſeur n'en ſera point altéré.

Par exemple, dans $\frac{x^4 - z^4}{x^5 - x^3 z^2}$ je vois que x^3 eſt commun aux deux termes du diviſeur, & qu'il ne l'eſt pas à ceux du dividende. Il ne peut donc pas faire partie du plus grand commun diviſeur que je cherche. Je l'efface donc, & par-là j'ai $\frac{x^4 - z^4}{x^2 - z^2} = x^2 + z^2$ ſans reſte. D'où je conclus que $x^2 - z^2$ eſt le diviſeur cherché. Effectuant donc les deux diviſions, je trouve $\frac{x^2 + z^2}{x^2}$, expreſſion bien plus ſimple que la premiere.

197. En général, toute quantité ſemblable à $\frac{bm + mx}{b^2 n - nx^2}$ aura le même plus grand diviſeur que $\frac{b + x}{b^2 - x^2}$; & réciproquement. Ainſi, ſoit que l'on diviſe, ſoit que l'on multiplie l'une des deux quantités données, par une grandeur qui n'ait aucun diviſeur commun avec l'autre, les réſultats auront toujours le même plus grand commun diviſeur que les deux quantités données.

198. 2.° Le changement de ſignes dans une de ces quantités n'en produit aucun dans leur diviſeur commun, pourvu qu'on les change tous à la fois dans cette quantité. Il eſt clair, par exemple, que ſi $a^2 - b^2$ eſt diviſible par $a - b$, il le ſera encore par $-a + b$. Toute la différence ſera dans les ſignes des quotiens.

199. Cela poſé, cherchons le plus grand dviſeur commun de $\frac{6x^3 - 6x^2 y + 2xy^2 - 2y^3}{12x^2 - 15xy + 3y^2}$. On voit d'abord que tous les termes du dividende peuvent être diviſés exactement par 2, mais non ceux du diviſeur. On peut donc ſimplifier l'opération, en les diviſant par 2 (196).

Par la même raiſon, on peut diviſer par 3 les termes du diviſeur. Ainſi tout ſe réduit à trouver le plus grand diviſeur commun de $\frac{3x^3 - 3x^2 y + xy^2 - y^3}{4x^2 - 5xy + y^2}$.

Mais ici la méthode eſt en défaut, parce que le coefficient 3 n'eſt pas divisible par 4. Pour y suppléer, on multipliera tout le dividende par 4 (197), & l'on divisera $12x^3 - 12x^2y + 4xy^2 - 4y^3$ par $4x^2 - 5xy + y^2$. Le quotient sera $3x$, que l'on négligera à l'ordinaire : le reste sera $3x^2y + xy^2 - 4y^3$.

Suivant la méthode, il faudroit diviser $4x^2 - 5xy + y^2$ par ce reste. Mais avant de procéder à cette division, on effacera d'abord dans tous les termes de ce reste la lettre y, qui leur est commune, & qui ne l'est pas à tous ceux du nouveau dividende. On aura donc $3x^2 + xy - 4y^2$ pour diviseur.

On remarquera ensuite que cette quantité ne peut pas diviser $4x^2 - 5xy + y^2$, à cause des coefficiens. On multipliera donc celle-ci par 3, & on essaiera la division. Le quotient sera 4, & le reste sera $-19xy + 19y$.

Ce second reste servira de diviseur à $3x^2 + xy - 4y^2$: mais auparavant on effacera dans les deux termes la quantité $19y$ qui leur est commune. Procédant alors à une troisieme division, on aura $3x^2 + xy - 4y^2$ pour dividende, $-x + y$ pour diviseur, $-3x - 4y$ pour quotient exact. $-x + y$ sera donc le plus grand commun diviseur cherché ; & $\dfrac{6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3}{12x^2 - 15xy + 3y^2}$ se changera en $\dfrac{-6x^2 - 2y^2}{-12x + 3y} = \dfrac{6x^2 + 2y^2}{12x - 3y}$ qu'il n'est plus possible de réduire.

Soit proposé maintenant de trouver le plus grand diviseur commun de $\dfrac{3bcq + 30mp + 18bc + 5mpq}{24ad - 7fgq - 42fg + 4adq}$.

1.° J'ordonne ainsi la quantité, $\dfrac{(3bc + 5mp)\,q + 18bc + 30mp}{(4ad - 7fg)\,q + 24ad - 42fg}$.

2.° Pour rendre la division possible, il faudroit multiplier tout le dividende par $(4ad - 7fg)$: mais auparavant il faut être sûr que cette quantité ne divise pas exactement le diviseur proposé (197). Or je vois qu'elle le divise, & que le quotient exact est $q + 6$, que je substitue au premier diviseur.

3.° La difficulté est donc réduite à trouver le plus grand commun diviseur de $\dfrac{(3bc + 5mp)\,q + 18bc + 30mp}{q + 6}$: & il est visible que c'est $q + 6$ lui-même, puisque la division réussit.

Ainsi l'expression proposée peut se réduire à $\dfrac{3bc + 5mp}{4ad - 7fg}$. On trouvera d'autres exemples dans les Elémens d'Algebre de M. *Clairaut*, Ouvrage intéressant par l'adresse analytique qui y regne, & par la clarté avec laquelle il est écrit.

200. Nous placerons ici la méthode de trouver tous les diviseurs d'une quantité soit numérique, soit algébrique. Elle nous servira pour la résolution des Equations.

I. S'il s'agit d'un nombre, il faut essayer de le diviser successivement par tous les nombres premiers, jusqu'à ce qu'on trouve un quotient sans reste; il faut ensuite essayer de diviser ce premier quotient encore par quelques-uns des nombres premiers jusqu'à ce qu'on trouve un second quotient juste ou sans reste, qu'on tâchera de diviser par les mêmes nombres, jusqu'à ce qu'enfin on trouve un quotient qui soit l'unité, c'est-à-dire, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus d'autre diviseur plus petit que le dernier quotient. Ayant écrit tous les diviseurs dont on se sera servi, on les multipliera deux à deux, puis trois à trois, ensuite quatre à quatre, &c. & les produits seront, avec ces diviseurs, tous les diviseurs du nombre proposé.

Exemple. On demande tous les diviseurs du nombre 630. Je le divise par 2, le premier quotient est 315, que je ne puis plus diviser sans reste par 2, mais par 3, le second quotient est 105; je puis encore le diviser par 3; le troisieme quotient est 35; je ne puis le diviser par 2 ni par 3, mais par 5, le quatrieme quotient est 7. Je ne puis diviser ce quatrieme quotient par 2, 3, 5, mais seulement par 7, & le dernier quotient est 1. Les diviseurs dont je me suis servi, sont donc 2, 3, 3, 5, 7. Je les multiplie deux à deux, $2\times3=6$, $2\times5=10$, $2\times7=14$, $3\times3=9$, $3\times5=15$, $3\times7=21$, $5\times7=35$. Puis trois à trois, $2\times3\times3=18$, $2\times3\times5=30$, $2\times3\times7=42$, $2\times5\times7=70$, $3\times3\times5=45$, $3\times3\times7=63$, $3\times5\times7=105$. Ensuite quatre à quatre, $2\times3\times3\times5=90$, $2\times3\times3\times7=126$, $2\times3\times5\times7=210$; $3\times3\times5\times7=315$. Enfin cinq à cinq; $2\times3\times3\times5\times7=630$. Tous les diviseurs sont donc 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630.

La raison en est simple. Puisque le nombre proposé est égal au produit des cinq diviseurs $2\times3\times3\times5\times7$, il est clair que dans ce nombre sont renfermés tous les produits possibles de deux, trois ou quatre, &c. de ces diviseurs.

II. C'est la même chose pour les quantités algébriques. On demande, par exemple, tous les diviseurs de $bbdd+b^3d$. Je divise d'abord par b, & j'ai le premier quotient $bdd+bbd$, je le divise encore par b, & jai le second quotient $dd+bd$, je le divise par $b+d$, & j'ai le troisieme quotient d, je le divise par d, & j'ai 1 pour le dernier quotient. Les diviseurs dont je me suis servi, sont donc b, b, $b+d$, d: je les multiplie deux à deux, & j'ai bb, $bb+bd$, bd, $bd+dd$; puis trois à trois, & j'ai b^3+bbd, $bdd+$

bdd, bbd; enfin quatre à quatre, & j'ai $b^3d + bbdd$. Donc tous les diviſeurs cherchés ſont 1, b, $b + d$, d, bb, bbd, bd, $bb + bd$, $bd + dd$, $b^3 + bbd$, $bbd + bdd$, $b^3d + bbdd$.

Des Puiſſances & des Racines.

ON appelle Puiſſance d'une quantité, le produit de cette quantité par l'unité, ou par elle-même; & on diſtingue les degrés des puiſſances par les expoſans de cette quantité. Ainſi a, ou a^1 eſt la premiere puiſſance de a. La ſeconde eſt a^2, la troiſieme eſt a^3, &c. En général a^m eſt la puiſſance m de a, quelle que ſoit la valeur de m.

Cette quantité a eſt la racine de ces divers produits; & la dénomination de cette racine dépend de la puiſſance qui lui répond.

202. Par analogie aux dimenſions du corps, la ſeconde puiſſance d'une quantité comme b^2, s'appelle le *quarré* de b; la troiſieme puiſſance b^3, s'appelle le *cube* de b; les puiſſances qui ſont au-deſſus, ſe déſignent ſimplement par leurs expoſans. Ainſi b^4, b^5, &c. ſont la quatrieme, cinquieme, &c. puiſſance de b.

Réciproquement la racine ſeconde, ou la *racine quarrée* de b^2 eſt b. La racine troiſieme, ou *la racine cubique* de b^3 eſt b, &c.

203. Puiſque la premiere puiſſance de a eſt a ou a^1, que la ſeconde puiſſance eſt a^2 ou $a \times a$, que la troiſieme puiſſance eſt a^3 ou $a \times a \times a$, que la quatrieme eſt a^4 ou $a \times a \times a \times a$, &c. on en peut tirer cette Regle générale.

204. *Pour élever une quantité à une puiſſance donnée, il faut la multiplier par elle-même autant de fois moins une, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unités.* Ainſi pour élever 9 à la troiſieme puiſſance, il faut le multiplier deux fois par lui-même, en diſant $9 \times 9 = 81$, $81 \times 9 = 729$.

De même le quarré de $\frac{1}{3}$ eſt $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$: ſon cube eſt $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$; ſa quatrieme puiſſance eſt $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$, &c. Le quarré de $\frac{1}{10}$ eſt $\frac{1}{100}$, ſon cube $\frac{1}{1000}$, ſa quatrieme puiſſance $\frac{1}{10000}$, &c.

205. D'où l'on voit que *la valeur d'une fraction diminue à mesure qu'on l'éleve à de plus hautes puissances, & que cette diminution est d'autant plus rapide, que le dénominateur est plus grand par rapport au numérateur.*

206. Quant aux expressions algébriques, voici comment on les éleve à leurs différentes puissances. I.° S'il s'agit d'un monome, *on met à toutes ses lettres l'exposant de la puissance proposée.* Ainsi la cinquieme puissance de abc est $a^5 b^5 c^5$. La puissance m de $\frac{ab}{cd}$ est $\frac{a^m b^m}{c^m d^m}$. Si le monome a un coefficient, on l'éleve à la puissance indiquée. Le Cube de $\frac{2ab}{5fg}$, par exemple, est $\frac{125 f^3 g^3}{8a^3 b^3}$.

207. II.° S'il y a déja dans le monome quelque exposant, *on le multiplie par celui de la puissance à laquelle on veut l'élever.* Ainsi la quatrieme puissance de $a^3 b^2$ est $a^{12} b^8$; & en général la puissance m de $\frac{a^3 b^n}{cd^q}$ est $\frac{a^{3m} b^{mn}}{c^m d^{mq}}$. Tout cela suit de l'article 204.

208. III.° Pour un polynome, il suffit quelquefois d'indiquer la puissance à laquelle on veut l'élever. Cela se fait, ou en le couvrant d'un trait, au bout duquel on écrit l'exposant, ou en le renfermant entre deux parentheses. Ainsi $\overline{aa - bb}^{\,m}$, & $(aa - bc)^m$ désignent également la puissance m du binome $aa - bc$.

Quand on veut avoir en détail tous les termes de la puissance d'un polynome, on fait tout au long les multiplications indiquées (204), ou l'on se sert d'une *formule* générale que nous démontrerons plus bas. Par formule, on entend l'énoncé succint d'une vérité ou d'une méthode démontrée généralement. On trouve par ex. que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

Mais comme on a souvent besoin du quarré & du cube des binomes, il est à propos d'examiner les termes qui entrent dans la formation de ces puissances.

209. Si donc on éleve au quarré la quantité $a + b$, ou $-a - b$, on trouve $aa + 2ab + bb$; & si on y éleve $a - b$ ou

$-a+b$, on trouve $aa-2ab+bb$. Le quarré d'un binome contient donc, 1.° *le quarré du premier terme ; 2.° le double du premier terme multiplié par le second ; 3.° le quarré du second.* Il y a donc néceſſairement trois termes dans le quarré d'un binome.

Quant aux ſignes, *ils ſont tous poſitifs, lorſque les termes du binome ont le même ſigne ; & lorſque ceux-ci ont des ſignes différens, le produit du double du premier par le ſecond eſt le ſeul terme négatif dans le quarré.*

En élevant au quarré le trinome $a+b+c$, on trouvera, réduction faite, $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$. C'eſt-à-dire, que le *quarré d'un trinome contient les quarrés de chaque terme en particulier, plus le double du premier par le ſecond, plus le double du premier & du ſecond par le troiſieme.*

D'après cela, il eſt aiſé de voir que le quarré de $(ax+yz)$ $=a^2x^2+2axyz+y^2z^2$..... que celui de $(3mn-4m^2)$ $=9m^2n^2-24m^3n+16m^4$.... & que $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. On voit auſſi que $(b+2c-y)^2=b^2+4bc+4c^2-2by-4cy+y^2$.

210. Remarquez que pour compléter le quarré d'un binome, lorſqu'on a déja les deux premiers termes, il ne faut que leur ajouter le quarré de la moitié du coefficient du ſecond. Si j'avois, par exemple, x^2+2ax, je prendrois la moitié de $2a$ que j'appelle le coefficient du ſecond terme, & j'ajouterois ſon quarré a^2 à x^2+2ax, ce qui me donneroit alors le quarré parfait du binome $x+a$ (209). Donc toutes les fois qu'on voudra compléter un quarré, ayant déja deux termes de cette forme, x^2+ax, il n'y aura qu'à écrire $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. Ceci trouvera plus d'une fois ſon application.

211. En élevant le binome $a+b$ à ſon cube, on trouve $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Ce qui fait voir que le cube d'un binome quelconque eſt compoſé des cubes de ſes deux termes, & des produits de trois fois le quarré de chaque terme par l'autre.

Quant aux signes, ils sont tous positifs quand ceux du binome le sont ; lorsque ceux-ci sont tous les deux négatifs, tous ceux du cube le sont de même ; & lorsqu'il y en a un de positif & un de négatif dans le binome, ceux du cube sont alternatifs. On trouvera donc que $(2ax - xx)^3 = 8a^3x^3 - 12a^2x^4 + 6ax^5 - x^6$.

212. Enfin, en élevant de même un polynome à ses puissances successives, on remarquera facilement de quelles parties chacune est composée. Mais pour s'épargner ces multiplications réitérées, & pour avoir directement une puissance quelconque, les Mathématiciens emploient la formule du binome, trouvée par NEWTON. C'est bien une des plus utiles inventions de l'analyse. Nous la donnerons après avoir détaillé les principes qui doivent nous servir à la démontrer.

Des différentes expressions des Puissances & des Racines.

213. ON conçoit facilement qu'une quantité comme a est élevée à autant de ses puissances successives, qu'on ajoute d'unités à son exposant. Ainsi a^1 étant la premiere puissance, a^{1+1} ou a^2 est la seconde, a^{2+1} ou a^3 est la troisieme, a^{3+1} ou a^4 est la quatrieme, &c. En généralisant cette idée, on voit qu'*une quantité peut avoir autant de puissances possibles, qu'il y a d'exposans possibles ; c'est-à-dire, de nombres possibles, soit entiers, soit rompus, soit positifs, soit négatifs.* Et quoiqu'on n'ait d'abord d'idée claire que des puissances dont l'exposant est un nombre entier positif, comme de la puissance a^m, cependant on voit qu'on peut imaginer $a^{\frac{m}{n}}$, a^{-m}, $a^{-\frac{m}{n}}$, & même a^0, ce qui doit former autant de différentes especes de puissances, dont on peut connoître la nature en les rappellant à l'expression a^m.

214. I.° Pour réduire a^0 à l'expression a^m, je vois qu'il faut multiplier a^0 par a^m ; car le produit est $a^{0+m} = a^m$. Donc a^0 est un multiplicateur qui n'augmente ni ne diminue le multiplicande, ce qui ne convient qu'à l'unité. Donc $a^0 = 1$. Autrement, $a^0 = a^{m-m}$, or $a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$. Donc $a^0 = 1$. Donc en général, *une quantité quelconque élevée à la puissance zéro, n'est autre chose que l'unité.*

215. II.° Pour réduire $a^{\frac{m}{n}}$ à l'expression a^m, je vois qu'il faut élever l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ à la puissance n, ce qui se fait (207) en multipliant l'exposant $\frac{m}{n}$ par n; car alors j'ai $a^{\frac{m \times n}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$. Donc a^m est la puissance n de $a^{\frac{m}{n}}$, donc $a^{\frac{m}{n}}$ est la racine n de a^m, ou $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Donc en général, *une quantité quelconque élevée à une puissance fractionnaire, n'est autre chose que la racine d'une puissance dont l'exposant est le numérateur d'une fraction, qui a pour dénominateur l'exposant de la racine.* Ainsi $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, & $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{aa}$, &c.

216. III.° Pour réduire a^{-m} à l'expression a^m, je vois qu'il faut multiplier a^{-m}, par a^{2m}; car alors on $a^{2m-m} = a^m$. Donc $\frac{a^m}{a^{2m}} = a^{-m}$. Or $\frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m}$. Donc $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Donc en général, *une quantité élevée à une puissance dont l'exposant est un nombre entier négatif, n'est autre chose que l'unité divisée par la puissance positive de cette quantité.* Ainsi $a^{-2} = \frac{1}{aa}$, $ab^{-5} = \frac{a}{b^5}$, &c.

217. IV.° Et voilà pourquoi $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

218. Il suit de-là, 1.° que pour changer un signe radical en expression de puissance, il n'y a qu'à diviser par l'exposant du radical celui de la quantité qui est sous le signe. Ainsi $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a \ldots$ $\sqrt[4]{x^4b^2} = x^{\frac{4}{4}} b^{\frac{2}{4}} = xb^{\frac{1}{2}} \ldots \sqrt[5]{32b^3c^4y^5} = 2yb^{\frac{3}{5}} c^{\frac{4}{5}}$.

2.° Que pour ramener à une forme radicale une puissance fractionnaire, il n'y a qu'à donner pour exposant au radical, le dénominateur de la fraction. Par exemple, $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a} \ldots$ $y^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{y^3} \ldots 2yb^{\frac{3}{5}} c^{\frac{4}{5}} = 2y\sqrt[5]{b^3c^4} \ldots$

De

De l'Extraction des Racines.

219. I.° *POur extraire une racine quelconque d'un monome, il faut diviser l'exposant de chaque lettre de ce monome par l'exposant de la racine.* Cette opération rend fractionnaire l'exposant de cette lettre; mais si cette fraction se peut réduire à un entier, l'extraction de la racine est parfaite, sinon elle n'est qu'indiquée.

Par exemple, pour avoir la racine quarrée de a^2b^6, il faut écrire $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{6}{2}}$, & en réduisant, on a la vraie racine cherchée ab^3. Car $ab^3 \times ab^3 = a^2b^6$.

Pour avoir la racine cubique de a^6b, il faut écrire $a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, & en réduisant, $aab^{\frac{1}{3}}$, ce qui ne donne une extraction parfaite qu'en partie. En général la racine m de $\frac{a^p b^q}{cd^n}$ est $\frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}}{c^{\frac{1}{m}}d^{\frac{n}{m}}}$. Car (215) cette expression est la même chose que $\sqrt[m]{\frac{a^p b^q}{cd^n}}$.

220. II.° Si le monome a un coefficient, il faut en extraire la racine suivant les regles qu'on va donner pour les nombres.

221. III.° Pour extraire une racine d'un polynome, il faut que ce polynome soit réellement une puissance de cette racine, ce qui est assez rare; c'est pourquoi on se contente souvent d'indiquer cette extraction, en écrivant ce polynome couvert d'un trait à la suite du signe radical $\sqrt{}$, sur lequel on met l'exposant de la racine; ou bien l'on écrit au bout du trait qui couvre ce polynome, la puissance fractionnaire qui en exprime la racine. Ainsi pour désigner la racine quarrée de $aa - bb$, on écrit $\sqrt{\overline{aa - bb}}$, ou bien $\overline{aa - bb}^{\frac{1}{2}}$; d'autres écrivent $\sqrt{(aa - bb)}$, ou bien $(aa - bb)^{\frac{1}{2}}$. Pour indiquer la racine cubique du polynome

$\frac{aa - 3b + c}{cc - dd}$, on écrit $\sqrt[3]{\frac{aa - 3b + c}{cc - dd}}$, ou bien $\frac{\sqrt[3]{aa - 3b + c}}{\sqrt[3]{cc - dd}}$,

ou bien $\overline{\frac{aa - 3b + c}{\overline{cc - dd}^{\frac{1}{3}}}}^{\frac{1}{3}}$ $\left(\frac{aa - 3b + c}{cc - dd}\right)^{\frac{1}{3}}$, ou bien,

$\frac{(aa - 3b + c)^{\frac{1}{3}}}{(cc - dd)^{\frac{1}{3}}}$. Les extractions des racines des puiſſances indiquées de la ſorte, ne ſe font réellement qu'après qu'on a ſubſtitué des nombres à la place des lettres.

222. Quand on eſt verſé dans les calculs algébriques, on voit facilement ſi un polynome eſt une puiſſance parfaite de la racine qu'on veut extraire; & par conſéquent s'il faut réellement extraire cette racine, ou ſe contenter de l'indiquer. Voici la méthode de l'extraire.

223. Soit le polynome $aa + 2ax + xx$, dont on cherche la racine quarrée. D'abord il eſt évident que ſi cette quantité, qui n'a que trois termes, eſt un quarré parfait, ſa racine ne peut être qu'un binome (209).

Il n'eſt pas moins évident enſuite, que le premier de ces termes doit être un quarré; que le ſecond doit être le double du produit des deux termes de la racine, & que le troiſieme doit être encore un quarré.

D'après cela, je prends la racine de a^2, qui eſt a, & je la mets à côté. Je ſouſtrais ſon quarré a^2 de la quantité propoſée. Il me reſte $2ax + xx$.

$$\begin{array}{r|l} a^2 + 2ax + x^2 & a + x \ldots\ \text{Rac.} \\ -a^2 \qquad\qquad & \overline{\qquad\qquad} \\ \hline 0 + 2ax + x^2 & 2a \ldots\ldots\ \text{Div.} \\ -2ax - x^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Mais puiſque $2ax$ doit être le produit du double du premier terme a de la racine par le ſecond, il eſt clair que pour connoître ce ſecond terme, il n'y a qu'à diviſer $2ax$ par $2a$. Le quotient ſera $+ x$.

Maintenant, s'il eſt vrai que $+ x$ ſoit le ſecond terme de la racine, ſon produit par $2a$, plus ſon quarré x^2 étant ſouſtraits du reſte trouvé, il ne doit rien reſter. Pour avoir ce produit & ce quarré à la fois, je multiplie ($2a+x$) par x; & je trouve en effet qu'il ne reſtera rien; d'où je conclus que $a+x$ eſt la racine cherchée.

224. De-là on peut déduire cette regle générale, pour extraire la racine d'un quarré parfait (n'importe de combien de termes il ſoit composé). I.° Ordonnez d'abord ſes termes, extrayez enſuite la racine du premier, & ſouſtrayez de la quantité le quarré de cette racine.

II.° Abaiſſez le ſecond & le troiſieme termes de la quantité, & diviſant le ſecond par le double de celui qui eſt déja à la racine, voyez ſi le quotient qui réſultera de cette diviſion, multiplié par le diviſeur & par lui-même, peut être ſouſtrait des deux termes abaiſſés.

III.° Effectuez cette ſouſtraction, au cas qu'elle ſoit poſſible, & mettez le quotient à la racine. S'il ne reſte rien dans le polynome, l'opération eſt finie.

IV.° S'il y reſte encore quelques termes, diviſez les deux premiers par le double de ceux qui ſont déja à la racine; & voyez ſi le quotient multiplié par ce diviſeur & par lui-même, peut être ſouſtrait des termes qui reſtent.

V.° Si la ſouſtraction les détruit tous, la racine exacte ſera un trinome.

S'il en reſte encore, on diviſera les trois premiers par le double de tout ce qui eſt à la racine, & on achevera le reſte comme ci-deſſus.

EXEMPLE.

Quelle eſt la racine de.... $a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^3+2b^2c^3+c^6$ $\left\{\begin{array}{l} a^2-b^2-c^3 \ldots \text{Rac.} \\ \hline 2a^2 \ldots\ldots \text{I. Div.} \\ 2a^2-2b^2 \text{. II. Div.}\end{array}\right.$

Celle du premier terme eſt a^2 dont le quarré a^4 étant ſouſtrait de la quantité,

$$\begin{array}{l} -a^4 \\ \hline 0-2a^2b^2+b^4 \\ +2a^2b^2-b^4 \\ \hline \qquad 0-2a^2c^3+2b^2c^3+c^6 \\ \qquad +2a^2c^3-2b^2c^3-c^6 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

il reste $-2a^2b^2 + b^4$, &c. a^2 est donc le premier terme de la racine.

Pour trouver le second, j'abaisse $-2a^2b^2 + b^4$, & je divise $-2a^2b^2$ par $2a^2$. Le quotient est $-b^2$, qui multiplié par $(2a^2 - b^2)$ donne $-2a^2b^2 + b^4$ pour produit. Je soustrais ce produit, & mettant $-b^2$ à la racine, je vois que $a^2 - b^2$ en sont les deux premieres parties.

Pour trouver la troisieme, j'abaissé les trois termes qui restent, & je divise les deux premiers par $2a^2 - 2b^2$. Le quotient est $-c^3$, que je multiplie par $(2a^2 - 2b^2 - c^3)$. Soustraction faite, il ne reste rien. $a^2 - b^2 - c^3$ est donc la racine cherchée.

225. Quand on opere sur les nombres, il n'y a presque rien à ajouter aux regles prescrites pour les lettres. Seulement il faut partager le nombre donné en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche. Si le nombre des chiffres est impair, la derniere tranche n'aura qu'un chiffre.

226. Pour rendre raison de ce partage, il faut observer que les racines

quarrées de ...... 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 . 81 . 100
sont .... 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10

& que par conséquent *un nombre simple ne peut avoir plus de deux chiffres à son quarré*; puisque 10, qui est le premier des nombres composés, a pour quarré 100, qui est le premier nombre de trois chiffres. En examinant les quarrés suivans, on trouvera qu'*un nombre composé de deux chiffres, n'en peut avoir plus de quatre à son quarré*; car 100 premier des nombres à trois chiffres, a pour quarré 10000 premier de ceux à cinq chiffres. En général, *un nombre quelconque ne peut avoir plus que le double de ses chiffres à son quarré.*

Il doit donc y avoir autant de chiffres à la racine quarrée d'un nombre, qu'il y a de tranches dans ce nombre. Dans celle de 1764, par exemple, il doir y en avoir deux que l'on déterminera de cette maniere.

On cherchera d'abord le plus grand quarré contenu dans 17. C'est 16, dont on mettra à l'écart la racine 4. On souftraira enſuite 16 de 17, & on écrira le reſte 1 au-deſſous.

17,64	42	Rac.
16	8	Div.
164		
164		
0		

A côté de ce reſte, on abaiſſera la tranche ſuivante 64, & on mettra un point ſous le 6, pour fixer le dividende 16. Le diviſeur ſera 8, c'eſt-à-dire, le double de ce qui eſt déja à la racine, & le quotient ſera 2.

On mettra ce quotient à la ſuite du diviſeur, pour voir ſi le produit de 82 par 2 peut ſe ſouſtraire de 164 (223). La ſouſtraction ſa fait ſans reſte. 42 eſt donc la racine exacte de 1764. En effet $42 \times 42 = 1764$.

Nous n'entendrons déſormais par le mot ſeul de racine, que la racine quarrée. Pour déſigner les autres, nous ajouterons cubique, ou quatrieme, &c.

227. Quoique le quarré d'un nombre n'offre pas auſſi clairement les parties dont il eſt formé, que le quarré d'une quantité algébrique, il eſt aiſé cependant de les y trouver. Par exemple, le quarré de 6, qui eſt 36, doit être le même que celui de $4 + 2$. Soit donc $a = 4$, & $b = 2$. Alors $a^2 = 16$; $2ab = 16$; $b^2 = 4$. Le tout $= 36$. C'eſt-à-dire, que pour élever au quarré un nombre décompoſé en deux parties, on n'a qu'à prendre, 1.° le quarré de la premiere; 2.° le double de la premiere multipliée par la ſeconde, 3.° le quarré de la ſeconde, comme pour un binome algébrique (209).

C'eſt ainſi que décompoſant 42 en $40 + 2$, & faiſant $40 = a$; $2 = b$ on trouvera

$$\left\{\begin{array}{lr} a^2 = & 1600 \\ 2ab = & 160 \\ b^2 = & 4 \end{array}\right.$$
$$\overline{\quad 1764}$$

Décompoſant auſſi 523 en $500 + 20 + 3$, & ſuppoſant $a = 500$; $b = 20$; $c = 3$, on aura . . . .

$$\left\{\begin{array}{lr} a^2 = & 250000 \\ 2ab = & 20000 \\ b^2 = & 400 \\ 2ac = & 3000 \\ 2bc = & 120 \\ c^2 = & 9 \end{array}\right.$$

27,35,29	523	Rac.
25	10	I. Div.
235	104 . . .	II. Div.
204		
31 29		
31 29		
0		

Vérifions maintenant ce quarré par l'extraction de sa racine.

Je vois d'abord qu'elle doit avoir trois chiffres (226), & que le premier sera un 5, parce que le plus grand quarré contenu dans 27 est 25. Je mets donc 5 à la racine, & je soustrais son quarré de 27. Reste 2, à côté duquel j'abaisse 35, & mettant un point sous le 3, je divise 23 par 10. Le quotient est 2.

Mais avant que de le mettre à la racine, je le place à la suite de 10, & je multiplie 102 par 2. Le produit 204 pouvant être soustrait de 235, j'écris 2 à la racine, & je soustrais 204 de 25. Reste 31.

A côté de 31 j'abaisse 29, pour diviser 312 par 104. Le quotient est 3 que je mets à la suite de 104. Multipliant ensuite 1043 par 3, je retrouve 3129. L'opération est donc finie, & la racine telle que nous la demandions.

228. Souvent il arrive qu'après avoir abaissé toutes les tranches, il y a un reste de la derniere soustraction. C'est qu'alors le nombre proposé n'est pas un quarré parfait. Si le calcul ne demande pas beaucoup d'exactitude, on peut négliger ce reste. Jamais il ne peut valoir une unité. Si l'on veut en tenir compte, on cherchera les décimales de la racine, en ajoutant successivement deux zéros à chaque reste, & en continuant l'extraction.

Après avoir trouvé, par exemple, que 624 est la racine approchée de 389489, & qu'il reste 113, j'ajoute deux zéros à ce reste; & regardant 624 comme la premiere partie d'une racine composée de deux termes, je le double, pour avoir le troisieme diviseur 1248.

Le dividende qui lui correspond, est 1130; le quotient qui en résulte est 0, que je mets au premier rang des décimales.

J'ajoute deux autres zéros à 11300, & je prends 113000 pour dividende. Le diviseur est 12480. Le quotient est 9.

Avant de le mettre à la racine, je le place à la suite de

12480, & je multiplie 124809 par 9. Le produit 1123281 pouvant être soustrait de 1130000, je mets 9 au second rang des décimales.

S'il falloit encore plus d'exactitude, on continueroit d'ajouter deux zéros chaque fois. Le calcul n'a plus de difficulté.

38,94,89	624,09 &c. . . . . Rac.
36	
294	12 . . . . I. Div.
244	124 . . . . II. Div.
50 89	1248 . . . . III. Div.
49 76	12480 . . . . . . 1. IV. Div.
1130000	&c.
1123281	
6719 &c.	

229. On extrait la racine d'une fraction, en extrayant celle de chacun de ses termes. Ainsi $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, puisque $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. De même $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Mais quand les termes ne sont pas des nombres quarrés, on ne fait qu'indiquer l'extraction, en mettant le signe radical avant la fraction, ou bien on réduit la fraction en décimale, & l'on fait l'extraction de la racine, de la maniere qu'on vient de le pratiquer pour le reste des quarrés imparfaits.

230. Par tout ce détail, on voit assez que l'extraction des racines se rapporte à la division, comme la formation des puissances se rapporte à la multiplication.

On doit voir aussi que l'algebre simplifie beaucoup les raisonnemens qu'il faudroit faire pour démontrer par l'arithmétique seule les regles de l'extraction, celle sur-tout qui prescrit de diviser chaque fois par le double de ce qui est à la racine. Mais ce n'est encore là qu'une foible preuve de la supériorité de l'algebre sur l'arithmétique.

Des principales propriétés des Puissances en nombre.

231. I. *Le produit d'une puissance parfaite d'un nombre quelconque par une puissance imparfaite du même degré, ne peut être une puissance parfaite de ce degré.*

Si a^3 est un cube parfait, & b un cube imparfait, je dis que $a^3 b$ est un cube imparfait. Car si c'étoit un cube parfait, sa racine seroit exactement & sans reste $= ab^{\frac{1}{3}}$, & en divisant $ab^{\frac{1}{3}}$, par a, vraie valeur de la racine cubique de a^3, on auroit $b^{\frac{1}{3}}$ vraie valeur & sans reste de la racine cubique de b; donc b ne seroit pas un cube imparfait, ce qui est contre la supposition.

232. *Il n'est donc pas possible qu'un nombre quarré soit double, triple, quintuple*, &c. d'un nombre quarré, puisque 2, 3, 5, &c. sont des quarrés imparfaits : de même *un nombre cubique ne peut être double, triple, quadruple, &c. d'un autre nombre cubique*, puisque 2, 3, 4, &c. sont des cubes imparfaits. En général, *les puissances parfaites ne peuvent être multiples des puissances du même degré, si ce n'est de celles qui sont parfaites.*

233. II. *A quelque puissance qu'on éleve un nombre qui n'a que certains nombres premiers pour diviseurs exacts, il n'acquiert pas pour cela d'autres nombres premiers pour diviseurs.*

Il est clair, par exemple, que si abc n'a pour diviseurs exacts que les nombres premiers a, b, c, il n'en a pas d'autres lorsqu'il est élevé au quarré $aabbcc$, ou au cube $a^3b^3c^3$, &c.

234. *Deux nombres qui n'ont pas de communs diviseurs*, (on en excepte toujours l'unité, qui est contenue dans tous les nombres entiers, sans être proprement leur diviseur), *n'en peuvent donc acquérir aucun à quelque même puissance qu'on les éleve tous deux.* Car les diviseurs exacts ne peuvent être que des nombres premiers ou des multiples de nombres premiers. Or deux nombres qui n'ont point de commun diviseur, n'ont point de nombres premiers pour diviseurs communs : donc ils n'en acquierent pas pour être élevés à la même puissance : donc à plus forte raison ils n'acquierent pas de multiples de nombres premiers pour commun diviseur : donc ils n'en ont aucun.

235. III. *Un nombre entier joint à une fraction réduite à l'expression la plus simple, ne peut devenir nombre entier seul, par son élevation à une puissance.*

Car une fraction réduite à l'expression la plus simple, est celle dans laquelle les deux termes n'ont pas de commun diviseur ; or le nombre entier joint à une telle fraction étant réduit à une fraction seule, cette nouvelle fraction n'a pas pour cela de commun diviseur : car si elle en avoit alors, son dénominateur (qui est le même qu'avant la réduction) en deviendroit plus petit, & par conséquent la fraction n'auroit pas réellement été réduite à l'expression la plus simple, ce qui est contre l'hypothese. Donc les deux termes d'une fraction qui réunit un nombre entier & une fraction réduite à l'expression la plus simple, n'ont pas de commun diviseur ; donc ils n'en peuvent acquérir par aucune élevation à une puissance. Or une fraction ne se réduit en entier, que lorsque le dénominateur est un commun diviseur des deux termes ; donc une fraction qui réunit un nombre entier joint à une fraction réduite à l'expression la plus simple,

ple, ne peut jamais ſe réduire à un nombre entier, à quelque même puiſſance qu'on éleve ſes deux termes.

236. *On ne peut donc aſſigner aucun nombre pour exprimer exactement la racine d'un nombre qui ne ſeroit pas une puiſſance parfaite du même degré que la racine demandée.* Car ſi ce nombre dont on demande la racine eſt un nombre entier, ſuppoſons que ſa racine exacte ſoit un entier joint à une fraction, il faudroit qu'en élevant cette racine à ſa puiſſance, on retrouvât le nombre entier donné, ce qui vient d'être démontré impoſſible : c'eſt la même choſe ſi le nombre dont on demande la racine eſt une fraction, ou un entier joint à une fraction, telle que ce nombre & ſa fraction étant réduits à une fraction ſeule, chaque terme ne ſoit pas une puiſſance parfaite du même degré que la racine demandée ; car alors on peut conſidérer chaque terme de la fraction comme un nombre entier à part, dont on ne peut aſſigner la racine.

237. Les expreſſions des racines des nombres qui ſont des puiſſances imparfaites, s'appellent des *incommenſurables.* Tels ſont $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, &c.

De l'Extraction de la Racine cubique.

238. ON trouve des Regles pour extraire la racine cubique, & même celle des autres puiſſances, en raiſonnant ſur la nature des Polynomes élevés à ces puiſſances, comme nous avons fait pour la racine quarrée. Mais ces Regles deviennent d'autant plus compliquées, que la puiſſance eſt plus élevée.

Soit propoſé d'extraire la racine cubique de $a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$. Je dis, la racine de cette quantité eſt un polynome. Suppoſons que ce ſoit un binome, ſon cube doit être compoſé (211) du cube de chaque terme, & du triple produit de chaque terme par le quarré de l'autre.

Cela poſé, je vois que le premier terme a^3 eſt un cube, j'en écris la racine a à l'écart, j'en prends le cube a^3, & je l'ôte de la quantité propoſée, reſtent $6aab + 12abb + 8b^3$.

Je dis enſuite, dans ce reſte il y a un produit du triple du quarré du premier terme a que je viens de trouver, par le ſecond terme que je cherche : j'éleve donc a au quarré aa, je le triple & j'ai $3aa$, par lequel je commence à diviſer le reſte, en diſant, $\frac{6a^2b}{3aa} = 2b$; je poſe $+ 2b$ à la racine, & je dis : ſi $+ 2b$ eſt le ſecond terme, la ſomme de ſon produit par $3aa$, plus le produit de ſon quarré par

$3a$, plus son cube, doit être égale au reste. Or cette somme est $6aab + 12abb + 8b^3$ précisément égale au reste : donc la racine cubique cherchée est $a + 2b$.

239. Pour les nombres, il faut d'abord connoître les dix premiers cubes parfaits.

Cubes.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.
Racines. . . .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

D'où l'on peut remarquer, qu'un nombre ne peut avoir à son cube plus que le triple de ses chiffres ; car 10 premier des nombres composés de deux chiffres, a pour cube 1000, premier des nombres composés de 4 chiffres. 100 premier des nombres de 3 chiffres, a pour cube 1000000 premier des nombres de 7 chiffres, &c. On peut même, par une semblable induction, conclure en général,

Qu'un nombre composé de n *de chiffres, n'en peut avoir à sa puissance* p *plus que* pn *n'en exprime.*

Cela posé, soit le nombre 74088 dont on demande la racine cubique. Il faut le partager en tranches de trois en trois, en allant de droite à gauche : ensuite dire, la racine cubique la plus prochaine de la premiere tranche 74 est 4, j'écris 4 à l'écart, je l'éleve au cube 64, & je l'ôte de 74, reste 10. J'abaisse la seconde tranche 088 à côté du reste 10. J'éleve au quarré la premiere partie trouvée 4, laquelle doit valoir 40 à l'égard du second chiffre que nous cherchons, j'ai 1600 que je triple, & j'écris le produit 4800 pour diviseur ; puis, je dis $\frac{10088}{4800} = 2$, j'écris 2 à la racine, je multiplie le diviseur 4800 par la seconde partie trouvée, le produit est 9600, que j'écris à l'écart ; j'éleve 2 au quarré 4, je le multiplie par 40, qui est la premiere partie de la racine, j'en multiplie le produit 160 par 3, & j'écris le nouveau produit 480 au-dessous de 9600. Enfin je cube 2, & j'ai 8 que j'écris au-dessous de 480. J'ajoute ensemble les deux produits & cube, & parce que leur somme 10088 est égale au reste 10088, & qu'il n'y a plus de tranches à abaisser, je dis que la racine cubique de 74088 est 42 précisément.

$$\begin{array}{r} 74{,}088 \\ 64 \\ \hline 10\,088 \\ 10\,088 \\ \hline 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 42\ .\ .\ \text{Rac.} \\ \hline 4800\ \text{Div.} \end{array} \right\} \text{Soit } \begin{array}{l} a = 40 \\ b = 2 \end{array} \quad \text{Donc } \begin{array}{rcr} 3a^2b & = & 9600 \\ 3ab^2 & = & 480 \\ b^2 & = & 8 \\ \hline & & 10088 \end{array}$$

Autre Exemple. Soit proposé d'extraire la racine cubique du nombre 5305472. Je le divise par tranches de trois en trois ; & je dis ; la racine cubique la plus proche de la tranche 5, est 1 ; le cube de 1 est 1, je l'ôte de 5, reste 4. J'abaisse la seconde tranche & j'ai 4305. Je dis 1 étant la premiere partie de la racine, vaut 10 à l'égard de la seconde ; le quarré de 10 est 100, son triple est 300, je divise 4305 par 300, en disant, en 43 combien de fois 3 ? il doit y être 14 fois; mais parce qu'on ne met jamais plus de 9 au quotient, & même qu'en y mettant 9, dans le cas présent, on y mettroit trop, comme il est aisé de s'en assurer par les regles précédentes, je trouve après avoir assayé 9 & 8, qu'il ne faut prendre que 7 pour quotient. Je pose donc 7 à la racine. Je multiplie 300 par 7, j'ai le produit 2100, je dis $7 \times 7 = 49$, ensuite $49 \times 10 = 490$, enfin $490 \times 3 = 1470$, j'écris 1470 au-dessous de 2100. Je dis, $7 \times 7 \times 7 = 343$; je l'écris au-dessous de 1470, j'ajoute ensemble 2100, 1470 & 343, & j'ôte la somme 3913 du membre 4305, reste 392. J'abaisse à côté la troisieme tranche 472, je regarde 17 que j'ai déja trouvé, comme la premiere partie de la racine, elle vaut donc 170 à l'égard de la seconde partie que je cherche; j'en prends le quarré 28900, je le triple, & j'ai 86700 par lequel je divise le troisieme membre 392572, j'ai le quotient 4, je l'écris à la racine; je multiplie le diviseur 86700 par 4, & j'écris au-dessous le produit 346800. Je fais $4 \times 4 = 16$, $16 \times 170 \times 3 = 8160$. J'écris 8160 au-dessous de 346800. J'écris au-dessous le cube de 4, qui est 64. J'ajoute ces trois quantités, & j'ôte leur somme 355024 du troisieme membre 392472, reste 37448. Et parce qu'il n'y a plus de tranches à abaisser, je dis que la racine cubique demandée est 174, & que le nombre donné n'est pas cubique, mais qu'il a 37448 unités de trop.

5,305,472	174,41 &c. . . . . . Rac.
1	300 . . . . I. Div.
—	86700 . . . . II. Div.
4305	9082800 . . . . . . III. Div.
3913	912460800 . . . IV. Div.
——	&c.
392472	
355024	
——	
37448000	
36414784	
——	
1033216000	
912513121	
——	
120702879 &c.	

Si l'on veut avoir égard à ce reste, il faut chercher des décimales pour la racine. On les trouve en ajoutant aux restes autant de fois 000 qu'on voudra avoir de décimales, & en continuant l'extraction, regardant chaque fois tout ce qui aura été trouvé à la racine comme une premiere partie dont on cherche la seconde. L'exemple fera entendre ceci.

La longueur des opérations qu'il faut faire ici, est cause que la plupart des Mathématiciens se contentent d'extraire les racines cubiques à l'aide des logarithmes ou de la méthode suivante.

Méthode générale pour extraire par approximation les racines d'un degré quelconque.

240. Dans la pratique des Mathématiques, lorsqu'il faut extraire une racine troisieme, quatrieme, &c. on se sert avantageusement des logarithmes ; mais il arrive quelquefois qu'on a besoin d'avoir un grand nombre de décimales à la racine, ce que les logarithmes ordinaires ne peuvent donner. On se sert alors des formules suivantes, qui sont de M. *Halley* (Transf. Philos. de 1694, *pag.* 141).

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}aa \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9}aa \pm \frac{b}{6aa}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}aa \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{25}aa \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}aa \pm \frac{b}{21a^5}\right)} \quad \&c.$$

Soit proposé, par exemple, de trouver la racine cinquieme de 161900 avec 12 décimales. Je divise par 5 le logarithme de 161900, qui est 5,2092468 : j'ai 1,0418494 logarithme de 11,012 racine approchée ; je fais 11,012 $= a$: j'éleve 11,012 à la cinquieme puissance, & j'ai $a^5 = 161931,37873202072883 2$, qui excede 161900 de 31,3787320207288 32. Je fais cet excès $= b$, & j'ai $a^5 - b = 161900$; donc par la formule $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}\right)}$, j'ai en substituant les nombres, $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = 8,259 + \sqrt{(7,579009 - \frac{31,3787320207288 32}{13353,60753728})}$ $= 8,259 + \sqrt{(7,579009 - 0,00234983182882431593271 1)} = 8,259$ $+ \sqrt{(7,57665916817117568406728 9} = 8,259 + 2,752573190339 =$ 11,011573190339 racine cherchée.

Le calcul pour trouver ces formules est facile, & l'on peut en continuer la Table pour des puissances élevées au-dessus de la septieme, soit par induction, en observant la loi que ces formules suivent, soit en les calculant exprès, selon l'exemple suivant, qui l'a été pour la racine cinquieme.

Soit $\sqrt[5]{(a^5 + b)} = a + d$, où d exprime une fraction ; on a donc $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd + 10aad^3 + 5ad^4 + d^5$. Et parce que

(205) les valeurs des fractions diminuent à proportion qu'on les éleve à des plus hautes puissances, on peut regarder comme très-petits, (& par conséquent négliger) les termes qui sont multipliés par les puissances de d qui passent le quarré. On peut donc supposer $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd$, ou $b = 5a^4d + 10a^3dd$. Divisant tout par $10a^3$, on a $\frac{b}{10a^3} = \frac{1}{2}ad + dd$, donc $\sqrt{\left(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}\right)} = \frac{1}{4}a + d$: ajoutant de part & d'autre $\frac{3}{4}a$, on a $\frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}\right)} = a + d = \sqrt[5]{(a^5 + b)}$.

241. Mais pour avoir tout de suite une formule générale, dont le développement puisse au besoin donner telle formule particuliere que l'on voudra, soit $a + d$ la racine m d'une quantité $a^m \pm b$, a exprimant un nombre entier, & d une fraction décimale.

On aura donc $a + d = \sqrt[m]{a^m \pm b}$. Donc $(a + d)^m = a^m \pm b$. Donc $a^m + ma^{m-1}d + \frac{m.m-1}{1}a^{m-2}d^2 + \ldots$ &c. $= a^m \pm b$. Négligeant les termes où la fraction d est élevée aux puissances supérieures au quarré, effaçant de part & d'autre a^m, & divisant le reste par m, on aura $a^{m-1}d + \frac{m-1}{2}a^{m-2}d^2 = \pm\frac{b}{m}$.

Multipliant ensuite par 2, divisant par $m-1\ a^{m-2}$, & ordonnant, on trouvera $d^2 + \frac{2a}{m-1}d = \pm\frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}$. Complétant le quarré, extrayant la racine, & transposant, il viendra $d = \frac{-a}{m-1} + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}}$.

Enfin si l'on ajoute a aux deux membres de cette équation, on aura généralement pour l'extraction d'une racine approchée quelconque, $a + d = \sqrt[m]{a^m \pm b} = \frac{m-2}{m-1}a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}\right)}$.

Veut-on voir naître de cette formule générale celles de M. *Halley*, par exemple, celle du quatrieme degré? On fera $m = 4$, & substituant cete valeur, on trouvera $\sqrt[4]{(a^4 \pm b)}$, ou $a + d\ \frac{4-2}{4-1}a +$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{(4-1)^2} \pm \frac{2b}{(16-4)a^{4-2}}\right)} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9}aa \pm \frac{b}{6aa}\right)},$$ comme ci-dessus.

Calcul des incommensurables.

242. Il y a peu d'équations où l'on ne rencontre des incommensurables ; c'est-à-dire, des racines de puissances imparfaites, sur lesquelles cependant il faut faire toutes les opérations qu'exigent les différentes regles de la solution des équations. Ce calcul se peut faire de deux manieres, l'une qui s'appelle *le Calcul des Radicaux*, en laissant le signe radical aux termes dont on exprime les racines ; & l'autre qu'on nomme *le calcul des puissances par leurs exposans*, en substituant des exposans fractionnaires à la place des signes radicaux.

Calcul des puissances par leurs exposans.

243. Lorsqu'on connoît la nature des exposans des puissances, on ne trouve aucune difficulté dans leur calcul.

Ainsi, pour les ajouter, il faut les joindre avec leurs signes; pour les soustraire, il faut changer les signes des coefficiens (& non des exposans) de celles qu'on veut retrancher. Pour les multiplier, il faut ajouter leurs exposans, si le multiplicateur & le multiplicande sont des termes semblables, sinon il faut les écrire à côté les uns des autres, sans mettre des signes entr'eux. Pour les diviser, si ce sont des termes semblables, il faut soustraire l'exposant du diviseur de celui du dividende; s'ils ne sont pas semblables, il faut les mettre en fraction. Enfin, pour les élever à des puissances quelconques, ou pour en extraire une racine quelconque, il faut multiplier leurs exposans par l'exposant entier ou fractionnaire qui répond à la puissance ou à la racine en question.

Par exemple, la somme de a^n & de $a^{\frac{1}{m}}$ est $a^n + a^{\frac{1}{m}}$, leur différence est $a^n - a^{\frac{1}{m}}$: leur produit est $a^{n+\frac{1}{m}}$, leur quotient est $a^{n-\frac{1}{m}}$, leur puissance p est a^{pn}, $a^{\frac{p}{m}}$: leur racine q, c'est-dire, leur puissance $\frac{1}{q}$ est $a^{\frac{n}{q}}$, $a^{\frac{1}{qm}}$.

La somme de a^n & de b^{-m} est $a^n + b^{-m}$, la différence est $a^n - b^{-m}$, le produit est $a^n b^{-m}$ ou $\frac{a^n}{b^m}$, parce que (216) $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$. Leur quotient est $\frac{a^n}{b^{-m}}$ ou $a^n b^m$ par la même raison. (Remarquez bien ces deux dernieres expressions). Leur puissance m est a^{mn}, b^{-mm}, leur racine p est $a^{\frac{n}{p}}$, $b^{\frac{-m}{p}}$ ou bien $\frac{1}{b^{\frac{m}{p}}}$.

Du calcul des Radicaux.

244. Pour abréger, nous mettrons ici des formules seulement, au lieu de regles exprimées en longs discours ; elles n'en seront que plus claires. En se rendant ces formules familieres, on retiendra plus aisément la pratique du calcul, & alors ou les démonstrations dont nous n'avons indiqué que quelques-unes, se présenteront d'elles-mêmes à l'esprit, pour peu qu'on y fasse réflexion ; ou bien en substituant des exposans aux radicaux, on trouvera facilement que les opérations sur les radicaux, reviennent à celles que l'on fait dans le calcul des puissances par leurs exposans.

Il faut remarquer d'abord, que lorsque l'expression d'un incommensurable est telle, qu'elle puisse être divisée sans reste par quelque quantité élevée à une puissance indiquée par l'exposant de la racine, alors on peut réduire cette expression à une plus simple, en écrivant cette quantité comme un coefficient de la racine, & en mettant seulement le quotient sous le signe radical.

Par exemple, l'expression $\sqrt{aab}$ est telle, que le quarré de a peut diviser aab ; je mets donc $a\sqrt{b}$ à la place de $\sqrt{aab}$; l'expression $\sqrt[3]{432}$ est telle, que 432 peut être divisé sans reste par le cube de 3 qui est 27, par le cube de 6 qui est 216, & par le cube de 2 qui est 8 ; car $\frac{432}{27} = 16$, $\frac{432}{8} = 54$, & $\frac{432}{216} = 2$: on peut donc réduire $\sqrt[3]{432}$ à l'une de ces trois expressions $3\sqrt[3]{16}$, $2\sqrt[3]{54}$, $6\sqrt[3]{2}$. De même dans $\sqrt[4]{a^5 b^4}$, la quantité $a^5 b^4$, peut être divisée par la quatrieme puissance de ab ; je puis donc mettre $ab\sqrt[4]{a}$ à la place de $\sqrt[4]{a^5 b^4}$.

On trouvera de même que $\sqrt{\frac{b^3 d}{aag}} = \frac{b\sqrt{bd}}{a\sqrt{g}}$: que $\frac{a\sqrt{48bcc}}{2\sqrt[3]{16dg^4}} = \frac{4ac\sqrt{3b}}{48\sqrt[3]{2dg}} = \frac{ac\sqrt{3b}}{g\sqrt[3]{2dg}}$, &c.

245. *Pour faire entrer une expression quelconque* $\frac{p}{q}$ *dans un radical quelconque* $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ *sans en changer la valeur.*

Formule .... $\frac{ap}{bq}\sqrt[n]{\frac{cq^n}{dp^n}}$, ou bien $\frac{aq}{bp}\sqrt[n]{\frac{cp^n}{dq^n}}$. Car $\frac{p}{p}\sqrt[n]{\frac{p^n}{q^n}} = \sqrt[n]{\frac{q^np^n}{q^np^n}} = 1$.

246. *Pour ôter le coefficient* $\frac{a}{b}$ *du radical* $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$.

Formule ..... $\sqrt[n]{\frac{a^nc}{b^nd}}$.

247. *Pour réduire en entier la fraction* $\frac{c}{d}$ *qui est sous le signe radical* $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{e}{d}}$.

Formule .... $\frac{a}{bd}\sqrt[n]{cd^{n-1}}$. Car $\frac{a}{bd}\sqrt[n]{\frac{cd^n}{d}} = \frac{a}{bd}\sqrt[n]{cd^{n-1}}$.

248. *Pour réduire à une même exposant les deux radicaux* $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ & $\frac{y}{z}\sqrt[u]{\frac{c}{d}}$.

Formule ..... $\frac{p}{q}\sqrt[nu]{\frac{a^u}{b^u}}$ & $\frac{y}{z}\sqrt[nu]{\frac{c^n}{d^n}}$.

Quand il y en a plusieurs, on les réduit successivement deux à deux.

249. Pour ajouter ensemble deux radicaux, on les écrit à la suite l'un de l'autre avec leurs signes. Mais s'ils étoient tels, qu'ayant un même exposant, la quantité sous le signe fût aussi la même, par exemple, si on avoit à ajouter $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ & $\frac{y}{z}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, la somme seroit $\frac{pz+qy}{qz}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

250. Pour soustraire deux radicaux, il faut changer le signe du coefficient de celui qu'on veut soustraire; & s'ils ont le même exposant & la même quantité sous le signe, alors on doit prendre la différence des coefficiens. Ainsi $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - \frac{y}{z}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{pz - qy}{qz}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

251. *Pour multiplier deux radicaux*, par ex. $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ par $\frac{y}{z}\sqrt[u]{\frac{c}{d}}$.

Formule .... $\frac{py}{qz}\sqrt[nu]{\frac{a^u c^n}{b^u d^n}}$.

252. *Pour diviser les radicaux*, par ex. $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ par $\frac{y}{z}\sqrt[u]{\frac{c}{d}}$.

Formule ..... $\frac{pz}{qy}\sqrt[nu]{\frac{a^u d^n}{b^u c^n}}$.

253. *Pour élever un radical*, par exemple, $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, *à une puissance quelconque*, comme à la puissance $\frac{u}{s}$.

Formule... $\sqrt[\frac{ns}{u}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$. Car en ôtant le signe radical, cette formule devient $\frac{a^{\frac{nu}{ns}} c^{\frac{u}{ns}}}{b^{\frac{nu}{ns}} d^{\frac{u}{ns}}}$, & le radical proposé $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, devient $\frac{a^{\frac{n}{n}} c^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{n}{n}} d^{\frac{1}{n}}}$, dont la puissance $\frac{u}{s}$ est $\frac{a^{\frac{nu}{ns}} c^{\frac{u}{ns}}}{b^{\frac{nu}{ns}} d^{\frac{u}{ns}}}$.

Si $\frac{u}{s} = n$, la formule devient $\frac{a^n c}{b^n d}$: car alors l'exposant $\frac{ns}{u}$, qui n'est que n divisé par $\frac{u}{s}$, seroit n divisé par n, ce qui le réduiroit à l'unité : Or toute quantité qui a 1 pour l'exposant de sa puissance ou de sa racine est une quantité simple.

254. *Pour extraire une racine quelconque d'un radical*, par exemple, la racine $\frac{u}{s}$ du radical $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$.

Formule .... $\sqrt[\frac{nu}{s}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$. Qui se démontre comme la precédente.

Lorsqu'on aura fait quelque opération en suivant une de ces formules, il faudra, s'il est possible, en réduire le résultat aux termes les plus simples, suivant ce qui a été dit ci-dessus.

255. Il ne sera pas difficile d'appliquer ces formules aux quantités exprimées par des nombres, non plus qu'à celles qui sont exprimées par des lettres. Car, 1.° comme ces formules ont été construites pour des quantités fractionnaires, elles ne laissent aucune difficulté pour les fractions : 2.° Elles servent également aux entiers, puisque tout entier peut être supposé une fraction dont le dénominateur est 1 : 3.° Si les radicaux n'ont pas de coefficiens, on peut supposer qu'ils ont le coefficient $\frac{1}{1}$. 4.° Si les quantités sont complexes, on pourra les supposer égales à des quantités incomplexes prises à volonté, & par des substitutions, on leur appliquera les formules précédentes. Quelques exemples éclairciront ceci.

Soit proposé de multiplier $4\sqrt{\frac{2-b}{3ad}}$ par $\frac{1}{3}\sqrt[4]{aa+bb}$, je réduis ces deux radicaux à cette forme $\frac{4}{1}\sqrt[2]{\frac{2-b}{3ad}}$, $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{aa+bb}{1}}$, & prenant les deux radicaux proposés dans le n.° 251, je fais $4=p$, $1=q$, $2=n$, $2-b=a$, $3ad=b$, ensuite $1=y$, $3=z$, $4=u$, $aa+bb=c$ & $1=d$. De sorte que par la substitution, la formule de cet article qui est $\frac{py}{qz}\sqrt[nu]{\frac{a^u c^n}{b^u d^n}}$ deviendra $\frac{4\times 1}{1\times 3}\sqrt[2\times 4]{\frac{\overline{2-b}^{4}\times\overline{aa+bb}^{2}}{\overline{3ad}^{4}\times 1^2}}$, & en réduisant $\frac{4}{3}$

$$\sqrt[8]{\frac{\overline{2-b}^4 \times \overline{aa+bb}^2}{81a^4d^4}} = \tfrac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{(2-b)^2\,(aa+bb)}{9a^2d^2}}.$$

On veut diviſer $4\sqrt{5}$ par $\sqrt{\frac{3}{7}}$. Je mets ces deux radicaux ſous cette forme $\frac{4}{1}\sqrt[2]{\frac{5}{1}}$, $\frac{1}{1}\sqrt[2]{\frac{3}{7}}$. Je prends les deux radicaux propoſés dans le n.° 252, & je fais $4=p$, $1=q$, $2=n$, $5=a$, $1=b$; & $1=y$, $1=z$, $2=u$, $3=c$, $7=d$: alors par la ſubſtitution la formule $\frac{pz}{qy}\sqrt[nu]{\frac{a^u d^n}{b^u c^n}}$ devient $\frac{4\times 1}{1\times 1}\sqrt[2\times 2]{\frac{5^2\times 7^2}{1^2\times 3^2}}$ qui ſe réduit à $4\sqrt[4]{\frac{1225}{9}}$, enſuite à $4\sqrt{\frac{35}{3}}$, en faiſant l'extraction de la racine quarrée de chaque terme ſous le ſigne.

De l'Analyſe.

256. L'Analyſe eſt l'art de réſoudre par le calcul algébrique les problêmes qu'on peut propoſer ſur les grandeurs.

257. *Propoſer un Problême*, c'eſt demander qu'on trouve la valeur d'une ou de pluſieurs quantités inconnues : or on conçoit que cela n'eſt pas poſſible, à moins qu'en propoſant le problême, on n'aſſigne quelque rapport que ces quantités inconnues ont avec des quantités connues, leſquelles s'appellent *les données du problême.*.

258. Chacun des rapports qu'on aſſigne entre les données & les inconnues, s'appelle *une condition du problême*, parce que ces rapports expriment à quelle condition il y a égalité entre les inconnues & les données.

259. L'expreſſion algébrique d'une condition d'un problême s'appelle *une Equation.*

260. Une Equation eſt donc un aſſemblage de termes algébriques joints par le ſigne $=$, & compoſés de quantités connues & inconnues.

261. On a coutume d'exprimer les données par les premieres lettres de l'alphabet, & les inconnues par les dernieres, comme x, y, z. Cela ſert à les diſtinguer au premier coup d'œil.

262. Tous les termes qui ſont à gauche du ſigne $=$, forment ce qu'on appelle *le premier membre de l'Equation*, & tous ceux qui ſont à droite en forment *le ſecond membre*.

263. On appelle en général *Equation du premier degré* celle où l'inconnue n'eſt qu'à ſa premiere puiſſance. On appelle *Equation du ſecond degré*, celle où l'inconnue eſt élevée au quarré, par exemple, $xx - ax = b$, $aayy + bzz = c$, &c. ſont des équations du ſecond degré. On appelle *Equation du troiſieme degré*, celle où la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt le cube, comme $ax^3 - bx = c$. Il en eſt ainſi des autres degrés.

264. *Réſoudre un problême*, c'eſt trouver la valeur de chacune des quantités inconnues qu'on a demandées ; ou c'eſt faire voir qu'il eſt impoſſible de la trouver ; ce qui arrive lorſque les rapports donnés impliquent quelque contradiction. On en verra des exemples dans la ſuite.

265. *Trouver la valeur d'une inconnue*, c'eſt la réduire à être ſeule un membre d'une équation, dont l'autre membre ſoit composé de quantités toutes connues. Quand on en eſt parvenu là, on dit que *l'inconnue eſt dégagée* ; & c'eſt à quoi doivent tendre toutes les opérations de l'Analyſte.

266. Or pour y parvenir, il faut faire ſucceſſivement ſur chaque équation diverſes opérations, ſelon l'état où les inconnues ſe trouvent. Ces opérations ſont la Tranſpoſition, la Diviſion, la Multiplication, l'Extraction des racines & la Subſtitution. Voici les cas où il faut y avoir recours.

Dans une équation, ou il n'y a qu'une lettre inconnue, ou il y en a pluſieurs.

I.° S'il n'y a qu'une inconnue, *ou bien elle fait dans un membre une ſomme ou une différence avec des données*, comme ſi on avoit $a + x - b = c$; alors on ſe ſert de la tranſpoſition. *Ou bien cette inconnue fait un produit avec une ou pluſieurs données*, comme $ax + bx = cd$; alors on ſe ſert de la diviſion. *Ou bien l'inconnue fait une fraction avec une ou pluſieurs données*, comme $\frac{ax}{b} = cd$, ou bien $\frac{a+b}{x} = c$; & alors on ſe ſert de la multiplication. *Ou enfin cette inconnue eſt élevée à quelque* *puissance*, comme $ax - xx = c$; & alors on se sert de l'extraction des racines. Tout cela va être éclairci par des exemples.

II.° S'il y a plusieurs inconnues, il faut aussi qu'il y ait dans l'expression du même problême d'autres équations qui contiennent les mêmes inconnues; comme si on avoit les deux équations du même problême $x - ay = b$, & $bx + cy = d$. Dans ce cas on se sert de la substitution.

De sorte qu'on doit voir dans tous les cas, quelle est celle des cinq regles suivantes qu'il faut d'abord appliquer à l'équation qu'on veut résoudre, pour trouver la valeur de l'inconnue qui s'y trouve.

Regles pour dégager l'Inconnue.

267. I. REGLE. Lorsque dans un membre de l'équation, l'inconnue que l'on veut dégager fait une somme ou une différence avec d'autres quantités connues ou inconnues, on transpose toutes ces quantités dans l'autre membre, afin de laisser l'inconnue toute seule dans le sien.

Et pour cela, voici le principe dont on se sert. Il est évident. Lorsque des quantités sont égales, on a beau leur ajouter ou leur retrancher d'autres quantités égales, l'égalité subsiste toujours entre les sommes ou les restes.

Voici maintenant l'application de ce principe. Soit $x + 3 = 8$. Donc $x + 3 - 3 = 8 - 3$. Donc en réduisant, $x = 8 - 3 = 5$, & x se trouve dégagé. Donc si $x + ac = b$, on aura de même $x + ac - ac = b - ac$, & par conséquent $x = b - ac$.

268. Il est clair par la même raison que $x - ac = b$ peut se réduire à $x = b + ac$; & qu'en général, si $x \pm ac = b$ on doit conclure que $x = b \mp ac$. C'est-à-dire, que pour faire passer un terme d'un membre dans un autre, *il faut effacer ce terme dans le membre où il est, & l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire.*

On peut donc par la transposition rendre positif un terme négatif, & réciproquement.

269. *Par la transposition on peut prendre la valeur d'un terme quelconque*, en le laissant seul dans un membre.

270. Remarquez que nous diſtinguons ici entre prendre la valeur d'un terme, & trouver ſa valeur. *Prendre la valeur* d'un terme ou d'une lettre, c'eſt faire enſorte que ce terme ou cette lettre faſſe ſeule un membre d'une équation, de quelques quantités connues ou inconnues que l'autre membre ſoit compoſé. *Trouver la valeur* d'un terme ou d'une lettre, c'eſt en faire un membre d'une équation, dont l'autre ſoit compoſé de quantités toutes connues (265).

271. II. REGLE. Lorſque l'inconnue eſt multipliée par une ou pluſieurs quantités, *on la dégage en la diviſant par tout ce qui la multiplie : & pour ne pas détruire l'égalité, on diviſe les deux membres de l'équation par le multiplicateur de l'inconnue.*

Par exemple, ſi $4x = 28$, il eſt clair que $x = \frac{28}{4} = 7$: & ſi $am^2y = a^3m^4 - a^2m^2$, il n'eſt pas moins clair que $y = \frac{a^3m^4 - a^2m^2}{am^2} = a^2m^2 - a$.

272. Remarques. I.° Quand la même quantité eſt multipliée par pluſieurs termes, *on ne l'écrit qu'une fois, & on la multiplie par la ſomme des multiplicateurs particuliers.* Ainſi ſuppoſant que $ax - bx + 3x = d$, j'écris d'abord $x\,(a - b + 3) = d$; enſuite $x = \frac{d}{a - b + 3}$ & l'inconnue eſt dégagée. Au lieu d'écrire $ax - x = b$, on écriroit $x = \frac{b}{a - 1}$, &c. Ces décompoſitions ſervent à ſimplifier le calcul, & on trouve ſouvent l'occaſion d'en faire.

273. II.° Quand une même lettre ſe trouve dans tous les termes d'une équation, on doit les diviſer tous par cette lettre, ce qui rend l'équation plus ſimple. Ainſi $abb - bxx = bd$ devient $ab - xx = d$, en diviſant tout par b. De même $aac - aa = aabd$, devient $c - 1 = bd$, en diviſant tout par aa.

Que l'on me demande par exemple le nombre dont le cube eſt égal à trois fois le quarré. Appellant x ce nombre quel qu'il ſoit, j'exprime ainſi l'état de la queſtion $x^3 = 3x^2$, & diviſant par x^2, j'ai $x = 3$, nombre demandé.

274. III. REGLE. Si l'inconnue eſt diviſée par une ou pluſieurs quantités, *on la dégagera en multipliant les deux membres de l'équation par ces quantités mêmes.*

Par exemple, ſi $\frac{x}{6} = 9$, on aura $x = 9 \times 6 = 54$: & ſi $\frac{x}{a+b} = c$, on aura $x = c(a+b) = ac + bc$.

En général, *toutes les fois qu'il y a des fractions dans une équation, il eſt à propos de les faire diſparoître, en multipliant tous les termes par chaque dénominateur.*

Exemple. Soit $\frac{x}{m} + \frac{2x}{n} = p$. Je multiplie d'abord par m, & j'ai $\frac{mx}{m}$ ou $x + \frac{2mx}{n} = mp$. Enſuite par n, ce qui me donne $nx + 2mx = mnp$, que je réduis à $x = \frac{n+2m}{mnp}$.

275. IV. REGLE. Si l'inconnue eſt élevée à quelqu'une de ſes puiſſances, *il faut ſe ſervir de l'extraction des racines pour la dégager.*

Par Ex. Si $x^2 = 81$, on aura $x = \sqrt{81} = 9$; $x^4 = 16a^5b^2$, on aura $x = \sqrt[4]{16a^5b^2} = 2a\sqrt[4]{ab^2}$.

Il arrive ſouvent que l'extraction de la racine eſt ſujette à de grandes difficultés. C'eſt lorſqu'il s'agit des racines cubiques, quatriemes, & au-deſſus. Car pour l'extraction de la racine quarrée, on la pratiquera facilement en obſervant ce qui ſuit.

Lorſque dans une équation l'inconnue eſt élevée au quarré, il faut voir, I.° ſi ce quarré n'eſt pas multiplié ou diviſé par quelqu'autre quantité; car dans le premier cas, il faut le dégager par la diviſion, ou par la multiplication dans le ſecond cas.

II.° Il faut voir ſi ce quarré eſt poſitif; car s'il étoit négatif, il faudroit le rendre poſitif par la tranſpoſition, parce qu'un quarré ne peut être négatif: $-xx$ n'eſt que le produit de $+x$ par $-x$; on n'en peut extraire la racine quarrée, puiſqu'elle ne peut être ni $-x$ ni $+x$.

III.° Il faut mettre dans un ſeul membre tous les termes où cette inconnue ſe trouve.

IV.° Il faut voir enſuite ſi ce membre eſt un quarré complet, ce qui n'arrive que lorſque l'inconnue ne ſe trouve que dans un ſeul terme (comme $xx = a - b$). Si outre le quarré de l'inconnue, ce membre contenoit un ou plusieurs produits de l'inconnue, par quelques autres quantités connues (comme $xx - 2ax = b$) alors ce membre seroit un quarré incomplet, & il faudroit le compléter, *en ajoutant à chaque membre de l'équation le quarré de la moitié de la quantite connue, qui multiplie l'inconnue* (210).

V.° Il faut extraire la racine quarrée de chaque membre de l'équation, & on trouvera par la transposition la valeur de l'inconnue.

Soit par exemple l'équation, $\frac{aa - xx}{b} = 2a - b$, 1.° J'ôte la fraction, & j'ai $aa - xx = 2ab - bb$; 2.° je rends $-xx$ positif, en mettant $aa = xx + 2ab - bb$; 3.° je laisse xx seul dans un membre, j'ai $aa - 2ab + bb = xx$: 4.° à cause de xx seul, le quarré est complet. 5.° J'extrais la racine de chaque membre, & j'ai $a - b = x$.

Soit maintenant $a + 2xx = b$. Je dégage 2 du quarré de l'inconnue, & j'ai $\frac{a}{2} + xx = \frac{b}{2}$. Je transpose, & j'ai $xx = \frac{b-a}{2}$; j'extrais la racine qui est $x = \sqrt{\frac{b-a}{2}}$.

Soit la proposée $ax - \frac{xx}{2} + dd = c$, j'ai, en ôtant la fraction, $2ax - xx + 2dd = 2c$; puis en transposant pour rendre xx positif, & pour mettre dans un seul membre tous les termes où l'inconnue se trouve, $2dd - 2c = -2ax + xx$. Or il est facile de voir que ce second membre n'est pas le quarré complet d'un binome; car il ne contient que le quarré xx du second terme de ce binome, & le produit $2ax$ du second terme x, par $-2a$ qui est visiblement le double du premier terme, lequel par conséquent est a, & dont le quarré aa manque dans ce second membre. Donc pour en faire un quarré complet, il faut ajouter à ce membre aa, (c'est-à-dire, le quarré de la moitié de $-2a$ quantité connue qui multiplie l'inconnue dans le terme $-2ax$): & pour conserver l'égalité, il faut ajouter ce même quarré à l'autre membre. Ainsi l'équation devient $aa + 2dd - 2c = aa - 2ax + xx$, & extrayant les racines $\sqrt{aa + 2dd - 2c} = a - x$.

Soit

Soit encore $9abxx - 3bbx = ad$, j'ai, en dégageant par la division le quarré de l'inconnue, $xx - \frac{bx}{3a} = \frac{d}{9b}$, puis en ajoutant de part & d'autre $\frac{bb}{36aa}$ quarré de $\frac{b}{6a}$ moitié de $\frac{b}{3a}$, qui multiplie x dans le second terme, $\frac{bb}{36aa} - \frac{bx}{3a} + xx = \frac{b^2}{36aa} + \frac{d}{9b}$, & extrayant les racines, $\frac{b}{6a} - x = \sqrt{\frac{bb}{36aa} + \frac{d}{9b}}$.

De même l'équation $x - xx = a$, deviendra $-a = xx - x$, puis $\frac{1}{4} - a = xx - x + \frac{1}{4}$: (car $-x$ est censé le produit de x par -1); enfin $\sqrt{\frac{1}{4} - a} = x - \frac{1}{2}$; & $x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}$.

L'équation $xx + ax - x = aa$, deviendra $xx + ax - x + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} = aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$, & par conséquent $x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = \sqrt{aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5aa - 2a + 1}}{2}$.

276. REMARQUE. Quand une inconnue est dans une équation sous le signe $\sqrt{\ }$, comme si on avoit $a - \sqrt{x} = b$, on la dégage, en la mettant d'abord dans un membre seul, puis ôtant son signe radical, & élevant l'autre membre au quarré. Ainsi il faut écrire d'abord $a - b = \sqrt{x}$, puis $aa - 2ab + bb = x$. De même si on avoit $ax - \sqrt{x} = b$, on la réduiroit à $aaxx - 2abx + bb = x$. Mais si on avoit $xx + \sqrt{x} = b$, alors ce problême deviendroit du quatrieme degré, parce qu'on auroit $x^4 - 2bxx + bb = x$.

277. V. REGLE. Enfin, si on a plusieurs inconnues & plusieurs équations en même temps, *on les fait disparoître successivement en substituant à chacune sa valeur.*

Par exemple, si l'on a ces deux équations $ax + y = b$, $x + by = a$, dans chacune desquelles il y a deux inconnues x & y, on pourra en faire *évanouir* une des deux, par exemple y, en prenant par la transpositton la valeur de y dans la premiere équation, & en substituant cette valeur à y dans la seconde équation. Je transpose donc ax, & j'ai $y = b - ax$;

& dans la ſeconde équation, je mettrai $b - ax$ à la place de y; & comme il y eſt multiplié par b, je multiplie $b - ax$ par b, & j'ai $bb - abx = by$. Donc cette ſeconde équation deviendra $x + bb - abx = a$, dans laquelle il n'y a plus y.

Si j'euſſe voulu faire évanouir x de la ſeconde équation, j'euſſe pris ſa valeur dans la premiere; en tranſpoſant d'abord $+ y$, & mettant $ax = b - y$, enſuite en diviſant tout par a afin d'avoir la valeur de l'inconnue x qui devient $x = \frac{b-y}{a}$. J'euſſe mis dans la ſeconde équation $\frac{b-y}{a}$ à la place de x, ce qui m'eût donné $\frac{b-y}{a} + by = a$ dans laquelle x ne ſe trouve plus.

Soient données trois équations, $x + y + z = a$, $x + y - z = b$, $x - y + z = c$; on pourra faire évanouir deux inconnues dans chacune par la ſubſtitution, en cette maniere. Prenez dans la premiere la valeur de x, & vous aurez $x = a - y - z$; mettez $a - y - z$ à la place de x dans les deux autres équations, & vous aurez $a - y - z + y - z = b$, & $a - y - z - y + z = c$, qui ſe réduiſent à $a - 2z = b$, & $a - 2y = c$, dans leſquelles il n'y a plus qu'une inconnue: ſi vous voulez maintenant réduire la premiere équation à n'avoir que l'inconnue x, prenez la valeur de y & de z dans les deux équations $a - 2z = b$, $a - 2y = c$, vous aurez d'abord en tranſpoſant, $a - b = 2z$, & $a - c = 2y$; enſuite diviſant par 2, vous aurez $\frac{a-b}{2} = z$ & $\frac{a-c}{2} = y$: ſubſtituant enfin ces valeurs à la place de y & de z, dans la premiere équation, vous aurez $x + \frac{a-c}{2} + \frac{a-b}{2} = a$; & tranſpoſant, $x = a - \frac{a-c}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{c+b}{2}$.

De la réſolution des Problêmes par l'Analyſe.

278. Pour réſoudre un Problême, il faut d'abord conſidérer attentivement l'état de la queſtion, en diſtinguer les condi-

tions & les données d'avec les inconnues, exprimer le problême généralement par le moyen des lettres, faiſant enſorte qu'il y en ait le moins qu'il eſt poſſible; & pour cela, il ne faut pas déſigner par différentes lettres des quantités égales ou les parties de quantités égales, mais ſeulement par une même lettre avec des dénominateurs ou des coefficiens, s'il eſt néceſſaire; il faut enſuite exprimer chaque condition par une équation. Or pour avoir une ſolution complette, il doit y avoir autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Il faut enfin trouver par les Regles précédentes la valeur de chacune des inconnues. Les exemples auront bientôt rendu familieres toutes ces regles.

279. I. Soit donc propoſée cette queſtion: *Un pere & un fils ont 100 ans entre eux; le fils en a 30 moins que le pere: quel eſt l'âge de chacun?*

Dans cette queſtion je remarque deux quantités données, ſavoir 100 & 30, & deux inconnues, ſavoir, l'âge du pere, & l'âge du fils. J'y remarque auſſi deux conditions, l'une que la ſomme de ces deux âges inconnus eſt 100, & l'autre que leur différence eſt 30. Il faut donc les exprimer par deux équations, & ayant ſuppoſé $100 = a$, $30 = b$, l'âge du pere $= x$, l'âge du fils $= y$, je réduis le problême à cette queſtion générale. *Etant données la ſomme & la différence de deux quantités, trouver chaque quantité.* Je l'exprime ainſi.

Problême exprimé en paroles.	Problême exprimé algébriquement.
On demande deux âges	x, y?
dont la ſomme eſt $100 = a$ . .	$x + y = a$
& dont la différence eſt $30 = b$.	$x - y = b$

J'ai donc les deux équations $x + y = a$, & $x - y = b$, dans chacune deſquelles il y a deux inconnues; c'eſt pourquoi je dois employer la ſubſtitution, pour avoir la valeur d'une des deux, comme de y, & dire, puiſque $x + y = a$, donc (267) $x = a - y$, & en ſubſtituant $a - y$ à la place de x dans la ſeconde équation, j'ai $a - y - y = b$, ou $a - 2y = b$, & en tranſpoſant $a - b = 2y$, enfin en diviſant (271) $\frac{a-b}{2} = y$: ainſi je connois la valeur de y, ce qui ſuffit pour répondre à la queſtion.

Par une opération semblable, on peut faire évanouir y pour avoir la valeur de x, & on trouvera $x = \frac{a+b}{2}$. Ainsi la question est parfaitement résolue; car si à la place de a & de b, je substitue 100 & 30, j'aurai $x = \frac{100+30}{2} = \frac{130}{2} = 65$: & $y = \frac{100-30}{2} = \frac{70}{2} = 35$; donc le pere avoit 65 ans, & le fils 35.

280. Observez que dans plusieurs cas, & nommément dans celui-ci, on peut trouver la valeur de x en ajoutant les deux équations du problême; si on soustrait l'une de l'autre, on trouve la valeur de y, & cela de la maniere la plus simple. Car en les ajoutant on a $2x = a + b$, d'où l'on tire $x = \frac{a+b}{2}$ comme ci-dessus. En soustrayant la seconde de la premiere, on a $2y = a - b$; d'où $y = \frac{a-b}{2}$.

281. Puisque cette question particuliere a été réduite à une question générale, il suit que les équations $x = \frac{a+b}{2}$ & $y = \frac{a-b}{2}$ en donnent une solution générale; car il est clair que ces lettres représentant tous les nombres possibles, toutes les fois qu'on proposera de trouver deux quantités x & y, dont on connoît la somme a, & la différence b, on verra que la plus grande de ces deux quantités, qui est ici désignée par x, sera égale à la moitié de la somme $a + b$ des deux quantités données; & que la plus petite, marquée par y, sera égale à la moitié de la différence $a - b$ de ces mêmes quantités.

282. Les équations qui donnent la solution générale d'un problême, s'appellent aussi des *Formules*, parce qu'elles représentent une méthode générale de résoudre tous les problêmes qui ont les mêmes conditions que celui qu'on a résolu par ces équations.

Par exemple, si on proposoit cette question: *Pierre & Jean ont donné ensemble 14 sous aux pauvres; Pierre a donné 4 sous plus que Jean: combien en ont-ils donné chacun?*

Il est évident que ce problême a les mêmes conditions que le précédent, puisqu'on y demande deux quantités, dont on connoît la somme 14 & la différence 4; c'est pourquoi exprimant l'aumône de Pierre par x, celle de Jean par y, la somme 14 par a, la différence 4 par b, on trouvera $x = \frac{a+b}{2} = \frac{14+4}{2} = 9$, & $y = \frac{a-b}{2} = \frac{14-4}{2} = 5$. Donc Pierre a donné 9 sous, & Jean 5.

283. *Une formule exprimée en paroles, donne donc une regle générale.* Par exemple, les formules $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$, qui sont la même chose que $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, donnent cette regle générale: *Quand on connoît la somme & la différence de deux quantités inconnues, pour avoir la plus grande, il faut ajouter la moitié de la différence à la moitié de la somme; & pour avoir la plus petite, il faut ôter la moitié de la différence de la moitié de la somme.* Plus d'une fois nous nous servirons de ce principe: & c'est ainsi qu'en résolvant par l'analyse des problêmes particuliers, on découvre les propriétés générales de la grandeur.

Nous avons discuté cette question tout au long, afin qu'elle puisse servir de modele pour les questions suivantes. Nous serons désormais plus succincts.

II. EXEMPLE. *Pierre & Jean ayant ensemble 36 l. ont perdu une pistole au jeu; Pierre a perdu le tiers de ce qu'il avoit, & Jean le cinquieme; on demande ce que chacun avoit avant le jeu, & ce que chacun a perdu?*

Dans cet exemple, il semble d'abord qu'il y ait quatre inconnues, quoiqu'il n'y en ait réellement que deux. Car quand on connoîtra ce que Pierre avoit avant le jeu, le tiers de cette somme sera sa perte, laquelle par conséquent ne fait pas proprement une quantité inconnue: il en est de même de la perte de Jean. D'où on peut faire cette remarque.

284. *Le nombre des inconnues ne dépend pas du nombre des demandes qu'on fait dans un problême; mais il faut voir avant que de déterminer le nombre des inconnues, si la solution d'une demande ne donne pas la solution d'une autre.*

Question exprimée en paroles.	Question exprimée algébriquement.
On demande deux quantités ..	$x, y?$
dont la somme est 36 ou a ...	$x + y = a$
& dont le tiers de la premiere, plus le cinquieme de la seconde, est 10 ou b	$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = b.$

Il faut d'abord délivrer de fractions la seconde équation (274) qui deviendra $5x + 3y = 15b$, & alors si on prend $x = a - y$ dans la premiere équation, & si on substitue cette valeur dans $5x + 3y = 15b$, on aura $5a - 5y + 3y = 15b$, & en réduisant, puis transposant, $2y = 5a - 15b$, & en divisant (271), $y = \frac{5a - 15b}{2}$, ce qui suffit pour la solution du problême : car si on fait les substitutions marquées dans cette formule, on trouvera $y = 15$ l. Jean avoit donc 15 l. & en a perdu 3, qui est le cinquieme de 15 ; par conséquent Pierre avoit 21 l. puisque $15 + 21 = 36$, & il a perdu 7 l. qui sont le tiers de 21.

Si cependant on vouloit une formule par x, on trouvera en faisant évanouir y, que $x = \frac{15b - 3a}{2}$.

III. EXEMPLE. *Un pere dans son testament partage tout son bien entre ses enfans : il donne à son fils ainé* 1000 *écus avec le sixieme de ce qui restera après qu'il les aura prélevés ; au second* 2000 *écus avec le sixieme de ce qui restera ; au troisieme* 3000 *écus & le sixieme de ce qui restera ; & ainsi de suite jusqu'au dernier, qui aura pour lui le reste de la part de ses freres. Cette disposition ayant été exécutée, chacun s'est trouvé également partagé. On demande combien ils étoient d'enfants ? combien ils ont eu chacun ? & combien le pere avoit laissé d'argent ?*

Quoiqu'il semble qu'il y ait ici trois inconnues, cependant on voit, en examinant de près cette question, qu'il n'y en a qu'une, savoir le bien du pere : car quand il sera connu, on en ôtera 1000 écus, & on leur ajoutera le sixieme du reste, ce qui donnera la part de chacun ; & en divisant le bien du pere par une de ces parts, on aura le nombre des parts, c'est-à-dire, celui des enfants.

Je fais donc le bien du pere $= x$, les 1000 écus $= a$, & je dis, quand l'ainé aura pris ses 1000 écus, le reste du bien sera $x - a$; sur cela il prendra le sixieme, qui est $\frac{x-a}{6}$, & sa part sera $a + \frac{x-a}{6}$, ou réduisant tout en fraction (181), $\frac{5a+x}{6}$. L'ayant ôtée de tout le bien, on a $x - \frac{5a-x}{6}$, sur quoi le second prend $2a$, & le bien qui reste devient $x - \frac{5a+x}{6} - 2a$, qui se réduit à $\frac{5x-17a}{6}$, dont il doit encore prendre le sixieme, lequel par conséquent est $\frac{5x-17a}{36}$. De sorte que la part du second est $2a + \frac{5x-17a}{36}$ ou $\frac{55a+5x}{36}$.

Et parce que les parts se sont trouvées égales, on a l'équation $\frac{5a+x}{6} = \frac{55a+5x}{36} = \frac{55a+5x}{6\times 6}$, d'où l'on tire $x = 25a$. C'est-à-dire, que le bien du pere étoit de 25000 écus: chacun de ses enfans eut 15000 livres, & ils étoient au nombre de cinq.

IV. Exemple. *Trouver un nombre tel qu'ôtant son quadruple de son quarré, il reste 21.*

Ce problême est évidemment du second degré, & la condition qu'il renferme, est des plus aisées à exprimer.

L'équation est $xx - 4x = 21$, & pour la rendre générale, soit $a = 21$, $b = 4$. On aura $x^2 - bx = a$. Complétant le quarré (275), on trouvera $x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = a + \frac{b^2}{4}$; extrayant la racine, il viendra $x - \frac{b}{2} = \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$. Transposant & substituant, $x = 2 + \sqrt{25} = 7$.

285. Mais il faut bien remarquer que la racine de $x^2 - bx + \frac{b^2}{4}$ n'est pas plutôt $x - \frac{b}{2}$, que $-x + \frac{b}{2}$ (209); puisque l'une & l'autre de ces quantités ont exactement le même quarré.

Ainſi *toute équation du ſecond dégré donne toujours deux valeurs di[f]érentes de l'inconnue.*

On les exprime toutes deux à la fois en mettant le ſigne $\pm$ (qui ſe prononce *plus* ou *moins*) devant le radical. Il auroit donc fallu écrire ..... $x = 2 \pm \sqrt{25}$: expreſſion, qui en prenant le ſigne $+$, devient $x = 7$, & qui en prenant le ſigne $-$, ſe change en $x = -3$. Ces deux valeurs, quoique fort différentes, n'en ſatisfont pas moins au problême : car 1.° le quarré de 7 eſt 49, le quadruple de 7 eſt 28, & $49 - 28 = 21$. 2.° Le quarré de -3 eſt 9. Le quadruple de -3 eſt -12, qui étant ſouſtrait de 9, donne auſſi 21. (184).

286. De même, ſi on avoit propoſé de trouver deux nombres, dont la ſomme $= 17$ ou a, & le produit $= 60$ ou b; on eût eu $x + y = a$, & $xy = b$, d'où on eût conclu $x = 5$ & $y = 12$, ou $x = 12$ & $y = 5$. Or il eſt clair que ſoit qu'on faſſe $y = 5$, & $x = 12$; ou $y = 12$ & $x = 5$, les conditions du problême ſont remplies. D'où il ſuit que *tout problême dans lequel une des deux inconnues peut être indifféremment plus grande ou plus petite que l'autre, eſt un problême qui a deux ſolutions, & qui eſt par conſéquent du ſecond degré*

287. Il arrive quelquefois qu'on peut réſoudre par les méthodes du premier degré, des problêmes dont l'énoncé feroit croire qu'ils ſont du ſecond. En voici un exemple.

On veut mettre un corps de troupes en bataillon quarré, mais par une premiere diſpoſition, il reſte 124 hommes à placer. On en met donc un de plus ſur chaque ligne, & il s'en faut de 129 que le bataillon quarré ne ſoit complet. Quel eſt le nombre de ces troupes?

Commençons par généraliſer ce problême. Nous aurons par ce moyen la ſolution de tous ceux qui ſeront aſſujettis aux mêmes conditions.

Soit donc $a = 124$; $b = 129$; $x =$ le nombre d'hommes placés d'abord ſur chaque côté; $x + 1$ exprimera le nombre de ceux qui s'y trouvent après la ſeconde diſpoſition: & nous aurons ces deux manieres d'exprimer le nombre cherché.

$xx + a = (x + 1)^2 - b$. Donc réduiſant, tranſpoſant, &

& diviſant, $x = \frac{a+b-1}{2}$, formule qui ſervira à réſoudre tous les cas ſemblables. Car tel eſt, encore une fois, le précieux avantage des formules.

Subſtituons maintenant les valeurs de a & de b; nous trouverons $x = 126$. Donc $xx = 15876$. Donc $xx + a = 15876 + 124 = 16000$ hommes.

288. Pour picquer encore un peu la curioſité des commençans, nous leur propoſerons quelques autres problêmes; les uns avec leurs ſolutions abrégées, les autres ſans ſolution, afin qu'ils aient eux-mêmes le plaiſir de la trouver.

I. *Quel eſt le nombre dont le cinquieme étant ſouſtrait du tiers, donne 8 pour reſte?*

Soit $a = 8$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{m}$; $\frac{1}{5} = \frac{1}{n}$; x le nombre cherché: donc $\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = a$. D'où $x = \frac{amn}{n-m}$. Formule qui nous apprend que pour la ſolution de tous les cas ſemblables, il ſuffit de multiplier ce qui reſte par le produit des dénominateurs, & de diviſer enſuite par leur différence. En ſubſtituant les valeurs données, on trouvera pour le cas préſent, $x = 60$.

II. *On a diviſé un nombre par 6, & le quotient s'eſt trouvé tel, qu'en l'ajoutant au diviſeur & au dividende, on a eu 69. Quel eſt ce nombre?*

Généralement. Soit $a = 6$; $b = 69$. Donc $x + \frac{x}{a} + a = b$: donc $x = \frac{ab - aa}{a+1} = \frac{(b-a)a}{a+b}$: donc ici, $x = 54$.

III. A & B *ſe ſont mis au jeu avec la même ſomme. La perte de* A *eſt de* 12 *l. celle de* B *eſt de* 57. *Enſorte qu'à la fin du jeu* B *n'a plus que le quart de l'argent qui reſte à* A. *Combien avoient-ils chacun avant que de jouer?*

La réponſe eſt aiſée. Car on a d'abord, $x - 12 = \overline{x - 57} \times 4$; & enſuite $x = 72$.

En ſubſtituant des lettres aux nombres, on trouvera une ſolution générale; & il eſt utile de s'exercer à ces ſortes de ſubſtitutions.

IV. B, C & D *ont mis séparément à la loterie. La mise de* B $+$ *celle de* C $= 21$ *l. la mise de* B $+$ *celle de* D $= 24$ *l. Celles de* C & *de* D $= 27$. *Trouver chaque mise.*

Soit $a = 21$; $b = 24$; $c = 27$. Il semble qu'il y ait ici trois inconnues, & en effet les trois équations conduiroient par la voie des substitutions (277) à trouver leurs valeurs : mais il est plus simple d'y parvenir par la voie suivante.

J'appelle x la mise de B; donc $a-x$ est la mise de C, & $b-x$ est celle de D. Or par la troisieme condition, $a-x+b-x=c$. Donc $x=\frac{a+b-c}{2}=\frac{21+24-27}{2}=9$ l. D'où on tire 12 & 15 l. pour les mises respectives de C & de D.

V. *Une personne ayant de jetons dans ses deux mains, en prend un de la droite pour les ajouter à ceux de la gauche, & par-là il s'en trouve autant dans l'une que dans l'autre. Si elle en eût fait passer deux de la gauche dans la droite, cette derniere main en eût contenu le double de ce qui seroit resté dans l'autre, combien y en avoit-il d'abord dans chaque main ?*

Soit x le nombre des jetons de la droite, y de ceux de la gauche. Par la premiere condition, $x-1=y+1$; par la seconde, $x+2=2y-4$; & soustrayant l'équation précédente de celle-ci, on a $3=y-5$: d'où $y=8$, & par conséquent $x=10$.

VI. *Un Orfevre achete pour* 318 *livres une masse de métal composée de* 3 *onces d'or & de* 5 *onces d'argent ; il achete* 522 *l. une autre masse composée de* 5 *onces d'or & de* 7 *onces d'argent. On demande la valeur de l'once d'or & celle de l'once d'argent.*

x & y, les valeurs cherchées; $318=a$; $522=b$: donc 1.° $3x+5y=a$; 2.° $5x+7y=b$. Je multiplie la premiere équation par 5, la seconde par 3, & je soustrais le second produit du premier. Il me reste $4y=5a-3b$; d'où $y=6$ l. & $x=96$ l.

289. On trouvera le même résultat par la substitution : mais le calcul n'en est pas si prompt que par la méthode abrégée dont nous venons de nous servir. Elle consiste à multiplier les équations par des nombres tels qu'en soustrayant ou qu'en ajoutant

un produit à l'autre, l'une des deux inconnues disparoisse aussitôt. Or ces nombres sont faciles à trouver. Ici, par exemple, il étoit évident que la premiere équation multipliée par 5, & la seconde par 3, contiendroient l'une & l'autre $+15x$. Donc par la soustraction, il ne devoit rester que des y.

290. Remarquez maintenant que 5 & 3 sont les coefficiens réciproques de x dans les deux équations, & que si on les eût multipliées par 7 & par 5, qui sont les deux coefficiens de y, on auroit eu $35y$ dans chaque produit, & par conséquent il ne seroit resté que des x après la soustraction.

Nous donnerons encore un exemple de cette abréviation.

VII. *Quel est le prix de trois chevaux, dont le premier plus la moitié du prix du second & du troisieme* $=$ *25 pistoles ; dont le second plus le tiers du prix des deux autres* $=$ *26 pistoles ; dont enfin le troisieme plus la moitié du prix des deux autres* $=$ *29 pistoles ?*

Afin d'éviter les fractions, j'appelle $6x$ le prix du premier, $6y$ celui du second, $6z$ celui du troisieme, & pour abréger, je fais $a = 25$, $b = 26$, $c = 29$.

J'ai donc ces trois équations.

$$\begin{cases} \text{I. } 6x + 3y + 3z = a \\ \text{II. } 6y + 2x + 2z = b \\ \text{III. } 6z + 3x + 3y = c \end{cases}$$

Ajoutant la premiere à la troisieme, je trouve $9x + 6y + 9z = a + c$, que je multiplie par 2. Le produit est $18x + 12y + 18z = 2a + 2c$. Ce produit comparé à celui de la seconde équation primitive multipliée par 9, peut en être soustrait, & du même coup les x & les z disparoîtront.

Le reste sera $42y = 9b - 2a - 2c$; d'où je tire $6y = \frac{9b - 2a - 2c}{7} = \frac{234 - 50 - 58}{7} = 18$ pistoles. C'est le prix du second cheval.

Pour avoir celui du premier, je substitue la valeur trouvée dans les équations I & II, ce qui les change en celles-ci ....

$$\begin{cases} 6x + 9 + 3z = a. \\ 18 + 2x + 2z = b \end{cases}$$

Et multipliant la premiere par 2, la seconde par 3, il vient ....

$$\begin{cases} 12x + 18 + 6z = 2a \\ 6x + 54 + 6z = 3b \end{cases}$$

D'où je tire, par la soustraction $6x - 36 = 2a - 3b$; donc $6x = 8$.

Donc $6z = 16$. Les prix demandés sont donc 8 pistoles pour le premier, 18 pour le second; & 16 pour le troisieme.

VIII. *Plusieurs Personnes voyageant ensemble, prennent une voiture qui leur coûte 342 l. Le voyage fait, trois de ces voyageurs s'échappent sans payer; ensorte que ceux qui restent sont obligés de payer 19 l. de plus chacun, pour faire le prix convenu. Combien étoient-ils d'abord?*

x, leur nombre; donc $\frac{342}{x}$ la part de chacun, si tous avoient payé. Mais trois se sont enfuis; ceux qui restent sont donc au nombre de $x - 3$, & leur part doit être $\frac{342}{x}$ $+ 19$. Cela posé, il est clair que toutes ces parts réunies doivent faire 342 l. On aura donc $\left(\frac{342}{x} + 19\right)\overline{x - 3} = 342$; d'où on tirera, après avoir réduit & divisé, $xx - 3x = 54$.

Complétant le quarré du premier membre, on aura $xx - 3x + \frac{9}{4} = 54 + \frac{9}{4}$. D'où, extrayant & transposant $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{54 + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \pm 7\frac{1}{2} = 9$ ou $- 6$. Mais de ces deux solutions, la premiere est évidemment la seule que l'on cherche. Ces voyageurs étoient donc partis au nombre de neuf.

IX. *On demande s'il y a deux nombres tels que le double de leur somme soit égal au triple de leur produit, en supposant que le triple de leur produit est lui-même égal à la différence de leurs quarrés.*

Soit x, le plus grand de ces deux nombres; y le plus petit. Par la premiere condition, $2(x + y) = 3xy$; par la seconde, $2(x + y) = x^2 - y^2$.

De cette derniere équation, on déduit $x = y + 2$; ce qui change la précédente en $4y + 4 = 3y^2 + 6y$, d'où (275) $y = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$, & $x = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$. Effectivement le double de ces deux nombres, le triple de leur produit, & la différence de leurs quarrés sont trois quantités égales, dont chacune est $\frac{8}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{13}$.

291. Les solutions détaillées ou abrégées que l'on a vues, peuvent suffire pour trouver celles des problêmes suivants. On pourra s'y exercer, quand on n'aura rien de mieux à faire; car les méthodes une fois bien comprises, il ne faut pas trop insister sur les exemples, ni s'appesantir sur les détails.

X. *On demande à un homme combien il a d'écus. Il répond:*

si vous ajoutez ensemble la moitié, le tiers, & le quart de ce que j'en ai, la somme surpassera d'un le nombre que vous demandez.

XI. *Un pere a 50 ans; son fils en a 12. Quand est-ce que l'âge du pere ne sera que le triple de celui du fils?*

XII. *Une personne charitable voulut un jour faire l'aumône à plusieurs pauvres, & donner également à tous. D'abord elle avoit projetté de donner 3 sous à chacun, mais il lui auroit fallu 9 sous de plus, elle ne leur en donna donc que 2, & il lui en resta 2. Combien y avoit-il de pauvres? combien cette personne avoit-elle de sous?*

XIII. *Un ouvrier n'avoit plus que 6 l. lorsqu'on lui paya cinq semaines de travail. Quinze jours après il avoit déja dépensé les trois quarts de tout son argent: mais ayant reçu le prix de son travail pour ces quinze jours, il se trouva avoir 21 l. Que gagnoit-il par semaine?*

XIV. *Le Testament d'un oncle porte que chacun de ses neveux aura 12000 l. & chacune de ses nieces 9000 sur la somme de 120000 l. qu'il leur laisse après sa mort. Par cette disposition il ne reste rien de cette somme. Si au contraire chaque niece eût eu 12000 l. & chaque neveu 9000, il seroit resté 9000 l. Trouver le nombre des neveux & celui des nieces.*

XV. *Un chasseur promet à un autre de lui donner une somme* b, *toutes les fois qu'il manquera sa piece de gibier. Cet autre à son tour s'engage à lui payer une somme* c, *toutes les fois qu'il la tuera. Après un nombre* n *de coups de fusil, il peut arriver, ou que les deux chasseurs ne se doivent rien, ou que le premier soit redevable au second, ou le second au premier d'une quantité* d. *Trouver une formule qui fasse connoître dans les trois cas combien il y a eu de coups manqués.*

Des Problêmes indéterminés.

292. LOrsque dans un Problême, il y a une inconnue de plus que de conditions, on l'appelle *indéterminé.* Si le nombre des inconnues étoit encore plus grand à l'égard de celui des conditions, le problême seroit alors *plus qu'indéterminé.*

Or dans les Problêmes indéterminés, on ne peut, par les regles précédentes, que réduire chaque équation à n'avoir plus que deux inconnues, & alors on eſt obligé de ſuppoſer une valeur à une de ces deux inconnues, afin que la valeur de l'autre ſoit déterminée en vertu de cette ſuppoſition & des conditions du problême: de ſorte que le problême peut avoir autant de ſolutions, qu'on peut ſuppoſer de valeurs différentes à l'une des deux inconnues.

Soit, par exemple, cette queſtion : *Trouver trois nombres* x, y, z, *dont la ſomme ſoit* 105, *& qui aient entr'eux une même différence.*

Les conditions de ce problême ne peuvent s'exprimer que par ces deux équations, $x + y + z = 105$, & $x - y = y - z$. Prenant donc dans la ſeconde la valeur de $x = 2y - z$, & ſubſtituant dans la premiere, on trouvera $y = 35$, & par conſéquent $x + 35 + z = 105$, d'où l'on tire $x + z = 70$, de laquelle équation on ne peut faire évanouir ni x ni z. Il faut donc ſuppoſer quelque valeur à une des inconnues comme à x, & on en aura une de z: faiſant par exemple, $x = 10$, on aura $z = 60$, & les trois nombres 10, 35, 60 pourront ſatisfaire à la queſtion. Et ſi on fait $x = 12$, on aura $z = 58$, & les trois nombres, 12, 35, 58 y ſatisfairont auſſi.

On voit même que ce problême peut avoir 69 ſolutions en nombres entiers & poſitifs, parce qu'on peut ſuppoſer x égal ſucceſſivement à tous les nombres depuis 1 juſqu'à 69, mais non au-delà, parce que la ſomme des deux inconnues eſt 70. Il peut cependant avoir une infinité de ſolutions, en ſuppoſant x égal à tel nombre qu'on voudra moindre que 70, plus telle fraction qu'on voudra.

293. Quoique la ſolution de ces ſortes de problêmes ſoit plus curieuſe qu'utile, il eſt bon cependant de connoître un peu plus en détail la maniere de les réſoudre ; & comme il eſt rare que l'on ait beſoin des valeurs négatives ou fractionnaires des inconnues, nous ne chercherons ici que leurs valeurs poſitives & en nombres entiers.

Soit donc, en général, l'équation $ax = by + c$, à laquelle tout problême indéterminé du premier degré peut être réduit. a, b, c expriment des nombres entiers & connus. On mettra d'abord cette équation ſous cette forme $x = \frac{by + c}{a}$, & puiſque x doit être un nombre entier, $\frac{by + c}{a}$ doit l'être auſſi. Mais au lieu d'écrire tout au long ces mots, *nombre entier*, nous les déſignerons par la lettre E. On aura donc $\frac{by + c}{a} = E$.

Enſuite on changera cette expreſſion en une autre, où y ait pour coefficient l'unité. Cette transformation peut ſe faire en diviſant, multipliant, ſouſtrayant, ou ajoutant ſelon les divers cas, comme on va le voir; & par ces opérations on parviendra bientôt à une expreſſion de cette forme, $\frac{y+d}{a}=\text{E}$, d'où l'on tire $y=a\text{E}-d$.

Maintenant, prenons pour E telle quantité numérique que l'on voudra, pourvu qu'elle ſoit entiere & poſitive, à commencer même par zéro, lorſque $-d$ eſt un nombre poſitif. Il eſt clair qu'on trouvera les différentes valeurs de y, à compter de la plus petite. Ces valeurs, on les ſubſtituera dans l'équation du problême, & chaque ſubſtitution donnera une valeur correſpondante pour x. Quelques exemples vont rendre cette méthode fort intelligible.

Je ſuppoſe donc que l'on cherche toutes les valeurs entieres & poſitives de x & de y dans l'équation $3x=4y+5$. Je fais d'abord $x=\frac{4y+5}{3}=y+1+\frac{y+2}{3}$ (en diviſant par 3). Mais cette valeur de x doit être un nombre entier. Donc $y+1+\frac{y+2}{3}=\text{E}$; & puiſque y doit être auſſi un nombre entier, il faut bien que $\frac{y+2}{3}$ le ſoit de même. J'aurai donc $\frac{y+2}{3}=\text{E}$; d'où $y=3\text{E}-2$.

Cela poſé, je fais $\text{E}=1$ (& non pas 0, afin d'éviter la valeur négative -2 pour y). J'ai donc $y=1$. Donc $x=3$. Je fais enſuite $\text{E}=2$, donc $y=4$, ce qui donne $x=7$. Faiſant $\text{E}=3$, je trouve $y=7$, d'où la valeur correſpondante de x eſt 11.

Je diſpoſe ainſi ces valeurs; & je remarque qu'elles ſont en progreſſion arithmétique.

$$\begin{cases} y=1\ .\ .\ .\ 4\ .\ .\ .\ 7\ .\ .\ .\ \&c. \\ x=3\ .\ .\ .\ 7\ .\ .\ .\ 11\ .\ .\ .\ \&c. \end{cases}$$

La différence de la premiere progreſſion eſt 3, coefficient de x. Celle de la ſeconde eſt 4, coefficient de y. Rien donc n'eſt plus aiſé que de trouver la ſuite de ces valeurs, & de voir que ce problême a une infinité de ſolutions.

294. Et qu'on ne penſe pas que l'on ſoit tombé par haſard ſur des progreſſions arithmétiques. En y réfléchiſſant un peu, on verra bien que c'eſt une ſuite néceſſaire de la méthode. Ces progreſſions ne ſont cependant pas infinies dans tous les cas, dans ceux, par exemple, où le coefficient d'une des deux inconnues eſt négatif.

EXEMPLE. On demande, en nombres entiers, toutes les valeurs poſitives de x & de y dans l'équation $9x=2000-13y$.

On a d'abord $x=\frac{2000-13y}{9}=\text{E}$; enſuite, $\frac{2-4y}{9}=\text{E}$, en diviſant par 9, ou ce qui eſt plus ſimple, en ſupprimant tous les 9 (54). Mais ſi $\frac{2-4y}{9}$ eſt un nombre entier, $\frac{4-8y}{9}$ doit en être un aussi. Ajoutant donc $\frac{9y}{9}$, qui en est un autre, à cette derniere quantité, & réduisant, on aura $\frac{y+4}{9}=E$; d'où l'on tire $y=9E-4$. Pour avoir maintenant toutes les valeurs de y, à commencer par la plus petite, je suppose $E=1$; donc $y=5$: si $E=2$, $y=14$: si $E=3$, $y=23$, &c. &c.

Substituant ces valeurs dans l'équation $x=\frac{2000-13y}{9}$, je trouve 1.° $x=215$: 2.° $x=202$: 3.° $x=189$, &c. &c. & disposant ainsi toutes ces quantités,

$y=$ 5. . . . 14. . . . . 23. . . . . 32. . . &c. . 149
$x=$215. . . .202. . . . .189. . . . .176. . . &c. . 7

Je ne tarde pas à reconnoître que les différences de ces deux progressions sont les coefficients réciproques des deux inconnues, & que par conséquent celui de y étant négatif, toutes les valeurs de x se trouveront en soustrayant 13 de la valeur précédente. Or ces soustractions réitérées doivent enfin épuiser le nombre des valeurs positives, & on voit bien dans cet exemple, qu'il n'est pas possible d'en trouver au-dessous de 7.

Bien loin donc que les deux progressions soient infinies, on trouvera tout de suite le nombre de leurs termes, en divisant la plus grande valeur de x par le coefficient de y, & en ajoutant une unité au quotient. Ainsi $\frac{215}{13}=16$ (avec un reste 7 qui est, & *qui doit être*, la plus petite valeur de x). Il y a donc 17 valeurs de ces inconnues qui satisfont au problême.

Cela est général pour toutes les équations semblables, dont les coefficiens sont des nombres *premiers entr'eux*.

On appelle ainsi les nombres qui n'ont d'autre diviseur commun que l'unité. Et comme toutes les autres équations peuvent être ramenées à cette forme, en les divisant par le plus grand commun diviseur des coefficiens, il est clair que la méthode est générale.

Ces détails suffisent pour l'intelligence des deux exemples suivans.

I.° Un marchand doit 1200 l. & au défaut d'argent, il offre deux sortes de marchandises en paiement. La premiere vaut 7 l. l'aune, la seconde 5 l. Trouver de combien de manieres il peut acquitter sa dette.

Soit x le nombre d'aunes de la premiere marchandise, & y celui des aunes de la seconde. On aura $7x+5y=1200$ l. d'où $x=\frac{1200-5y}{7}$; d'où encore, $\frac{3-5y}{7}=E$; & par conséquent $\frac{12-20y}{7}=E$;

$= E$; donc $\frac{21y}{7} + \frac{12 - 20y}{7} = \frac{12+y}{7}$ E. Donc enfin $y = 7E - 12$.

Si $E = 2$, $y = 2$, & c'eſt la plus petite valeur poſitive de y. En la ſubſtituant, on trouve $x = 170$, c'eſt ſa plus grande. Après quoi, ſi on ſuppoſe $E = 3$, on aura $y = 9$, & $x = 165$. Le reſte va de ſuite. Les deux progreſſions ont 35 termes chacune ; il y a donc 35 manieres différentes de faire la ſomme de 1200 l. avec des effets dont les uns valent 7 l. & les autres 5.

II.° Un laboureur a donné des agneaux en échange pour des brebis. Il eſtimoit 4 l. chaque agneau, 9 l. chaque brebis, & il a donné 15 l. en ſus. Trouver de combien de façons il a pu varier ſon marché.

x, nombre des agneaux, y, celui des brebis. Donc $4x + 15$ l. $= 9y$. Donc $x = \frac{9y - 15}{4}$; donc $\frac{y-3}{4} = E$; donc $y = 4E + 3$; & ſi $E = 0$, $y = 3$. C'eſt le moins qu'il ait pu prendre de brebis, auquel cas il a dû livrer trois agneaux. Si $E = 1$, $y = 7$, & $x = 12$. La marche des deux progreſſions eſt manifeſte, & puiſqu'elles vont toutes deux en croiſſant, on peut varier à l'infini les ſolutions de ce petit problême.

295. Quand ces ſortes de queſtions renferment quelque abſurdité, on la découvre bientôt par le dernier réſultat du calcul. C'eſt alors, ou un nombre impair à diviſer par un nombre pair, ou un plus petit nombre à diviſer par un plus grand, ce qui ne pourroit donner pour quotient un nombre entier. $6x = 6y + 7$ eſt dans le premier cas. $14x = 4y - 11$ eſt dans le ſecond. On n'a pas même beſoin de calcul pour le voir.

296. On voit bien auſſi que la méthode preſcrite pour la ſolution des problêmes indéterminés du premier degré, eſt fondée ſur cet unique principe, que des nombres entiers, ajoutés ou ſouſtraits, ou multipliés par d'autres nombres entiers, doivent toujours donner des entiers pour réſultat. Or ce principe eſt évident.

297. Ajoutons à cette méthode celle de réſoudre les problêmes ſemblables au ſuivant. Trouver un nombre x qui étant diviſé par des nombres connus a, b, c, &c. donne pour reſtes d'autres nombres connus auſſi m, n, p, &c.

Il eſt clair, d'après cet expoſé, que $\frac{x-m}{a}$ eſt un entier, ainſi que $\frac{x-n}{b}$, &c. On a donc $x = aE + m$ (293), & ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde quantité, on aura $\frac{aE+m-n}{b} = E'$. (On prononce E prime, & par cette lettre on entend ici un nombre entier en général, comme par la lettre E). Cherchant enſuite la valeur de E par la méthode qui a fait trouver ci-deſſus la valeur de y, on la ſubſtituera dans l'équation $x = aE + m$, & cette nouvelle expreſſion de la valeur de x, étant une fois miſe dans la troiſieme quantité $\frac{x-p}{c}$, on trouvera encore un nombre entier que nous déſignerons par E' (E ſeconde). Le premier membre de cette équation contiendra E', qu'il faudra déterminer comme ci-deſſus, & l'on aura enfin la valeur de x en nombres connus & en E'', ou en E'' (E tierce), ou, &c. ſelon le nombre des diviſeurs. On prendra alors pour le dernier E telle quantité entiere que l'on voudra, & bientôt on aura déterminé la ſuite des nombres qui peuvent ſatisfaire aux conditions du problême.

Exemples. Quels ſont les nombres qui étant diviſés par 5 & par 7 donnent 4 & 2 pour reſtes.

On a $\frac{x-4}{5} = E$, & $\frac{x-2}{7} = E'$. Donc $x = 5E + 4$; donc $\frac{5E+2}{7} = E'$; donc $\frac{15E+6}{7} = E'$; & ſouſtrayant $\frac{14E}{7}$, on aura $E = 7E' - 6$. Si on ſuppoſe $E' = 1$, on aura auſſi $E = 1$, donc $x = 9$; & c'eſt le plus petit des nombres cherchés.

Pour avoir les autres, on ſuppoſera $E' = 2$, ce qui donnera $x = 44$. Si $E' = 3$, $x = 79$; & ainſi de ſuite, en ajoutant à chaque valeur précédente le produit 35 des deux diviſeurs 5 & 7 : car puiſque 35 eſt diviſible ſans reſte par 5 & par 7, il eſt clair que $35 + 9$ ou 44, que $70 + 9$ ou 79, &c. donneront les mêmes reſtes que le plus petit nombre 9.

Un avare a dans ſon coffre fort pluſieurs ſacs de 1200 l. chacun. En les comptant un jour trois à trois, il n'en trouva aucun de reſte. Il les compta un autre jour ſept à ſept, il n'en reſta qu'un. Les comptant une autre fois dix par dix, il en trouve ſix de reſte. Ne pourroit-on pas deviner combien il en avoit, ſachant d'ailleurs qu'il en avoit plus de cent, mais moins de trois cents ?

Soit x le nombre de ces ſacs. E, E', E'' déſigneront à l'ordinaire des entiers ; & l'on aura $\frac{x}{3} = E$; $\frac{x-1}{7} = E'$; $\frac{x-6}{10} = E''$. La premiere expreſſion donne $x = 3E$. La ſeconde, $\frac{3E - 1}{7} = E'$: donc $\frac{15E - 5}{7}$ ſera un entier, & ſouſtrayant $\frac{14E}{7}$ de ce dernier nombre, le reſte en ſera un auſſi. On aura donc $E = 7E' + 5$. D'où $x = 21E' + 15$.

Subſtituant cette valeur dans la troiſieme expreſſion, il viendra $\frac{21E' + 9}{10} = E''$. D'où $E' = 10E'' - 9$. Si on fait $E'' = 1$, on aura $x = 36$; & ce ſera le plus petit des nombres qui diviſés par 3, par 7, & par 10, auront pour reſtes, 0, 1, & 6. Pour trouver le ſecond nombre, on ſuppoſera $E'' = 2$, d'où $x = 246$. Si $E'' = 3$, $x = 456$. Donc le nombre cherché de ſacs eſt 246.

298. Remarquez que la ſuite des nombres 36, 246, 456, &c. ſe forme en ajoutant au nombre qui précede, le produit 210 des trois diviſeurs 3, 7, 10, & cela aura lieu toutes les fois que les diviſeurs ſeront des nombres premiers entr'eux, (297). S'ils ne l'étoient pas, la progreſſion formée par l'addition de leur produit, ne contiendroit à la vérité que des nombres propres à ſatisfaire au problême : mais elle ne les contiendroit pas tous.

299. Dans les problêmes indéterminés du premier degré, on peut donner à l'une des deux inconnues une valeur arbitraire, à moins que l'état de la queſtion ne le comporte pas ; comme s'il s'agiſſoit de trouver un nombre de choſes qu'on ne pût repréſenter par des fractions, un nombre d'hommes, par exemple, &c. Mais dans les problêmes indéterminés du ſecond degré, on n'eſt pas libre de donner à une inconnue telle valeur que l'on veut. Il faut que cette valeur ne rende pas négatif le quarré de l'autre inconnue : car *un quarré négatif eſt une quantité impoſſible.*

300. On appelle *racines imaginaires*, celles des puiſſances impoſſibles. Ainſi $\sqrt{-xx}$, $\sqrt{-x^4}$ ſont des racines imaginaires ; & c'eſt avoir démontré qu'un problême eſt impoſſible, que d'avoir trouvé imaginaires toutes les racines de ſon équation. En général, *un problême contient autant de cas impoſſibles, qu'il y a de racines imaginaires dans l'équation qui l'exprime.*

Si quelqu'un, par exemple, demandoit deux nombres quarrés dont la ſomme fût égale à une quantité entiere, poſitive, & connue, il ſeroit aiſé de lui faire voir que cela eſt impoſſible, à moins que chacun de ces nombres quarrés ne ſoit plus petit que la quantité donnée, & que leur différence ne ſoit un quarré. En effet l'équation $x^2 + y^2 = a$, donne $x = \sqrt{a - y^2}$, d'où on ne tirera jamais une valeur entiere & poſitive de x, tant que $a - y^2$ ne ſera pas un quarré parfait.

Je suppose donc $y = 1$, & $a = 17$. Alors x sera $= 4$. Si $y = 2$; ou 3, point de valeur entiere pour x. Si $y = 4$, x sera $= 1$. Au-delà de cette valeur de y, toutes celles de x seront imaginaires.

301. Mais si on cherchoit deux nombres quarrés dont la différence fût entiere, positive & connue, l'équation $x^2 - y^2 = a$, donneroit $x = \sqrt{a + y^2}$: auquel cas les valeurs de x dépendroient de celles de y^2 qui étant ajoutées à a formeroient des quarrés parfaits. Par exemple, si $a = 17$, y^2 doit être $= 64$, ce qui donnera $x = 9$.

Or pour trouver facilement ces valeurs, supposons que la somme des racines cherchées soit x, & que leur différence soit y. Donc (283) la plus grande sera $\frac{x+y}{2}$, la plus petite $\frac{x-y}{2}$; & par conséquent au lieu de l'équation $x^2 - y^2 = a$, nous aurons

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{4} = xy = a.$$

302. D'où il suit, 1.° que la différence donnée est toujours égale au produit de la somme des racines par leur différence. 2.° Que pour avoir ces racines en nombres entiers, il faut que leur somme & leur différence soient deux nombres pairs ou deux nombres impairs. Si l'une étoit paire & l'autre impaire, on trouveroit des valeurs fractionnaires dont la différence des quarrés satisfairoit encore au problême.

Cherchons maintenant deux quarrés dont la différence soit 60, & pour cela supposons $x =$ la somme de leurs racines, $y =$ leur différence, $a = 60$. Nous aurons $xy = a = 60$. Or 60 peut également provenir de . . . . $\begin{cases} 1 \times 60 \\ 2 \times 30 \\ 3 \times 20 \\ 4 \times 15 \\ 5 \times 12 \\ 6 \times 10 \end{cases}$

Et parmi ces facteurs, il n'y a que 2×30, & 6×10 qui soient tous les deux pairs.

Je fais donc $x = 2$, $y = 30$; donc $\frac{x+y}{2} = 16$, & $\frac{x-y}{2} = 14$. Voilà déja deux nombres dont les quarrés different de 60. Je fais ensuite $x = 6$, $y = 10$; donc 8 & 2 ont la même propriété, ce qui d'ailleurs est évident. En substituant les autres facteurs, on trouveroit les valeurs fractionnaires.

Introduction à la Réſolution des Equations des degrés ſupérieurs.

303. LEs plus célebres Analyſtes ſe ſont occupés ſucceſſivement de la réſolution des Equations, comme d'une théorie fort utile. Mais lorſqu'ils ont voulu la traiter dans toute ſon étendue, elle leur a paru ſi compliquée, qu'ils y ont preſque tous renoncé pour ſe livrer à des détails. Au défaut des méthodes directes, ils ont eu recours aux méthodes d'approximation ; & lorſque les regles générales ſe ſont refuſées à leurs efforts, ils en ont accumulé tant de particulieres, que l'on peut déſormais avoir, ſinon des racines exactes, au moins des racines très-approchées de toutes les équations. Nous allons faire connoître quelques unes de ces regles, après avoir fait ſur la nature des équations en général les remarques ſuivantes.

304. Il eſt clair qu'en tranſpoſant tous les termes d'une équation dans un ſeul membre, ces termes ſe détruiront mutuellement. Ainſi toute équation peut être réduite à n'avoir que zéro pour ſecond membre. Si on a, par exemple, $x^2 + a^2 = 2ax$, on peut en déduire $x^2 - 2ax + a^2 = 0$. Or dans cet état, le premier membre peut être regardé comme le produit de $x - a$ par $x - a$; & puiſque ce premier membre ſe réduit à zéro, il faut bien que $x = a$, ou, ce qui revient au même, que $x - a = 0$.

305. Mais parce que c'eſt ici un quarré parfait, un de ſes facteurs ne peut être égal à zéro, que l'autre ne le ſoit auſſi : au lieu que ſi on eût eu $x^2 \begin{array}{l} - ax \\ - bx \end{array} + ab = 0$, un ſeul des facteurs $x - a$, $x - b$ égalé à zéro eût ſuffi pour réduire à zéro le premier membre. Les ſuppoſer tous les deux à la fois égaux à zéro, ce ſeroit regarder a & b comme néceſſairement égaux entr'eux, ce qui ne ſeroit pas exact.

306. *Le premier membre d'une équation tranſpoſée eſt donc le produit de pluſieurs facteurs égaux ou inégaux. Lorſqu'ils ſont*

tous égaux, ils se réduisent tous à zéro, & quand ils sont inégaux, un seul doit être égal à zéro.

307. Cherchons d'après cela le produit des quatre facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, en supposant que l'un d'eux, n'importe lequel, soit égal à zéro. Nous trouverons,

$$\begin{array}{lllll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd & = 0. \\ - b & + ac & - abd & & \\ - c & + ad & - acd & & \\ - d & + bc & - bcd & & \\ & + bd & & & \\ & + cd & & & \end{array}$$

Or de cette équation & de toutes celles que l'on peut former de la même maniere, on doit conclure qu'une équation dont le degré est généralement exprimé par m, a pour premier terme x^m, c'est-à-dire, l'inconnue élevée à la puissance que désigne le nombre des facteurs de cette équation.

Le second est x^{m-1} avec un coefficient égal à la somme de toutes les racines a, b, c, d, &c.

Le troisieme est x^{m-2} avec un coefficient égal à la somme des produits ab, ac, ad bc, &c. de ces racines prises deux à deux.

Le quatrieme est x^{m-3} avec un coefficient égal à la somme des produits abc, abd, &c. des mêmes racines prises trois à trois; & ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui est toujours le produit de toutes les racines.

308. Il n'en faut pas davantage pour trouver la formule qui sert à élever un binome quelconque $x + a$ à une puissance quelconque m. Il est à propos de la bien comprendre, & de s'en rendre l'usage familier.

Pour élever le binome $x + a$ à la puissance m, il faut le multiplier $m - 1$ de fois par lui-même (204). Ainsi le développement de cette puissance doit être regardé comme le produit d'un nombre m de facteurs tous égaux; & si $x + a = 0$, tout ce que nous venons de dire d'une équation du degré m aura lieu pour la puissance m de $x + a$.

Ensorte donc que le premier terme sera x^m; que le second sera x^{m-1} précédé d'un coefficient égal à la somme de toutes les racines. Or dans ce cas, chaque racine eſt a, leur nombre eſt m. Donc leur ſomme eſt ma. Le ſecond terme ſera donc max^{m-1}.

Le troiſieme doit être x^{m-2} pécédé d'un coefficient égal à la ſomme des produits de toutes les racines priſes deux à deux. Ce coefficient ſera donc a^2 multiplié par le nombre des produits que peut donner un nombre m de lettres a, b, c, d, &c. priſes deux à deux. Pour le trouver, ce nombre, remarquez, 1.° qu'il doit être la moitié de celui des lettres qui ſervent à former tous ces produits. 2.° Qu'il faut répéter chacune de ces lettres le même nombre de fois, c'eſt-à-dire, $m-1$ de fois, puiſqu'il faut les multiplier chacune ſéparément par toutes les autres. Les nombres des lettres qui forment ces produits eſt donc $m(m-1)$, & par conſéquent celui de leurs produits deux à deux eſt $\frac{m(m-1)}{2}$. Ainſi le troiſieme terme ſera $\frac{m(m-1)}{2}a^2x^{m-2}$.

Le quatrieme doit avoir pour coefficient la ſomme des produits que l'on peut faire avec les racines priſes trois à trois; & comme ici toutes les racines ſont égales, ce coefficient doit être a^3 multiplié par le nombre de produits qui peuvent réſulter d'un nombre m de lettres a, b, c, d, &c. priſes trois à trois. Or, 1.° le nombre de ces produits ne doit être que le tiers de celui des lettres dont ils ſont composés. 2.° Il faut répéter chaque lettre le même nombre de fois, & ce nombre eſt déſigné par celui des produits des autres lettres priſes deux à deux. Puis donc que le nombre de ces produits eſt $\frac{m(m-1)}{2}$ lorſque celui des lettres eſt m, il eſt clair qu'il ſera $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ lorſque celui des lettres ſera $m-1$, comme dans le cas préſent. Le nombre des lettres qui forment tous les produits abc, abd, &c. doit donc être $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$. Celui des produits ſera donc $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}$, de ſorte que le quatrieme terme ſera $\frac{m.m-1.m-2.}{2.3}a^3x^{m-3}$.

Formant de même les termes ſuivants, on trouvera que $(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^3 x^{m-3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} a^4 x^{m-4}$ + &c. & qu'en général $(a \pm b)^m = a^m \pm ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2}b^2 \pm \frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^{m-3}b^3 +$ &c. $\pm$ &c.

Pour faire quelqu'application de cette formule, cherchons d'abord la cinquieme puiſſance du binome $a+b$. Nous trouverons $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Car $m=5$ dans ce cas; donc $a^m = a^5$; donc $ma^{m-1}b = 5a^4b$; donc $\frac{m.m-1}{2} a^{m-2}b^2 = 10a^3b^2$; ainſi de ſuite juſqu'au ſixieme terme $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5} a^{m-5}b^5$, qui ſe réduit à b^5. Le calcul ne peut s'étendre plus loin dans cet exemple, parce que tous les termes qui ſuivent, ayant au nombre des facteurs de leurs coefficiens $m-5$ lequel ſe réduit ici a zéro, ils s'y réduiſent auſſi.

Cette formule peut également ſervir à élever un polynome quelconque à une puiſſance quelconque. Soit propoſé, par exemple, d'élever le trinome $n+p+q$ à ſon cube. Je fais $a=n$; $b=p+q$; $m=3$. Donc $a^m = n^3$; $ma^{m-1}b = 3n^2(p+q)$; $\frac{m.m-1}{2} a^{m-2}b^2 = 3n(p+q)^2$; & $\frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^{m-3}b^3 = (p+q)^3$; enſorte que $(n+p+q)^3 = n^3 + 3n^2p + 3n^2q + 3np^2 + 6npq + 3nq^2 + p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$.

La même formule s'étend encore aux puiſſances négatives, & aux puiſſances fractionnaires de tous les genres. Par elle, on trouve les racines exactes des quantités qui en ont, & les racines approchées de celles qui n'en ont pas d'exactes. En un mot, il n'y a rien de plus généralement utile dans l'Analyſe que cette formule (212).

Lorſqu'une expreſſion n'eſt pas fort compliquée, & qu'elle eſt

eſt en même temps une puiſſance parfaite, on en cherche la racine en ſuivant les regles ordinaires pour l'extraction des racines. On pourroit bien la trouver par la formule du binome, mais le calcul en feroit plus long. Ce qui fait qu'on ne s'en ſert communément que pour avoir des racines approchées. Voici quelques exemples.

On demande la racine quarrée de $a^2 - x^2$? Je vois d'abord qu'elle ne peut être exacte, & qu'ainſi je dois me borner à en trouver une approchée. Je ſuppoſe donc que $(aa - xx)^{\frac{1}{2}} = (a + b)^m$, ce qui me donne $aa = a$; $-xx = b$; $\frac{1}{2} = m$. Je ſubſtitue ces valeurs reſpectives dans la formule $a^m + ma^{m-1}b +$ &c. & j'ai $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} -$ &c. pour la racine cherchée.

On trouvera de même que $\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} +$ &c. & que $\sqrt[3]{1 - y^3} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} -$ &c.

Nous avons vu (193) que $\frac{1}{1 + xx}$ donnoit une ſuite infinie de termes; la formule va nous les faire retrouver. Je fais d'abord $\frac{1}{1 + xx} = (1 + xx)^{-1}$ (216) $= (a + b)^m$; enſuite, $a = 1$, $b = xx$, $m = -1$, & la ſubſtitution de ces valeurs produit auſſi-tôt $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$ &c. Il ne feroit guere plus difficile de trouver que la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2ax - xx}} = (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{1}{\sqrt{2ax}} + \frac{x}{4a\sqrt{2ax}} + \frac{3xx}{32a^2\sqrt{2ax}} + \frac{15x^3}{384a^3\sqrt{2ax}} + \frac{105x^4}{6144a^4\sqrt{2ax}} +$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2ax}}\left(1 + \frac{x}{4a} + \frac{3x^2}{4.8a^2} + \frac{3.5x^3}{4.8.12a^3} + \frac{3.5.7x^4}{4.8.12.16a^4} + \text{\&c.}\right)$.

Et l'on voit bien que s'il falloit un plus grand nombre des termes, on les trouveroit ſans calcul, en obſervant la loi qu'ils doivent ſuivre.

Il ſeroit encore plus aiſé de faire voir que $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \frac{35}{128}y^8 +$ &c. Enfin il n'eſt point de quantité algébrique, quelque compliquée & embarraſſée de radicaux qu'elle ſoit, qui ne puiſſe en être délivrée en les réduiſant en ſérie par le moyen de la formule. Par exemple, s'il falloit ôter tous les radicaux

de cette expreſſion $\frac{\sqrt[5]{a+\sqrt[3]{p+q}+\sqrt[4]{a+b}}}{\sqrt[11]{(a^4+5a^4b)^3}}$, on la mettroit d'abord ſous cette forme $(a+\overline{p+q}^{\frac{1}{3}}+\overline{a+b}^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}} \cdot \overline{(a^4+5a^4b)}^{-\frac{3}{11}}$; on ajouteroit enſuite à la quantité a la ſomme des ſéries provenues de $(p+q)^{\frac{1}{3}}$ & de $(a+b)^{\frac{1}{4}}$. Cette addition faite, on éleveroit le tout à la puiſſance $\frac{1}{5}$, & multipliant la ſérie qui en réſulteroit par celle de $(a^4+5a^4b)^{-\frac{3}{11}}$ on auroit une ſeule & unique ſérie débarraſſée de tous les radicaux, ce qui eſt toujours fort commode & ſouvent néceſſaire.

309. Au reſte, on peut exprimer la formule du binome d'une maniere encore plus ſimple. En effet, de ce que $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b +$ &c....., il ſuit que $(P+PQ)^m = P^m + mP^mQ + \frac{m \cdot m-1}{2}P^mQ^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3}P^mQ^3 +$ &c. Donc ſi on repréſente par la lettre A le premier terme P^m, le ſecond ſera mAQ, & ſi le ſecond eſt repréſenté à ſon tour par la lettre B, le troiſieme ſera $\frac{m-1}{2}BQ$. Celui-ci étant repréſenté par C, le quatrieme ſera $\frac{m-2}{3}CQ$, &c. &c. On aura donc,

$$(P+PQ)^m = \overset{A}{P^m} + \overset{B}{mAQ} + \overset{C}{\frac{m-1}{2}BQ} + \overset{D}{\frac{m-2}{3}CQ} + \overset{E}{\frac{m-3}{4}}$$

DQ + &c. Or il eſt évident que cette formule eſt plus ſimple que la premiere, puiſque le cinquieme terme, par exemple, ſe trouve tout de ſuite en multipliant D terme déja calculé par $\frac{m-3}{4}$ Q, & que la quantité Q n'eſt autre choſe que le ſecond terme PQ du binome donné, diviſé par le premier terme P.

APPLICATION. On demande la quatrieme puiſſance de $2a + 3z$? Je fais $m = 4$, $P = 2a$, $PQ = 3z$, d'où $Q = \frac{3z}{2a}$. J'ai donc $P^m = 16a^4$; $mAQ = 4 \cdot 16a^4 \cdot \frac{3z}{2a} = 96a^3z$; $\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2} \cdot 96a^3z \cdot \frac{3z}{2a} = 216a^2z^2$; $\frac{m-2}{3} CQ = \frac{2}{3} \cdot 216a^2z^2 \cdot \frac{3z}{2a} = 216az^3$; $\frac{m-3}{4} DQ = \frac{1}{4} \cdot 216az^3 \cdot \frac{3z}{2a} = 81z^4$. Donc $(2a + 3z)^4 = 16a^4 + 96a^3z +$ &c.

310. Enfin pour rendre cette formule plus commode, ſuppoſons que l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever le binome $P + PQ$ ſoit $\frac{m}{n}$, & nous aurons généralement

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = \overset{A}{P^{\frac{m}{n}}} + \frac{m}{n}\overset{B}{AQ} + \frac{m-n}{2n}\overset{C}{BQ} + \frac{m-2n}{3n}\overset{D}{CQ} + \frac{m-3n}{4n}\overset{E}{DQ} + \&c.$$

APPLICATION. Il s'agit de trouver la racine cinquieme de $u^2 - z^2$, ou, ce qui eſt la même choſe, la valeur approchée de $(u^2 - z^2)^{\frac{1}{5}}$. Pour cela, je ſuppoſe $P = u^2$, $Q = -\frac{z^2}{u^2}$, $m = 1$, $n = 5$, A = le premier terme, B = le ſecond, C le troiſieme, &c. Et je trouve que $(u^2 - z^2)^{\frac{1}{5}} = u^{\frac{2}{5}} - \frac{z^2}{5u^2} A + \frac{2z^2}{5u^2} B + \frac{3z^2}{5u^2} C + \frac{7z^2}{10u^2} D + \&c. = u^{\frac{2}{5}} \left(1 - \frac{z^2}{5u^2} - \frac{2z^4}{25u^4} - \frac{6z^6}{125u^6} - \frac{21x^8}{625u^8} - \&c.\right)$. Revenons maintenant aux équations.

311. Lorſque parmi les facteurs d'une équation tranſpoſée, il n'y en a point d'imaginaires, & que ſes termes ſont précédés alternativement de ſignes différens, toutes les racines de cette équation ſont poſitives. S'ils ſont tous précédés du ſigne $+$, toutes les racines ſont négatives. *Et en général, il y a autant de racines poſitives, que de changemens de ſigne d'un terme au ſuivant, & autant de racines négatives que de répétitions immédiates du même ſigne.* C'eſt une exception fâcheuſe que celle des facteurs imaginaires. Elle met en défaut la regle précédente, lorſqu'il y a de ces facteurs; & lors même qu'il n'y en a pas, cette regle devient inutile ſi on ne le ſait pas déja.

312. *Lorſqu'une équation manque de ſecond terme, la ſomme des racines poſitives eſt égale à celle des négatives*, ſans quoi le ſecond terme, qui a pour coefficient la ſomme des unes & des autres, ne ſe feroit pas évanoui (307). Et puiſque le dernier terme eſt toujours le produit de toutes les racines, il faut en conclure *qu'il y en a au moins une égale à zéro toutes les fois que ce dernier terme manque.*

313. Cette propriété qu'a le dernier terme d'être le produit de toutes les racines, a donné lieu à une méthode pour trouver celles qui ſont commenſurables. En effet, ſi après avoir cherché tous les diviſeurs du dernier terme, on eſſaie de diviſer l'équation par l'inconnue $x \pm$ quelqu'un de ces diviſeurs, & que la diviſion réuſſiſſe, on a dès-lors un facteur de l'équation, & par conſéquent une de ſes racines. Si on diviſe, par exemple, l'équation $x^4 - ax^3 +$ &c. du n.° 307 par $x - a$, on trouvera pour quotient $x^3 -$ &c. lequel diviſé à ſon tour par $x - b$, donnera $x^2 -$ &c. & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ait trouvé tous les facteurs de l'équation $x^4 - ax^3 +$ &c.

Si on propoſoit donc de trouver ceux de l'équation $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$, dans laquelle il doit y avoir deux racines poſitives & une négative, au cas toutefois qu'il n'y en ait pas d'imaginaires (311), on commenceroit par chercher (200) tous les diviſeurs de 21, & on trouveroit ± 1, ± 3, ± 7, ± 21. On eſſaieroit enſuite la diviſion par $x + 1$, qui ne réuſſiſſant pas, feroit exclure ce diviſeur du nombre des facteurs cherchés. On eſſaieroit donc par $x - 1$, qui diviſant ſans reſte l'équation propoſée, ſeroit regardé comme un de ſes facteurs. En tâtonnant de même on trouveroit que $x - 3$ & $x + 7$ ſont les deux autres facteurs ; d'où l'on concluroit que les trois racines ſont 1, 3 & $- 7$, enſorte que l'une de ces trois valeurs indifféremment ſubſtituée dans l'équation au lieu de x, rendront ſon premier membre égal à zéro.

La pratique de cette méthode, (appellée communément la méthode des diviſeurs) n'a pas été bien longue dans cet exemple, parce que 21 ayant un petit nombre de diviſeurs, il n'y a pas eu beaucoup de diviſions à tenter. Mais lorſque le dernier terme a un grand nombre de diviſeurs, cette méthode devient fatiguante. Rebutés de ſes longueurs, les Analyſtes ont imaginé un expédient aſſez prompt pour écarter les diviſions inutiles. Voici en quoi il conſiſte.

314. Soit a l'un des diviſeurs du dernier terme, qui étant ajouté à x forme le facteur $x + a$ d'une équation quelconque. Il eſt certain que ſi dans cette équation on ſuppoſe ſucceſſivement $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, &c. les quantités dans leſquelles ſe changera le premier membre par ces différentes ſuppoſitions, ſeront ſucceſſivement diviſibles par $1 + a$, par a, par $-1 + a$, &c. dans leſquelles ſe changera le facteur $x + a$.

Or $1 + a$, a, $-1 + a$ ſont en progreſſion arithmétique. Donc aucun des diviſeurs du dernier terme, auquel ſeul l'équation ſe réduit par la ſuppoſition de $x = 0$, ne peut être le nombre cherché a, s'il n'eſt moyen proportionnel entre deux autres diviſeurs des nombres provenus, l'un de la ſuppoſition $x = 1$, l'autre de la ſuppoſition $x = -1$. Et comme la différence de cette progreſſion eſt 1, il faut que le diviſeur qui répond à la ſuppoſition $x = 0$ ſurpaſſe d'une unité le diviſeur correſpondant à la ſuppoſition $x = -1$, & ſoit ſurpaſſé à ſon tour d'une unité par le diviſeur qui répond à la ſuppoſition $x = 1$.

Si on fait enſuite, $x = 2$, $x = 3$, &c. on doit trouver parmi les diviſeurs qui en proviendront, des termes qui ſoient en progreſſion arithmétique avec les précédents. Au moyen de cette condition, il eſt aiſé de connoître les facteurs qui diviſent exactement l'équation. On voit bien au reſte que chacun des diviſeurs du dernier terme doit être pris ſucceſſivement en $+$ & en $-$.

Pour faire que qu'application de cette méthode, cherchons les racines commenſurables de l'équation $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$. Je ſuppoſe d'abord $x = 1$; le premier membre ſe réduit à 6 : ſi $x = 0$, il ſe réduit à 10 : & ſi $x = -1$, le réſultat eſt 20. Je cherche tous les diviſeurs de 6, de 10, & de 20. Enſuite, je regarde ſi parmi ceux de 10, il en eſt qui étant pris en + ou en —, ſurpaſſent d'une unité quelqu'un de ceux du nombre 20, & ſoient ſurpaſſés à leur tour de la même quantité par quelqu'un de ceux du nombre 6. Je trouve que + 2 & + 5 ont ces conditions. Car 3 & 6, diviſeurs du nombre 6 ſurpaſſent d'une unité 2 & 5, diviſeurs de 10; & ceux-ci ſurpaſſent de la même quantité 1 & 4, diviſeurs de 20. Pour plus de clarté, on peut diſpoſer ainſi les ſuppoſitions, les réſultats, les diviſeurs, & les progreſſions.

Supp.	*Réſul.*	*Div.*	*Prog.*	
$x = 1$	6	1 . 2 . 3 . 6	3	6
$x = 0$	10	1 . 2 . 5 . 10	2	5
$x = -1$	20	1 . 2 . 4 . 5 . 10 . 20	1	4

Ces deux progreſſions me font déja connoître qu'il ſeroit inutile de tenter la diviſion de l'équation propoſée par d'autre facteur que $x + 2$, ou $x + 5$. Elles ne m'apprennent pas cependant ſi ces deux facteurs réuſſiront. Je ne puis m'en aſſurer qu'en les eſſayant, ou plutôt qu'en faiſant une nouvelle ſuppoſition, par exemple $x = 2$, laquelle donne 14 pour réſultat; d'où je conclus que la premiere progreſſion 1, 2, 3 exigeant pour être continuée, que 4 ſoit un des diviſeurs de 14, ce qui n'eſt pas, $x + 2$ ne peut être un des facteurs de mon équation. Mais la progreſſion 4, 5, 6 exigeant 7 pour être continuée, & 14 étant diviſible par 7, je ſuis sûr que ſi l'équation a un facteur commenſurable, elle n'en a point d'autre que $x + 5$. Je la diviſe donc par $x + 5$, & la diviſion me réuſſit. Le quotient $x^2 - 2x + 2$ n'eſt plus que du ſecond degré, & ſes deux facteurs imaginaires $x - 1 \mp \sqrt{-1}$ ſe trouvent tout de ſuite en réſolvant l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Soit pris pour ſecond exemple, $x^4 - x^3 - 16x^2 + 55x - 75 = 0$. Je ſuppoſe $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, & j'écris comme ci-deſſus tous les diviſeurs des réſultats 36, 75 & 144 provenus de ces trois ſuppoſitions.

Supp.	*Réſul.*	*Div.*	*Prog.*			
$x = 1$	36	1.2.3.4.6.9.12.18.36	4	-2	6	-4
$x = 0$	75	1.3.5.15.25.75	3	-3	5	-5
$x = -1$	144	1.2.3.4.6.8.9.12.16.18.24.36.48.72.144	2	-4	4	-6

Je cherche enſuite parmi les diviſeurs de 75, ceux qui ſurpaſſent d'une unité quelqu'un des diviſeurs de 144, & qui ſont ſurpaſſés de la même quantité par quelqu'un de ceux de 36. Les nombres 3 & 5 pris tant en + qu'en — ont cette propriété, ce qui forme quatre progreſſions.

Pour connoître maintenant celles qu'il faut exclure, (car le dernier terme n'étant que —75, il ne peut être le produit de ces quatre nombres), je suppose $x = 2$. Le résultat est 21, qui n'est pas divisible par 5, comme la premiere progression l'exigeroit. Donc $x + 3$ n'est pas un des facteurs cherchés.

Pour vérifier les trois autres progressions, je suppose $x = -2$, ce qui donne pour résultat 225. Or 225 n'est pas divisible par 7, comme il le faudroit pour continuer la quatrieme progression, $+4$, -5, & -6 : $x - 5$ doit donc être rejetté. Mais 225 est divisible par 5 & par 3, comme la seconde & la troisieme progression l'exigent. Les seuls facteurs à essayer sont donc $x - 3$, & $x + 5$.

J'essaie le premier. Il réussit, & donne pour quotient $x^3 + 2x^2 - 10x + 25$, que j'essaie de diviser par le second. La division réussit encore, & le quotient $x^2 - 3x + 5$ n'a plus de facteurs commensurables.

On voit par ces exemples avec quelle facilité on trouve les facteurs simples d'une équation numérique, lorsqu'elle en a. La méthode en est aisée, & quoiqu'elle ne soit pas exempte de tâtonnement, elle n'en est pas moins précieuse par tous ceux qu'elle fait éviter.

Si l'équation à résoudre passoit le troisieme degré, elle pourroit bien n'être décomposable qu'en facteurs du second. Voici en peu de mots la maniere de trouver ces facteurs. On peut la voir bien détaillée dans les Elémens d'Algebre de M. *Clairaut*.

315. Si on représente par $xx + bx + c$ le diviseur à deux dimensions d'une quantité donnée, il est clair qu'en faisant successivement $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$ dans l'équation, les quantités dans lesquelles elle se changera, seront divisibles successivement par $4 + 2b + c$, par $1 + b + c$, par c, par $1 - b + c$, & par $4 - 2b + c$ que devient alors le diviseur $x^2 + bx + c$. Il y aura donc parmi les diviseurs du résultat de $x = 2$, un nombre qui représentera $4 + 2b + c$; & si de chacun de ces diviseurs pris en $+$ & en $-$ on retranche 4, quelqu'un de leurs restes représentera $2b + c$.

Il y aura aussi parmi les diviseurs du résultat de $x = 1$, un nombre qui représentera $1 + b + c$. Donc si on ôte l'unité de tous ces diviseurs pris tant en $+$ qu'en $-$, ce sera parmi ces restes que se trouvera $b + c$.

Parmi les diviseurs du dernier terme de l'équation auquel elle se réduit lorsque $x = 0$, on trouvera un nombre qui représentera c.

Parmi ceux du résultat de $x = -1$, on trouvera $-b + c$ en retranchant l'unité de chacun de ses diviseurs. Enfin on trouvera $4 - 2b + c$ dans la suite des diviseurs du résultat de $x = -2$, & si on ôte 4 de chacun de ces diviseurs pris en $+$ & en $-$, quelqu'un de leurs restes représentera $-2b + c$.

Remarquez maintenant que $2b + c$, $b + c$, c, $-b + c$, $-2b + c$ forment une progression arithmétique, & que par conséquent dans les ſuites des nombres qui repréſenteront $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$, il ne faudra prendre que des proportionnels arithmétiques. Celui qui répondra à la ſuppoſition de $x=0$, repréſentera c; celui qui répondra à $x=1$, ſera $b+c$; donc ſi l'on ôte celui qui repréſente c de celui qui repréſente $b+c$, on aura la valeur de b, & par-là, le facteur $xx+bx+c$ ſera déterminé.

Dans l'application de cette méthode, il pourra arriver qu'il y ait des progreſſions à rejetter. On le connoîtra bientôt par une nouvelle ſuppoſition, $x=3$ ou -3 : car ſi de tous les diviſeurs poſitifs & négatifs du nouveau réſultat on ôte 9, il doit y avoir parmi leurs reſtes des nombres propres à continuer les progreſſions qu'il faut admettre. Toutes celles qui ne pourront être continuées, ſont dans le cas d'être excluſes.

Remarquez ſeulement que la quantité à retrancher chaque fois des diviſeurs eſt le quarré de la valeur correſpondante de x. D'après cela, il eſt aiſé de ſaiſir l'eſprit de la méthode, & d'en faire des applications. Deux ſuffiront.

On demande ſi l'équation $x^4-3x^2-12x+5=0$ a des facteurs commenſurables du ſecond degré ?

J'écris les ſuppoſitions dans une premiere colonne, les réſultats dans la ſuivante ; la troiſieme eſt pour les diviſeurs ; la quatrieme pour leurs reſtes ; la derniere pour les progreſſions.

Supp.	*Réſul.*	*Div.*	*Q*	*Reſt.*	*Prog.*			
$x=2$	15	1.3. 5.15	4	-19,- 9,-7,-5,-3,-1,+1,+11	-3	1	—5	11
$x=1$	9	1.3. 9.	1	-10,- 4,-2,-0,+2,+8	-4	0	—2	8
$x=0$	5	1.5.	0	- 5,- 1,+1,+5	-5	-1	+1	5
$x=-1$	15	1.3. 5.15	1	-16,- 6,-4,-2,-0,+2,+4,+14	-6	-2	4	2
$x=-2$	33	1.3.11.33	4	-37,-15,-7,-5,-3,-1,+7,+29	-7	-3	7	-1

Celle des reſtes ſe forme, comme nous l'avons dit, en retranchant de tous les diviſeurs correſpondants pris en + & en — le quarré de la valeur correſpondante de x. La premiere ligne, par exemple, ſe forme en diſant, $-15-4=-19$; $-5-4=-9$; $-3-4=-7$; $-1-4=-5$. Voilà tous les reſtes des diviſeurs de 15 pris en —. Pour les trouver quand on prend ces diviſeurs en +, il n'y a qu'à dire, $+1-4=-3$; $+3-4=-1$; $+5-4=+1$; $+15-4=+11$. Les lignes ſuivantes ſe forment de même. Il n'y a que la quantité à retrancher, qui varie dans chacune.

Comparons maintenant les reſtes de la troiſieme ligne qui répond à $x=0$, avec ceux des lignes ſupérieures & inférieures, afin de trouver des progreſſions. Je vois d'abord que -5 eſt moyen proportionnel entre -4 & -3 qui ſont au-deſſus, & -6 & -7 qui ſont dans les deux dernieres lignes. J'écris cette premiere progreſſion

greſſion, & je compare ſucceſſivement -5 à tous les autres nombres ſupérieurs & inférieurs, pour ſavoir s'il n'y en a pas d'autre. Je n'en trouve point.

Je paſſe donc à -1 qui n'en donne qu'une auſſi dont la différence eſt 1. Enſuite à $+1$ qui en donne une autre dont la différence eſt 3. Enfin à $+5$ qui en donne une quatrieme. Mais il eſt bien évident que ces quatre progreſſions ne peuvent être admiſes toutes à la fois, puiſque le dernier terme de l'équation n'eſt que 5 (307).

Pour en exclure quelqu'une, je ſuppoſe $x=3$, & j'ai pour réſultat 23, dont les diviſeurs ſont 1 & 23. Souſtrayant enſuite de ces diviſeurs pris en $+$ & en $-$ le quarré de 3, je trouve ces quatre reſtes, -32, -10, -8, $+14$, parmi leſquels manquent -2 & $+2$ qui ſeroient néceſſaires pour continuer les deux premieres progreſſions. Il faut donc les rejetter.

A l'égard des deux dernieres, on voit qu'elles peuvent être continuées par -8 & par 14. Ainſi je prends dans l'avant-derniere le terme $+1$ qui répond à $x=0$, pour repréſenter c, & le terme -2 qui répond à $x=1$, pour repréſenter $b+c$. J'en conclus (315) que $b=-3$, & que par conſéquent le premier facteur à eſſayer eſt x^2-3x+1. Je l'eſſaie, & la diviſion qui réuſſit me donne pour quotient x^2+3x+5. Les deux facteurs de l'équation propoſée ſont donc x^2-3x+1, & x^2+3x+5, qu'il eſt aiſé de réſoudre ſi l'on veut par les méthodes du ſecond degré.

Soit pris pour ſecond exemple, $x^5-2x^4+x^3-5x^2-8x-2=0$. Ayant fait à l'ordinaire $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, je cherche tous les diviſeurs des réſultats 30, 15, 2, 3, & 78; le reſte s'entend aſſez par le détail ſuivant.

Supp.	*Réſ.*	*Div.*	*Q*
$x=2$	30	1.2.3. 5. 6.10.15.30	4
$x=1$	15	.3.5.15	1
$x=0$	2	1.2	0
$x=-1$	3	1.3	1
$x=-2$	78	1.2.3. 6.13.26.39.78	4

Reſtes.	*Prog.*		
-34, -19, -14, -10, -9, -7, -6, 5, -3, -2, -1, +1, +2, +6, +11, +26	-6	$+2$	6
-16, -6, -4, -2, -0, +2, +4, +14	-4	0	4
-2, -1, +1, +2	-2	-2	2
-4, -2, +0, +2	0	-4	0
-82, -43, -30, -17, -10, -7, -6, -5, -3, -2, -1, +2, +9, +22, +35, +74	$+2$	-6	-2

Des trois progreſſions que m'offre cet exemple, je vois qu'il faut rejetter les deux dernieres, en ſuppoſant $x=3$: car le réſultat 37 n'ayant pour diviſeurs que 1 & 37, il eſt clair qu'en ôtant 9 de ces deux diviseurs pris positivement & négativement, les restes -46; -10, -8, $+28$ ne permettront de continuer que la premiere progression par -8.

J'ai donc -2 pour représenter c, & -4 pour représenter $b+c$: d'où je tire $b=-2$. Ainsi, s'il y a un facteur commensurable à deux dimensions dans l'équation proposée, ce doit être x^2-2x-2, je tente donc la division, & je trouve pour quotient exact x^3+3x+1.

Ces principes suffisent pour trouver les diviseurs commensurables du premier & du second degré, dans les équations qui ne passent pas le cinquieme. Celles qui sont plus élevées pourroient bien n'être divisibles que par des facteurs du troisieme, quatrieme, &c. Mais nous ne nous arrêterons pas à expliquer la maniere de les trouver, tant à cause de la longueur des calculs, qu'à cause du peu d'utilité qui en résulte.

Nous ne nous arrêterons pas non plus à expliquer comment on décompose une equation purement algébrique en ses facteurs de deux ou de plusieurs lettres, du premier ou du second degré. Quoique fort ingénieuses, toutes ces méthodes se ressentent pourtant un peu du tâtonnement.

Maniere de transformer les Equations, & d'en faire évanouir le second terme.

316. Il est souvent utile de faire subir aux équations certains changements, de supposer, par exemple, l'inconnue égale à une autre inconnue $\pm$ une quantité indéterminée. Cette supposition facilite beaucoup en certains cas la résolution des équations.

Lorsque, par exemple, elles sont affectées de coefficients fractionnaires, comme $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{d}x+\frac{f}{g}=0$, & qu'on veut ôter toutes ces fractions, il n'y a qu'à supposer $x=\frac{y}{m}$, (y étant une nouvelle inconnue, & m une quantité que l'on déterminera par les conditions du problême). En substituant cette valeur à x, l'équation proposée deviendra $\frac{y^3}{m^3}+\frac{by^2}{am^2}+\frac{cy}{dm}+\frac{f}{g}=0$, ou $y^3+\frac{bmy^2}{a}+\frac{cm^2y}{d}+\frac{fm^3}{g}=0$. Or cette derniere équation n'aura plus de coefficients fractionnaires, si m est divisible tout à la fois par a, par d, & par g. Reste donc à trouver un nombre qui puisse être divisé exactement par les trois nombres a, d, g, ce qui eſt bien aiſé, puiſqu'il n'y a qu'à prendre pour m leur produit adg, ou même un plus petit nombre que ce produit, quand les diviſeurs ne ſont pas premiers entr'eux. Subſtituant donc adg, au lieu de m dans $y^3 + \frac{bmy^2}{a} + \&c.$ on aura l'équation $y^3 + bdgy^2 + a^2cdg^2y + a^3d^3fg^2 = 0$, où il n'y a plus de fractions.

Mais n'eſt-il pas évident que les racines de cette équation une fois trouvées, celles de $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \&c.$ ſe préſenteront d'elles-mêmes, en diviſant les premieres par m que nous venons de déterminer? Toute la difficulté conſiſte donc à trouver ces premieres racines. Pour y réuſſir, on a imaginé de faire évanouir le ſecond terme des équations à réſoudre. Voici comment on fait cette transformation. Elle nous ſervira bientôt.

317. Soit l'équation générale, $x^m \pm ax^{m-1} \pm bx^{m-2} \pm \&c.\ldots + \omega = 0$. Je ſuppoſe $x = y + f$ (y étant une autre inconnue, & f une indéterminée à laquelle on donnera telle valeur qu'il conviendra, pour faire évanouir le ſecond terme). J'ai donc la transformée,

$$\left.\begin{array}{llll} y^m + my^{m-1}f + \dfrac{m.m-1}{2}y^{m-2}f^2 & + \&c.\ldots + \omega \\ \pm ay^{m-1}f \pm \overline{m-1}\,.\,ay^{m-2}f & \pm \&c. \\ \qquad\qquad \pm \quad by^{m-2} & \pm \&c. \\ & \&c. \end{array}\right\} = 0$$

Que faut-il maintenant pour que le ſecond terme de cette équation s'évanouiſſe? Il faut que $my^{m-1}f \pm ay^{m-1} = 0$. Il faut donc qu'après avoir diviſé par my^{m-1}, & tranſpoſé, on ait $f = \mp \frac{a}{m}$. Ce qui nous fait voir d'une maniere générale, que *pour chaſſer le ſecond terme d'une équation quelconque, il n'y a qu'à ſuppoſer ſon inconnue égale à une autre inconnue moins ou plus le coefficient du ſecond terme de cette équation diviſé par le nombre qui en exprime le degré.* On met moins, lorſque le ſecond terme eſt poſitif; & plus, quand il eſt négatif.

Toute équation du ſecond degré ſemblable à celle-ci $x^2 + ax = b$ ſe réſout promptement par cette transformation, en faiſant $x = y - \frac{a}{2}$, & en ſubſtituant. Nous ne nous y arrêterons pas. Soit donc $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, que l'on voudroit changer en une équation équivalente, dans laquelle il n'y eut plus de ſecond terme.

Pour cela, je ſuppoſe $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$; & ſubſtituant, il vient $y^3 * - 8y - 15 = 0$, qui n'a pas de ſecond tarme, c'eſt-à-dire, de y^2 dans cet exemple.

Pour transformer $x^4 + 2x^3 - 4 = 0$, je fais $x = y - \frac{2}{4} = y - \frac{1}{2}$. & j'ai $y^4 - \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{67}{16} = 0$, dont le second terme est évanoui. On transformeroit $z^5 + az^4 - bz^2 + cz + d = 0$, en supposant $z = x - \frac{a}{5}$; & ainsi des autres.

La même méthode serviroit également à faire évanouir le troisieme terme d'une équation quelconque ; car en remontant à la transformée générale $y^m + my^{m-1}f +$ &c. il n'y auroit qu'à supposer $\frac{m.m-1}{2} y^{m-2}f^2 \pm m-1 . ay^{m-2}f \pm by^{m-2} = 0$. On trouveroit $f = \mp \frac{a}{1} \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} \mp \frac{2b}{m.m-1}}$. Mais comme la substitution de cette valeur de f introduiroit des radicaux dans la transformée, on aime mieux ne faire évanouir que le second terme. Le calcul deviendroit encore plus compliqué, si on vouloit faire évanouir le quatrieme ou le cinquieme, &c.

Résolution des Equations du troisieme degré.

318. Pour résoudre une équation du troisieme degré, on commencera par en faire évanouir le second terme, ce qui la réduira à une équation de cette forme $x^3 + px + q = 0$. On supposera ensuite $x = y + z$, & on déterminera les valeurs de ces nouvelles inconnues de la maniere suivante.

Par la substitution de $y + z$ à la place de x dans l'équation $x^3 + px + q = 0$, elle deviendra $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0$; & si on suppose, comme on en est bien le maître, que $y^3 + z^3 + q = 0$, il ne restera que $3y^2z + 3yz^2 + py + pz = 0$, ou même que $3yz + p = 0$ (en divisant par $y + z$), ce qui donne $y = \frac{-\frac{1}{3}p}{z}$.

Substituons cette valeur de y dans $y^3 + z^3 + q = 0$, nous aurons $z^3 - \frac{\frac{1}{27}p}{z^3} + q = 0$, ou $z^6 + qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$: équation du sixieme degré, mais qui se résout par les méthodes du second, & qui donne $z^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$. D'où $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Maintenant de $y^3 + z^3 + q = 0$, on peut tirer $y^3 = -z^3 - q = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$. Donc $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Donc $y+z$, ou $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ $=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$. Car la premiere expression se réduit dans les deux cas à la derniere.

319. A la vue de cette valeur générale de x, on ne croiroit pas d'abord qu'il fut possible d'en tirer trois pour satisfaire à l'équation $x^3+px+q=0$. Mais si l'on divise cette équation par la valeur générale transposée dans un seul membre, on verra bientôt qu'elle se réduit à une équation du second degré, laquelle à son tour se décomposera facilement en ses deux facteurs.

Soit en effet substitué dans l'équation $x^3+px+q=0$, $-3yz$ au lieu de p, $\left(\text{puisqu'on a trouvé } y=\frac{-p}{3z}\right)$; & $-y^3-z^3$ au lieu de q, (puisqu'on a supposé $y^3+z^3+q=0$). Soit aussi substitué dans la valeur générale de x, y au lieu de $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, & z au lieu de $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$. L'équation deviendra $x^3-3yzx-y^3-z^3=0$; & la valeur générale transposée donnera $x-y-z=0$.

Divisons à présent l'équation par la valeur. Nous trouverons pour quotient exact, $x^2+xy+xz+y^2-yz+z^2=0$, équation du second degré, qui donnera pour les deux autres valeurs de l'inconnue, $x=\left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)y-\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)z$; & par conséquent $x=\left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$. Or cette derniere formule donne deux valeurs imaginaires de x, toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle. reste donc à savoir ce que deviennent ces valeurs, lorsque $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ est imaginaire, où, ce qui revient au même, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif & plus grand que $\frac{1}{4}q^2$.

Je suppose, pour abréger, que la valeur générale de x soit exprimée par $\sqrt[3]{-f+g\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-f-g\sqrt{-1}}$, ce qui donne $f=\frac{1}{2}q$, & $g\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$. J'ai donc $x=(-f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$; & réduisant en série la premiere partie de cette valeur, j'ai $(-f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=-f^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{-1}-\frac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g^2-\frac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g^3\sqrt{-1}+\frac{10}{242}f^{-\frac{11}{3}}g^4+$ &c.. Réduisant aussi la seconde, je trouve $(f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=f^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{-1}+\frac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g^2-\frac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g\sqrt{-1}-\frac{10}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^4+$ &c. Donc $(-f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-(f+g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, ou $x=-2f^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{9g^2}{f^2}-\frac{10g^4}{243f^4}+\frac{154g^6}{6561f^6}-\text{\&c.}\right)$, expression qui ne contient aucun terme imaginaire.

Et si nous reprenons les deux autres valeurs de $x=\left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, ou $x=\left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)\sqrt[3]{-f+g\sqrt{-1}}+\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}}$, nous aurons $x=f^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{g^2}{9f^2}-\frac{10g^4}{243f^4}+\frac{154g^6}{6561f^6}-\text{\&c.}\right)$

$$\pm\frac{g}{f^{\frac{2}{3}}\sqrt{-3}}\left(-1\frac{5g^2}{27f^2}+\frac{22g^4}{243f^4}-\frac{374g^6}{6561f^6}+\text{\&c.}\ldots\right),$$

nouvelle expression qui n'a point de terme imaginaire. *Lors donc que $\frac{1}{27}$ p³ est négatif & plus grand que $\frac{1}{4}$ q², les trois valeurs de x sont toujours réelles, encore qu'elles se présentent sous une forme imaginée.*

Il n'y a guere d'effort que l'on n'ait fait pour déterminer ces trois valeurs réelles autrement que par des séries: mais on n'a pu en venir à bout. La difficulté attachée à ce cas lui a fait donner le nom de *cas irréductible.*

320. Cependant quoique la valeur générale de x contienne alors des imaginaires ; on peut en déduire les trois valeurs de x, lorsqu'une de ces valeurs ou toutes les trois sont des nombres entiers. Voici comment. Les trois valeurs de x sont exprimées à la fois par la formule $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$; il est donc nécessaire que cette formule se réduise à un nombre entier, lorsqu'une des valeurs de x est un nombre entier. Or elle ne peut s'y réduire qu'autant que $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ est un cube parfait, dont la racine est composée d'une partie réelle que j'appelle m, & d'une partie imaginaire n. C'est donc-à-dire que $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = m + n$, & que par conséquent $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = m - n$. Donc $x = 2m$.

Donc lorsque dans le cas irréductible une des valeurs de x est un nombre entier, on trouvera exactement cette valeur en doublant la partie réelle de la racine cube de $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$. Et parce que $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ a trois racines cubes (337), il est clair que pour avoir les trois valeurs de x dans ce cas, il suffit de prendre le double des trois parties réelles de ces racines.

Soit pris pour exemple, $x^3 - 39x - 70 = 0$, qui étant comparée à $x^3 + px + q = 0$, donne $p = -39$, $q = -70$. Donc (320) $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = 35 + 18\sqrt{-3}$. Mais $35 + 18\sqrt{-3}$ a (338) pour ses trois racines cubes $-1 - 2\sqrt{-3}$; $\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$; $-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{-3}$; dont les parties réelles sont -1, $\frac{7}{2}$, $-\frac{5}{2}$. Les trois valeurs de x sont donc -2, $+7$, -5.

Soit encore $x^3 - 17x - 4 = 0$; d'où $p = -17$, $q = -4$, & $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = 2 + \frac{31}{3}\sqrt{-\frac{5}{3}}$. Les trois racines cubes de cette derniere quantité sont $-2 + \sqrt{-\frac{5}{3}}$; $1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \sqrt{-\frac{41}{12} + \sqrt{5}}$; $1 - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \sqrt{-\frac{41}{12} - \sqrt{5}}$. Donc les trois racines cherchées sont -4, $2 + \sqrt{5}$, $2 - \sqrt{5}$. D'ou l'on voit qu'il est inutile de chercher les parties imaginaires des trois racines cubes de $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$, quand on en connoît une fois les parties réelles.

Si p est positif, ou si étant négatif, il est tel que $\frac{1}{27}p^3$ soit moindre que $\frac{1}{2}q^2$, alors une des trois valeurs de x est réelle, & les deux autres sont imaginaires. Ainsi *toute équation du troisieme degré a au moins une racine réelle.*

Appliquons maintenant ces principes à un ou deux exèmples, & d'abord proposons nous de trouver les trois racines de l'équation $y^3 - 3y^2 + 12y - 4 = 0$.

Je fais $y = x + 1$, & le second terme disparoît dans la transformée $x^3 + 9x + 6 = 0$, qui étant comparée à $x^3 + px + q = 0$, donne $p = 9$, $q = 6$. Et parce que p se trouve ici positif, j'en conclus que des trois racines que je cherche, une seule est réelle. Pour la trouver, je substitue les valeurs de p & de q dans la formule générale $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\&c.}} \ldots + \sqrt[3]{\&c.} \ldots$ & j'ai $x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3}(1 - \sqrt[3]{3})$. Donc $x + 1$ ou $y = 1 + \sqrt[3]{3}(1 - \sqrt[3]{3})$. C'est la valeur réelle de y. Il est aisé de trouver ses deux valeurs imaginaires.

Proposons-nous ensuite l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$, qui donne $p = -3$, & $q = -18$. Or quoique p soit négatif ici, il est tel cependant que $\frac{1}{27}p^3$ est moindre que $\frac{1}{4}q^2$. La proposée a donc une racine réelle & deux imaginaires. La premiere est $x = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 3$. Les deux autres ne sont pas difficiles à trouver.

Dans ce dernier exemple, il eût été plus simple de chercher les diviseurs commensurables de la proposée $x^3 - 3x - 18 = 0$. C'est même, en général, ce qu'on doit faire lorsqu'on a une équation du troisieme degré à résoudre, sur-tout lorsque cette équation est dans le cas irréductible. Au défaut de ces diviseurs, on peut avoir recours à une méthode d'approximation que nous expliquerons dans peu. On peut aussi se servir des séries trouvées ci-dessus; mais elles sont ordinairement si peu convergentes, que pour en tirer des valeurs suffisamment exactes, il faut en calculer un grand nombre de termes, ce qui devient fort long.

Résolution des Equations du quatrieme degré.

321. Une équation du quatrieme degré étant proposée à résoudre, on commencera par en faire évanouir le second terme, ce qui la changera en une autre de cette forme $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Ensuite, on regardera la transformée comme le produit de deux équations du second degré chacune, telles que $x^2 + zx + y = 0$, & $x^2 - zx + f = 0$. On suppose que z, y, & f sont des indéterminées. D'ailleurs le second terme de ces équations est le même aux signes près, afin que leur produit puisse donner une équation qui n'ait pas de second terme. Ce produit en effet donne . . . . .

$x^3 +$

$$\begin{aligned} x^4 &+ fx^2 + fzx + fy = 0 \\ &- z^2 - yz \\ &+ y \end{aligned}$$

Or de cette équation comparée terme à terme avec $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, on tire $p = f - z^2 + y$, $q = (f - y)z$, $r = fy$. La premiere de ces valeurs donne $f + y = p + z$, & la seconde, $f - y = \frac{q}{z}$. Donc $f = \frac{p + z^2}{2} + \frac{q}{2z}$; $y = \frac{p + zz}{2} - \frac{q}{2z}$; & par conséquent fy ou $r = \frac{(p + z^2)^2}{4} - \frac{q^2}{4z^2}$ d'où l'on tire $z^6 + 2pz^4 \begin{matrix} + p^2 z^2 \\ - 4r \end{matrix} - q^2 = 0$, équation du sixieme degré, mais qui n'a d'autre difficulté que celle du troisieme, en faisant $z^2 = u$ On appelle cette équation *la Réduite*, parce que ses racines une fois trouvées, on ne tarde pas à connoître celles de la proposée $x^4 + px^2 +$ &c.

Effectivement, si dans les équations $x^2 + zx + y = 0$ . . . . . . & $x^2 - zx + f = 0$ on substitue pour f & y leurs valeurs en z, & qu'ensuite on résolve ces équations, on aura pour la premiere, $x = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}}$, & pour la seconde, $x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}}$. Réunissant donc ces deux formules on aura $x = \pm\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2z}}$, d'où l'on tire les quatre valeurs cherchées de x, dans lesquelles il n'y a plus qu'à substituer la valeur de z que donne la Réduite. Ces quatre valeurs sont,

$$x = \frac{1}{2}z + \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}}$$

$$x = \frac{1}{2}z - \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}}$$

$$x = -\frac{1}{2}z + \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}}$$

$$x = -\frac{1}{2}z - \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}}$$

D'où il suit, en général, que les racines d'une équation du quatrieme degré ſont toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires, ou que deux étant réelles, les deux autres ſont imaginaires. Il ne peut jamais y avoir un nombre impair des unes ni des autres, parce que ſi des quatre valeurs précédentes de x, trois par exemple ſont réelles, la quatrieme doit néceſſairement l'être auſſi, & s'il y en a trois d'imaginaires, il faut abſolument que la quatrieme le ſoit.

322. Suppoſons, pour abréger, $a=\frac{1}{2}z$, $b=\sqrt{-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2z}}$, $c=\sqrt{-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2z}}$, & nous aurons $x=a+b$, $x=a-b$, $x=-a+c$, $x=-a-c$, ou bien en tranſpoſant, $x-a-b=0$, $x-a+b=0$, $x+a-c=0$, $x+a+c=0$. Multipliant ces quatre équations les unes par les autres, nous trouverons,

$$\begin{array}{llll} x^4 & -2a^2x^2 & +2ac^2x & +a^4=0 \\ & -b^2 & -2ab^2 & -a^2b^2 \\ & -c^2 & & -a^2c^2 \\ & & & +b^2c^2 \end{array}$$

équation qui eſt préciſément la même que $x^4+px^2+qx+r=0$, & qui donne $p=-2a^2-b^2-c^2$, $q=2ac^2-2ab^2$, $r=a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2$. Subſtituant ces valeurs de p, q, r dans la Réduite z^6+ &c. elle deviendra, ...

$$\begin{array}{llll} z^6 & -4a^2z^4 & +8a^2b^2z^2 & +8a^2b^2c^2=0. \\ & -2b^2 & +8a^2c^2 & -4a^2b^4 \\ & -2c^2 & +b^4 & -4a^2c^4 \\ & & -2b^2c^2 & \\ & & +c^4 & \end{array}$$

Or les trois facteurs de cette derniere équation ſont z^2-4a^2, $z^2-b^2-2bc-c^2$, $z^2-b^2+2bc-c^2$. D'où il ſuit.

1.° Que la Réduite conſidérée comme une équation du troiſieme degré n'a qu'une racine réelle, toutes les fois que l'une des deux quantités b & c eſt imaginaire, ou ce qui revient au même, toutes les fois que l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$ a deux racines réelles & deux imaginaires. On peut donc avoir dans ce cas la ſolution exacte de la Réduite, & par conſéquent celle de la propoſée.

323. 2.° Que ſi b & c ſont toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires, c'eſt-à-dire, ſi la propoſée x^4+px^2+ &c. a ſes racines ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, alors la Réduite conſidérée encore comme du troiſieme degré eſt dans le cas irréductible; elle a ſes trois racines réelles. Et ſi ces trois racines ſont toutes poſitives, l'équation propoſée a ſes quatre racines

réelles. Car alors, $2a$, $b + c$, $b - c$ ſont des quantités réelles. Soit donc la premiere $=$ M, la ſeconde N, & la troiſieme P, on aura $2b = N + P$, & $2c = N - P$. Donc $2a + 2b = M + N + P$, $2a - 2b = M - N - P$, $-2a + 2c = N - P - M$, $-2a - 2c = P - N - M$, & puiſque $2a + 2b$, $2a - 2b$, $-2a + 2c$, $-2a - 2c$, ſont les quatre valeurs de $2x$, il eſt clair que les quatre valeurs de x ſont toutes réelles dans ce cas.

Mais ſi la Réduite n'a qu'une de ſes racines poſitive, toutes celles de la propoſée ſont imaginaires. Suppoſons en effet que $z^2 - 4a^2$ ſoit la ſeule racine poſitive de la Réduite, nous aurons $2a = M$ quantité poſitive, $b + c = N\sqrt{-1}$, & $b - c = P\sqrt{-1}$: d'où $b = \frac{1}{2}N\sqrt{-1} + \frac{1}{2}P\sqrt{-1}$, & $c = \frac{1}{2}N\sqrt{-1} - \frac{1}{2}P\sqrt{-1}$. Donc puiſque b & c entrent dans les quatre valeurs de x, ces quatre valeurs doivent être imaginaires.

Si l'une des deux autres racines de la Réduite eût été ſuppoſée poſitive, $2a$ eût été imaginaire, & par conſéquent les quatre valeurs de x qui renferment toutes la quantité a euſſent encore été imaginaires. La réſolution des équations du quatrieme degré a donc alors le même inconvénient que celle du troiſieme dans le cas irréductible.

Pour faire quelqu'application de ces principes, cherchons les racines de l'équation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$. On a $p = -3$, $q = -42$, $r = -40$, ce qui change la Réduite en $z^6 - 6z^4 + 169z^2 - 1764 = 0$. Or cette équation traitée à la maniere de celles du troiſieme degré, en faiſant $z^2 = u + 2$ devient $u^3 + 157u - 1442 = 0$, & comme celle-ci n'a qu'une racine réelle, j'en conclus que la propoſée en a deux, & que les deux autres ſont imaginaires. Pour les trouver, je réſous d'abord l'équation $u^3 + 157u - 1442 = 0$, & j'ai $u = 7$. Donc $\pm\sqrt{u + 2}$, ou $z = \pm 3$. En ſubſtituant l'une de ces deux valeurs dans la formule générale $x = \pm\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2z}}$, je trouve les quatre valeurs ſuivantes $x = 4$, $x = -1$, $x = -\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{-31}$. Ce ſont les quatre racines cherchées. La méthode des diviſeurs m'auroit donné le même réſultat.

S'il falloit trouver les racines de $x^4 + 3x^2 + 2x - 5 = 0$, je ferois d'abord $p = 3$, $q = 2$, $r = -5$, & la Réduite $z^6 + 2pz^4 +$ &c. ſe changeroit en $z^6 + 6z^4 + 29z^2 - 4 = 0$. Je ferois enſuite $z^2 = u - 2$, ce qui transformeroit la Réduite en $u^3 + 17u - 46 = 0$, équation qui n'ayant qu'une racine réelle, m'apprendroit que la propoſée en a deux, & que les deux autres ſont imaginaires. Je les chercherois donc en réſolvant cette équation $u^3 + 17u - 46 = 0$, par la formule générale du troiſieme degré. Cette formule donne $u = \sqrt[3]{23 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}}} +$

$\sqrt[3]{23-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}}}$. Donc $\pm\sqrt{u-2}$, ou $z=\pm$ ....

$\sqrt{-2+\sqrt[3]{23+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}}}+\sqrt[3]{23-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}}}}$. Et substituant cette valeur de z dans la formule générale $x=\pm\frac{1}{2}z\pm\sqrt{-\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2z}}$, je trouve pour les quatre racines de la proposée,

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2+\sqrt[3]{23+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}}}+\sqrt[3]{23-\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}}}}$$

$$\pm\sqrt{-1-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{23+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}}}-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{23-\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}}}\mp\ldots\frac{1}{\sqrt{-2+\sqrt[3]{23+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}}}+\sqrt[3]{23+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}}}}}}$$

Expression fort compliquée, dans laquelle pourtant les deux racines imaginaires se reconnoissent facilement. Il ne faut, pour les avoir, que prendre le signe $-$ dans la quantité $\mp\frac{1}{\sqrt{-2+\sqrt[3]{23+\&c.}}}$

324. Remarquez que si les quatre racines d'une équation du quatrieme degré étoient réelles, on les trouveroit sans peine toutes les fois que la Réduite auroit un nombre entier pour l'une de ses racines. Il n'y auroit alors qu'à se servir de la méthode qui nous a fait trouver les trois racines réelles d'une équation du troisieme degré dans le cas irréductible, lorsque l'une de ces racines étoit un nombre entier.

Exemple. On demande les quatre racines réelles de l'équation $x^4-25x^2+60x-36=0$. En comparant terme à terme les coefficients de cette équation à ceux de l'équation générale x^4+px^2 &c. on a $p=-25$, $q=60$, $r=-36$, ce qui change la Réduite en $z^6-50z^4+769z^2-3600=0$. Je fais $z^2=\frac{u+50}{3}$, & non

$z^2 = u + \frac{50}{3}$, afin d'éviter les fractions. J'ai $u^3 - 579u - 1150 = 0$. Je résous cette transformée (118). Ses racines sont $u = 25$, $u = -2$, $u = -23$. Donc $\pm\sqrt{\frac{u + 50}{3}}$, ou $z = \pm 5$, ou bien ± 4, ou encore ± 3. Et si je substitue l'une quelconque de ces valeurs de z dans la formule $x = \pm\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2z}}$, je trouverai également les quatre valeurs suivantes, $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = -6$.

On a dans cet exemple six différentes valeurs de z, & la raison en est bien simple. C'est qu'une équation du quatrieme degré pouvant être regardée comme le produit de quatre facteurs du premier, $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, elle est divisible par six facteurs du second. Voici ces facteurs, $(x+a)(x+b)$, $(x+a)(x+c)$, $(x+a)(x+d)$, $(x+b)(x+c)$, $(x+b)(x+d)$, $(x+c)(x+d)$. Et comme ils ont chacun un second terme dont le coefficient est généralement représenté par z, il est clair que z doit avoir six différentes valeurs. Voilà pourquoi l'équation en z est du sixieme degré.

Mais parce que la proposée manque de second terme, il faut bien que si une des valeurs de z est exprimée par g, une autre le soit par $-g$. Donc $z^2 - g^2$ doit être un des facteurs de la Réduite. Donc si les quatre autres valeurs de z sont exprimées par h, $-h$, i, $-i$, la Réduite doit avoir, $z^2 - h^2$, & $z^2 - i^2$ au nombre de ses facteurs. Non seulement donc elle doit être du sixieme degré, mais encore elle ne doit avoir que des puissances paires, comme elle les a en effet.

Autre Ex. On voudroit avoir les quatre racines de l'équation $x^4 - 20x^2 - 12x + 13 = 0$ qui donne $p = -20$, $q = -12$, $r = 13$, & pour Réduite, $z^6 - 40z^4 + 348z^2 - 144 = 0$. Soit donc $z^2 = \frac{u + 40}{3}$, la transformée sera $u^3 - 1668u - 6608 = 0$, dont les racines sont $u = -4$, $u = 2 \pm 6\sqrt{46}$. Substituant ces valeurs de u dans l'équation $z = \pm\sqrt{\frac{u+40}{3}}$, on aura $z = \pm 2\sqrt{3}$, $z = \pm\sqrt{14 \pm 2\sqrt{46}}$ & substituant celle des valeurs de z que l'on voudra, la premiere par exemple, dans la formule $x = \pm\frac{1}{2}z \pm$ &c. on trouvera $x = \sqrt{3} + \sqrt{7 + \sqrt{3}}$, $x = \sqrt{3} - \sqrt{7 + \sqrt{3}}$, $x = -\sqrt{3} + \sqrt{7 - \sqrt{3}}$, $x = -\sqrt{3} - \sqrt{7 - \sqrt{3}}$.

Des Équations plus élevées que celles du quatrieme degré.

325. Après avoir résolu les équations du troisieme & du quatrieme degré, il nous resteroit à indiquer les moyens de résoudre celles des degrés plus élevés. Mais les méthodes générales nous manquent, & ce défaut joint aux exceptions nombreuses du cas irréductible, fait presque désespérer de la perfection de cette théorie. Voici cependant deux méthodes qui pourront être utiles.

La premiere sert à trouver les équations plus simples dont une équation composée est le produit. Si une équation du sixieme degré, par exemple, est le produit des deux équations du troisieme, cette méthode apprendra à trouver ces deux équations. On appelle *Réductibles* toutes les équations qui peuvent être ainsi décomposées en d'autres équations plus simples. Celles qui échappent à cette décomposition s'appellent *Irréductibles*. Quand on en trouve, il faut avoir recours à la seconde méthode qui apprend à trouver des racines approchées. Les Analystes l'ont retournée de bien des façons, & il faut avouer que leurs travaux sur les approximations ont eu beaucoup de succès.

326. PREMIERE MÉTHODE. Pour savoir si une équation proposée $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} +$ &c. . . . $+ \omega = 0$ peut être divisée sans reste par une équation du degré n, on supposera que la proposée est le produit de ces deux équations, $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} +$ &c... $+ T = 0$, & $x^{m-n} + px^{m-n-1} + qx^{m-n-2} +$ &c. . . . . $+ t = 0$, dont tous les coefficients sont indéterminés. On prendra ensuite le produit de ces deux équations, qui en donneront une du degré m, dont on comparera les termes avec ceux de la proposée, afin d'avoir les équations nécessaires pour déterminer les coefficiens A, B, C &c. p, q, r, &c. Enfin on réduira toutes ces équations à une seule, qui ne renferme plus que l'une quelconque des indéterminées A, B, C &c. ou p, q, r, &c. Il ne s'agira plus alors que de chercher les diviseurs commensurables de cette équation. (Elle doit en avoir puisque tous ces coefficients sont des nombres entiers); & on aura la valeur de ces coefficients, ce qui rendra déterminées les équations qui les renferment.

APPLICATIONS. On demande si l'équation $x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 15 = 0$ ne pourroit pas se décomposer en deux autres, chacune du second degré?

Je suppose que cette équation est le produit des deux équations indéterminées $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + mx + n = 0$, que je multiplie l'une par l'autre. Le produit est . . . .

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + px^3 & + qx^2 & + mqx & + nq = 0. \\ & + m & + mp & + np & \\ & & + n & & \end{array}$$

Je le compare à la proposée, & j'ai $p+m=1$, $q+mp+n=2$, $mq+np=-1$, $nq=15$. Or ces quatre équations réduites à une seule, dont q soit l'inconnue, donnent $q^6-2q^5-16q^4+44q^3-240q^2-450q+3375=0$. Les diviseurs commensurables de cette équation sont $q-3$ & $q-5$. Donc q peut être supposé égal à 3 ou à 5, & par conséquent $n=5$ ou 3, $p=-2$ ou $+3$, $m=3$ ou -2. Les deux facteurs cherchés sont donc $x^2-2x+3=0$, & $x^2+3x+5=0$.

On demande aussi si l'équation $x^6-7x^4+8x^3+2x+1=0$ peut se décomposer en deux facteurs du troisieme degré?

Supposons, pour le savoir, que cette équation est le produit de $x^3+px^2+qx+r=0$ par $x^3+fx^2+mx+n=0$. Il est clair que le second terme devant manquer dans ce produit, f doit être $=-p$. Il est clair aussi que le produit de n par r devant être $=1$, on a $n=\pm 1$ & $r=\pm 1$. Servons nous d'abord de leur valeur positive, & substituons-la dans les facteurs indéterminés x^3+px^2 &c. Ils deviendront $x^3+px^2+qx+1=0$ & $x^3-px^2+mx+1=0$. Leur produit sera . . . .

$$\begin{array}{llllll} x^6 & +qx^4 & -2x^3 & +mqx^2 & +mx+1=0; \\ & -pp & -pq & & +q \\ & +m & +mp & & \end{array}$$

lequel étant comparé à la proposée, donne $q+m=pp-7$, $2-pq+mp=8$, $mq=0$, $m+q=2$. Egalant les deux valeurs de $q+m$ tirées de la premiere & de la derniere équation, nous aurons $pp=9$, d'où $p=\pm 3$; & par conséquent $m=1\pm 1$, $q=1\mp 1$. C'est-à-dire, que si $p=+3$, on a $m=2$ & $q=0$: si $p=-3$, on aura $m=0$ & $q=2$. Les deux facteurs cherchés sont donc $x^3+3x^2+1=0$, & x^3-3x^2+2x+1 dans les deux cas.

Prenons maintenant la valeur -1 de n & de r, & substituons-la dans les facteurs indéterminés x^3+px^2+ &c. Leur produit alors sera . . . . $x^6+(q-pp+m)x^4+(pm-pq-2)x^3+mqx^2-x(m+q)+1=0$. D'où $q+m=pp-7$, $p(m-q)=10$, $mq=0$, $m+q=-2$; & par conséquent $pp-7=-2$, ou $p=\pm\sqrt{5}$. D'ailleurs $mq=0$ & $m+q=-2$; donc $q=0$, ou $q=-2$, & $m=-2$ ou 0. Mais comme ces valeurs substituées dans la seconde équation $p(m-q)=10$ donnent $2\sqrt{5}=10$, ce qui est absurde, il faut en conclure que l'équation proposée n'est divisible par aucune équation du troisieme degré dont le dernier terme soit -1.

327. SECONDE MÉTHODE. Quand on a épuisé les moyens qui tendent directement à trouver les racines exactes, on a recours à ceux qui en donnent d'approchées. Celui qui suit nous a paru un des meilleurs. Pour le faire mieux comprendre, nous l'appliquerons à un exemple.

Soit $x^3 - 4x - 2 = 0$, équation qui est dans le cas irréductible (319) & dont on demande les racines approchées.

Je commence par supposer successivement $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, &c. La premiere de ces suppositions réduit la proposée au dernier terme $- 2$ qui ne peut être égal à zéro, x doit donc être quelque chose de réel. La seconde supposition donne pour résultat $- 5$; celui de la troisieme est encore $- 2$: ces valeurs de x ne sont donc pas assez grandes. Je suppose $x = 3$; l'équation devient $+ 13 = 0$; d'où je conclus que la valeur de x est entre 2 & 3. Cela posé,

J'appelle d la fraction qu'il faut ajouter à 2 pour avoir une valeur approchée de x. j'ai donc $x = 2 + d$, & faisant $a = 2$, $x = a + d$. Je substitue cette derniere valeur dans l'équation $x^3 - 4x - 2 = 0$. Elle devient en transposant, $d^3 + 3ad^2 + (3a^2 - 4)d = 4a + 2 - a^3$, & en négligeant a^3 qui est une fort petite quantité, il reste $3ad^2 + (3a^2 - 4)d = 4a + 2 - a^3$. Cette équation résolue donne $d = \dfrac{4 - 3a^2 + \sqrt{16 + 24a + 24a^2 - 3a^4}}{6a}$. Donc $a + d$ ou $x = \dfrac{3a^2 + 4 + \sqrt{16 + 24a + 24a^2 - 3a^4}}{6a}$, & puisqu'ici $a = 2$, j'ai $x = \dfrac{4 + \sqrt{7}}{3} = 2,21$.

S'il falloit une valeur plus approchée, je prendrois 2, 21 pour a, & pour les nouvelles décimales la quantité d, ensorte que $x = a + d$ seroit l'expression algébrique de $x = 2,21 +$ les décimales que je cherche. Cette expression, je la substituerois dans la proposée, & je retrouverois la même équation que ci-dessus, en négligeant d^3 qui à présent est bien plus négligeable qu'auparavant. J'aurois donc la même formule pour la valeur de x dans laquelle substituant 2, 21 au lieu de a, le résultat seroit $x = 2,21432$, valeur plus exacte que la premiere.

S'il falloit encore une plus grande exactitude, on se la procureroit en prenant pour a la valeur 2, 21432, & pour d les nouvelles décimales cherchées, après quoi on détermineroit d par la formule, & on ne tarderoit pas à trouver pour x une valeur beaucoup plus approchée que les deux autres. La même méthode serviroit à approcher de plus en plus de la vraie valeur de x, s'il en étoit besoin.

328. Quand on a une des racines de l'équation proposée, il faut diviser l'équation par la racine déja trouvée. Cette division faite avec d'autant plus d'exactitude que la valeur de x sera plus approchée, abaissera l'équation d'un degré; & si on a le temps & la patience

tience de traiter l'équation abaissée comme la proposée, & ainsi de suite, on parviendra enfin à connoître toutes les valeurs de x.

Prenons pour second exemple l'équation $x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 5x - 116 = 0$, qui échappe à la résolution de celles du quatrieme degré, & cherchons-en une racine approchée.

En donnant successivement à x les valeurs que l'on voit ici, l'équation se réduit aux quantités qui sont vis-à-vis. Les six premieres font voir clairement que x doit être au-dessus de 5. La derniere indique que x est moins que 6. Sa vraie valeur est donc entre 5 & 6. Pour la trouver, je suppose $x = 5 + d = a + d$, & je substitue cette valeur dans la proposée. Cette substitution donne, en rejettant les termes affectés de d^3 & de d^4, $(6a^2 + 6a - 36)\,d^2 + (4a^3 + 6a^2 - 72a + 5)\,d = 36a^2 - 5a - 2a^3 - a^4 + 116$. Je résous cette équation, & j'ai $d = \ldots\ldots\ldots$

$$
\begin{array}{ll}
 & \textit{Suppos.} \qquad\qquad \textit{Résult.} \\
x \left\{ \begin{array}{l} = 0 \\ = 1 \\ = 2 \\ = 3 \\ = 4 \\ = 5 \\ = 6 \end{array} \right. &
\begin{array}{r} \ldots\ldots - 116 \\ \ldots\ldots - 144 \\ \ldots\ldots - 218 \\ \ldots\ldots - 290 \\ \ldots\ldots - 288 \\ \ldots\ldots - 116 \\ \ldots\ldots + 346 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}} \right\} = x^4 + \&c.
\end{array}
$$

$$
\frac{36a - 3a^2 - 2a^3 - \frac{5}{2} + \sqrt{-2a^6 - 6a^5 + 105a^4 + 52a^3 + 681a^2 + 696a - \frac{16679}{4}}}{6a^2 + 6a - 36}
$$

Il ne reste plus qu'à mettre 5 au lieu de a dans cette valeur de d, pour avoir $x = 5,337$. Si l'on veut une racine plus approchée, il n'y a qu'à substituer 5,337 à la place de a dans la même formule de d. Le résultat du calcul sera $x = 5,335438$, valeur beaucoup plus exacte que la premiere. Elle le deviendroit encore davantage en répétant le même procédé.

On trouveroit les racines négatives en substituant $0, -1, -2$, &c. au lieu de x. Les résultats feroient connoître par le changement de signe entre quels nombres négatifs est la valeur cherchée, & on en approcheroit ensuite, autant qu'on le jugeroit à propos.

329. Mais lorsqu'après les substitutions des nombres positifs & négatifs compris entre zéro & le dernier terme de l'équation, on ne trouve aucun changement de signe il faut en conclure que les racines sont égales deux à deux, ou quatre à quatre, &c. ou bien qu'elles sont toutes imaginaires, ou enfin qu'elles sont en partie égales deux à deux & en partie imaginaires.

On voit bien en effet que si les racines sont égales deux à deux, quatre à quatre, &c. comme dans ces équations, $x - a)^2 (x - b)^2 = 0$, $(x - a)^2 (x - b)^2 (x - c)^4 = 0$, &c. les résultats doivent toujours être positifs quelque valeur que l'on prenne pour x. On voit bien aussi que si toutes les racines sont imaginaires, les signes ne doivent jamais changer ; puiſque s'ils changeoient, la valeur de x ſe trouvant alors entre deux nombres réels, ne ſeroit plus imaginaire. On voit enfin que ſi les racines ſont en partie égales & en partie imaginaires, on ne peut s'attendre à aucun changement de ſigne. Reſte donc à faire voir comment on trouve les racines égales. Car pour les imaginaires, nous ajouterons ſimplement quelques remarques à ce que nous en avons deja dit.

330. Pour avoir les racines égales d'une équation, on multipliera chacun de ſes termes par l'expoſant qu'a l'inconnue dans ce terme, & on diminuera cet expoſant d'une unité. Cela donnera une autre équation dont le plus grand commun diviſeur avec la propoſée, contiendra les racines égales que l'on cherche, élevées ſeulement à une puiſſance moindre d'une unité. En voici la démonſtration.

Lorſque toutes les racines d'une équation ſont égales, on peut repréſenter cette équation par $x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} a^2 x^{m-2}$ $+ a^m = 0$; & ſi l'on multiplie chaque terme de la formule par l'expoſant de x dans ce terme, on a (en remarquant que dans le dernier l'expoſant de x eſt 0) cette nouvelle équation, $mx^m + (m.m-1)$ $ax^{m-1} + \left(\frac{m.m-1.m-2}{2}\right)a^2x^{m-2} + \&c. \ldots = 0$: laquelle étant diviſée par mx, donne $x^{m-1} + (m-1)ax^{m-2} + \left(\frac{m-1.m-2}{2}\right)$ $a^2x^{m-3} + \&c. = 0$. Or cette expreſſion eſt le développement du binome $(x+a)^{m-1} = 0$ & le plus grand diviſeur commun de ce binome & de l'équation propoſée, $(x+a)^m = 0$, eſt évidemment $(x+a)^{m-1}$ lui-même. La méthode eſt donc démontrée pour le cas où toutes les racines ſont égales entr'elles.

Si elles ne l'étoient que deux à deux, comme dans l'équation $(x+a)^m (x+b)^n = 0$, on multiplieroit l'un par l'autre les deux binomes développés, ce qui donneroit une nouvelle équation dont les termes étant multipliés chacun par l'expoſant reſpectif de x produiroient $m(x+a)^{m-1}(x+b)^n + n(x+b)^{n-1}(x+a)^m = 0$. Or le plus grand commun diviſeur de cette derniere équation & de la propoſée eſt $(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}$.

Applications. I.° Trouver les racines égales de l'équation $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$.

Je multiplie chaque terme par l'expoſant de x, & j'ai $4x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 12x = 0$. Diviſant par $4x$, il vient $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Je cherche (195) le plus grand commun diviſeur de cette derniere équation & de la propoſée. Je trouve que c'eſt $x^2 - 2x - 3$, produit de $x-3$ par $x+1$. Les racines égales de la propoſée ſont donc $(x-3)^2$ & $(x+1)^2$.

II.° Trouver les racines égales de $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$. Multipliez par les exposans respectifs & divisez ensuite par $6x$, vous aurez $x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 = 0$, dont le plus grand commun diviseur avec la proposée sera $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, ou $(x+1)^3 (x-2)$. Vous conclurez de-là que $(x+1)^4$ & $(x-2)^2$ sont les racines cherchées.

331. Quant aux imaginaires, nous observerons seulement, 1.° que les racines quarrées de a sont indifféremment $\sqrt{a}$ & $-\sqrt{a}$ dont le produit $\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -a$, de même que celui de $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ ou de $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a}$ est $= a$; 2.° que par la même raison $-a$ doit avoir pour racines quarrées les deux quantités imaginaires $\sqrt{-a}$, & $-\sqrt{-a}$, de sorte que leur produit $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ doit être $= +a$, & que celui de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, ou de $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ doit être $= -a$. D'où l'on voit en général, que le produit des quantités imaginaires, peut se présenter sous la forme d'une quantité réelle, & qu'ainsi une équation dont les coefficients sont tous réels peut avoir des racines imaginaires.

332. Or dans la multiplication des radicaux de cette espece, le signe radical ne s'évanouit que lorsqu'on multiplie deux à deux ceux qui ont les mêmes quantités sous le signe : ainsi $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a$, mais $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = a\sqrt{-a}$, & $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = aa$, mais $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -aa\sqrt{-a}$, &c. De même $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$, mais $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = ab$, & $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = ab\sqrt{a}$, &c. D'où il suit qu'une quantité réelle ne peut représenter le produit des radicaux imaginaires, s'ils n'ont été multipliés entr'eux chacun en nombre pair.

Si un des termes d'un polynome est un radical imaginaire, comme si on a $x - a - \sqrt{-b}$, le signe radical pourra s'évanouir pourvu qu'on multiplie ce polynome par un autre qui n'en différe que par le signe du radical. Il n'y a, par exemple, que le produit de $x - a - \sqrt{-b}$ par $x - a + \sqrt{-b}$ qui puisse faire évanouir le signe radical dans le polynome proposé, en donnant $xx - 2ax + aa + b$, parce que ce n'est que dans ce cas où les produits particuliers de chaque terme réel par le terme où entre le radical, se détruisent par des signes contraires : ainsi les produits de $x - a$ par $\sqrt{-b}$ sont détruits par les signes contraires des produits de $x - a$ par $-\sqrt{-b}$; & dans ce même cas, il est clair que le terme b qui contient le produit des deux radicaux $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$ est nécessairement positif.

Cela posé, 1.° les racines imaginaires qui se trouvent dans une équation, y sont toujours en nombre pair.

2.° Les racines imaginaires qu'on rencontre dans la solution d'une équation ont deux à deux la même quantité sous le signe radical, & ne différent que par les signes + & —.

3.° Toute équation d'un degré impair, a au moins une racine réelle. On l'a vu dans les équations du troisieme degré.

4.° Toute équation d'un dégré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles : puisque le produit réel des radicaux imaginaires qui font alors partie des deux polynomes multipliés l'un par l'autre, ne peut être qu'une quantité positive (332).

Méthode pour extraire les racines des quantités en partie rationnelles & en partie incommensurables.

333. Les équations qui se résolvent par les méthodes du second degré offrent souvent à extraire des racines de quantités en partie rationnelles & en partie radicales. Ces équations sont généralement représentées par $x^{2m}+px^m=q$, & leur solution générale est contenue dans cette formule $x=\pm\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}}$. Il importe donc à la résolution complete de ces équations, que $\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}}$ soit réduite, lorsque cela est possible, à une expression plus simple, dans laquelle il n'entre qu'une quantité rationnelle, avec un radical du second degré. C'est pourquoi nous allons donner la méthode de faire cette réduction.

Prenons d'abord le cas ou $m=2$, c'est-à-dire, cherchons la racine quarrée des quantités en partie rationnelles, en partie radicales. Nous représenterons généralement ces quantités par $p+\sqrt{q}$, & leur racine par $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. S'il n'y a qu'un seul radical dans la racine que l'on cherche, l'une de ces deux quautités $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ sera commensurable.

On aura donc $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p+\sqrt{q}}$, d'où l'on tirera $x+y+2\sqrt{xy}=p+\sqrt{q}$. Egalant ensuite la partie commensurable du premier membre à celle du second, on aura $x+y=p$. Leurs parties incommensurables donneront $xy=\frac{q}{4}$; d'où $y=\frac{q}{4x}=p-x$; & par conséquent $x^2-px=-\frac{q}{4}$; d'où encore $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-\frac{q}{4}}$, & $y=\frac{1}{2}p\mp\sqrt{\frac{1}{4}p^2-\frac{q}{4}}$. Donc $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, ou $\sqrt{p+\sqrt{q}}=$

$\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}+\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$.

Or quoique cette derniere quantité paroiſſe auſſi compliquée que $\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}}$, cependant lorſque celle-ci ſera ſuſceptible d'une racine exacte, l'autre pourra ſe réduire à une expreſſion plus ſimple. Il eſt aiſé de voir en effet, que ſi $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ eſt la racine quarrée de $p+\sqrt{q}$, celle de $p+\sqrt{q}$ doit être $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, & que par conſéquent $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ ou $x-y=\sqrt{p^2-q}$, quantité commenſurable toutes les fois que $p+\sqrt{q}$ a une racine quarrée exacte.

APPLICATIONS. I.° On demande ſi $4+2\sqrt{3}$ a une racine quarrée exacte ? Pour le ſavoir, je fais $4=p$, $2\sqrt{3}$ ou $\sqrt{12}=\sqrt{q}$. J'ai donc $q=12$, $\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}=\sqrt{3}$, & . . . . . $\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}=1$; d'où je tire $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$ ou $-1-\sqrt{3}$. C'eſt la racine demandée.

II.° On demande encore la racine de $8+2\sqrt{15}$? . . . . Ici on a $p=8$, $q=60$. Donc $\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}=\sqrt{5}$, & . . . . . $\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}=\sqrt{3}$. Donc $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ou $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

Il ſuit de-là que $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}-1$, & que $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ou $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. En général, $\sqrt{p-\sqrt{q}}$ $=\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}-\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$, ou . . . . . $\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}-\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$.

334. La même formule peut ſervir à extraire la racine quarrée d'une quantité en partie rationnelle & en partie imaginaire. Soit, par exemple, $-1+2\sqrt{-2}$, qui étant comparée avec $p+\sqrt{q}$, donne $p=-1$, $q=-8$, $\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}$, & $\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}=\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}$; d'où $\sqrt{-1+2\sqrt{-2}}=1+\sqrt{-2}$ ou bien $-1-\sqrt{-2}$.

335. On trouve quelquefois des quantités imaginaires monomes

qui ont des racines binomes. Telle est la quantité $2\sqrt{-1}$ dont la racine est $1+\sqrt{-1}$. Pour extraire ces sortes de racines, on s'y prendra de la même maniere que dans les exemples précédents. Si on vouloit donc avoir celle de $m\sqrt{-1}$, (m étant une quantité réelle quelconque), on supposeroit $\sqrt{m\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$, ce qui donneroit $m\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$; d'où $x^2-y^2=0$. ce qui donne $x=y$, & $2xy=m$, d'où l'on tire $y=\sqrt{\frac{m}{2}}$. Donc, en général, $\sqrt{m\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{m}{2}}(1+\sqrt{-1})$.

366. Cherchons à présent la racine cube de $p+\sqrt{q}$, & représentons-la par $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$. Nous mettons $x+\sqrt{y}$, & non pas $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, parce que le cube de ces deux dernieres quantités ne contiendroit aucun terme commensurable. Nous mettons aussi $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$, parce que dans le cube de cette expression il entre aussi bien une quantité commensurable, que dans celui de $x+\sqrt{y}$, & parce que cette indéterminée z nous sera utile.

Nous aurons donc $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{p+\sqrt{q}}$, & par conséquent $(x-\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{p-\sqrt{q}}$. Multiplions l'une par l'autre ces deux équations, il viendra $(x^2-y)\sqrt[3]{z^2}=\sqrt[3]{p^2-q}$; d'où $x^2-y=\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z}$. Donc si x^2-y est commensurable, c'est-à-dire, si on peut avoir la racine cube exacte de la quantité proposée $p+\sqrt{q}$, l'expression $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z}$ doit aussi être commensurable. Mais il faut pour cela, que $(p^2-q)z$ soit un cube parfait; il faut donc que $z=1$, toutes les fois que p^2-q sera un cube parfait; ou s'il ne l'est pas, il faut que l'on prenne pour z un nombre propre à le rendre tel.

Soit pour abreger, $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z}=a$; nous aurons $x^2-y=a$; & puisque d'un côté l'équation $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{p+\sqrt{q}}$ étant élevés à son cube, donne $x^3z+3xyz+3x^2z\sqrt{y}+yz\sqrt{y}=p+\sqrt{q}$, & que de l'autre l'équation $x^2-y=a$ donne $y=x^2-a$, il n'est pas difficile de voir, 1.° que $x^3z+3xyz=p$, d'où x^3+

$3xy = \frac{p}{z}$; 2.° qu'en substituant ici la valeur de y, on a $4x^3 - 3ax = \frac{p}{z}$ d'où $4x^3 - 3ax - \frac{p}{z} = 0$.

Il ne s'agit plus maintenant que de trouver les diviseurs commensurables de cette derniere équation. Elle doit en avoir si $p + \sqrt{q}$ a une racine cube exacte. On connoîtra donc x, ce qui déterminera aussi-tôt la valeur de y; & comme z est déja connu, la racine cube que l'on cherche ne peut pas manquer de l'être.

APPLICATIONS. I.° Quelle est la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$?..... On a $p = 10$, $q = 108$. Donc $p^2 - q = -8$, cube parfait; donc $z = 1$, $a = -2$, & l'équation $4x^3 - 3ax - \frac{p}{z} = 0$ devient $4x^3 + 6x - 10 = 0$. Or $x - 1$ est un diviseur commensurable de cette derniere équation; on a donc $x = 1$, d'où $y = x^2 - a = 3$, & $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

II.° Quelle est la racine cube de $8 + 4\sqrt{5}$?... Ici $p = 8$, $q = 80$, donc $p^2 - q = -16$ qui n'est pas un cube. Pour qu'il le devienne, on supposera $z = 4$, ce qui donnera $\frac{\sqrt[3]{(p^2 - q)z}}{z} = -1 = a = x^2 - y$. Alors l'équation $4x^3 - 3ax - \frac{p}{z} = 0$ se change en celle-ci, $4x^3 + 3x - 2 = 0$, dont le diviseur $2x - 1$, donne $x = \frac{1}{2}$, & par conséquent $y = \frac{5}{4}$. La racine cherchée est donc $\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$.

337. Nous remarquerons ici qu'une quantité quelconque a toujours trois racines cubes. Cela suit de ce que la valeur de x se tire d'une équation du troisieme degré, $4x^3 - 3ax - \frac{p}{z} = 0$, & de ce que la valeur de y dépend de celle de x. Sur quoi il faut observer que si la quantité proposée est réelle, elle a une seule racine cube réelle, & que si elle est imaginaire, ses trois racines cubes le sont aussi.

Dans la premiere application, par exemple, que nous venons de faire, nous avons trouvé que $1 + \sqrt{3}$ étoit la racine cube exacte & réelle de $10 + 6\sqrt{3}$. S'il falloit maintenant trouver ses deux racines imaginaires, je chercherois les trois racines de l'équation $4x^3$

$+ 6x - 10 = 0$, qui ſont (318) $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{-1}$. Ces trois valeurs de x donneroient $y = 3$, & $y = \mp \frac{3}{2}\sqrt{-1}$; d'où je conclurois que les trois racines cubes cherchées ſont $1 + \sqrt{3}$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{-1} + \sqrt{\mp \frac{3}{2}\sqrt{-1}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,(\sqrt{3} \pm 3)$.

338. Il ne ſeroit guere plus difficile d'extraire les trois racines cubes des quantités en partie commenſurables & en partie imaginaires. Soit, par exemple, la quantité $-10 + 9\sqrt{-3}$, qui donne $p = -10$, $q = -243$, & $p^2 - q = 343$ cube parfait; donc $z = 1$, & $a = \sqrt[3]{343} = 7$, $y = x^2 - 7$, & $4x^3 - 21x + 10 = 0$. Cette derniere équation donne $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{5}{2}$ (318), & par conſéquent $y = -3$, $y = -\frac{27}{4}$, $y = -\frac{3}{4}$. Les trois racines cubes de $-10 + 9\sqrt{-3}$ ſont donc $2 + \sqrt{-3}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{-3}$, $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Soit encore $-11 - 2\sqrt{-1}$ qui donne $p = -11$, $q = -4$, $p^2 - q = 125$, $z = 1$, $a = 5$, & $4x^3 - 15x + 11 = 0$. De la derniere équation on tirera $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$. Donc $y = -4$, $y = -\frac{7}{2} \mp \sqrt{3}$. Donc $\sqrt[2]{-11 - 2\sqrt{-1}} = 1 + 2\sqrt{-1}$, ou $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3} + \sqrt{-\frac{7}{4} \mp \sqrt{3}}$.

Pour extraire des racines plus élevées, dans le même genre, on ſuivroit à peu-près le même procédé.

Des Raiſons & des Proportions.

339. ON appelle en général *Raiſon* ou *Rapport*, la comparaiſon des deux quantités; ou bien, la maniere dont l'une eſt à l'égard de l'autre.

On compare deux quantités pour ſavoir de combien l'une ſurpaſſe l'autre, ou combien de fois l'une contient l'autre. Par exemple, je puis comparer 4 à 12, pour ſavoir de combien 4 eſt ſurpaſſé par 12, ou combien de fois 4 eſt contenu dans 12.

Le premier des deux termes que l'on compare s'appelle l'*antécédent*; l'autre s'appelle le *conſéquent*.

340. Quand on compare deux quantités pour connoître de combien l'une ſurpaſſe l'autre, on appelle cette comparaiſon un *rapport* ou une *raiſon arithmétique*; & quand on cherche combien de fois l'une contient l'autre, on en appelle la comparaiſon un *rapport* ou une *raiſon géométrique*.

Il eſt aiſé de voir que tout rapport conſiſte dans une quantité qui exprime la maniere dont l'antécédent eſt à l'égard de ſon conſéquent; d'où il ſuit . . . . . 341.

341. I.° Qu'un rapport arithmétique consiste dans la différence qu'il y a entre l'antécédent & le conséquent ; & qu'un rapport géométrique consiste dans le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent, ou du conséquent divisé par l'antécédent.

342. II.° *Que deux termes sont en même raison avec deux autres, ou que deux rapports sont égaux, quand les différences ou les quotients sont égaux.* Ainsi de ce que l'excès de 7 sur 3 est le même que celui de 9 sur 5, savoir 4, il est clair que le rapport arithmétique de 7 à 3 est égal à celui de 9 à 5, ou que 7 est à 3 en même raison arithmétique que 9 à 5. Pareillement, de ce que 3 est contenu dans 12 autant de fois ; savoir 4, que 2 dans 8 ; & qu'ainsi le quotient de la raison de 3 à 12, est le même que celui de la raison de 2 à 8 ; il suit que 3 est à 12 en même raison géométrique que 2 à 8, ou que ces raisons sont égales.

343. Lorsque dans deux raisons géométriques le premier antécédent est à son conséquent, comme le second antécédent est à son conséquent, on dit que ces termes sont en *raison directe* : & lorsque le premier antécédent est à son conséquent, comme le second conséquent est à son antécédent, on dit alors qu'ils sont en *raison inverse* ou *réciproque*. Ces quatre nombres 2, 6 : 3, 9 sont en raison directe. Ceux-ci, 2, 6 : 9, 3 sont en raison inverse.

D'où il suit *que les quatre termes de deux raisons inverses peuvent être mis en raison directe, en changeant de place l'un des deux termes d'une de ces raisons.*

344. Deux raisons égales forment *une proportion*, laquelle est arithmétique ou géométrique selon l'espece de ces deux raisons. Ainsi les quatre termes 7, 3, 9, 5 forment une proportion arithmétique ; & pour désigner que ces termes sont une telle proportion, on les écrit ainsi $7 . 3 : 9 . 5$. De même les quatre termes 3, 12, 2, 8, forment une proportion géométrique ; & pour la désigner, on écrit $3 : 12 :: 2 : 8$, ou $3 . 12 :: 2 . 8$, ou $3 : 12 = 2 : 8$; &c. &c. &c.

345. Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent *les extrêmes* ; le second & le troisieme s'appellent *les moyens.*

346. Il arrive ſouvent que le conſéquent de la premiere raiſon d'une proportion eſt l'antécédent de la ſeconde raiſon ; par exemple, on peut avoir cette proportion arithmétique 6 . 4 : 4 . 2 ou cette géométrique 2 . 4 :: 4 . 8 :: 8 . 16 ; ces ſortes de proportions s'appellent *continues*. La proportion arithmétique continue s'écrit ainſi ÷ 6 . 4 . 2 , & la géométrique, ∺ 4 . 8 . 16 ; le ſecond terme s'appelle *le moyen proportionnel*.

347. Lorſqu'on écrit de ſuite plus de deux raiſons égales, on forme ce qu'on appelle *une ſuite des quantités proportionnelles*. Ainſi l'expreſſion 7 . 3 :: 9 . 5 : 11 . 7 eſt celle d'une ſuite de quantités arithmétiquement proportionnelles ; & 3 : 12 :: 2 : 8 :: 5 : 20 :: 7 : 28 eſt l'expreſſion d'une ſuite de quantités géométriquement proportionnelles. Mais ſi les raiſons qui ſervent à former ces ſuites ſont telles, que le conſéquent de l'une ſerve d'antécédent à l'autre, elles forment alors *une progreſſion*. Ainſi 3 . 6 : 6 . 9 : 9 . 12 : 12 . 15 eſt une progreſſion arithmétique : & pour en abréger l'expreſſion, on l'écrit ainſi ÷ 3 . 6 . 9 . 12 . 15. De même 32 : 16 :: 16 : 8 :: 8 : 4 :: 4 : 2 :: 2 : 1 eſt une progreſſion géométrique ; on l'écrit ainſi pour abréger, ∺ 32 . 16 . 8 . 4 . 2 . 1.

348. Donc, en général, *une progreſſion arithmétique eſt une ſuite de termes qui pris conſécutivement, ont toujours une même différence ; & une progreſſion géométrique eſt une ſuite de termes qui diviſés conſécutivement l'un par l'autre, ont toujours un même quotient.*

Propriétés des Raiſons, Proportions & Progreſſions Arithmétiques.

349. *Tout rapport arithmétique peut ſe réduire à cette formule générale*, a . a ± d. Ou, ce qui eſt le même, *le conſéquent d'une raiſon arithmétique eſt toujours égal à l'antécédent* a *plus ou moins leur différence* d.

Car toute quantité peut s'exprimer par *a* & être l'antécédent d'une raiſon arithmétique ; or *a* étant l'antécédent, il eſt ou plus grand ou plus petit que ſon conſéquent. Si *a* eſt plus grand, il ſurpaſſe ſon conſéquent d'une quantité ou différence qu'on peut appeller *d* ; donc alors le conſéquent eſt $a - d$: ſi a eſt plus petit que ſon conſéquent, il en eſt ſurpaſſé d'une quantité qu'on peut appeller *d*, & en ce cas, le conſéquent eſt $a + d$; donc, *dans tout rapport arithmétique, le conſéquent eſt égal à l'antécédent plus ou moins leur différence :* donc tout rapport arithmétique peut être repréſenté par $a \,.\, a \pm d$.

On démontre de même qu'en appellant *b* une quantité quelconque, & *d* ſa différence avec une autre quantité quelconque, le rapport arithmétique entre ces deux quantités eſt $b \,.\, b \pm d$; & ſi on appelloit *c* un antécédent quelconque, & *f* ſa différence avec ſon conſéquent, la formule de leur rapport ſeroit $c \,.\, c \pm f$, &c.

350. *Toute proportion arithmétique peut donc être repréſentée par celle-ci*, $a \,.\, a \pm d : b \,.\, b \pm d$.

Car deux rapports arithmétiques étant ſuppoſés égaux, la différence de chacun doit être exprimée par la même quantité *d* : ſi donc *a* & *b* expriment en général les antécédents de ces deux rapports, $a \pm d$ & $b \pm d$ en doivent exprimer les conſéquents (349). Donc $a \,.\, a \pm d : b \,.\, b \pm d$ repréſentent en général les quatre termes de deux raiſons arithmétiques égales, & par conſéquent une proportion arithmétique quelconque.

351. *Dans une proportion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.* Cela eſt évident dans la proportion $a \,.\, a \pm d : b \,.\, b \pm d$, puiſque la ſomme des extrêmes eſt $a + b \pm d$, & que celle des moyens eſt $a \pm d + b$; or cette proportion eſt une formule générale dont la vérité s'étend à tous les cas particuliers. Ainſi une proportion arithmétique étant exprimée par des termes différents entr'eux, comme $a. b : c. d.$ on a toujours l'équation $a + d = b + c$.

352. Donc I°. *Dans une proportion continue la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen ;* car $\div a. b. c.$ eſt la même choſe que $a. b : b. c$, donc $a + c = 2b$.

353. Donc *dans une proportion arithmétique, quand il y a un terme inconnu, il eſt aiſé d'en trouver la valeur.* Par exemple, ſi je veux avoir le quatrieme terme d'une proportion arithmétique dont je connois les trois premiers *a*, *b*, *c*, je fais

$a . b : c . x$, donc (351) $a + x = b + c$, & en tranſpoſant $x = b + c - a$, formule qui ſignifie que *le quatrieme terme d'une proportion arithmétique eſt égal à la différence entre la ſomme des moyens & le premier terme.*

Si on demande quel eſt le moyen proportionnel arithmétique entre a & b, je fais $\div a . x . b$; donc $a + b = 2x$, & par conſéquent, $x = \frac{a+b}{2}$. Ce qui s'exprime ainſi: *La moitié de la ſomme des extrêmes eſt égale à leur moyen proportionnel arithmétique.*

354. *Toute progreſſion arithmétique peut s'exprimer par celle-ci,* $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d . a \pm 5d . a \pm 6d$. *& ainſi de ſuite.*

Car une progreſſion arithmétique étant une ſuite de termes qui, pris conſécutivement, ont toujours une même différence, il ſuit que la différence entre le premier terme a & le ſecond $a \pm d$ ne peut être $\pm d$, que la différence entre le ſecond & le troiſieme ne ſoit auſſi $\pm d$; donc le troiſieme terme doit être $a \pm d \pm d$, c'eſt-à dire, $a \pm 2d$; de même, la différence entre le troiſieme & le quatrieme doit être $\pm d$; donc le quatrieme terme doit etre $a \pm 2d \pm d$, ou $a \pm 3d$, & ainſi des autres.

355. Remarque. Cette formule générale comprend les deux ſortes de progreſſions arithmétiques qu'on appelle *croiſſantes* ou *décroiſſantes.* La progreſſion croiſſante eſt $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d$, &c. La décroiſſante eſt $\div a . a - d . a - 2d . a - 3d . a - 4d$, &c.

356. Il ſuit de-là, I.° *Que dans toute progreſſion arithmétique, la ſomme des termes également éloignés des extrêmes eſt toujours conſtante, c'eſt à-dire, qu'elle eſt égale à la ſomme de ces extrêmes, ou à la ſomme de deux autres termes quelconques également éloignés de ces extrêmes, ou au double du terme moyen, ſi la progreſſion a un nombre impair de termes.*

Ainſi dans la progreſſion de la formule qui a 7 termes, la ſomme du troiſieme & du cinquieme terme, ſavoir $a \pm 2d + a \pm 4d$, ou bien $2a \pm 6d$, eſt égale à la ſomme des extrêmes, qui ſont a & $a \pm 6d$, c'eſt-à-dire, à $2a \pm 6d$,

& à la somme du second & du sixieme qui est aussi $2a \pm 6d$; ou enfin au double du terme moyen $a \pm 3d$.

357. II.° *Dans une progression arithmétique, un terme quelconque est égal à la somme du premier terme & du produit de la différence commune par le nombre des termes précédents.* Car le sixieme terme, par exemple, qui est $a \pm 5d$, est la somme du premier a & du produit de la différence $\pm d$ par le nombre 5 des termes qui précedent le sixieme.

358. III.° *Dans une progression arithmétique la différence entre le premier & le dernier terme est égale au produit de la différence commune par le nombre des termes de toute la progression moins un.* Ainsi dans la même progression, il est clair que la différence entre a & $a \pm 7d$, est $\pm 7d$.

359. IV.° *La somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale à la moitié du produit de la somme des extrêmes multipliée par le nombre de tous les termes*, ou, *au produit entier de la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes*, ou *au produit du terme moyen* (si le nombre des termes est impair) *par le nombre de tous les termes :* expressions toutes équivalentes & qui se démontrent de la même maniere. Ainsi si l'on multiplie $2a \pm 6d$, somme des extrêmes de la même progression par 7, nombre de ses termes, on aura $14a \pm 42d$, dont la moitié $7a \pm 21d = a + a \pm d + a \pm 2d + a \pm 3d + a \pm 4d + a \pm 5d + a \pm 6d$: car par la réduction, ce dernier membre deviendra $7a \pm 21d$.

Il est donc bien aisé de savoir le nombre de coups qu'une horloge frappe à chaque tour du cadran.

360. *Une progression arithmétique peut avoir zéro pour un de ses termes.*

Car entre zéro & un nombre quelconque, il y a toujours une différence égale à ce nombre.

361. On peut donc continuer une progression décroissante autant qu'on voudra : par exemple, si on a la progression ÷ 16 . 12 . 8 . 4 . 0, on pourra la continuer ainsi ÷ 16 . 12 . 8 . 4 . 0 . — 4 . — 8 . — 12 . — 16 . &c La progression ÷ 11 . 6 . 1 . peut être continuée en mettant ÷ 11 . 6 . 1 . — 4 . — 9 . — 14 . — 19 . &c.

362. REM. *Le zéro absolu ne peut entrer dans aucun rapport géométrique*, parce qu'il ne peut contenir ni être contenu.

363. De ces propriétés des progressions arithmétiques, on déduit aisément des formules, pour résoudre ce problême général : *Etant données trois de ces cinq choses, le premier terme* = a ; *le dernier terme* = ω ; *la différence commune* = d ; *le nombre des termes* = n ; *la somme de tous les termes* = s, *trouver immédiatement une des deux autres.* Car en

ſuppoſant que la progreſſion ſoit croiſſante, (on peut traiter comme croiſſante toute progreſſion décroiſſante, en appellant ſon premier terme ω, & ſon dernier terme a), 1.° ſi l'on exprime algébriquement la propriété énoncée (358), on aura $\omega - a = dn - d$, & dans cette équation prenant ſucceſſivement les valeurs de ω, de a, de d & de n, on aura quatre formules. 2.° La propriété démontrée (354) donne $an + \omega n = 2s$, d'où l'on pourra eucore déduire quatre formules. 3.° Si dans cette derniere équation on ſubſtitue la valeur de $\omega = a + dn - d$ tirée de la premiere, on aura $2an + dnn - dn = 2s$, d'où l'on pourra déduire quatre autres formules.

4.° Si dans la même équation $an + \omega n = 2s$, on ſubſtitue la valeur de $a = \omega - dn + d$ priſe dans la premiere, on aura $2\omega n - dnn + dn = 2s$, d'où l'on pourra encore déduire quatre formules.

5.° Enfin ſi dans $an + \omega n = 2s$, on ſubſtitue la valeur de $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$ priſe dans la premiere équation, on aura $2s = a + \omega + \frac{\omega\omega - aa}{d}$, d'où on tirera encore quatre formules. Et ces vingt formules réſoudront tous les cas poſſibles du problême énoncé ci-deſſus.

364. PROBLEME. *Inſérer un nombre* m *de moyens proportionnels entre deux termes donnés, enſorte qu'il en réſulte une progreſſion arithmétique.*

SOLUTION. Diviſez la différence de ces deux termes par $m + 1$, le quotient ſera la différence qui doit régner dans la progreſſion cherchée. Ainſi pour inſérer 4 moyens proportionnels entre 7 & 13, la différence qui doit régner dans la progreſſion eſt $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$. On a donc $\div 7 . 8\frac{1}{5} . 9\frac{2}{5} . 10\frac{3}{5} . 11\frac{4}{5} . 13$.

Car en inſérant quatre moyens proportionnels entre 7 & 13, il en réſulte une progreſſion qui a ſix termes, & qui a par conſéquent cinq différences égales. Or la différence du premier terme 7 au dernier 13, contient évidemment ces cinq différences priſes enſemble : il faut donc en prendre la cinquieme partie, ou la diviſer par 5, pour avoir la différence qui doit régner entre deux termes quelconques de la progreſſion.

Des Raiſons, Proportions & Progreſſions géometriques.

365. Les rapports géométriques ſont ceux dont on fait le plus ſouvent uſage ; c'eſt pourquoi par ces termes de Raiſon,

Proportion ou *Analogie*, & Progreſſion, nous déſignerons ſeulement les géométriques.

Nous ſuppoſerons toujours dans la ſuite, que le quotient d'une raiſon directe réſulte de la diviſion du conſéquent par l'antécédent.

366. Il ſuit de-là, & de la notion des raiſons géométriques, qu'*une fraction eſt une raiſon géométrique;* ſon numérateur en eſt le conſéquent, & ſon dénominateur l'antécédent.

367. On appelle *raiſon de nombre à nombre*, celles dont le quotient n'eſt pas une quantité inexprimable ou incommenſurable : & *raiſon irrationnelle ou raiſon ſourde*, celle dont le quotient ne peut s'exprimer exactement ni par des entiers, ni par des fractions. Ainſi la raiſon de 7 à 11, celle de $4\frac{2}{7}$ à $\frac{11}{17}$, ſont des raiſons de nombre à nombre, parce que leurs quotients ſont exactement $\frac{11}{7}$, $\frac{77}{512}$, &c. Mais la raiſon de 4 à $\sqrt{3}$, celle de $\sqrt{5}$ à 8, ſont des raiſons ſourdes, parce qu'il eſt impoſſible de trouver un nombre entier ou fractionnaire qui exprime la valeur exacte de $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ou de $\frac{8}{\sqrt{5}}$ (236).

Il ne ſuit pas de-là que deux incommenſurables ſoient toujours en raiſon ſourde ; parce que l'un peut être exactement double, triple, &c. par rapport à l'autre. On a par exemple, $\sqrt{28} . \sqrt{175} :: 2 . 5$.

368. Quand l'antécédent contient deux fois, trois fois, &c. exactement ſon conſéquent, on appelle leur rapport une raiſon *double*, *triple*, &c. & quand il eſt contenu exactement deux fois, trois fois, &c. dans le conſéquent, leur rapport s'appelle une raiſon *ſoudouble*, *ſoutriple*, &c.

369. Quand on multiplie par ordre les termes de pluſieurs raiſons, c'eſt-à-dire, les antécédens par les antécédents, & les conſéquents par les conſéquents, les produits forment une *raiſon compoſée* de chacune de ces raiſons ; par exemple, les trois raiſons $a:d$, $b:e$, $c:f$, étant données, la raiſon qui en eſt compoſée, eſt $abc : def$, & chacune de ces trois raiſons s'appelle une des *racines* de la raiſon compoſée.

370. Une raiſon compoſée de raiſons égales s'appelle une *raiſon doublée*, *triplée*, *quadruplée*, &c. ſi elle a deux, trois, quatre, &c. racines : ainſi ſi on compoſe les raiſons égales 2 : 4, 6 : 12, 3 : 6, on aura la raiſon triplée 36 : 288.

371. Cela poſé, *toute raiſon géométrique peut s'exprimer par cette formule* a : aq, *ou par celle-ci*, b : bq, &c. Or, ce qui

eſt le même, *le conſéquent d'une raiſon géométrique eſt toujours égal au produit de l'antécédent par leur quotient.*

Car puiſque le quotient d'une raiſon eſt ce qui réſulte de la diviſion du conſéquent par l'antécédent, il eſt clair (64) que ce conſéquent, qui eſt le dividende, doit être égal au produit du quotient par l'antécédent qui eſt le diviſeur: donc en général tout rapport géométrique dont l'antécédent eſt a, & le quotient q, a pour conſéquent aq, & peut s'exprimer par $a : aq$. Tout rapport dont l'antécédent eſt b & le quotient q, peut s'exprimer par $b : bq$, &c.

372. REMARQUES. I. Si on avoit ſuppoſé que le quotient de la raiſon réſultat toujours de l'antécédent diviſé par le conſéquent, il auroit fallu ſuppoſer ce quotient $= \frac{1}{q}$ (expreſſion qui peut repréſenter auſſi tous les nombres, ſoit entiers, ſoit fractionnaires), afin d'exprimer les rapports géométriques par les mêmes formules $a : aq$, & $b : bq$, &c.

373. II. Quand l'antécédent eſt plus grand que le conſéquent, le quotient q eſt une fraction moindre que l'unité: & quand l'antécédent eſt plus petit, q eſt un nombre plus grand que l'unité. Par exemple, dans la raiſon de 4 à 12, $q = 3$; ainſi l'antécédent étant $a = 4$, le conſéquent eſt $aq = 4 \times 3$; & dans la raiſon de 12 à 4, $q = \frac{1}{3}$; ainſi l'antécédent étant $a = 12$, le conſéquent eſt $aq = 12 \times \frac{1}{3} = 4$.

374. *Toute proportion géométrique peut être repréſentée par cette formule* a : aq :: b : bq.

En effet les quatre termes de deux raiſons égales forment une proportion (344); & deux raiſons égales ont un même quotient q. Si donc a & b ſont les antécédents de deux raiſons égales quelconques, aq & bq en doivent être les conſéquents. L'expreſſion générale $a : aq :: b : bq$, peut donc repréſenter toute proportion géométrique.

375. *La valeur d'une raiſon ne change pas par la multiplication ou par la diviſion de ſes deux termes par une même quantité.* Autrement. *Les produits ou les quotients de deux quantités inégales par une même quantité, ſont en même raiſon que ces quantités inégales.*

Car

Car une raiſon conſiſte dans ſon quotient ; or ſi on multiplie la raiſon $a : aq$ dont le quotient eſt q, par une quantité quelconque m, la raiſon des produits $am : amq$, n'aura point d'autre quotient que la quantité q comme avant la multiplication ; donc am & amq ſeront en même raiſon que $a : aq$. On prouvera de même que $\frac{a}{m}$ & $\frac{aq}{m}$ ſont en même raiſon que $a : aq$.

Donc $a : aq :: am : amq :: \frac{a}{m} : \frac{aq}{m}$, &c.

Les raiſons géométriques & les fractions étant une même choſe, on voit maintenant *pourquoi une fraction ne change pas de valeur, ſoit qu'on en multiplie ou qu'on en diviſe les deux termes par une même quantité* (101).

376. Il ſuit de-là que *deux quantités quelconques ſont en même raiſon que leurs doubles, leurs triples, leurs quadruples, &c. que leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts*, &c. Ou, ce qui eſt la même choſe, que *les valeurs des fractions qui ont même denominateur ſont entr'elles comme leurs numérateurs* ; ainſi $a : b :: \frac{a}{2} : \frac{b}{2} :: \frac{a}{3} : \frac{b}{3} :: \frac{a}{p} : \frac{b}{p}$, &c.

377. *Une raiſon doublée eſt égale à celle des quarrés des termes d'une des deux raiſons qui en ſont les racines. Une raiſon triplée eſt la même que celle des cubes des termes d'une des trois raiſons qui en ſont les racines* ; & ainſi de ſuite des autres puiſſances.

Car, 1.° Soient les deux raiſons égales $a : aq$, & $b : bq$, dont la raiſon doublée eſt $ab : abqq$. Il eſt évident que $ab : abqq :: aa : aaqq :: bb : bbqq$, puiſque ces raiſons ont le même quotient qq.

2.° Soient les trois raiſons égales $a : aq$; $b : bq$; $c : cq$, dont la raiſon triplée eſt $abc : abcq^3$. Or il eſt clair de même que $abc : abcq^3 :: a^3 : a^3q^3 :: b^3 : b^3q^3 :: c^3 : c^3q^3$.

378. *Deux termes en raiſon réciproque avec deux autres termes, peuvent être mis en raiſon directe ſans déranger leur ordre, pourvu qu'on mette les deux termes d'une de ces raiſons en fraction dont le numérateur ſoit* 1, *ou même une quantité quelconque* m.

En effet la raiſon de bq à b eſt inverſe par rapport à celle de a : aq, & pour les mettre en raiſon directe, il faudroit écrire b :

$bq :: a : aq$, ou $bq : b :: aq : a$. Or je dis que si on met la raison $bq : b$, par exemple, en fraction dont le numérateur soit 1, on aura $\frac{1}{bq} : \frac{1}{b} :: a : aq$; car le quotient de $\frac{1}{b}$ divisé par $\frac{1}{bq}$ est q, aussi bien que celui de aq divisé par a.

Propriétés des Proportions géométriques.

379. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. *Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* Cela est évident par la formule $a : aq :: b : bq$.

380. Si donc une proportion est exprimée par des termes différents entr'eux, comme a, b, c, d, ou si $a : b :: c : d$, on a toujours l'équation $ad = bc$.

381. *Réciproquement, toutes les fois que l'on a deux produits égaux, on peut en tirer une proportion.* Il suffit pour cela de prendre les deux racines d'un de ces produits pour extrêmes, & les racines de l'autre pour moyens.

382. Ainsi *toute équation peut être changée en proportion.* Si $ad = bc$, par exemple, on peut en conclure que $a . b :: c . d$. Si $ad - bd = cg + c$, on peut en déduire $a - b . g + 1 :: c . d$. L'équation $1 - xx = a$ donne $1 - x . a :: 1 . 1 + x$. L'équation $x^2 - y^2 = 1$ donne $\div x + y . 1 . x - y$, &c. &c.

383. On peut donc faire subir divers changemens à des quantités proportionnelles, pourvu que la proportion subsiste. Par exemple, si $ad = bc$, on peut en conclure indifféremment.

$$a : b :: c : d. \quad b : a :: d : c. \quad c : a :: d : b. \quad d : b :: c : a.$$
$$a : c :: b : d. \quad b : d :: a : c. \quad c : d :: a : b. \quad d : c :: b : a.$$

Et même on peut en former encore tant d'autres proportions qu'on voudra, en combinant ces termes par voie d'addition & de soustraction, pourvu qu'on fasse dans les deux raisons les mêmes opérations & dans le même ordre, de sorte que le produit des extrêmes, & celui des moyens de ces nouvelles proportions, ſe réduiſent à l'équation primitive $ad = bc$. Ainſi

$a + b : b :: c + d : d$. $a - b : b :: c - d : d$.
$a : a + b :: c : c + d$. $a : a - b :: c : c - d$.
$a + b : a - b :: c + d : c - d$. $a - b : a + b :: c - d : c + d$, &c.

384. *Si l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe deux ou pluſieurs proportions quelconques, terme par terme, les produits ou les quotients ſeront toujours en proportion.*

1.° Si on multiplie terme par terme les deux proportions $a : aq :: b : bq$, $c : cp :: d : dp$, il eſt clair que les produits $ac : acpq :: bd : bdpq$ forment une proportion, à cauſe du même quotient pq.

2.° Si on diviſe $a : aq :: b : bq$ par $c : cp :: d : dp$; il eſt clair que $\frac{a}{c} : \frac{aq}{cp} :: \frac{b}{d} : \frac{bq}{dp}$, puiſque le quotient de chaque raiſon eſt $\frac{q}{p}$.

385. *Il ſuit de-là que les mêmes puiſſances des quantités proportionnelles ſont proportionnelles, & que leurs mêmes racines ſont proportionnelles auſſi.*

Car ſi $a . b :: c . d$, on a $ad = bc$, & $a^m d^m = b^m c^m$; donc (382) $a^m . b^m :: c^m . d^m$, & $a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}} . d^{\frac{1}{n}}$, ou $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d}$.

386. *Si l'on a une ſuite de termes proportionnels, la ſomme des antécédents eſt à la ſomme des conſéquents, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent, ou comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre des conſéquents.*

Soit $a . aq :: b . bq :: c . cq :: d . dq$; je dis que $a + b + c + d$, ſomme de tous les antécédents, eſt à $aq + bq + cq + dq$ ſomme de tous les conſéquents, comme un ſeul antécédent quelconque a eſt à ſon conſéquent aq; ou encore, comme un nombre quelconque $a + b + c$ d'antécédents eſt au même nombre $aq + bq + cq$ de leurs conſéquents. Il ſuffit pour s'en convaincre, de voir qu'il regne un même quotient q dans les raiſons ſuivantes.

$a + b + c + d . (a + b + c + d) q :: a . aq :: a + b + c . (a + b + c) q$

Propriétés des Progressions géométriques.

387. *Toute progression géométrique peut se réduire à cette formule* $\div\!\div\; a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4 \,.\, aq^5 \,.\, aq^6$. *&c.*

Car une progression est une suite de termes alternativement antécédents & conséquents qui ont toujours un même quotient (348). Or il est évident qu'une telle suite est représentée par $a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4$, &c. puisque chaque terme étant divisé par celui qui le précede immédiatement sur la gauche, ou qui est son antécédent, a toujours q pour quotient.

388. Remarquez que les exposans de q dans cette formule sont eux-mêmes en progression arithmétique, & que l'on peut exprimer ainsi toute progression géométrique, $\div\!\div\; aq^0 \,.\, aq^1 \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4$. &c.

q^0 exprime la puissance zéro de la quantité q. Or la puissance zéro d'une quantité quelconque est toujours égale à l'unité (214).

389. Remarquez aussi qu'en supposant $a = 1$, la formule devient $\div\!\div\; q^0 \,.\, q^1 \,.\, q^2\; q^3$. &c. Alors elle représente la suite des puissances d'une quantité quelconque. D'où il suit que *les puissances successives & non fractionnaires d'une quantité sont en progression géométrique, & que leurs exposans sont en progression arithmétique.*

Les puissances successives & fractionnaires sont exceptées, parce que leurs exposans $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ne forment pas de progression arithmétique.

390. *Dans toute progression les produits des extrêmes ou ceux des termes également éloignés des extrêmes, sont égaux entr'eux, ou au quarré du terme moyen, si le nombre des termes est impair.*

Cela est vrai pour la formule $\div\!\div\; a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4$. &c. Cela est donc vrai pour tous les cas.

391. Il est donc vrai aussi que *dans une proportion continue le quarré du moyen est égal au produit des extrêmes*, puisque c'est une progression de trois termes.

392. *Dans une progression quelconque le premier terme est au troisieme, comme le quarré du premier est au quarré du second.*

Le premier terme est au quatrieme, comme le cube du premier est au cube du second, & ainsi de suite.

Il ne faut pour s'en convaincre que regarder la formule $\div\, a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.$ &c.

393. *Des termes exprimés par les mêmes lettres avec des exposans en proportion ou en progression arithmétique, sont en proportion ou en progression géométrique.*

Car il est clair que $aq^m \,.\, aq^{m+d} :: aq^n \,.\, aq^{n+d}$, puisque le quotient de ces deux raisons est q^d. Pareillement, $\div\, aq^m \,.\, aq^{m+d} \,.\, aq^{m+2d} \,.\, aq^{m+3d}$, &c. puisque le quotient est toujours q^d.

394. *Dans toute progression, un terme quelconque est égal au produit du premier par le quotient élevé à une puissance du même ordre que le nombre des termes précédents.*

Cela est évident par la progression $\div\, a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4 \,.\, aq^5 \,.\, aq^6 \,.$ &c. où l'on voit que le cinquieme terme aq^4 est égal au produit du premier a par le quotient q élevé à la quatrieme puissance.

On peut exprimer cette propriété par la formule $x = aq^{n-1}$, où x signifie un terme quelconque, & n le rang de ce terme.

395. *Les sommes ou différences entre les termes consécutifs d'une progression géométrique sont en progression géométrique.* Les sommes ou les différences entre les termes de la progression $\div\, a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4 \,.\, aq^5 \,.\, aq^6$, sont $a \pm aq \,.\, aq \pm aq^2 \,.\, aq^2 \pm aq^3 \,.\, aq^3 \pm aq^4 \,.\, aq^4 \pm aq^5 \,.\, aq^5 \pm aq^6$, &c. Or il est clair que ces termes sont en progression géométrique, puisque chacun est le produit du premier multiplié par le quotient élevé à une puissance de l'ordre du nombre des termes précédents. Par exemple, $aq^4 \pm aq^5$, qui est le cinquieme terme, est le produit du premier $a \pm aq$ par q^4.

396. *Dans une progression quelconque* $\div\, a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3$, &c. *si* $q = 2$, *ou* $= \frac{1}{2}$, *la différence entre le premier & le dernier terme est égale à la somme de tous les termes, excepté le plus grand. Si* $q = 3$ ou $= \frac{1}{3}$, *la différence entre le premier & le dernier terme est égale au double de la somme de tous les termes, excepté le plus grand. Si* $q = 4$ ou $= \frac{1}{4}$, *la différence entre les extrêmes est le triple de la somme de tous les termes excepté le plus grand*, &c.

Car si $q = 2$, la progression $\div\, a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.$ &c. deviendra $\div\, a \,.\, 2a \,.\, 4a \,.\, 8a$, dans laquelle $8a - a$ différence entre les extrêmes est $7a = a + 2a + 4a$ somme de tous les termes qui précedent le plus grand. Si $q = 3$, la progression deviendra $\div\, a \,.\, 3a \,.\, 9a \,.\, 27a$.

où $27a - a = 26a$ double de $a + 3a + 9a = 13a$. Il en eſt de même, ſi $q = \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$, &c.

Différents Problêmes ſur les Proportions & Progreſſions géométriques.

397. PROBLEME. I. *Étant donnés trois termes d'une proportion, trouver le quatrieme.*

SOLUTION. Appellez x le terme inconnu. Mettez-le en proportion avec les trois autres, ſelon le rang qu'il doit avoir; faites une équation du produit des extrêmes, & de celui des moyens, x ſe trouvera dans l'un de ces produits, & vous en aurez facilemeut la valeur, par la diviſion. *En général, dans toute proportion, un terme quelconque, s'il eſt moyen, eſt égal au produit des extrêmes diviſé par l'autre moyen: s'il eſt extrême, il eſt égal au produit des moyens diviſé par l'autre extrême.*

Par exemple, ſoient donnés a, b, c: on cherche le quatrieme proportionnel, on a donc $a : b :: c : x$. Donc $ax = bc$, & $x = \frac{bc}{a}$. Mais ſi le terme cherché eût dû être mis au troiſieme rang, on eût eu alors, $a . b :: x . c$; d'où on eût tiré $x = \frac{ac}{b}$.

La Regle générale contenue dans la ſolution de ce Problême s'appelle *la Regle de Trois*. Comme elle eſt d'un grand uſage, nous en ferons pluſieurs applications dans le chapitre ſuivant.

398. PROBL. II. *Étant donnés le premier terme & le quotient d'une progreſſion, trouver un terme quelconque*, x.

Formule, $x = aq^{n-1}$ (394). Ainſi ſi l'on demande l'onzieme terme d'une progreſſion, dont 1 eſt le premier terme, & 4 le quotient, on aura $a = 1$, $q = 4$, $n = 11$; le terme cherché $= x$, & en faiſant les ſubſtitutions, $x = 1 \times 4^{10} = 4^{10} = 1048576$.

399. PROBL. III. *Trouver la ſomme* s *de tous les termes d'une progreſſion géométrique, dont on connoît le premier terme* a, *le dernier* ω, *& le quotient* q.

SOLUTION. Dans une progreſſion tous les termes ſont antécédents, excepté le dernier, & tous les termes sont conséquents, excepté le premier. Donc la somme des antécédents est $s - \omega$, la somme des conséquents est $s - a$; or (386) $s - \omega : s - a :: a : aq$. Donc $saq - a\omega q = sa - aa$, ou $sq - \omega q = s - a$. Donc $sq - s = \omega q - a$. Donc $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$.

400. PROBLEME. IV. *Trouver la somme* s *étant donnés le premier terme* a, *le nombre des termes* n, *& le quotient* q.

Formule, $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, ou $s = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Car le dernier terme de cette progression est aq^{n-1} : on a donc, comme ci-dessus, $s - aq^{n-1} : s - a :: a : aq$. Donc $saq - aaqq^{n-1} = sa - aa$: divisant tout par a, & mettant q^n à la place de qq^{n-1}, on a $sq - aq^n = s - a$. Donc $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$.

401. PROBLEME. V. *Trouver tous les termes d'une progression dont on connoît le quotient* q, *le nombre des termes* n *& la somme* s.

Formule. $a = \frac{sq - s}{q^n - 1}$, ou $a = s \frac{q - 1}{q^n - 1}$. Cette formule tirée de l'équation précédente, donne le premier terme; & en le multipliant par les puissances successives du quotient, on aura tous les autres, qui seront par conséquent $s \frac{q^2 - q}{q^n - 1}$, $s \frac{q^3 - q^2}{q^n - 1}$, $s \frac{q^4 - q^3}{q^n - 1}$, $s \frac{q^5 - q^4}{q^n - 1}$, &c. ou bien $s \frac{q - 1}{q^{n-1} - \frac{1}{q}}$, $s \frac{q - 1}{q^{n-2} - \frac{1}{q^2}}$, $s \frac{q - 1}{q^{n-3} - \frac{1}{q^3}}$, $s \frac{q - 1}{q^{n-4} - \frac{1}{q^4}}$, &c.

402. PROBLEME. VI. *Trouver le quotient* q *d'une progression dont on connoît le premier terme* a, *le dernier* ω, *& le nombre* n *des termes.*

Formule, $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$. Car $\omega = aq^{n-1}$.

403. PROBL. VII. *Trouver le nombre* n *des termes d'une progression dont on connoît le premier* a, *le dernier* ω, *& le quotient* q.

SOLUT. L'équation $\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$ étant multipliée par q, devient $\frac{\omega q}{a} = q^n$. Ce qui fait voir qu'ayant divisé par le premier terme le produit du dernier par le quotient, on a une puissance de ce quotient dont l'exposant est égal au nombre des termes qu'on cherche : & qu'ainsi en élevant le quotient à toutes ses puissances successives, on trouvera aisément le nombre des termes. Soit, par exemple, $a = 5$, $q = 3$, $\omega = 3645$; je multiplie 3645 par 3, & j'en divise le produit 10935 par 5, je trouve 2187. J'éleve le quotient 3 à toutes ses puissances jusqu'à ce que j'en rencontre une égale à 2187, & j'ai 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, & je vois que 2187 est la septieme puissance de 3 : donc le nombre des termes cherché est 7. En effet, $\div\!\!\div 5 \cdot 15 \cdot 45 \cdot 135 \cdot 405 \cdot 1215 \cdot 3645$. On auroit trouvé facilement cet exposant, en divisant le logarithme de 2187 par celui de 3.

404. PROBLEME VIII. *Insérer des moyens proportionnels entre deux termes donnés.*

1.° Qu'il faille insérer un moyen proportionnel entre a & b ; on aura $\div\!\!\div a . x . b$, donc (391) $ab = xx$, donc $x = \sqrt{ab}$.

2.° Qu'entre a & b il faille insérer deux moyens proportionnels, on aura $\div\!\!\div a . x . y . b$, donc (392) $a : b :: a^3 : x^3$. Donc $a^3 b = ax^3$, & en divisant, $aab = x^3$; donc $x = \sqrt[3]{aab}$. Or ayant le premier & le second terme, il sera aisé de trouver le troisieme ; car on aura $a : \sqrt[3]{aab} :: y : b$; & en élevant tout au cube, $a^3 : aab :: y^3 : b^3$. Donc $y^3 = \frac{a^3 b^3}{aab} = abb$: & $y = \sqrt[3]{abb}$.

3.° En général, qu'entre a & b il faille insérer un nombre n de moyens proportionnels, l'intervalle des termes a & b sera $n + 1$, on aura donc (392) $a^{n+1} : x^{n+1} :: a : b$; donc $x^{n+1} = \frac{a^{n+1} b}{a}$; en réduisant, $x^{n+1} = a^n b$; & en extrayant la racine, on aura $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, ou bien $x = a^{\frac{n}{n+1}} b^{\frac{1}{n+1}}$ Et c'est là la valeur du premier des moyens proportionnels demandés. Par un calcul semblable au précédent, on trouvera que le second moyen est $\sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2}$, le troisieme $\sqrt[n+1]{a^{n-2} b^3}$, le quatrieme $\sqrt[n+1]{a^{n-3} b^4}$. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'exposant de b soit devenu $= n + 1$, auquel cas celui de a sera $= 0$, & le terme $\sqrt[n+1]{a^0 b^{n+1}}$ se réduira à b.

405. PROBLEME IX. *Insérer un nombre* m *de moyens proportionnels*

tionnels entre les termes consécutifs d'une progression géometrique, comme $\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3$, &c.

SOLUTION. Inférez (364) un nombre m de moyens proportionnels arithmétiques entre les exposans consécutifs des termes de la progression donnée, & vous aurez les exposans de la progression cherchée (393). Par exemple, si on veut inférer 3 termes entre tous ceux de la progression précédente, on aura $\div aq^0 . aq^{\frac{1}{4}} . aq^{\frac{1}{2}} . aq^{\frac{3}{4}} . aq^1 . aq^{1\frac{1}{4}} . aq^{1\frac{1}{2}} . aq^{1\frac{3}{4}}$, &c.

De la Regle de Trois, & de quelques autres Regles d'usage.

406. Je suppose que 6 Ouvriers aient fait 15 Toises d'ouvrage dans un certain temps, & que l'on demande combien en auroient fait 18 Ouvriers dans le même temps. Il est clair que plus il y aura d'Ouvriers, plus ils feront d'ouvrage, & que leur travail sera proportionnel à leur nombre. Ici, par exemple, on en emploie trois fois plus; ils feront donc trois fois plus d'ouvrage, & l'on voit bien sans calcul, que puisque six Ouv. ont fait 15 T. 18 Ouv. doivent en faire 45 dans le même temps.

Mais il n'est pas toujours aussi aisé de connoître le rapport des termes qui forment ces sortes de proportions. Pour le fixer dans tous les cas, on se sert d'une regle généralement connue sous le nom de Regle de Trois. Ce n'est qu'une application de la propriété fondamentale des proportions (379).

407. On distingue deux especes de Regle de Trois, l'une *directe*, l'autre *indirecte* ou *inverse*. Voici comment on peut les reconnoître l'une & l'autre; car c'est la seule petite difficulté que les Commençants trouvent ici.

Mettez d'abord en proportion les termes donnés & celui que vous cherchez. Ecrivez, par ex. $6^{\text{Ouv.}} . 18^{\text{Ouv.}} :: 15^{\text{T}} . x^{\text{T}}$. Remarquez ensuite que les 6 Ouv. & les 15 Toises qu'ils ont faites, sont deux *termes correspondants*, & qu'il en est de même des 18 autres Ouvriers & du nombre des toises qu'ils feront. En général la cause & l'effet sont les termes correspondants dans ces sortes d'exemples.

408. Cela posé, *Une Regle de Trois est directe, lorsque les*

termes correſpondants vont de plus au plus. Plus il y aura d'Ouvriers, plus ils feront d'ouvrage. Voilà une regle directe.

La Regle de Trois eſt inverſe, lorſque les termes correſpondants vont du plus au moins. Par exemple, plus il y aura d'Ouvriers, moins il leur faudra de temps pour faire le même ouvrage.

409. Dans les deux cas on peut diſpoſer de la même maniere le nombre des Ouvriers; mais dans la Regle de Trois directe, le terme que l'on cherche ſera mis le quatrieme, & on le déterminera en diviſant par le premier extrême le produit des deux moyens.

EXEMPLE. 51 Ouvriers ont fait 39 Toiſes, combien 17 Ouvriers en feront-ils dans le même temps?

Je diſpoſe ainſi les termes, $51^{O.} . 17^{O.} :: 39^{T.} . x^{T.}$. Je multiplie 39 par 17; le produit eſt 663 que je diviſe par 51; le quotient eſt 13. C'eſt le nombre cherché. Il eſt évident en effet que trois fois plus d'Ouvriers doivent faire trois fois plus d'ouvrage; or 51 eſt triple de 17.

410. Dans la Regle de Trois inverſe, le terme inconnu doit être mis au troiſieme rang de la proportion; & pour le déterminer, il faut diviſer le produit des extrêmes par le moyen terme connu (397).

Ex. 51 Ouvriers ont fait un certain ouvrage en 5 jours; combien en eût-il fallu à 17 Ouvriers pour le faire?

J'écris, $51^{O.} . 17^{O.} :: x^{j} . 5^{j}$; puis, $51 \times 5 = 255$, & $\frac{255}{17} = 15$. Donc $x = 15$ jours, comme cela doit être. Voici quelques autres exemples.

14 Marcs d'argent ont coûté 714 liv. combien coûteront 70 marcs?

La regle eſt évidemment directe. Je diſpoſe donc ainſi les termes, $14^{m} . 70^{m} :: 714^{tt} . x^{tt}$. J'ai enſuite $714 \times 70 = 49980$ que je diviſe par 14; le quotient eſt 3570. C'eſt la veleur de x.

J'aurois pu décompoſer les deux premiers termes, & mettre $2 \times 7 . 10 \times 7 :: 714 . x$. D'où j'aurois tiré (375) $2 . 10 :: 714 . x$. Mais 10 eſt cinq fois plus grand que 5; donc pour avoir x, il n'y a qu'à multiplier 714 par 5.

411. On abrege ſouvent le calcul par cette décompoſition. Il eſt même plus ſimple ordinairement de diviſer le ſecond terme de la proportion par le premier, & de multiplier le troiſieme par le quotient. Le produit ſera toujours le terme que l'on cherche dans les Regles de Trois directes. Pour avoir ce terme dans les Regles de Trois inverſes, il faut multiplier le quatrieme par le quotient de la diviſion du premier par le ſecond. Tout cela eſt fondé ſur les mêmes principes. Il ne faut qu'un peu d'uſage pour ſimplifier ainſi les opérations.

6 Compagnies de Cavalerie ont conſommé un Magaſin de fourage en 54 jours; en combien de jours l'euſſent conſommé 9 Compagnies?

Plus il y a de chevaux, & moins il faut de temps pour la même conſommation. La regle eſt donc indirecte. Ainſi 6^{o}. 9^{o}. :: x^{j} . 54^{j}. Donc $x = \frac{34 \times 6}{9} = 36^{j}$.

Autrement. $2 \times 3 \,.\, 3 \times 3 :: x \,.\, 54$. D'où $2 \,.\, 3 :: x \,.\, 54$; & $x = \frac{2}{3} \,.\, 54 = 36$.

Il a été donné 36 l. pour être diſtribuées à 32 Pauvres; combien faudroit-il donner pour 72 Pauvres à qui on voudroit faire la même charité?

On a d'abord $32 \,.\, 36 :: 72 \,.\, x$. Enſuite (375), $8 \,.\, 9 :: 72 \,.\, x$. Puis, $1 \,.\, 9 :: 9 \,.\, x = 81$.

S'il faut pour un meuble 6 aunes d'une étoffe large de $\frac{2}{3}$, combien en faut-il d'une étoffe large de $\frac{3}{4}$?

Il eſt clair que plus l'étoffe eſt large, moins il en faut. On a donc $\frac{2}{3} \,.\, \frac{3}{4} :: x \,.\, 6$, & réduiſant au même dénominateur, $\frac{8}{12} \,.\, \frac{9}{12} :: x \,.\, 6$. D'où, $8 \,.\, 9 :: x \,.\, 6$, ou bien $8 \,.\, x :: 9 \,.\, 6$. (383), ou encore $8 \,.\, x :: 3 \,.\, 2$, ce qui donne $x = \frac{16}{3} = 5^{Au} + \frac{1}{3}$.

412. Soit propoſé maintenant de réſoudre cette queſtion. 20 hommes ont fait 160 Toiſes en 15 jours; combien 30 hommes en feront-ils en 12 jours?

On appelle Regles de Trois *composées*, toutes celles où il entre plus de trois termes connus, comme dans cet exemple. Pour trouver alors le terme que l'on cherche, on réduira la queſtion à des Regles de Trois *ſimples*. On dira, par exemple; ſi 20 hommes ont fait 160 Toiſes, combien 30 hommes en feront-ils dans le même temps? ....

$$20 . 30 :: 160 . x ; \text{ ou, } 2 . 3 :: 160 . x = 240.$$

Donc en 15 jours 30 hommes feront 240 Toises. Mais on suppose qu'ils ne doivent travailler que pendant 12 jours. On aura donc $15 . 12 :: 240 . x$; ou $5 . 4 :: 240 . x$, ou même, $1 . 4 :: 48 . x = 192^{T}$. C'est le nombre cherché.

Il eût été facile de le trouver en disposant ainsi les termes ...... $\begin{pmatrix} 20^h \\ 15^j \end{pmatrix} . \begin{matrix} 30^h \\ 12^j \end{matrix} :: 160^T . x.$ & en multipliant 20 par 15 & 30 par 12. Car 20 hommes qui travaillent 15 jours, font 300 journées de travail pendant que 30 hommes qui travailleront 12 jours en feront 360. Mais si 300 journées de travail ont produit 160 Toises, il est clair que 360 journées en produiront 192, parce que $300 . 360$, ou $30 . 36$, ou $5 . 6 :: 160 . 192$.

On peut même résoudre cette question sans employer la Regle de Trois, en disant ; 160 toises en 15 jours font $\frac{160}{15}$ par jour, dont la vingtieme partie, ou $\frac{160}{15 \times 20}$ est l'ouvrage que fait chaque homme par jour. 30 hommes feront donc $30 \times \frac{15 \times 20}{160}$, ou $\frac{30 \times 160}{15 \times 20}$ chaque jour ; & par conséquent en 12 jours ils feront $\frac{12 . 30 . 160}{15 . 20} = \frac{12 . 2 . 8}{1 . 1} = 192.$

Nous n'insisterons pas sur des choses aussi aisées. Quand on a quelque habitude de calcul, ces regles se présentent naturellement à l'esprit, où on en imagine d'autres qui valent quelquefois mieux.

La Regle de Trois est du plus grand usage dans toutes les parties de Mathématiques. Elle sert beaucoup aussi dans quelques autres regles que nous allons parcourir.

413. *Regle de Compagnie.* Deux Négocians ont mis 12000 l. en société dans le commerce, & ils ont gagné 1350 l. Ils veulent partager ce gain à raison de leurs mises, qui sont 8000 l. pour le premier Négociant, & 4000 l. pour le second. Que doit-il revenir à chacun ?

Dites, la mise totale 12000 l. est au gain total 1350 l. comme la mise de chaque Négociant est au gain qu'il doit faire.

12000 . 1350 :: 8000 . x; ou 1200 . 135 :: 8000 . x; ou encore, 400 . 45 :: 8000 . x; ou bien 80 . 9 :: 8000 . x; ou enfin, 1 . 9 :: 100 . x = 900 l. c'eſt le gain du premier. Ce qui reſte de 1350 l. eſt le gain du ſecond. Tont cela eſt aiſé.

Trois amis ont fait une bourſe commune pour le jeu. Le premier a donné 117 l. le ſecond 72; le troiſieme 54. Ils ont perdu 93 l. Quelle eſt la perte de chacun?

$$243 \cdot 93 :: \left\{ \begin{array}{l} 117 \cdot x = \dfrac{117 \times 93}{243} = 44 + \frac{189}{243} \\ 72 \cdot x = \dfrac{72 \times 93}{243} = 27 + \frac{135}{243} \\ 54 \cdot x = \dfrac{54 \times 93}{243} = 20 + \frac{162}{243} \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 93 \end{array} \right.$$

On eût pu diviſer d'abord les deux premiers termes par 3, & diviſer enſuite par 9 le quotient du premier & chacun des troiſiemes termes, en diſant;

$$81 \cdot 31 :: \left\{ \begin{array}{l} 117 \cdot x \\ 72 \cdot x \\ 54 \cdot x \end{array} \right.$$

$$\text{Puis, } 9 \cdot 31 :: \left\{ \begin{array}{l} 13 \cdot x = 44 + \frac{7}{9} \\ 8 \cdot x = 27 + \frac{6}{9} \\ 6 \cdot x = 20 + \frac{5}{9} \end{array} \right.$$

On vérifie ces ſortes de regles en ajoutant les pertes ou les gains de tous les aſſociés. La ſomme doit toujours être la perte totale ou le gain total.

414. Lorſqu'outre les miſes particulieres, il y a encore des temps différens, la regle de compagnie s'appelle *compoſée*.

EXEMPLE. A, B & C ont gagné 1660 l. 12 ſ. avec un fonds qu'ils avoient mis en ſociété. Il s'agit de partager ce gain en raiſon des miſes. Celle de A eſt de 4500 pendant 6 mois; celle de B eſt de 3000 l. pendant 8 mois. C a mis 2250 pendant dix mois.

Multipliez d'abord chaque miſe par le temps qu'elle a été employée, & dites enſuite ; la ſomme de tous ces produits eſt au gain total, comme chaque produit en particulier eſt à la partie proportionnelle de gain que je cherche.

$$\text{A}\ldots \begin{array}{r} 4500 \\ 6 \\ \hline 27000 \end{array} \qquad \text{B}\ldots \begin{array}{r} 3000 \\ 8 \\ \hline 24000 \end{array} \qquad \text{C}\ldots \begin{array}{r} 2250 \\ 10 \\ \hline 22500 \end{array}$$

La ſomme de ces produits eſt 73500 ; d'ailleurs 12 ſ. $= \frac{6}{10}$ de livre. J'ai donc,

$$73500 \,.\, 1660{,}6 :: \left\{ \begin{array}{l} 27000 \,.\, x \\ 24000 \,.\, x \\ 22500 \,.\, x \end{array} \right.$$

ou bien, diviſant par 300 le premier terme & chacun des troiſiemes.

$$245 \,.\, 1660{,}6 :: \left\{ \begin{array}{l} 90 \,.\, x = 610 \text{ l.} + \frac{4}{245} \\ 80 \,.\, x = 542 \quad + \frac{58}{245} \\ 75 \,.\, x = 508 \quad + \frac{85}{245} \\ \hline \qquad\quad 1660 \text{ l.} + \frac{147}{245} \end{array} \right.$$

La fraction $\frac{147}{245}$ ſe réduit (109) à $\frac{3}{5} =$ 12 ſ.

415. *La Regle d'Alliage* conſiſte, ou à trouver le prix moyen d'un mélange formé de pluſieurs choſes différentes, dont les quantités & les prix ſont donnés ; ou à trouver dans quelle proportion il faut prendre de chacune de ces choſes, lorſque leurs prix & le prix moyen ſont connus.

PREMIER CAS. A quel prix faudroit-il vendre le marc d'un alliage formé avec 6 marcs d'argent à 48 l. & 12 marcs d'argent à 36 l. pour n'y rien perdre, ni gagner ?

Multipliez chaque partie de l'alliage par ſon prix reſpectif, & diviſez la ſomme des produits par celle des quantités mêlées ; le quotient ſera le prix moyen.

$$\begin{array}{rl} 6 \times 48 \text{ l.} & = 288 \\ 12 \times 36 & = 432 \\ \hline 18 & \quad 720 \end{array} \qquad \frac{720}{18} = 40 \text{ l. prix cherché.}$$

Cette méthode eſt fondée ſur la Regle de Trois que voici. La ſomme des marcs eſt à celle de leurs prix, comme un ſeul marc de l'alliage eſt au prix moyen. Cette proportion, qui eſt évidemment juſte, donne $18 . 720 :: 1 . x = \frac{720}{18} = 40$.

416. Remarquez en paſſant que *toutes les fois que l'unité eſt un des termes de la Regle de Trois, le terme que l'on cherche eſt le produit ou le quotient des deux autres.*

On vérifie le premier cas de la Regle d'alliage, en évaluant tout le mélange au prix moyen. Sa valeur doit être égale à la ſomme des valeurs particulieres.

Il eût été facile de trouver une formule algébrique qui eût indiqué la méthode dont nous venons de nous ſervir.

SECOND CAS. Le prix moyen, & celui de chaque partie de l'alliage étant connus, il peut arriver, 1.° qu'aucune des quantités dont le mélange doit être formé, ne ſoit fixée. 2.° Qu'il y en ait une qui le ſoit. 3.° Que l'on ſoit reſtraint à une certaine quantité d'alliage. Les exemples vont éclaircir cela.

1.° Un Marchand de vin voudroit mêler du vin à 15 ſ. la pinte avec du vin à 8 ſ. pour en avoir qu'il pût vendre 12 ſ. la pinte. Combien doit-il prendre de chaque eſpece pour faire ce mélange?

Après avoir ainſi diſpoſé les trois prix...... $12 \begin{cases} 15 \ldots 4 \\ 8 \ldots 3 \end{cases}$ je prends la différence 3 de 12 à 15, & je la mets vis-à-vis 8. Je place réciproquement vis-à-vis 15 la différence 4 de 12 à 8, & je conclus que trois pintes de vin à 8 ſ. mêlées avec 4 pintes de vin à 15 feront du vin à 12 ſ. Cela eſt évident par la compenſation qui ſe fait des deux prix, l'un ſupérieur, l'autre inférieur au prix moyen.

417. Il ne faut cependant pas conclure de cette compenſation, que les nombres 4 & 3 ſoient les ſeuls qui ſatisfaſſent aux conditions du problême. Car c'eſt ici une queſtion iedéterminée qui a une infinité de ſolutions, même en nombres entiers. Il ſuffit pour les trouver, de prendre deux nombres qui ſoient dans le même rapport que 4 & 3; & pour cela, il n'y a qu'à les doubler, tripler, &c.

418. Si le mélange devoit être fait avec du vin à 15 ſ. à 10 & à 8, pour avoir encore du vin à 12, on s'y prendroit à peu

près de la même maniere. C'est-à-dire, qu'après avoir comparé 15 & 8 avec le prix moyen 12, & disposé réciproquement les différences 3 & 4, on compareroit 15 & 10 avec le même prix moyen 12, & on disposeroit réciproquement aussi leurs différences 3 & 2. Voyez l'exemple.

Six pintes de vin à 15 s. 3 pintes à 10, & 3 pintes de vin à 8, mêlées ensemble, feroient donc 12 pintes de vin à 12 s. La preuve en est aisée.

12	15 .. 4 . 2 = 6	
	10 .. 3	
	8 .. 3	
	12	

S'il devoit entrer dans le mélange quatre, cinq, ou six sortes de vin à différens prix, on les compareroit successivement deux à deux avec le prix moyen, en observant seulement de ne comparer à la fois que deux prix dont l'un seroit plus fort, l'autre plus foible que le prix moyen.

2.° Dans un temps de disette un Boulanger veut faire du pain avec de l'orge, du seigle & du froment, & le vendre 4 sous la livre. Il a 8 boisseaux & demi de froment qui feroient du pain à 5 s. la livre. Le pain fait avec le seigle seul reviendroit à 3 s. 8 d. Celui qu'il feroit avec l'orge coûteroit 1 s. 6 d. la livre. On demande combien il doit mêler de seigle & d'orge avec ces 8 boisseaux & demi de froment, pour faire du pain à 4 s. la livre ?

Le prix moyen est ici 48 d. J'en prends les différences avec les autres prix, comme dans l'exemple précédent, & je dis ;

48	60 .. 30 .. 4	
	44 .. 12	
	18 .. 12	

Pour faire du pain à 4 s. la livre avec les prix marqués, on pourroit donc prendre 34 boisseaux de froment, & les mêler avec 12 boisseaux de seigle & 12 boisseaux d'orge. Mais puisque la quantité de froment est fixée, il est clair que s'il faut 12 boisseaux de seigle & 12 d'orge sur 34 de froment, il en faudra sur $8\frac{1}{2}$ une quantité proportionnelle que je déterminerai par cette Regle de Trois,

$$34 \,.\, 8\tfrac{1}{2} :: 12 \,.\, x = 3 \text{ boisseaux} \left(\begin{array}{l} \text{de seigle.} \\ \text{d'orge.} \end{array} \right.$$

Il en est de même pour un plus grand nombre de choses à

mêler,

mêler, quand on connoît leurs prix & la quantité de l'une d'entr'elles.

3.° On a trois ſortes de caffé. La livre du premier vaut 50 ſ. celle du ſecond en vaut 38, celle du troiſieme 24. Trouver dans quelle proportion il faut les mêler pour en faire 64 livres que l'on puiſſe vendre 30 ſ.?

Prenez les différences comme ci-deſſus, & après les avoir ajoutées, dites : la ſomme des différences eſt à la quantité de mélange que l'on veut faire, comme chaque différence en particulier eſt à la quantité qu'il faut en prendre.

$$30\left|\begin{array}{l} 50\,..\,6 \\ 38\,..\,6 \\ 24\,..\,20\,.\,8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \hline 40 \end{array} \qquad 40\,.\,64 :: \left\{\begin{array}{l} 6\,.\,x = 9\tfrac{3}{5} \\ 6\,.\,x = 9\tfrac{3}{5} \\ 28\,.\,x = 44\tfrac{4}{5} \\ \hline \quad\quad\quad\; 64 \end{array}\right.$$

419. On peut varier cette ſolution par la méthode des problêmes indéterminés (293). Car il ne faut pas croire que l'arithmétique ſatisfaſſe pleinement à ces ſortes de queſtions, quoiqu'il ſemble d'abord qu'il n'y ait pas d'autre maniere de remplir les conditions du dernier problême. Elle n'eſt ni la ſeule, nous allons en trouver d'autres, ni la plus commode, elle exige des fractions.

J'exprime ainſi ces conditions ; $x+y+z=64$, & $50x+38y+24z=64\times 30$, ou $25x+19y+12z=960$. La premiere équation donne $x=64-y-z$; d'où $z=\dfrac{640-6y}{13}$.

Bornons-nous à déterminer en nombres entiers les valeurs de ces trois inconnues. z doit donc être un entier, ainſi que $\dfrac{640-6y}{13}$, & que $\dfrac{1920-18y}{13}$. Il faut donc que le quotient $147-y+\dfrac{9-5y}{13}$ en ſoit un auſſi, de même que ſa partie $\dfrac{9-5y}{13}$. Mais cette partie multipliée par 5, ou $\dfrac{45-25y}{13}$ doit en être encore un, ainſi que $\dfrac{26y}{13}$. Ajoutant donc ces deux dernieres quantités, leur ſomme $\dfrac{45+y}{13}$ ſera un nombre entier. Je le déſigne par E, & j'ai $y=13E-45$.

Supposons à présent, pour éviter les valeurs négatives, que E $=4$. Donc $y=7$; c'est le moins que l'on puisse prendre de café à 38 s. la livre pour faire la quantité proposée de mélange. Substituant cette valeur de y dans l'équation $z=\frac{640-6y}{13}$, on trouve $z=46$; c'est le plus qu'on puisse prendre de café à 24 s. La valeur correspondante de x est 11; & ces trois quantités remplissent les deux conditions du problême.

Supposons ensuite E $=5$; nous aurons $y=20$, $z=40$, $x=4$, qui les rempliront aussi. En continuant les progressions arithmétiques (294), nous trouverions dès le troisieme terme, $y=33$, & $z=34$, ce qui ne peut être. On ne peut donc faire 64 livres de café à 30 s. avec du café à 50, à 38, & à 24 s. pris en nombres entiers, que de deux manieres.

420. *La Regle de fausse position* sert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre supposé. Soit proposé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart & le cinquieme fassent 456.

Je suppose que ce nombre est 20. Mais il est clair que la moitié, le quart & le cinquieme de 20 ne font que 19. Ma supposition est donc fausse. Elle n'en servira pas moins cependant à me faire connoître le nombre demandé. Car puisque deux quantités sont toujours entr'elles comme leurs parties semblables (376), on peut les regarder l'une comme la somme des antécédens d'une suite de termes proportionnels, l'autre comme la somme des conséquens. Or ces deux sommes sont entr'elles (386), comme un nombre quelconque d'antécédents est au même nombre de conséquens, & réciproquement; donc la moitié plus le quart plus le cinquieme de 20, sont à la moitié plus au quart plus au cinquieme du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même est au nombre cherché. J'ai donc, $19 . 456 :: 20 . x=480$.

Trois Négocians ont perdu 2400 l. en société. Cette perte devant être répartie à proportion des mises, & celle du premier Négociant étant égale à la somme des deux autres, pendant que celle du second est double de celle du troisieme, on demande quelle doit être la perte de chacun?

Si je suppose que la mise du troisieme est de 3 l. celle du second doit être de 6, & celle du premier, de 9. D'où je conclus que

$$18 . 2400, \text{ ou } 3 . 400 :: \begin{cases} 3 . x = 400 \\ 6 . x = 800 \\ 9 . x = 1200 \end{cases}$$

Une infinité d'autres nombres formés ſuivant les mêmes conditions que 18, auroient donné le même réſultat.

Combien faudroit-il de temps pour remplir un baſſin, en ouvrant tout à la fois quatre robinets, dont le premier ſeul le rempliroit en 2 heures, le ſecond en 3, le troiſieme en 5, & le quatrieme en 6?

Suppoſons qu'il fallût une heure, & voyons ſi le baſſin ſe trouveroit rempli. Il eſt clair que dans cet intervalle le premier robinet en rempliroit la moitié, que le ſecond en rempliroit le tiers, &c. & qu'ainſi les quatre à la fois fourniroient dans une heure de quoi remplir $\frac{36}{30}$ ou $\frac{6}{5}$ du baſſin. Il ne faut donc pas une heure. Pour déterminer au juſte ce qu'il faut, on dira....

$$\tfrac{6}{5} . \tfrac{5}{5}, \text{ ou } 6 . 5 :: 1^{h} . x = \tfrac{5}{6}^{h} = 50'$$

421. Il arrive ſouvent qu'une premiere ſuppoſition ne ſuffit pas pour réſoudre des queſtions à peu-près ſemblables. On en fait alors une ſeconde. C'eſt ce qu'on appelle *la Regle de double fauſſe poſition.*.

EXEMPLE. Pour engager un ouvrier pareſſeux à travailler, on lui promet un écu par jour, à condition que les jours où il ne travaillera pas, il ne recevra rien, & qu'il perdra au contraire 24 ſ. chaque fois. Au bout de 15 jours l'ouvrier ne reçoit que 24 l. Combien de jours a-t-il travaillé?

Je ſuppoſe qu'il a travaillé pendant 6; mais je vois que dans cette ſuppoſition il n'auroit dû recevoir que 7 l. 4 ſ. Il en a cependant reçu 24. Je ſuis donc en erreur de 16 l. 16 ſ. ou de 16, 8 l. en moins; d'où je conclus que cet ouvrier a travaillé plus de 6 jours.

Suppoſons donc qu'il en a travaillé 12, & voyons quel en ſera le réſultat. L'ouvrier auroit dû recevoir 32 l. 8 ſ. L'erreur eſt donc de 8 l. 8 ſ. ou de 8,4 l. en plus: ce qui eſt d'ailleurs évident.

Je diſpoſe ainſi les deux nombres ſuppoſés & les erreurs correſpondantes;

$$\begin{array}{cc} 6^j & 12^j \\ -16,8 & +8,4 \end{array}$$

Puis je multiplie le premier nombre par la ſeconde erreur, & le ſecond nombre par la premiere. Les produits ſont 50,4 & 201,6. Je les ajoute, & diviſant leur ſomme 252 par celle des erreurs 25,2 je trouve 10 pour quotient. C'eſt le nombre cherché.

Si les deux nombres ſuppoſés avoient donné deux erreurs en plus ou en moins, j'aurois diviſé ſeulement la différence des produits par celle des erreurs.

Ex. Après avoir trouvé par la premiere ſuppoſition que cet ouvrier a travaillé pendant plus de 6 jours; je ſuppoſe qu'il a travaillé pendant 9. L'erreur ſera encore en moins, de $4^{tt}, 4^{s} = 4,2^{tt}$. J'ai donc

$$\begin{array}{cc} 6^j & 9^j \\ 16,8 & 4,2 \end{array}$$

puis, $6 \times 4,2 = 25,2$; $9 \times 16,8 = 151,2$; $151,2 - 25,2 = 126$; $16,8 - 4,2 = 12,6$; & $\frac{126}{12,6} = 10$, comme ci-deſſus.

422. Rapprochons maintenant les diverſes opérations de la regle de double fauſſe poſition. Elles conſiſtent à ſuppoſer un nombre que l'on aſſujettit aux conditions du problême. S'il y ſatisfait, comme cela arrive quelquefois, le problême eſt réſolu. S'il n'y ſatisfait pas, on marque l'erreur ſoit poſitive, ſoit négative, & on ſuppoſe un autre nombre, dont on marque auſſi l'erreur. Enſuite, on multiplie la premiere erreur par le ſecond nombre, & la ſeconde erreur par le premier. Cela fait, on diviſe la ſomme des deux produits par celle des deux erreurs, lorſque leurs ſignes ſont différens. S'ils ſont les mêmes, c'eſt la différence des produits qu'il faut diviſer par la différence des erreurs. Le quotient eſt le nombre cherché.

AUTRE EX. Deux amis jouant enſemble, celui qui joue le mieux parie 12 ſ. contre 8 à chaque partie. Après en avoir joué dix, l'autre lui paie 20 ſ. Combien a-t-il gagné de parties ?

S'il en eût gagné 6, l'autre en eût gagné 4 & ils euſſent été quittes. La premiere erreur eſt donc — 20. S'il en eût gagné 8, l'autre lui auroit dû 40 ſ. La ſeconde erreur eſt donc + 20. D'où l'on voit ſans autre calcul qu'il en a gagné 7.

6	8	ſom. des prod. . .	280
— 20	+ 20	ſom. des err. . . .	40

$$\frac{280}{40} = 7$$

423. On peut appliquer la Regle de fauſſe poſition à pluſieurs des problêmes que nous avons déja réſolus ou propoſés (288 & 291). On peut auſſi l'abréger de la maniere ſuivante.

Après avoir ſuppoſé deux nombres, & déterminé leurs erreurs, comme ci-deſſus, multipliez la différence des deux nombres par la plus petite erreur, & diviſez-en le produit par la ſomme des erreurs, ſi l'une eſt en plus & l'autre en moins, ou par leur différence ſi elles ſont toutes deux de même ſigne. Le quotient eſt ce qu'il faut ajouter ou ſouſtraire au nombre qui a donné la plus petite erreur. On l'ajoute, quand ce nombre eſt le plus petit des deux, & que les ſignes des erreurs ſont différents. On le ſouſtrait, quand ce nombre eſt le plus petit & que les deux erreurs ſont de même ſigne. La ſomme ou le reſte donnent le nombre cherché. C'eſt tout le contraire, lorſque le nombre qui répond à la plus petite erreur eſt le plus grand. Un ou deux exemples ſuffiront. Voyez d'abord celui qui précede.

Les deux nombres pris à volonté ſont 6 & 8; leur différence eſt 2. Je la multiplie par — 20 ou par + 20, (il n'importe puiſque les deux erreurs ſont égales aux ſignes près, & que l'on ne tient ici aucun compte des ſignes ſoit en multipliant ſoit en ajoutant): puis je diviſe le produit 40 par la ſomme des erreurs qui eſt auſſi 40. Le quotient 1 eſt la correction qu'il faut faire à l'un des deux nombres ſuppoſés.

Pour la faire au nombre 6 qui répond à — 20, je remarque, 1.° que 6 eſt plus petit que 8; 2.° que les ſignes des erreurs ſont différens. Il faut donc ajouter 1 à 6 pour avoir le nombre demandé, &c.

Quatre Domeſtiques ont reçu des gratifications après la mort de leur maître. Le plus ancien a eu 200 l. de plus que le ſuivant ; celui-ci a eu 300 l. plus que le troiſieme, & le troiſieme 400 l. plus que le dernier ; enſorte que la gratification du dernier n'a été que le quart de celle du premier. On demande ce qu'ils ont eu chacun ?

Je ſuppoſe d'abord que le premier a eu 2000 l. auquel cas le dernier a dû avoir 1100 l. Mais le quart de 2000 l. n'eſt que 500 l. La premiere erreur eſt donc + 600.

Je ſuppoſe enſuite que le premier n'a eu que 1600 l. dont le quart eſt 400. Mais dans cette ſuppoſition le dernier auroit eu 700 l. La ſeconde erreur eſt donc + 300. Je multiplie la différence des deux nombres ſuppoſés par la plus petite erreur. Le produit eſt 120000 l. que je diviſe par 300 (différence des deux erreurs).

2000	1600
+ 600	+ 300

Le quotient eſt 400 l. Or le nombre qui répond à la plus petite erreur eſt le plus petit, & les ſignes ſont les mêmes ; il faut donc ſouſtraire 400 l. de 1600 pour avoir le nombre cherché. C'eſt 1200 l.

424. La regle de double fauſſe poſition n'eſt, comme l'on voit, qu'un tâtonnement ; mais un tâtonnement précieux, auquel on eſt obligé d'avoir ſouvent recours dans les équations de la haute géométrie, dans les calculs aſtronomiques, &c. Voyons ſur quoi elle eſt fondée. Pour me rendre plus intelligible, je prends de tous les exemples le plus aiſé.

On demande deux nombres dont la ſomme ſoit 13, & la différence 5 ? je ſuppoſe que le plus petit eſt 2 ; le plus grand ſera 7, & leur ſomme 9 ; la premiere erreur eſt donc — 4. Je ſuppoſe enſuite que le plus petit nombre eſt 3. Le plus grand ſera 8, la ſomme 11, la ſeconde erreur — 2. Je ſais d'ailleurs (283) que le nombre cherché eſt 4, & je vois que la premiere erreur eſt à la ſeconde, comme la différence entre le premier nombre ſuppoſé & le nombre cherché eſt à la différence entre le ſecond nombre ſuppoſé & le même nombre cherché ; car — 4 . — 2 :: 2 . 1. Reſte donc à chercher une méthode générale pour trouver en pareil cas le nombre inconnu.

Soit x le nombre cherché, a le premier nombre ſuppoſé, b le ſecond, c la premiere erreur, d la ſeconde. Je dis que toutes les fois qu'il y aura proportion entre les erreurs & les différences indiquées, on aura $c \,.\, d :: x - a \,.\, x - b$; & que par conſéquent $x = \frac{bc - ad}{c - d}$. *Il faut donc multiplier chaque nombre ſuppoſé par l'erreur qui répond à l'autre, & diviſer la différence de ces produits par celles des erreurs, lorſqu'elles ont le même ſigne. Si les deux erreurs avoient des ſignes contraires, ce ſeroit la ſomme des produits qu'il faudroit diviſer par la ſomme des erreurs*; puiſque d, par exemple, étant une quantité négative, la formule devient $x = \frac{bc + ad}{c + d}$ (185). La regle eſt donc démontrée. Paſſons à l'abrégé.

425. Quand aucun des deux nombres ſuppoſés n'eſt celui que l'on cherche, il ne s'agit que de trouver la correction néceſſaire pour le réduire au nombre cherché. Soit donc y cette correction, d la plus petite erreur, b le nombre qui l'a produite, & le reſte comme ci-deſſus. Il eſt clair que ſi b eſt plus petit que x, on aura $b + y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$. Dans ce cas, $y = \frac{(b - a)\,d}{c - d}$: mais ſi b eſt plus grand que x, alors $b - y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, & $y = \frac{(a - b)\,d}{c - d}$. C'eſt-à-dire, que *dans les deux cas il faut multiplier la différence des deux nombres ſuppoſés par la plus petite erreur & diviſer ce produit par la différence des erreurs lorſqu'elles ont le même ſigne, ou par leur ſomme lorſqu'elles en ont de différens. Le quotient eſt toujours la correction cherchée.*

426. REMARQUE. Quand on applique cette regle à la recherche des racines des équations & des logarithmes des petits nombres, on eſt d'abord étonné que le réſultat ne ſoit pas bien exact. Mais c'eſt qu'alors les erreurs ne ſont pas exactement comme les différences, & que cette regle ſuppoſe toujours cette proportion. Ainſi le réſultat ſera plus ou moins conforme à la vérité, ſuivant que le rapport des erreurs approchera plus ou moins de celui des différences. Voilà pourquoi dans les équations, il faut tâcher de prendre pour

x deux nombres peu éloignés de celui que l'on cherche (327). Voilà pourquoi aussi les logorithmes des petits nombres doivent se prendre avec des caractéristiques un peu fortes, comme 3 ou 4.

427. IV. *La Regle d'intérêt* a pour but de fixer la somme due pour de l'argent prêté sous certaines conditions.

On peut les varier à l'infini, & c'est ce qui rend assez compliqué le calcul nécessaire en plusieurs cas. Nous nous bornerons à ceux qui sont le plus en usage; & comme la Regle de Trois résout presque tous ceux-là, nous laissons à chacun le soin de l'appliquer aux questions suivantes. Considérons la chose un peu plus généralement.

1.° Un vieux usurier prête 15600 l. à 8 pour cent par an. Quelle somme faudra-t-il lui donner dans cinq ans pour le rembourser & lui payer en même temps l'intérêt de son argent?

Soit $p = 15600$ l. que l'on appelle le *Principal*, ou le *Fonds* ou le *Capital*. Soit $t = 5$ ans, ou le temps pendant lequel l'intérêt court. Soit $r =$ ce que rapporte 1 l. dans un an, ou en général dans le temps que 100 l. en rapportent 8. (On trouve la valeur de r en disant si 100 l. en rapportent 8, que rapportera 1 l. dans le même temps? $100 . 8 :: 1 . r = 0,08$). Soit enfin $s =$ la somme due tant pour le fonds que pour les intérêts.

Cela posé, nous aurons $1^{tt} . r :: p^{tt} . x = pr =$ l'intérêt du principal pour un an. Mais si au bout d'un an l'intérêt est pr, il sera prt au bout d'un temps t: car $1^{a} . pr :: t^{a} . x = prt$. Réunissant donc le principal (p) & l'intérêt (prt), on aura généralement la somme demandée $(s) = p + prt$; d'où l'on tire . . . .

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{s}{rt+1} \\ r &= \frac{s-p}{pt} \\ t &= \frac{s-p}{pr} \end{aligned}\right.$$

Substituons les valeurs, & nous trouverons $s = 15600 + 15600 \times 0,08 \times 5 = 21840$ l.

Si la question eût été énoncée de cette maniere. Au bout de cinq ans il a été payé tant pour le fonds que pour les intérêts à 8 pour cent, la somme de 21840 l. Quel étoit le fonds? On eût substitué ces valeurs dans la formule $p = \frac{s}{rt+1}$ qui eût donné 15600 l. On trouveroit de même le temps ou l'intérêt d'une livre, connoissant les trois autres choses.

428. 2.° Un Commerçant doit payer cent piſtoles chaque année à un de ſes confreres ; mais comme il a beſoin de ſon argent, il le prie de ne pas en exiger pendant 8 ans, & lui promet de payer tous les arrérages avec les intérêts à 5 pour 100.

J'appelle a ce qui eſt dû chaque année, ſoit *Rente*, ou *Annuité*, ſoit *Penſion*, &c. J'appelle r l'intérêt de 1 l. pendant un an ; t le temps après lequel ſeront payés les intérêts & les arrérages dont je déſigne la ſomme par s ; & je dis. La rente ne doit être payée qu'à la fin de l'année. Le Commerçant ne devra donc aucun intérêt pour la premiere année. Mais à la fin de la ſeconde il en devra ar ; à la fin de la troiſieme, $2ar$; & ainſi de ſuite juſqu'à la fin de la derniere, où les intérêts dus ſeront exprimés par $ar(t-1)$.

Or ces intérêts forment une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt zéro, le dernier, $ar(t-1)$ & le nombre des termes, t. Leur ſomme eſt donc (359) $\frac{t(t-1)ar}{2}$; & cette ſomme réunie à ce qui eſt dû pour la rente doit former la ſomme des arrérages & des intérêts. On a donc $s = art\frac{(t-1)}{2} + at = \overline{r(t-1)+2} \times \frac{at}{2}$, qui donne . . $a = \frac{2s}{\overline{r(t-1)+2} \times t}$ . . . $r = \frac{2s-2at}{at(t-1)}$ $t = \sqrt{\frac{2s}{ar} + \left(\frac{2-r}{2r}\right)^2} + \frac{r-2}{2r}$.

Subſtituant les valeurs, on trouvera $s = \overline{0{,}05 \times 7 + 2} \times \frac{8000}{2} = 9400$ l. Et ſi on connoiſſoit s, r, t, on trouveroit a par la formule $a = \frac{2s}{(r(t-1)+2)t}$; &c. &c.

429. Ces ſortes de queſtions appartiennent à ce que l'on appelle Regle d'intérêt *ſimple*. Les deux ſuivantes ſe réſolvent par la Regle d'intérêt *composé* ou *redoublé*. On appelle ainſi l'intérêt qui ſe prend ſur le fonds & ſur les intérêts de ce fonds, quand on ne les paie pas à leur échéance. La loi, à laquelle ſeule il appartient de fixer le taux de l'intérêt, proſcrit l'intérêt redoublé. Il peut arriver cependant que l'uſage en ſoit légitime. Voici deux exemples.

3.° Une partie des biens d'un Pupille conſiſte dans une ſomme de 20000 l. que ſon Tuteur a placée à 5 pour 100. Au bout d'un an la perſonne qui avoit emprunté cette ſomme, la rembourſe & en paie l'intérêt convenu. Le Tuteur trouvant auſſi-tôt une occaſion de placer cet argent au même intérêt, forme un nouveau principal de la ſomme des 20000 l. & de l'intérêt qu'elle a produit pendant un an, & place ce principal. Il place de même à la fin de la troiſieme l'intérêt de la ſeconde, & ainſi de ſuite pendant ſix ans. Que doit-il à ſon Pupille pour cette partie de ſon adminiſtration?

Soit $p = 20000$ l. qui ſont ici le principal; ſoit $t = 6$ ans; $s =$ la ſomme due par le Tuteur; $r =$ l'intérêt ſimple d'une livre; $q = 1^{tt} + r =$ une livre plus ſon intérêt. On trouve q par cette proportion. Si 100 l. en produiſent 105 au bout d'un an, que produira 1 l.? ou $100 . 105 :: 1 . q = 1,05$.

Il eſt clair maintenant que ſi 1 l. produit q dans un an, q produira la ſeconde année q^2; car $1 . q :: q . q^2$. La ſomme due pour 1 l. & pour ſon intérêt redoublé pendant deux ans ſera donc q^2. Elle ſera q^3 pour trois ans, & q^t pour un nombre t d'années. Mais puiſque 1 l. produit q^t dans un temps t, p l. produiront pq^t dans le même temps. On aura donc $s = pq^t = 20000 \times 1,05^6 = 20000 \times 1,3401 = 26802$ l. dont le Tuteur eſt redevable à quatre ou cinq ſous de moins.

La formule $s = pq^t$ donne 1.° $p = \frac{s}{q^t}$; 2.° $q = \sqrt[t]{\frac{s}{p}}$ ou $L.q = \frac{L.s - L.p}{t}$; 3.° $t = \frac{L.s - L.p}{L.q}$. Les Logarithmes abregent beaucoup le calcul dans les problêmes de ce genre. Il y en a même qui ne peuvent ſe réſoudre autrement.

430. 4.° Un Banquier perçoit en 1769 une Rente de 2400 l. & il place ce revenu à 4 pour 100 en 1770. Il recevra donc à la fin de 1770, 2400 l. pour ſa Rente & 96 l. pour l'intérêt de celle qu'il avoit perçue en 1769. Son projet eſt de placer ainſi tous les ans juſqu'en 1777 la Rente de l'année précédente avec les intérêts des autres années. On demande combien il recevroit d'argent, ſi à la fin de 1776 les

personnes qui lui ont emprunté, le remboursoient toutes à la fois ?

Soit $a = 2400$ l. $t = 8$ ans; $r = 0,04 =$ l'intérêt annuel d'une livre; $q = 1^{lt} + r = 1,04$; $s =$ la somme demandée; & nous aurons $a =$ ce qui est dû au Banquier en 1769; $2a + ar = a + aq =$ ce qui lui est dû en 1770; $a + aq + aq^2 =$ ce qui lui est dû en 1771; & ainsi de suite jusqu'à ce qui lui sera dû à la fin d'un nombre t d'années, dont la valeur est $a + aq + aq^2 \ldots + aq^{t-1}$. Or la somme de cette progression est (399) $\frac{q \times q^{t-1} - 1}{q - 1} \times a = \frac{q^t - 1}{r} \times a$.

La somme due après un nombre t d'années est donc généralement exprimée par $s = \frac{q^t - 1}{r} \times a$; formule qui donne ici $s = \frac{(1,04)^8 - 1}{0,04} \times 2400 = 22140$ l. à bien peu de chose près.

Elle donne aussi $a = \frac{rs}{q^t - 1}$; $t = \frac{L.\left(\frac{rs}{a} + 1\right)}{L.q}$; & $\frac{s}{a} q - q^t = \frac{s - a}{a}$, en substituant $q - 1$ au lieu de r. Or cette derniere équation donnera au moins une valeur approchée pour q, si elle n'a pas de diviseur commensurable. On pourra donc en déduire la valeur de r qui étant multipliée par 100 fera connoître le taux de l'intérêt toutes les fois que t, s, & a seront connus.

Quelques notions sur les Séries.

431. On appelle *Série* ou *Suite* un assemblage de termes qui pris consécutivement croissent ou décroissent suivant une même loi : telles sont les progressions arithmétiques & géométriques.

532. On appelle *suite finie* celle dont le nombre des termes est limité, & *suite infinie* celle qu'on suppose continuée jusqu'à l'infini.

433. Les suites dont les termes vont en augmentant de

grandeur, s'appellent *divergentes*, & celles dont les termes décroissent de grandeur s'appellent *convergentes*. Une suite diverge ou converge d'autant plus que chaque terme croît ou décroît plus rapidement à l'égard de celui qui le précede.

434. Il y a trois principales suites de nombres. Celles des nombres *figurés* ou de différens ordres, celles des nombres *polygones*, & celles des puissances.

I. Les suites des nombres figurés commencent ainsi . . . .

Nombres	Constants ou du premier ordre	1,1, 1, 1, 1, 1, &c.
	Naturels ou du second ordre	1,2, 3, 4, 5, 6, &c.
	Triangulaires ou du troisieme ordre . .	1,3, 6,10,15,21, &c.
	Pyramidaux ou du quatrieme ordre . . .	1,4,10,20,35,56, &c.

435. La loi des suites des nombres figurés est, que chacun de leurs termes doit être la somme des termes correspondants de la suite précédente. Ainsi la seconde suite est formée de l'addition continuelle des unités; les termes de la troisieme suite sont formés de l'addition continuelle de ceux de la seconde. Par exemple, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, $1+2+3+4+5=15$, &c.

436. II. Les nombres polygones sont des nombres formés par la somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique qui commence par 1. Et ces nombres s'appellent triangulaires, quarrés, pentagones, hexagones, &c. selon que la différence qui regne dans la progression est 1, 2, 3, 4, &c.

Progressions Arithmétiques.		Nombres Polygones.	
1,2,3, 4, 5, &c.	Diff. . 1 . . .	1,3, 6,10,15 &c.	Triangulaires.
1,3,5, 7, 9, &c.	Diff. . 2 . . .	1,4, 9,16,25 &c.	Quarrés.
1,4,7,10,13, &c.	Diff. . 3 . . .	1,5,12,22,35, &c.	Pentagones.
1,5,9,13,17, &c.	Diff. . 4 . . .	1,6,15,28,45, &c.	Hexagones.

On les appelle *polygones*, parce qu'ils représentent le nombre de points nécessaires pour remplir les espaces des polygones réguliers, en disposant ces points en symmétrie sur des lignes tirées parallélement aux côtés de ce polygone. Mais cela est peu important.

437. III. Les suites des puissances des nombres sont celles

des quarrés, des cubes, &c. des termes consécutifs de la suite des nombres naturels 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c.

438. Outre ces différentes suites de nombres, on en rencontre souvent d'autres. Par exemple, une fraction décimale, comme 0,3543, n'est autre chose que la suite $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000}$. Un même nombre divisé successivement par les termes d'une progression arithmétique, comme $\frac{7}{3} . \frac{7}{4} . \frac{7}{5} . \frac{7}{6} . \frac{7}{7} . \frac{7}{8}$, &c. forme une suite qu'on appelle une *progression harmonique*.

N. Il y a proportion harmonique entre quatre quantités, lorsque la différence entre les deux premieres est à la différence entre les deux dernieres, comme la premiere est à la derniere. Ainsi 2 . 3 . 6 . 12 sont quatre termes en proportion harmonique; car $3 - 2 : 12 - 6 :: 2 : 12$. Si le terme du milieu est répété deux fois, la proportion (qui n'est alors composée que de trois termes) est continue. Ainsi 2 . 3 . 6 sont trois termes en proportion harmonique continue. Toute proportion harmonique continue peut décroître à l'infini & former une progression harmonique décroissante sans fin. Ainsi donc si dans la proportion harmonique continue 2 . 3 . 6 l'on cherche le terme suivant en décroissant, c'est-à-dire, celui qui doit précéder 2, l'on dira, $3 . 2 . x$, & l'on trouvera x en disant $3 - 2 : 2 - x :: 3 : x$; donc $3x - 2x = 6 - 3x$; donc $x = 6 - 3x$; donc $4x = 6$; donc enfin $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. L'on aura donc la progression harmonique décroissante $6 . 3 . 2 . \frac{3}{2}$. L'on trouveroit les termes suivants par la même regle.

Mais on ne peut pas augmenter ainsi sans fin la progression croissante, & l'on connoît que l'on est arrivé au dernier terme, dès que l'on tombe dans une équation impossible, en suivant, pour chercher un nouveau terme, la regle que nous venons de dire. Ainsi si l'on veut dans la progression ci-dessus chercher un nouveau terme au-dessus de 6, l'on dira $6 - 3 : x - 6 :: 3 : x$, ce qui donneroit $6x - 3x = 3x - 18$, ou $3x = 3x - 18$, ce qui est impossible.

Nous dirons en passant, que l'harmonie des sons est déterminée par des regles fondées sur des expériences phisiques, indépendamment de l'oreille. Entr'autres phénomenes du son, on a observé que si l'on pince trois cordes d'un Instrument également tendues & également grosses, ayant leur longeur dans le rapport des nombres 3, 4, 6, des deux qui sont l'une à l'autre comme 6 : 3 (ou comme 2 : 1), la plus courte fait deux vibrations, dans le temps que la plus longue n'en fait qu'une (la plus courte fait l'octave que les Musiciens appellent d'en-haut, & que les Mathématiciens appelle-

On peut même faire à volonté des ſuites composées de pluſieurs autres, en leur faiſant terme à terme quelqu'une des opérations de l'arithmétique. Telle ſeroit, par exemple, la ſuite $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{8}{105}\cdot\frac{16}{945}$, &c. qu'on a formée en mettant pour numérateurs les termes d'une progreſſion géométrique double, & pour dénominateurs les produits du premier, des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, &c. nombres impairs. Mais *lorſque la loi ſuivant laquelle une ſuite eſt composée ne ſe préſente pas tout de ſuite, il faut l'écrire ſous une forme qui la faſſe reconnoître.* Par exemple, à l'inſpection de la ſuite précédente, on reconnoît facilement que les numérateurs ſont en progreſſion géométrique; mais on ne voit pas comment les dénominateurs ont été formés. Si donc on la met ſous cette forme...

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1\cdot3}, \frac{4}{1\cdot3\cdot5}, \frac{8}{1\cdot3\cdot5\cdot7}, \frac{16}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}, \text{\&c.}$$

rien n'eſt plus facile que d'en reconnoître la loi.

439. On réduit ſouvent en ſuites infinies les quantités qu'on ne peut décompoſer ſans reſte: telles ſont les quotiens des termes qui ne ſont pas multiples du diviſeur, & les racines des puiſſances imparfaites. Par exemple, nous avons trouvé (193) que $\frac{1}{1+xx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$ &c. $+$ &c. &c. ſans fin. On trouveroit de même que $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2}$

---

ront d'en-bas, le terme y étant décroiſſant). Des deux cordes qui ſont comme 6 : 4 (ou comme 3 : 2), la plus courte fait trois vibrations tandis que la plus longue en fait deux; cet accord eſt nommé quinte. Enfin les deux cordes, dont l'une fait quatre vibrations, tandis que l'autre n'en fait que trois, forment, étant pincées, l'accord qu'on appelle quarte. Donc par expérience, ces trois nombres 3, 4, 6, expriment des quantités d'où dépendent des ſons qui donnent des principaux accords de la Muſique, & ces nombres ſont en proportion harmonique continue; car la différence du premier au ſecond eſt à la différence du ſecond au troiſieme, comme le premier eſt au dernier; 6 — 4 : 4 — 3 :: 6 : 3.

On peut obſerver que dans la proportion harmonique, il entre la raiſon arithmétique & la géométrique.

$+ \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5}$ — &c. que $\frac{a^2}{x+b} = \frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3}$, &c.

440. Nous avons trouvé aussi (308) que la racine quarrée de $a^2 - x^2$ étoit $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} -$ &c. Cette Série peut également se déduire des regles de l'extraction des racines.

Car la racine quarrée du premier terme a^2 est a; ôtant a^2 de laquantité donnée $a^2 - x^2$, reste $-x^2$, qu'il faut diviser par $2a$ (224) & on a $-\frac{xx}{2a}$, second terme de la racine; son quarré est $\frac{x^4}{4aa}$, & son produit par $2a$ est $-xx$; ôtant donc cela du premier reste $-xx$, on a un second reste $-\frac{x^4}{4aa}$, qu'il faut diviser par le double de $a - \frac{xx}{2a}$, qui est $2a - \frac{xx}{a}$; on a donc d'abord $-\frac{x^4}{8a^3}$ pour troisieme terme de la racine; son quarré est $\frac{x^8}{64a^6}$, son produit par $2a - \frac{xx}{a}$ est $-\frac{2ax^5}{8a^4} + \frac{x^6}{8a^4}$; l'ôtant du second reste $-\frac{x^4}{4aa}$, & réduisant, on a un troisieme reste $-\frac{x^6}{8a^4}$. En continuant le même procédé, on a les autres termes.

On aura de même $\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. Et $\sqrt{aa + bx - x^2} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{x^2}{2a} - \frac{bbx^2}{8a^3}$, &c.

441. De-là on voit que lorsqu'on a les premiers termes d'une suite; il faut tâcher de découvrir la loi de leur marche;

car alors on peut cesser d'opérer, & continuer la suite en observant cette loi, pourvu qu'on s'en soit assuré par un nombre suffisant de termes.

Par exemple, en examinant la suite qui exprime la racine de $a^2 - x^2$, on voit aisément qu'elle est égale à a plus tous les produits des termes d'une progression géométrique (dont le premier est $\frac{x^2}{a}$, & le quotient $\frac{x^2}{a^2}$), multipliés consécutivement par $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{16}$, $-\frac{5}{128}$, $-\frac{7}{256}$, &c. Il ne s'agit donc que de trouver la loi de ces coefficiens, laquelle est $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1.1}{2.4}$, $-\frac{1.1.3}{2.4.6}$, $-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}$, $-\frac{1.1.3.5.7.}{2.4.6.8.10}$, &c. Les numérateurs sont les termes de la suite naturelle des nombres impairs croissants, & les dénominateurs sont les termes de la suite naturelle des nombres pairs croissants. On multiplie successivement deux, trois, quatre, &c. de ces termes, & on réduit à l'expression la plus simple les fractions qui en résultent.

442. Nous avons déja vu (308) que la formule du binome étoit un moyen assez prompt pour réduire en série les restes des divisions, & les racines des puissances imparfaites. Il ne faut donc pas se servir en pareil cas des regles de la division & de l'extraction qui sont longues & ennuieuses. Si nous avons parlé de cette méthode, c'est qu'elle a été la premiere inventée, & que la grande utilité de cette invention a déterminé les Analystes à la perfectionner. Voici un des moyens les plus ingénieux qu'ils aient imaginé.

443. *On suppose que la quantité à réduire est égale à une série dont tous les coefficiens sont indéterminés ; & on détermine ensuite ces coefficiens par autant d'équations.*

EXEMPLE. Quelle suite donne $\frac{a}{b+x}$? ..... Je fais $\frac{a}{b+x}$ $= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. d'où je conclus (64)

$$a = bA + bBx + bCx^2 + bDx^3 + \text{\&c.}$$
$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{\&c.}$$

Or pour que cette équation ait lieu, il faut que le premier terme bA du second membre étant égalé au seul terme a du premier, tous les autres

autres termes du second se détruisent ; & certainement ils se détruiront tous, si les coefficiens des mêmes puissances de x se réduisent à zéro. Il n'y a donc qu'à supposer que la partie indéterminée de ces coefficiens est telle qu'elle puisse opérer cette réduction. Et pour déterminer dans tous les cas la valeur de cette partie, on égalera successivement à zéro la somme des coefficiens de chaque puissance de x. (On appelle ces coefficients *Homogenes*, ou *Homologues*).

J'ai donc, 1.° $a = bA$, qui donne $A = \frac{a}{b}$; 2.° $bB + A = 0$, d'où je tire $B = -\frac{a}{b^2}$; 3.° $bC + B = 0$, d'où $C = \frac{a}{b^3}$; 4.° $bD + C = 0$, & par conséquent $D = -\frac{a}{b^4}$, &c. Je substitue ces valeurs de A, B, C, D, &c. dans l'équation $\frac{a}{b+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. & je trouve $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} +$ &c. comme nous l'avions déja trouvé par la division (439).

Cette méthode est aussi simple qu'utile. Appliquons-la donc encore à deux exemples. Soit proposé de réduire en série $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$.

Je suppose que $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c.

J'ai donc $a^2 = (a^2 + 2ax - x^2)\overline{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.}$

$$= \left\{ \begin{array}{r} a^2A + a^2Bx + a^2Cx^2 + a^2Dx^3 + \&c. \\ + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + \&c. \\ - Ax^2 - Bx^3 - \&c. \end{array} \right\}$$

d'où je conclus $a^2 = a^2A$, & par conséquent $A = 1$; ensuite $a^2B + 2aA = 0$, qui donne $B = -\frac{2}{a}$. Le même procédé me fait trouver $C = \frac{5}{a^2}$, $D = -\frac{12}{a^3}$, &c. d'où

$$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=1-\frac{2x}{a}+\frac{5x^2}{a^2}-\frac{12x^3}{a^3}, \text{\&c.}$$

443. Quand il y a deux termes dans le numérateur, on les égale respectivement aux deux termes homogenes de la série déja multipliée par le dénominateur. Ainsi pour avoir la suite que donne $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$, on supposeroit d'abord $1+x=(1-x-x^2)(A+Bx+Cx^2+\text{\&c.})$; on effectueroit ensuite la multiplication, & après avoir fait $A=1$, & trouvé que $B=3$ par l'équation $2x=Bx-Ax$, on détermineroit à l'ordinaire C, D, &c. d'où résulteroit $\frac{1+2x}{1-x-x^2}=1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5$, série bien aisée à continuer, puisque chaque coefficient est la somme des deux qui le précedent, & que x est élevée successivement à toutes les puissances. Cette série est du nombre de celles que l'on appelle *Récurrentes*, parce que pour former chaque terme, il faut avoir recours à ceux qui le précedent.

444. Soit proposé d'extraire par cette méthode la racine quarrée de a^2-x^2 que nous connoissons déja... Supposez $\sqrt{a^2-x^2}=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+\text{\&c.}$ qui donne d'abord

$$\begin{aligned} a^2-x^2=A^2+2ABx^2+B^2x^4&+2ADx^6+\text{\&c.}\\ +2ACx^4&+2BCx^6+\text{\&c.}\end{aligned}$$

ensuite $A^2=a^2$, $2ABx^2=-x^2$; d'où $A=a$, $B=-\frac{1}{2a}$; qui à leur tour donnent $C=-\frac{1}{8a^3}$, $D=-\frac{1}{16a^5}$; ensorte que la série supposée $A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+\text{\&c.}$ devient $a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}$, &c. On calculera de même E, F, &c. si l'on veut un plus grand nombre de termes.

De la sommation des Séries.

445. On peut faire sur les suites toutes les opérations de l'Arithmétique; mais la plus utile de toutes, & en même temps la plus difficile consiste à les *sommer*, c'est-à-dire, à réduire

en une ſeule expreſſion finie tous les termes d'une ſuite donnée. Car c'eſt ordinairement en cette expreſſion que conſiſte la ſolution des Problêmes dans leſquels les ſuites entrent, & il eſt aiſé de réduire la plûpart des Problêmes à trouver la ſomme d'une ſuite infinie, puiſque la ſolution d'un Problême dépend de la décompoſition des termes de l'équation qui l'exprime.

446. Il eſt clair que ſi une ſuite infinie eſt toujours divergente, la ſomme n'en peut être finie; mais ſi elle eſt convergente, la ſomme eſt ſouvent finie, comme on le verra dans la ſuite.

Nous ne pouvons pas entrer dans un grand détail ſur ce ſujet, qui fait une des plus conſidérables parties de l'Analyſe; nous expliquerons ſeulement la maniere de ſommer quelques-unes des ſuites les plus en uſage.

447. L'art de ſommer les ſuites en général conſiſte à trouver une méthode d'en ſommer quelques-unes, qu'on prend enſuite pour formules, auxquelles il faut réduire, s'il eſt poſſible, les ſuites qu'on veut ſommer; ou bien il faut décompoſer ces ſuites en pluſieurs autres réduiſibles à quelqu'une des formules, & par conſéquent ſommables, puis ajouter enſemble les ſommes de chacune de ces ſuites.

448. I. Ayant trouvé, par exemple, une formule pour ſommer tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, on pourra toujours ſommer les ſuites qu'on décompoſera en pluſieurs autres ſuites dont les termes ſeront en progreſſion géométrique décroiſſante. (On déſigne *infini* par ce ſigne, ∞; d'où $\frac{1}{\infty}$, $\frac{a}{\infty}$, &c. ſont des *infinimens petits*).

Soit $\div\!\div \frac{d}{b}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^4} \ldots\ldots \frac{d}{bq\infty}$, une progreſſion infinie qui décroît à cauſe que les dénominateurs vont toujours en croiſſant, (en ſuppoſant q plus grand que l'unité). En écrivant $\div\!\div \frac{d}{bq\infty} \ldots\ldots \frac{d}{bq^4}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{b},$ on la rend croiſſante, & en y appliquant la formule $s = \frac{\omega q - a}{q-1}$ (399) dans laquelle ω

$= \frac{d}{b}$, $a = \frac{d}{bq\infty}$, on aura $s = \dfrac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq\infty}}{q-1}$, négligeant enſuite le terme infiniment petit $\frac{d}{bq\infty}$, & réduiſant, on a $s = \frac{dq}{bq-b}$; & c'eſt-là une formule pour ſommer toute progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini.

449. Soit propoſé maintenant de ſommer une ſuite de fractions dont les numérateurs ſoient en progreſſion arithmétique, & les dénominateurs en progreſſion géométrique. Cette ſuite eſt $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}$, &c. Mettez-la d'abord ſous cette forme, $\frac{a}{b}, \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}$, &c. De-là, vous pourrez déduire les ſéries ſuivantes, qui ne ſont que des progreſſions géométriques.

$\div\!\div\ \frac{a}{b}, \frac{a}{bq}, \frac{a}{bq^2}, \frac{a}{bq^3}$, &c. la ſomme eſt $\frac{aq}{bq-b}$.

$\div\!\div\ \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}$, &c. la ſomme eſt $\frac{d}{bq-b}$.

$\div\!\div\ \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}$, &c. la ſomme eſt $\frac{d}{bq^2-bq}$.

$\div\!\div\ \frac{d}{bq^3}$, &c. la ſomme eſt $\frac{d}{bq^3-bq^2}$.

Or ces ſommes (excepté la premiere) forment la progreſſion $\div\!\div\ \frac{d}{bq-b}, \frac{d}{bq^2-bq}, \frac{d}{bq^3-bq^2}$, &c. dont la ſomme eſt $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$, ſi donc on y ajoute la premiere ſomme $\frac{aq}{bq-b}$, on aura $\frac{aqq-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$ pour la ſomme des ſommes, c'eſt-à-dire, pour la ſomme de toute la ſérie propoſée. Et *c'eſt une formule générale pour ſommer toutes les ſuites des fractions dont les numérateurs ſeront en progreſſion arithmétique & les dénominateurs en progreſſion géométrique.*

450. REMARQUE. Lorſqu'on ne peut ſommer en termes finis une ſuite infinie, il faut tâcher de la mettre ſous une forme telle qu'elle ſoit la plus convergente qu'il eſt poſſible ; car *lorſqu'une ſuite converge très-vîte, il ſuffit de ſommer effectivement quelques-uns de ſes premiers termes, on peut enſuite négliger les autres ſans erreur ſenſible.*

Par exemple, dans $\sqrt{aa + xx}$, plus la valeur de x ſera petite à l'égard de a, plus la ſuite $a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} -$, &c. convergera vîte, parce que les numérateurs deviennent très-petits à l'égard des dénominateurs. Soit $a = 10$, & $x = 1$, alors $\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000}$, &c. où l'on voit que le quatrieme terme eſt déja comme infiniment petit, & que par conſéquent les trois premiers termes ſuffiſent pour avoir à très-peu-près la racine de 101, laquelle eſt $10\frac{399}{8000}$.

451. II. Soit propoſé de trouver des formules pour ſommer tant de termes conſécutifs qu'on voudra des nombres naturels. Pour y parvenir, je raiſonne ainſi.

Puiſque les termes conſécutifs de la ſuite des nombres différent toujours d'une unité, il eſt clair que ſi on en prend quelques-uns comme l, m, n, p, q, r, on aura $r = q + 1$, $q = p + 1$, $p = n + 1$, $n = m + 1$, $m = l + 1$. Or ſi on éleve ces termes à leurs puiſſances conſécutives, on aura. . . . .

$$\begin{array}{l|l|l}
r^2 = q^2 + 2q + 1 & r^3 = q^3 + 3q^2 + 3q + 1 & r^4 = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1 \\
q^2 = p^2 + 2p + 1 & q^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 & q^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\
p^2 = n^2 + 2n + 1 & p^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 & p^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
n^2 = m^2 + 2m + 1 & n^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 & n^4 = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\
m^2 = l^2 + 2l + 1 & m^3 = l^3 + 3l^2 + 3l + 1 & m^4 = l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1
\end{array}$$

Et ſi enſuite on joint chacune de ces puiſſances en une ſeule équation, on aura. . . . .

$$\begin{array}{r|r|r}
r^2 = + 2q + 1 & r^3 = + 3q^2 + 3q + 1 & r^4 = + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1 \\
+ 2p + 1 & + 3p^2 + 3p + 1 & + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\
+ 2n + 1 & + 3n^2 + 3n + 1 & + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
+ 2m + 1 & + 3m^2 + 3m + 1 & + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\
l^2 + 2l + 1 & l^3 + 3l^2 + 3l + 1 & l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1
\end{array}$$

452. D'où l'on déduira en général que, *lorſqu'on a pluſieurs termes conſécutifs de la ſuite des nombres naturels*, 1.° *le quarré* r^2 *du dernier de ces termes eſt egal au quarré* l^2 *du premier de ces termes, plus 2 fois la ſomme* $q + p + n + m + l$ *des termes qui précedent le dernier, plus le nombre* $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ *de ces mêmes termes précédents.* 2.° *Le cube* r^3 *du dernier de ces termes, eſt égal au cube* l^3 *du premier, plus 3 fois la ſomme des quarrés des termes précédents, plus 3 fois la ſomme de ces mêmes termes, plus leur nombre.* 3.° *La quatrieme puiſſance* r^4 *du dernier, eſt égale à la quatrieme puiſſance du premier, plus 4 fois la ſomme des cubes des termes précédents, plus 6 fois la ſomme de leurs quarrés, plus 4 fois la ſomme de ces termes, plus leur nombre.* Il en eſt ainſi des autres puiſſances plus élevées.

453. D'où il ſuit que nommant a un premier terme quelconque, ω un dernier terme, le nombre des termes qui précédent le dernier, ſera $\omega - a$; ſi donc on appelle $\int$ la ſomme de tous ces termes, $\int^2$ la ſomme de tous leurs quarrés, $\int^3$ la ſomme de leurs cubes, &c. on aura $\int - \omega$ pour la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier, $\int^2 - \omega^2$ pour la ſomme de tous leurs quarrés $\int^3 - \omega^3$ pour la ſomme de tous leurs cubes, &c. Et la premiere des concluſions que nous avons déduites ci-deſſus, ſera exprimée par cette formule $\omega^2 = a^2 + 2\int - 2\omega + \omega - a$, ou en réduiſant, $\omega^2 = a^2 - a + 2\int - \omega$. La ſeconde, par $\omega^3 = a^3 + 3\int^2 - 3\omega^2 + 3\int - 3\omega + \omega - a$, ou bien $\omega^3 = a^3 - a + 3\int^2 - 3\omega^2 + 3\int - 2\omega$. La troiſieme, par $\omega^4 = a^4 + 4\int^3 - 4\omega^3 + 6\int^2 - 6\omega^2 + 4\int - 4\omega + \omega - a$, ou bien $\omega^4 = a^4 - a + 4\int^3 - 4\omega^3 + 6\int^2 - 6\omega^2 + 4\int - 3\omega$, &c.

De la premiere formule on tire $\int = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$. Subſtituant cette valeur dans la ſeconde, on a $\omega^3 = a^3 + 3\int^2 - \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega - \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$, & par conſéquent $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$.

Subſtituant les valeurs de $\int^2$ & de $\int$ dans la troiſieme formule, on a en réduiſant, $\omega^4 = a^4 + 4\int^3 - 2\omega^3 - \omega^2 - 2a^3 + a^2$, & par conſéquent $\int^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2$.

Il en eſt de même des autres puiſſances.

454. Si le premier terme des suites est o, ou 1, on a $\int = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega$, $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega$, & $\int^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2$. Et si la chose en valoit la peine, on trouveroit par la formule du binome une série générale, pour sommer tant de termes que l'on voudroit des puissances des nombres naturels.

De la Méthode inverse des Séries ou du Retour des suites.

455. Etant donnée une équation de cette forme $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n} +$ &c. on demande comment on pourroit exprimer en termes de x la valeur de y? La méthode qui apprend à faire cette réduction s'appelle *Méthode inverse des séries*; voici en quoi elle consiste.

456. I. Prenons d'abord le cas le plus simple, qui est celui où $m = n = 1$, ce qui changera l'équation proposée en celle-ci, $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$, &c. Il s'agit de trouver la valeur de y en x.

$$\text{Je suppose} \quad y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \text{ \&c.}$$

$$\text{D'où je conclus, } 1.^\circ \left\{ \begin{array}{lllll} y^2 = & A^2 & +2AB & +B^2 & \text{\&c.} \\ & & & +2AC & \\ y^3 = & & A^3 & +3A^2B & \text{\&c.} \\ y^4 = & & & A^4 & \text{\&c.} \end{array} \right.$$

$$2.^\circ\ x = \left\{ \begin{array}{lllll} ay = aAx & +aBx^2 & +aCx^3 & +aDx^4 & \text{\&c.} \\ by^2 = & A^2b & +2ABb & +B^2b & \text{\&c.} \\ & & & +2ACb & \\ cy^3 = & & A^3c & +3A^2Bc & \text{\&c.} \\ dy^4 = & & & A^4d & \text{\&c.} \\ \text{\&c.} & & & \text{\&c.} & \end{array} \right.$$

Or cette derniere équation donne (443) $x = aAx$, d'où $1 = aA$, & $A = \frac{1}{a}$. Elle donne aussi $aB + A^2b = 0$; donc $B = -\frac{b}{a^3}$. Ensuite, $aC + 2ABb + A^3c = 0$; d'où $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, & ainsi des autres. Cela posé, nous aurons la formule suivante pour changer une série *des puissances successives* de y, en une autre série composée des mêmes puissances de x. Il n'y aura qu'à substituer les valeurs des coefficiens a, b, c, d, &c.

Je dis donc que si $x = ay + by^2 + cy^3$, &c. on a dans tous les cas semblables $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4$

$$+\frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}x^5 + \&c.$$

APPLICAT. $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \&c.$ Quelle eſt la valeur de y exprimée en x? .... On a ici $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 1$, &c. Donc $y = x + x^2 + x^3 + x^4$ &c.

Si on avoit $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c. alors a ſeroit $= 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, & $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$, &c. $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5}$ &c.

Et ſi $z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5}$ — &c. on trouvera $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4}$ &c.

457. II. Si nous ſuppoſons $m = 1$, & $n = 2$, la ſérie propoſée n'aura que des puiſſances impaires, & l'équation deviendra $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7$ &c. Pour avoir une formule dans ce cas-là,

$$\text{Soit } y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 \ \&c.$$

$$\text{On aura, 1.}^\circ \begin{cases} y^3 = & A^3 + 3A^2B + 3A^2C \ \&c. \\ & \qquad\quad + 3AB^2 \\ y^5 = & \qquad A^5 + 5A^4B \ \&c. \\ y^7 = & \qquad\qquad A^7 \ \&c. \end{cases}$$

$$2.^\circ\ x = \begin{cases} ay = Aax + aBx^3 + aCx^5 + aDx^7 \ \&c. \\ by^3 = \qquad A^3b + 3A^2Bb + 3A^2bC \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 3AB^2b \\ cy^5 = \qquad\qquad A^5c + 5A^4Bc \\ dy^7 = \qquad\qquad\qquad A^7d \\ \&c. \qquad\qquad\qquad\qquad \&c. \end{cases}$$

De cette derniere équation je tire $x = Aax$, ou $A = \frac{1}{a}$; $aB + A^3b = 0$, ou $B = \frac{-b}{a^4}$; puis $C = \frac{3b^2 - ac}{a^7}$, $D = \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}$, &c. enſorte que la formule eſt $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^4}x^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}x^5 +$

8abc

$\frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}} x^7 + \&c.$

APPLIC. Exprimer en r la valeur de t dans l'équation $r = t - \frac{t^3}{2 \cdot 3 \cdot p^2} + \frac{t^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5p^4} - \frac{t^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7p^6} + \&c.$?.... On a ici $a = 1$, $b = -\frac{1}{2 \cdot 3p^2}$, $c = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5p^4}$, $d = -$ &c. $t = y$; $r = x$; & substituant, on trouvera $t = r + \frac{1}{2 \cdot 3p^3} r^3 + \left(\frac{1}{3 \cdot 4p^4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5p^4}\right) r^5 + \&c. = r + \frac{1}{2.3p^2} r^3 + \frac{3}{2.4.5p^4} r^5 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7p^6} r^7$ &c.

458. III. Supposons maintenant que m & n soient des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires ; & cherchons une formule pour ce cas qui contient les deux autres. Je fais $u = \frac{x}{a}$, $y = u^{\frac{1}{m}} + Bu^{\frac{1+n}{m}} + Cu^{\frac{1+2n}{m}} + Du^{\frac{1+3n}{m}} + \&c.$ & divisant par a la série proposée $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + \&c.$ j'ai $\frac{x}{a} = u = y^m + \frac{b}{a} y^{m+n} + \frac{c}{a} y^{m+2n} + \&c.$

$$\text{Or (310)} \left\{ \begin{array}{ll} y^m & = u + mBu^{\frac{m+n}{m}} + mCu^{\frac{m+2n}{m}} \ \&c. \\ & \quad + \frac{m \cdot m - 1}{2} B^2 u^{\frac{m+2n}{m}} \\ \frac{b}{a} y^{m+n} & = \frac{b}{a} \times u^{\frac{m+n}{m}} + (m+n) Bu^{\frac{m+2n}{m}} \ \&c. \\ \frac{c}{a} y^{m+2n} & = \frac{c}{a} u^{\frac{m+2n}{m}} \ \&c. \end{array} \right.$$

Donc (443) $mB + \frac{b}{a} = 0$, qui donne $B = -\frac{b}{ma}$; donc aussi $mC + \frac{m.m-1}{2}B^2 + (m+n)\frac{bB}{a} + \frac{c}{a} = 0$, qui donne $C = \frac{(m+1+2n)\,b^2 - 2mac}{2m^2a^2}$, & ainsi des autres; ensorte que la formule générale est $y = u^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{ma}u^{\frac{1+n}{m}} + \frac{(m+1+2n)b^2 - 2mac}{2m^2a^2}u^{\frac{1+2n}{m}} -$

$$\left(\frac{(2m^2+9mn+9n^2+3m+6n+1)\,b^3}{6m^3a^3} + \frac{(m+3n+1)\,bc}{m^2a^2}\right)$$

$\frac{d}{ma} \times u^{\frac{1+3n}{m}}$; & ainsi de suite.

APPLIC. Soit $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 +$ &c. On demande la valeur de y en x. J'ai d'abord $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{4}$, $m = 2$, $n = 1$, $u = 2x$. Puis, $y = u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}u + \frac{1}{36}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{270}u^2$ &c.

Soit encore $x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}y^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}y^{\frac{7}{2}}$ &c. On aura, 1.° $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{8}$, $u = x$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$. 2.° $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8}$, &c. Voyez le savant Traité d'Algebre de M. EMERSON.

DES LOGARITHMES.

LES Géometres se plaignoient depuis long-temps de la longueur du calcul dans la multiplication & dans la division des grands nombres, & sur-tout de la difficulté de l'extraction des racines un peu élevées, lorsqu'enfin un Géometre Ecossois eût une de ces idées heureuses dont le développement subit hâte plus en vingt ans le progrès des sciences, que les travaux ſucceſſifs de pluſieurs ſiecles. Cette idée fut de réduire toutes les multiplications & diviſions à de ſimples additions & ſouſtractions, & de changer en ſimple multiplication & diviſion, toute formation de puiſſances, toute extraction de racines. Nous regrettons de ne pouvoir faire ſentir ici toute la beauté de cette découverte. Ceux de nos lecteurs qui liront un jour les ouvrages des Géometres modernes, verront avec plaiſir le parti qu'ils en ont tiré. A peine pouvons-nous, dans un Livre élémentaire, développer les principes d'une ſi belle Théorie. Eſſayons cependant.

459. On a vu (389) que les expoſans d'une progreſſion géométrique étoient toujours en progreſſion arithmétique; & l'on ſait que dans les progreſſions arithmétiques, on fait par addition & ſouſtraction, ce qui ne ſe fait dans les géométriques que par multiplication & diviſion. On ſait auſſi que dans une progreſſion géométrique quelconque $\div a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6$, &c. le produit de deux termes quels qu'ils ſoient, a pour expoſant la ſomme de leurs expoſants (187). $a^2 \times x^4$, par exemple, $= a^{2+4} = a^6$. *Si l'on veut donc ſavoir quel eſt le terme de cette progreſſion, qui eſt égal au produit des deux autres, il faut chercher quel eſt celui qui a pour expoſant la ſomme de leurs expoſans.*

460. Et puiſque le quotient de deux termes quelconques de cette progreſſion eſt le terme qui a pour expoſant la différence des leurs, que a^6, par exemple, diviſé par $a^2 = a^{6-2} = a^4$, il eſt clair que *pour avoir le quotient de deux de ces termes, il faut prendre la différence de leurs expoſans, & en faire l'expoſant du quotient que l'on cherche.*

461. Or ces expoſans ſont ce que l'on appelle des *Logarithmes*. Enſorte que ſi $a = 10$, la formule donnant alors $\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4$. &c. $= \div 1 . 10 . 100 . 1000 . 10000$. &c. l'expoſant 0 eſt le logarithme de l'unité; l'expoſant 1 eſt le logarithme de 10; 2 eſt le logarithme de 100, &c.

462. Mais parce que ces expoſans ne donnent que les logarithmes des nombres qui ſont dans la progreſſion décuple $\div 1, 10, 100, 1000$, &c. & que l'on a très-ſouvent be-

ſoin des logarithmes des nombres intermédiaires, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13.... 99.... 101, 102..... 999.. 1001, 1002, &c. ainſi que de ceux des fractions, on a ajouté ſept décimales à chacun de ces expoſans, ce qui a changé la forme de la progreſſion en celle-ci.

∺ $10^{0,0000000}$. $10^{1,0000000}$. $10^{2,0000000}$. $10^{3,0000000}$. &c.

Or (393) tant que ces expoſans ſeront en progreſſion arithmétique, les valeurs de 10 élevé aux puiſſances qu'ils déſignent, ſeront des nombres en progreſſion géométrique, & ces mêmes expoſans ſeront les logarithmes de ces nombres. Donc en faiſant croître ces décimales conſécutivement de $\frac{1}{10000000}$, ou, ce qui revient au même, en inſérant 9999999 moyens proportionnels arithmétiques entre chacun des expoſans de la progreſſion (364), on a une nouvelle progreſſion géométrique qui commence ainſi.....

∺ $10^{0,0000000}$. $10^{0,0000001}$. $10^{0,0000002}$. $10^{0,0000003}$. &c.

Et les valeurs correſpondantes de chacun de ces termes ſont des nombres qui vont en croiſſant fort lentement depuis l'unité; puiſque le premier terme vaut 1, & que le dix-millionunieme ne vaut que 10. Il y a donc parmi ces termes intermédiaires, un terme qui vaut 2, un autre qui vaut 3, un autre 4, &c. Ainſi on a trouvé que 2 étoit la valeur du terme $10^{0,3010300}$, que 3 étoit $= 10^{0,4771213}$, que $4 = 10^{0,6020600}$, &c. de ſorte que ces expoſans ſont les logarithmes de 2, de 3, de 4, &c.

463. Par des calculs fondés ſur cette idée, mais dont les détails ſont immenſes, on a conſtruit des Tables de Logarithmes pour tous les nombres depuis 1 juſqu'à 100000, & qui ſervent à trouver ceux des nombres plus grands. Il y a de ces Tables où pour une plus grande préciſion, les Logarithmes ont dix, quinze, vingt décimales. Les cinq premieres ſuffiſent ordinairement. Quant à la maniere de s'en ſervir, on peut la voir aſſez détaillée dans la nouvelle édition des Tables de logarithmes avec ſix décimales (chez *Deſaint* 1768); car pour en bien comprendre l'uſage, il faut les avoir ſous les yeux.

464. On peut concevoir cependant, ſans y avoir recours, 1.° que les Logarithmes de tous les nombres compris entre 1

& 10 doivent commencer par 0, que ceux de tous les nombres qui sont entre 10 & 100 commencent par 1, que le premier chiffre des logarithmes des nombres compris entre 100 & 1000 est 2, &c. Ce premier chiffre, (qui est l'entier de l'exposant), s'appelle *la caractéristique* du logarithme, parce qu'il sert à faire connoître de combien de caracteres est composé le nombre qui répond à un logarithme donné. Car il est évident qu'il doit y en avoir un de plus que la caractéristique ne contient d'unités. Ainsi je vois tout d'un coup que ce logarithme 4,8145605 appartient à un nombre de cinq chiffres, parce que sa caractéristique est 4.

465. 2.° Que le produit de deux nombres répond à la somme de leurs logarithmes, & que leur quotient répond à la différence de leurs logarithmes. Ainsi, pour multiplier 48 par 166, j'ajoute leurs logarithmes, qui sont, 1,6812412 & 2,2201081; la somme est 3,9013493; c'est un logarithme qui répond dans les Tables au nombre 7968, lequel est le produit de 48×166. Pour diviser 7336 par 56, il faut retrancher le logarithme de 56, qui est 1,7481880, du logarithme de 7336, qui est 3,8654593, & la différence 2,1172713 est un logarithme, qui répond dans les Tables à 131. Donc 131 est le quotient de 7336 divisé par 56.

466. 3.° Que *pour faire une Regle de Trois par les logarithmes, il faut ajouter ensemble les logarithmes des termes qu'il eût fallu multiplier, & de la somme retrancher le logarithme de celui par lequel il eût fallu diviser le produit; le reste est le logarithme du terme cherché*. Par exemple, soient donnés $2843 . 8529 :: 3147 . x$. Il faudroit pour avoir la valeur de x, multiplier 3147 par 8529, & diviser leur produit 26840763 par 2843, le quotient seroit $9441 = x$. Cette opération est longue, & par conséquent sujette à erreur, si l'on n'y prête quelque attention; mais par les logarithmes, il suffit d'ajouter ensemble les logarithmes de 8529 & de 3147, qui sont 3,93090 & 3,49790, & de la somme 7,42880, ôter 3,45378 logarithme de 2843; le reste 3,97502 est le logarithme de x, lequel répond dans les Tables à 9441.

467. 4.° Que *pour élever une quantité à une puissance quel-*

conque, il faut en ajouter le logarithme à lui-même autant de fois qu'on auroit multiplié cette quantité ; c'est-à-dire, qu'il *faut multiplier son logarithme par l'exposant de la puissance.* Ainsi pour élever 8 à la quatrieme puissance, il faut multiplier son logarithme 0,90309 par 4, & le produit 3,61236 est le logarithme de 4096, quatrieme puissance de 8.

468. Qu'enfin, *si on divise le logarithme d'une quantité donnée par l'exposant de la racine qu'on en veut extraire, le quotient sera le logarithme de cette racine ;* ainsi pour extraire la racine cubique de 6859, divisez son logarithme 3,83626 par 3, & le quotient 1,27875 sera le logarithme de 19, qui est la racine cherchée.

Des Propriétés des Logarithmes en général.

469. Soit a un nombre plus grand que l'unité ; soit m l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever a pour avoir un nombre donné b, ensorte que l'on ait $a^m = b$. On est convenu d'appeller m le Logarithme de b, & de l'écrire ainsi, $m = Lb$, ou $Log.\ b$.

Supposant donc $a = 10$, & $b = 100$, il faut que $m = 2$ pour que l'on ait $a^m = b$, & pour que 2 soit dans cette supposition, le logarithme de 100. Tel est, comme on l'a vu (460), le systême des Tables ordinaires.

470. Il suit de-là que *les Logarithmes ordinaires sont les exposans des puissances auxquelles il faudroit élever* 10, *pour avoir les nombres dont on cherche les Logarithmes.*

Et puisque d'un côté, tous les nombres peuvent être regardés comme des puissances différentes de 10, & que de l'autre le produit ou le quotient des puissances se trouve en ajoutant ou en soustrayant leurs exposans, il est clair que la somme ou la différence des Logarithmes de deux nombres doit répondre dans les Tables au nombre qui est le produit ou le quotient des deux autres. Nous avons déja déduit de ce principe les propriétés du Calcul logarithmique, dans le discours qui est à la suite des Tables déja citées. Voici une autre maniere de les démontrer.

471. Si $a^m = b$, il est évident que $La^m = Lb$; & si $a^n = c$, on aura de même $La^n = Lc$; donc $bc = a^m \times a^n = a^{m+n}$, & $Lbc = La^{m+n} = m + n = Lb + Lc$. C'est-à-dire, que le Logarithme d'un produit quelconque résulte de la somme des Logarithmes de ses facteurs. Voilà donc toutes les multiplications réduites à de simples additions.

Soit p le produit ; F, f les facteurs, & nous aurons généralement

$Lp = LF + Lf$; d'où $LF = Lp - Lf$; c'est-à-dire, qu'étant donnés le produit & un de ses facteurs, on trouvera toujours l'autre, en ôtant le Logarithme du facteur connu de celui du produit ; ce qui réduit toutes les divisions à de simples soustractions.

De ce que $Lp = LF + Lf$, il suit que dans le cas où $F = f$, $Lp = LF^2 = 2LF$, & que par conséquent $LF^3 = 3LF$, que $LF^4 = 4LF$, ou en général, que $LF^m = mLF$. Donc pour élever un nombre à quelqu'une de ses puissances, il suffit de multiplier son Logarithme par l'exposant de la puissance proposée. Le Logarithme qui en résulte est celui de la puissance que l'on cherche.

Et comme les racines ne sont que des puissances fractionnaires (215), il est clair qu'en multipliant le Logarithme d'un nombre par la fraction indiquée, ou, ce qui revient au même, en le divisant par l'exposant de la racine, on aura toujours le Logarithme de cette racine.

EXEMPLES.

$$Lab = La + Lb$$
$$L\frac{a}{b} = La - Lb$$
$$La^m = mLa$$
$$La^{-m} = -mLa$$
$$La^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}La$$
$$La^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n}La$$

$$Labcd\ \&c. = La + Lb + Lc + Ld + \&c.$$
$$L\frac{abc}{de} = La + Lb + Lc - Ld - Le$$
$$La^m b^p c^q = mLa + pLb + qLc$$
$$L\frac{ax^n}{r^2} = La + nLx - 2Lr$$
$$L\frac{ab + bc}{m + n} = Lb + L(a + c) - L(m + n)$$

$$L\sqrt{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{2}L(x^2 + y^2)$$
$$L\frac{a + x}{a - x} = L(a + x) - L(a - x)$$
$$La^2 - x^2 = L(a + x) + L(a - x)$$
$$L\sqrt{a^2 - x^2} = \tfrac{1}{2}L(a + x) + \tfrac{1}{2}L(a - x)$$

$$Lz^3 + \tfrac{3}{4}Lz = \tfrac{15}{4}Lz = Lz^{\frac{15}{4}} = Lz^3\sqrt[4]{z^3}$$
$$L\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n}L(a - x) + \frac{m}{n}L(a^2 + ax + x^2)$$
$$L\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{(a + x)^2}} = \tfrac{1}{2}L(a - x) - \tfrac{3}{2}L(a + x)$$
$$L3a^2 + La^4 + 5L3 = 6L3a = L(3a)^6$$

Du Calcul des Logarithmes par les Séries.

472. Les premiers Calculateurs des Tables avoient déja fini tous leurs calculs, lorſqu'on inventa des méthodes pour les ſimplifier. Mais ſi ces méthodes vinrent un peu tard, elles ne mériterent pas moins d'être accueillies. Celles des ſuites entr'autres réunit tous les ſuffrages par l'application que l'on en fit.

Soit propoſé de trouver le logarithme d'un nombre quelconque exprimé par $1+x$. Je fais $(1+x)^m = 1+z$, $L(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ &c. D'où $L(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c. Or l'équation $(1+x)^m = 1+z$ donne $z = mx + \frac{m.m-1}{2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3 +$ &c. & $mL(1+x) = L(1+z)$, ou $mAx + mBx^2 + mCx^3 +$ &c. $= Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c. ſubſtituant donc dans ce dernier membre la valeur de z en x, j'aurai $mAx + mBx^2 +$

$$
\begin{array}{rl}
mCx^3 + \&c. = Amx + & \frac{m.m-1}{2}Ax^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}Ax^3 + \&c. \\
+ & Bm^2x^2 + m^2.m-1\ Bx^3 + \&c. \\
& \qquad\qquad + \quad Cm^3x^3 + \&c.
\end{array}
$$

Réduiſant & comparant (443), je trouverai, 1.° que $B = -\frac{1}{2}A$; 2.° que $C = \frac{1}{3}A$; 3.° que $D = -\frac{1}{4}A$; & ainſi des autres, enſorte que toute réduction faite, j'aurai $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 +$ &c.).

473. Je remarque maintenant que la quantité A eſt indéterminée, & que par conſequent *le même nombre* $1+x$ *peut avoir une infinité de Logarithmes différens.* Or le plus ſimple, le plus naturel de tous les ſyſtêmes logarithmiques, eſt celui où l'on ſuppoſe $A = 1$. Auſſi appelle-t-on Logarithmes naturels ceux qui ont été calculés d'après cette ſuppoſition. Ce fut ſur cette eſpece de Logarithmes que tomba d'abord le Géomêtre Ecoſſois, quoiqu'en ſuivant une route bien différente. On peut voir dans ſon propre Ouvrage (*Mirifici Logarithmorum canonis Deſcriptio*) comment il y parvint. *Néper*, c'étoit ſon nom, ne s'y explique pas bien clairement ; mais enfin on y découvre l'Analyſe qui le conduiſit à cette découverte.

Les Logarithmes de *Néper* s'appellent encore Logarithmes *hyperboliques.* On en verra la raiſon dans ſon temps.

474. Il eſt évident que tous les ſyſtêmes poſſibles de Logarithmes peuvent être ramenés à celui des Logarithmes naturels, puiſque dans

dans tout ſyſtême, le Logarithme de $1+x$ eſt égal au produit de ſon Logarithme naturel par la quantité conſtante A que l'on appelle *le Module*, & que nous déterminerons bientôt. Ainſi toute la difficulté du calcul des Logarithmes ſe réduit à celle du calcul des Logarithmes naturels ou hyperboliques. Or voici comment on peut faciliter le calcul de ceux-ci.

475. Reprenons l'équation $L(1+x)=A(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\&c.)$ qui en ſuppoſant $A=1$, devient $L(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$ $-\&c.$ Il s'agit maintenant d'avoir une ſuite convergente, celle-là étant d'autant plus convergente, que x eſt plus grand; & ajoutons de part & d'autre La, nous aurons $L(a+ax)=La+$ $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\&c.$ Soit $ax=z$, & on aura $x=\frac{z}{a}$; d'où $L(a+z)=$ $La+\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}+\frac{z^3}{3a^3}-\&c.$ Faiſant donc z négative, nous aurons $L(a-z)=La-\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}-\frac{z^3}{3a^3}-\&c.$ Donc $L(a+z)-$ $L(a-z)$, ou $L\left(\frac{a+z}{a-z}\right)=\frac{2z}{a}\left(1+\frac{z^2}{3a^2}+\frac{z^4}{5a^4}+\frac{z^6}{7a^6}+\&c.\right)$, ſérie toujours convergente, parce qu'il faut que z ſoit plus petite que a pour que $\frac{a+z}{a-z}$ ſoit une quantité poſitive.

476. Appliquons maintenant cette ſérie au calcul des Logarithmes, & pour cela ſuppoſons que $\frac{a+z}{a-z}=\frac{m}{m-1}$. Nous aurons $\frac{z}{a}=\frac{1}{2m-1}$, & $L\left(\frac{m}{m-1}\right)$ ou $Lm-L(m-1)=\frac{2}{2m-1}$ $\left(1+\frac{1}{3(2m-1)^2}+\frac{1}{5(2m-1)^4}+\frac{1}{7(2m-1)^6}+\&c.\right)$.

Donc $Lm=L(m-1)+\frac{2}{2m-1}\left(1+\frac{1}{3(2m-1)^2}+\frac{1}{5(2m-1)^4}\right.$ $\left.+\&c.\right)$. Mais lorſqu'on cherche le Logarithme du nombre m, on eſt cenſé avoir celui de $m-1$; on aura donc celui de m par une ſérie très-convergente, dans les cas ſur-tout où m ſera un nombre un peu grand.

Veut-on, par exemple, avoir le Logarithme hyperbolique de 2 ? On aura $m = 2$, & par conséquent $L2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \&c.\right) = 0{,}69314718$ &c. Veut-on avoir ensuite le Logarithme de 5, il n'y aura qu'à substituer 9 au lieu de m dans l'équation $Lm = L(m-1) +$ &c. & on aura $L5 = 2L2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9^2} + \frac{1}{5 \cdot 9^4} + \&c.\right) = 1{,}60943791$.

Il est donc aisé de trouver par cette méthode, (la même quant au fonds que celle de M. *Halley*, mais démontrée d'une maniere bien plus claire) les Logarithmes des nombres premiers. Or ceux-ci une fois calculés, il est très-facile de trouver ceux de tous les autres nombres. Car étant donnés les Logarithmes de 2 & de 3, on aura celui de 6, en ajoutant les deux autres (465). Celui de 4 sera le double de celui de 2, comme celui de 9 sera le double du Logarithme de 3; & ainsi des autres.

477. Déterminons à présent le Module A pour un autre systême logarithmique, pour celui des Tables, par exemple, dans lequel $a = 10$, & par conséquent $L10 = 1$. Il faudra d'abord prendre le Logarithme hyperbolique de 10 en ajoutant ceux de 5 & de 2; on aura 2,30258509. Puis (474) Logarithme ordinaire de 10, ou $1 = A\,(2{,}30258509$ &c.$)$; d'où l'on tire aussi-tôt $A = \frac{1}{2{,}30258509\ \&c.} = 0{,}43429448$ &c. *C'est la valeur du Module des Tables.*

Il suit de-là, que *pour ramener les Logarithmes hyperboliques aux Logarithmes tabulaires, il faut multiplier les premiers par la fraction* 0,43429448.

Et réciproquement, *pour changer les Logarithmes des Tables en Logarithmes hyperboliques, il faut multiplier les premiers par* 2,30258509. Si on les multiplioit par 3,3219277, on auroit des Logarithmes correspondants à la supposition $a = 2$.

478. On détermineroit de la même maniere le Module A dans tout autre systême. Mais on ne se sert que des deux dont nous venons de parler. Celui des Tables, autrement appellé celui de *Briggs*, parce qu'il les calcula le premier, sert pour les calculs courants de *la Trigonométrie*. Celui des Logarithmes hyperboliques est d'un grand usage dans *le Calcul intégral*.

Le nombre déterminé a est ce que l'on appelle *la Base logarithmique* dans chaque systême. Ainsi 10 est la Base du systême ordinaire. Celle du systême de *Néper* est 2,71828183, comme nous le verrons bientôt.

En général, *la Base d'un systême quelconque de Logarithmes est toujours le nombre dont le Logarithme est* 1.

479. Après avoir résolu généralement ce problême, *étant donné un nombre, trouver son Logarithme*, il étoit important de résoudre le problême inverse, *étant donné un Logarithme, trouver à quel nombre il répond.* On en est venu à bout par le Retour des suites de la maniere suivante.

Si le Logarithme donné est du nombre des Logarithmes ordinaires, on commence par le réduire aux hyperboliques; après quoi la difficulté ne consiste plus qu'à trouver le nombre qui répond à un Logarithme hyperbolique donné.

Soit donc z ce Logarithme, soit $1 + x$ le nombre cherché, & on aura par ce qui précede, $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. Il s'agit de trouver (456) la valeur de x en z.

Pour cela, je suppose . . . . . $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$, &c.
ce qui me donne . . . .

$$z = \left\{ \begin{array}{l} Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \ \&c. \\ \quad - \frac{1}{2}A^2 - AB - \frac{1}{2}B^2 \ \&c. \\ \qquad\qquad\qquad - AC \\ \qquad\quad + \frac{1}{3}A^3 + A^2B \ \&c. \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{1}{4}A^4 \ \&c. \end{array} \right.$$

Donc (443) $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = \frac{1}{24}$, &c. donc $x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} +$ &c.

Donc enfin $1 + x$, ou le nombre cherché $= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ &c. En général, un nombre quelconque $n = 1 + Ln + \frac{L^2n}{2} + \frac{L^3n}{2 \cdot 3} + \frac{L^4n}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ &c. série convergente dans tous les cas, & par conséquent propre à résoudre généralement la question proposée.

480. Appliquons-la à la recherche de la Base des Log. hyp. c'est-à-dire, cherchons quel est le nombre dont le Log. hyp. est 1. Ici $n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} +$ &c. donc $n = 2,71828183$. Ce nombre sert très-souvent dans le Calcul intégral. Le voilà calculé d'avance.

De l'usage des Logarithmes dans la résolution de plusieurs Équations.

481. Souvent il arrive qu'une équation échappe à toutes les Regles de l'Algebre ordinaire, & qu'elle se résout avec la plus grande facilité par le moyen des Logarithmes. En voici plusieurs exemples généraux; viendront ensuite quelques exemples particuliers.

I. Soit proposé de trouver la valeur de x dans l'équation $a^x = b$.

On a (471) La^x ou $xLa = Lb$; donc $x = \frac{Lb}{La}$.

Soit $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$. On aura $mxLa + (1 - nx)Lb = Lc$; donc

$mxLa - nxLb = Lc - Lb$; & $x = \frac{Lc - Lb}{mLa - nLb} = \frac{L\frac{c}{b}}{L\frac{a^m}{b^n}}$.

Soit encore $a^x = \frac{b^{mx+n}}{c^{qn}}$. Ici, $xLa = mxLb - nLb - qxLc$;

d'où $x = \frac{nLb}{mLb - qLc - La} = \frac{Lb^n}{Lb^m - Lc^q - La} = L\frac{\frac{Lb^n}{b^m}}{ac^q}$.

Enfin soit l'équation $\frac{b^{n - \frac{a}{x}}}{c^{mx}} = fx - p$. Nous aurons d'abord $nLb -$

$\frac{a}{x}Lb - mxLc = xLf - pLf$; puis $(mLc + Lf)x^2 - (nLb + pLf)$

$x = -aLb$, ou $x^2Lc^mf - xLb^nfp = -Lb^a$, qui donne (275) $x =$

$\frac{Lb^nfp}{2Lc^mf} \pm \sqrt{\frac{(Lb^nfp)^2}{4(Lc^mf)^2} - \frac{Lb^a}{Lc^mf}}$.

II. Supposons qu'il y ait cent mille habitans dans une Province, & que la population y augmente tous les ans de la trentieme partie; on demande quel sera le nombre des habitans de la même Province au bout d'un siecle? Ce Problême & les suivants sont tirés d'un des meilleurs Ouvrages que nous connoissions. Il a pour titre *Introductio in Analysin Infinitorum.* L'Auteur est *M. Euler*, ce Géomêtre si savant & si modeste !

Soit $n = 100000$. C'est le nombre donné des habitans, lequel par la condition du Problême sera $n + \frac{1}{30}n$, ou $n(1 + \frac{1}{30})$, ou $n(\frac{31}{30})$ à la fin de la premiere année. Il deviendra ensuite $n(\frac{31}{30})^2$ à la fin de la seconde; $n(\frac{31}{30})^3$ à la fin de la troisieme, & ainsi de suite jusqu'au bout du siecle, où son expression sera $n(\frac{31}{30})^{100}$, ou $100000(\frac{31}{30})^{100}$. On aura donc $100000 . (\frac{31}{30})^{100} = x$, nombre cherché.

Or il est visible que l'extraction de la racine centieme n'est pas pratiquable par les voies ordinaires, & que c'est un jeu de la faire par les Logarithmes. Car on a tout de suite $L\,100000 + 100\,L\frac{31}{30} = Lx$; puis, $L\frac{31}{30} = L\,31 - L\,30 =$ (par des Tables qui aient dix décimales, celles d'*Ulacq*, par exemple) $0{,}014240439$; donc $100\,L\frac{31}{30} = 1{,}4240439$. D'ailleurs $L\,100000 = 5$; donc $Lx = 6{,}4240439$, & $x = 2654874$. Il y auroit donc après 100 ans deux millions six cents cinquante-quatre mille huit cents soixante-quatorze habitans dans cette Province.

La Terre n'ayant été repeuplée après le Déluge que par les trois enfans de *Noé* & par leurs trois femmes; on demande dans quel rapport la population auroit dû croître chaque année, pour qu'il y eût un million d'hommes au bout de 200 ans.

Soit $\frac{1}{x}$ l'accroissement annuel; & nous aurons $6\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} = 1000000$, qui donne $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$, & par conséquent $L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200}L\frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} . 5{,}2218487 = 0{,}0261092$; d'où $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$; puis, $1000000 = 61963x$. Enfin $x = 16$ environ. Il eût donc fallu que le genre humain se fût accru tous les ans de $\frac{1}{16}$, ce que la santé robuste, & les longs jours de nos premiers Peres rendent assez vraisemblable.

Cherchons maintenant la quantité dont il faudroit qu'un peuple s'accrût tous les ans, pour être deux fois plus nombreux à la fin de chaque siecle.

Soit n le nombre de ceux qui le composent, soit $\frac{1}{x}$ la quantité que nous cherchons, & nous aurons à chaque époque séculaire $n \left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} = 2n$, qui donne $L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} L\,2 = 0{,}0030103$; d'où $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$, & $x =$ à peu-près 144. *Ainsi*, ajoute ce respectable Auteur, *on doit regarder comme bien ridicules les objections de ces incrédules qui nient que la terre entiere ait pu être peuplée en aussi peu de temps par notre premier Pere.*

Supposons enfin qu'un certain nombre d'hommes augmente tous les ans de la centieme partie, combien faudra-t-il d'années pour qu'il soit dix fois plus grand ?

Appellant n ce nombre d'hommes, x le nombre cherché d'années, on aura au bout de x d'années, $n\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10n$, ou $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$, qui donne $x = \frac{L10}{L101 - L100} = \frac{10000000}{43214} = 231$. Donc il y aura dix fois plus d'habitans à chaque époque de 231 ans.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

482. IL eſt ſi naturel à l'homme d'aimer ce qui lui appartient, & de s'occuper de ce qu'il aime, qu'on ne peut guere douter que dès les premiers temps, où les moiſſons & les pâturages étoient ſes principales richeſſes, il n'ait cherché à connoître l'étendue de ſes poſſeſſions. A ce premier motif dut ſe joindre bientôt le motif preſque auſſi naturel de la curioſité. On voulut meſurer la largeur d'une riviere, la hauteur d'une montagne, la ſolidité d'une muraille; on tâtonna long-temps, on réuſſit quelquefois, & ce ne fut ſans doute qu'après bien des efforts que l'on parvint à réduire ces pratiques groſſieres à des principes lumineux.

Ainſi les premieres ébauches de la Géométrie durent être bien lentes & bien imparfaites. Après qu'on eut trouvé des méthodes pour meſurer les diſtances, les terreins & les ſolidités, il reſtoit encore à former un enſemble des principes ſur leſquels ces méthodes étoient fondées. Ce pas étoit peut-être le plus difficile à franchir. L'Hiſtoire rapporte qu'*Euclide* fut le premier qui en eut la gloire, il y a environ deux mille ans. Son Ouvrage, conſacré par l'eſtime générale de tous les ſiecles éclairés, eſt un de ces monumens précieux & rares qui ont échappé aux injures du temps.

Euclide y conſidere l'étendue dans ſa premiere origine, & procédant toujours du plus ſimple au plus compoſé, il s'éleve par une gradation conſtante depuis le point qu'il ſuppoſe n'avoir pas de parties, juſqu'aux ſolides qui réuniſſent les trois dimenſions de l'étendue, la longueur, la largeur & la profondeur. Il ne s'arrête pas à diſcuter s'il exiſte dans la nature des points ſans parties, des lignes ſans largeur, des ſurfaces ſans épaiſſeur. Ces ſortes de diſcuſſions ne furent jamais du goût des Géomêtres.

Peu leur importe après tout qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de lignes ſans largeur, pourvu qu'on ne leur conteſte pas la poſſibilité d'en ſuppoſer dont la largeur ſoit ſi petite, que l'on puiſſe n'en tenir aucun compte. Car enfin, il faut bien partir d'un terme fixe; & les Géomêtres ont mieux aimé partir avec *Euclide* de celui qui n'admet aucune largeur dans les lignes, que de démontrer en particulier les propriétés de celles qui en auroient une plus ou moins grande. Ils ont conſidéré les ſurfaces ſous le même point de vue, & par-là ils ſont parvenus à connoître, à développer les dimenſions & les rapports des ſolides, d'une maniere que l'expérience n'a jamais démentie. Tel eſt en abrégé l'objet qui va nous occuper.

PREMIERE PARTIE.

Des Lignes.

483. ON peut aller de A en B par une infinité de chemins : mais il en eſt un plus court que tous les autres ; & c'eſt celui-là que l'on appelle en général la Ligne *droite*. Telle eſt la ligne AB. *Archimede* n'en connoiſſoit pas de meilleure deſcription. FIG. 1.

484. Donc, 1°. la ligne droite eſt la vraie meſure de la diſtance d'un point à un autre.

485. 2.° Deux points ſeuls déterminent la poſition d'une droite.

486. 3.° Deux lignes droites ne peuvent ſe couper que dans un point.

487. On appelle Ligne *briſée* toute ligne ſemblable à ADB. La ligne ACB eſt du nombre de celles que l'on appelle Lignes *courbes*.

D'où il ſuit, 1.° qu'il y a une infinité de lignes briſées toutes différentes les unes des autres, qui peuvent aboutir aux mêmes points A & B, au lieu qu'on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite du point A au point B.

2.° Qu'il peut y avoir auſſi une infinité de lignes courbes qui toutes paſſeroient par les mêmes points A & B. Mais entre toutes ces courbes, voici la plus aiſée à décrire.

488. Soit la droite AC mobile autour du point A. Il eſt clair que ſi elle fait une révolution entiere, ſon extrêmité C décrira une courbe fermée CEBFDC. L'eſpace terminé par cette courbe ſe nomme *Cercle*. La courbe qui le termine s'appelle la *circonférence* du cercle. (Il ne faut pas coufondre ces deux choſes). 2.

Le point A eſt le *centre* du cercle. Toute ligne droite menée du centre à un des points de la circonférence, ſe nomme *Rayon ;* & tout rayon prolongé au-delà du centre juſqu'à la circonférence, ſe nomme *Diamêtre*. Ainſi AB eſt un rayon ; BD eſt un diamêtre.

FIG. 489. Il suit de la description du cercle, 1.° que tous ses
2. rayons sont égaux; 2.° que tous ses diamêtres le sont aussi; 3.° que chaque diamêtre divise le cercle & la circonférence en deux parties égales.

490. Une portion quelconque CEB de circonférence se nomme *arc de cercle*. L'espace ACEBA renfermé entre l'arc CEB & les deux rayons CA, AB, se nomme *Secteur*. L'espace CEBC compris entre le même arc CEB & la droite CB se nomme *Segment*; enfin la droite CB se nomme *la corde de l'arc* CEB.

491. De-là on peut conclure, 1.° qu'une corde quelconque CB est plus petite que le diamêtre DB. Car si on mene AC, on aura la ligne brisée CAB, ou DB plus grande que CB.

2.° Que dans le même cercle, les arcs égaux ont des cordes égales, & réciproquement.

3.° Que les plus grands arcs sont soutenus par les plus grandes cordes, & que les plus petits arcs sont soutenus par les plus petites cordes; ce qui est réciproque.

4.° Que la corde CB d'un arc quelconque CEB est la même que celle du reste CDFB de la circonférence. Mais quand on parle de l'arc soutenu par une corde, on entend toujours le plus petit.

Les Géomêtres divisent la circonférence de chaque cercle en 360 parties égales qu'ils nomment degrés. Ils soudivisent chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes, &c. Cette division purement arbitraire, n'a d'autre fondement que le grand nombre de diviseurs du nombre 360.

492. Il suit de-là que les degrés, & les minutes de cercle ne sont pas de quantités absolues & déterminées comme un pied, une toise, &c. Leur grandeur varie dans le même rapport que celles des circonférences auxquelles ils appartiennent, puisqu'ils en sont des parties semblables (376).

Des Angles.

3. 493. Si deux lignes droites AC, CD se coupent dans un point C, leur *inclinaison* ou leur *ouverture* ACD s'appelle

angle. Le point d'interſection C ſe nomme le *ſommet* de cet angle, & les lignes AC, CD en ſont les *côtés*. Quand on déſigne un angle par trois lettres, on place au ſecond rang celle qui eſt à ſon ſommet. Si on ne le déſigne que par une ſeule lettre, c'eſt toujours par celle qui eſt au ſommet. FIG. 3.

Décrivons du centre C & d'un rayon quelconque CK l'arc KL; le nombre de degrés de cet arc ſera la meſure de l'angle ACD. Mais obſervons, 1.° que cette meſure n'eſt point arbitraire. Elle eſt déduite immédiatement de la nature de l'angle; puiſque ſi l'on conçoit que l'angle ACD augmente en devenant AC*d*, ou diminue en devenant ACI, il eſt évident que l'arc AD augmentera ou diminuera préciſément dans le même rapport en devenant K*d* ou KI.

Obſervons, 2.° que cette meſure eſt fixe & conſtante. Car quoiqu'on puiſſe décrire du centre C une infinité d'arcs de cercle compris entre les côtés AC, DC, cependant tous ces arcs ſont du même nombre de degrés, puiſqu'ils ſont tous des parties ſemblables de leurs circonférences. C'eſt pourquoi, lorſque nous dirons par la ſuite que l'angle ACD = l'arc KL, nous entendrons toujours le nombre de degrés de l'arc KL, & non la longueur abſolue de cet arc.

494. Cela poſé, on voit que *la grandeur d'un angle eſt tout-à-fait indépendante de la longueur de ſes côtés*. Puiſqu'on auroit beau prolonger ou diminuer les côtés AC, CD, la meſure de l'angle ACD ou KCL reſteroit toujours la même.

495. On diſtingue trois ſortes d'angles, l'angle *aigu*, l'angle *droit*, & l'angle *obtus*. L'angle aigu a pour meſure un arc moindre que de 90°. Tel eſt l'angle BC*d*. L'angle droit a pour meſure 90°, ou le quart de la circonférence. Tel eſt l'angle ACI. Enfin l'angle obtus eſt meſuré par un arc plus grand que de 90°. Ainſi l'angle ACD eſt un angle obtus.

496. On nomme *le Complément* d'un angle ou d'un arc, ce qui manque à cet angle ou à cet arc pour qu'il ſoit de 90°. D'où l'on voit que le complément d'un angle aigu eſt poſitif, & que celui d'un angle obtus eſt négatif. Ainſi le complément d'un angle ou d'un arc de 57°. 31′ eſt un angle ou un arc de 32°. 29′. De même, le complément d'un angle ou d'un arc de 119°. 11′. 36″ eſt un angle ou un arc de — 29°. 11′. 36″.

FIG. 497. On nomme *Supplément* d'un angle ou d'un arc ce
3. qu'il faudroit leur ajouter pour avoir 180°. Ainſi, 1.° tout angle aigu a pour ſupplément un angle obtus. 2.° Un angle droit eſt lui-même ſon ſupplément. 3.° Un angle obtus a pour ſupplément un angle aigu.

498. Si l'on prolonge les deux côtés AC, DC d'un angle quelconque ACD, je dis que *les angles* ACD, GCH *oppoſés au ſommet ſont égaux*. Cela ſe réduit à prouver que l'arc GH = KL. Or LHG eſt la moitié de la circonférence, ou 180° auſſi-bien que KLH. Donc en retranchant l'arc commun LH, il reſte KL = GH.

499. Une droite CD qui coupe une autre droite AB, fait avec elle deux angles ACD, DCB dont la ſomme = 180°, ou équivaut à deux angles droits ; ce qui eſt évident, puiſque KL + LH = 180°. Donc la ſomme ACD + DCB + BCF + ACF des angles faits tant en deſſus qu'en deſſous de la ligne AB = 360°.

4. En général, ſi tant de droites ACB, DCI, ECH, que l'on voudra viennent ſe couper au même point C, la ſomme des angles ACD + DCE + &c. qu'elles feront toutes enſemble d'un ſeul côté de AB ſera de 180°, & la ſomme des angles qu'elles feront tant en deſſus qu'en deſſous de AB ſera de 360°.

Des Lignes perpendiculaires.

5. 500. On appelle *Lignes perpendiculaires* celles qui par leur rencontre forment des angles droits. Ainſi AB eſt perpendiculaire à DF, & réciproquement.

501. Si l'on prend ſur la perpendiculaire DF deux points D & F également éloignés du point d'interſection C, je dis que tous les points de AB feront chacun également éloignés de D & de F. Car ſi l'on décrit du centre C & du rayon CD ou CF la circonférence DEFGD, l'arc DE ſera de 90° & égal à l'arc EF. Donc leurs cordes ED, EF ſeront égales (491). Donc le point E ſera à égale diſtance de D & de F. D'ailleurs le point C l'eſt par la ſuppoſition. Donc la ligne AB a deux de ſes points chacun également éloignés de D & de F. Tous ſes autres points doivent donc être auſſi à la même diſtance de D & de F (485).

Réciproquement, si les deux points A, E de la ligne droite AB sont chacun également éloignés de D & F, je dis que AB sera perpendiculaire à DF. Car deux des points de la ligne AB étant chacun à égale distance de D & de F, tous les points de la ligne AB ont cette même propriété. Donc DC = CF; par conséquent la ligne AB divise en deux également la ligne DF. De plus ED = EF. Donc les arcs ED, EF sont égaux, & par conséquent chacun de 90°; donc AB est perpendiculaire à DF. FIG. 5.

Enfin si AB est perpendiculaire à DF, & si d'ailleurs son point A est également éloigné des points D & F, tous les autres points de la ligne AB auront la même propriété que le point A; sans quoi cette ligne ne seroit plus perpendiculaire à la ligne DF. Un seul point suffit donc pour déterminer la position d'une perpendiculaire, quand on a déja la ligne sur laquelle on veut la mener.

502. *La perpendiculaire* DC *est plus courte que toutes les obliques* DE, DA, &c. & par conséquent elle mesure la vraie distance du point D à la ligne AB. Car DCF est plus courte que DEF. Donc DC moitié de DCF est plus courte que DE moitié de DEF.

503. D'après ce que nous venons de dire, il est facile de résoudre les Problêmes suivans.

I. Diviser la ligne donnée DC en deux parties égales au point F. 6.

Je décris des centres D & C, & du même rayon DC deux arcs de cercle, qui se coupent aux points G & H par lesquels je mene GFH qui divisera la ligne DC en deux également au point F. Cela est évident.

II. Mener d'un point donné G hors d'une droite AB une perpendiculaire GF sur cette ligne.

Je décris du centre G un arc DC qui coupe la ligne AB aux points D & C. Je divise ensuite DC en deux parties égales au point F, & par les points F & G je mene FG qui sera la perpendiculaire demandée. Car deux de ses points, savoir F & G sont chacun à égale distance des deux points D & C de la ligne AB. Donc (501) FG est perpendiculaire à AB.

504. Comme il n'y a qu'un seul point F qui soit le milieu

FIG. 6. de la ligne DC, & qu'on ne peut mener d'un point à un autre qu'une ſeule ligne droite, on en doit conclure que d'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire à cette droite.

III. Mener par un point donné F de la ligne AB une perpendiculaire à cette ligne.

Je prends DF = FC. Enſuite des centres D & C, & du même intervalle DC je décris deux arcs qui ſe coupent en G, & ayant mené FG, je dis qu'elle ſera la perpendiculaire cherchée. Car deux de ſes points ſont chacun à égale diſtance de D & de C.

Il eſt donc évident que d'un point pris ſur une ligne, on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire à cette ligne.

Si le point donné F étoit à l'extrêmité de la ligne AB, on prolongeroit cette ligne, & on éleveroit la perpendiculaire, comme il vient d'être dit. Mais ſi on ne pouvoit pas la prolonger, on ſe ſerviroit d'une méthode que nous indiquerons bientôt.

Des Lignes perpendiculaires conſidérées dans le Cercle.

7. 505. Soit le rayon CM perpendiculaire à la corde FG; je dis, 1.° que la corde FG ſera coupée en deux également au point D: 2.° que l'arc FMG ſoutendu par cette corde, ſera diviſé en deux parties égales, auſſi-bien que l'angle FCG, par le rayon CM.

Car le point C de la perpendiculaire CM étant également éloigné de F & de G, tous ſes points ont la même propriété. Donc FD = DG, & FM = MG. L'arc FIM eſt donc égal à l'arc MLG, ou l'angle FCM à l'angle MCG.

Réciproquement, ſi la corde FG eſt diviſée en deux également par le rayon CM, ce rayon ſera perpendiculaire à la corde FG, & diviſera en deux également l'arc FMG ou l'angle FCG.

Car ce rayon a deux points C & D également éloignés de F & de G, donc il eſt perpendiculaire à FG, & par conſéquent FM = MG. Par une ſemblable raiſon on prouveroit que ſi le rayon CM diviſe en deux également l'arc FMG, ce rayon eſt perpendiculaire à la corde FG, & qu'il la diviſe en deux également. FIG. 7.

Enfin ſi la corde FG eſt diviſée en deux également & perpendiculairement par la ligne DM, cette ligne paſſe par le centre C.

Car le point D de la perpendiculaire DM étant à égale diſtance de F & de G, tous ſes points ont la même propriété. Donc puiſque le point C eſt à égale diſtance de F & de G, la perpendiculaire DM paſſe par ce point.

506. De-là il ſuit que de ces trois choſes, *être perpendiculaire à une corde, la diviſer en deux également, paſſer par le centre, deux étant poſées, la troiſieme ſuit néceſſairement.*

Pour faire quelque application de ces principes, propoſons-nous de diviſer l'arc DMC en deux également. 6.

On menera la corde DC, & on diviſera cette corde en deux également & perpendiculairement par la ligne GM qui coupera l'arc DMC en deux parties égales au point M.

Donc s'il falloit diviſer l'angle DGC en deux parties égales, on décriroit du ſommet G comme centre, & d'un intervalle quelconque GD l'arc DMC. On diviſeroit enſuite cet arc en deux également au point M, & ayant mené MG, il eſt évident que cette ligne diviſeroit en deux également l'angle BGC.

Si on diviſe de la même maniere l'angle DGM en deux parties égales, on aura le quart de l'angle DGC, enſuite le huitieme, le ſeizieme, &c. Il eſt donc facile de diviſer par la Géométrie élémentaire un angle quelconque en 2.4.8.16.32. &c. parties égales. Mais lorſqu'il s'agit de diviſer un angle en 3.5.7.9. &c. parties égales, c'eſt un problême dont on ne peut venir à bout que par la réſolution d'équations algébriques d'un degré d'autant plus élevé que le nombre de diviſions à faire eſt grand.

507. Soit propoſé maintenant de faire paſſer une circonférence de cercle par les trois points A, B, D *qui ne ſoient pas en ligne droite.* 8.

Ayant mené AB, BD, on diviſera ces deux lignes en deux également & perpendiculairement par FL & GI, dont le point de concours C ſera le centre du cercle cherché. Donc

FIG. si du rayon CA, CB ou CD on décrit une circonférence de
8. cercle, elle passera par les trois points A, B, D. Car AC = CB, & CB = CD. Donc AC = CB = CD.

508. De là il suit que *trois points* A, B, D *déterminent la position d'un cercle*. Il est donc impossible que deux circonférences de cercle se coupent en plus de deux points. Car si elles se coupoient en trois, elles auroient le même centre, & ne feroient plus qu'une seule & même circonférence.

Nous avons supposé que les trois points A, B, D n'étoient pas en ligne droite, parce que si l'on pouvoit faire passer une circonférence par trois points en ligne droite, il seroit possible de mener deux perpendiculaires du même point sur une droite ; ce qui ne peut jamais être (502).

509. Si l'on vouloit trouver le centre d'une circonférence, ou d'un arc de cercle donné, on prendroit à volonté dans cette circonférence ou dans cet arc, trois points que l'on joindroit par deux cordes ; & l'on diviseroit ces cordes comme ci-dessus. Le centre cherché se trouvera toujours au point de concours de deux lignes de division.

Des Tangentes.

7. 510. Une droite MT, qui n'a qu'un seul point M de commun avec la circonférence FMG se nomme *Tangente*, & le point commun M se nomme *point de Contact*.

Si du centre C on mene au point de contact M le rayon CM, je dis qu'il sera perpendiculaire à la tangente MT. Car CM est plus courte que toute autre ligne COK menée du centre C à quelque point de la ligne MT. Donc elle mesure la distance du centre C à la ligne MT. Donc (502) elle lui est perpendiculaire.

Réciproquement, une droite quelconque MT perpendiculaire à l'extrémité M du rayon CM touche la circonférence en M. Car MT étant perpendiculaire au rayon CM, tous les points de la droite TM sont plus éloignés du centre C que le point M. Donc ils sont tous hors du cercle à l'exception du seul point M.

511. Il est donc facile de mener la tangente TM en un point

point donné M ſur la circonférence FMG, puiſqu'après avoir mené le rayon CM, *la perpendiculaire à l'extrêmité du rayon eſt tangente en* M. FIG. 7.

Il eſt évident qu'une droite MT ne peut toucher qu'en un ſeul point M la circonférence FMG. Car ſi elle touchoit cette circonférence en pluſieurs points, on pourroit mener autant de perpendiculaires différentes du centre C ſur la ligne MT, ce qui eſt impoſſible.

512. Si deux, ou un plus grand nombre de cercles ſe touchent en un même point, ſoit en dehors ſoit en dedans, la ligne qui paſſe par leurs centres paſſe auſſi par leur point de contact. 9.

Car la même tangente MT eſt perpendiculaire aux rayons CM, AM. Donc ces rayons ne font qu'une ſeule ligne droite qui aboutit aux deux centres, & qui paſſe néceſſairement par le point de contact. On a donc $CA = CM \pm AM$.

Des Lignes paralleles.

513. Deux lignes AB, CD ſont *paralleles* lorſque leur diſtance eſt par-tout la même. Ainſi, ſi toutes les perpendiculaires EG, FH, &c. menées des points E, F, &c. de la ligne AB ſur CD ſont égales, les lignes AB, CD ſont paralleles. Mais puiſque deux points ſuffiſent pour déterminer la poſition d'une droite, il ſuffit que deux de ces perpendiculaires ſoient égales, EG, par exemple, & FH, ponr que la droite CD qui paſſe par les deux points G, H ſoit parallele à AB. 10.

514. De-là il ſuit que *deux lignes paralleles ne peuvent jamais ſe rencontrer quelques prolongées qu'on les ſuppoſe.*

515. Si une ligne quelconque GF coupe deux paralleles AB, CD, les angles *alternes internes* AFG, FGD ſeront égaux.

Pour le prouver, imaginons deux arcs de cercle indéfinis FLM, GKI décrits des centres G & F, & du même intervalle GF, & prolongeons les perpendiculaires EG, FH juſqu'à ce qu'elles rencontrent les arcs GKI, FLM aux points I, M. Cela poſé, par la nature des paralleles, $EG = FG$.

FIG. Donc 2EG = 2FH, ou (506) GI = FM. Or le arcs
10. FLM, GKI sont décrits du même rayon; donc, puisque leurs cordes sont égales, ils sont égaux, ainsi que leurs moitiés GK, FL. Donc l'angle AFG, qui a pour mesure GK est égal à l'angle FGD, dont la mesure est FL.

D'où on peut conclure, 1.° que les angles GFB, CGF sont égaux.

516. 2.° Que les angles *correspondants* NFB, NGD sont égaux, ainsi que NFA, NGC. Car (498) NFB = AFG, & AFG = FGD ou NGD. Il en est de même pour tous les autres angles correspondants.

3°. Que les angles *alternes externes* CGQ, NFB sont égaux. Car CGQ = FGD = NFB. De même QGD = AFN.

Réciproquement, si les angles alternes internes AFG, FGD sont égaux, les lignes AB, CD sont paralleles. On en trouvera aisément la démonstration.

Si les angles *correspondants*, *alternes externes*, *&c.* étoient égaux, les angles alternes internes le seroient. Donc les lignes seroient encore paralleles.

517. Cela posé, il est facile de mener du point donné G la parallele GD à la ligne AB.

On décrira du centre G & d'un intervalle quelconque GF un arc indéfini FLM, ensuite du point d'intersection F pris pour centre & du même intervalle FG, on décrira l'arc GK. On prendra FL = GK, & par les points G & L ayant mené GL, je dis quelle sera la parallele demandée. Car les angles alternes internes AFG, FGD sont égaux, puisqu'on a pris GK = FL.

11. De l'égalité des *angles* correspondants, il suit, 1.° que si deux angles BAC, NLM ont leurs côtés AB, LN, & AC, LM paralleles, ces deux angles sont égaux. Car si l'on prolonge NL jusqu'à la rencontre D de la ligne AC, on aura (516) NLM = NDC = BAC.

12. 2.° Que pour mener une perpendiculaire AF à l'extrêmité A de la ligne AB (504), on peut mener d'abord la perpendiculaire CD sur la ligne AB, & mener ensuite par le point A la ligne AF parallele à DC. Elle sera la perpendiculaire demandée. Car FAB = DCB.

518. 3.° Que deux paralleles FG, IL qui traversent un cercle coupent sur sa circonférence deux arcs égaux FI, LG. FIG. 7.
Car si on mene le rayon CM perpendiculaire sur FG, il sera aussi perpendiculaire sur IL, à cause des angles correspondants CDF, CHI. Or (506) FIM = MLG, & IM = ML, donc FIM — IM = MLG — ML, ou FI = GL.

Il en seroit de même si une de ces paralleles étoit tangente, ou si elles l'étoient toutes les deux. Jusqu'ici nous n'avons considéré que deux paralleles ; s'il y en avoit un plus grand nombre, elles auroient les mêmes propriétés.

De la mesure des Angles.

519. Si tous les angles avoient leur sommet au centre d'un cercle, leur mesure seroit toujours l'arc entier compris entre leurs côtés ; mais on en rencontre souvent dont le sommet est à la circonférence, & dont on a besoin de connoître la grandeur. Quelquefois aussi on en trouve qui ont leur sommet au-dehors du cercle, ou au-dedans, mais non au centre ; il s'agit de déterminer leur mesure dans tous les cas.

520. Proposons-nous d'abord de mesurer l'angle BAD formé par la tangente AB & par la corde AD. (On le nomme *angle du segment*). 13.

Du centre C je mene le diametre HCG parallele à AD, & le rayon CF perpendiculaire sur AD, enfin le rayon CA au point A de contact. Cela posé, BAC sera un angle droit ainsi que FCG. On aura donc FCG = BAC = l'arc FAG. Or ACG = DAC (515) = AG ; donc BAC — DAC, ou BAD = FAG — AG = FA = $\frac{1}{2}$ AFD ; donc l'*angle du segment* BAD *a pour mesure la moitié de l'arc soutendu par la corde* AD.

521. De-là il suit que l'*angle inscrit* DAK compris entre deux cordes DA, AK, *a pour mesure la moitié de l'arc* DK *intercepté par ses côtés*. Car BAK = $\frac{1}{2}$ AK, BAD = $\frac{1}{2}$ AD. Donc BAK — BAD, ou DAK = $\frac{1}{2}$ AK — $\frac{1}{2}$ AD = $\frac{1}{2}$ DK.

522. Donc, 1.° l'*angle central* DCK *est double de l'angle inscrit* DAK *appuyé sur le même arc* DK.

523. 2.° *Tout angle inscrit appuyé sur le diametre est un* 14.

FIG. *angle droit*, & tous les angles inſcrits appuyés ſur le même
15. arc dans le même cercle ſont égaux.

16. 524. Il eſt aiſé, d'après cela, de mener d'un point donné A hors d'un cercle une tangente à ſa circonférence. En effet ſi on mene du point A au centre C la droite CA, & qu'après avoir diviſé cette droite en deux parties égales au point B, on décrive du rayon BC & du point B comme centre une circonférence, je dis qu'elle coupera le cercle donné aux points M & M′ par leſquels & par le point A ſi l'on mene les lignes MA, AM′, elles ſeront tangentes aux points M & M′.

Car ſi on mene CM, l'angle CMA ſera droit (523). Donc MA eſt perpendiculaire à CM & par conſéquent tangente en M (511). On voit donc que ce problême a deux ſolutions, & qu'il eſt toujours poſſible de mener du même point A hors d'une circonfétence deux tangentes AM, AM′ à cette circonférence.

17. 525. Propoſons-nous maintenant de meſurer l'angle *excentrique* BAD dont le ſommet A eſt au-dedans du cercle.

Je ſuppoſe d'abord que l'angle BAD eſt aigu, & ayant prolongé BA & AD juſqu'en G & en F, je mene GE parallele à AD. Cela poſé ; on aura $BAD = BGE = \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} FG$. Si l'angle excentrique eſt obtus comme BAF, on aura $BAF = 180^{o} - BAD = \frac{1}{2} BFGDB - \frac{1}{2} BD - \frac{1}{2} FG = \frac{1}{2} BF + \frac{1}{2} GD$. Donc *l'angle excentrique a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés plus la moitié de l'arc compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

18. 526. Soit l'angle *circonſcrit* BAD dont le ſommet A eſt hors du cercle, & dont les côtés AB, AD qu'on nomme *ſécantes* aboutiſſent à deux points de la circonférence, je dis que ſa meſure ſera la moitié de la différence des arcs convexe & concave interceptés par ſes côtés. C'eſt-à-dire, qu'on aura $BAD = \frac{1}{2} (BD - GI)$.

Car ſi on mene GE parallele à AD, on aura $BAD = BGE = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} BE + \frac{1}{2} ED - \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BD - \frac{1}{2} GI$. Car $ED = GI$ (518).

Si la ſécante AB devient la tangente AF, on aura $FAB = \frac{1}{2} FB - \frac{1}{2} FG$; donc ſi AM eſt l'autre tangente menée du point A, on aura de même $FAM = \frac{1}{2} (FBM - FGM)$.

DES FIGURES.

527. On appelle *Figure* tout eſpace terminé de tout côté par des lignes.

Si ces lignes ſont droites, la figure qu'elles forment eſt *rectiligne ;* ſi elles ſont courbes, la figure ſe nomme *curviligne.* Elles ſont dans les deux cas les *côtés* de la figure, & leur ſomme en eſt *le contour* ou *le périmêtre.* FIG. 18.

Nous ne parlerons ici que des figures rectilignes ou des *polygones.* Or il eſt aiſé de voir qu'il faut au moins trois lignes pour renfermer un eſpace. Ainſi le premier & le plus ſimple de tous les polygones eſt *le triangle*, ou une figure de trois angles & de trois côtés.

Après le triangle vient le *quadrilatere*, ou une figure de quatre côtés; enſuite le *pentagone*, de cinq, l'*hexagone* de 6, l'*heptagone* de 7, l'*octogone* de 8 ... le *décagone* de 10... le *dodécagone* de 12 .... le *pentédécagone* de 15, &c. Nous inſiſterons principalement ſur le triangle, parce que les autres polygones s'y rapportent immédiatement.

Du Triangle.

528. Un triangle dont les trois côtés ſont égaux, ſe nomme *équilatéral.* S'il n'a que deux côtés égaux, il ſe nomme *iſoſcele.* Enfin ſi tous ces côtés ſont inégaux, il ſe nomme *ſcalene.*

Un triangle qui a un angle droit ſe nomme *rectangle*, & le 19.
côté oppoſé à l'angle droit ſe nomme *hypoténuſe.*

Le côté oppoſé à un angle quelconque d'un triangle ſe nomme la *baſe* de cet angle.

Deux côtés quelconques d'un triangle font une ligne briſée. Leur ſomme eſt donc plus grande que le troiſieme côté.

Si on fait paſſer une circonférence de cercle par les ſommets A, B, C des trois angles d'un triangle ABC, ce triangle s'appelle *inſcrit* dans la circonférence ABC. Or (507) on peut toujours faire paſſer une circonférence par trois points donnés; il eſt donc toujours poſſible d'inſcrire un triangle donné dans un cercle.

529. Cela poſé, l'angle $ABC = \frac{1}{2} AC$ (521), l'angle $ACB = \frac{1}{2} AB$, & $BAC = \frac{1}{2} BC$. Donc $ABC + ACB + BAC = \frac{1}{2} ABC = 180°$. Donc *la ſomme des trois angles d'un triangle quelconque eſt toujours égale à* 180°.

FIG. 19. 530. De-là on peut conclure, 1.° que si on prolonge un côté quelconque AC, l'*angle extérieur* BAF *est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés* ABC, ACB. Car la somme de ces deux angles + l'angle BAC = 180°; de même l'angle FAB + BAC = 180° (499).

531. 2.°. Que l'un quelconque des angles d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres, & que par conséquent *si on connoît deux angles d'un triangle, ou seulement leur somme, on aura le troisieme, en ôtant cette somme de* 180°.

3.° Qu'un triangle quelconque ne peut avoir qu'un seul angle droit ou qu'un seul angle obtus; auxquels cas les deux autres sont nécessairement aigus.

4.° Que dans un triangle rectangle, un des angles aigus est complément de l'autre; d'où il est facile de conclure la valeur de l'un, quand on connoît celle de l'autre.

5.° Que dans un triangle quelconque les côtés opposés aux angles égaux sont égaux, & réciproquement. Car les cordes égales AC, BC, soutendent des arcs égaux, & réciproquement.

6.° Que dans un triangle quelconque le plus grand angle est opposé au plus grand côté, le plus petit angle au plus petit côté; & réciproquement. Il ne faut pas croire cependant que les cordes croissent dans le même rapport que les angles, ensorte qu'un angle double, par exemple, soit opposé à une corde double. Nous verrons dans la Trigonométrie le rapport de leurs accroissemens.

20. 7.° Que dans un triangle isoscele un seul des angles étant connu, les deux autres le sont immédiatement. Car si on connoît l'angle A ou son égal C, on aura l'angle $B = 180° - 2A$. Si on donne au contraire l'angle B, on aura $A = C = 90° - \frac{1}{2}B$.

8.° Que les angles opposés aux côtés égaux dans les triangles isosceles sont toujours aigus.

9.° Que chaque angle d'un triangle équilatéral = 60°. Car ses angles sont tous égaux; leur somme = 180°. Donc chacun = 60°.

532. Si du sommet B d'un triangle isoscele ABC on abaisse la perpendiculaire BF sur la base AC, je dis que tous

les points de cette perpendiculaire BF seront chacun à égale FIG.
distance de A & de C, & que par conséquent la base AC sera 20.
divisée en deux également au point F. Car AB = BC, à cause du triangle isoscelle ABC. Donc, &c. (506).

REMARQUE. Toutes les fois que les deux angles de la base d'un triangle sont aigus, la perpendiculaire abaissée de son sommet tombe en dedans du triangle; mais si l'un des deux est obtus, cette perpendiculaire tombe en dehors. *Voyez* les
Triangles ACB, FCB. La démonstration est aisée. 21.

De l'égalité & de la similitude des Triangles.

533. On appelle triangles *semblables* ceux dont tous les 22
angles sont respectivement égaux. Ainsi, si l'angle ABC = &
dbf, & si en même temps BAC = *bdf*, & ACB = *dfb*, 23.
les triangles ABC, *dbf* sont semblables.

Si deux triangles sont semblables, les côtés opposés aux angles égaux se nomment *côtés homologues*. En général, on appelle *dimensions homologues* de deux figures les lignes de
même dénomination dans l'une & dans l'autre, ou même des 22.
lignes tirées de la même maniere dans l'une & dans l'autre. Par exemple, dans deux cercles, les rayons, les diamêtres, les circonférences, les arcs d'un égal nombre de degrés, ainsi que leurs cordes, &c. sont des dimensions homologues.

Cela posé, nous allons faire connoître les cas dans lesquels on peut conclure la similitude ou l'égalité de denx triangles.

534. I. *Deux triangles qui ont deux angles respectivement égaux sont semblables.* Car le troisieme est égal de part & d'autre (531).

Donc *si deux triangles rectangles ont chacun un angle aigu égal de part & d'autre*, *ces deux triangles seront semblables.*

535. II. Deux triangles sont semblables, lorsque tous leurs côtés homologues sont paralleles. Car alors tous leurs angles sont respectivement égaux.

536. III. *Deux triangles sont semblables*, *lorsque tous les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés homologues de l'autre*, ou lorsqu'étant prolongés, ils se rencontrent à angles droits. Il suffit, pour s'en convaincre, de faire faire un quart

FIG. 22. de révolution autour d'un point fixe à l'un de ces triangles; car alors ses côtés homologues seront tous paralleles à ceux de l'autre triangle.

537. IV. Si un nombre quelconque de paralleles DF, IL, AC, coupent les côtés d'un angle ABC, tous les triangles BDF, BIL, BAC seront semblables. Car outre qu'ils ont l'angle B de commun, tous les angles BDF, BIL, BAC sont égaux (516); il en est de même des angles BFD, BLI, BCA.

Si les deux triangles ABC, *bdf* sont semblables, & que l'on imagine le triangle *bdf* posé sur le triangle ABC de maniere que l'angle *b* tombe sur son égal B, & le côté *db* sur son homologue AB, je dis que le côté *df* représenté alors par DF sera parallele à la base AC. Car le triangle BDF égal à *bdf*, sera semblable au triangle ABC. Donc l'angle BDF = BAC. Donc les lignes DF, AC sont paralleles. (516).

538. V. Si deux triangles ont un angle égal, & les côtés qui comprennent cet angle égaux de part & d'autre, ils sont égaux & semblables.

En effet, si le tiangle BDF avoit, outre l'angle commun B avec le triangle ABC, les deux côtés BD, BF, égaux respectivement à AB, BC, il est évident que ces deux triangles se confondroient.

22 & 24. 539. VI. Deux triangles ABC, *abc*, qui ont tous leurs côtés homologues égaux, sont égaux & semblables.

Pour le prouver, imaginons le triangle *abc* posé sur ABC, de maniere que le côté *ac* tombe sur AC; il est clair que puisque AB = *ab*, & que BC = *bc*, le point *b* doit se trouver sur les deux arcs décrits, l'un du centre A & du rayon AB, l'autre du centre C & du rayon CB. Donc il se trouvera sur leur intersection B. Le triangle *abc* se confondra donc avec ABC, & lui sera par conséquent égal & semblable.

540. VII. Si deux Triangles *abc*, ABC ont deux côtés homologues égaux *ab*, AB, & BC, *bc* avec les angles A & *a* opposés à l'un de ces côtés égaux de part & d'autre, je dis que ces triangles seront égaux & semblables, pourvu que les angles C, *c* opposés aux autres côtés égaux AB, *ab* soient de même espece, c'est-à-dire, ou tous deux aigus ou tous deux obtus.

Posons

Posons l'angle *bac* sur l'angle BAC, le point *b* tombera sur le point B, à cause de AB $=$ *ab*, & le point *c* sur quelque point de AC à cause de l'angle BAC $=$ *bac*. Mais *bc* $=$ BC ; donc le point *c* doit tomber aussi sur quelque point de l'arc CE décrit du centre B & du rayon BC. Donc il est ou en E, ou en C. Or le triangle BEC étant isoscele, les angles égaux C, E sont aigus (531), & par conséquent l'angle AEB est obtus. Donc si les angles C & *c* sont tous deux aigus, le point *c* tombera sur le point C. Le triangle *abc* sera donc confondu avec ABC & lui sera par conséquent semblable. Mais si les angles *c*, C, ou plutôt *e*, E sont obtus, le point *c* tombera en E & par conséquent le triangle *aeb* sera confondu avec AEB & lui sera égal & semblable. FIG. 24.

541. De ce que nous venons de dire sur l'égalité des triangles, il suit, 1° que deux paralleles AB, CD comprises entre deux autres paralleles AD, BC sont égales. 25.

Car si l'on mene AF, DE perpendiculaires sur BC, le triangle ABF sera semblable au triangle CDE. Or par la nature des paralleles AF $=$ DE. Donc le triangle ABF est égal au triangle CDE ; donc AB $=$ CD : on prouveroit de même que AD $=$ BC.

542. 2.° Que tout triangle ABD peut être *circonscrit* à un cercle, c'est-à-dire, que l'on peut décrire au-dedans de ce triangle une circonférence qui touche tous ses côtés. 26.

Il suffit pour cela de diviser deux de ses angles en deux parties égales, & de mener du point de concours des deux lignes de division une perpendiculaire sur l'un des trois côtés, n'importe lequel. Cette perpendiculaire sera le rayon de la circonférence cherchée. Car les triangles ACF, ACG sont égaux. Donc CF $=$ CG ; & CG $=$ CH, à cause de l'égalité des triangles BCG, BCH. Donc les trois perpendiculaires CF, CG, CH peuvent être rayons d'un même cercle inscrit dans le triangle proposé.

543. On a aussi BG $=$ BH, HD $=$ FD, AF $=$ AG. Et appellant p le périmètre du triangle ABD, on aura $p = 2AF + 2FD + 2BH = 2AD + 2BH = 2BD + 2AF = 2AB + 2FD$. Donc $AF = \frac{AD + AB - BD}{2}$; le point F est donc déterminé. Les points G & H peuvent l'être de même. Il n'y aura donc qu'à faire passer une circonférence par ces trois points.

544. Si le triangle étoit rectangle en B, l'angle CBH moitié de

FIG. ABD ſeroit de 45° ; ſon complément BCH ſeroit donc auſſi de
26. 45° ; & le triangle BCH ſeroit iſoſcele. Donc CH = BH = $\frac{1}{2}p$ — AD. Donc le rayon du cercle inſcrit dans un triangle rectangle eſt égal à la moitié de ſon périmètre moins l'hypoténuſe.

Des autres Polygones & de leurs principales propriétés.

545. On diſtingue trois ſortes de Polygones, *les irréguliers*, *les ſymmétriques*, & *les réguliers*.

Les polygones irréguliers ſont ceux qui ont des angles & des côtés inégaux. On appelle polygones ſymmétriques ceux dont tous les côtés oppoſés ſont paralleles & égaux. Les po-
35. lygones réguliers ont tous leurs côtés & tous leurs angles
38. égaux.

Un quadrilatere ſymmétrique ſe nomme un *Parallélo-*
27. *gramme*. Un quadrilatere régulier s'appelle un *Quarré*. Un
28. quadrilatere qui a deux côtés paralleles ſe nomme *Trapeze*.
Un parallélogramme dont tous les côtés ſont égaux, mais
29. dont les angles ſont inégaux ſe nomme *Rhombe* ou *Lozange*.
30. Enfin un parallélogramme dont les côtés ne ſont pas tous
égaux, mais dont tous les angles ſont droits, ſe nomme un
31. *Parallélogramme rectangle*, ou ſimplement un *Rectangle*.

On appelle *angle ſaillant* celui dont le ſommet ſort de la
33. figure, comme ABC, & on nomme *angle rentrant* celui dont le ſommet rentre dans la figure. Tel eſt l'angle CDE.

Une ligne quelconque AD qui traverſe un polygone en
32. paſſant d'un angle à un autre, ſe nomme *Diagonale*.

546. Si un polygone n'a pas d'angles rentrants, la ſomme des angles *intérieurs*, ABC, BCD, CDE, &c. eſt égale à 180° multipliés par le nombre des côtés moins deux, enſorte que ſi on appelle s la ſomme des angles intérieurs, & n le nombre des côtés du polygone, on aura $s = 180^\circ\,(n-2)$.

Car de l'un quelconque A des angles de ce polygone, on peut mener les diagonales AC, AD, AE qui diviſent le polygone en autant de triangles qu'il a des côtés moins deux. Or il eſt évident que la ſomme de tous les angles de ces triangles eſt égale à celle des angles intérieurs du polygone. On aura donc $180^\circ\,(n-2)$ pour la ſomme de tous ces angles.

Donc, 1.° la ſomme des angles d'un quadrilatere quel-

conque $= 360°$. La ſomme des angles d'un pentagone $=$ FIG.
$540°$, &c. 32.

2.° L'un quelconque des angles d'un polygone régulier dont le nombre de côtés eſt n, $= 180\left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Car alors tous les angles intérieurs ſont égaux. Donc leur ſomme eſt égale au produit de l'un quelconque de ces angles par leur nombre, par conſéquent l'un de ces angles, ou $\frac{s}{n} = 180\left(1 - \frac{2}{n}\right)$. On voit donc que les angles d'un polygone régulier ſont d'autant plus obtus, ou approchent d'autant plus de $180°$ que ce polygone a de côtés.

De-là il ſuit que chacun des angles du triangle équilatéral $= 60°$, que celui du quarré $= 90°$, celui du pentagone régulier $= 108°$, celui de l'hexagone régulier $= 120°$, celui de l'heptagone régulier $= 128° + \frac{4}{7} = 128°.34'.17 + \frac{1}{7}''$, &c. &c.

547. Si un polygone n'a pas d'angles rentrans, la ſomme de tous les ſupplémens de ſes angles intérieurs ſera de $360°$.

Car chaque ſupplément $= 180°$ moins l'angle ſaillant du polygone ; donc la ſomme de tous les ſupplémens $= 180° \times n$ — la ſomme des angles intérieurs $= 180° \times n - 180° (n - 2) = 360°$.

548. Si un polygone a des angles rentrants la ſomme de tous les ſupplémens des angles ſaillans plus tous les angles rentrants $= 360° + 180°$ pris autant de fois que le polygone a d'angles rentrans.

Car la ſomme de tous les ſupplémens des angles ſaillans du polygone ABCEFI $= 360°$. Or ſi on fait un angle rentrant CDE, la ſomme des ſupplémens augmente de ECD $+$ DEC ou de $180°$ — l'angle rentrant CED. De même ſi on faiſoit un autre angle rentrant FHI, la ſomme des ſupplémens ſeroit $360° + 180° \times 2$ — CDE — FHI. Donc en général la ſomme des ſupplémens des angles ſaillans plus la ſomme des angles rentrans $= 360° +$ autant de fois $180°$ que le polygone a d'angles rentrans. 33.

Des Polygones ſymmétriques.

549. Puiſque tous les côtés oppoſés d'un polygone ſym-

FIG. métrique doivent être paralleles & égaux, il est clair, 1.° que
33. le nombre de leurs côtés est toujours pair ; 2.° que tout polygone régulier d'un nombre pair de côtés est en même temps symmétrique.

34. & 35. Cela posé, si de chaque angle d'un polygone symmétrique, on mene aux angles opposés des diagonales, les triangles opposés au sommet, comme AFB, DFC seront égaux.

Car le côté AB est égal & parallele au côté homologue DC; donc l'angle FDC = FBA, FCD = FAB. Les triangles AFB, DFC sont donc semblables. Mais ils ont de plus un côté homologue égal de part & d'autre, savoir, AB, DC. Donc ils sont égaux.

De-là il suit que AF = FC, BF = FD, &c. Donc toutes les diagonales AC, DB, &c. se coupent en deux parties égales au même point F qu'on peut appeller à cause de cela le centre du polygone symmétrique. Une diagonale AC, BD, &c. divise donc le polygone symmétrique en deux parties égales & semblables, puisqu'il y a de part & d'autre de cette diagonale autant de triangles égaux & semblables.

550. En général toute droite IL passant par le centre F d'un polygone symmétrique est divisée en deux également au point F, & partage le polygone en deux parties égales & semblables. Cela se prouve par l'égalité & la similitude des triangles FIB, DFL & AIF, LCF.

551. De ces propriétés on peut déduire une maniere facile de décrire un polygone symmétrique d'un nombre de côtés donné. Veut-on, par exemple, décrire un polygone symmétrique de six côtés, on menera par le point F trois droites EFG, DFB, AFC qui fassent entr'elles des angles quelconques. On prendra ensuite FB = DF, & d'une grandeur arbitraire; de même AF = FC, EF = FG, & par les points A, B, G, C, D, E ainsi trouvés, on menera AB, BG, &c. qui seront les six côtés du polygone demandé. Cela est évident, puisque les triangles AFB, DFC ayant deux côtés égaux autour d'angles égaux, doivent être égaux & semblables (533). Donc AB est égale & parallele à DC, &c.

FIG.

Des Polygones réguliers.

552. Tout polygone régulier peut être inſcrit & circonſcrit à un cercle.

Cela ſe réduit à prouver qu'il y a au-dedans de ce polygone un point C également éloigné des ſommets de tous les angles, & tel en même temps que les perpendiculaires menées de ce point ſur chaque côté du polygone ſoient égales entr'elles & diviſent chaque côté en deux parties égales. 36.

Or ſi on diviſe en deux également tous les angles ABD, BDF, &c. par les lignes CB, CD, &c. je dis que toutes ces lignes ſe rencontreront au point cherché C. En effet les angles ABD, BDF, &c. étant égaux, leurs moitiés ABC, CBD, CDF, CFD, &c. ſont égales. Donc tous les triangles ABC, BCD, DCF, &c. ſont iſoſceles & ſemblables. Mais les baſes AB, BD, DF, ſont toutes égales. Donc ces triangles ſont iſoſceles, égaux & ſemblables. Donc AC = BC = CD = CF, &c. Donc le cercle décrit du rayon CB paſſe par tous les ſommets des angles du polygone donné.

Pour prouver maintenant que l'on peut circonſcrire tout polygone régulier à un cercle, il faut faire voir que les perpendiculaires CK, CL, CM, &c. ſont égales. Or les triangles ACB, BCD, &c. étant iſoſceles, les perpendiculaires CK, CL, CM, &c. diviſent en deux également les côtés ſur leſquels elles tombent (532). De plus l'angle CBL = CBK. Donc les triangles rectangles CBK, CBL ſont égaux & ſemblables (534). Donc CK = CL; on prouvera de même que CL = CM = CN = &c. Donc toutes ces perpendiculaires ſont égales.

553. De-là il ſuit que le côté d'un polygone quelconque régulier inſcrit dans un cercle eſt la corde d'un arc de $\frac{360°}{n}$, n étant le nombre des côtés du polygone. Ainſi le côté d'un triangle équilatéral inſcrit, eſt la corde d'un arc de 120°.

On voit par ce qui précede, qu'il eſt facile d'inſcrire dans un cercle un polygone régulier donné. Mais lorſqu'il s'agit d'inſcrire dans un cercle donné un polygone régulier d'un

FIG. 36. nombre de côtés donné ; c'eſt un problême que la Géométrie élémentaire ne peut réſoudre que dans très-peu de cas. Nous allons les expoſer briévement.

554. I. *Inſcrire dans un cercle donné un triangle équilatéral.* D'un point quelconque B pris ſur la circonférence donnée, comme centre, & du rayon BC, je décris l'arc ACD qui coupe en A en D la circonférence ; par les points A & D je mene AD qui ſera le côté du triangle équilatéral démandé. Donc ſi on prend AG, DG égaux chacun à AD, le triangle équilatéral ſera décrit en entier. Pour le prouver imaginons les deux cordes AB, BD, & les triangles ACB, BCD ſeront équilatéraux. Donc les angles ACB, BCD ou les arcs AB, BD ſeront chacun de 60°, & par conſéquent l'arc total ABD ſera de 120°. Or la corde de 120° eſt égale au côté du triangle équilatéral. Donc, &c.

555. Puiſque l'arc AB eſt de 60°, ſa corde AB eſt le côté de l'hexagone régulier inſcrit. Or AB = CB. *Donc le côté de l'hexagone régulier inſcrit eſt égal au rayon.*

Si on diviſe l'arc AB en deux parties égales, la corde de la moitié de cet arc ſera le côté du dodécagone régulier ; on peut donc par la Géométrie élémentaire inſcrire dans un cercle les polygones réguliers de 3, 6, 12, 24, 48, &c. côtés.

556. Soit propoſé maintenant de trouver l'expreſſion analytique du côté du triangle equilatéral. A cauſe du triangle iſoſcele BAC la perpendiculaire AQ menée du ſommet A ſur la baſe CB diviſera cette baſe en deux parties égales au point Q (532). Donc $CQ = QB = \frac{1}{2} CB$. Soit le rayon $CB = a$. On aura $CQ = \frac{1}{2} a$, & $\sqrt{AC^2 - CQ^2}$, ou $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4} a^2}$, ou $AQ = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$. Donc 2AQ ou le côté AD du triangle équilatéral $= a\sqrt{3}$.

557. Pour trouver les expreſſions des côtés des polygones réguliers de 6, 12, 24, &c. côtés, nous allons chercher une formule générale qui faſſe connoître la corde de la moitié d'un arc donné.

Soit donc ABD l'arc qu'il s'agit de diviſer en deux parties égales, afin d'avoir la corde AB de la moitié de cet arc, je fais $AD = b$, le rayon $CA = a$, & j'ai $CQ = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} bb}$, $QB = a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} bb}$. Donc $\sqrt{AQ^2 + BQ^2}$, ou $AB = \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{2a^2 - a\sqrt{4a^2 - b^2}}$. *

* AQ eſt ici $\frac{1}{2} b$.

Soit $b=a\sqrt{3}$, on aura AB côté de l'hexagone $=a$, comme ci-dessus. Soit $b=a$, on aura pour le côté du dodécagone régulier $x=a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Soit $b=a\sqrt{2-\sqrt{3}}$, & on aura pour le côté d'un polygone de 24 côtés, $x=a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; de même celui d'un polygone de 48 côtés $=a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, celui d'un polygone régulier de 96 côtés $=a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$, &c. &c. FIG. 36.

558. II. Inscrire dans un cercle donné un quarré. 37.

Si on mene les diamètres AD, BF perpendiculaires l'un à l'autre, je dis qu'ils couperont la circonférence donnée aux points A, B, D, F, par lesquels si on mene AB, BD, DF, AF, elles seront les quatre côtés du quarré demandé, puisque (523) les arcs AB, BD, DF, AF sont chacun de $90°$.

559. De-là il suit que si on nomme le rayon AC, a, on aura le côté du quarré $=a\sqrt{2}$. Car $AC^2+CF^2=AF^2$, ou $AF^2=2a^2$.

Si on substitue $a\sqrt{2}$ à la place de b dans la formule du n.° 557, on aura pour le côte de l'octogone régulier $AK=a\sqrt{2-\sqrt{2}}$; de même le côté d'un polygone régulier de 16 côtés $=a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, celui d'un polygone régulier de 32 côtés $=a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, &c. &c.

560. III. Inscrire dans un cercle donné un décagone régulier.

Supposons que AB soit le côté cherché, & menons les rayons AC, BC avec la ligne BE, de maniere qu'elle divise en deux également l'angle ABC. L'angle ACB est de $36°$; car il est la dixieme partie de $360°$. Donc les angles du triangle isoscele ABC sont chacun de $72°$. Or par la supposition BE divise en deux également l'angle ABC. Donc l'angle $ABE = 36° = ACB$. Le triangle ABE est donc isoscele & semblable au triangle ACB. Donc AE . AB :: AB . AC; mais l'angle $EBC=\frac{1}{2}ABC=36°=ACB$. Donc le triangle ECB est isoscele. Donc EB ou $AB=EC$, & AE . EC :: EC . AC. Donc si on divise le rayon AC *en moyenne & extrême raison* au point E, le plus grand segment EC sera égal au côté AB du décagone régulier. 38.

Soit $AC=a$, $EC=AB=x$, AE sera $a-x$, on aura donc $a-x \,.\, x :: x \,.\, a$. D'où l'on tire $xx+ax=aa$, & $x=\frac{1}{2}a\,(-$

FIG. $1 + \sqrt{5}$). C'eſt-là l'expreſſion analytique du côté du décagone.

38. Il eſt évident que ſi AB & BD ſont deux côtés conſécutifs du décagone, en menant AD, cette ligne ſera le côté du pentagone régulier ADGIL.

561. Pour en trouver l'expreſſion, ſoit $AD = x$, $AC = a$, on aura $AN = \frac{1}{2}x$, $CN = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}$, $NB = a - \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}$, $NB^2 + AN^2$, ou $AB^2 = 2a^2 - a\sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{a^2}{4}(-1 + \sqrt{5})^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{5}$. Donc $\sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{5})$, & $x = \frac{1}{2}a\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, expreſſion du côté du pentagone régulier.

Si dans la formule du n.° 557, on ſubſtitue $\frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$, au lieu de b, on trouvera que le côté d'un polygone régulier de 20 côtés $= a\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$; que celui d'un polygone de 40 côtés $= a\sqrt{2 - \sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}$, &c.

39. 562. IV. Inſcrire dans un cercle un *Pentédécagone* régulier, ou un polygone régulier de quinze côtés.

On prendra d'abord AB égal au rayon AC, c'eſt-à-dire, l'arc ADB de 60°; enſuite on fera AD égal au côté du décagone, & la corde DB menée par les extrêmités des deux arcs AB, AD ſera le côté du pentédécagone cherché. Car l'arc $ADB = \frac{1}{6}$ de la circonférence, & l'arc $AD = \frac{1}{10}$ de cette même circonférence. Or $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$. Nous donnerons dans un autre endroit (589) l'expreſſion du côté du pentédécagone régulier; obſervons ſeulement ici qu'il eſt aiſé d'inſcrire par ſon moyen les polygones de 30, 60, 120, &c. côtés.

563. On peut donc par la Géométrie élémentaire inſcrire dans un cercle les polygones réguliers de 3 . 6 . 12 . 24, &c. 4 . 8. 16 . 32, &c. 5 . 10 . 20 . 40, &c. 15 . 30 . 60 . 120, &c. côtés. Pour les autres, on ne peut les inſcrire qu'en réſolvant des équations d'un degré d'autant plus élevé que le nombre de leurs côtés eſt grand, ainſi qu'on le verra dans la ſuite.

564. Lorſqu'on voudra circonſcrire à un cercle donné un polygone régulier, on commencera par inſcrire dans ce cer-
40. cle un polygone d'un égal nombre de côtés que celui qu'on veut circonſcrire. Cela fait, du centre C on abaiſſera ſur chaque côté, comme AD, une perpendiculaire CB. Enſuite par le point B, on fera paſſer la tengente EBF (524) qui

qui rencontrera en E & F les rayons CA, CD prolongés, FIG.
& on aura EF pour l'un des côtés du polygone cherché. On 40.
fera la même choſe pour les autres côtés FG, GH, &c. & par-là le polygone cherché ſe trouvera décrit.

On voit en effet, que les triangles ECB, FCB, FCM, MCG, &c. ſont tous égaux entr'eux. Donc EF $=$ FG $=$ GH, &c. & EB $=$ BF $= \frac{1}{2}$ EF $=$ FM &c. Donc le cercle donné touche chaque côté du polygone EFGH, &c. par le milieu. Ce polygone eſt donc circonſcrit au cercle donné.

565. Si on veut avoir l'expreſſion du côté d'un polygone circonſcrit, on nommera CA, a, le côté AD du polygone d'un même nombre de côtés inſcrit $= b$, & on aura AQ $= \frac{1}{2} b$, QC $= \sqrt{aa - \frac{1}{4} bb}$, & à cauſe des triangles ſemblables CAQ, CEB, QC $(\sqrt{aa - \frac{1}{4} bb})$. AQ $(\frac{1}{2} b)$ :: CB (a). EB. Donc 2EB ou le

$$\text{côté cherché} = \frac{2ab}{\sqrt{4aa - bb}} = \text{EF}.$$

On ne peut donc circonſcrire à un cercle, par la Géométrie élémentaire, que les polygones qu'on y peut inſcrire.

On peut déduire de la formule précédente, en y ſubſtituant à b les expreſſions que nous avons trouvées pour la valeur des côtés des polygones inſcrits du même nombre de côtés, 1.° Que le côté du quarré circonſcrit $= 2a$, ce qui d'ailleurs eſt évident. 2.° Que le côté du triangle équilatéral circonſcrit $= 2a\sqrt{3} =$ le double du côté du triangle équilatéral inſcrit. 3.° Que le côté

$$\text{du pentagone régulier circonſcrit} = \frac{2a\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}.$$

4.° Que celui de l'hexagone circonſcrit eſt les deux tiers du côté du triangle équilatéral inſcrit, &c. &c.

Des Lignes proportionnelles.

566. Lorſqu'une premiere ligne eſt à une ſeconde, comme une troiſieme eſt à une quatrieme, ces lignes ſont *proportionnelles* entr'elles.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la quatrieme à la troiſieme, les deux premieres ſont *réciproquement* proportionnelles aux deux autres.

Dans l'un & dans l'autre cas, celles-là ſont *réciproques*

FIG. aux deux autres, qui sont les deux extrêmes ou les deux moyens de la même proportion.

Si la premiere est à la seconde, comme la seconde à la troisieme, on a une proportion continue dont la seconde ligne est la *moyenne proportionnelle*.

Cette proportion continue devient une progression, lorsque la premiere ligne est à la seconde, comme la seconde à la troisieme, comme celle ci à la quatrieme, & ainsi de suite.

Toutes les propriétés que nous avons démontrées généralement pour les quantités proportionnelles, conviennent donc aux lignes qui le sont. Ainsi nous supposerons toujours la démonstration de ces propriétés. Au reste, il ne s'agit ici que des proportions & progressions géométriques; & c'est la partie la plus essentielle des Élémens de Géométrie.

41. 567. Pour la traiter avec ordre, supposons d'abord que sur la droite AB on prenne des parties égales AD, DG, GI, &c. & que l'on mene les paralleles DF, GH, IK, &c. sur la droite AC, il est clair que les parties AF, FH, HK, de cette droite seront égales entr'elles: car si on mene parallélement à AC les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR seront égaux. Donc AF = DE = GR = FH = HK = &c.

On aura donc AD . AF :: DG . FH :: GI . HK; & par conséquent AP somme de tous les antécédens est à AQ somme de tous les conséquents (386), comme un seul antécédent AD est à son conséquent AF, comme un nombre quelconque de parties de AB est au même nombre de parties de AC. Par exemple :: AG . AH :: AI . AK :: DI . FK, &c.

42. 568. Donc, 1.° *Si deux droites* AE, AD *sont coupées par deux ou par un plus grand nombre de paralleles* ED, CB, *leurs parties* CE, BD *seront proportionnelles aux lignes entieres* AE, AD.

43. 569. 2.° Si deux triangles ABC, *abc* sont semblables, tous leurs côtés homologues sont proportionnels.

Car si l'angle B = *b*, & si on prend sur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, en menant DF parallele à AC, le triangle BDF sera égal au triangle *abc*.

Or AB . BC :: BD . BF. Donc AB . BC :: *ab* . *bc*. On prouvera de même que AB . AC :: *ab* . *ac* ; & que AC . FIG. CB :: *ac* . *cb*. *Donc les triangles ſemblables ont tous leurs cô- 43.* *tés homologues proportionnels.*

570. Réciproquement, ſi les deux triangles ABC, *abc* ont tous leurs côtés homologues proportionnels, je dis qu'ils ſeront ſemblables.

Pour le prouver, prenons ſur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, & menons DF parallele à AC. Le triangle BDF ſera ſemblable au triangle ABC. Donc (569) AB . BD :: AC . DF :: CB . BF. Mais par la ſuppoſition AB . *ab* ou DB :: AC . *ac* :: BC . *bc* ; donc DF = *ac*, & BF = *bc*. Le triangle BDF eſt donc égal & ſemblable au triangle *abc* ; & puiſque le premier eſt ſemblable à ABC, le ſecond l'eſt auſſi.

571. Si deux triangles ABC, *abc*, ont un angle égal B, *b* & les côtés autour de cet angle proportionnels, je dis qu'ils ſeront ſemblables.

Soit encore pris BD = *ab*, & on aura AB . BC :: *ab* . *bc* :: BD ou *ab* : BF. Donc BF = *bc* ; de même DF = *ac*. Le triangle *abc* eſt donc égal & ſemblable au triangle BDF, & par conſéquent ſemblable au triangle ABC. On prouvera de même que ſi les triangles ABC, *abc* ont un angle égal, B = *b*, & deux autres côtés homologues AB, AC, & *ab*, *ac* proportionnels, ils ſeront ſemblables.

La propriété des triangles ſemblables que nous venons d'expoſer, eſt un principe fondamental de la Géométrie. En voici une application.

572. Le point B étant ſuppoſé inacceſſible, on demande 44. la diſtance de ce point à un autre point donné D.

Du point D ayant viſé le point B, on marquera ſur le rayon viſuel BD un point quelconque G, & on conſtruira ſur le terrein le triangle AGD dont on meſurera exactement les trois côtés ; cela fait, d'un point quelconque C de la baſe AD on viſera de nouveau l'objet B, & on obſervera le point E où le rayon viſuel BC coupe le côté AG ; la diſtance EG étant meſurée, voici comment on trouvera la diſtance inconnue BD que j'appelle *x*.

Imaginons la ligne EF parallele à AD, & nommons AD (*a*), AG (*b*), GD (*c*), CD (*d*), EG (*f*). A cauſe des triangles ſemblables AGD, GEF, on aura AG (*b*) . EG

FIG. 44. (f) :: AD (a) . EF $= \frac{fa}{b}$ :: GD (c) . GF $= \frac{cf}{b}$. Donc BF $=$ BD $-$ FD $=$ BD $-$ (GD $-$ GF) $=$ BD $+$ GF $-$ GD $= x + \frac{cf}{b} - c$. Or à cause des triangles semblables BEF, BCD, on a BD (x) . CD (d) :: BF $\left(x + \frac{cf}{b} - c\right)$. EF $\left(\frac{fa}{b}\right)$, d'où l'on tire $dx + \frac{dcf}{b} - cd = \frac{fax}{b}$, & $x =$ BD $= cd . \frac{b-f}{bd - fa}$. Il n'y aura donc plus qu'à substituer les valeurs dans cette formule.

45. 573. De la propriété des triangles semblables il suit, que si on divise un angle quelconque A d'un triangle ABC en deux parties égales par la droite AD, les côtés BA, AC seront proportionnels aux *segmens* BD, DC.

Car soit BF parallele à AD & qui rencontre en F le côté AC prolongé, on aura BD . DC :: FA . AC. Or l'angle DAC $=$ DAB $=$ ABF $=$ BFC. Donc le triangle FAB est isoscele, & par conséquent FA $=$ AB. Donc BD . DC :: BA . AC.

574. Il suit aussi que les parties de deux droites qui se coupent entre paralleles, sont proportionnelles. *Voyez* les Fig. 34 & 35.

575. Si du sommet de l'angle droit A d'un triangle rectangle BAC on abaisse sur l'hypothénuse BC la perpendiculaire AD.

1.° Les triangles BAD, ADC seront semblables entr'eux & au triangle total BAC.

576. 2.° *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les segmens* BD, DC.

577. 3.° Chaque côté AB, ou AC du triangle rectangle BAC sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse entiere BC & le segment *adjacent* à ce côté, c'est-à-dire, qu'on aura BC . AB :: AB . BD, & BC . AC :: AC . DC.

578. D'où l'on conclud que *le quarré* BC^2 *de l'hypoténuse est égal à la somme* $AB^2 + AC^2$ *des quarrés des deux autres*

côtés ; propriété du triangle rectangle au moins aussi utile FIG.
que celle des triangles semblables. 45.

Reprenons toutes ces choses. 1.° Le triangle rectangle BAD a un angle aigu B de commun avec le triangle BAC. Donc (534) il lui est semblable. Le triangle rectangle ADC a aussi un angle aigu C de commun avec le triangle BAC ; il lui est donc semblable aussi. Or deux triangles semblables à un même triangle, sont semblables entr'eux. Donc, &c.

2.° De la similitude des triangles BAD, ADC, on déduit BD : AD :: AD : DC. Donc $AD^2 = BD \times DC$.

3.° A cause des triangles semblables BAD, BAC, on a BD . BA :: BA . BC, & par la même raison les triangles BAC, ADC donnent DC . AC :: AC . BC.

Or de ces deux dernieres proportions, on tire $AC^2 = DC \times BC$, & $BA^2 = BD \times BC$. Donc $BA^2 + AC^2 = (DC + BD) \times BC = BC \times BC = BC^2$.

579. Soit $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, on aura $c^2 = a^2 + b^2$, d'où il suit que deux quelconques des côtés d'un triangle rectangle étant connus, le troisieme l'est immédiatement. Ainsi $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Si $a = b$, on a $c = a\sqrt{2}$. Or dans ce cas BC est la diago- 47.
nale du quarré ABCD dont le côté $AB = a$. Donc *la diagonale est incommensurable avec le côté du quarré.*

Remarquez en passant, que l'incommensurabilité n'a pas lieu dans la Géométrie, comme dans les nombres. En effet, il seroit impossible d'exprimer en nombres la valeur exacte de $AB\sqrt{2}$, au lieu que par la Géométrie on trouve exactement sa valeur en prenant la diagonale d'un quarré construit sur le côté AB.

580. De ce qui précede, on peut conclure que si du
sommet A d'un triangle quelconque ABC on abaisse sur la 48.
base BC la perpendiculaire AD, on aura cette proportion : La base BC est à la somme AC + AB des deux autres côtés, comme leur différence AC — AB est à la somme ou à la différence DC ± DB des segmens DC, BD. (On doit prendre la somme des segmens lorsque la perpendiculaire tombe au dehors du triangle, & la différence lorsque cette perpendiculaire tombe en dedans).

FIG. 48. Car $AB^2 - DB^2 = AD^2 = AC^2 - DC^2$. Donc $AC^2 - AB^2 = DC^2 - DB^2$; d'où l'on tire $BC . AC + AB :: AC - AB . DC \pm DB$.

Des Lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

49. 581. *Si d'un point quelconque* M *pris sur la demi-circonférence* AMB, *on mene la penpendiculaire* MP *sur le diamêtre* AB, *cette perpendiculaire sera toujours moyenne proportionnelle entre les deux segmens* ou *abscisses* AP, BP ; ensorte que l'on aura toujours $PM^2 = AP \times PB$.

Car si on mene AM, MB, le triangle AMB sera rectangle (523). Donc $MP^2 = AP \times PB$ (576). On a aussi le quarré AM^2 de la corde $AM = AP \times AB$.

582. Soit le diamêtre $AB = 2a$, l'abscisse $AP = x$, ce qui donne $2a - x$ pour l'autre abscisse BP. Soit la perpendiculaire ou l'*ordonnée* $PM = y$, & nous aurons généralement $yy = (2a - x)\, x = 2ax - xx$; équation fondamentale que nous retrouverons souvent, & qui exprime la propriété si connue du cercle, d'avoir toujours le quarré de chacune de ses ordonnées égal au produit de leurs abscisses. On l'appelle à cause de cela l'*équation au cercle*.

Si on eût fait $CP = x$, c'est-à-dire, si on eût mis l'*origine* des abscisses au centre du cercle, alors on eût trouvé par le triangle rectangle CPM, l'équation $yy = aa - xx$, laquelle exprime la même propriété du cercle.

Et si au lieu d'appeller $2a$ le diamêtre, on l'appelloit a, les deux équations précédentes deviendroient $yy = ax - xx$, & $yy = \frac{1}{4} aa - xx$; ce qui reviendroit toujours au même.

583. Imaginons maintenant la tangente MT, & prolongeons l'axe AB jusqu'à ce qu'il rencontre cette tangente au point T, la ligne PT est ce qu'on appelle la *soutangente*.

Pour en trouver l'expression, rappellons-nous que le triangle CMT est rectangle en M (523). On a donc $TP \times PC = PM^2$.

Donc $PT = \dfrac{PM^2}{CP}$. Soit $CP = x$, & on aura $PT = \dfrac{aa - xx}{x}$.

Donc $PT + CP = CT = \dfrac{aa}{x}$. Ce qui donne cette proportion, $CP . CA :: CA . CT$. D'où il est facile de connoître le point T,

& par conséquent de mener la tangente TM, le point M étant donné. FIG.

Veut-on maintenant avoir l'expression de la tangente TM ? Le triangle TMC rectangle en M donnera $TM = \sqrt{CT^2 - CM^2} =$ 49.

$$\sqrt{\frac{a^4}{x^2} - aa} = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

584. *Si deux cordes se coupent dans un cercle, leurs parties seront réciproquement proportionnelles*, c'est-à-dire, qu'on aura CF . AF :: FB . FD, ou $CF \times FD = AF \times FB$. 50.

Car si on mene AC, BD, les triangles ACF, FBD seront semblables, puisque l'angle CFA = DFB, & que l'angle CDB = CAB (523). Donc CF . AF :: FB . FD.

585. Par-là on peut résoudre les deux Problêmes suivants.

I. Mener par le point donné A la corde BAD de maniere que AD soit à AB :: $m . n$. 51.

Par le point A & par le point C je mene d'abord le diamêtre FG; puis je remarque que le point A étant donné, on connoît sa distance AC au centre C. Soit donc $AC = b$, $CF = a$, $AD = x$, & on aura $AB = \frac{nx}{m}$, $BA \times AD = \frac{nx^2}{m} = FA \times AG = aa - bb$. Donc x, ou $AD = \sqrt{\frac{m}{n}(aa - bb)}$, & $AB = \sqrt{\frac{n}{m}(aa - bb)}$.

Donc si du point A comme centre & d'un rayon $\sqrt{\frac{m}{n}(aa - bb)}$ on décrit un arc de cercle, cet arc coupera la circonférence en un point D par lequel & par le point A, si on mene DAB, elle sera la corde demandée.

II. Par le point A mener la corde BAD égale à une droite donnée c. En gardant les mêmes dénominations, on aura $AB = c - x$, & $AB \times AD = cx - xx = aa - bb$. D'où l'on tire AD ou $x = \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc + bb - aa}$, & $AB = \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + bb - aa}$.

586. Si du même point B pris hors la circonférence d'un cercle, on mene les deux sécantes AB, AC, *leurs parties extérieures* AD, AE *seront réciproquement proportionnelles aux sécantes entieres*; ensorte que l'on aura AD . AE :: AC. 52.

FIG. AB. Car si on mene BE, DC, les triangles ABE, ADC
52. seront semblables, ayant, outre l'angle commun A, les angles DBE, DCE égaux (523). Donc AD . AE :: AC . AB. Donc AD × AB = AE × AC.

53. 587. Si l'une des sécantes devient la tangente AM, cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entiere AB & sa partie extérieure AD.

Car si on mene MD, MB, les triangles AMD, AMB seront semblables, puisqu'outre l'angle commun A, les angles AMP, ABM sont égaux, ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc MD. Donc AD . AM :: AM . AB, & $AM^2 = AD \times AB$. Donc les deux tangentes AM, AN menées du même point A sont égales.

54. 588. Si quatre cordes forment un quadrilatere inscrit, le produit des deux diagonales BD, AC sera égal à la somme des deux produits de chaque côté par le côté opposé, c'est-à-dire, qu'on aura $AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$.

Menons DF de maniere que l'angle ADF = BDC, les triangles AFD, BCD seront semblables, puisque par la supposition ADF = BDC, & que l'angle DAF = DBC. Donc BD . BC :: AD . $AF = \frac{BC \times AD}{BD}$. Or les triangles BAD, FDC sont aussi semblables, puisque ABD = ACD, & que ADB = CDF (car ADB = ADF − BDF = BDC − BDF = CDF). Donc BD . AB :: CD . $CF = \frac{AB \times CD}{BD}$. Donc $AF + CF = AC = \frac{AB \times CD + BC \times AD}{BD}$.
D'où l'on tire $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.

55. 589. Pour faire quelqu'application de cette propriété, soient les deux arcs AC, CB, & ayant mené AB, proposons-nous de trouver une équation générale qui exprime le rapport qu'il y a entre AC, CB, AB & le rayon du cercle.

Je mene par le point C le diametre CD & les cordes AD, DB; je nomme ensuite CD ($2a$), AC (b), CB (c), AB (d); cela posé, le quadrilatere inscrit ACBD donne $2ad = CB \times AD + AC \times BD$: or $AD = \sqrt{CD^2 - AC^2}$, & $BD = \sqrt{CD^2 - CB^2}$. Donc $2ad = c\sqrt{4a^2 - b^2} + b\sqrt{4a^2 - c^2}$, équation générale par le moyen de laquelle on peut résoudre les problêmes suivans.

I. Etant donnée la corde AC d'un arc, trouver la corde AB du double de cet arc.

Or

On a dans ce cas $b=c$. Donc $d=AB=\frac{b}{a}\sqrt{4a^2-b^2}$. FIG. 55.

II. Etant donnée la corde AB d'un arc, trouver la corde AC de la moitié de cet arc.

Soit x la corde cherchée AC, on aura $ad=x\sqrt{4a^2-x^2}$.

Donc $x=\sqrt{2a^2-\sqrt{4a^4-a^2d^2}}=\sqrt{a^2+\frac{1}{2}ad}-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}ad}$.

III. Etant données les cordes AC, CB de deux arcs, trouver la corde AB d'un arc ACB égal à leur somme.

On a $AB=d=\frac{c}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}+\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-c^2}$.

IV. Etant données les cordes AB, AC de deux arcs, trouver la corde CB d'un arc égal à leur différence.

Soit $CB=c=x$, on aura $2ad=x\sqrt{4a^2-b^2}+b\sqrt{4a^2-x^2}$.

D'où l'on tire $x=\frac{d}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}-\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-d^2}$.

Nous avons vu (562) que AB étant le côté de l'hexagone régulier, & AC celui du décagone, la corde CB étoit la corde du pentédécagone. Or le côté de l'hexagone $AB=a$, & le côté du décagone $=AC=b=\frac{a}{2}(-1+\sqrt{5})$. Donc le côté du pentédécagone $=\frac{d}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}-\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-a^2}=\frac{1}{4}a(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15})$, observant qu'ici $d=a$. D'où il est facile de connoître les côtés des polygones réguliers de 30, 60, 120 côtés, &c.

Puisqu'on peut inscrire un pentédécagone régulier, on peut avoir dans un cercle un arc de 24 degrés, ensuite un arc de 12°, de 6°, & de 3°. On peut donc diviser par la Géométrie élémentaire une circonférence de cercle en 120 parties de trois degrès chacune.

V. Etant donnés trois points A, C, B, trouver le rayon du cercle qui passeroit par ces trois points.

En regardant a comme l'inconnue dans l'équation $2ad=c\sqrt{4a^2-b^2}+b\sqrt{4a^2-c^2}$, on trouve $a=\frac{bcd}{\sqrt{4c^2d^2-(d^2+c^2-b^2)^2}}$.

Si le triangle ABC est rectangle, on a $a=\frac{1}{2}b$. Donc le centre du cercle tombe alors au milieu de AB; ce qui d'ailleurs est évident.

FIG.

Solutions de quelques problêmes sur les lignes proportionnelles.

56. 590. Etant données trois droites a, b, c, trouver une quatrieme proportionnelle $\frac{bc}{a}$.

Ayant mené deux droites AD, AE qui fassent entr'elles un angle quelconque, je prends sur AD la partie AB $=a$, & AD $=c$, je prends ensuite sur AE la ligne AC $=b$, & ayant mené CB, je tire DE parallele à CB. Cela posé, je dis que AE est la quatrieme proportionnelle demandée.

Car les triangles ACB, AED sont semblables. Donc AB (a). AC (b) :: AD (c). AE $=\frac{bc}{a}$. On eût trouvé la même chose par l'intersection de deux droites entre paralleles (574).

S'il falloit trouver une troisieme proportionnelle à deux droites données a & b, il est évident que la construction seroit toujours la même. Il faudroit seulement prendre AD $=$ AC.

57. 591. II. Trouver entre deux droites a & b une moyenne proportionnelle $\sqrt{ab}$.

Ayant mené la ligne indéfinie APB, je prends sur cette ligne AP $=a$, PB $=b$ & je décris une demi-circonférence qui ait pour rayon AC $=\frac{1}{2}$ AB. Cela posé, il est clair que la perpendiculaire PM menée par le point de division P sera la moyenne proportionnelle demandée. Car (576) $PM^2 = AP \times PB$.

58. 592. III. Diviser une droite donnée a de la même maniere qu'une autre droite AB est divisée.

Par l'une des extrêmités A de la droite AB je mene AC égale à la droite donnée a & qui fasse avec AB un angle quelconque. Ensuite, je tire CB, & des points de division I, F, D de la ligne AB, je mene parallélement à CB les lignes DE, FG, IH qui diviseront AC de la même maniere que la droite AB est divisée. Car les lignes BC, DE, FG, IH étant paralleles, on a (568) AB . AC :: AI . AH :: IF . HG :: FD . GE :: DB . EC.

593. IV. Diviser une droite AB en un nombre quelconque n de parties égales. FIG. 58.

Par le point A on menera la ligne indéfinie AC sur laquelle ayant pris un nombre n de parties égales de telle grandeur que l'on voudra AE, EG, &c..... LC, on menera par l'extrêmité C & par le point B la ligne CB. Cela posé, les paralleles EK, IH, &c. à CB diviseront la ligne AB en un nombre n de portions égales. Car AB . AC :: AD . AE :: DF . EG :: FH . GI, &c. Or AE = EG = GI = IL, &c. $= \frac{1}{n}$ AC. Donc AD = DF = FH, &c. $= \frac{1}{n}$ AB. 59.

594. V. Diviser une droite donnée AB en *moyenne & extrême raison* au point F; c'est-à-dire, de maniere que le plus grand segment FB soit moyen proportionnel entre la ligne entiere AB & le plus petit segment AF. 60.

Par l'extrêmité A de la ligne AB élevez la perpendiculaire AC $= \frac{1}{2}$ AB & ayant mené CB, prenez FB = CB — AC; la ligne AB sera divisée en moyenne & extrême raison au point F.

Car CB^2 ou $FB^2 + 2AC \times FB + AC^2 = AC^2 + AB^2$. Donc $FB^2 = AB^2 - 2AC \times FB = AB^2 - AB \times FB = AB \times AF$. Donc AB . FB :: FB . AF.

Construction géométrique des Equations déterminées du premier & du second degré.

Parmi les découvertes qui ont rendu *Descartes* si célebre, il n'en est point qui ait plus contribué aux progrès des Mathématiques, que celle de l'application de l'Algebre à la Géométrie. Les constructions géométriques font partie de cette application; mais nous nous bornerons ici à celles des équations du premier & du second degré.

595. Construire géométriquement une équation, c'est trouver en lignes les valeurs de l'inconnue.

Si l'équation n'est que *linéaire*, ou du premier degré, on déterminera toujours la valeur de l'inconnue par la seule intersection des lignes droites.

Si l'équation est *quadratique*, ou du second degré, auquel cas l'inconnue doit avoir deux valeurs, on les trouvera par l'intersection de la circonférence du cercle avec une ligne droite.

Mais si l'équation à construire est plus élevée, il faut alors se se servir de différentes courbes dont le choix & l'usage entraînent beaucoup de difficultés : car il est si difficile de les décrire exactement, que les résultats dounent des racines bien moins appro-

FIG. chées que ceux des méthodes purement algébriques.

60. 596. Si on a $\frac{ac}{b} = x$, on prendra (590) une quatrieme proportionnelle à b, a, c, & on aura la valeur de x. Si on a $x = \frac{abc}{de}$, on prendra $m = \frac{ab}{d}$, ensuite $n = \frac{cm}{e}$, & on aura $n = x$. De même $\frac{abcd}{efg}$ se construit en prenant une ligne $m = \frac{ab}{e}$, ensuite une ligne $n = \frac{cmd}{fg}$; & on aura $n \; \frac{abcd}{efg}$, & ainsi des autres. Ce seroit la même chose, si on avoit à construire $\frac{aa}{b}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^2}$, &c.

597. Mais si on a une fraction à construire dont le numérateur soit complexe, comme $\frac{abc + ccd + mnp}{rq}$, on prendra, par ce qui précede, une ligne $k = \frac{abc}{rq}$, une ligne $i = \frac{ccd}{rq}$, enfin une ligne $l = \frac{mnp}{rq}$, & en ajoutant k, i, l, on aura une ligne égale à la fraction proposée.

598. Si le numérateur & le dénominateur étoient complexes, comme dans $\frac{abc + cfg}{mk + nh}$, on prendroit une ligne $l = k + \frac{nh}{m}$, & la fraction proposée deviendroit $\frac{abc}{ml} + \frac{cfg}{ml}$ que l'on construiroit comme ci-dessus. De même si on avoit $x = \frac{abcc + q^3h + uoqk - m^3p}{q^2i - klq + cmd}$, on prendroit une ligne $f = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{qq}$, & on auroit $x = \frac{abcc}{fqq} + \frac{qh}{f} + \frac{oku}{fq} - \frac{m^3p}{fqq}$, que l'on construiroit comme ci-dessus.

599. Au reste, il y a plusieurs cas où la construction est plus facile que par les méthodes précédentes; nous en allons donner quelques exemples.

Soit $x = \frac{ab + bc}{c + d}$. Au lieu de décompoſer cette fraction en deux autres $\frac{ab}{c+d}$, $\frac{bc}{c+d}$, on prendra une quatrieme proportionnelle à $c + d$, $a + c$, & b, & on aura la valeur de x.

Soit $x = \frac{aa - bb}{c}$; on prendra une quatrieme proportionnelle à c, $a + b$, $a - b$, & on aura x.

Soit encore $\frac{abc^2 - aabb}{abc + c^3}$; on prendra une ligne $m = \frac{ab}{c}$, & on aura $x = \frac{cm - mm}{m + c}$; d'où en prenant une quatrieme proportionnelle à $m + c$, $c - m$, m, on aura la valeur de x.

Nous ne nous arrêtons pas à éclaircir ces exemples par des figures ; cela ne peut avoir aucune difficulté.

600. Voyons donc comment on peut conſtruire les radicaux du ſecond degré.

Si on avoit d'abord $xx = am$, ou $x = \sqrt{am}$, il faudroit prendre une moyenne proportionnelle entre a & m, & ce ſeroit la valeur de x. Si on avoit $x = \sqrt{ab + bc}$, on prendroit entre b & $a + c$ une moyenne proportionnelle qui ſeroit égale à $\sqrt{ab + bc}$.

De même ſi on avoit $x = \sqrt{a^2 + bc}$, on prendroit $m = \frac{bc}{a}$; & on auroit $x = \sqrt{a(a + m)}$ qui ſe conſtruiroit comme dans le cas précédent.

601. Soit maintenant $x = \sqrt{ac + bd}$, on prendra $m = \frac{bd}{a}$ & on aura $x = \sqrt{a(c + m)}$.

Si on avoit $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, on prendroit une moyenne proportionnelle entre $a + b$ & $a - b$, & on auroit la valeur de x. On peut auſſi conſtruire $\sqrt{a^2 - b^2}$ de cette autre maniere. Soit décrite du diamêtre $AB = a$ une demi-circonférence ACB, je dis que ſi on y inſcrit la corde $AC = b$, en menant CB, cette ligne ſera $= \sqrt{a^2 - b^2}$. Car le triangle ACB eſt rectangle. 61.

Si on avoit à conſtruire $\sqrt{a^2 + b^2}$, on prendroit $m = \frac{b^2}{a}$, en-

FIG. 61. suite une moyenne proportionnelle entre a & $a+m$; mais il est plus simple de construire un triangle rectangle ACB, dont les côtés AC, CB soient a & b; l'hypothénuse AB sera égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Si on avoit sous le radical proposé plus de deux termes, comme dans $\sqrt{ab+bc+df}$, on prendroit (598) $m=\frac{ab}{d}+\frac{bc}{d}+f$, & le radical deviendroit $\sqrt{dm}$, quantité facile à construire. Si on avoit $x=\sqrt{ac-fg+mq+rd}$ on prendroit $n=c-\frac{fg}{a}+\frac{mq}{a}+\frac{rd}{a}$; & on auroit $x=\sqrt{an}$.

62. 602. Soit l'expression à construire $\sqrt{a^2+b^2+c^2+f^2+\&c.}$ au lieu de faire comme dans la méthode précédente $m=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}$ &c. on prendra $AB=a$; ensuite on menera $BC=b$ perpendiculaire à AB, & on aura $CA^2=a^2+b^2$. Si on mene $CD=c$ perpendiculaire à CA, on aura $AD^2=a^2+b^2+c^2$. En menant $DE=d$ perpendiculaire à DA, on aura $AE^2=a^2+b^2+c^2+d^2$, &c. &c. d'où il est évident que la derniere hypoténuse AF sera $\sqrt{a^2+b^2+c^2 \&c.}$

S'il y avoit dans cette expression quelques quarrés négatifs, on prendroit, par ce qui précede, un seul quarré m^2 égal à la somme des quarrés positifs, un autre quarré n^2 égal à la somme des quarrés négatifs, on auroit ensuite à construire $\sqrt{m^2-n^2}$, ce qui est facile.

603. On peut réduire à la construction que nous venons de donner toutes les autres quantités radicales. Si on a, par exemple, $\sqrt{bc+am+dn-cq}$, on prendra $bc=i^2$, $am=k^2$, $dn=l^2$, $cq=p^2$, & on aura à construire $\sqrt{i^2+k^2+l^2-p^2}$.

S'il y a des fractions sous le radical proposé, il sera aisé de s'en débarrasser. Qu'on ait, par exemple, $x=\sqrt{\left(\frac{ab^2+cd^2}{b+c}\right)}$, on prendra $\frac{ab}{b+c}=m$, $\frac{cd}{b+c}=n$, & on aura $x=\sqrt{bm+dn}$, quantité facile à construire.

Supposons maintenant qu'on ait $x=\sqrt{\left(aa-\frac{ccff-ddff}{ab+cd}\right)}$,

je prends $cc + dd = mm$, $\sqrt{ab + cd} = n$, & j'ai $x =$ FIG.
$\sqrt{\left(aa - \frac{ffmm}{nn}\right)}$, je prends $p = \frac{fm}{n}$, & j'ai $x = \sqrt{aa - pp}$.

604. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici, 1.° que la quantité donnée étoit homogene, ſi elle ne l'étoit pas comme $\frac{a^3 + b}{a^2 + c}$, on la rendroit telle, en multipliant ſes termes par différentes puiſſances d'une ligne l qu'on regarderoit comme l'unité, ce qui ne changeroit pas ſa valeur. On auroit donc dans cet exemple $\frac{a^3 + l^2 b}{a^2 + lc}$, quantité homogene & de même valeur que la propoſée. Si on avoit $\frac{a^4 c + ab^3 - d}{b^4 + a^3 - c}$, on rendroit cette expreſſion homogene en l'écrivant ainſi $\frac{a^4 c + alb^3 - l^4 d}{b^4 + a^3 l - l^3 c}$, &c.

605. Nous avons ſuppoſe, 2.° que la quantité donnée n'étoit que d'une dimenſion; ſi elle en avoit pluſieurs, il ne ſeroit pas difficile de la réduire à une ſeule quantité monome de la même dimenſion.

Qu'on ait, par exemple, $\frac{abc + cfg}{m + n}$. Je prendrois (598) $p = \frac{ab + fg}{m + n}$, & j'aurois $pc = \frac{abc + cfg}{m + n}$.

606. S'il entroit deux radicaux dans la quantité propoſée, comme dans $\sqrt{ff + g\sqrt{kk - bb}}$, on prendroit $\sqrt{kk - bb} = c$, enſuite $\sqrt{ff + gc} = n = \sqrt{ff + g\sqrt{kk - bb}}$. Si on avoit à conſtruire $\sqrt[4]{a^3 c}$, on feroit $ac = m^2$, & on auroit $\sqrt[4]{a^2 m^2} = \sqrt{am} = \sqrt[4]{a^3 c}$. De même $\sqrt[4]{abcd}$ ſe conſtruit en prenant $ab = m^2$, $cd = n^2$, ce qui donne $\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{mn}$. Enfin, ſi on avoit $\sqrt[4]{a^2 fg + bcfk - a^3 f}$, on prendroit $m = \frac{fg}{a} + \frac{bcfk}{a^3} - f$, & le radical propoſé deviendroit $\sqrt[4]{a^3 m}$, quantité facile à conſtruire.

FIG. En général, on voit que toute quantité dans laquelle il n'entre que des radicaux du second degré, ou même du quatrieme, ou du huitieme, &c. peut toujours être construite par le moyen du cercle.

607. De-là il suit que toute équation du second degré peut être résolue par le moyen du cercle. En effet l'équation $xx - px = qq$, qui peut représenter toutes celles du second degré, donne $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + qq}$, quantité facile à construire par ce qui précede.

63. 608. Pour donner quelques exemples, proposons-nous de mener du point donné A hors des paralleles EB, CD la droite AK de maniere que la partie KI interceptée par ces paralleles soit égale à une droite donnée c.

Soit menée AF perpendiculaire sur les paralleles AB, CD, & soit AF $= a$, FG $= b$, FK $= x$. On aura AK ($\sqrt{a^2 + x^2}$). AF (a) :: IK (c). FG (b). D'où l'on tire $\frac{ac}{b} = \sqrt{a^2 + x^2}$, & par conséquent $x = \frac{a}{b}\sqrt{c^2 - b^2}$, ce qui donne cette construction.

Du point G comme centre & d'un rayon égal à la droite donnée c, soit décrit un arc de cercle, qui coupe en H la ligne FB, je dis que AK parallele à GH sera la ligne demandée.

Car FG (b). AF (a) :: FH ($\sqrt{cc - bb}$). FK (x) $= \frac{a}{b}\sqrt{cc - bb}$.

Il est à remarquer que l'équation $\frac{ac}{b} = \sqrt{a^2 + x^2}$, donne $x = -\frac{a}{b}\sqrt{cc - bb}$ aussi bien que $x = \frac{a}{b}\sqrt{cc - bb}$. Que signifie donc cette valeur négative $-\frac{a}{b}\sqrt{cc - bb}$? Le voici.

L'arc de cercle décrit du centre G & du rayon GH $= c$ coupe la ligne FB en deux points M & H. D'où il suit que AK' parallele à MG n'est pas moins propre à résoudre le problême proposé que AK; c'est donc FK égale & directement opposée à FK, qu'exprime la valeur négative $-\frac{a}{b}\sqrt{c^2 - b^2}$. D'où l'on peut conclure en général, que *lorsque le résultat d'un calcul donne une valeur*

négative

négative de l'inconnue, cela signifie qu'on doit prendre cette inconnue FIG.
dans un sens opposé à celui où on l'avoit prise d'abord.

609. Soit proposé maintenant de décrire un cercle qui passe par les deux points donnés A & B, & qui touche la droite CF donnée de position. 64.

Le problême se réduit à trouver le point M où le cercle touche la droite CF ; car ce point étant trouvé, si on fait passer une circonférence de cercle par A, B, M, elle sera la circonférence cherchée.

Soit menée par les points A & B la droite ABF qui rencontre en F la droite CF, & soit divisée AB en deux également au point D ; en nommant FM (x), FD (a), AD = DB = b, on aura xx = BF × AF = $a^2 - b^2$. D'où $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ce qui donne cette construction.

Sur le diamètre DF soit décrite la demi-circonférence DGF dans laquelle si on inscrit la corde DG = DB, je dis que GF sera égale à FM, car FG = $\sqrt{a^2 - b^2}$ = FM. Or le point M étant déterminé, le problême est résolu.

Des Figures semblables.

610. Deux figures sont semblables, lorsqu'ayant un égal nombre de côtés, tous les côtés de l'une sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre, & que de plus tous les angles de l'une sont respectivement égaux à ceux de l'autre.

D'où il faut conclure que tous les polygones réguliers d'un égal nombre de côtés sont de figures semblables, & que par conséquent les cercles sont tous semblables entr'eux, puisqu'on peut les regarder comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés.

611. Si deux figures ABCDE, *abcde* sont semblables, le contour ou le périmètre de la premiere figure sera au contour de la seconde, comme un côté quelconque AB pris dans la premiere figure est au côté homologue *ab* pris dans la seconde ou comme un nombre quelconque de côtés AB + AE + DE pris dans la premiere, est au même nombre *ab* + *ae* + *de* de côtés homologues pris dans l'autre. 65.

Car AB . *ab* :: BC . *bc* :: DC . *dc* :: DE . *de*, &c. donc la somme des antécédents, ou le périmètre de la premiere figure est à la somme des conséquens, ou au périmètre de la seconde, comme AB . *ab*, ou comme AB + AE + DE, &c. *ab* + *ae* + *de*, &c.

FIG. De-là il suit que les contours de deux polygones réguliers
65. ABDEFG, *abdefg* sont entr'eux :: le côté AG. au côté homologue *ag* :: la portion BAGF du périmêtre du premier polygone est à la portion homologue *bagf* du second. Or si C est le centre de ces polygones, à cause des triangles isosceles
66. & semblables *aCg*, ACG, on aura AG . *ag* :: CG . C*g*. Donc ABDEFG . *abdefg* :: BAGF . *bagf* :: CG . C*g*.

67. 612. *Les circonférences de deux cercles sont donc entr'elles* comme leurs rayons, comme deux arcs quelconques AN, BN compris entre deux rayons CA . CM. Mais CM . CN :: AM . BN. Donc AMF . BND :: l'arc AM . l'arc BN :: la corde AM . la corde AN :: CM . CN. D'ailleurs les circonférences AMF, BND contiennent chacune le même nombre de degrés. Donc les arcs AM, BN sont aussi du même nombre de degrés. On voit donc à présent que la mesure d'un angle en degrés est toujours la même de quelque rayon que l'on décrive l'arc qui doit mesurer cet angle.

65. 613. Si dans deux figures semblables ABCDE, *abcde* on mene les diagonales AD, & AC, *ad* & *ac*, elles seront proportionnelles entr'elles & aux côtés homologues AE, *ae*. Car les triangles ADE, *ade* sont semblables, ayant un angle égal E, *e* & les côtés autour de cet angle proportionnels. On a donc AD : *ad* :: AE : *ae*. On prouvera de même que AC : *ac* :: BC : *bc* :: AE : *ae* :: AD : *ad*. En général, *la propriété des figures semblables est d'avoir toutes leurs dimensions homologues proportionnelles.*

68. Cela posé, s'il s'agissoit de décrire un polygone semblable au polygone donné ABCDEF, & dont le côté homologue à AB fût donné, on prendroit sur AB prolongé, s'il étoit nécessaire, la ligne A*b* égale au côté homologue à AB donné par la supposition. On meneroit ensuite du point A les diagonales AC, AD, AE & les paralleles *bc* à BC, *cd* à CD, *de* à DE, *ef* à EF formeroient le polygone demandé.

Car, par la construction, les angles des figures ABCDEF, *abcdef* sont respectivement égaux. D'ailleurs leurs côtés sont proportionnels à cause des triangles semblables ABC, *abc*, & ACD, A*cd*, &c. Donc les figures *abcdef*, ABCDEF sont semblables.

SECONDE PARTIE.

Des Surfaces.

614. ON appelle *Surface*, *Aire*, ou *Superficie*, tout ce qui n'a que deux dimensions de l'étendue, la longueur & la largeur.

Mais pour nous former une idée plus précise des surfaces, concevons un corps quel qu'il soit, ce livre, par exemple, partagé en deux moitiés, chacune de ces moitiés en deux autres, & ainsi de suite. Il est clair que chaque feuillet peut se diviser de même ; & qu'après avoir épuisé tous les procédés des Arts pour le diviser & le soudiviser, on conçoit encore possibles de divisions sans fin, d'où résulteroient à chaque fois des feuillets de plus en plus minces, quoique toujours égaux en longueur & en largeur au premier.

Mais comme à l'image distincte des premieres divisions succedent des idées vagues & confuses d'un nombre de feuillets qui va toujours croissant, & d'une épaisseur qui diminue dans le même rapport, l'esprit se perd bientôt au milieu de cette confusion.

Revenant alors sur ses pas, il n'emporte avec lui que l'idée bien imparfaite de ce que l'on appelle infiniment grand & infiniment petit. Il conçoit cependant d'une maniere fort claire, 1.° qu'à force de diviser & de soudiviser, on approche de plus en plus du terme où le feuillet n'auroit aucune épaisseur: 2.° Que pour atteindre ce terme, il faudroit un nombre vraiment infini de divisions: 3.° Que ce nombre est impossible, & que par conséquent on n'arrivera jamais à ce terme, quoique l'on en approche de plus en plus.

615. On appelle *Limites* ces sortes de quantités vers lesquelles d'autres tendent sans pouvoir jamais y atteindre. Ainsi on peut dire que *la surface est la limite du corps*, que la ligne est la limite de la surface, & que le point est la limite de la ligne.

FIG. La surface d'un corps est donc cette enveloppe extérieure dont il est revêtu, & sur laquelle tombent nos regards. C'est de cette enveloppe qu'il faut trouver la mesure. Or pour la déterminer avec plus de facilité, voyons quelle est en général la mesure la plus naturelle des surfaces, & comment on évalue en particulier celles des différens polygones qui peuvent servir de faces aux corps.

616. Il est clair, 1.° que la mesure des surfaces doit être elle-même une surface à laquelle on puisse rapporter celles que l'on veut évaluer.

2.° Que cette mesure devant être la plus simple de toutes, sa longueur & sa largeur doivent être égales entr'elles, & chacune égale à l'unité. Or sa largeur se mesure en prenant la distance de ses extrémités paralleles, & la mesure de cette distance est la perpendiculaire qui les joint (515); donc *la mesure la plus naturelle des surfaces est un quarré plus ou moins grand, que l'on prend toujours pour l'unité.*

Une surface d'un pouce de long sur un pouce de large, par exemple, est la mesure commune des surfaces estimées en pouces quarrés. Ainsi on dit qu'il y a 144 pouces quarrés dans une surface d'un pied de long sur un pied de large, & qu'il y en a 5184 dans une toise quarrée.

617. C'est parce que la mesure commune des surfaces doit toujours être un quarré, que l'on nomme *Quadrature* l'évaluation d'une surface. Ainsi le problême si connu de la quadrature du cercle consiste à trouver un quarré égal en surface à un cercle donné, ou qui renferme précisément autant d'espace que ce cercle.

Lors donc que l'on se propose de mesurer une surface, il faut chercher combien de fois elle contient le quarré que l'on prend alors pour l'unité. Or cette recherche est aisée dans toutes les figures rectilignes, comme on va le voir.

69. Commençons par le quarré ABCD, autre que celui qui lui doit servir de mesure, & que nous représenterons par *abcd*. Il est certain que sur la base AB on peut mettre autant de quarrés égaux au quarré *abcd*, que cette base contient de fois le côté *ab*, ou l'unité de longueur. Donc AB étant la somme de ces unités, si on exprime par *f* la surface du petit

quarré, on aura $AB \times f$ pour celle de tous les petits quarrés FIG.
qui peuvent être mis ſur AB, & qui forment le rectangle 69.
ABFE. Mais n'eſt-il pas évident que la ſurface du quarré total ABCD contient autant de fois celle de ce rectangle, que la ligne AD ou AB contient AE ou *ad*, unité de largeur ? Donc ABCD, ou AC (car on déſigne ſouvent ainſi les quarrés & les rectangles) $= AB^2 \times f$, & comme $f = 1$, on a $AC = AB^2$; c'eſt à-dire, que *pour avoir la ſurface d'un quarré, il faut multiplier l'unité de ſurface par le quarré du nombre des unités ſimples contenues dans un de ſes côtés*, & non par le quarré d'un de ſes côtés.

Remarquez en effet que cette derniere expreſſion n'eſt pas exacte, puiſqu'on ne multiplie jamais une ligne par une autre. Mais comme elle eſt uſitée, nous nous en ſervirons dans le ſens que nous venons d'indiquer.

618. Cela poſé, *la ſurface d'un rectangle* ABCD *eſt égale* 70.
au produit de ſa baſe AB *par ſa hauteur* AD.

Car ſi on décrit ſur ſon plus grand côté AB le quarré ABEF, ce quarré contiendra autant de rectangles égaux à ABCD, que AF contient de fois AD. Il en contiendra donc un nombre exprimé par $\frac{AF}{AD}$, ou $\frac{AB}{AD}$; & ſi on appelle x la ſurface du rectangle, on aura $AB^2 = \frac{AB}{AD} x$; d'où $x = AB \times AD$.

Par exemple, ſi un rectangle a 7 pouces de long, ſur 3 pouces de large, ſa ſurface contient 21 pouces quarrés. Ce que nous diſons des pouces quarrés peut s'appliquer à toute autre meſure ſemblable.

619. Il ſuit de ce que nous venons de prouver, 1.° que la ſurface du triangle rectangle ACB eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de ſa baſe. Car le triangle eſt la moitié du rectangle ABCD, puiſque le triangle ADC = ABC.

2.° Que *la ſurface d'un triangle quelconque* ABC *eſt égale*
au produit de l'un quelconque AC *de ſes côtés par la moitié de* 71.
la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé B *ſur cette baſe prolongée, s'il eſt néceſſaire.*

Car le triangle $ABD = \frac{1}{2} BD \times AD$, & le triangle CDB

FIG. $= \frac{1}{2} BD \times DC$. Donc $CDB \pm ABD$, ou la ſurface du
71. triangle $ABC = \frac{1}{2} BD (DC \pm AD) = \frac{1}{2} BD \times AC$.

72. 620. Donc *la ſurface d'un parallélogramme quelconque* ABDF *eſt égale au produit de la baſe* AF *par la diſtance des côtés paralleles* AF, BD, $= AF \times BC$. Car ſi on mene la diagonale BF, le triangle ABF ſera égal au triangle BFD. Donc la ſurface du parallélogramme ABDF eſt double de celle du triangle $AFB = BC \times AF$.

73. 621. La ſurface d'un trapeze quelconque ABCD eſt égale au produit de la demi-ſomme de ſes baſes ſupérieure & inférieure par la diſtance CF des deux côtés paralleles AD, BC, $= \frac{1}{2} CF \times (AD + BC)$.

Car ſi on mene la diagonale AC, on aura $ABC = \frac{AE \times BC}{2} = \frac{BC \times CF}{2}$, & $ACD = AD \times \frac{1}{2} CF$. Donc $ABC + ACD = \frac{1}{2} CF \times (BC + AD) = ABCD$.

622. La ſurface d'un polygone quelconque régulier eſt égale au produit de la moitié de ſon périmêtre par la perpendiculaire menée de ſon centre ſur l'un quelconque de ſes côtés, ou par le rayon du cercle auquel on peut le ſuppoſer circonſcrit.

Car ſi du centre de ce polygone on imagine des rayons menés à tous ſes angles, ces rayons diviſeront le polygone en autant de triangles égaux & ſemblables qu'il a de côtés. Or la ſurface de l'un quelconque de ces triangles eſt égale au produit du côté du polygone par le rayon du cercle inſcrit. Donc la ſurface totale du polygone eſt égale à la moitié du périmêtre multipliée par le rayon du cercle inſcrit.

66. Donc la ſurface d'une portion BCF de polygone régulier compriſe entre deux rayons CB, CG & les côtés $BA + AG$ eſt égale à la portion $\frac{BA + AG}{2}$ du périmêtre multipliée par le rayon du cercle inſcrit.

Donc *la ſurface d'un cercle eſt égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon*, & la ſurface d'un ſecteur quelconque eſt égale au produit de ſon rayon par la moitié de l'arc qui le termine.

Pour avoir la ſurface ou la quadrature d'un cercle, il fau-

droit connoître le rapport du rayon à la circonférence. Mais FIG.
on n'a pu le déterminer que par approximation ; & on a 66.
trouvé que le diamêtre d'un cercle est à sa circonférence, à-peu-près comme 7 à 22, ou comme 113 à 355, ou plus exactement, comme 1 à 3.1415926535897932 avec cent onze autres décimales, ce qui fait une approximation presque infinie.

623. Soit c cette quantité ; on aura $1 : c$ pour le rapport du diamêtre à la circonférence. Or si on appelle r le rayon d'un cercle quelconque, on aura $1 : c :: 2r : 2rc$ pour la circonférence de ce cercle. Sa surface sera donc $2rc \times \frac{1}{2} r$, ou cr^2, expression dont nous nous servirons souvent.

624. Soit proposé maintenant de mesurer la surface d'un polygone quelconque irrégulier.

On le divisera d'abord en triangles ; on prendra ensuite la surface de chacun de ces triangles, & la somme de ces surfaces sera celle du polygone proposé. Cela est évident ; mais s'il s'agissoit de trouver immédiatement un seul triangle égal en surface à un polygone donné, par exemple, au pentagone
ABCDE, on meneroit la diagonale CE pour retrancher 74.
l'angle D ; ensuite par le point D on meneroit DG parallele à cette diagonale & qui rencontre en G le côté AE prolongé. Cela posé, je dis qne si on mene CG, le quadrilatere ABCG sera égal en surface au pentagone ABCDE. Cela se réduit à prouver que le triangle CKD = EKG. Or le triangle CGE est égal au triangle CDE, puisque leurs bases & leurs hauteurs sont respectivement égales. Donc en retranchant le triangle commun CKE, il reste CKD = EKG.

Si on mene à présent la diagonale CA, & BF parallele à cette diagonale, on prouvera de même que le triangle FCG est égal en surface au quadrilatere BCGA, & par conséquent au pentagone proposé qui se trouvera par ce moyen réduit en un triangle de même surface.

Par cette méthode on peut réduire un polygone quelconque en un triangle de même surface, d'où il suit qu'*on peut trouver la quadrature exacte de toutes les figures rectilignes.*

De la Comparaison des Surfaces.

625. Si B représente la base & H la hauteur d'un triangle quelconque, sa surface sera $S = \frac{1}{2} BH$: de même, si on nomme b & h la base & la hauteur d'un autre triangle dont la surface est s, on aura $s = \frac{1}{2} bh$. Donc $S . s :: BH . bh$; d'où il suit . . . . . .

I.° Que les surfaces de deux triangles quelconques sont entr'elles en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs.

II.° Que deux triangles qui ont la même base ou des bases égales sont entr'eux comme leurs hauteurs. Car alors $B = b$. Donc $S . s :: H . h$.

III.° Que deux triangles qui ont des hauteurs égales sont comme leurs bases, puisque H étant égal à H, on a $S . s :: B . b$.

IV.° Que deux triangles sont égaux en surface, lorsque leurs bases & leurs hauteurs sont en raison inverse. Car si $B . b :: h . H$, on a $bh = BH$, & par conséquent $S = s$.

V.° Que *les surfaces de deux triangles semblables sont comme les quarrés de leurs dimensions homologues*. Car dans ce cas $B . b :: H . h$; d'ailleurs $S . s :: BH . bh$. Donc (377) $S . s :: B^2 . b^2 :: H^2 . h^2$, comme le quarré d'une dimension prise dans l'un est au quarré de la dimension homologue de l'autre.

626. De-là il suit, 1.° Que la surface du triangle équilatéral circonscrit est quadruple de celle du triangle équilatéral inscrit. Car le côté de l'un est double du côté de l'autre (565).

2.° Que le quarré circonscrit est double du quarré inscrit. Car en appellant a le rayon du cercle, leurs côtés sont $2a$, $a\sqrt{2}$. Or le quarré de $2a$ est double de celui de $a\sqrt{2}$.

75. 627. Si deux triangles BAC, bac ont chacun un angle égal A, a; je dis que leurs surfaces seront comme les produits des côtés qui entourent l'angle égal dans chacun. Ainsi on aura $BAC, bac :: AB \times AC : ab \times ac$.

Car si on mene les perpendiculaires BD, bd sur les côtés AC, ac, on aura $BAC . bac :: BD \times AC . bd \times ac :: AC . ac \times \frac{bd}{BD}$. Or

à

à cause des triangles semblables ABD, *abd*, on a $\frac{bd}{BD} = \frac{ab}{AB}$. FIG. 75.

Donc BAC . *bac* :: AC . $\frac{ac \times ab}{AB}$ :: AC×AB . $ac \times ab$.

Pour faire quelqu'application de cette propriété proposons-nous de mener du point donné B la droite BF sur le triangle ACD, de maniere qu'il soit divisé en deux parties AEF, EFDC dont les surfaces soient dans le rapport de *m* à *n*. 76.

Puisque AEF . EFDC :: *m* . *n*. Donc AEF + EFDC, ou ACD . AEF :: $m+n$. *m*. Or ACD . AEF :: AC×AD . AE×AF. Donc $m+n$. *m* :: AC×AD . AE×AF. Cela posé, soit mené BI parallele à AC, & soient nommées les connues BI (a), AI (c), AC (b), AD (d), & l'inconnue AF (x); à cause des triangles semblables AEF, BIF, on aura FI ($x+c$) . BI (a) :: AF (x) . AE $= \frac{ax}{x+c}$. Donc $m+n$. m :: bd . $\frac{ax^2}{x+c}$. D'où l'on tire $xx - \frac{bdmx}{a(m+n)} = \frac{bcdm}{a(m+n)}$. Donc $x =$ $\frac{bdm \pm \sqrt{b^2d^2m^2 + 4abdmc(m+n)}}{2a(m+n)}$. De ces deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, il n'y a que la positive $x = \frac{bdm + \sqrt{\ } \&c.}{2a(m+n)}$ qui soit propre à résoudre la question proposée.

Pour savoir ce que l'autre signifie, il faut observer que si AC, AD (b, d) étoient toutes deux négatives, c'est-à-dire, devenoient AC′, AD′, cela ne changeroit rien du tout à l'équation trouvée ci-dessus; d'où il suit que cette équation doit donner aussi la solution du cas où il s'agiroit de mener du point B la droite BF′E′ qui divise le triangle AD′C′ en deux portions dont le rapport soit $\frac{m}{n}$. C'est donc AF′ que signifie la valeur négative trouvée ci-dessus. Or AF′ est directement opposée à AF. On voit donc se confirmer ce que nous avons déja dit des quantités négatives (608).

Si le point donné B étoit sur le côté AC comme en E, on auroit alors AI (c) $= 0$, & AF $= \frac{bdm}{a(m+n)}$, & si ce point

FIG. 76. étoit au-dedans du triangle ACD, on auroit, en faisant c négatif dans la formule trouvée ci-dessus, la solution de ce cas.

628. *Lorsque deux figures sont semblables, leurs surfaces sont toujours proportionnelles aux quarrés de leurs dimensions homologues.*

Car soient A & B les deux dimensions dont le produit donne la surface S de la premiere figure, & a, b les deux dimensions homologues dont le produit donne la surface s de la seconde. On aura $S . s :: AB . ab$. Mais par la nature des figures semblables on a, $A . a :: B . b$; donc (377) $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$. Donc les surfaces des figures semblables sont comme les quarrés de leurs dimensions homologues.

629. De-là il suit, 1.° que *les surfaces des cercles sont comme les quarrés de leurs rayons, comme les quarrés de leurs diamêtres, comme les quarrés de leurs circonférences, & en général comme les quarrés de leurs dimensions homologues.*

77. 2.° Qu'une figure quelconque ALMNC construite sur l'hypoténuse AC d'un triangle rectangle est égale à la somme des deux figures semblables ADFGB, BHIKC construites sur les deux autres côtés.

Car $ALMNC . ADFGB . BHIKC :: AC^2 . AB^2 . BC^2$. Donc $ALMNC , ADFGB + BHIKC :: AC^2 . AB^2 + BC^2$. Or $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Douc $ALMNC = ADFGB + BHIKC$.

78. Donç si sur l'hypothénuse AB on décrit un demi-cercle ACB il sera égal en surface à la somme des demi-cercles ACD, CFB construits sur les deux autres côtés AC, CB. On aura donc $AECGB = ADC + CFB$, & en retranchant les parties communes $AECA + CGBC$, resteront les espaces curvilignes $ADCEA + CFBGC$ égaux en surface au triangle ABC. Si AC étoit $=$ CB, chaque espace seroit égal au triangle ACK, ou KCB. On nomme ces espaces *les Lunules d'Hippocrate.*

630. Nous allons terminer cette matiere par la résolution de quelques problêmes.

77. I. *Etant données les deux figures semblables* ADFGB, BHIKC, *trouver une troisieme figure* ALMNC *égale à leur somme, & qui leur soit en même temps semblable.*

On disposera à angles droits les deux côtés homologues FIG.
AB, BC, & AC sera (629) le côté homologue du poly- 77.
gone demandé. Il sera donc facile de le décrire (613).

Donc pour trouver un cercle égal à la somme de deux autres cercles, il faut disposer les diamêtres ou les rayons de ceux-ci à angles droits, l'hypoténuse AC sera le diamêtre ou le rayon du cercle demandé.

II. *Trouver une figure* ADFGB *semblable à deux autres figures* ALMNC, BHIKC, *& qui soit égale à leur différence.*

De l'un quelconque AC des côtés de la plus grande figure comme diamêtre, on décrira un demi-cercle dans lequel on inscrira la corde BC égale au côté homologue à AC dans la seconde figure. Cela posé, je dis que AB sera le côté homologue du polygone demandé. Car $AB^2 = AC^2 - BC^2$. Il est donc facile de décrire un cercle égal à la différence de deux autres cercles donnés.

III. *Trouver une seule figure égale à la somme ou à la différence de tant de figures semblables qu'on voudra, & qui leur soit en même temps semblable.*

Soient A, B, D, &c. les côtés homologues des figures qu'il faut ajouter, a, b, d, &c. les côtés homologues des figures qu'il faut soustraire, enfin x le côté homologue du polygone demandé, on aura $x^2 = A^2 + B^2 + D^2 +$ &c.... $- a^2 - b^2 - d^2$ .... &c. quantité facile à construire (602). On peut donc trouver un seul cercle égal à la somme ou à la différence de tant de cercles qu'on voudra.

IV. *Trouver une figure semblable à une autre figure donnée & qui soit avec elle dans le rapport de* m *à* n.

Je nomme a un côté quelconque de la figure donnée, & x le côté homologue dans la figure cherchée. J'ai donc $a^2 : x^2 :: m : n$.

D'où $x = \sqrt{\frac{n}{m} a^2} = a\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{a}{m}\sqrt{mn}$, quantité facile à construire.

On peut donc trouver deux cercles qui soient entr'eux $:: m : n$, quel que soit ce rapport, fût-il même incommensurable.

V. *Trouver la surface & les côtés d'un rectangle dont on ne connoît que le périmêtre* (p), *& la diagonale* AC (a). 70.

Soit $AB = x$, $AD = y$, on aura $x + y = \frac{1}{2}p$, & $x^2 + y^2 = a^2$. La premiere équation donne $xx + 2xy + yy = \frac{1}{4}pp$. D'où xy, ou la surface cherchée $= \frac{1}{8}pp - \frac{1}{2}a^2$, & $x = AB = \frac{1}{4}p + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16}p^2}$, $y = AD = \frac{1}{4}p - \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16}pp}$.

FIG. VI. *Trouver la surface d'un triangle dont on ne connoît que les trois côtes.*

79. Soit $AC=a$, $AB=b$, $BC=c$, la perpendiculaire $BD=x$, on aura $AD=\sqrt{bb-xx}$, $DC=\sqrt{cc-xx}$. Donc $AD+DC=a=\sqrt{bb-xx}+\sqrt{cc-xx}$. D'où l'on tire $x=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$.

Donc $\frac{ax}{2}$, ou la surface demandée $(s)=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$ $=\frac{1}{4}\sqrt{(2b^2-a^2)a^2+(2c^2-b^2)b^2+(2a^2-c^2)c^2}=\ldots$ $\frac{1}{4}\sqrt{(2ab-(a^2+b^2-c^2))(2ab+(a^2+b^2-c^2))}=\ldots$ $\frac{1}{4}\sqrt{(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)}=\ldots\ldots$ $\frac{1}{4}\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)}$. Soit q la demi-somme des trois côtés, ou $q=\frac{a+b+c}{2}$, on aura $2q-2a=b+c-a$, $2q-2b=a+c-b$, $2q-2c=a+b-c$. Donc la surface $s=\sqrt{q\,.\,q-a\,.\,q-b\,.\,q-c}$.

Si C'N est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC; en menant C'B, C'A, C'C & les perpendiculaires C'M, C'P, on aura le triangle $ABC'=C'N\times\frac{1}{2}AB$, $BC'C=\frac{1}{2}C'P\times BC=\frac{1}{2}C'N\times BC$, $AC'C=\frac{1}{2}C'N\times AC$; donc la surface s du triangle $ABC=C'N\times\frac{1}{2}(a+b+c)$. Donc le rayon $C'N=$

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{a+b+c}=\sqrt{\frac{q-a\,.\,q-b\,.\,q-c}{q}}.$$

Si le triangle ABC est rectangle en A; on a $cc=a^2+b^2$, &

$$C'N=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c)}{(a+b+c)(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c)}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c^{*}=q-c\ (544).$$

80. VII. *Etant donnés l'hypoténuse d'un triangle rectangle & le rapport des deux côtés, trouver sa surface.*

Soit $AC=a$, $BC:AB::m:n$, $AB=x$, BC sera $\frac{mx}{n}$, & on aura $x^2+\frac{m^2}{n^2}x^2=a^2$. D'où $x^2=\frac{a^2n^2}{m^2+n^2}$, & $\frac{mx^2}{n}$, ou

---

* Car le produit de $a+b+c$ par $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=ab$ dans le cas où $c^2=a^2+b^2$.

la surface cherchée $= \frac{a^2nm}{m^2+n^2}$. On a aussi AB $= \frac{an}{\sqrt{m^2+n^2}}$, & FIG.

BC $= \frac{am}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

VIII. *Etant donnés le rapport des trois côtés d'un triangle quelconque, & leur somme, trouver la surface.*

Soit AC $= x$, AB $= y$, BC $= z$, le périmètre $= p = x + y + z$, le rapport des trois côtés $x : y : z :: a : b : c$. Donc $x + y + z$ ou $p : a + b + c :: x : a :: y : b :: z : c$; d'où l'on tire $x = \frac{ap}{a+b+c}$, $y = \frac{bp}{a+b+c}$, $z = \frac{cp}{a+b+c}$. Or les trois côtés étant connus, on a la surface. 79.

IX. *Le périmètre d'un triangle rectangle étant donné, avec le rapport de l'hypoténuse à la somme des deux autres côtés, déterminer sa surface.* 80.

Soit p le périmètre donné, AC : AB + BC :: $m : n$, AC $= x$, AB $= y$, BC $= z$, on aura $x : y + z :: m : n$. Donc $x + y + z$, ou $p : x :: m + n : m$. Donc $x = \frac{mp}{m+n}$, $y + z = \frac{np}{m+n}$, $y^2 + 2yz + z^2 = \frac{n^2p^2}{(m+n)^2}$; or $y^2 + z^2 = x^2 = \frac{m^2p^2}{(m+n)^2}$.

Donc la surface cherchée $yz = \frac{1}{2}pp\left(\frac{n-m}{m+n}\right)$. Si on veut avoir les côtés du triangle, on trouvera que le plus petit $= \frac{\frac{1}{2}p}{m+n}\left(n - \sqrt{2m^2 - n^2}\right)$, & le plus grand $= \frac{\frac{1}{2}p}{m+n}\left(n + \sqrt{2m^2 - n^2}\right)$.

Des Surfaces planes ou des Plans.

631. Supposons un miroir parfaitement poli, ensorte que tous les points d'une ligne droite quelconque étendue sur sa surface, la touchent en même temps ; & alors nous aurons une idée de ce que l'on appelle *Surface plane*, ou *Plan.* On l'appelle ainsi par opposition aux surfaces convexes ou concaves ; telles sont la surface d'une boule, la surface intérieure d'un vase, &c.

FIG. 632. Le plan eſt donc parmi les ſurfaces ce que la droite eſt parmi les lignes. Mais pour nous en former une idée plus
81. géométrique, concevons un triangle rectangle ABF, qui tourne autour de la perpendiculaire immobile AB : il eſt clair que ſi dans ſa révolution la ligne BF laiſſe des traces de ſon paſſage, elles ſeront toutes dans un plan circulaire, pendant que celles de l'oblique AF coïncideront ſur une ſurface convexe.

633. Or de cette deſcription du plan il réſulte, 1.° que ſi une droite quelconque a deux points communs avec un plan, tous les autres points de cette droite ſont dans le même plan, & que par conſéquent ſi on prolonge tout à la fois ce plan & cette droite, ils reſteront toujours confondus.

634. 2.° Qu'une droite AB perpendiculaire à un plan eſt néceſſairement perpendiculaire à toutes les droites FB, GB, DB, NB, HB, LB qui étant dans le même plan, paſſent par l'extrêmité B de cette droite. On ne peut donc mener d'un point donné A hors d'un plan, qu'une ſeule perpendiculaire AB ſur ce plan.

Car ſi on en pouvoit mener une autre comme AF, l'angle AFB ſeroit droit ainſi que l'angle FBA ; on pourroit donc mener du même point A deux perpendiculaires ſur la même ligne FB, ce qui eſt impoſſible. On prouveroit de même que d'un point donné B dans un plan, on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire à ce plan.

3.° Que la diſtance d'un point à un plan eſt la perpendiculaire menée de ce point ſur le plan.

4.° Que deux droites AB, MN perpendiculaires à un même plan ſont paralleles entr'elles. Car alors les angles ABC, MNC ſont tous deux droits. On voit même que ſi ces droites étoient également inclinées & dans le même ſens ſur le plan PQ, elles ſeroient encore paralleles, puiſque les angles ABC, MNC ſeroient égaux.

635. *Si deux plans ſe coupent, leur interſection commune eſt une ligne droite.* Cette interſection doit être une ligne, puiſque les deux plans ſont des ſurfaces, & n'ont par conſéquent pas d'épaiſſeur. De plus, elle doit être droite : car ſi par deux quelconques A & B de ſes points on mene la droite

AB, cette droite doit être en même temps dans l'un & dans FIG.
l'autre plan. Donc elle est leur interſection commune.

636. Il eſt donc évident que *trois points, non en ligne droite, déterminent la poſition d'un plan.* 82.

On voit bien, en effet, qu'une infinité de plans différens, comme HD, CG, peuvent avoir les deux points A & B communs entr'eux; mais on voit en même temps qu'il n'y a qu'un ſeul de ces plans qui puiſſe paſſer par le point déterminé C. Donc les trois points A, B, C déterminent la poſition du plan CG.

Donc, 1.° trois points ne peuvent être communs à deux plans différens, ſi ces points ne ſont pas en ligne droite.

637. 2.° Deux droites CA, AD qui ſe coupent ſont dans un même plan PQ. Car les trois points C, A, D déterminent la poſition des deux droites CA, AD. D'où il ſuit qu'un angle quelconque CAD détermine la poſition d'un plan.

638. 3.° Si une droite AB eſt perpendiculaire à deux droites FB, GB dans leur point d'interſection B, elle ſera perpendiculaire à leur plan PQ. 81.

Car ſi on conçoit que FB tourne autour de la ligne immobile AB, elle décrira dans ce mouvement un plan perpendiculaire à AB. Or il eſt clair que ce plan eſt celui des deux droites FB, GB, puiſque GB eſt perpendiculaire à BA.

639. Suppoſons maintenant que deux plans DH & CG ſe coupent dans la ligne AB, & menons AC dans le plan CG, perpendiculaire à AB, & AD perpendiculaire à AB dans le plan DH; alors l'angle CAD ſera la meſure de l'inclinaiſon des deux plans DH, CG. D'où l'on voit que les inclinaiſons des plans les uns à l'égard des autres, ſe meſurent comme celles des lignes droites; enſorte que.... 82.

1.° Un plan qui rencontre un autre plan fait avec lui deux angles dont la ſomme eſt de 180°.

2.° Dans l'interſection de deux plans les angles oppoſés au ſommet ſont égaux.

3°. Si un nombre quelconque de plans ſe coupent ſur une même ligne, la ſomme de tous les angles qu'ils feront deux à deux tant en-deſſus qu'au-deſſous de leur commune interſection ſera de 360°.

FIG. 4.° Un plan qui coupe deux ou plusieurs plans paralleles fait avec eux des angles correspondants, égaux, &c. &c.

640. Si un plan coupe deux ou plusieurs paralleles, les lignes droites qui naîtront de leurs intersections seront toutes paralleles. Car si elles ne l'étoient pas, elles se rencontreroient en les prolongeant. Les plans dans lesquels elles sont se rencontreroient donc aussi. Ils ne seroient donc pas paralleles.

82. 641. Si le plan CG est perpendiculaire au plan PQ, & si l'on mene d'un point quelconque B du plan CG la perpendiculaire BA sur la commune intersection CF, je dis que BA BA sera perpendiculaire au plan PQ.

Car si dans le plan PQ on mene DA perpendiculaire à CA, l'angle BAD sera droit à cause des plans perpendiculaires. Donc BA sera perpendiculaire aux deux droites CA & AD, & par conséquent (638) à leur plan PQ.

642. *Si deux plans* DH, CG *sont perpendiculaires à un troisieme plan* PQ, *leur intersection* BA *sera aussi perpendiculaire à ce troisieme plan.* Car BA est alors perpendiculaire aux deux droites CA, AD. Donc elle est perpendiculaire à leur plan PQ.

Des Lignes droites coupées par des Plans paralleles.

83. 643. Si d'un même point A on mene à travers deux plans paralleles PQ, *pq* tant de droites que l'on voudra, A*d*D, A*f*F, &c. je dis, 1.° que toutes ces droites seront coupées proportionnellement. 2.° Que les figures DFGEH, *dfgeh* seront semblables.

Car si on fait passer un plan par les trois points A, D, F, ses intersections avec les plans paralleles PQ, *pq* seront (640) les droites paralleles DF, *df*. Donc les triangles ADF, A*df* seront semblables. On prouvera la même chose des triangles AFG & A*fg*, AEG & A*eg*, &c. d'où il suit que AD : A*d* :: DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg* :: AG : A*g*, &c. :: la perpendiculaire AB menée du point A sur le plan PQ : la perpendiculaire A*b* menée du point A sur le plan *pq*. Donc, 1.° toutes les droites AD, AF, AG, &c. sont coupées proportionnellement par les plans PQ, *pq*.

2.°

2.° Puisque DF : df :: AF : Af :: FG : fg, &c. on a DF : df :: FG : fg :: EG : eg, &c. or si on mene DG, dg, on prouvera comme ci-dessus que les triangles ADG, Adg sont semblables. Donc AD : Ad :: DG : dg :: DF : df :: FG : fg; les triangles DFG, dfg ont donc tous leurs côtés homologues proportionnels & sont par conséquent semblables. D'où il suit que les angles F, f sont égaux. On prouvera la même chose des angles G & g, E & e, &c. Donc tous les angles de la figure DFGEH sont respectivement égaux à ceux de la figure $dfgeh$. D'ailleurs tous leurs côtés homologues sont proportionnels. Donc elles sont semblables. FIG. 83.

644. De ce que l'angle F est égal à l'angle f, il suit que si deux angles DFG, dfg ont leurs côtés respectivement paralleles, ils seront égaux quoique situés dans différens plans, ce que nous avons déja démontré (517) pour le cas où ces angles sont dans le même plan.

Si les lignes AdD, AfF, &c. au lieu de partir d'un même point A étoient paralleles, il est clair que toutes les lignes dD, fF, gG, &c. seroient égales entr'elles, & que les figures DFGEH, $dfgeh$ seroient égales & semblables.

De ce que les figures DFGEH, $dfgeh$ sont semblables, il suit que leurs surfaces sont entr'elles :: $DF^2 : df^2$ :: $AD^2 : Ad^2$ :: le quarré BA^2 de la distance du point A au plan PQ : quarré bA^2 de la distance du même point A au plan pq. Or le rapport de AB^2 à Ab^2 est constant ou invariable pour un même point A. Donc quel que soit le nombre des droites AD, AF, &c. des surfaces les figures DFGEH, $dfgeh$ seront entr'elles dans le rapport constant de AB^2, & leurs périmêtres seront aussi dans la raison constante de AB à Ab.

S'il y avoit un plus grand nombre de plans paralleles, ils auroient tous les mêmes propriétés.

TROISIEME PARTIE.

Des Solides.

FIG. 645. ON appelle *Solide* tout ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue.

Il y a trois manieres de former des solides. Voici la premiere. Concevons que plusieurs plans soient tellement unis par leurs angles, qu'ils enferment de tout côté un certain espace ; alors on aura un solide généralement appellé *Polyedre* dont les *faces* seront les plans qui concourent à le former, & dont les *angles solides* résulteront du concours des angles plans.

Si le polyedre n'a que quatre faces planes, on le nomme *Tetraedre*. S'il en a six, c'est un *Hexaedre*, &c. &c. Lorsque tous les angles d'un polyedre sont égaux, & que toutes ses faces sont des plans égaux & semblables, ce polyedre est régulier.

84. 646. On mesure les angles solides en prenant la somme des angles plans qui les forment. L'angle solide B, par exemple, a pour mesure la somme des degrés des angles plans ABC, CBD, DBE, EBA.

Or il est aisé de voir qu'il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, & que la somme de deux quelconques de ces angles est toujours plus grande que le troisieme.

647. D'où il suit qu'*un angle solide est moindre que* 360^d. Car soit la *pyramide quadrangulaire* BACDE, dont les faces sont les quatre triangles ABE, EBD, &c. & dont la base est le quadrilatere ACDE. Il est clair que les deux angles AEB + DEB sont plus grands que l'angle AED avec lequel ils forment l'angle solide E ; donc leur supplément est moindre que celui de l'angle AED. Par la même raison, le supplément des deux angles EAB + CAB est moindre que celui de l'angle CAE, & ainsi de suite. Donc la somme des supplémens des huit angles inférieurs des faces de la pyramide, la-

quelle somme est l'angle solide B seul (646), est moindre FIG.
que la somme des supplémens des quatre angles de la base, 84.
qui est de 360°. L'angle solide est donc moindre que 360°.

648. Et par conséquent *il ne peut y avoir que cinq Polyedres réguliers, savoir, trois dont les faces soient des triangles équilatéraux ; un dont les faces soient de quarrés, & un dont les faces soient des Pentagones réguliers.*

Car puisqu'il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, qu'un angle solide ne peut être de 360 degrés, il est clair qu'il n'y a que cinq cas où on puisse faire un angle solide avec des plans des Polygones réguliers. 1.° L'angle d'un triangle équilatéral étant de 60 degrés, trois joints ensemble font un angle solide de 180 degrés ; & par conséquent quatre triangles de cette espece peuvent faire un *Tetraedre*. 2.° Quatre triangles équilatéraux joints ensemble, peuvent faire un angle solide de 240 degrés, & former un corps régulier à huit faces, appellé *Octaedre*. 3.° Cinq de ces triangles joints ensemble peuvent former un angle de 300°, & par conséquent on en peut composer un corps régulier à 20 faces, appellé *Icosaedre* ; mais six joints ensemble feroient 360° ; ce qui ne peut être un angle solide. 4.° Chaque angle d'un quarré valant 90°, trois joints ensemble feront un angle solide de 270°, & par conséquent on en pourra composer un corps régulier à six faces, appellé *Hexaedre* ; mais quatre de ces angles feroient 360°, ce qui ne peut faire un angle solide. 5.° Chaque angle du Pentagone régulier valant 108° ; trois joints ensemble pourront faire un angle solide de 324° ; & on en pourra faire un corps régulier à douze faces, appellé *Dodécaedre* ; mais si on joignoit quatre de ces angles, on auroit 432°, angle solide impossible. Enfin l'angle de l'hexagone régulier étant de 120°, si on en ajoute trois ensemble, la somme 360° montre qu'on ne peut faire d'angles solides, ni par conséquent de corps réguliers avec des hexagones, & à plus forte raison n'en pourra-t-on pas faire avec des *Heptagones*, des *Octogones*, &c. donc il ne peut y avoir que cinq corps réguliers.

649. Comme il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, & qu'alors même ces angles laissent un vuide à la base, il faut un autre plan pour le fermer. C'est pourquoi de tous les polyedres, le plus simple est la pyramide triangulaire, ou le tétraedre.

Si au lieu d'un triangle ou d'un quadrilatere, on suppose que la base d'une pyramide est un polygone d'un plus grand nombre de côtés, les faces de cette pyramide se multiplieront dans le même rapport ; jusqu'à ce que la base étant de-

FIG. venue un cercle, la pyramide alors devienne un *Cône.*

85. Si la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur sa base, passe par le centre de cette base, la pyramide est *droite.* Il en est de même pour le cône : on l'appelle *droit* ou *oblique*, selon que la perpendiculaire menée de son sommet passe, ou ne passe pas par le centre de sa base.

650. Autre maniere de concevoir la formation des solides. Si la base ADHG monte parallélement à elle-même le long de DC ou AB, la somme de tous les élémens égaux à cette base forme un solide que l'on appelle *Prisme.* Il est droit ou oblique, suivant que DC est perpendiculaire ou incliné sur la base.

Le prisme est donc un solide terminé par des bases égales & paralleles, & par des faces qui sont des parallélogrammes. Sa grosseur est donc uniforme. On l'appelle prisme triangulaire,

90. lorsque le polygone générateur est un triangle ; prisme quadrangulaire, lorsqu'il a pour base un quadrilatere : & si ce quadrilatere est un parallélogramme, le prisme alors se nomme *Parallélepipede.*

86. Ce sera un parallélepipede rectangle, toutes les fois que la base sera un rectangle, & que de plus la ligne le long de laquelle se fait le mouvement sera perpendiculaire à cette base.

Si la base étoit un quarré, dont le côté fût égal à la ligne de hauteur, le prisme engendré par son mouvement seroit

94. un hexaedre régulier, que l'on appelle aussi *cube.* Le cube est donc un prisme à six faces toutes égales & toutes quarrées. Un dez à jouer, par exemple, est un cube.

Lorsque le polygone générateur est un cercle, le prisme devient rond, & on l'appelle *cylindre.* Il est *droit* ou oblique selon la position de la ligne de mouvement ou de ses côtés sur sa base.

89. 951. Troisieme maniere de former des solides. Si autour d'une ligne immobile CA, on fait tourner une figure quelconque AFBC, elle engendrera un solide, appellé *solide de révolution.* Son *axe* est la ligne immobile CA.

Il suit de cette description qu'un point quelconque B de cette figure trace dans son mouvement la circonférence d'un cercle dont le rayon BP est perpendiculaire à l'axe, & dont

le centre eſt P : ce qui fait voir que *toutes les ſections faites* FIG.
dans un ſolide de révolution par des plans perpendiculaires à ſon axe, ſont des cercles.

Si le polygone générateur eſt un rectangle, il engendrera un cylindre droit. Si ce n'eſt qu'un triangle rectangle, le ſolide de révolution ſera un cône droit. Si c'eſt la moitié d'un polygone d'un grand nombre de côtés, elle produira un 92.
ſphéroïde. Enfin le ſolide de révolution ſera une *ſphere*, ſi le demi-polygone qui l'engendre eſt un demi-cercle.

652. *La ſphere eſt donc un ſolide tel que touts les points de la ſurface ſont également éloignés d'un point en dedans, qu'on nomme centre.* D'où il ſuit que toute ligne droite qui paſſe par ſon centre, & qui eſt terminée de part & d'autre à ſa ſurface, eſt égale à ſon axe.

On peut donc prendre pour axe de la ſphere toute droite qui paſſe par ſon centre. Donc toutes les ſections faites dans une ſphere par des plans qui paſſent par ſon centre, ſont des cercles de même grandeur, puiſque leurs diamêtres ſont égaux.

653. En général, ſi on coupe une ſphere par un plan quelconque, la ſection ſera toujours un cercle. Car ſi du centre on mene un diamêtre perpendiculaire au plan coupant, on pourra regarder ce diamêtre comme l'axe, autour duquel la ſphere a été engendrée. Or dans ce cas la ſection eſt un cercle (651).

On appelle *grands cercles* d'une ſphere tous ceux dont les plans paſſent par ſon centre, & ils ſont tous égaux entr'eux. On appelle *petits cercles* ceux dont les plans paſſent au-deſſus ou au-deſſous du centre, & il eſt évident qu'ils ſont d'autant plus petits qu'ils en ſont plus éloignés.

De la meſure des Surfaces des Solides.

654. Nous appellerons dans la ſuite la ſurface d'un ſolide celle de ſes faces ſeulement, en exceptant ſes baſes, s'il en a, & nous appellerons ſurface totale d'un ſolide celle de ſes baſes & de ſes faces.

Un polyedre étant terminé par des faces planes, il eſt aiſé

FIG. d'en avoir la ſurface. C'eſt pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

90. 655. La ſurface d'un priſme quelconque eſt égale à la longueur BC multipliée par le contour GIH de la ſection faite dans ce priſme par un plan perpendiculaire à BC.

Car la ſurface du parallélogramme BCED $=$ DE $\times$ la perpendiculaire GI $=$ BC $\times$ GI; celle du parallélogramme ABCF $=$ BC $\times$ IH; enfin celle du parallélogramme AFDE $=$ AF $\times$ GH $=$ BC $\times$ GH. Donc la ſomme de tous ces parallélogrammes, ou la ſurface du priſme $=$ BC $\times$ GIH.

656. De-là il ſuit que *la ſurface d'un priſme droit, & par conſéquent celle d'un cylindre droit, eſt égale au produit du contour de ſa baſe par ſa hauteur*, ou par la diſtance de ſes baſes paralleles.

La ſurface du cylindre oblique ABCD eſt donc auſſi égale à ſa longueur AB multipliée par le contour GMIMG de la ſection faite par un plan perpendiculaire à AB.

Or il eſt aiſé de s'aſſurer que cette ſection eſt un ellypſe; en effet par un point quelconque P de l'axe GI, faiſons paſſer un plan parallele à la baſe du cylindre, ſon interſection avec la ſurface courbe ſera un cercle, & ſon interſection avec le plan GMI ſera la droite MPM perpendiculaire à l'axe GI. Cela poſé, ſoit $GP = x$, $PM = y$, $LF = z$, $GI = a$, $LK = BC = AD = b$; & on aura par la propriété du cercle $yy = bz - zz$, & à cauſe des triangles ſemblables LPG, PKI, $z = \frac{bx}{a}$. Donc $yy = \frac{bb}{aa}(ax - x^2)$ équation à l'ellipſe, dont le grand axe eſt a & dont le petit eſt b. *Voyez* les Sections coniques.

657. La ſurface d'une pyramide réguliere eſt égale à la moitié du périmêtre du polygone régulier qui lui ſert de baſe, multipliée par la perpendiculaire menée de ſon ſommet ſur l'un quelconque des côtés de la baſe, & que l'on nomme *Apothême*. Cela eſt trop évident pour avoir beſoin de démonſtration.

D'où il ſuit que la ſurface du cône droit eſt égale au produit de la demi-circonférence de ſa baſe par ſon apothême ou par la diſtance de ſon ſommet à l'un quelconque des points de ſa baſe.

91. 658. Suppoſons le cône droit ABC coupé par un plan

DE parallele à sa base AC, & proposons-nous de mesurer la surface du *cône tronqué* ACDE. FIG. 91.

Soit DE $= b$, AC $= a$, ce qui reste de l'apothême BC $= d$; BE $= x$, on aura $x + d : a :: x : b$. D'où $x = \frac{bd}{a-b}$; or si $1 : c$ est le rapport du rayon à la circonférence, $\frac{bc}{2}$, & $\frac{ac}{2}$ seront les circonférences des bases DE, AC (612). Donc BC $\times \frac{ac}{4}$, & BE $\times \frac{bc}{4}$ seront les surfaces des cônes droits ABC, BDE, & par conséquent leur différence ou la surface du cône tronqué $= \overline{x+d} \times \frac{ac}{4} - x \times \frac{bc}{4} = \frac{cd}{4} \times \overline{a+b} = d \times \frac{c}{4}(a+b)$. Or $\frac{c}{4} \times \overline{a+b}$ est la circonférence du cercle qui tient le milieu entre ceux des bases DE, AC. Donc *la surface du cône tronqué est égale au produit de ce qui reste de l'apothême par la circonférence moyenne proportionnelle arithmétique entre celles des bases supérieure & inférieure.*

659. Imaginons maintenant que le demi-polygone régulier NAS tourne autour de l'axe SN qui passe par son centre C, & cherchons la surface du sphéroïde que ce demi-polygone engendrera par sa révolution. 91.

Il faut d'abord observer qu'un côté quelconque de ce polygone décrit un cône, lorsqu'il se trouve le dernier comme BS, IN, ou un cylindre comme AE, ou enfin un cône tronqué comme AB. Or il suit de ce qui précede que la surface de l'un quelconque de ces solides est égale au côté générateur, comme AB, multiplié par la circonférence du cercle décrite par le milieu M de ce côté. Cela posé, soit CM le rayon du cercle inscrit dans le polygone donné, & soient abaissées les perpendiculaires BT, MP, AG, &c. sur l'axe SN, & soit mené BD parallélement à QR, les triangles rectangles ABD, CMP sont semblables, puisqu'ils ont leurs côtés homologues perpendiculaires. Donc AB : BD ou QR :: CM : PM :: la circonférence qui a pour rayon CM : la circonférence qui a pour rayon PM :: *circ.* CM : *circ.* PM. Donc

FIG. $AB \times$ *circ.* PM, ou la ſurface du cône tronqué décrit par $AB = QR \times$ *circ.* CM.

On prouvera la même choſe à l'égard des ſolides décrits par les autres côtés du polygone. D'où il ſuit que la ſurface du ſphéroïde eſt égale à $SQ + QR + RK + KL + LN$ ou $SN \times$ *circ.* CM. Donc *la ſurface d'un ſphéroïde quelconque eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence du cercle auquel il eſt circonſcrit.* Or la ſphere peut être regardée comme un ſphéroïde d'une infinité de côtés. Donc *la ſurface de la ſphere eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence de l'un quelconque de ſes grands cercles.*

89. *Et la ſurface d'une* calotte ſphérique *produite par la révolution du demi-ſegment* BCP *eſt égale à l'épaiſſeur* CP *de cette calotte multipliée par la circonférence de l'un des grands cercles de la ſphere.*

660. Donc, 1.° la ſurface de la ſphere eſt quadruple de celle de l'un quelconque de ſes grands cercles, puiſqu'un grand cercle n'a pour ſurface que la moitié de l'axe multipliée par la demi-circonférence.

2.° La ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit, puiſqu'elles ont toutes deux pour
93. meſure le produit de l'axe EK ou FA, par la circonférence d'un des grands cercles de la ſphere, ou par la circonférence qui a pour diamêtre AB.

3°. La ſurface de la ſphere eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit $:: 2 : 3$. Car les deux baſes du cylindre ſont chacune égales à un grand cercle de la ſphere. Donc les deux baſes du cylindre valent deux grands cercles de la ſphere, ou la moitié de ſa ſurface. Donc la ſurface de la ſphere eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit $:: 1 : 1 + \frac{1}{2} :: 2 : 3$.

661. Si on conçoit un cône *équilatéral* DIL circonſcrit à la ſphere, ſa ſurface totale ſera à celle de la ſphere $:: 9 : 4$.

Car ſoit S la ſurface d'un des grands cercles de la ſphere, & a ſon diamêtre, on aura (565) $IL = a\sqrt{3}$, & AB^2 $(a^2) : IL^2$ $(3a^2) :: S :$ la ſurface de la baſe du cône $= 3S$. Or la ſurface du cône équilatéral eſt triple de celle de ſa baſe, puiſqu'elle eſt égale à

$$\frac{ID}{2} \times \textit{circ.}\, IL + \frac{IL}{4} \times \textit{circ.}\, IL = 3 \times \tfrac{1}{4} IL\ \textit{circ.}\, IL.$$ Cette ſurface

face est donc égale à 9S. D'ailleurs la surface de la sphere est 4S. Donc, &c. FIG. 93.

Les surfaces totales de la sphere, du cylindre circonscrit & du cône équilatéral circonscrit, sont donc :: 4 : 6 : 9. D'où il suit que la surface du cylindre circonscrit est moyenne proportionnelle entre celle de la sphere & celle du cône équilatéral circonscrit ; on trouveroit de la même maniere que la surface de la sphere est à celle du cylindre inscrit, & à celle du cône équilatéral inscrit :: 16 : 12 : 9. Donc la surface totale du cylindre inscrit est aussi moyenne proportionnelle entre celle de la sphere & celle du cône équilatéral inscrit.

662. La comparaison des surfaces de deux solides quelconques est, en général, fort aisée. Car appellant S, s ces surfaces, A, B les facteurs de la premiere, a, b les facteurs de la seconde, on aura toujours S . s :: AB . ab.

D'où il suit, 1.° que si A $=$ a, S . s :: B . b. 2.° Que si A . a :: b . B, S $=$ s. 3.° Que si A . a :: B . b, S . s :: A^2 . a^2 :: B^2 . b^2. Ce dernier cas a toujours lieu dans les solides *semblables*. Or on appelle ainsi ceux dont toutes les dimensions homologues sont proportionnelles. Les spheres, par exemple, sont toutes des solides semblables. Ainsi leurs surfaces sont entr'elles, comme les quarrés de leurs rayons, ou de leurs diamêtres, ou des circonférences de leurs grands cercles, ou en général, comme les quarrés de leurs dimensions homologues.

De la mesure des Solidités.

663. La solidité d'un corps est la portion d'étendue comprise entre ses faces. Ainsi deux cylindres de meme grosseur & de même hauteur ont une même solidité, de quelque matiere qu'on les suppose, l'un de plomb massif, par exemple, l'autre creux fait en carton. Il ne faut donc pas confondre la *masse* ni le *poids* d'un corps avec sa solidité.

664. On a vu, 1. que pour mesurer la longueur des lignes, on se sert d'une mesure que l'on regarde comme l'unité & que c'est une ligne droite, comme étant la plus simple de toutes. 2.° Que pour mesurer les surfaces, on a recours aussi à la plus simple d'entr'elles, qui est le quarré auquel on rapporte toutes les autres comme à leur unité. On n'aura

FIG. donc pas de peine à concevoir que pour meſurer les ſolidités, il faut ſe ſervir du plus ſimple des ſolides, & le prendre pour l'unité commune à tous. Or le plus ſimple des ſolides eſt celui dont les trois dimenſions ſont égales entr'elles, & chacune égale à l'unité de longueur. C'eſt donc le cube qui eſt la meſure la plus naturelle des ſolidités. Auſſi dit-on indifféremment la *cubature* ou la ſolidité d'un corps.

La recherche de la ſolidité d'un corps ſe réduit donc à trouver le nombre de fois qu'un cube d'une grandeur déterminée, que l'on prend alors pour l'unité de ſolidité, eſt contenu dans ce corps. Si l'on veut, par exemple, eſtimer un ſolide en pieds cubes, on en imaginera un plus petit dont la longueur, la largeur, & l'épaiſſeur ſoient chacune d'un pied; ce ſera un pied cube, ou l'unité à laquelle il n'y aura plus qu'à rapporter le ſolide propoſé, pour ſavoir combien de fois il la contient. Ainſi quoique la grandeur de la meſure des ſolides ſoit arbitraire, comme celle des meſures des longueurs & des ſurfaces, ſa forme n'eſt pourtant pas indifférente. Celle d'un cube, grand ou petit, eſt toujours la plus ſimple.

665. Cela poſé, on trouvera la ſolidité d'un cube autre que celui que l'on prend pour l'unité, en multipliant ſon côté deux fois par lui-même. Car ſuppoſons que le cube à meſurer
94. & 95. rer ſoit ABCDF, & que celui que l'on veut prendre pour ſa meſure ſoit *abcdf*, il eſt clair, 1.° que ſur la baſe ABCD on pourra mettre un nombre de ces petits cubes exprimé par $\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB^2}{ab^2}$; 2.° qu'il y aura dans le grand cube autant de tranches compoſées d'un nombre $\frac{AB^2}{ab^2}$ de petits cubes, qu'on pourra en mettre ſur la hauteur AE; 3.° que le nombre de ces tranches ſera $\frac{AE}{ae}$. Il y aura donc dans ABCDF un nombre de petits cubes *abcdf* repréſenté par $\frac{AB^2}{ab^2} \times \frac{AE}{ae} = \frac{AB^3}{ab^3}$; & puiſque $ab = 1$, l'expreſſion de la ſolidité du grand cube ſera ſimplement AB^3.

Il eſt aiſé maintenant de voir que le nombre des parties

d'une mesure en solidité est la troisieme puissance du nombre FIG.
des parties de la même mesure en longueur, qu'un *pied cube*, par exemple, contient 1728 *pouces cubes*; qu'une *toise cube* $=$ 216 *pieds cubes* $= 216 \times 1728$ *pouces cubes*; &c.

666. Ces principes une fois bien compris, l'application que nous allons en faire à différens solides n'aura point de difficulté. Proposons-nous d'abord de mesurer la solidité d'un parallelepipede rectangle HDMPI. 95.

Pour cet effet, je suppose que sur le plus grand côté DI de ce parallelepipede, on ait construit le cube ABCDF; il est clair, 1.° que ce cube doit contenir le parallelepipede proposé, autant de fois que sa base contient celle du parallelepipede; 2.° que ce nombre de fois est exprimé par $\frac{ABCD}{HDMP} = \frac{DI^2}{HDMP}$; 3.° que la solidité du cube doit être égale à celle du parallelepipede, prise ce nombre de fois. Appellant donc x la solidité du parallelepipede, on aura $x \times \frac{DI^2}{HDMP} = DI^3$; d'où $x = DI \times HDMP = DI \times DH \times DM =$ le produit de la surface de sa base par sa hauteur.

667. Il suit de-là que *la solidité d'un prisme quelconque droit ou oblique est égale au produit de sa base, par la perpendiculaire abaissée d'un des points de la base supérieure sur la base inférieure, prolongée s'il est nécessaire.* 96.

Car soit le prisme ABCDEF, droit ou oblique, il n'importe. On peut réduire sa base à celle d'un rectangle *abcd*, sur lequel on peut former un parallelepipede rectangle *abcdf* dont la hauteur soit égale à la hauteur GO du prisme. On peut aussi diviser ces deux solides par des plans paralleles à leurs bases, & former ainsi des sections IKLMN, *iklm* qui seront toutes égales aux bases, & par conséquent égales entr'elles. Or ces sections auront toujours la même priopriété, à quelque point de la hauteur qu'on les fasse, & leur somme est égale dans les deux solides. Donc la solidité du prisme est égale à celle du parallelepipede; elle s'exprime donc en multipliant la surface de sa base par sa hauteur.

Le cercle pouvant être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés, le cylindre peut être regardé aussi comme

FIG. un prisme dont la base seroit un cercle; ainsi la mesure de sa solidité est la même. C'est toujours le produit de sa base par sa hauteur.

97. 668. Soient à présent deux pyramides SABCDE, *sabc*, dont les hauteurs SF, *sf* soient égales; je dis que leurs solidités seront entr'elles comme leurs bases ABCDE, *abc*. Car si l'on coupe ces pyramides par un plan parallele à celui de leurs bases, les sections seront deux polygones IKLMN, *ikl* également éloignés des sommets S, *s*. On aura donc $SF^2 . SP^2 :: ABCDE . IKLMN :: sf^2 . sp^2 :: abc . ikl$; d'où l'on tire $ABCDE . abc :: IKLMN . ikl$; & par conséquent la somme de tous les élémens IKLMN, ou la solidité de la premiere pyramide est à la somme de tous les *ikl*, ou à la solidité de la seconde, comme la base ABCDE est à la base *abc*.

Cela posé, soient deux pyramides d'une même hauteur a, & appellons x la solidité de la premiere, B sa base; x la solidité de la seconde, b sa base: nous aurons donc $X . x :: B . b$, & par conséquent $X = \frac{B}{b} x$; ce qui fait voir que la solidité d'une seule pyramide une fois connue, celle de toutes les autres le sera immédiatement. Cherchons donc à connoître celle d'une seule pyramide.

669. Je me représente un cube comme formé par l'assemblage de six pyramides égales, qui toutes vont se réunir par leur sommet à son centre, & qui ont chacune pour base une de ses six faces. La hauteur de ces pyramides sera donc égale à la moitié du côté du cube; & appellant ce côté $2a$, j'aurai $8a^3$ pour l'expression de la solidité du cube, & par conséquent $\frac{8a^3}{6}$, ou $\frac{4a^3}{3}$, pour l'expression de la solidité x de chacune de ces pyramides. D'ailleurs leur base $b = 4a^2$; donc la formule $X = \frac{B}{b} x$, devient $X = \frac{1}{3} aB$; c'est-à-dire, que *la solidité d'une pyramide quelconque est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Donc, 1.° la pyramide est le tiers du prisme de même base & de même hauteur; 2.° la solidité du cône est aussi le tiers de celle du cylindre qui lui eſt circonſcrit. FIG.

670. Pour trouver celle du cône tronqué ADEC, menons la perpendiculaire BF ſur ſes baſes, & ſuppoſons AC $= a$, DE $= b$, GF $= d$, le rapport du diamêtre à la circonférence $= 1 . c$, & la partie BG $= x$. Nous aurons 91.
donc, $x . x + d :: b . a$. D'où $x = \frac{bd}{a-b}$. Or les ſurfaces des cercles dont DE, AC ſont les diamêtres, ont pour expreſſions $\frac{b^2c}{4}, \frac{a^2c}{4}$. Donc les ſolidités des cônes ABC, BDE ſont $(x+d)\frac{a^2c}{3.4}, \frac{b^2cx}{3.4}$, & par conſéquent leur différence ou la ſolidité du cône tronqué ACDE $= \frac{c}{3.4}\left((a^2-b^2)x + a^2d\right)$ $= \frac{cd}{3.4}(a^2+b^2+ab)$, en mettant pour x ſa valeur $\frac{bd}{a-b}$.

671. Pour meſurer la ſolidité d'un polyedre, on le diviſera en pyramides, dont on calculera ſéparément les ſolidités. Leur ſomme ſera celle du polyedre propoſé. Si ce polyedre eſt régulier, on multipliera le rayon de la ſphere à laquelle on peut le concevoir circonſcrit par le tiers de ſa ſurface, & on aura ſa ſolidité. Car on peut concevoir que du centre de la ſphere inſcrite on ait mené des lignes droites à tous les angles du polyedre, qui le diviſent en autant de pyramides égales qu'il a de faces. Or la ſolidité de l'une quelconque de ces pyramides eſt égale au tiers de ſa baſe, qui eſt une des faces du polyedre, multipliée par la perpendiculaire menée de ſon centre ſur cette face, c'eſt-à-dire, par le rayon de la ſphere inſcrite.

672. A l'égard de la ſphere même, ſa ſolidité eſt égale au tiers de ſa ſurface multipliée par ſon rayon.

Car on peut concevoir la ſphere diviſée en un nombre infini de petites pyramides, qui ont toutes pour ſommet le centre même de cette ſphere, & pour baſe une portion infiniment petite de ſa ſurface. Or la ſolidité de l'une de ces pyramides eſt égale au produit du rayon par le tiers de la portion infiniment petite de la ſurface de la ſphere, qui lui ſert de baſe. Donc la ſomme de toutes ces petites pyramides, FIG. ou *la ſolidité de la ſphere eſt égale au produit de ſon rayon par le tiers de ſa ſurface.*

673. Soit s la ſurface d'un des grands cercles de la ſphere & a ſon rayon, ſa ſolidité ſera $\frac{4}{3}as$. Or le cylindre circonſcrit à la ſphere a pour ſolidité $2as$. Donc la ſolidité de la ſphere eſt à celle du cylindre circonſcrit :: $\frac{4}{3}as \,.\, 2as :: 2 \,.\, 3$, rapport qui eſt le même que celui de leurs ſurfaces, & qui fit autrefois l'admiration d'Archimede, auteur de cette découverte.

La ſurface de la baſe du cône équilatéral étant $3s$, & ſa hauteur $3a$, ſa ſolidité eſt $3as$. Donc la ſphere eſt au cône équilatéral :: $4 \,.\, 9$, rapport qui eſt encore le même que celui de leurs ſurfaces.

93. Si l'on conçoit un cône AEB qui ait même baſe & même hauteur que le cylindre circonſcrit à la ſphere, la ſolidité de ce cône ſera le tiers de celle du cylindre. D'où il ſuit que le cylindre, la ſphere & le cône ſont alors :: $3 \,.\, 2 \,.\, 1$.

89. 674. Si un ſecteur circulaire BCD tourne autour du rayon DC, il décrira un ſecteur ſphérique dont la ſolidité eſt égale au produit de la ſurface décrite par BC, multipliée par le tiers du rayon BD. Car ſoit BD $= a$, $x =$ CP, ou l'épaiſſeur de la *Calotte* BCM, ſoit $1 : c$ le rapport du diamêtre à la circonférence ; & on aura $2ac$ pour la circonférence d'un des grands cercles de la ſphere, & $2acx$ ſera la ſurface décrite par BC. Donc la ſolidité du ſecteur ſphérique BCDM $= \frac{2a^2cx}{3}$. D'où l'on voit que dans la même ſphere les ſecteurs ſphériques ſont entr'eux comme les épaiſſeurs des calottes ſur leſquelles ils ſont appuyés.

675. A l'égard de la calotte décrite par le demi-ſegment BCP, ſa ſolidité eſt égale à celle du ſecteur ſphérique BCMD moins celle du cône droit décrit par le triangle BPD. Or il eſt aiſé de trouver que ce cône a pour ſolidité $\frac{c}{3}(2ax - xx)(a - x)$; donc une calotte ſphérique dont l'épaiſſeur eſt x a pour expreſſion de ſa ſolidité $\frac{c}{3}\left(2a^2x - (2ax - xx)(a - x)\right)$ $= cx^2\left(a - \frac{1}{3}x\right)$.

676. De cette derniere expreſſion on déduit facilement

celle de la ſolidité de la portion ſphérique engendrée par la FIG.
révolution du trapeze circulaire DPBF; car en nommant z 89.
ſon épaiſſeur DP, on a tout de ſuite $c\ (aaz - \frac{1}{3}z^3)$ pour ſa ſolidité. On trouve de même qu'en nommant u l'épaiſſeur DQ, la portion ſphérique décrite par le trapeze DQNF a pour expreſſion $c\ (aau - \frac{1}{3}u^3)$.

Il n'eſt donc pas difficile de connoître la ſolidité de la *Zone* engendrée par le trapeze QPBN. Son expreſſion eſt $c\left(aa \times \overline{z-u} + \frac{u^3 - z^3}{3}\right)$. Or appellant e ſon épaiſſeur PQ, y ſon plus grand rayon, ou la plus grande ordonnée NQ, y' la plus petite BP, on a $z = u + e$; ce qui donne d'abord $ce\ (aa - uu - eu - \frac{1}{3}ee)$; on a enſuite $yy = aa - uu$; d'où $yy + uu = aa = y'y' + uu + 2eu + ee$. Donc $eu = \frac{yy - y'y' - ee}{2}$; & par conſéquent la ſolidité d'une zone quelconque $= ce\left(\frac{yy + y'y' + ee}{2} - \frac{ee}{3}\right) = \frac{ce}{6}\ (3yy + 3y'y' + ee)$. Ainſi quand même on ne conuoîtroit pas le rayon de la ſphere dont cette zone fait partie, on n'en détermineroit pas moins la ſolidité.

677. Maintenant pour comparer deux ſolides enſemble, appellons S la ſolidité du premier, & A, B, C, ſes trois facteurs; s la ſolidité du ſecond, a, b, c ſes facteurs. Nous aurons donc $S . s :: ABC . abc$. D'où il ſuit, 1.° que ſi $A = a$, $S . s :: BC . bc$. 2.° Que lorſque $A . a :: bc . BC$, on a $S = s$. 3.° Que dans les ſolides ſemblables, $S . s :: A^3 . a^3 :: B^3 . b^3 :: C^3 . c^3$; enſorte, par exemple, que *les ſolidités des ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou de leurs dimenſions homologues quelconques.*

Rapprochant donc de ce rapport ceux des circonférences & des cercles, on aura les circonférences proportionnelles à leurs rayons, les cercles proportionnels aux quarrés de leurs rayons, & les ſpheres aux cubes de leurs rayons.

APPLICATION DES PRINCIPES

DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGEBRE

AU CALCUL DES SINUS ET A LA TRIGONOMÉTRIE.

LE desir de connoître les distances, & de mesurer les terreins ayant été le principal motif des recherches que nous venons d'analyser, on ne doit pas être surpris de trouver dans les plus anciens Géomêtres des traces assez distinctes de l'*Arpentage*. Ils imaginerent de réduire cette science à la simple mesure des triangles ; & c'est de-là que lui vient le nom de TRIGONOMÉTRIE. Or ils remarquerent que le plus grand angle étant toujours opposé au plus grand côté dans un triangle, toute la difficulté consistoit à mesurer les angles & à découvrir leur rapport avec les côtés qui leur étoient opposés. Les instrumens pouvoient bien donner la mesure des angles avec assez de précision ; mais rien ne put donner leur rapport exact avec les côtés. On chercha donc à le connoître par approximation ; & pour cela, on substitua aux angles de certaines lignes, connues dans la suite sous le nom de *sinus*. C'étoient, comme on va le voir, les moitiés des différentes cordes du cercle ; & comme les cordes s'appelloient en latin *inscriptæ*, on désignoit ces lignes sous le nom de *semisses inscriptæ*, que l'on avoit coutume d'abréger ainsi *S. ins.* D'où s'est formé, dit-on, le mot *sinus*, dans le temps où tout finissoit en *us*.

Les Géomêtres modernes ont tiré le plus grand parti de ces lignes & de celles qui en dépendent. On ne peut lire leurs Ouvrages sans avoir bien compris le calcul des sinus. Ainsi nous nous attacherons à en faire connoître les formules les plus utiles. Nous les appliquerons ensuite à la résolution des triangles.

Du

Du Calcul des Sinus.

678. LA perpendiculaire BD menée de l'extrêmité B de l'arc BA sur le rayon CA qui passe par l'autre extrêmité A, se nomme le sinus de l'arc AB, ou de l'angle ACB que cet arc mesure. 98.

679. Si EB est le complément de l'arc BA, son sinus GB est le sinus de complément, ou le cosinus de l'arc AB. Or il est clair que CD = BG, & que BD = GC.

680. La perpendiculaire AT menée par le point A sur le rayon CA jusqu'à la rencontre du rayon CB prolongé, se nomme la tangente de l'arc AB, & CT en est la sécante. De même la tangente EM de l'arc EB est la tangente de complément, ou la cotangente de l'arc AB, & CM en est la cosécante.

On nomme encore sinus verse & cosinus verse les lignes AD, EG; mais on s'en sert très-rarement.

Afin d'abréger, nous écrirons *sin*, *cos*, *tang*, *cot*, *sec*, *cosec*, *sin v*, *cos v*, au lieu de sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante, cosécante, sinus verse, & cosinus verse.

681. Il suit de ces notions, 1.° que *le sinus d'un arc quelconque est la moitié de la corde d'un arc double.* Car si on prolonge BD jusqu'en F, BD sera la moitié de BF corde du double de l'arc BA. Donc *le sinus de* 30° *est la moitié du rayon.* Car il est la moitié de la corde de 60°, laquelle est égale au rayon.

682. 2.° Que le sinus d'un angle quelconque BCA, ou de l'arc BA est le même que celui de l'angle *a*CB ou de l'arc *a*B qui lui sert de supplément.

683. 3.° Que le cosinus d'un angle obtus est négatif. Il en est de même de sa tangente, cotangente, sécante, &c.

684. 4.° Que les sinus croissent depuis 0°, auquel cas leur cosinus est égal au rayon, jusqu'à 90°. Alors le sinus devient égal au rayon, & le cosinus s'évanouit. Ils décroissent ensuite depuis 90° jusqu'à 180°, où ils deviennent nuls pendant que leur cosinus devient égal au rayon pris négativement,

FIG. 98. 685. 5.° Que les tangentes & les sécantes croissent depuis 0°, où la tangente est nulle & la sécante égale au rayon, jusqu'à 90°, où la tangente & la sécante deviennent égales, paralleles & par conséquent infinies. La cotangente est alors nulle, & la cosécante égale au rayon.

Depuis 90 jusqu'à 180° elles décroissent de plus en plus; mais elles sont négatives. Lorsqu'elles ont atteint 180°, la tangente s'évanouit, & la sécante devient égale au rayon pris négativement. Dans ce même point la cotangente & la cosécante deviennent égales & infinies négatives.

686. 6.° Que *la tangente de 45° est égale au rayon*, ainsi que la cotangente. Car alors les triangles rectangles CEM, CTA deviennent égaux & isosceles.

687. Cela posé, soit l'arc BA = A, le rayon CB = CA = 1 (supposition que nous ferons désormais, afin de rendre le calcul plus facile); on aura à cause des triangles rectangles & semblables CBD, CGB, CTA, CEM, les proportions & les équations suivantes.

I. $CD^2 + BD^2 = CB^2$; ou $\mathit{sin}^2 A + \mathit{cos}^2 A = 1 = \mathit{sin}^2 B + \mathit{cos}^2 B$ (B étant un autre arc quelconque). Donc $\mathit{sin}\, A + \mathit{sin}\, B : \mathit{cos}\, B + \mathit{cos}\, A :: \mathit{cos}\, B - \mathit{cos}\, A : \mathit{sin}\, A - \mathit{sin}\, B$, & $\mathit{sin}\, A + \mathit{cos}\, B : \mathit{sin}\, B + \mathit{cos}\, A :: \mathit{sin}\, B - \mathit{cos}\, A : \mathit{sin}\, A - \mathit{cos}\, B$.

II. $CT^2 - TA^2 = CA^2 \ldots \mathit{sec}^2 A - \mathit{tang}^2 A = 1$. Donc $\mathit{sec}\, A + \mathit{tang}\, A : 1 :: 1 : \mathit{sec}\, A - \mathit{tang}.\, A$.

III. $CE^2 = CM^2 - EM^2 \ldots\ 1 = \mathit{cosec}^2 A - \mathit{cot}^2 A = \mathit{sec}^2 A - \mathit{tang}^2 A$. Donc $\mathit{cosec}\, A - \mathit{cot}.\, A : 1 :: 1 : \mathit{cosec}\, A + \mathit{cot}\, A$, & $\mathit{cosec}.\, A - \mathit{cot}\, A : \mathit{sec}\, A - \mathit{tang}\, A :: \mathit{sec}\, A + \mathit{tang}\, A : \mathit{cosec}\, A + \mathit{cot}\, A$.

IV. $CD : BD :: CA : AT \ldots \mathit{cos}\, A : \mathit{sin}\, A :: 1 : \mathit{tang}\, A$. Donc $\mathit{sin}\, A = \mathit{cos}\, A \times \mathit{tang}\, A \,..\, \mathit{cos}\, A = \frac{\mathit{sin}\, A}{\mathit{tang}\, A} \ldots \mathit{tang}\, A = \frac{\mathit{sin}\, A}{\mathit{cos}\, A}$.

V. $CB : BD :: CT : AT \ldots 1 : \mathit{sin}\, A :: \mathit{sec}\, A : \mathit{tang}\, A$. Donc $\mathit{sin}\, A \times \mathit{sec}\, A = \mathit{tang}\, A = \frac{\mathit{sin}\, A}{\mathit{cos}\, A} \,..\, \mathit{sin}\, A = \frac{\mathit{tang}\, A}{\mathit{sec}\, A} \,..\, \mathit{sec}\, A = \frac{\mathit{tang}\, A}{\mathit{sin}\, A} = \frac{1}{\mathit{cos}\, A} \ldots \mathit{sec}\, A \times \mathit{cos}\, A = 1$.

VI. CG : GB :: CE : EM ..... *sin* A : *cos* A :: 1 : *cot* A $=$ $\frac{cos\,A}{sin\,A} = \frac{1}{tang\,A}$. Donc *cot* A × *tang* A $=$ 1 $=$ *sec* A × *cos* A. FIG. 98.

VII. CG . CB :: CE : CM ... *sin* A : 1 :: 1 : *cosec* A $=$ $\frac{1}{sin\,A}$. Donc *sin* A × *cosec* A $=$ 1 $=$ *cot* A × *tang* A $=$ *sec* A × *cos* A.

688. Soit proposé maintenant de déterminer le sinus & le cosinus de la somme de deux arcs donnés AB, BE. 99.

Je nomme s le sinus BD de l'arc AB, c son cosinus CD, s' le sinus EG de l'arc EB, c' son cosinus CG; enfin x le cosinus cherché CF $= cos\,(AB + BE)$, & y le sinus EF $= sin\,(AB + BE)$.

Cela posé, à cause des triangles semblables CBD, CFH, EGH, on aura CD (c) : CF (x) :: CB (1) : CH $= \frac{x}{c}$ :: BD (s) : FH $= \frac{sx}{c}$. Ensuite CD (x) : EG (s') :: BD (s) : GH $\left(c' - \frac{x}{c}\right)$ :: CB (1) : EH $\left(y - \frac{sx}{c}\right)$.

Donc $s's = cc' - x$, & $s' = cy - sx$; la premiere équation donne $x = cc' - ss'$, & substituant cette valeur dans la seconde, on a, (en faisant attention que $1 - s^2 = c^2$) $y = sc' + s'c$. Donc en général a & b étant deux arcs quelconques, on a $sin\,(a+b) = sin\,a\,cos\,b + sin\,b\,cos\,a$, & $cos\,(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$.

689. Soit $a + b = c$, on aura $sin\,c = sin\,a\,cos\,(c - a) + cos\,a\,sin\,(c - a)$, & $cos\,c = cos\,a\,cos\,(c - a) - sin\,a\,sin\,(c - a)$. Or en traitant de ces équations $sin\,(c - a)$ & $cos\,(c - a)$ comme des inconnues, on trouve $sin\,(c - a) = sin\,c\,cos\,a - sin\,a\,cos\,c$, & $cos\,(c - a) = cos\,c\,cos\,a + sin\,a\,sin\,c$. Donc en général $sin\,(a - b) = sin\,a\,cos\,b - sin\,b\,cos\,a$, & $cos\,(a - b) = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b$. De ces formules on déduit facilement toutes celles qui suivent.

En faisant $a = b$, on a $sin\,2a = 2cos\,a\,sin\,a$, & $cos\,2a = cos^2\,a - sin^2 a = 2cos^2\,a - 1$ (en mettant pour $sin^2 a$ sa valeur $1 - cos^2\,a$).

Soit $2a = c$, on aura $\sin c = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$, & $\cos c + 1 = 2 \cos^2 \frac{1}{2} c$. Donc $\cos \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 + \cos c}{2}}$, & $\frac{\sin c}{2 \cos \frac{1}{2} c}$, ou

$$\sin \frac{1}{2} c = \frac{\sin c}{\sqrt{2(1+\cos c)}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 c}{2(1+\cos c)}} = \sqrt{\frac{1-\cos c}{2}}.$$

Il est donc facile d'avoir le sinus & le cosinus de la moitié, ou du double d'un arc donné.

690. Soit $a = 30°$, on aura $\sin(30° + b) = \sin 30° \cos b + \cos 30° \sin b$. Or $\sin 30° = \frac{1}{2}$, & $\cos 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Donc $\sin(30° + b) = \frac{1}{2} \sin b \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cos b$, & $\sin(30° - b) = \frac{1}{2} \cos b - \frac{1}{2} \sin b \sqrt{3}$. Donc $\sin(30° + b) = \cos b - \sin(30° - b) = \sin(30° - b) + \sin b \sqrt{3}$. D'où il suit que si on connoissoit tous les sinus depuis 0° jusqu'à 30°, on auroit immédiatement tous ceux qui sont depuis 30° jusqu'à 60°.

691. Si l'on fait à présent $a = 60°$, on aura $\sin(60° + b) = \frac{1}{2} \cos b \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sin b$, & $\sin(60° - b) = \frac{1}{2} \cos b \sqrt{3} - \frac{1}{2} \sin b$. Donc $\sin(60° + b) = \sin(60° - b) + \sin b$. Par exemple, $\sin 66° = \sin 54 + \sin 6°$. Connoissant donc les sinus des arcs qui sont entre 30° & 60°, on aura tout de suite ceux qui sont depuis 60° jusqu'à 90°. D'où l'on voit qu'ayant calculé tous les sinus depuis 0° jusqu'à 30°, on aura immédiatement ceux de tous les autres arcs.

692. Reprenons maintenant les deux équations $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, & $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$; si l'on ajoute d'abord la seconde à la premiere, & si on l'en soustrait ensuite,

on aura ...... $\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b)$
$\sin b \cos a = \frac{1}{2} \sin(a+b) - \frac{1}{2} \sin(a-b)$

Si l'on fait les mêmes opérations sur les deux équations $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, & $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,

on trouvera .... $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$

693. Soit $a + b = p$, $a - b = q$, on aura $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$. Donc ...

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

694. Supposons dans les deux premieres formules $p = 90^\circ$, & dans les deux dernieres $q = 0$, nous aurons celles qui suivent ....

$$1 + \sin q = 2 \sin (45^\circ + \tfrac{1}{2} q) \cos (45^\circ - \tfrac{1}{2} q) = 2 \sin^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} q)$$

$$1 - \sin q = 2 \sin (45^\circ - \tfrac{1}{2} q \;\; \cos (45^\circ + \tfrac{1}{2} q) = 2 \sin^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} q)$$

$$= 2 \cos^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2} q) = \cos v. q$$

$$1 + \cos p = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} p$$

$$1 - \cos p = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} p = \sin v. p$$

695 Divisons maintenant les formules du n.° 693 les unes successivement par les autres, nous aurons...

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin \frac{p+q}{2}}{\cos \frac{p+q}{2}} \times \frac{\cos \frac{p-q}{2}}{\sin \frac{p-q}{2}} = \tang \frac{p+q}{2} \cot \frac{p-q}{2} = \frac{\tang \frac{p+q}{2}}{\tang \frac{p-q}{2}}.$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \tang \frac{p+q}{2} \quad \Bigg| \quad \frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \tang \frac{p-q}{2}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{p-q}{2} \quad \Bigg| \quad \frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{p+q}{2}$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \cot \frac{p+q}{2} \cot \frac{p-q}{2} = \frac{\frac{1}{\sec p} + \frac{1}{\sec q}}{\frac{1}{\sec q} - \frac{1}{\sec p}} = \frac{\sec p + \sec q}{\sec p - \sec q}.$$

699. En divisant de même les unes par les autres, quelques-unes des formules du n.° 694, on trouve......

$$\frac{1+\sin q}{1-\sin q}=\frac{\sin^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\sin^2(45^\circ-\frac{1}{2}q)}=\frac{\sin^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\cos^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}=\tan^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}q)$$

$$\frac{1+\cos p}{1-\cos p}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}p}{\sin^2\frac{1}{2}p}=\cot^2\tfrac{1}{2}p$$

$$\frac{1+\sin q}{1+\cos p}=\frac{\sin^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\cos^2\frac{1}{2}p}$$

$$\frac{1-\sin q}{1-\cos q}=\frac{\cos v.\,q}{\sin v.\,q}=\frac{\sin^2(45^\circ-\frac{1}{2}q)}{\sin^2\frac{1}{2}q}.$$

697. Reprenons encore une fois les valeurs de $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, & divisons les unes par les autres, nous aurons . . .

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\sin a\cos b-\sin b\cos a}=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}+\frac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}}{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}-\frac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}}=$$

$$\frac{\frac{\cos b}{\sin b}+\frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\cos b}{\sin b}-\frac{\cos a}{\sin a}}=\frac{\cot b+\cot a}{\cot b-\cot a}=\frac{\frac{1}{\tan b}+\frac{1}{\tan a}}{\frac{1}{\tan b}-\frac{1}{\tan a}}=\frac{\tan a+\tan b}{\tan a-\tan b}.$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}=\frac{\frac{\cos b}{\sin b}+\frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}+1}=\frac{\cot b+\cot a}{1+\cot b\cot a}=$$

$$\frac{\tan a+\tan b}{1+\tan a\tan b}.$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\cot b-\cot a}{\cot b\cot a-1}=\frac{\tan a-\tan b}{1-\tan a\tan b}.$$

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}=\frac{\cot b-\tan a}{\cot b+\tan a}=\frac{1-\tan a\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

$$=\frac{\cot a-\tan b}{\cot a+\tan b}.$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = tang\,(a+b) = \frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\,tang\,b} = \frac{cot\,a + cot\,b}{cot\,a\,cot\,b - 1}.$$ Donc

$$cot\,(a+b) = \frac{1}{tang(a+b)} = \frac{1 - tang\,a\,tang\,b}{tang\,a + tang\,b} = \frac{cot\,a\,cot\,b - 1}{cot\,a + cot\,b}.$$

$$\frac{\sin\,(a-b)}{\cos\,(a-b)} = tang\,(a-b) = \frac{tang\,a - tang\,b}{1 + tang\,a\,tang\,b} = \frac{cot\,b - cot\,a}{cot\,b\,cot\,a + 1}:$$

Donc $cot\,(a-b) = \dfrac{1 + tang\,a\,tang\,b}{tang\,a - tang\,b} = \dfrac{cot\,b\,cot\,a + 1}{cot\,b - cot\,a}$.

698. Soit $a = 45°$, & on aura $tang\,(45° + b) = \dfrac{1 + tang\,b}{1 - tang\,b} = \dfrac{cot\,b + 1}{cot\,b + 1}$, & $tang\,(45° - b) = \dfrac{1 - tang\,b}{1 + tang\,b}$ $= cot\,(45° + b) = \dfrac{cot\,b - 1}{cot\,b + 1}$.

Si l'on fait $a = b = \frac{1}{2}c$, on aura $tang\,2a = \dfrac{2\,tang\,a}{1 - tang^2 a}$, ou $tang\,c = \dfrac{2\,tang\,\frac{1}{2}c}{1 - tang^2\,\frac{1}{2}c}$, & $cot\,2a = \dfrac{1 - tang^2\,a}{2\,tang\,a} = \frac{1}{2}\,cot\,a - \frac{1}{2}\,tang\,a$. Donc $cot\,c = \frac{1}{2}\,cot\,\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\,tang\,\frac{1}{2}c$, & $cot\,\frac{1}{2}c = 2\,cot\,c + tang\,\frac{1}{2}c$.

699. Puisque $\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$, & $\operatorname{cosec} a = \dfrac{1}{\sin a}$, on a . . :

$$\sec\,(a+b) = \frac{1}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\dfrac{1}{\cos a \cos b}}{1 - \dfrac{\sin a\ \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\sec a \sec b}{1 - tang\,a\,tang\,b}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{cot\,a\,cot\,b - 1}.$$

$$\sec\,(a-b) = \frac{\sec a \sec b}{1 + tang\,a\,tang\,b}$$

$$\operatorname{cosec}(a+b) = \frac{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{cot\,b + cot\,a}$$

$$\operatorname{cosec}\,(a-b) = \frac{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{cot\,b - cot\,a}$$

700. Soit $a = b$, on aura $cosec\ 2a = \frac{cosec^2 a}{2\ cot\ a} = \frac{1 + cot^2 a}{2\ cot\ a} = \frac{cot\ a + tang\ a}{2}$. Donc $cosec\ a = \frac{cot \frac{1}{2} a + tang \frac{1}{2} a}{2}$. Or $cot \frac{1}{2} a = 2\ cot\ a + tang \frac{1}{2} a$ (698). Donc $cosec\ a = cot\ a + tang \frac{1}{2} a = \frac{cot \frac{1}{2} a + tang \frac{1}{2} a}{2} = cot \frac{1}{2} a - cot\ a$, (en mettant pour $tang \frac{1}{2} a$ sa valeur $cot \frac{1}{2} a - 2\ cot\ a$).

On a auſſi $sec\ 2a = \frac{sec^2 a}{1 - tang^2 a} = \frac{1 + tang^2 a}{1 - tang^2 a} = \frac{(1 + tang\ a)^2}{1 - tang^2 a} - \frac{2\ tang\ a}{1 - tang^2 a} = \frac{1 + tang\ a}{1 - tang\ a} - \frac{2\ tang\ a}{1 - tang^2 a}$. Mais $\frac{1 + tang\ a}{1 - tang\ a} = tang\ (45^\circ + a)$, & $\frac{2\ tang\ a}{1 - tang^2 a} = tang\ 2a$. Donc $sec\ 2a = tang\ (45^\circ + a) - tang\ 2a$, & $sec\ a = tang\ (45^\circ + \frac{1}{2} a) - tang\ a = cot\ (45^\circ - \frac{1}{2} a) - tang\ a$.

De ce que $sec\ a = \frac{1}{cos\ a}$, & $cosec\ a = \frac{1}{sin\ a}$, on a $sec\ a = tang\ a\ cosec\ a$, & en ſubſtituant toutes les valeurs de $cosec\ a$ trouvées ci-deſſus, on aura $sec\ a = \frac{tang\ a}{2} (cot \frac{1}{2} a + tang \frac{1}{2} a) = tang\ a\ (cot\ a + tang \frac{1}{2} a) = 1 + tang\ a\ tang \frac{1}{2} a = tang\ a\ (cot \frac{1}{2} a - cot\ a) = tang\ a\ cot \frac{1}{2} a - 1 = \frac{tang\ a}{tang \frac{1}{2} a} - 1$.

Au reſte toutes ces formules peuvent être variées d'une infinité de manieres, en les ajoutant, ſouſtrayant, diviſant, &c. Nous ne nous y arrêterons pas davantage, ce qui a déja été dit pouvant ſuffire pour les trouver au beſoin.

De la maniere de calculer les Tables des Sinus, Coſinus, &c.

701. Si l'on remonte à la valeur de $tang\ (a+b)$, on en déduira

duira facilement $tang\,(A+B+C) = \frac{tang\,(A+B) + tang\,C}{1 - tang\,C\,tang\,(A+B)}$.
Soient donc a, b, c les tangentes respectives des arcs A, B, C, & on aura $tang\,(A+B+C) = \frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$.
Pareillement si a, b, c, d sont les tangentes respectives de quatre arcs A, B, C, D, on aura $tang\,(A+B+C+D)$ $= \frac{a+b+c+d-abc-abd-bcd-acd}{1-ab-ac-ad-bc-bd-cd+abcd}$. D'où il suit, en général, que si l'on a un nombre quelconque d'arcs A, B, C, D, &c. & que l'on nomme s la somme de leurs tangentes, s^{II} leurs produits deux à deux, s^{III} leurs produits trois à trois, &c. on aura $tang\,(A+B+C+D+\&c.) = \frac{s - s^{\text{III}} + s^{\text{V}} - s^{\text{VII}} + \&c}{1 - s^{\text{II}} + s^{\text{IV}} - s^{\text{VI}} + \&c}$.

702. Supposons maintenant que tous les arcs A, B, C, &c. soient égaux; si l'on nomme n leur nombre, & $tang$ A la tangente de l'un quelconque de ces arcs, on aura (308) $s^{\text{II}} = \frac{n.n-1}{2}\,tang^2 A$, $s^{\text{III}} = \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,tang^3 A$, $s^{\text{IV}} = \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\,tang^4 A$, &c. On a donc généralement ....

$$tang\,nA = \frac{n\,tang\,A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,tang^3 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}\,tang^5 A - \&c}{1 - \frac{n.n-1}{2}\,tang^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\,tang^4 A - \&c.} =$$

$$\frac{n\frac{fin\,A}{cof\,A} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}.\frac{fin^3 A}{cof^3 A} + \&c.}{1 - \frac{n.n-1}{2}.\frac{fin^2 A}{cof^2 A} + \&c.} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n\,cof^{n-1} A\,fin\,A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,cof^{n-3} A\,fin^3 A + \&c.}{cof^n A - \frac{n.n-1}{2}\,cof^{n-2} A\,fin^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\,cof^{n-4} A\,fin^4 A - \&c.}$$

Soit N le numérateur & D le dénominateur, on aura, en faisant le calcul, $n^2 + D^2 = cos^{2n} A + n\, cos^{2n-2} sin^2 A + \frac{n.n-1}{2} cos^{2n-4} sin^4 A + \ldots + sin^{2n} A = (cos^2 A + sin^2 A)^n = 1$.

Or $\frac{N}{D} = tang\, nA = \frac{sin\, n\, A}{cos\, n\, A}$, ou $\frac{N}{\sqrt{1 - NN}} = \frac{sin\, n\, A}{\sqrt{1 - sin^2 nA}}$. Donc $N = sin\, n\, A$, & $D = cos\, n\, A$; on a donc en général . . . .

$$sin\, n\, A = n\, cos^{n-1} A\, sin\, A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} cos^{n-3} A\, sin^3 A + \ldots \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5} cos^{n-5} A\, sin^5 A - \&c.$$

$$cos^n A = cos^n A - \frac{n.n-1}{2} cos^{n-2} A\, sin^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4} \ldots cos^{n-4} A\, sin^4 A - \&c.$$

703. Supposons maintenant que l'arc A soit infiniment petit, ensorte qu'il faille que n soit infini pour que l'arc nA soit d'une grandeur finie a, on aura $sin\, A = A$, parce que l'arc infiniment petit ne différe pas de son sinus: ensuite $cos\, A = 1$, $n - 1 = n = n - 2 = n - 3$, &c. parce que n est infini; enfin $sin\, A = \frac{a}{n}$. Ces valeurs étant substituées dans les formules précédentes donnent . . . .

$$sin\, a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{a^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.$$

$$cos\, a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

$$\frac{sin\, a}{cos\, a} = tang\, a = \frac{a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{a^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.}{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \&c.}$$

$$\frac{cos\,a}{sin\,a} = cot\,a = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \&c.}{a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.}$$

704. Soit maintenant l'arc a une partie quelconque $\frac{1}{m}$ de $90°$; comme l'arc de $90° = 1.570796326794896$, en appellant c ce nombre, on aura . . . .

$$sin\,\frac{90°}{m} = \frac{c}{m} - \frac{c^3}{2.3.m^3} + \frac{c^5}{2.3.4.5.m^5} - \frac{c^7}{2.3.5.6.7.m^7} + \frac{c^9}{2.3...9.m^9} - \&c.$$

$$+ \frac{1}{m}.\,1,570796326794896 - \frac{1}{m^3}.\,0,645964097506246$$

$$+ \frac{1}{m^5}.\,0,079692626246167 - \frac{1}{m^7}.\,0,004681754135318$$

$$+ \frac{1}{m^9}.\,0,000160441184787 - \frac{1}{m^{11}}.\,0,000003598843235$$

$$+ \frac{1}{m^{13}}\,0,000000056921729 - \frac{1}{m^{15}}.\,0,000000000668803$$

$$+ \frac{1}{m^{17}}.\,0,000000000006066 - \frac{1}{m^{19}}.\,0,000000000000043$$

$$+ \&c.\ \&\ cos\,\frac{90°}{m} = 1 - \frac{c^2}{2m^2} + \frac{c^4}{2.3.4.m^4} - \frac{c^6}{2.3.4.5.6.m^6} + \&c. = 1$$

$$- \frac{1}{m^2}.\,1,233700550136169 + \frac{1}{m^4}.\,0,253669507901048$$

$$- \frac{1}{m^6}.\,0,020863480763352 + \frac{1}{m^8}.\,0,000919260274839$$

$$- \frac{1}{m^{10}}.\,0,000025202042373 + \frac{1}{m^{12}}.\,0,000000471087477$$

$$- \frac{1}{m^{14}} \cdot 0{,}000000006386603 + \frac{1}{m^{16}} \cdot 0{,}0000000000065659$$

$$- \frac{1}{m^{18}} \cdot 0{,}0000000000000529 + \frac{1}{m^{20}} \cdot 0{,}0000000000000003$$

$- \&c.$

705. Il en est de même pour *tang* $\frac{90^\circ}{m}$, & pour *cot* $\frac{90^\circ}{m}$. On peut donc par le moyen de ces séries calculer les sinus, cosinus, &c. de tous les arcs; il n'y a qu'à substituer des valeurs à m. Mais comme il suffit de calculer les sinus jusqu'à 30° (690) pour avoir tous les autres, la fraction $\frac{1}{m}$ sera toujours plus petite que $\frac{1}{3}$: ensorte que la série égale à *sin* $\frac{90^\circ}{m}$ sera très-convergente. Veut-on, par exemple, avoir le sinus de 9°? On fera $m = 10$; & on trouvera aussi-tôt *sin* $9^\circ = 0.15643446504031 4$. Si l'on proposoit de trouver le sinus d'un arc d'un certain nombre de degrés, avec des minutes, des secondes, &c. il est clair qu'on pourroit le trouver par la même méthode.

706. Les sinus qu'on a par ce calcul conviennent à un cercle dont le rayon $= 1$, & par conséquent pour avoir ceux qui conviennent à un cercle dont le rayon $= a$, il faut les multiplier par a.

707. Dans les Tables ordinaires on suppose que le rayon $= 10\,000\,000\,000$, & pour plus grande commodité on y a mis les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, depuis $1'$ jusqu'à 90°, en exceptant ceux des arcs où il entre des secondes, parce qu'il est facile d'en trouver les sinus, cosinus, &c. comme on peut le voir dans les Tables déja citées (463).

708. Quant aux sécantes & cosécantes, on n'en a point fait de Tables particulieres, parce que leur usage est peu fréquent, & qu'il est aisé d'ailleurs de les calculer par le moyen des formules $sec\ a = \frac{1}{cos\ a}$, & $cosec\ a = \frac{1}{sin\ a}$, qui devien-

nent pour le rayon R des tables $sec\ a = \frac{R^2}{cos\ a}$, & $cosec\ a = \frac{R^2}{sin\ a}$ d'où l'on tire $Log.\ sec\ a = 2LR - L\ cos\ a = 20.0000000 - L\ cos\ a$, & $L\ cosec\ a = 20.0000000 - L\ sin\ a$.

709. Après avoir résolu généralement ce problême : étant donné un arc, trouver son sinus, son cosinus, sa tangente, &c. il nous reste à donner la solution du problême inverse : étant donné le sinus, ou le cosinus, la tangente ou la cotangente d'un arc, trouver la longueur de cet arc.

Si l'on donne le cosinus ou la cotangente, on a immédiatement le sinus & la tangente. Ainsi le problême se réduit à trouver la longueur d'un arc dont on donne le sinus ou la tangente.

Or, 1.° si l'on remonte à la valeur de $sin\ a$, on en déduira par la méthode inverse des séries (457), $a = sin\ a + \frac{sin^3 a}{2 \cdot 3} + \frac{3\ sin^5 a}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot sin^7 a}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot sin^9 a}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} +$ &c. 2.° Si l'on nomme t la tangente de l'arc a, on aura (703) $t = \frac{a - \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \&c}{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.}$, ou $t = a + \frac{a^2 t}{2} - \frac{a^3}{2 \cdot 3} - \frac{a^4 t}{2 \cdot 3 \cdot 4} +$ &c. Soit $a = At + Bt^3 + Ct^5 +$ &c. on aura en substituant & déterminant les inconnues A, B, C, &c. $A = 1$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{5}$, &c. D'où $a = tang\ a - \frac{tang^3 a}{3} + \frac{tang^5 a}{5} - \frac{tang^7 a}{7} +$ &c.

710. Ces deux séries donnent donc la solution du problême proposé. Appliquons-les maintenant à la recherche du rapport du diamètre à la circonférence.

Si l'on fait $sin\ a = \frac{1}{2}$, on aura la longueur de l'arc de $30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} +$ &c. Cette longueur multipliée par 6 donneroit la demi-circonférence, & par conséquent le rapport cherché ; mais comme cette série, toute convergente qu'elle est, est assez difficile à calculer, il vaut mieux se servir de la seconde qui donne, en supposant l'arc a de 45°, ou $tang\ a = 1$, $a = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. Et parce que la marche de celle-ci est trop lente, on a imaginé un moyen beaucoup plus expéditif pour avoir la longueur de ce même arc de 45°.

711. Ce moyen consiste à décomposer l'arc de 45° en deux autres arcs que nous appellerons a & b, & à chercher séparément leur longueur. Or dans cette supposition $tang(a+b)=1=\frac{tang\,a+tang\,b}{1-tang\,a\,tang\,b}$.

Donc $tang\,a=\frac{1-tang\,b}{1+tang\,b}$. Soit $tang\,b=\frac{1}{3}$, on aura $tang\,a=\frac{1}{2}$. La somme des arcs a & b, ou le quart de la demi-circonférence c sera donc

$$\frac{c}{4}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\frac{1}{7.2^7}+\frac{1}{9.2^9}-\&c\\ +\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}-\&c\end{array}\right\}=0.785\,398\,163\,397\,4483$$

d'où l'on tire $c=3.14159265358979 32$, & le rapport du diamètre à la circonférence, comme on l'a donné (622).

712. Avant de terminer cette matiere, nous remarquerons que les formules déja trouvées pour les valeurs de $tang\,n$A, $sin\,n$A, &c. peuvent servir à trouver les sinus, cosinus, tangentes, cotangentes des arcs multiples. Car faisant $sin\,a=s$, $cos\,a=c$, $tang\,a=t$, on aura la table suivante.

$sin\,a=s$	$cos\,a=c$
$sin\,2a=2cs$	$cos\,2a=c^2-s^2$
$sin\,3a=4sc^2-s$	$cos\,3a=c^3-3cs^2$
$sin\,4a=8sc^3-4cs$	$cos\,4a=c^4-6c^2s^2+s^4$
$sin\,5a=16sc^4-12sc^2+s$	$cos\,5a=c^5-10c^3s^2+5cs^4$
&c.	&c.

$tang\,a=t$	$cot\,a=\frac{1}{t}$
$tang\,2a=\frac{2t}{1-tt}$	$cot\,2a=\frac{1-tt}{2t}$
$tang\,3a=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$	$cot\,3a=\frac{1-3tt}{3t-t^3}$
$tang\,4a=\frac{4t-4t^3}{1-6tt+t^4}$	$cot\,4a=\frac{1-6tt+t^4}{4t-4t^3}$
$tang\,5a=\frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4}$	$cot\,5a=\frac{1-10t^2+5t^4}{5t-10t^3+t^5}$
&c.	&c.

713. On peut aussi, par le moyen des mêmes formules, trouver les équations qui servent à diviser un arc ou un angle quel-

conque en un nombre donné de parties égales. Car alors *fin* (nA) est connu, & on cherche *fin* A. Soit donc *fin* $(nA) = b$, *fin* $A = x$, & *cof* $A = z$; on aura cette équation à résoudre, $b = nz^{n-1}x - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} z^{n-3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5} z^{n-5}x^5 -$ &c. Ainsi en donnant à n les valeurs successives 2, 3, 4, 5, &c. les équations suivantes serviront à diviser un arc en autant de parties égales.

$b = 2zx = 2x\sqrt{1-xx}$ . . . . pour 2 parties.
$b = 3z^2x - x^3 = 3x - 4x^3$ 3
$b = 4z^3x - 4zx^3 = (4x - 8x^3)\sqrt{1-xx}$ . . . 4
$b = 5z^4x - 10z^2x^3 + x^5 = 5x - 20x^3 + 16x^5$. 5
&c.

714. Pour faire quelqu'application de ces principes, nous allons donner la méthode de résoudre par approximation toute équation du troisieme degré dans le cas irréductible.

Selon ce que nous venons de voir, si a est un arc dont le sinus $= b$, on aura *fin* $\frac{1}{3}a$, ou x, en résolvant cette équation $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}b = 0$, & lorsque le rayon du cercle, au lieu d'être $= 1$, sera $= r$, on aura $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}br^2 = 0$.

715. Observons maintenant que les arcs $180° - a$, $-(180° + a)$ ont le même sinus que l'arc a, ensorte que pour les diviser en trois parties égales, on a la même équation $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}br^2 = 0$ à résoudre; d'où il suit que les trois racines de cette équation, sont *fin* $\frac{1}{3}a$, *fin* $\frac{180° - a}{3}$, $-$ *fin* $\frac{180° + a}{3}$, ou *fin* $\frac{1}{3}a$, *fin* $(60° - \frac{1}{3}a)$, $-$ *fin* $(60° + \frac{1}{3}a)$.

716. Cela posé, soit l'équation à résoudre $x^3 - px + q = 0$, (si elle étoit $x^3 - px - q = 0$, il seroit facile de la ramener à la forme précédente, en faisant $x = -y$); en comparant cette équation à $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}br^2 = 0$, on a $\frac{3}{4}r^2 = p$, $\frac{1}{4}br^2 = q$, d'où l'on tire $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $b = \frac{3q}{p}$. Donc si l'on décrit un cercle dont le rayon soit $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, l'arc de ce cercle qui aura pour sinus $\frac{3q}{p}$ étant nommé a, *fin* $\frac{1}{3}a$, *fin* $(60° - \frac{1}{3}a)$, $-$ *fin* $(60° + \frac{1}{3}a)$, seront les trois valeurs de x. Mais le sinus doit être plus petit que le rayon, il faut donc que $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ surpasse $\frac{3q}{p}$, ou que $\frac{1}{27}p^3$ soit

plus grand que $\frac{1}{4}q^2$. D'où il suit que *toutes les équations du troisieme degré dans le cas irréductible sont résolubles par cette méthode.*

717. Représentons par R le rayon des tables, & nous aurons $\frac{R\times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$ pour le sinus tabulaire de l'arc a, ou $\sin a = \frac{R\times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$. Or a étant connu, $\sin\frac{1}{3}a$, $\sin(60^\circ - \frac{1}{3}a)$, $-\sin(60^\circ + \frac{1}{3}a)$ le seront aussi, & par conséquent les trois racines de la proposée, seront (en ramenant ces sinus à ceux qui conviennent au rayon $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$), $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\sin\frac{1}{3}a$, $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\sin(60^\circ - \frac{1}{3}a)$, $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\sin(60^\circ + \frac{1}{3}a)$.

Ex. I. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ qui donne $p = 3$, $q = 1$; d'où $\sin a = \frac{1}{2}R$, & $a = 30^\circ$. Les trois valeurs de x sont donc $x = \frac{2\sin 10^\circ}{R} = 0.3472964$, $x = \frac{2\sin 50^\circ}{R} = 1.5320888$, $x = -\frac{2\sin 70^\circ}{R} = -1.8793852$.

Ex. II. Soit $x^3 - x + \frac{1}{3} = 0$, on aura $p = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $\sin a = \frac{R}{2}\sqrt{3}$. Donc $a = 60$, & les trois valeurs de x sont $x = \frac{2\sin 20^\circ}{R\sqrt{3}} = 0.394931$; $x = \frac{2\sin 40^\circ}{R\sqrt{3}} = 0.742227$; $x = -\frac{2\sin 80^\circ}{R\sqrt{3}} = -1.137158$.

Ex. III. Soit encore l'équation $x^3 - 5x + 3 = 0$, qui donne $p = 5$, $q = 3$, $\sin a = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3^5}{5^3}}$, & $L\sin a = LR + \frac{5}{2}L3 - L2 - \frac{3}{2}L5 = 9.843318 = L\sin 44^\circ\, 11'\, 52''$, donc $a = 44^\circ\, 11'\, 52''$, & les trois valeurs de x sont, $x = \frac{2\sqrt{5}\sin(14^\circ\, 43'\, 57'')}{R\sqrt{3}}$, $x = \frac{2\sqrt{5}\sin(45^\circ\, 16'\, 3')}{R\sqrt{3}}$, $x = \frac{-2\sqrt{5}\sin(74^\circ\, 43'\, 57'')}{R\sqrt{3}}$. En faisant le calcul on trouvera .... $x = 0.656625$, $x = 1.834238$, $x = -2.490863$.

REM.

 FIG.

REM. Quoiqu'il y ait une infinité d'autres arcs dont les ſinus ſont les mêmes que celui de l'arc a, ils ſont tels cependant, que les ſinus de leurs tiers peuvent ſe ramener à l'une de ces trois formes, $\mathit{ſin}\ \frac{1}{3}a$, $\mathit{ſin}\ (60^\circ - \frac{1}{3}a)$, $-\ \mathit{ſin}\ (60^\circ + \frac{1}{3}a)$. Ainſi l'équation du troiſieme degré réſolue par cette méthode, n'aura jamais que trois racines, comme cela doit être.

Réſolution des Triangles par les Sinus, Coſinus, &c.

718. L'Objet de la Trigonométrie eſt de réſoudre ce Problême général. Etant données dans un triangle trois de ces cinq choſes, deux angles & trois côtés, trouver immédiatement l'une des deux autres.

719. La ſolution de ce problême eſt entierement fondée ſur le principe ſuivant : *Dans tout triangle les ſinus des angles ſont entr'eux comme les côtés oppoſés.* Or voici la démonſtration de ce principe.

Si l'on inſcrit un triangle dans un cercle, chaque côté ſera la corde d'un arc double de celui qui meſure l'angle oppoſé, c'eſt-à-dire, le double de ſon ſinus meſuré dans ce cercle ; donc les côtés du triangle ſeront entr'eux comme les ſinus des angles oppoſés, meſurés dans ce même cercle, & par conſéquent comme les ſinus des mêmes angles meſurés dans le cercle qui a pour rayon celui des Tables. 100.

720. Donc, 1.° dans le triangle rectangle BAC, le ſinus de l'angle droit A, ou le rayon, eſt à l'hypoténuſe BC : : *ſin* C . AB : : *ſin* B . AC.

721. 2.° Puiſque *ſin* B = *coſ* C, & réciproquement ; on a *ſin* B . *coſ* B : : AC . AB. Or (687) *coſ* B . *ſin* B : : le rayon R . *tang* B. Donc AB . AC : : R . *tang* B : : R . *cot* C ; & AC . AB : : R . *tang* C : : R . *cot* B.

722. Il n'en faut pas davantage pour réſoudre dans tous les cas le triangle rectangle ABC, lorſqu'outre l'angle droit A on connoit deux de ces cinq choſes, B, C, AB, AC, BC ; pourvu cependant que ce ne ſoient pas les deux angles. Car alors on ne peut connoître que le rapport des trois côtés. Voyez la Table ſuivante.

FIG.

TABLE pour la Résolution des Triangles Rectangles.

100.

Etant donnés	Trouver	FORMULES.
AB, AC	BC B C	$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. AB : AC :: R : *tang* B. AC : AB :: R : *tang* C.
AB, BC	AC B C	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$. BC : AB :: R : *cos* B. BC : AB :: R : *sin* C.
AC, BC	AB B C	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$. BC : AC :: R : *sin* B. BC : AC :: R : *cos* C.
AB, B	AC BC	R : *tang* B :: AB : AC. *cos* B : R :: AB : BC.
AC, B	AB BC	R : *cot* B :: AC : AB *sin* B : R :: AC : BC.
AB, C	AC BC	R : *cot* C :: AB : AC. *sin* C : R :: AB : BC.
AC, C	AB BC	R : *tang* C :: AC : AB. *cos* C : R :: AC : BC.
BC, B	AB AC	R : *cos* B :: BC : AB. R : *sin* B :: BC : AC.
BC, C	AB AC	R : *sin* C :: BC : AB. R : *cos* C :: BC : AC.

Quant aux triangles *obliquangles*, ou qui n'ont pas d'angle droit, leur solution se réduit à celle des problêmes suivants.

101. 723. I. Etant donnés deux angles quelconques B, A, & un côté BC, trouver les deux autres côtés BA, AC.

Faites la proportion *sin* A . BC :: *sin* B . $AC = \frac{BC \times sin B}{sin A}$

$:: fin\, C . AB :: fin\,(A+B) . AB = \frac{BC . fin\,(A+B)}{fin\, A}$. FIG.

Si BA eût été le côté donné, on auroit eu $fin\,(A+B) . BA :: fin\, B . AC :: fin\, A . BC$.

Suppoſons, par exemple, $A = 88°$, $B = 36°$, & BC de 56 toiſes, on trouvera Log. $AB = L\,56 + L\, fin\, 56° - L\, fin\, 88° = 1.667027$; d'où $AB = 46^t, 454$, on trouvera de même $AC = 32^t, 936$.

724. II. Etant donnés deux côtés & un angle, trouver l'autre côté & les deux autres angles, ſachant d'ailleurs de quelle eſpece ils ſont.... L'angle donné peut être oppoſé à l'un des côtés donnés ou compris entre ces mêmes côtés, ce qui fait deux cas différens.

I. Cas. Soit donné l'angle B & les côtés AB, AC, on aura BC, & les angles A & C par ces proportions; $AC . fin\, B :: AB . fin\, C$. Connoiſſant les angles C & B, on connoîtra l'angle A, ſupplément de leur ſomme; & en faiſant $fin\, B . AC :: fin\, A . BC$, on aura le côté $BC = \frac{AC \times fin\,(B+C)}{fin\, B}$. 101.

Mais pour trouver immédiatement le côté BC, ſoit menée la perpendiculaire AD ſur le côté BC, & ſoit nommé AB (a), AC (b), fin B (s), cof B (c), on aura $R . AB\,(a) :: fin\, B\,(s) . AD = \frac{as}{R} :: cof\, B\,(c) . BD = \frac{ac}{R}$. Donc $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{bb - \frac{a^2 s^2}{R^2}}$, & $DC + BD = BC = \frac{ac}{R} + \sqrt{bb - \frac{a^2 s^2}{R^2}}$.

725. II. Cas. On donne l'angle A & les deux côtés AB, AC qui comprennent cet angle; il s'agit de trouver les deux autres angles B & C, & le troiſieme côté BC.

On a $AB . AC :: fin\, C . fin\, B$. Donc $AC + AB . AC - AB :: fin\, B + fin\, C . fin\, B - fin\, C$. Or (695) $\frac{fin\, B + fin\, C}{fin\, B - fin\, C} = \frac{tang\, \frac{1}{2}\,(B+C)}{tang\, \frac{1}{2}\,(B-C)}$. Donc $AC + AB . AC - AB :: tang\, \frac{1}{2}\,(B+C) . tang\, \frac{1}{2}\,(B-C)$. Mais $tang\, \frac{1}{2}\,(B+C) = tang\,(90° - \frac{1}{2}A)$ (puiſque $B + C = 180° - A$) $= cot\, \frac{1}{2} A$. Donc $AC + AB . AC - AB :: cot\, \frac{1}{2} A . tang\, \frac{1}{2}\,(B-C) = \frac{AC - AB}{AC + AB}\, cot\, \frac{1}{2} A$. Connoiſſant B — C

FIG. & $B + C = 180^\circ - A$, il sera facile d'avoir les angles B & C, & on aura $\textit{sin}\ B . AC :: \textit{sin}\ A . BC = \frac{AC\ \textit{sin}\ A}{\textit{sin}\ B}$,
& par-là le troisieme côté BC sera déterminé.

101. On peut encore résoudre ce problême de la maniere suivante. Soit menée la perpendiculaire BF sur le côté AC, & soit $AB = a$, $AC = b$ $\textit{sin}\ A = s$, $\textit{cos}\ A = c$, on aura $R : a :: s : BF = \frac{as}{R} :: c : AF = \frac{ac}{R}$. Donc $FC = b - \frac{ac}{R}$. Or dans le triangle rectangle BFC, on a $FC\left(b - \frac{ac}{R}\right) . BF\left(\frac{as}{R}\right) :: R . \textit{tang}\ C = \frac{aRs}{bR - ac}$. De même $\textit{tang}\ B = \frac{bRs}{aR - bc}$. Si l'angle A est obtus, c devient négatif, & on a $\textit{tang}\ C = \frac{cRs}{bR + ac}$, & $\textit{tang}\ B = \frac{bRs}{aR + bc}$.

Le triangle rectangle BFC donne $BC = \sqrt{\frac{a^2 s^2}{R^2} + \left(b - \frac{ac}{R}\right)^2}$ $= \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2abc}{R}}$, ou $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2abc}{R}}$, si l'angle A est obtus.

726. REM. De ce que $AC + AB . AC - AB :: \textit{tang}\ \frac{1}{2}(B + C) . \textit{tang}\ \frac{1}{2}(B - C)$, il suit que *dans tout triangle la somme de deux côtés quelconques est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de leur demi-différence.*

Soit donc $AC = a$, $AB = d$, l'angle $B = b$, l'angle $C = c$; on aura $\textit{tang}\ \frac{1}{2}(b + c) . \textit{tang}\ \frac{1}{2}(b - c) :: a + d . a - d :: R . \frac{a - d}{a + d} R :: R . \frac{\frac{a}{d} R - R}{\frac{a}{d} + 1}$;

Donc si $\frac{a}{d}$ R représente la tangente d'un arc quelconque u, FIG.

on aura R . $\frac{R\ tang\ u - RR}{tang\ u + R}$, ou R . $tang\ (u - 45°) :: tang\ \frac{1}{2}(b + c) . tang\ \frac{1}{2}(b - c)$. D'où il suit que si on fait la proportion, le plus petit côté AB est au plus grand AC :: R. la tangente d'un arc quelconque u, & si on ôte 45° de cet angle, le rayon sera à la tangente du reste :: $tang\ \frac{1}{2}(b + c)$. $tang\ \frac{1}{2}(b - c)$.

727. III. Etant donnés les trois côtés d'un triangle, trouver ses trois angles.

Soit BC $= a$, AB $= b$, AC $= d$, cos B $= c$, on aura (727) $d = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2abc}{R}}$; d'où l'on tire $c = \frac{R}{2ab}(a^2 + b^2 - d^2)$: ce qui donne cette regle générale pour trouver un angle quelconque du triangle ABC: de la somme des quarrés des côtés qui comprennent l'angle cherché, retranchez le quarré du troisieme côté, vous aurez un reste; faites ensuite la proportion : le double du rectangle des côtés qui comprennent l'angle cherché est à ce reste, comme le rayon est au cosinus de cet angle.

Si l'angle cherché est obtus, on aura $c = \frac{R}{2ab}(d^2 - a^2 - b^2)$.

Supposons, par exemple, $a = 25^t$, $b = 36^t$, $d = 40$, $a^2 + b^2 - d^2 = 321$, $2ab = 50 \times 36$. Donc $50 \times 36 . 321$, ou $6 . 1,07 ::$ R. cos B, & L cos B $= 10.0000000 +$ L 1,07 $-$ L 6 $= 9.251233$. Donc l'angle B est de 79° 43′ 38″.

728. On auroit pu trouver la même formule d'une autre maniere. 102.

Soit F le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, & FG son rayon, en gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, faisant de plus $q =$ la moitié du périmètre $a + b + c$, on aura (630) BG $= q - d$, & le rayon FG $= \sqrt{\frac{q - a . q - b . q - d}{q}}$.

Or dans le triangle rectangle BFG, on a BG : FG :: R : $tang$ FBG $= tang\ \frac{1}{2}$ B, ou BG² : FG² :: R² : $tang^2\ \frac{1}{2}$ B :: $q - d . q - d . q$:

FIG. 102. $q - a \,.\, q - b \,.\, q - d$, ou bien $q \,.\, q - d : q - a \,.\, q - b :: R^2 : tang^2 \frac{1}{2} B$; formule qui donneroit l'angle B. Mais comme elle eſt moins ſimple que celle que nous avons à démontrer, nous ne nous y arrêterons pas.

Si l'on ſubſtitue à la place de q ſa valeur $\frac{a + b + d}{2}$, on aura $(a + b)^2 - d^2 : d^2 - (a - b)^2 :: R^2 : tang^2 \frac{1}{2} B$. Donc $(a + b)^2 - (a - b)^2$, ou $4ab : a^2 + 2ab + bb - dd :: R^2 + tang^2 \frac{1}{2} B : R^2 :: sec^2 \frac{1}{2} B : R^2 :: R^2 : cos^2 \frac{1}{2} B :: R^2 : \frac{R \times (R + cos B)}{2} :: 2R : R + cos B$, ou $2ab : a^2 + 2ab + bb - dd :: R : R + cos B$. Donc $2ab : a^2 + b^2 - d^2 :: R : cos B = \frac{R}{2ab} (a^2 + b^2 - d^2)$, comme ci-deſſus.

729. Tels ſont les principes de la Trigonométrie. On peut les appliquer à pluſieurs autres problêmes ſur les triangles : mais pour ne pas multiplier les exemples, nous n'en ferons qu'une ſeule application.

Etant donné l'un des angles aigus d'un triangle rectangle avec ſa ſurface, trouver ſes trois côtés.

Soit a l'angle donné, x le côté oppoſé, y l'autre côté, s la ſurface du triangle ; on aura $xy = 2s$, & $x \,.\, y :: sin\, a \,.\, cos\, a$. Donc $xy = \frac{y^2 \, sin\, a}{cos\, a} = 2s$, & $y = \sqrt{\frac{2s \, cos\, a}{sin\, a}} = \sqrt{\frac{2s \, cot\, a}{R}}$, $x = \sqrt{\frac{2s \, sin\, a}{cos\, a}} = \sqrt{\frac{2s \, tang\, a}{R}}$, donc l'hypoténuſe $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2sR^2}{cos\, a \, sin\, a}} = 2R \sqrt{\frac{s}{sin\, 2a}}$.

TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES.

730. ON appelle en général *Sections coniqnes* les sections faites dans un cône par un plan.

Le cercle, par exemple, est une section conique, parce qu'en coupant un cône droit par un plan parallele à sa base, la section est un cercle.

Le triangle est aussi une section conique, puisqu'en coupant un cône par le sommet, la section est triangulaire.

Mais on a donné spécialement le nom de sections coniques à trois autres sections du cône, dont nous allons faire connoître l'origine & les propriétés, après avoir indiqué la maniere de les traiter analytiquement.

Notions préliminaires sur l'usage de l'Algebre dans la Description des Courbes.

DEpuis que *Descartes* imagina d'appliquer l'Algebre à la Géométrie, on a vu les plus grands Géomètres cultiver à l'envi la Théorie des courbes. C'est qu'ils l'ont tous regardée comme des plus fécondes en découvertes, & comme des plus nécessaires pour approfondir les scieuces Physico-Mathématiques.

731. Son objet est d'exprimer par des équations les loix suivant lesquelles on suppose que des courbes données ont été décrites, & réciproquement de diriger l'Analyste dans la description des courbes dont il a les équations, & dans la recherche de leurs propriétés.

Pour cela, on rapporte chaque point de la courbe à deux droites, dont l'une s'appelle *la Ligne* ou *l'Axe des abscisses*, l'autre *la Ligne* ou *l'Axe des ordonnées.* On cherche ensuite le rapport qui se trouve entre les abscisses & les ordonnées, & l'expression analytique de ce rapport donne l'équation de la courbe.

C'est ainsi, par exemple, que $yy = 2ax - xx$ exprimant le rapport constant d'égalité entre le quarré de chaque ordonnée du cercle, & le rectangle de ses abscisses, on a dit (582) que cette équation appartenoit au cercle.

FIG. 732. Afin d'abréger, on eſt convenu d'appeller *fonction d'une quantité* toute expreſſion algébrique où cette quantité entre. Ainſi les puiſſances & les racines, les ſommes & les reſtes, les produits & les quotients d'une quantité en ſont tout autant de fonctions. On dira donc que l'équation au cercle exprime l'égalité conſtante d'une même fonction de chaque ordonnée (c'eſt ſon quarré) & d'une même fonction de chaque abſciſſe correſpondante (c'eſt ſon produit par le reſte du diamètre)

733. On appelle en général *coordonnées* les abſciſſes & les ordonnées correſpondantes d'une courbe; & comme la longueur de ces lignes varie à chaque inſtant, on les nomme *variables* ou *indéterminées*, par oppoſition aux quantités *conſtantes* ou *déterminées.*

Le point d'où l'on commence à compter les abſciſſes s'appelle *l'origine des abſciſſes.* On eſt le maître de la ſuppoſer où l'on veut, avant de chercher l'équation des coordonnées : mais ſa poſition une fois déterminée, il faut la ſuppoſer toujours la même dans les détails du même calcul. Ordinairement on met l'origine des abſciſſes au ſommet, ou au centre de la courbe.

Et comme en partant de leur origine, on peut les prendre des deux côtés oppoſés de leur axe, on eſt convenu de les déſigner par les ſignes + & —. Ainſi on dit qu'une abſciſſe eſt *poſitive*, lorſqu'elle eſt ſur la partie de l'axe que l'on regarde comme poſitive. Le choix de cette partie n'eſt pas moins arbitraire que celui de l'origine; mais il doit être invariable comme lui, quand il eſt une fois fait.

734. Les ordonnées peuvent être perpeudiculaires ou obliques ſur la ligne des abſciſſes, pourvu qu'elles ſoient paralleles entr'elles. Communément on les ſuppoſe perpendiculaires, & on en diſtingue de poſitives & de négatives, ſuivant qu'elles ſont d'un côté ou de l'autre de l'axe des abſciſſes. Quelquefois cependant elles partent d'un point fixe.

Cela poſé, décrivons la courbe qui a pour équation $y^2 = 2ax - xx$. On ſait déja que c'eſt la circonférence d'un cercle dont le diamêtre eſt $2a$; mais quand même on ne le ſauroit pas, la conſtruction de cette équation le feroit bientôt connoître.

103. a eſt une quantité conſtante; je la ſuppoſe $= 5$, & menant une ligne indéfinie BD, je prends AD $= 10 = 2a$, que je ſuppoſe diviſée en dix parties égales AP, PP, &c. Je mets en A l'origine des abſciſſes; BD en ſera l'axe. Soit AD la direction des poſitives, AB ſera donc celle des négatives, ſi la courbe cherchée en a. Soit menée enſuite au point A la perpendiculaire indéfinie EF, que je prends pour l'axe des ordonnées, & dont je ſuppoſe que la partie poſitive eſt AE. Soit auſſi AP $= x$, & PM $= y$. Il eſt clair par l'équation même, $y \pm \sqrt{2ax - xx}$, que lorſque $x = 0$, on a $y = 0$; donc la courbe a le point A de commun avec la

ligne

ligne des abſciſſes. Si on fait $x = 1$, y devient ± 3 : Si $x = 2$, y devient ± 4 ; enſorte que les valeurs correſpondantes de x & de y ſont . . . . FIG. 103.

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$
$$y = 0, \pm 3, \pm 4, \pm\sqrt{21}, \pm\sqrt{24}, \pm 5, \pm\sqrt{21}, \pm\sqrt{21}, \pm 4, \pm 3, 0$$

Or ces valeurs de y déterminent la longueur d'autant d'ordonnées, dont les extrêmités M ſont des points de la courbe que l'on cherche ; & parce que ces valeurs ſont à la fois poſitives & négatives, il eſt clair qu'en menant du point A deux *branches* égales, dont l'une paſſe par les points M qui ſont au-deſſus de l'axe des abſciſſes, & l'autre par les points correſpondants qui ſont au-deſſous, on aura la courbe demandée.

735. Quant à ſa deſcription, elle ſera d'autant plus exacte, que l'on multipliera davantage les diviſions de la ligne AD. C'eſt ainſi que l'on peut décrire une courbe en rapportant chacun de ſes points M à deux lignes BD, FF données de poſition : car ſi l'on achève le parallélogramme APMN, dont on connoit les deux côtés AP ou NM, & PM, l'interſection de ces deux dernieres lignes donnnera le point M de la courbe. On appelle ce parallélogramme, *le parallélogramme des coordonnées.*

736. Les valeurs de y croiſſant ici de plus en plus juſqu'à un certain terme qui eſt 5, & décroiſſant enſuite dans le même rapport juſqu'à zéro, on doit en conclure qu'il y a une ordonnée PM plus grande que toutes les autres ; c'eſt ce que l'on appelle le *Maximum* de l'ordonnée. La recherche des *Maximum* & des *Minimum* eſt une des plus curieuſes de l'analyſe ; nous en donnerons les principes dans la ſuite.

Concluons, en attendant, que la courbe exprimée par cette équation $yy = 2ax - xx$ eſt une courbe *rentrante* & *fermée*. Elle ne s'étend pas au-delà du point A ; car alors ſes abſciſſes étant négatives, les valeurs de y ſeroient *imaginaires*, ce qui indique qu'il ne peut y avoir aucune de ſes branches au-delà de l'origine des abſciſſes. Cherchons maintenant quelques-unes de ſes propriétés.

737. Pour cet effet, du milieu C de la ligne AD, je mene des droites CM, & j'ai autant de triangles rectangles CPM, dans leſquels $CM^2 = PM^2 + CP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; donc puiſque $y^2 = 2ax - x^2$, on aura toujours $CM = a$; c'eſt-à-dire, que tous les points M ſont à égale diſtance du centre C, propriété diſtinctive de la circonférence du cercle.

D'ailleurs l'équation $y^2 = 2ax - xx$, donne $x \,.\, y :: y \,.\, 2a - x$, ou $\div$ AP.PM.PD : donc chaque perpendiculaire PM eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens du diamêtre AD, autre propriété du diamêtre du cercle.

Menant enſuite une corde AM, on aura $AM^2 = 2ax$; donc $x \,.\, AM :: AM \,.\, 2a$; ce qui fait voir que dans la courbe demandée

FIG. toutes les cordes menées du point A à un des points M sont moyennes proportionnelles entre la ligne entiere AD & le segment correspondant AP, ce qui convient encore au cercle.

Si l'on mene la corde MD, on aura $AM^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, propriété du triangle rectangle. Donc tous les angles AMD sont droits, comme ils doivent l'être dans le cercle.

Inscrivant le quadrilatere AMDM', on trouvera de même que $AM \times MD + AM' \times MD = AD \times MM'$ (588). Et ainsi des autres propriétés.

737. Soit proposé maintenant de décrire la courbe dont l'équation aux coordonnées est $y^2 = ax$. On voit d'abord qu'elle coupera la ligne des abscisses à leur origine, ou $x = 0$; on voit ensuite qu'elle aura deux branches égales, l'une positive, l'autre négative. Ces branches s'étendront à l'infini en s'écartant de leur axe, à mesure que l'on supposera des valeurs plus grandes pour x. Mais ces valeurs doivent toutes être positives, autrement les ordonnées deviendroient imaginaires. La courbe aura donc la
104. forme MAM'.

738. Soit aussi $yy = xx - aa$. Il est clair premierement que si la courbe à laquelle appartient cette équation, coupe la ligne des abscisses, ou ne fait même que la toucher en quelques points, on les déterminera aussi-tôt, en supposant $y = 0$. Or dans cette
105. supposition on a $x = \pm a$. Ainsi en prenant sur une droite indéfinie BD un point A pour l'origine des abscisses, & deux parties AS, As égales à la quantité donnée a, la courbe doit passer par les points S, s que l'on appelle ses *sommets*.

Pour connoître ensuite la direction de ses branches, soit AD le côté des abscisses positives; on aura $y = \pm\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\sqrt{(x + a)(x - a)}$, ce qui donne deux branches infinies, l'une SM, l'autre SM'. Mais, pour cela, il faut que x soit toujours plus grande que a. Si elle étoit plus petite, y seroit imaginaire; la courbe ne passe donc pas le point S, tant que l'on ne prend que des abscisses positives.

Supposons maintenant qu'on les prenne négatives, ou dans la direction de AB; l'équation deviendra $y = \pm\sqrt{(-x + a)(-x - a)}$. Or tant que les x seront plus petites que a, les valeurs de y seront imaginaires. Il n'y aura donc aucune partie de la courbe entre les points A & s. Si $x = a$, $y = 0$, comme on l'a déja trouvé : si $x > a$, (le signe $>$ exprime plus grand; le signe $<$, plus petit) alors y a deux valeurs réelles, l'une positive, l'autre négative; & ces valeurs croissant de plus en plus, la courbe aura deux nouvelles branches opposées, mais égales aux deux premieres. L'axe des abscisses est BD, celui des ordonnées est EF; supposant donc des valeurs pour x, on déterminera les y ou les PM, & les pa-

rallélogrammes des coordonnées donneront les points M, m, &c. FIG.
par lesquels doit passer la courbe demandée. Nous aurons bientôt accasion d'examiner ses propriétés.

739. Cherchons encore la figure de la courbe exprimée par l'équation $y^2 = \frac{bx^2 + x^3}{a - x}$. Je prends BD pour la ligne des abscisses, AD $= a$ pour la direction des positives, le point A pour leur origine, EF pour l'axe des ordonnées, & j'ai $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{a - x}}$, ce qui donne, 1.° $y = 0$, lorsque $x = 0$; la courbe doit donc passer au point A. 2.° Pour chaque valeur de x, je trouve deux valeurs de y. Il y a donc des ordonnées positives & des négatives. Reste à déterminer les points où elles cesseront d'être réelles.

3.° Je prends donc x positive, mais moindre que a ou AD, & j'ai pour y deux valeurs PM, PM qui croissent de plus en plus, jusqu'à ce qu'ayant pris $x = a$, elles deviennent infinies; car alors j'ai $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{0}}$; supposant donc, comme on le fait ordinairement, que zero exprime une quantité infiniment petite, ou que $0 = \frac{1}{\infty}$, y est infinie. C'est-à-dire qu'il faudroit prolonger à l'infini la ligne GH pour qu'elle rencontrât les deux branches de la courbe.

740. On appelle *Asymptotes* ces lignes qui s'approchant de plus en plus des branches d'une courbe, ne peuvent cependant les rencontrer jamais.

4.° Si $x > a$, y devient imaginaire. La courbe ne peut donc passer au-delà de GH.

5.° Si x est négative, y a deux valeurs, pourvu que x soit moindre que b. La courbe a donc aussi deux branches dans le sens négatif.

6.° Si $x = b$, $y = 0$; la courbe doit donc passer au point B. Mais elle ne peut descendre plus bas, puisque $x > b$ rend les y imaginaires.

7.° Faisant $y = 0$, dans la supposition de x négative & $= b$, on a $y^2 = xx \left(\frac{b - x}{a + x}\right) = 0$; d'où l'on tire $x^2 (b - x) = 0$, qui donne $x = 0$, $x = 0$, $x = -b$. La courbe passera donc une fois au point B, & deux fois au point A, ou elle formera un *nœud*.

741. Lorsque plusieurs branches de la même courbe passent par le même point, on l'appelle en général *point multiple*, & en

FIG. parculier, *point double*, *triple*, &c. lorſque deux ou trois branches viennent s'y réunir. L'algebre apprend encore à diſcerner ces points, & à connoître leur multiplicité ; mais cette recherche eſt ſouvent difficile.

8.° Si $b = o$, le nœud s'évanouit, & l'équation $y^2 = x^2 \left(\frac{b+x}{a-x}\right)$, devient $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, que nous retrouverons bientôt dans une courbe ancienne nommée *Ciſſoïde*.

742. Outre les points multiples, il y a encore des points *d'inflexion* & des points de *rebrouſſement*. Les premiers ſont ceux où la
107. courbe, après avoir tourné ſa convexité dans un ſens, commence à la tourner dans le ſens oppoſé. Par exemple, la courbe MAM′ dont l'équation eſt $y^3 = a^2x$ a un point d'inflexion en A.

Les points de rebrouſſement ſont ceux où deux branches de la même courbe ſe touchent, ſans paſſer au-delà du point de contact. Voyez la courbe mAm' dont l'équation eſt $y^3 = ax^2$.

743. Si l'équation des coordonnées eſt du premier degré, elle appartient toujours à une ligne droite ; & c'eſt pour cela qu'on déſigne les droites par le nom des lignes du *premier genre* ou du *premier ordre*.

Si dans l'équation des coordonnées, il n'entre que des yy ou des xx, ou des xy, les lignes qu'elle repréſente, s'appellent lignes du *ſecond genre*.

Lorſque cette équation eſt du troiſieme degré, les lignes qui en réſultent ſont du *troiſieme genre*, &c. Et comme les lignes du ſecond ſont les courbes les plus ſimples, on les appelle auſſi *courbes du premier genre*, enſorte que des lignes du troiſieme ſont des courbes du ſecond ; & ainſi de ſuite. Les Auteurs varient ſur la maniere de les compter ; mais tout cela revient au même. Il n'y a que la ligne droite qui ſoit du premier genre. Il y en a quatre du ſecond ; ce ſont les quatre ſections coniques, en y comprenant le cercle. Il y en a 72 du troiſieme, comme on peut le voir dans les Opuſcules de *Newton* (*Enumeratio linearum tertii ordinis*), & dans les Ouvrages des Géometres plus récents, MM. *Euler*, *Cramer*, &c. Il y en a un bien plus grand nombre du quatrieme genre.

744. Mais il faut remarquer que dans cette diviſion de lignes en différens ordres, on ne comprend que les courbes *géométriques*. On nomme ainſi celles qui ont pour abſciſſes & pour ordonnées des lignes droites dont le rapport peut être déterminé géométriquement. Ainſi une courbe qui auroit pour abſciſſes des arcs de cercle, ou des lignes droites égales à des ſinus, ne ſeroit pas une courbe géométrique. Ce ſeroit une des courbes appellées *méchaniques* ou *tranſcendantes*. Les premieres ſe nomment auſſi *courbes algébriques*.

 FIG.

745. Or ce qui fait le principal objet de l'Analyse dans l'examen d'une courbe, c'est, 1.° d'en trouver l'équation, lorsque la courbe est donnée, ou de décrire la courbe si on a déja son équation. 2.° D'en déterminer la tangente. 3.° D'en connoître la *courbure* dans un point donné, ce qui se fait en imaginant un petit arc de cercle qui se confond en ce point avec la courbe, & dont on détermine le rayon par le moyen de l'équation de cette courbe. Le cercle s'appelle *osculateur*, & son rayon s'appelle *rayon de courbure*, *rayon osculateur*, *rayon de la développée.* 4.° De chercher les plus grandes ou les plus petites ordonnées de cette courbe, par la méthode *de maximis & minimis.* 5.° De trouver sa quadrature exacte; si elle en est susceptible, ou du moins, sa quadrature approchée. 6.° D'en trouver la *rectification*, ou de déterminer la longueur d'une ligne droite égale à l'un quelconque de ses arcs, &c.

Le calcul algébrique ordinaire peut absolument suffire pour toutes ces recherches; mais le calcul *différentiel & intégral* est beaucoup plus expéditif.

Origine des Sections Coniques, & leur Equation générale.

746. Soit coupé un cône droit BCD par un plan quelconque AMP; on demande l'équation de la courbe MAm qui résulte de cette section, 108.

Si par le sommet B on fait passer un plan BCD perpendiculaire sur la base du cône & sur le plan coupant AMP, l'intersection de ces deux plans sera une droite Aa; & si on coupe le cône parallélement à la base par un plan FMG, on aura un cercle dont le plan sera perpendiculaire au triangle BCD, & dont l'intersection avec le plan AMP sera une droite PM perpendiculaire aux droites Aa, FG (642). La ligne PM sera donc une ordonnée commune au cercle & à la section MAm.

Cela posé, soit $AP = x$, $PM = y$, $AB = d$, l'angle $ABa = B$, l'angle $BAa = A$; la propriété du cercle donne $yy = FP \times PG$. Cherchons d'abord l'expression analytique des lignes FP & PG. Je mene AE parallele à CD, & PK parallele à BD, l'une & l'autre dans le plan BCD, & j'ai $AB \,.\, \sin AEB :: AE \,.\, \sin B$. Or $AEB = \dfrac{180° - B}{2} = 90° - \frac{1}{2}B$, donc $\sin AEB = \sin(90° - \frac{1}{2}B) = \cos\frac{1}{2}B$, & $AE = \dfrac{d \times \sin B}{\cos\frac{1}{2}B} = \dfrac{d \times 2\sin\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B}$ (689) $= 2d\sin\frac{1}{2}B$. D'ailleurs le triangle APK donne $\sin AKP \,.\, \sin APK$, ou $\sin AEB \,.\, \sin AaE$, ou encore $\cos\frac{1}{2}B \,.\, \sin(A + B) :: x \,.\, AK =$

FIG. $\frac{x \sin(A+B)}{\cos \frac{1}{2} B}$; donc KE ou PG $= 2d \sin \frac{1}{2} B - \frac{x \sin(A+B)}{\cos \frac{1}{2} B}$.

Quant à l'expression de la partie FP, on a dans le triangle APF; $\sin$ AFP, ou $\sin$ BFG, ou $\sin$ BGF, ou $\cos \frac{1}{2} B . x :: \sin A . FP =$ $\frac{x \sin A}{\cos \frac{1}{2} B}$; donc $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} \left(2dx \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B - xx \sin \overline{A+B} \right) =$ $\frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} \left(dx \sin B - xx \sin \overline{A+B} \right)$; équation demandée.

109. 747. Maintenant, il ne peut arriver que trois cas, 1.° que A $+ B = 180°$, c'est-à-dire, que le plan coupant AMP soit parallele au côté BD; alors la section conique se nomme *Parabole*, & son équation est $yy = \frac{\sin A \times \sin B}{\cos^2 \frac{1}{2} B} dx = \frac{\sin^2 B}{\cos^2 \frac{1}{2} B} dx = 4dx \sin^2 \frac{1}{2}$ B, ou $y = \pm 2 \sin \frac{1}{2} B \sqrt{dx}$. La parabole est donc une courbe formée par deux branches égales & semblables qui ont un cours infini.

748. II.° Si A+B est moindre que 180°, il est aisé de voir que le plan AMP prolongé doit rencontrer l'autre côté BD; ainsi la section conique qui en résulte, & qui s'appelle *Ellipse*, est une courbe rentrante formée par deux branches égales, semblables & finies AM*a*, A*ma*. Son équation est $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} \left(dx \sin B - xx \sin \overline{A+B} \right)$.

749. III.° Si A+B surpasse 180°, la section s'appelle *Hyperbole*, & son équation est $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} \left(dx \sin B + xx \sin \overline{A+B-180°} \right)$.

110. Or si on imagine un cône B*dc* égal & opposé par le sommet au cône BCD, il est clair que le plan coupant AMP prolongé le rencontrera, & que de leur intersection résultera une courbe M'*am'* égale, semblable & opposée à la courbe inférieure MA*m*; ou plutôt ces deux courbes que l'on appelle *Hyperboles opposées*, ne feront qu'une seule & même courbe généralement représentée par la même équation.

750. Il n'en est pas de même pour les sections paraboliques & elliptiques. On auroit beau imaginer des cônes opposés au sommet, jamais les plans coupants ne pourroient les rencontrer tous les deux à la fois. Ainsi la parabole, l'ellipse & l'hyperbole ont des marques très-distinctives. La parabole a deux branches égales

& infinies ; l'ellipſe eſt une courbe fermée ; l'hyperbole eſt compoſée de deux courbes égales, ſemblables & oppoſées, dont la diſtance eſt une ligne conſtante A*a*. Et comme chacune de ces courbes a deux branches égales & infinies, il ſuit que l'hyperbole en a quatre. L'uſage eſt cependant d'appeller ſimplement hyperbole l'une quelconque de ces courbes, & de déſigner par le nom d'hyperboles oppoſées les deux courbes à la fois. FIG.

On a vu l'origine des trois ſections coniques ; voyons maintenant quelles ſont leurs principales propriétés ; & afin de ſimplifier cette recherche, ſuppoſons-les décrites ſur un plan.

De la Parabole.

751. L'équation à cette courbe eſt $yy = 4dx\, \mathit{ſin}^2 \tfrac{1}{2}B$; donc ſi on fait la quantité conſtante $4d\, \mathit{ſin}^2 \tfrac{1}{2}B = p$, on aura $yy = px$. D'où il ſuit que les *quarrés des ordonnées* MQ^2 *à la parabole, ſont entr'eux comme leurs abſciſſes* AQ. 111.

La ligne indéfinie AL ſe nomme l'axe de la parabole, le point A origine des abſciſſes en eſt le ſommet, & la quantité conſtante *p* ſe nomme le *paramètre* de l'axe.

752. Si on prend l'abſciſſe $AF = \tfrac{1}{4}p$, le point F ſera ce qu'on appelle le foyer, & l'ordonnée DF paſſant par ce point $= \sqrt{\tfrac{1}{4}pp} = \tfrac{1}{2}p$. Donc *la double ordonnée* D*d paſſant par le foyer eſt égale au paramètre.*

Si ſur LA prolongée, on prend $AG = AF = \tfrac{1}{4}p$, & ſi par le point G on mene la ligne indéfinie EG*e* parallele à l'ordonnée MQ ou perpendiculaire à l'axe, cette ligne EG*e* ſe nomme *directrice*.

753. *La diſtance d'un point quelconque* M *de la parabole à la directrice* EG, *eſt égale à la diſtance de ce même point au foyer* F. Car $FM = \sqrt{yy + (x - \tfrac{1}{4}p)^2} = \sqrt{px + (x - \tfrac{1}{4}p)^2} = x + \tfrac{1}{4}p = QG =$ MH. De cette propriété on déduit une maniere facile de décrire la parabole par un mouvement continu.

754. Soit l'équerre EHO dont le côté EH puiſſe ſe mouvoir librement le long de la directrice AH, & ſoit un fil OMF égal en longueur à l'autre côté HO ; ſi ayant fixé l'une des extrémités de ce fil au point O, & l'autre au foyer F, on approche l'équerre de l'axe, pour l'en éloigner enſuite en tenant toujours le fil tendu par le moyen d'un ſtyle M qui deſcende le long de HO ; je dis que la courbe décrite dans ce mouvement par le ſtyle M ſera une parabole, puiſque la diſtance MH à la directrice ſera par-tout égale à la diſtance MF au foyer F.

755. Propoſons-nous maintenant de mener par le point donné M ſur la parabole AM la tangente MT. 112.

Ayant imaginé l'arc M*m* infiniment petit, ſon prolongement M*m*T ſera la tangente demandée. Or ſi on mene les perpendicu-

FIG. laires MQ, mq ſur la directrice, & les droites MF, mF au foyer F, enfin mg parallele à Qq, & ſi on décrit du centre F & du rayon mF le petit arc mr, on aura $MQ = MF$, $mq = mF$: donc $MQ - mq$, ou $Mg = MF - mF$, ou Mr. Les triangles rectangles Mmg, Mmr ſont donc égaux & ſemblables, & par conſéquent l'angle mMr ou $TMF = gMm = QMT = MTF$. Donc le triangle MTF eſt iſoſcele, & par conſéquent, ſi on prend $FT = FM$, la ligne MT menée par les points T & M ſera la tangente demandée.

L'angle $MTF = LMO = FMT$. Donc *tous les rayons lumineux ou ſonores* OM *paralleles à l'axe* AP *doivent à la rencontre de la parabole* AM, *ſe réfléchir à ſon foyer* F.

756. Puiſqne $FM = x + \frac{1}{4}p$, on a $FT - \frac{1}{4}p = AT = x$. Donc la ſoutangente $PT = 2x$; la tangente $MT = \sqrt{px + 4xx} = \sqrt{4MF \times x}$; ſi on mene la ligne MN perpendiculaire à la parabole ou à ſa tangente MT au point M, on aura $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$. Donc dans la parabole la ſounormale eſt toujours égale à la moitié du paramêtre. La normale $MN = \sqrt{px + \frac{1}{4}pp} = \sqrt{MF \times p}$.

757. Une ligne quelconque MO parallele à l'axe d'une parabole
111. ſe nomme en général un *diamêtre*. Le point M en eſt l'origine; le quadruple de la diſtance de ce point au foyer F en eſt le paramêtre q; ſes ordonnées ſont des droites NP paralleles à la tangente en M, & les abſciſſes de ces ordonnées ſont les lignes MP.

Pour trouver l'équation aux coordonnées du diamêtre MO, nommons $MP(x)$, $PN(y)$, $AQ = AT = a$, on aura $MQ = \sqrt{ap}$, $MT = \sqrt{aq}$, $q = p + 4a$, & ſi on mene NL perpendiculaire à l'axe, les triengles ſemblables NRL, MTQ donneront $\sqrt{aq} . y + \sqrt{aq} :: \sqrt{ap}$. $NL = \frac{y\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}} + \sqrt{ap} :: 2a$. $RL = \frac{2ay}{\sqrt{aq}} + 2a$. Or $AR = RT - AT = x - a$. Donc $AL = x + a + \frac{2ay}{\sqrt{aq}}$, & par la propriété de la parabole, $NL^2 = p \times AL$, ou $\left(\sqrt{ap} + \frac{y\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}}\right)^2 = ap + px + \frac{2apy}{\sqrt{aq}}$; d'où l'on tire en réduiſant, $yy = qx$, équation ſemblable à celle que nous avons trouvée pour les axes : d'où il faut conclure qu'un diamêtre quelconque MO diviſe en deux également toutes les ordonnées Nn. Par le moyen de ces principes, il eſt facile de réſoudre les problêmes ſuivants.

758. I. L'axe AL étant donné avec ſon paramêtre p, trouver un

un diamêtre MO qui fasse avec ses ordonnées un angle donné FIG. MP$n = a$.

Le problême se réduit à trouver le point Q où la perpendiculaire MQ rencontre l'axe. Soit donc AQ $= x$, le triangle MTQ donnera $2x . \sqrt{px} :: 1 . tang\ a$. D'où $x = \frac{p}{4} cot^2 a$, & le paramêtre du diamêtre MO $= p + 4x = \frac{p}{sin^2 a}$. Il est aisé de voir que ce problême a deux solutions.

II. Le paramêtre q du diamêtre MO étant donné avec l'origine M de ce diamêtre & l'angle a qu'il fait avec ses ordonnées, trouver l'axe AL, son origine A & son paramêtre p.

Le problême se réduit encore à trouver la distance MQ de l'axe au diamêtre, ensuite la distance AQ afin d'avoir le sommet A & le paramêtre p. Or en gardant les mêmes dénominations que dans le problême précédent, on a MQ $= \sqrt{px}$, $q = p + 4x = \frac{p}{sin^2 a}$. D'où l'on tire $p = q\, sin^2 a$, $x = \frac{q\, cos^2 a}{4}$, MQ $= \pm \frac{1}{2} q\, sin\, a\, cos\, a = \pm \frac{1}{4} q\, sin\, 2a$.

Les propriétés de la parabole trouvent souvent leur application dans les Arts & dans les Sciences.

De l'Ellipse.

759. L'équation à l'ellipse est $yy = \frac{sin\,A}{cos^2 \frac{1}{2} B}(dx\, sin B - xx\, sin(A+B))$, 113.

d'où il suit qu'à chaque abscisse AP répondent deux ordonnées PM, PM′ égales & opposées. Si l'on fait $y = 0$, on aura les points où la courbe rencontre la ligne des abscisses, ou le *grand axe* Aa. Le premier lorsque $x = 0$, au point A ; le second lorsque A$a = \frac{d\, sin\, B}{sin(A+B)}$. Soit donc le grand axe $= 2a$, & on aura $yy = \frac{sin\, A\, sin(A+B)}{cos^2 \frac{1}{2} B}(2ax - xx)$.

760. La double ordonnée BCb passant par le milieu C de l'axe Aa, ou par le centre de l'ellipse, se nomme *le petit axe*. Pour faire entrer son expression dans l'équation à l'ellipse, nommons-le

FIG.
$2b$, & nous aurons $bb = \frac{\sin A \sin (A+B)}{\cos^2 \frac{1}{2} B} aa$. D'où l'on tire $yy = \frac{bb}{aa}$

113. $(2ax - xx)$. Ce qui donne cette proportion $yy \,.\, 2ax - xx :: bb \,.\, aa$. ou $PM^2 \,.\, AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$. Donc *dans l'ellipse les quarrés des ordonnées au grand axe sont aux produits de leurs abscisses, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.*

Si on décrit un cercle dont le centre soit C & le rayon CA, on aura $PN^2 = AP \times Pa$. Donc $PN \,.\, PM :: a \,.\, b :: CB' \,.\, CB$.

761. Si on eût compté les abscisses du centre C, en faisant $CP = x$, on auroit eu $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, équation plus simple que la précédente, & dont nous nous servirons le plus souvent.

Si b étoit égal à a, on auroit $yy = aa - xx$ équation au cercle ; on peut donc regarder un cercle comme une ellipse dont les deux axes sont égaux.

L'équation $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ donne $xx \,.\, bb - yy :: aa : bb$, ou $MQ^2 \,.\, BQ \times Qb :: CA^2 \,.\, CB^2$. Donc *les quarrés des ordonnées au petit axe de l'ellipse sont aux rectangles de leurs abscisses comme le quarré du grand axe est au quarré du petit.*

762. Si de l'une des extrêmités B du petit axe & d'un rayon BF égal au demi-grand axe CA, on décrit un arc de cercle, il coupera le grand axe en deux points F, f qu'on appelle *Foyers.* La distance CF est donc égale à $\sqrt{aa - bb}$, d'où il suit que $AF \times Fa = (a + \sqrt{aa - bb})(a - \sqrt{aa - bb}) = bb = CB^2$. Donc le petit demi-axe est moyen proportionnel entre les distances de l'un des foyers aux deux sommets de l'ellipse.

763. L'ordonnée DF passant par le foyer $= \frac{b^2}{a}$, & son double Dd que l'on appelle le *paramètre* p *du grand axe* $= \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$;

Donc $2a : 2b :: 2b : p$; *le paramètre est donc une troisieme proportionnelle au grand & au petit axe.* Par analogie à cette propriété, on appelle paramètre du petit axe de l'ellipse une ligne $q = \frac{2aa}{b}$, ou troisieme proportionnelle au petit & au grand axe.

Puisque $\frac{2bb}{a} = p$, on a $bb = \frac{1}{2} ap$; mettant donc cette valeur dans les équations à l'ellipſe trouvées ci-deſſus, on a $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, & $yy = \frac{p}{2a}(aa - xx)$, ſelon que l'origine des abſciſſes eſt à l'un des ſommets, ou au centre. FIG.

764. Les lignes FM, fM menées des foyers à quelque point de l'ellipſe ſe nomment *Rayons vecteurs*, & leur expreſſion eſt, en nommant FC (c), $FM = \sqrt{yy + c^2 - 2cx + xx} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + a^2 - b^2 + xx - 2cx} = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}} = a - \frac{cx}{a}$, & $fM = a + \frac{cx}{a}$. Donc $fM + FM = 2a = Aa$; *la ſomme des rayons vecteurs dans l'ellipſe eſt donc toujours égale au grand axe ;* propriété remarquable d'où l'on peut déduire une maniere facile de décrire l'ellipſe.

Ayant attaché à deux points fixes F, f un fil FMf plus grand que Ff, on tendra ce fil par le moyen d'un ſtile M, avec lequel on décrira autour des foyers F, f une courbe qui ſera une ellipſe, puiſque la ſomme des rayons vecteurs ſera par-tout la même.

765. Soit propoſé maintenant de mener par le point donné M la tangente MT.

Ayant imaginé l'arc Mm infiniment petit, on menera des foyers F, f les rayons vecteurs fm, fM, Fm, FM, & on décrira des centres F & f & des rayons FM, fm les petits arcs Mg, mr, & on aura $fm + m\mathrm{F} = \mathrm{FM} + \mathrm{M}f$, ou $f\mathrm{M} - fm = \mathrm{M}r = m\mathrm{F} - \mathrm{FM} = mg$: donc les triangles rectangles mMg, mMr ſont égaux & ſemblables, & par conſéquent l'angle gmM, ou FMT $= m$Mr = LMT. Donc ſi on prolonge le rayon vecteur fM, la ligne MT qui diviſera l'angle LMF en deux également ſera la tangente demandée. 114.

L'angle LMT = OMf = FMT. Donc tous les rayons partant d'un foyer lumineux F doivent à la rencontre de l'ellipſe AM ſe réfléchir à l'autre foyer f.

766. Si on mene la normale MN, l'angle fMN ſera égal à l'angle NMF. On aura donc fM : MF :: fN : NF, ou $f\mathrm{M} + \mathrm{MF}$ $(2a) : \mathrm{FM}\left(a - \frac{cx}{a}\right) :: f\mathrm{N} + \mathrm{NF}\ (2c) : \mathrm{FN} = c - \frac{c^2x}{aa} = c - x + \frac{b^2x}{a^2}$. Donc $\mathrm{FN} + x - c = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a} = \mathrm{PN}$. C'eſt-là l'expreſſion de la ſounormale dans l'ellipſe lorſque l'origine des abſciſſes eſt au centre. Si elle étoit au ſommet, en nommant AP

FIG. (z), on auroit $PN = \frac{bb}{a} - \frac{bbz}{a^2} = \frac{1}{2}p - \frac{pz}{2a}$.

La Normale $NM = \sqrt{yy + \frac{b^4x^2}{a^4}} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^4}(a^2 - b^2)}$

$= b\sqrt{1 - \frac{c^2x^2}{a^4}}$.

La Soutangente $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{\frac{bb}{aa}(aa - xx)}{\frac{bb}{aa}x} = \frac{aa-xx}{x} = \frac{2az - zz}{a - z}$.

Donc $CT = \frac{aa}{x}$, ce qui donne cette proportion CP . CA :: CA : CT, par le moyen de laquelle il est facile de déterminer le point T par où passe la tangente ; & comme on a d'ailleurs le point M, il est facile de mener la tangente MT.

L'expression de la tangente MT se trouve par le moyen du triangle rectangle PMT.

115. 767. Une droite quelconque nCN qui passe par le centre de l'ellipse se nomme diamêtre, & si l'on mene DCd, parallele à la tangente en N, les diamêtres DCd, nCN sont nommés *Conjugués*; les lignes comme MP paralleles à la tangente en N sont les ordonnées du diamêtre CN, & les parties CP en sont les abscisses. Enfin le paramêtre d'un diamêtre quelconque est une ligne troisieme proportionnelle à ce diamêtre & à son conjugué.

768. Soient menées des extrêmités D & N les deux ordonnées NQ, DI au grand axe Aa, & soit $CQ = x$, $DI = u$; à cause des triangles semblables DIC, NQT, on aura $NQ^2 . QT^2 :: DI^2 . IC^2$, ou $\frac{bb}{aa}(aa-xx) . \frac{(aa-xx)^2}{xx} :: u^2 . aa - \frac{a^2u^2}{b^2}$. D'où l'on tire $u = \frac{bx}{a}$; ce qui donne CQ . DI :: a . b; on trouveroit de même CI . NQ :: a . b. Donc CQ . DI :: CI . NQ :: a . b. D'où il suit que les triangles DIC, CNQ sont égaux en surface.

Donc, 1.° $DI^2 = \frac{b^2CQ^2}{a^2} = bb - NQ^2$, ou $DI^2 + NQ^2 = bb$. 2.° $IC^2 = \frac{a^2}{b^2}NQ^2 = aa - CQ^2$, ou $IC^2 + CQ^2 = a^2$.

3.° $a^2+b^2=IC^2+CQ^2+NQ^2+DI^2=CD^2+CN^2$; c'est-à-dire, que dans l'ellipse la somme des quarrés de deux diamêtres conjugués quelconques est toujours égale à la somme des quarrés des deux axes. FIG. 115.

4.° Si l'on mene ND, la surface du triangle NCD aura pour expression $\frac{1}{2}(DI+NQ)(IC+CQ)-\frac{1}{2}IC\times ID-\frac{1}{2}CQ\times NQ=$

$$\tfrac{1}{2}IC\times NQ+\tfrac{1}{2}CQ\times DI=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}NQ^2+\frac{b}{a}CQ^2\right)=$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\times\frac{b^2}{a^2}(a^2-CQ^2)+\frac{b}{a}CQ^2\right)=\tfrac{1}{2}ab.$$ Donc la surface du parallélogramme CDEN sera ab, & celle du parallélogramme entier FEHG sera $4ab=2a\times 2b$. D'où il suit que *tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse sont égaux entr'eux & au rectangle des deux axes.*

769. Soit maintenant le diamêtre $CN=m$, $CD=n$, l'angle $CPM=DCn=p$; & on aura, 1.° $m^2+n^2=a^2+b^2$; 2.° $ab=mn\sin p$ qui est l'expression de la surface du parallélogramme DCNE. Or ces deux équations donnent immédiatement les diamêtres conjugués & égaux de l'ellipse : car alors on a $2m^2=a^2+b^2$, ou $m=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)}$, & $\sin p=\frac{2ab}{a^2+b^2}$. Donc puisque ces quantités sont toujours réelles, chaque ellipse doit avoir deux diamêtres conjugués égaux.

Quant à leur position, elle dépend de la valeur de CQ. Or CQ^2+NQ^2, ou (768, 1.°) $b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}CQ^2=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ * ;

donc $CQ=\frac{a}{\sqrt{2}}$, valeur indépendante de b, & qui fait voir que l'ordonnée NQ prolongée déterminera les diamêtres conjugués égaux dans toutes les ellipses qui auront l'axe Aa commun.

770. Cherchons à présent l'équation aux coordonnées CP, PM, & faisons $CP=x$, $PM=y$, $NT=q$, $NQ=r$, $QT=s$, $CQ=t$; si l'on mene PK, MO perpendiculaires à l'axe & LP perpen-

---

* Observant qu'ici $2NQ^2+2CQ^2=a^2+b^2$, & faisant, d'après le n.° 768, les substitutions pour trouver $a^2+b^2=2b^2+2\frac{a^2-b^2}{a^2}CQ^2$.

FIG. 115. diculaire à MO, on aura par les triangles semblables MQT, MLP, $ML = \frac{ry}{q}$, $PL = \frac{sy}{q}$; & les deux autres triangles CPK, CNQ donneront $PK = \frac{rx}{m}$, $CK = \frac{tx}{m}$; d'où $CO = \frac{tx}{m} - \frac{sy}{q}$, & $OM = \frac{ry}{q} + \frac{rx}{m}$. Or par la propriété de l'ellipse (760) on a $\frac{a^2}{b^2} MO^2 = a^2 - CO^2$. Substituant donc & ordonnant, on aura

$$\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2} + \frac{s^2}{q^2}\right)y^2 + \left(\frac{a^2r^2}{b^2} - ts\right)\frac{2xy}{mq} + \left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2} + \frac{t^2}{m^2}\right)$$

$x^2 = a^2$; & puisque $\frac{a^2r^2}{b^2} = a^2 - CQ^2 = ts$, on aura

$$\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2} + \frac{s^2}{q^2}\right)y^2 + \left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2} + \frac{t^2}{m^2}\right)x^2 = a^2.$$

Observons maintenant que lorsque $x = 0$, $y = n$; ainsi le coefficient de y^2, $= \frac{a^2}{n^2}$; lorsqu'au contraire $y = 0$, alors $x = m$, d'où le coefficient de x^2, $= \frac{a^2}{m^2}$. L'équation devient donc $\frac{a^2}{n^2}y^2 + \frac{a^2}{m^2}x^2 = a^2$, qui donne $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, résultat parfaitement conforme à celui de l'équation aux axes.

Il suit de-là, 1.° que tout diamêtre NCn divise en deux parties égales les ordonnées MPm, & par conséquent l'ellipse entiere. 2.° Qu'un diamêtre quelconque Nn est divisé en deux également au centre C; car aux points N & n on a $x^2 = m^2$; d'où $x = \pm m$.

771. Probl. I. Etant donnés les deux demi-axes a, b, trouver deux diamêtres qui fassent entr'eux un angle donné $p = DCN$.

On a $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, $mn = \frac{ab}{\sin n}$; donc $m^2 + n^2 + 2mn = aa + bb + \frac{2ab}{\sin p}$, & $m^2 + n^2 - 2mn = a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin p}$; donc $m + n$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin p}}$, & $m - n = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin p}}$; FIG.

donc $m = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin p}} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin p}}$, & $n = \frac{1}{2}\sqrt{\&c.}$

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer la direction de l'un des diamêtres, ou l'angle ACN que j'appelle c. Or le triangle CNT donne $\sin(p-c) . m :: \sin p . CT = \frac{aa}{CQ} = \frac{m \sin p}{\sin(p-c)}$; d'où l'on tire $CQ = \frac{a^2 \sin(p-c)}{m \sin p}$; on a donc dans le triangle rectangle CNQ, $1 . m :: \cos c . \frac{a^2 \sin(p-c)}{m \sin p}$, qui donne $m^2 \cos c \sin p = a^2 \sin(p-c) = a^2 \sin p \cos c - a^2 \sin c \cos p$, ou $\frac{a^2 - m^2}{a^2} \sin p \cos c = \sin c \cos p$; donc puisque $\frac{\tang c}{\tang p} = \frac{\sin c \cos p}{\sin p \cos c}$, l'on aura $\tang c = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \tang p$.

772. PROBL. II. Les deux diamêtres m & n, & l'angle p qu'ils font entr'eux étant donné, trouver les deux axes, & leur direction.

Des équations $mn \sin p = ab$, & $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$, on déduit en faisant un calcul semblable à celui du problême précédent, $a = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin p} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin p}$, & $b = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin p} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin p}$. L'angle C qui donne la direction des axes se trouve comme dans le problême précédent.

De l'Hyperbole.

773. L'équation $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B}(dx \sin B + xx \sin(A + B - 180°))$, 116.

fait voir que l'hyperbole rencontre son axe AP en deux points, le premier à l'origine A, le second à un point ou $x = -$

FIG. $\frac{d \sin B}{\sin(A+B-180^\circ)}$; ainsi en supposant que Aa soit égal à $\frac{d \sin B}{\sin(A+B-180^\circ)}$, le point a sera à l'hyperbole opposée $M'am'$. Or les points A, a se nomment les sommets de l'hyperbole, la ligne Aa ($2a$) en est l'axe, son milieu C en est le centre; enfin une droite $Bb = 2CB = 2b$, telle que $\frac{bb}{aa} = \frac{\sin A \sin(A+B-180^\circ)}{\cos^2 \frac{1}{2} B}$, menée perpendiculairement à l'axe, & passant par le centre C, se nomme le second axe.

774. Les valeurs de b & de a étant substituées dans l'équation de l'hyperbole, donnent $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$. Or cette équation fait voir que la courbe a deux branches égales & infinies AM, Am dans le sens positif. Mais si x est négatif, il n'y aura de courbe que lorsque x sera devenue égale à $2a$; les ordonnées seront alors réelles, & la courbe aura encore du côté de x négatif deux branches qui s'en iront à l'infini. Il est aisé de prouver que ces deux branches sont égales à celles de l'hyperbole *positive* MAm.

116. Car puisqu'en appellant AP' (x), $P'M' = Pm' = y$, on a $\frac{a^2}{b^2} yy = -2ax + xx$, si l'on fait $aP' = x'$, on aura alors $x = 2a + x'$, & par conséquent $\frac{a^2y^2}{b^2} = 2ax' + x'x'$, équation précisément la même que celle de l'hyperbole MAm.

775. Puisque $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$ on a $PM^2 . AP \times Pa :: CB^2 . CA^2$. Donc *dans l'hyperbole les quarrés des ordonnées au grand axe sont aux rectangles de leurs abscisses ou de leurs distances aux deux sommes, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.*

Si l'on fait $CP = x$, ou si l'on met l'origine de x au centre C, alors on aura $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$; équation un peu plus simple que la précédente. Aussi l'emploierons-nous plus souvent. Elle donne $xx = \frac{aa}{bb}(bb + yy)$; donc si on mene MQ perpendiculaire sur

ſur le petit axe CB prolongé, & ſi on nomme les coordonnées FIG.

CQ & QM, x & y, on aura $yy = \frac{aa}{bb}(xx + bb)$, pour l'équation aux coordonnées du petit axe.

776. Si $a = b$, alors l'hyperbole ſe nomme équilatere, & on a pour ſes équations $yy = 2ax + xx$, $yy = xx - aa$, ſelon que l'origine des abſciſſes eſt au ſommet ou au centre, & l'équation au petit axe, qui devient alors égal au grand, eſt $yy = aa + xx$. On peut remarquer, en paſſant, l'analogie qui ſe trouve entre cette courbe & le cercle dont les équations ſont $yy = 2ax - xx$, $yy = aa - xx$.

777. Si, ayant mené BA, on prend de part & d'autre du centre C, CF $=$ Cf $=$ BA, les points F, f ſeront ce qu'on appelle les *Foyers*. La double ordonnée Dd paſſant par l'un des foyers, ſe nomme le paramêtre, & les lignes FM, fF menées de ces points à quelqu'un de ceux de la courbe, ſe nomment *Rayons vecteurs.*

Cela poſé, la diſtance FC $= \sqrt{aa + bb}$. Donc FA $\times$ Fa $= (\sqrt{aa+bb} - a)(\sqrt{aa+bb} + a) = bb$. Le petit demi-axe eſt donc moyen proportionnel entre les deux diſtances de l'un des foyers aux deux ſommets.

L'ordonnée DF $= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = \frac{bb}{a}$; donc le paramêtre

$p = \text{D}d = \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$. Il eſt donc troiſieme proportionnel au grand & au petit axe. On appelle paramêtre du petit axe une ligne q troiſieme proportionnelle au petit & au grand axe.

778. Si l'on fait entrer l'expreſſion du paramêtre dans les équations à l'hyperbole $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, on aura $yy = \frac{p}{2a}(2ax + xx)$, $yy = \frac{p}{2a}(xx - aa)$. De même l'équation $yy = \frac{aa}{bb}(bb + xx)$ qui convient au petit axe, ſe change en celle-ci $yy = \frac{4b^2}{p^2}(bb + xx) = \frac{2a}{p}(\frac{1}{2}ap + xx)$.

779. Soit CF $=$ Cf $= c$, on aura FM $= \sqrt{yy + cc - 2cx + xx}$

FIG. $= \frac{cx}{a} - a$, & $fM = \frac{cx}{a} + a$. Donc $fM - FM = 2a$. Ainsi *dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs est par-tout égale au grand axe.*

780. On tire de-là une maniere facile de décrire une hyperbole dont les axes soient $2a$ & $2b$. Il faudra prendre un intervalle $Ff = 2\sqrt{aa + bb}$, se servir d'une regle fMO d'autant plus longue que l'on voudra avoir une plus grande portion d'yperbole ; on en fixera une extrêmité à l'un des foyers F, f de maniere qu'elle puisse tourner librement autour de ce point. On prendra ensuite un fil FMO égal en longueur à $fMO - 2a$. On fixera l'une des extrémités de ce fil au bout de la regle, & l'autre au foyer F. Cela fait, on écartera la regle de l'axe, & on l'en approchera ensuite, ayant soin de tenir toujours le fil tendu par le moyen d'un style M qui ne sorte pas de la ligne fMO. Il est évident que la courbe décrite dans ce mouvement par le style M sera une branche hyperbolique AM, puisque la différence des rayons vecteurs sera par-tout égale au grand axe.

781. Cette même propriété peut servir à mener la tangente MT en un point quelconque M de l'yperbole. En effet, si l'on imagine
117. l'arc Mm infiniment petit, en menant les rayons vecteurs fM, fm, FM, Fm, on prouvera, à peu-près comme dans l'ellipse, que les angles fmM, MmF sont égaux, & que par conséquent si l'on divise l'angle fMF en deux également par la ligne MT, cette ligne sera la tangente demandée.

Cela posé, dans le triangle fMF, on a, $fM : MF :: fT : TF$, ou $fM + FM \left(\frac{2cx}{a}\right) : fM \left(\frac{aa + cx}{a}\right) :: fT + TF\ (2c) : fT = \frac{aa + cx}{x} = \frac{aa}{x} + c$. Donc $fT - c$, ou $CT = \frac{aa}{x}$, ce qui donne cette proportion CP : CA :: CA : CT, avec laquelle il est facile de trouver le point T, & par conséquent de mener la tangente MT.

782. On peut remarquer que CT étant égal à $\frac{aa}{x}$, il est toujours positif tant que x l'est. Ainsi toutes les tangentes à l'hyperbole coupent l'axe en des points T situés entre A & C. Mais plus l'abscisse est grande, plus la ligne CT diminue, ensorte qu'elle est infiniment petite ou nulle lorsque l'abscisse est infiniment grande. D'où l'on voit qu'on peut mener par le centre C deux

droites AX, Ax qui seront les limites des tangentes de l'hyperbole. FIG.
Ces droites, dont nous allons bientôt déterminer la position, sont nommées les *Asymptotes* de l'hyperbole.

783. La soutangente $PT = x - \frac{aa}{x} = \frac{xx-aa}{x}$, & la tangente $MT = \sqrt{\frac{bb}{aa}(xx-aa) + xx - 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}} = \ldots\ldots \sqrt{\frac{aa+bb}{aa}x^2 - bb - 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}}$. Si l'on mene la normale MN, on aura la sounormale $PN = \frac{\frac{bb}{aa}(xx-aa)}{\frac{xx-aa}{x}} = \frac{bbx}{aa}$, & la normale $MN = \sqrt{\frac{b^4x^2}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)}$.

784. La ligne $AT = a - CT = a - \frac{aa}{x}$; & si l'on mene AS parallele à MP, on aura $\frac{xx-aa}{x} . y :: a - \frac{aa}{x} . SA = \frac{ay}{x+a} = b\sqrt{\frac{x-a}{a+x}}$. Or si x est infinie $\frac{x-a}{x+a}$ ne différera pas de l'unité. On aura donc alors $AS = b$. D'où il suit que si on mene DA & Ad perpendiculaires à CA & égales chacune au demi-petit axe b, les lignes CD, Cd qui passeront par les points D, d & par le centre C, seront les asymptotes de l'hyperbole MAM', & en les prolongeant elles seront celles de l'hyperbole opposée.

Si l'hyperbole est équilatere, l'angle DCd fait par les asymptotes sera droit. Car alors $DA = Ad = CA$.

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes a beaucoup de propriétés ; en voici quelques-unes.

785. Si par un point quelconque N de l'asymptote, on mene 118.
la droite Nn parallele à la ligne Dd, ou perpendiculaire à l'axe

FIG.
AP, on aura CA (a). DA (b) :: CP (x). NP $= \frac{bx}{a}$. Donc NM $= \frac{bx}{a} - y$, & Mn $= \frac{bx}{a} + y$. Par conséquent NM $\times$ Mn $= \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = bb = DA^2$.

786. Menons MQ & AL paralleles à l'asymptote Cd. Il est facile de voir que les triangles DLA, LCA sont isosceles. Soit donc AL $=$ lC $= m$, CQ $= x$, QM $= y$, si l'on mene MK, parallele & égale à QC, on aura, par les triangles semblables DLA, NQM, MKn, les proportions NM . DA :: QM . LA, Mn . DA :: MK . DL. Donc Mn $\times$ MN . DA^2 :: QM $\times$ MK . AL^2. Or Mn $\times$ MN $=$ DA^2. Donc $xy = mm$, *équation à l'hyperbole entre ses Asymptotes*, dans laquelle $mm = \frac{1}{4}(aa + bb)$ est ce qu'on appelle *la puissance* de l'hyperbole.

119. 787. Si deux paralleles Ff, Gg terminées aux asymptotes coupent une hyperbole aux points m, h, p, K, je dis qu'on aura Gp $\times$ pg $=$ Fm $\times$ mf. Car si l'on mene MmN, PpQ perpendiculaires à l'axe, on aura Fm . Mm :: Gp . Pp, mf . mN :: pg . pQ. Donc Fm $\times$ mf : Mm $\times$ mN :: Gp $\times$ pg : Pp $\times$ pQ. Or (785) Pp $\times$ pQ $= bb =$ Mm $\times$ mN. Donc Fm $\times$ mf $=$ Gp $\times$ pg. On a donc aussi Kg $\times$ KG $= fh \times h$F.

788. Si l'on suppose que les points p, K coïncident en un seul point D, la ligne TDt sera tangente au point D, & on aura Fm $\times$ mf $=$ Dt $\times$ DT, & $fh \times h$F $=$ Dt $\times$ DT $=$ Fm $\times$ mf; donc fh (hm + Fm) $=$ Fm ($mh + hf$); donc $fh =$ Fm, & par conséquent TD $=$ Dt. Or si l'on mene DE parallele à CT, ou ordonnée à l'asymptote CT, les triangles semblables TDE, TtC, donneront TE $=$ EC. Donc pour mener une tangente en un point D sur l'hyperbole, correspondant à l'ordonnée DE, il faut prendre ET $=$ EC, & mener par les points T, D la tangente TDt.

789, Puisqu'on a $fh =$ Fm il est clair que de quelque maniere que l'on mene la droite Ff, les deux parties Fm, fh interceptées entre la courbe & les asymptotes, seront toujours égales.

790. On tire de-là une maniere facile de décrire une hyperbole entre deux asymptotes données CT, Ct & qui passe par un point donné m.

On menera par ce point les droites Ff, MN, &c. on prendra $fh =$ Fm, nN $=$ Mm; & les points n, h, &c. seront à l'hyperbole.

120. 791. Selon ce que nous avons vu (788) une tangente TMt terminée aux asymptotes est divisée en deux également au point de contact M. Or si l'on mene MCM, cette ligne se nomme un dia-

mêtre ; la tangente TMt en est le diamêtre conjugué. Ses ordonnées sont des droites MQM' paralleles au diamêtre conjugué TMt ou DCd, & le paramêtre d'un diamêtre quelconque est une ligne troisieme proportionnelle à ce diamêtre & à son conjugué. On nomme encore premier diamêtre la ligne $MCM' = 2CM$, & second diamêtre la ligne $TMt = 2TM = DCd = 2DC$. FIG.

792. Cela posé, il est facile de voir qu'un diamêtre divise toutes ses ordonnées en deux parties égales. Car $NQ : Qn :: TM : Mt$, & $Nn = m'n$. Soit donc $CM = m$, $CD = MT = n$, $CQ = x$, $Qm = y$, on aura $m : n :: x : NQ = \frac{nx}{m}$. Or $Nm \times mn = TM^2$. Donc $n^2 = \frac{n^2x^2}{m^2} - yy$, & $yy = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, équation semblable à celle qui convient aux axes.

Cette équation donne $x^2 = \frac{m^2}{n^2}(y^2 + n^2)$. Donc si on fait $Cp = x$, $pm = y$, on aura $yy = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2)$; pour l'équation aux coordonnées du second diamêtre CD.

793. Soit maintenant aCA le grand axe de l'hyperbole, BA la moitié du petit, si d'un point on mene DE, TG, MPK perpendiculaires à cet axe, & ML, tK qui lui soient paralleles, les triangles MTL, MtK, CDE seront égaux & semblables. Or si l'on nomme $CP(u)$, $PM(z)$, $CE = tK = ML = r$, $MK = DE = TL = s$, & comme auparavant $CM(m)$, $TM(n)$, $CA(a)$, $AB(b)$, on aura $TG = z + s$, $CG = u + r$, $z + s . u + r :: b . a$, & par conséquent $az + as = bu + br$; d'ailleurs $TL(s) . ML(r) :: MP(z) . PS = \frac{rz}{s}$; & $PS = \frac{u^2 - a^2}{u}$ (783) $= \frac{aazz}{b^2u} = \frac{rz}{s}$. Donc $r = \frac{aasz}{b^2u}$; substituant cette valeur dans l'équation $az + as = bu + br$, on a $(bu - as)(bu - az) = 0$. Or $bu - az$ ne peut pas être zéro ; il faut donc que $bu - as = 0$. Donc $bu = as$, & par conséquent $az = br$. On a donc $CP . DE :: a . b :: CE . MP$. 120.

794. Donc, 1.° les triangles CED, CMP sont égaux en surface. 2.° Si l'on mene DM, on aura DMC, ou $\frac{1}{2}$ CDTM = le trapeze DEMP $= (s + z)\left(\frac{u - r}{2}\right) = \frac{su + uz - sr - rz}{2} =$

FIG. $\frac{su - rz}{2} = \frac{b}{2a} uu - \frac{a}{2b} zz = \frac{bbuu - aazz}{2ab} = \frac{a^2b^2}{2ab} = \frac{1}{2} ab$;

donc *le parallélogramme* TT' *construit sur les diamêtres conjugués est égal au rectangle des axes.*

3.° $DE = \frac{b}{a} CP$. Donc $DE^2 = \frac{b^2}{a^2} CP^2 = b^2 + PM^2$ * & $DE^2 - PM^2 = b^2$. 4.° $CE = \frac{a}{b} MP$, & $CE^2 = \frac{a^2}{b^2} MP^2 = CP^2 - a^2$. Donc $CP^2 - CE^2 = a^2$. 5.° $a^2 - b^2 = CP^2 + PM^2 - DE^2 - CE^2 = CM^2 - CD^2$. *La différence des quarrés de deux diamêtres conjugués est donc égale à la différence des quarrés des deux axes.* D'où il suit que dans l'hyperbole équilatere un diamêtre quelconque est égal à son conjugué.

795. Soit p l'angle DCM compris par les deux diamêtres conjugués ; on aura les deux équations $mn \sin p = ab$, $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$, par le moyen desquelles on peut résoudre les deux problêmes suivants.

PROBL. I. Etant donnés les deux axes a, b, trouver deux dia-
120. mêtres qui fassent entr'eux un angle donné p.

Les équations précédentes donnent . . . .

$$m = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} + \frac{a^2b^2}{\sin^2 p}}}, \ldots\ldots$$

$$n = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} + \frac{a^2b^2}{\sin^2 p}}}.$$ Il ne reste donc plus qu'à trouver la direction de l'un de ces diamêtres, ou l'angle MCP que j'appelle C. Or dans le triangle CMP, on a $1 . m :: \sin C . MP = m \sin C$. Donc $CE = \frac{am \sin C}{b}$, & dans le triangle DCE, on a $1 . n :: \cos(p + C) . \frac{am \sin C}{b}$. D'où l'on tire $\frac{am}{bn} \sin C = \cos p \cos C - \sin p \sin C$, & $\tang C = \frac{bn \cos p}{am + bn \sin p} = \frac{b^2}{b^2 + m^2} \cot p$, parce que $a = \frac{mn \sin p}{b}$.

796. PROB. II. Etant donnés les diamêtres conjugués m, n, & l'angle p qu'ils font entr'eux, trouver les deux axes & leur direction.

On a, $a = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^4 + n^4 - 2m^2n^2 \cos 2p}}$, . .

$b = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^4 + n^4 - 2m^2n^2 \cos 2p}}$, & la direction des axes, où l'angle C se trouve comme dans le problême précédent. Mais il est plus simple de se servir des asymptotes. Par l'extrêmité M du premier diamêtre CM, on menera TMt qui fasse avec MQ l'angle TMQ $= p$, & ayant pris TM $=$ M$t = n$, on menera CT, Ct. Alors si on divise l'angle TCt en deux également par la ligne CA, on aura la direction du grand axe.

De la Quadrature des Sections Coniques.

797. LA Quadrature exacte de la plûpart des espaces curvilignes étant fort difficile à trouver, (si même elle n'est pas quelquefois impossible, comme quelques Auteurs l'ont pensé), on a cherché leur quadrature approchée. Les séries ont été d'un grand usage dans cette recherche; & c'est pour pouvoir nous en servir que nous ajouterons quelque chose à ce qui en a été dit dans les Élémens d'Algebre.

798. On appelle *Terme général* d'une série l'expression algébrique qui donne généralement tous ses termes, par la simple substitution des valeurs correspondantes de la lettre n que l'on suppose représenter le nombre des termes. Par exemple, le terme général de la série 1 . 6 . 21 . 52 . 105 . &c. est $n^3 - n^2 + n$, parce qu'en faisant $n = 1$, $= 2$, $= 3$, &c. on a immédiatement chaque terme 1, 6, 21, &c.

799. On appelle *Somme générale* ou *Terme sommatoire d'une série*, l'expression qui donne généralement la somme d'un nombre quelconque de ses termes. Par exemple, $\frac{aq^n - a}{q - 1}$ est le terme sommatoire de toute progression géométrique dont on connoit le premier terme a, le quotient q, & le nombre n des termes.

800. Or la somme générale S d'une série étant donnée, il est aisé d'en trouver le terme général T. Car si dans cette somme on substitue $n - 1$ à n, on aura celle de tous les termes de la série

jusqu'à celui dont le rang est $n-1$, inclusivement. Donc si on soustrait cette somme que j'appelle s de la somme générale S, on aura le terme général $T=S-s$. Par exemple, si $S=\dfrac{n^2+n}{2}$, on aura $T=n$. Si $S=\dfrac{aq^n-a}{q-1}$, $T=aq^{n-1}$.

801. Mais il n'est pas à beaucoup près aussi facile de trouver la somme générale, quand on connoit le terme général. Voici comment on peut résoudre ce problême dans un cas assez étendu dont nous aurons besoin.

Soit T une fonction quelconque rationnelle du nombre n des termes, ou $T=an^m+bn^{m-1}+\&c...+\omega$; pour trouver la somme S, je suppose $S=An^{m+1}+Bn^m+Cn^{m-1}+Dn^{m-1}\ldots+R$; & substituant $n-1$ au lieu de n, j'ai ....

$$\begin{array}{llll}
s=An^{m+1}-A.m+1.n^m & +\frac{1}{2}A.m.m+1.n^{m-1} & -\dfrac{A.m+1.m.m-1.}{2.3}n^{m-2} & +\&c \\
\quad +Bn^m & -Bmn^{m-1} & +\frac{1}{2}B.m.m-1.n^{m-2} & -\&c \\
 & +Cn^{m-1} & -C.m-1.n^{m-2} & +\&c \\
 & & +D.n^{m-2} & +\&c.
\end{array}$$

Donc $S-s$, ou $an^m+bn^{m-1}+cn^{m-2}+\&c.\ldots\ldots=$

$$\begin{array}{lll}
A.m+1.n^m-\frac{1}{2}A.m.m+1.n^{m-1} & +\frac{1}{2}A.\dfrac{m+1.m.m-1.}{3}n^{m-2} & -\&c \\
\quad +Bm & -\frac{1}{2}B.m.m-1 & +\&c \\
 & +C.m-1 & -\&c.
\end{array}$$

Et comparant les termes correspondants, on aura $A=\dfrac{a}{m+1}$, $B=\frac{1}{2}a+\dfrac{b}{m}$, $C=\dfrac{c}{m-1}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{12}am$, &c. ce qui donne $S=\dfrac{a}{m+1}n^{m+1}+\left(\dfrac{b}{m}+\frac{1}{2}a\right)n^m+\left(\dfrac{c}{m-1}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{12}am\right)n^{m-1}+\&c.$

Ex. I. On demande la somme de la série $1.2.3.4\ldots n$, dont le terme général est n? Ici $a=1$, $b=0$, $m=1$. Donc $S=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2$ (359).

Ex. II. Il s'agit de trouver la somme de la série $1.4.9.16.25\ldots$ dont le terme général n^2 donne $m=2$; ensuite, puisque $a=1$, $b=0$, $c=0$, &c. on a $S=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$.

802.

802. En général soit la série $1^m . 2^m . 3^m . 4^m . 5^m$. &c. dont le terme général est n^m, on aura la somme $S = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{12} m n^{m-1} +$ &c. Or si on suppose n infini, alors n^m, n^{m-1}, &c. seront infiniment petits par rapport à n^{m+1}, & par conséquent si on néglige tous ces termes, on aura $1^m + 2^m + 3^m + 4^m + 5^m + \ldots\ldots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$. Mais pour que cette formule ait lieu, il faut observer, 1.° que n doit être vraiment infini. 2.° Qu'il doit être positif. Car s'il étoit négatif, la somme seroit finie, excepté le cas ou $m = -1$. FIG.

803. Il n'est pas difficile maintenant de trouver par approximation la quadrature de l'espace circulaire CBMP compris entre le rayon CB, l'ordonnée MP parallele à ce rayon, l'arc BM, & l'abscisse CP (x). 121.

Car si on imagine cet espace décomposé en une infinité de petits rectangles Ch, qf, &c. qui aient des bases égales & infiniment petites Cq, qg, &c. & si on fait le rayon $= a$, Cq, ou qg, ou &c. $= e$, on aura $e\sqrt{aa - ee}$ pour l'expression du petit rectangle Ch; $e\sqrt{aa - 4ee}$ sera celle du suivant, $e\sqrt{aa - 9ee}$ celle du troisieme, & ainsi de suite. Donc la somme de tous ces rectangles, ou l'espace CBMP $= e\sqrt{aa - ee} + e\sqrt{aa - 4ee} + e\sqrt{aa - 9ee} + e\sqrt{aa - 16ee} +$ &c.

Et si on développe toutes ces expressions, on aura CBMP $=$

$$ae(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.) - \frac{e^3}{2a}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \&c.) - \frac{e^5}{8a^3}(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \&c.) - \frac{e^7}{16a^5}(1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + \&c.) - \frac{5e^9}{128a^7}(1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + \&c.) - \&c.$$

Or le nombre des rectangles qui composent l'espace cherché, ou le nombre n des termes de ces suites de nombres, est la quantité infiniment grande $\frac{x}{e}$. Donc puisque n étant infini, on a généralement $1^m + 2^m + 3^m + 4^m \ldots +$

FIG. $n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$, on aura $1 + 1 + 1 + 1 + \&c. \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^0 = \frac{x}{e}$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^2 = \frac{\left(\frac{x}{e}\right)^3}{3} = \frac{x^3}{3e^3}$; $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \&c. \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^4 = \frac{x^5}{5e^5}$, &c.

Donc l'espace cherché CBMP $= ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ —, &c. série convergente & qui ne renferme que des quantités finies.

804. Si on fait dans cette suite $x = a$, on aura le quart de cercle AMBC. Il sera donc facile d'avoir le demi-segment AMP, auquel si on ajoute le triangle CPM $= \frac{x}{2}\sqrt{aa - xx}$, on aura le secteur AMC. Enfin, si on divise l'expression de ce secteur par $\frac{1}{2}a$, le quotient sera l'arc AM, & si on substitue dans l'expression de cet arc, $\sqrt{aa - yy}$ ou $a - \frac{yy}{2a} - \frac{y^4}{8a^3}$ — &c. à la place de x, on aura la série déja trouvée (709).

122. 805. Soit maintenant l'espace elliptique CBMP compris entre le petit demi-axe CB $= b$, l'ordonnée MP $= y$, l'abscisse CP $= x$, & l'arc elliptique MB. Puisqu'on a $y = \frac{b}{a}\sqrt{aa - xx}$, en raisonnant comme pour le cercle, on trouvera que cet espace $= \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \&c.\right)$. Or si on décrit une demi-circonférence ANB'a dont le rayon $= a$, on aura l'espace CBNP $= ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$ — &c. Donc CBMP : CB'NP :: $b : a$ :: AMP : ANP. D'où il suit que la surface de l'ellipse est à celle du cercle construit sur son grand axe comme diamètre :: $b . a$. Or la surface du cercle $= a^2c$, en supposant le rapport du diamètre à

la circonférence :: 1 : c. Donc la surface de l'ellipse entiere $=abc$, FIG.
c'est-à-dire, est égale à la surface d'un cercle dont le diamêtre seroit moyen proportionnel entre les axes de l'ellipse.

On voit aussi qu'un secteur quelconque SAM est au secteur circulaire correspondant SAN :: $b : a$, puisque les triangles SPM, SNP sont entr'eux :: PM : PN :: $b : a$.

806. Proposons-nous maintenant de quarrer l'espace paraboli- 123.
que AMP.

Si on nomme AP (x), PM (y), le paramêtre (p), e une portion infiniment petite de l'abscisse AP, on trouvera par le même raisonnement que ci-dessus, l'espace APM $=e\sqrt{pe}+e\sqrt{2pe}+$

$$e\sqrt{3pe}+e\sqrt{4pe}\ldots+e\sqrt{px}=e\sqrt{pe}\left(1^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\times e\sqrt{pe}=\tfrac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}x\sqrt{px}=\tfrac{2}{3}xy.$$

Donc l'espace parabolique AMP est les deux tiers du rectangle circonscrit APMN, & par conséquent l'espace AMN en est le tiers.

807. Il nous reste à trouver la quadrature de l'hyperbole. Or si 124.
on rapporte les coordonnées CP, PM(x,y) au petit axe CB, on aura

$y=\frac{a}{b}\sqrt{bb+xx}$, & en faisant le même calcul que dans le cercle,

on trouve que l'espace ACPM $=\frac{a}{b}\left(bx+\frac{x^3}{6b}-\frac{x^5}{40b^3}+\frac{x^7}{112b^5}\right.$

$\left.-\text{\&c.}\right)$. Il est donc facile d'avoir l'espace AMQ.

808. Si l'hyperbole est équilatere, alors $b=a$, & la série que

l'on vient de calculer se réduit à $bx+\frac{x^3}{6b}-\frac{x^5}{40b^3}+$ &c. Il y a

donc la même analogie entre l'hyperbole équilatere & une hyperbole quelconque, qu'entre le cercle & l'ellipse. Ensorte que si on avoit la quadrature d'une seule hyperbole, on auroit aussi-tôt celle de toutes les autres.

809. Soit à présent CQ l'asymptote de l'hyperbole AM, CD^2 125.
$=AD^2=m^2$ sa puissance, MP une ordonnée y à l'asymptote CQ, ou une parallele à l'autre asymptote CO, il s'agit de trouver la quadrature de l'espace asymptotique ADMP, en supposant d'abord l'angle fait par les asymptotes, droit.

Je fais DP $=x$, & j'imagine l'espace cherché décomposé en une infinité de petits rectangles dont les bases soient des portions

FIG. infiniment petites & égales de l'abſciſſe x. En nommant l'une de ces petites portions e, l'ordonnée correſpondante à la premiere au point D ſera $\frac{m^2}{m+e}$, & le premier rectangle aura pour expreſſion $\frac{em^2}{m+e}$, le ſecond $\frac{em^2}{m+2e}$, &c. Donc l'eſpace ADMP $= em^2 \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2e} + \frac{1}{m+3e} + \&c. \right)$. Et ſi on réduit en ſéries toutes ces fractions, on aura ADMP $= em \left(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.\right) - e^2 \left(1 + 2 + 3 + 4 + \&c. \ldots + \frac{x}{e}\right) + \frac{e^3}{m}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^2\right) - \&c. = em \times \frac{x}{e} - e^2 \times \frac{x^2}{2e^2} + \frac{e^3}{m} \times \frac{x^3}{3e^3} - \frac{e^4}{m^2} \times \frac{x^4}{4e^4} + \&c. = mx - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3m} - \frac{x^4}{4m^2} + \frac{x^5}{5m^3} - \&c. = m^2 \left(\frac{x}{m} - \frac{xx}{2mm} + \frac{x^3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4} + \&c.\right) = m^2 \, log. \left(1 + \frac{x}{m}\right) = m^2 \, log. \frac{m+x}{m}$. Donc ſi on fait CP $= z$, l'eſpace ADMP ſera égal à $m^2 \, log. \frac{z}{m}$; & ſi l'angle fait par les aſymptotes, au lieu d'être droit, étoit en général a, on auroit ADMP $= m^2 \, \mathit{ſin}\ a \, log. \frac{z}{m}$.

126. 810. Si l'hyperbole eſt équilatere, & ſi la puiſſance $= 1$, alors l'eſpace ADPM $= log.\ z$; c'eſt-à-dire, qu'il eſt le logarithme naturel de l'abſciſſe CP; & voilà pourquoi on appelle logarithmes hyperboliques ceux dont le module eſt 1.

Ce même eſpace ſeroit le logarithme tabulaire de l'abſciſſe CP, ſi l'angle des aſymptotes étoit de 25° 44′ 25″; car appellant A le module 0,43420448 &c. il faut que l'on ait $m^2 \, \mathit{ſin}\ a \, log \frac{z}{m} = A \, log\, z$; or cette équation ne peut avoir lieu que lorſque $m = 1$; & alors on a $\mathit{ſin}\ a = A = 0,43429448$ &c. qui dans les Tables des ſinus naturels répond à 25° 44′ 25″. Les logarithmes ordinaires représentent donc les aires asymptotiques d'une hyperbole dont la puissance est 1, & dont l'angle des asymptotes est tel que nous venons de le déterminer. FIG.

811. Si on prend sur l'asymptote d'une hyperbole quelconque une suite d'abscisses en progression géométrique $\div z \,.\, qz \,.\, q^2 z \,.\, q^3 z \,.$ &c. les aires correspondantes formeront la progression arithmétique $\div m^2 \sin a \log \frac{z}{m} \,.\, m^2 \sin a \log \frac{z}{m} + m^2 \sin a \log q \,.\, m^2 \sin a \log \frac{z}{m} + 2m^2 \sin a \log q \,.\, m^2 \sin a \log \frac{z}{m} + 3m^2 \sin a \log q \,.$ &c. Lors donc que les abscisses asymptotiques sont en progression géométrique, les aires correspondantes sont en progression arithmétique ; & puisque la progression des abscisses peut être continuée à l'infini, il suit que l'espace compris entre l'hyperbole & son asymptote est infiniment grand.

S'il falloit déterminer un trapeze hyperbolique ADNQ qui fût au trapeze ADPM dans le rapport de p à q, on nommeroit CP (z), CQ (x) ; & on auroit $m^2 \sin a \log \frac{z}{m} \,.\, m^2 \sin a \log \frac{x}{m} :: p \,.\, q :: \log \frac{z}{m} \,.\, \log \frac{x}{m}$; donc $q \log \frac{z}{m} = p \log \frac{x}{m}$, ou $\log \left(\frac{z}{m}\right)^q = \log \left(\frac{x}{m}\right)^p$; équation qui donne $x = \frac{z^{\frac{q}{p}}}{m^{\frac{q}{p}-1}} = z^{\frac{q}{p}} m^{\frac{p-q}{p}} = \sqrt[p]{z^q m^{p-q}}$.

DE QUELQUES AUTRES COURBES.

Parmi les courbes qui sont le plus en usage dans la Géométrie, les Sections coniques tiennent sans doute le premier rang : mais il en est plusieurs autres dont il est à propos de faire mention.

812. I°. La Conchoïde de Nicomede. Si par un point B pris à volonté hors d'une droite GH on mene des lignes BQM, BAD, 126.
&c. telles que leurs parties QM, AD, &c. soient égales, la courbe MDM′ qni passe par les points M, D, &c. se nomme *Conchoïde*.

FIG. Le point B en eſt le *Pole*, la ligne GH en eſt la *Directrice*; & ſi on prend au-deſſous de GH des parties égales Qm, Ad, &c. la courbe qui paſſera par les points m, d, &c. ainſi déterminés, ſera la conchoïde *inférieure* mdm', ou plutôt la partie inférieure de la même conchoïde.

813. Il ſuit de ſa conſtruction, 1.° que GH en eſt l'aſymptote; 2.° que dD en meſure la plus grande largeur, lorſque BA eſt perpendiculaire ſur GH. Mais comme BA peut être plus grande, ou plus petite, ou égale à dA, voyons quelle ſera la figure de la courbe dans ces trois cas.

126. Dans le premier, elle ſera telle que la repréſente la Figure
127. 126; dans le ſecond, elle aura un nœud $Bndn'$ comme dans la
& Figure 127, & alors on l'appelle conchoïde *nouée*. Dans le troi-
128. ſieme le nœud s'évanouit, & il ne reſte qu'un point de rebrouſſement en B, *fig. 128*.

814. Pour ſavoir ſi la conchoïde eſt du nombre des courbes algébriques, ſoit mené PM perpendiculairement ſur AP, & ſoit AD ou $QM = a$, $AB = b$, $PM = y$, $AP = x$; on aura $PQ \,.\, PM :: AQ \,.\, AB$, ou $\sqrt{aa - yy} \,.\, y :: x - \sqrt{aa - yy} \,.\, b$; donc $xy = (b + y)\sqrt{aa - yy}$; & c'eſt là l'équation aux coordonnées de la conchoïde ſupérieure. Le même calcul donne $xy = (b - y)\sqrt{aa - yy}$ pour l'inférieure. L'équation eſt encore la même pour la conchoïde à nœud. Cette courbe eſt donc algébrique, & en débaraſſant ſon équation du radical, on trouvera que c'eſt une ligne du quatrieme ordre, ou une courbe du troiſieme, laquelle a pour équation $y^4 \pm 2by^3 + (b^2 - a^2 + x^2)y^2 \pm 2a^2by = a^2b^2$.

129. On peut la décrire par l'interſection continuelle d'une regle BCM mobile autour du point B, & d'un cercle décrit du rayon $CM = a$, que l'on fera mouvoir le long de GH, de maniere que le centre C ſoit toujours ſur cette ligne. Il ſuffit pour cela que la regle paſſe conſtamment par le centre du cercle.

815. On peut même former ainſi une infinité de conchoïdes
130. différentes. Car ſi au lieu du cercle on fait mouvoir une courbe quelconque CM le long de GH, ſon interſection avec une regle BM mobile autour du point B, & aſſujettie à paſſer par un point fixe Q de la courbe CM, décrira une eſpece de conchoïde dont il eſt aiſé de trouver l'équation. En effet, ſi on mene MP & AB perpendiculaires ſur la directrice, & ſi on ſuppoſe $AP = x$, $PM = y$, $CP = z$, $CQ = a$, $AB = b$, on aura $PQ\,(z - a) \,.\, PM\,(y)$

$$:: AQ\,(x + a - z) \,.\, AB\,(b); \text{ d'où } z = a + \frac{xy}{b + y}.$$ Subſtituant donc cette valeur dans l'équation à la courbe CM, on aura celle de la conchoïde MD.

Par exemple, si la courbe CM est un cercle, dont Q soit le FIG.
centre, on a $yy = 2az - zz$, qui donne $xy = (b+y)\sqrt{aa-yy}$, pour l'équation à la conchoïde ordinaire.

816. Mais si la courbe mobile est une parabole dont l'équation soit $y^2 = pz$, alors $y^3 + by^2 - apy - apb = pxy$ devient l'équation de la conchoïde *parabolique* dont *Descartes* s'est servi pour résoudre une équation générale du sixieme degré. Voyez sa Géométrie, & les Sections coniques du *Marquis de l'Hôpital*.

817. II.° LA CISSOÏDE DE DIOCLÈS. Soit le cercle ANBn dont 131.
le diamêtre est AB, & dont QBq est tangente au point B. Si après avoir mené du point A des droites AQ à différens points de la tangente, on prend QM = AN, la courbe MAm qui passera par les points M, m ainsi déterminés se nomme *Cissoïde*.

Elle est composée, comme l'on voit, de deux parties semblables & égales AM, Am qui forment en A un point de rebroussement, & qui après avoir coupé la circonférence aux points C, c également éloignés de A & de B, s'écartent toutes les deux à l'infini, sans pouvoir jamais atteindre la tangente QBq, qui est par conséquent leur asymptote.

818. Pour trouver l'équation de la Cissoïde, je mene OM parallele à AP, & MP, NG perpendiculaires. Je fais AP = x, PM = y, & AB ou le diamêtre du cercle *générateur* = a. Puisque AN = MQ, j'ai AG = PB, & AG $(a-x)$. GN $(\sqrt{aa-xx})$ :: AP (x) :

PM $(y) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$; d'où $yy = \dfrac{x^3}{a-x}$, équation cherchée.

819. Or Cette équation fait voir, 1.° que la cissoïde est une courbe algébrique du second ordre. 2.° Qu'à chaque abscisse AP, répondent deux ordonnées égales PM, Pm, l'une positive, l'autre négative, & qu'ainsi la courbe a deux branches parfaitement égales & semblables. 3.° Que lorsque $x = 0$, y est aussi $= 0$; la courbe passe donc à l'origine des abscisses. 4.° Que si $x = \frac{1}{2}a$, alors $y = \pm \frac{1}{2}a$; c'est-à-dire, que les deux branches de la cissoïde coupent la circonférence en des points C, c également éloignés de A & de B. 5.° Que si $x = a$, y est infinie, & que par conséquent la tangente BQ est l'asymptote de cette courbe, comme nous l'avions déja conclu de sa description.

La conchoïde & la cissoïde furent employées par leurs inventeurs *Nicomede* & *Dioclès* à trouver la *Duplication* du cube, Probléme célebre parmi les anciens Géomêtres, mais qui n'a plus de célébrité parmi les nouveaux.

820. III.° LA LOGARITHMIQUE. Si après avoir pris un point 132.
A sur la droite indéfinie GH, on éleve des ordonnées PM qui aient pour logarithmes leurs abscisses AP, la courbe BMm qui

FIG. passe par les extrémités de ces ordonnées, s'appelle *Logarithmique*.

821. Soit donc AP $= x$, PM $= y$, A $=$ le module, $lx =$ le log. hyper. de x, $e =$ le nombre 2.7182818, dont le log. hyp. est 1; on aura $x = Aly = xle$, ou $y^{A} = e^{x}$, qui donne $y = e^{\frac{x}{A}}$, équation de la logarithmique.

Elle fait voir, 1.° que cette courbe est du nombre des transcendentes; 2.° que lorsque $x = 0$, y ou AB $= 1$; 3.° que si $x =$ AE $=$ AB $= 1$, y ou EF $= e^{\frac{1}{A}}$, & qu'ainsi en faisant EF $= a$, on aura toujours $y = a^{x}$; d'où il suit que si les abscisses forment la progression arithmétique $\div 1 . 2 . 3 . 4$. &c. les ordonnées formeront la progression géométrique $\div a^1 . a^2 . a^3 . a^4$ &c. La logarithmique s'étend donc à l'infini au-dessus de AP.

Mais si on prend sur AQ des abscisses négatives $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, &c. les ordonnées deviendront successivement $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, &c. c'est-à-dire, que la courbe a une branche infinie BO, qui s'approche de plus en plus de la directrice ou de l'axe GH, sans pouvoir jamais l'atteindre.

822. La propriété la plus remarquable de la logarithmique est que sa soutangente est toujours de la même grandeur. On le prouve avec la plus grande facilité par le calcul différentiel: voici, en attendant, une démonstration à peu près semblable.

Soit menée l'ordonnée mp infiniment proche de MP, & soit prolongé le petit côté Mm pour avoir la tangente MT. Cela posé, si on mene Mr parallele à l'axe, & si on nomme Pp (e), mr (i), on aura

$$x + e = A : l(y+i) = Aly + A\left(\frac{i}{y} - \frac{i^2}{2y^2} + \frac{i^3}{3y^3} - \&c.\right);$$ donc

puisque $x = Aly$, il faut que $e = \frac{Ai}{y}\left(1 - \frac{i}{2y} + \frac{i^2}{3y^2} - \&c.\right)$. Mais la quantité i étant infiniment petite, ses puissances i^2, i^3, &c. doivent être rejettées; on a donc $\frac{ey}{i}$ ou PT $=$ A. *La soutangente est donc toujours égale au module*; & puisqu'en général $x = Aly$, il est clair que dans deux logarithmiques différentes, les abscisses des mêmes ordonnées sont comme les soutangentes, ou, ce qui revient au même, les logarithmes des mêmes nombres dans différents systêmes sont entr'eux comme les modules: on peut voir dans un petit traité de *Keill* sur la logarithmique, comment il en a déduit les regles du calcul des logarithmes. 133.

823. IV.° LA CYCLOÏDE. Si un cercle AG roule sur une droite Aa, jusqu'à ce que le point qui touchoit d'abord cette droite en A, la touche encore en *a*, ce point de contact décrira une courbe appellée *Cycloïde* ou *Roulette*. Les travaux de *Paschal*, d'*Hughens*, des *Bernoulli*, &c. l'ont rendue fort célebre. FIG.

Ce sera une cycloïde *ordinaire*, lorsque le cercle générateur n'aura d'autre mouvement que celui de sa révolution. Mais s'il a 134.
de plus un mouvement de translation dans le même sens, le point A décrira une cycloïde *accourcie*. Si ce mouvement est en sens 135.
contraire, la cycloïde sera *allongée*.

Or il est clair que dans la cycloïde ordinaire la *Base* Aa est égale à la circonférence du cercle générateur ; qu'elle est plus courte dans la cycloïde accourcie, & qu'elle est plus grande dans la cycloïde allongée.

Le diamêtre BC du cercle générateur se nomme l'*Axe* de la cycloïde, lorsqu'il est perpendiculaire au milieu de sa base. Le point B en est le *Sommet* : ainsi BC est sa plus grande hauteur.

824. Cela posé, menons MP perpendiculaire sur BC, & tirons les cordes égales MF & OC ; nous aurons FC = MO ; donc puis- 133.
que $FC = AC - AF = BOC - FKM = BOC - OLC = BIO$, il est clair que la partie MO de l'ordonnée MP est toujours égale à l'arc correspondant BIO du cercle générateur. D'ailleurs l'autre partie OP est le sinus du même arc ; donc appellant MP (y), BIO (u), on aura pour l'équation à la cycloïde ordinaire $y = u + \mathit{sin}\, u$.

Et pour la rendre plus générale, on fera $MO = \frac{b}{a} BIO$, qui convient à la cycloïde ordinaire, ou accourcie ou allongée, suivant que b est égal ou plus petit, ou plus grand que a ; ensorte que l'on aura $y = \frac{b}{a} u + \mathit{sin}\, u$. La cycloïde est donc une courbe transcendente.

825. Pour mener au point M la tangente MT, on imaginera 136.
l'arc infiniment petit M*m*, l'ordonnée *mp*, & la petite ligne M*r* parallele à la tangente OT au point O de la circonférence du cercle générateur. On aura donc $MO = \frac{b}{a} BIO$, & $mo = \frac{b}{a} BIo$, ce qui donne * $mr = \frac{b}{a} Oo$. D'ailleurs par les triangles semblables on a

$$mr \,.\, Mr :: MO \,.\, OT = \frac{MO \times Mr}{\frac{b}{a} Oo} = \frac{a}{b} MO = BIO.$$ Il faut donc

* Observant que $mr = mo - MO$, & $Oo = BIo - BIO$.

FIG. prendre sur la tangente au cercle générateur la partie OT = BIO, & mener par les points M, T la ligne MT qui sera la tangente de la cycloïde, soit ordinaire, soit accourcie, soit allongée. Dans la premiere cependant la construction peut être simplifiée *; car puisque MO = BIO = OT, on a l'angle TOP, ou 2BOP = 2TMO; c'est-à-dire, *qu'une droite* MT *parallele à la corde* OB *est nécessairement tangente au point* M *de la cycloïde ordinaire.*

826. Maintenant soient menées la ligne indéfinie BQQ′ perpendiculaire à l'axe BC, & Qq, Qm paralleles au même axe; on aura par les triangles semblables, $mq \cdot Mq$, ou $Q'Q \cdot Pp :: OP \cdot BP$; donc $Q'Q \times BP = Pp \times OP$, ou $MmQ'Q = PpoO$; & par conséquent l'espace circulaire BIOP = BMQ, & le demi-cercle BOCB = BDAB. Or le rectangle AB dans la cycloïde ordinaire est quadruple de ce demi-cercle; donc *l'espace cycloïdal est triple du cercle générateur.*

827. Si au lieu de prendre un point de la circonférence du cercle pour décrire la cycloïde, on l'eût pris au-dedans ou au-dehors du cercle, alors la courbe décrite eût été une autre espece de cycloïde; & si au lieu de faire rouler un cercle sur une droite, on l'eût fait rouler sur la circonférence d'un autre cercle, alors la courbe décrite par un de ses points eût été du genre de celles que l'on appelle *Epycycloïdes.* Nous ne pouvons qu'indiquer tous ces objets.

137. 828. V.° LA QUADRATRICE DE DINOSTRATE. Supposons qu'une droite AG se meuve uniformément & parallélement à elle-même le long du diametre Aa, & qu'au même instant qu'elle part du point A, le rayon AC tourne uniformément autour du centre C vers le point E, de maniere qu'il se confonde avec CE au moment où la droite AG s'y confondra aussi, & nous aurons par l'intersection continuelle de ces deux lignes une courbe AMD, appellée *Quadratrice.*

829. Il suit de cette description qu'une espace quelconque AP parcouru par la droite AG est à l'arc circulaire AB décrit dans le même temps par l'extrêmité du rayon, comme un autre espace AC parcouru par cette droite est à l'arc correspondant ABE décrit par le rayon. Faisant donc $AP = x$, $PM = y$, $AB = u$, $AC = a$, $ABE = 90° = c$, on aura, 1.° $x \cdot a :: u \cdot c ::$ l'angle ACB . l'angle ACE; donc $u = \frac{cx}{a}$; 2.° CP . PM :: CA . AT, ou $a - x \cdot y :: a \cdot \text{tang}\, u$; donc $y = \frac{a - x}{a}\, \text{tang}\, \frac{cx}{a}$; & ce sera l'équation aux

* Observez que l'angle TOP = TOB + BOP, & BOP = OBQ; mais TOB & OBQ sont manifestement égaux, étant chaqu'un mesurés par la moitié de l'arc OB.

coordonnées de la quadratrice, lorſque le point A ſera l'origine des abſciſſes. FIG.

830. Mais ſi on met leur origine au centre C, en faiſant CP = x, on aura $y = \frac{x}{a}\, tang \left(c - \frac{cx}{a} \right) = (697)\, \frac{x}{a}\, cot\, \frac{cx}{a} = (703)$

$$\frac{x\left(a - \frac{c^2x^2}{2a^3} + \frac{c^4x^4}{2.3.4.a^7} - \&c.\right)}{\frac{cx}{a} - \frac{c^3x^3}{2.3.a^5} + \frac{c^3x^5}{2.3.4.5a^9} - \&c} = \frac{a - \frac{c^2x^2}{2a^3} + \frac{c^4x^4}{2.3.4.a^7} - \&c.}{\frac{c}{a} - \frac{c^3x^2}{2.3.a^5} + \frac{c^5x^4}{2.3.4.5.a^9} - \&c.}$$

Donc lorſque x ſera zéro, y deviendra la *baſe* CD, & ſon expreſſion ſera $\frac{a^2}{c}$; d'où il ſuit que ſi la baſe de la quadratrice étoit une fois connue, on auroit auſſi-tôt la quadrature du cercle. C'eſt ce qui lui a fait donner le nom de quadratrice.

831. Si on décrit du centre C & du rayon CD le quart de cercle DLK, ſa longueur ſera égale au rayon CA; puiſque par la nature de la quadratrice on a $\frac{aa}{c} . a ::$ DLK $. c$, proportion qui donne DLK $= a$. On aura auſſi PC = l'arc LD, en faiſant $\frac{aa}{c} . a ::$ AB ou KL $. u$; d'où KL $= x =$ AP, & PC = LD.

832. Prenons maintenant des abſciſſes négatives AP′, & ſubſtituons leur valeur dans la premiere équation. Elle deviendra $y = -\frac{(a+x)}{a}\, tang\, \frac{cx}{a}$, ce qui donne des ordonnées négatives P′M′. Ainſi la courbe a une branche AM′, dont on trouvera que la droite QN menée à la diſtance AQ $= a$ eſt l'aſymptote, en ſuppoſant y infinie; car alors $tang\, \frac{cx}{a} = \infty$, & par conſéquent $x = a$.

Si après s'être confondus avec CE, la droite AG & le rayon CA continuent de ſe mouvoir l'une en deſcendant vers a l'autre en tournant dans le même ſens, il eſt viſible que leur interſection décrira la partie Da de la quadratrice.

Il eſt viſible auſſi que ſi on pouvoit décrire géométriquement

FIG. cette courbe, on auroit immédiatement tous les angles d'un nombre donné de degrés, par exemple, de $\frac{1}{m}$ 90°. Il n'y auroit pour cela, qu'à diviser AC au point P, de sorte que AP fût à AC :: 1 : m; car alors menant l'ordonnée PM, & le rayon CB, l'angle ACB seroit $= \frac{1}{m}$ 90°.

138. 833. VI.° LA SPIRALE D'ARCHIMEDE. On appelle ainsi la courbe CKMA décrite par un point C qui se meut uniformément le long du rayon CA, pendant la révolution uniforme de ce rayon autour du centre C, de maniere que lorsque le rayon a parcouru la circonférence entiere, ce point se trouve confondu avec le point A.

Si après avoir prolongé le rayon CA on lui fait faire une seconde révolution, le point C continuant de s'éloigner de l'origine de son mouvement, décrira une *seconde Spirale*, puis une *troisieme*, & ainsi de suite, ou plutôt toutes ces spirales ne feront qu'une seule & même courbe, dont les révolutions peuvent se multiplier à l'infini.

834. Cela posé, l'ordonnée CM (y) est au rayon CA (a) :: l'arc ABN qui est l'abscisse correspondante, & que j'appelle x, est à la circonférence entiere ABNA, que j'appelle c. On a donc $y = \frac{ax}{c}$ pour l'équation à la spirale d'*Archimede*. D'où il suit, 1.° que c'est une courbe transcendente; 2.° Qu'elle passe par le centre du cercle générateur; 3.° Qu'elle passe aussi par le point A; 4.° Que si on fait $x = c + x'$, l'équation deviendra $y = a + \frac{ax'}{c}$, & qu'ainsi en donnant à x' les valeurs qui sont entre o & c, la spirale fera une seconde révolution qu'elle terminera à l'extrêmité d'un rayon double du premier. Elle en fera une troisieme, une quatrieme, &c. si on fait $x = 2c + x''$, $x = 3c + x'''$, &c.

835. Pour mener à son point M la tangente MT, on imaginera le rayon Cmn infiniment proche du rayon CMN, & après avoir décrit un cercle du rayon CM, on menera CT perpendiculaire à CM; puis on aura par les triangles semblables Mmr, MTC, mr . Mr :: CM . CT $= \frac{CM \times Mr}{mr}$. Or CM $= \frac{a}{c}$ ABN, & Cm=

FIG.

$\frac{a}{c}$ ABn. Donc Cm — CM, ou $mr = \frac{a}{c}$ Nn; & puifque $a \,.\, y$ ::

Nn . Mr, on aura $\frac{Mr}{mr} = \frac{y \,.\, Nn}{a \,.\, \frac{a}{c} Nn} = \frac{cy}{aa} = \frac{x}{a}$, & la foutangente CT $= \frac{cy^2}{a^2} = \frac{xy}{a}$; mais $a \,.\, y :: x \,.$ l'arc OQM $= \frac{xy}{a}$; donc la foutangente CT doit être prife égale à l'arc circulaire OQM.

836. VII. La Spirale parabolique. Si on prend fur un rayon quelconque CN une partie CM moyenne proportionnelle entre l'arc AN & une ligne donnée p, la courbe qui paffera par tous les points M ainfi déterminés, fera la *Spirale parabolique*. 139.

Soit donc AN $= x$, NM $= y$, AC $= a$, & on aura $y = a - \sqrt{px}$, équation qui en fubftituant $c + x$, $2c + x$, &c. au lieu de x, fait voir que cette courbe peut faire une infinité de révolutions autour du centre C, & que par conféquent elle eft du nombre des fpirales.

837. VIII. La Spirale hyperbolique. Je fuppofe que du point C pris pour centre fur l'indéfinie CP, on décrive des arcs AG, QM, PO, &c. égaux entr'eux, & que par leurs extrémités G, M, O, &c. on faffe paffer une courbe CKGMO. Ce fera une *Spirale hyperbolique*. 140.

Il eft aifé de voir que fi on éleve une droite BR parallele à l'axe CP, & qui en foit éloignée d'une quantité CB $=$ AG $=$ QM $=$ PO, &c. cette droite fera l'afymptote de la fpirale hyperbolique, parce qu'elle ne peut la rencontrer que lorfque le rayon CM eft infini.

838. Soit le rayon CA $= a$, AN $= x$, CM $= y$, AG $=$ QM, &c. $= b$; on aura $x \,.\, b :: a \,.\, y$, qui donne $xy = ab$, équation femblable à celle de l'hyperbole entre les afymptotes. Or fi on appelle c la circonférence dont le rayon $= a$, & fi on fubftitue à x des valeurs $c + x$, $2c + x \ldots . mc + x$, on aura fucceffivement $y = \frac{ab}{c + x}$, $y = \frac{ab}{2c + x} \ldots . y = \frac{ab}{mc + x}$. D'où on voit que plus l'abfciffe eft grande, plus l'ordonnée eft petite, & que celle-ci ne devient nulle que lorfque m eft infini. La fpirale hyperbolique fait donc une infinité de révolutions autour de fon centre, avant que d'y arriver.

839. Cherchons maintenant la valeur de la foutangente CT, & pour cela imaginons la ligne Crm infiniment proche de CM, &

FIG. 140. l'arc mq; menons ensuite CT perpendiculaire à CM, qui rencontre en T la tangente TM, & nommons $Qq = rm = i$; nous aurons $y+i \,.\, b :: y \,.\, Qr = \frac{by}{y+i}$. Donc $rM = b - \frac{by}{y+i} = \frac{bi}{y+i}$; or $rm \,.\, rM :: Cm \,.\, CT$; donc $i \,.\, \frac{bi}{y+i} :: y+i \,.\, CT = b$. Ainsi *dans la spirale hyperbolique la soutangente est constante*, comme dans la logarithmique (822).

141. 840. IX.° LA SPIRALE LOGARITHMIQUE. On nomme *Spirale logarithmique* la courbe qui coupe sous un même angle tous les rayons CM tirés de son centre C, ensorte que la tangente MT fait toujours un angle égal avec le rayon CM, de quelque côté qu'on le suppose. Cette courbe a plusieurs belles propriétés que l'on ne peut bien détailler que par les méthodes du calcul différentiel & intégral dont nous allons faire connoître les principes.

PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Notions Préliminaires.

842. UN corps qui se meut avec une vîtesse toujours égale; doit nécessairement parcourir des espaces égaux en temps égaux : mais si sa vîtesse varie à chaque instant, les espaces qu'il parcourra varieront de même.

Chacun de ces points sera donc parcouru avec une vîtesse qui lui sera propre, & qui dépendra toujours de la loi suivant laquelle ce mouvement variera. Or si l'on peut assujettir à un calcul exact les rapports de ces différentes vîtesses, l'on pourra déterminer celles qui conviennent à chaque point de l'espace parcouru.

Appliquons maintenant à une variable quelconque x ce qui vient d'être dit du mouvement en particulier, & supposons que cette variable recevant dans un temps déterminé un accroissement fini e, devienne, après l'avoir reçu, $x+e$, on demande quels doivent être les accroissemens correspondants de toutes ses fonctions?

842. D'abord il est clair que si x devient $x+e$, son quarré xx deviendra $xx+2ex+ee$; ainsi le rapport de ces deux accroissemens sera $\frac{1}{2x+e}$. Mais si e diminue, ce rapport augmentera, &

FIG.

il approchera de plus en plus de celui de $\frac{1}{2x}$. Cependant il ne lui deviendra égal qu'au moment où e s'évanouira. Le rapport de $\frac{1}{2x}$ est donc la *limite* de ceux que les accroissemens finis de x & de xx peuvent avoir entr'eux. On trouvera de même que la limite de ceux de x & de x^n est $\frac{1}{nx^{n-1}}$.

Or le calcul différentiel a pour objet de déterminer ces limites dans tous les cas. Voyez ce que M. *d'Alembert* a écrit sur cette matiere ; vous y trouverez les vraies notions de ce calcul. S'il reste encore des difficultés, c'est qu'elles sont inséparables des idées abstraites de limite & d'infini, c'est que pour entendre la définition de ce calcul, il faut déja y avoir fait des progrès.

Mais puisqu'on ne peut avoir la limite de ces rapports, qu'en supposant nuls les accroissemens que l'on compare, ne semble-t-il pas que leur comparaison devient alors impossible ? Les Géométres se sont partagés sur la maniere de résoudre cette difficulté. Les uns ont dit que ces accroissemens étoient toujours quelque chose de réel, & au défaut d'expressions plus claires, ils les ont appellés des *incomparables, des infiniment petits*, &c. Enfin des quantités plus petites que toute autre quantité, quelque petite qu'on la supposât.

Les autres ont persisté à dire que ces accroissemens qui d'abord étoient finis, diminuoient de plus en plus en conservant toujours un certain rapport, dont on cherchoit la limite, & qu'alors ils étoient vraiment nuls. Pour éclaircir & confirmer en même temps leurs idées, ils ont eu recours aux exemples. En voici un.

843. Soit proposé de mener une tangente au point M de la courbe AMm, ou, ce qui revient au même, de déterminer la soutangente PT. 142.

On supposera que l'abscisse AP $= x$ croit d'une quantité finie P$p = e$; on menera l'ordonnée PM $= y$, & on déterminera l'ordonnée mp, en substituant $x + e$ au lieu de x dans l'équation de la courbe. Quelle que soit sa valeur, on pourra toujours la représenter par $y + Pe + Qe^2 + Re^3 +$ &c. (P, Q, R, &c. étant des fonctions de x) ; on aura donc pour l'expression de rm, accroissement correspondant de l'ordonnée PM, la quantité $Pe + Qe^2 + Re^3 +$ &c. Cela posé, soient menées la sécante SMm, & la ligne Mr parallele & égale à Pp ; on aura PS $= \frac{y}{P + Qe + Re^2 + \&c}$. Rapprochons maintenant le point p du point P ; le point m s'approchera du point M, & le point S du point T : mais on aura toujours $PS = \frac{y}{P + Qe + Re^2 + \&c}$. Si la quantité P$p$ diminue encore & devient très-petite, il ne s'en faudra que de très-peu que M se confonde avec M, & que la sécante ne devienne tangente. Mais si e s'évanouit, le rapport déja trouvé se réduit à $\frac{y}{P}$, PS devient PT, Sm devient TM qui n'a plus que le point M de commun avec la courbe, & la soutangente est déterminée par cette limite.

PAR EX. Si AMm est une parabole, on substituera $x + e$ à x dans l'équation $y = \sqrt{px}$, & on aura $y = p^{\frac{1}{2}} (x + e)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \cdot p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} e - \&c.$ qui donne $P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{x}}$; d'où $PT = \frac{\sqrt{px}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}} = 2x$; comme cela doit être.

Or dans ce procédé il n'y a rien que de très-exact, & il est aisé de voir cependant qu'il suppose les accroissemens de l'abscisse & de l'ordonnée réduits à zéro. Mais pour suivre dans tous les cas un pareil procédé, il faudroit beaucoup d'adresse, & les plus habiles s'y sont quelquefois trompés.

844. MM. Leibnitz & Bernoulli envisagerent la chose sous un point de vue purement métaphysique, & supposant qu'une variable x croissoit d'une quantité infiniment petite qu'ils appellerent dx, ils chercherent quels devoient être les accroissemens de ses autres fonctions. xx, par exemple, devenant alors $x^2 + 2xdx + dxdx$, ils rejetterent $dxdx$ comme un infiniment petit du second ordre, dont on ne devoit tenir aucun compte, & ils trouverent que la différence de xx à $xx + 2xdx$ étant $2xdx$, l'accroissement correspondant du quarré de la variable étoit le double du produit de cette variable par son accroissement. Ils nommerent calcul *différentiel* la méthode de déterminer ces différences dans tous les cas.

Newton, ce rigide observateur des préceptes de l'ancienne Géométrie, rappelloit tout aux rapports des lignes & des figures. Euclide avoit déja conçu la ligne comme décrite par le mouvement du point (*linea est fluctus puncti*, avoit-il dit) ; & Newton concevant de même que tout ce qui croit ou diminue dans la nature, reçoit ces accroissemens ou ces diminutions par le mouvement

ment continuel d'un de ses éléments, appella calcul des *fluxions*, la méthode qu'il inventa pour déterminer les rapports de ces variations ; elle ne différe pas au fonds de celle de M. Leibnitz & Bernoulli. Ce que les autres appellerent *variables*, il l'appella *fluentes* ; & ce que les aurres désignerent par dx, il le désigna par un point mis sur x, ensorte que $\dot{x}$ ou dx signifient la même chose. Mais Newton ne se permit point de considérer dx indépendamment de quelqu'autre différentielle. C'est par cette raison qu'il ne différentia que des équations qui expriment toujours le rapport de quelques fonctions d'une variable avec quelque fonction d'une autre variable.

Au reste, il y a un avantage à se servir de la lettre d au lieu d'un point pour marquer la différentielle ou la fluxion d'une variable, en ce qu'elle la fait mieux reconnoître parmi d'autres quantités.

L'accord singulier qu'il y eut toujours entre les résultats de ces grands Géomêtres étonna Newton lui-même ; car il étoit persuadé que les principes dont Leibnitz & Bernoulli étoient partis, péchoient contre la rigueur géométrique, & que ce n'étoit qu'en corrigeant une premiere erreur par une seconde qu'ils avoient trouvé la vérité. Voyez à ce sujet une note de M. *De la Grange* dans les *Mélanges de la Société Royale de Turin*, *an.* 1760 - 1761.

On a beaucoup disputé sur la métaphysique du Calcul différentiel, & il faut convenir qu'elle prête à la chicane. Nous allons donner les regles de ce calcul, comme s'il étoit fondé sur des principes unanimement admis, sans nous embarrasser aujourd'hui des difficultés qu'on peut leur opposer. On n'auroit point établi les regles du mouvement, si on se fût arrêté aux objections que faisoit *Zénon* contre le mouvement.

845. Non-seulement les quantités variables ont pour différentielles ou pour fluxions des infiniment petits selon les uns, des accroissemens nuls selon les autres, mais ces *premieres* différences ont aussi leurs différentielles, que l'on nomme différences *secondes*, & qui à leur tour ont des différences *troisiemes*, & ainsi de suite. ddx, $dddx$, ou d^2x, d^3x, ou bien $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ sont les différences seconde & troisieme de x.

2.° Ces dernieres différences doivent être négligées suivant tous les Géomêtres, lorsqu'elles sont partie d'un calcul où les premieres se trouvent. Il n'y a pas d'inconvénient, disent les uns, puisque ce sont des quantités infiniment petites, même par rapport à celles d'un dégré moindre. Cette omission ne peut être sujette à erreur, disent les autres, puisqu'elle n'a point pour objet des quantités réelles : d'autres ajoutent : ceci n'est pas une omission ; on doit négliger ces quantités, parce qu'elles sont d'un ordre différent de celles dont on a à s'occuper, & que conséquemment elles ne peuvent en augmenter ni la somme ni la différence. Ainsi ils s'accordent tous à dire que $dx + dxdx = dx$, que $ddx + dddx = ddx$; &c.

3.° Les différentielles du même degré, quoique infiniment petites, ou quoique nulles, ne sont pourtant pas égales; mais elles ont des rapports dépendans de ceux des quantités qui les ont produites; & c'est la détermination de ces rapports, encore une fois, qui fait l'objet du calcul différentiel.

Si on demande de nouveau quel rapport il peut y avoir entre dx & dy, dans la supposition que les différentielles soient nulles, il est aisé de faire voir qu'il y en a un, & en attendant que nous enseignions la maniere d'en trouver l'expression, soit $\frac{aa - xx}{a - x}$; il est certain, que $a + x$ exprime la valeur de cette fraction, quelle que soit celle de x; mais si $x = a$, la fraction se réduit à $\frac{0}{0}$, & le quotient devient $2a$. Il n'est pas rare de trouver ces sortes de fractions dont le numérateur & le dénominateur s'évanouissent en même temps, & qui cependant ont des valeurs bien différentes.

4.° On peut regarder une quantité infiniment petite comme le quotient d'une quantité finie divisée par une quantité infiniment grande. dx, par exemple, peut être regardée comme le résultat de $\frac{x}{\infty}$, & dy comme celui de $\frac{y}{\infty}$; on aura donc $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$.

5.° Si on suppose réellement infinie la quantité qui divise, le quotient qui est toujours en raison inverse du diviseur doit être vraiment nul, ce qui donne $0 = \frac{x}{\infty}$, ou $0 \times \infty = x$; d'où il suit que zéro, multiplié par une quantité infinie, peut être égal indifféremment à toute sorte de quantités finies, & réciproquement, que toute quantité finie divisée par zéro a pour quotient l'infini.

6.° S'il pouvoit y avoir une quantité infinie, l'addition ou la soustraction d'aucune quantité finie ne pourroient l'augmenter ni la diminuer. Ainsi $\infty + 1 = \infty + 2 = \infty - 100 = \infty - a + b$, &c.

Regles du Calcul Différentiel.

846. Si les regles prescrites par *Leibnitz*, pour trouver les différences des variables, semblent moins rigoureuses que celles de Newton, il faut avouer qu'elles sont plus faciles à saisir. Les infiniment petits une fois admis, & leur subordination établie, le reste va de suite. Voici donc ces regles.

Soit d'abord $y = ax$; on supposera que x reçoit un accroissement infiniment petit désigné par dx, y en recevra donc un aussi que nous désignerons par dy, & nous aurons $y + dy = ax + adx$, d'où $dy = adx$; c'est la différentielle de l'équation proposée. Elle eût été la même, s'il y eût eu des constantes non affectées de variables; car *lee constantes n'ont point de différentielle.* Ainsi $b + y = ax - c$ donne également $dy = adx$.

847. *Lors donc que les variables ne passent pas le premier degré, substituez leurs différences, effacez les termes constans, & vous aurez les différentielles des quantités proposées.* S'il falloit, par exemple, différentier $bx + cy - a = \frac{m}{n} z + f$, vous écririez $bdx + cdy = \frac{m}{n} dz$.

Mais s'il entre d'autres puissances des variables dans la qnantité proposée, si on a, par exemple, $y = x^m$, alors en supposant que x devient $x + dx$, on a $y + dy = (x + dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m.m-1}{2} x^{m-2}dx^2 +$ &c. & puisque dx^2, dx^3, s'évanouissent par rapport à dx, reste $dy = mx^{m-1}dx$; donc si $m = 2$, $dy = 2xdx$; si $m = 3$, $dy = 3x^2dx$; &c.

848. En général, *toutes les fois que la variable est élevée à quelqu'une de ses puissances, diminuez son exposant d'une unité, & multipliez-la ensuite par l'exposant qu'elle avoit d'abord, & par sa différentielle.*

On auroit pu déduire cette regle par induction, sans y employer la formule du binome, & alors on eût trouvé cette formule même avec plus de facilité que par l'Algebre ordinaire. Supposons en effet que l'on demande la valeur générale $(1 + z)^m$. Il est clair qu'elle doit reufermer l'unité, avec toutes les puissances successives de z jusqu'à sa puissance m. On peut donc la représenter en général par $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c. Cela posé, différentions en suivant la regle précédente, & nous aurons $m(1 + z)^{m-1}dz = Adz + 2Bzdz + 3Cz^2dz$, qui en divisant par dz se réduit à $m(1 + z)^{m-1} = A + 2Bz + 3Cz^2 +$ &c.

Or cette équation doit avoir lieu quelle que soit la valeur de z; supposons-la donc $=0$; alors $m = A$; donc $m(1+z)^{m-1} = m + 2Bz + 3Cz^2 +$ &c. Différentions de nouveau, & divisons ensuite par dz; il viendra $m.m-1(1+z)^{m-2} = 2B + 2.3Cz + 3.4Dz^2 +$ &c: soit $z=0$, donc $B = \frac{m.m-1}{2}$, & $m.m-1(1+z)^{m-2} = m.m-1 + 2.3Cz +$ &c. Le même calcul donnera $C = \frac{m.m-1.m-2}{2.3}$, & ainsi des autres coefficiens indéterminés D, E, &c. On aura donc $(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m.m-1}{2}z^2 +$ &c. & $(a+b)^m$, ou $a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m\left(1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m.m-1}{2}.\frac{b^2}{a^2} + \text{\&c.}\right) = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2 +$ &c. Revenons aux différentielles.

Toutes les fois qu'on aura des variables de cette forme y^n, z^p, &c. à différentier, la formule déja trouvée pour la différentielle de x^m donnera immédiatement celles de ces variables; il n'y aura qu'à substituer. Si l'on avoit, par exemple, $y^2 = px$, on trouveroit $2ydy = pdx$, & si l'on avoit $x^2 + y^2 = a^2$, la différentielle seroit $2xdx + 2ydy = 0$. Remarquez que la lettre d mise avant une quantité indique qu'il faut la différentier; ainsi $d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$; $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, &c.

849. Mais si les deux variables x & y se se trouvent multipliées l'une par l'autre, alors $d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy + dxdy = ydx + xdy$, parce que $dxdy$ s'évanouit.

De même $d(xyz) = zd(xy) + xydz = xydz + xzdy + yzdx$; $d(uxyz) = yzd(ux) + uxd(yz) = uxydz + uxzdy + uyzdx + xyzdu$. Donc en général, *pour différentier le produit de tant de variables qu'on voudra, il n'en faut différentier qu'une à la fois, comme si toutes les autres étoient constantes; & après avoir fait la même chose pour chacune, il faut rassembler toutes ces différentielles.*

Soit, par ex. la quantité x^3y. Je fais varier y, & j'ai x^3dy; je fais varier x, & j'ai $3yx^2dx$. Donc $d(x^3y) = x^3dy + 3yx^2dx$. De même $d(x^2y^3z^4) = 3x^2z^4y^2dy + 4x^2y^3z^3dz + 2xy^3z^4dx$.

850. Soit maintenant la fraction $\frac{x}{y}$; je l'écris ainsi xy^{-1}, & en

différentiant j'ai $d\left(\frac{x}{y}\right) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$. Donc *pour différentier une fraction quelconque, il faut*, 1.° *multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur.* 2.° *Multiplier le numérateur par la différentielle du dénominateur.* 3.° *Retrancher le dernier produit du premier, & diviser le reste par le quarré du dénominateur.*

Avec ces regles seules il n'est pas de quantité algébrique qu'on ne puisse différentier. Nous en allons parcourir quelques-unes.

I. Soit $x = \frac{1}{y}$, on aura $dx = d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{yy}$.

II. Soit $x = \sqrt{qy + yy} = (qy + yy)^{\frac{1}{2}}$, on aura $dx = \frac{1}{2}(qy + yy)^{\frac{1}{2}-1} d(qy + yy) = \frac{(\frac{1}{2}q + y)dy}{\sqrt{qy + yy}}$.

III. Soit $x = (a + by + cyy)^m$, on aura $dx = m(a + by + cy^2)^{m-1}(b + 2cy)dy$.

IV. Si $y = \sqrt[n]{(ax + bxx + cx^3)m}$, $dy = \frac{m}{n}(ax + bxx + cx^3)^{\frac{m}{n}-1}.(a + 2bx + 3cx^2)dx$.

V. Soit $z = \frac{x}{a^2(x + \sqrt{aa + xx})^{-1}} = \frac{x}{aa}(x + \sqrt{aa + xx})$, on aura $dz = \frac{2xdx}{aa} + \frac{dx}{aa}\sqrt{aa + xx} + \frac{x^2dx}{aa\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{2xdx}{aa} + \frac{aadx + 2xxdx}{aa\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Des différences secondes, troisiemes, &c.

851. La différence seconde d'une quantité est la différentielle de sa premiere différence. La différence troisieme est la différentielle de la seconde, & ainsi de suite. Or nous avons déja dit que

ddx ou d^2x ſignifioit la différence ſeconde de x, que d^3x ou $dddx$ marquoit la troiſieme, &c. Le quarré de la différentielle dx s'écrit ainſi, dx^2, & ſa puiſſance m, dx^m, &c. Il ne faut pas confondre $d\,(x^m)$ avec dx^m. $d\,(x^m)$ déſigne la premiere différence de x^m que nous avons dit être $mx^{m-1}dx$. Mais dx^m déſigne la puiſſance m de dx. $dy^2 = dydy$. Il ne faut pas auſſi confondre dy^2 avec ddy. Cette derniere expreſſion ſignifie la différence ſeconde de y. D'après ce que nous venons de dire ſur les différences premieres, il eſt facile d'avoir les différences ſecondes, &c. Soit x^2 dont on demande la différence ſeconde. Puiſque la premiere eſt $2xdx$, la ſeconde ſera $2dxdx + 2xddx = 2xddx + 2dx^2$. De même, puiſque $d\,(x^m) = mx^{m-1}dx$, on a $dd\,(x^m) = mx^{m-1}ddx + m \,.\, m-1 \,.\, x^{m-2}dx^2$. On a auſſi $d\,(xy) = xdy + ydx$; donc $dd\,(xy) = xddy + yddx + 2dydx$. De ce que $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$, on tire $dd\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ddx}{y} - \frac{dxdy}{yy} - \frac{xddy}{yy} - \frac{dxdy}{yy} + \frac{2xdy^2}{y^3} = \frac{2xdy^2}{y^3} + \frac{ddx}{y} - \frac{xddy}{yy} - \frac{2dxdy}{yy} = \frac{2xdy^2 + y^2ddx - xyddy - 2ydxdy}{y^3}$, & ainſi des autres.

On voit que par les mêmes principes on peut trouver les différences troiſiemes, quatriemes, &c. & en général les différentielles de toutes ſortes de quantités affectées de dx & de dy. Par exemple, la différentielle de ydx eſt $yddx + dydx$, celle de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, eſt $\frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, celle de $\frac{ydx}{dy}$, eſt $dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}$, celle de la quantité infiniment grande $\frac{a}{dx}$, eſt $-\frac{addx}{dx^2}$, &c. &c.

852. Lorſqu'on cherche les ſecondes différences de pluſieurs variables, on ſuppoſe communément une des premieres différences conſtante, quelquefois même on en ſuppoſe deux; c'eſt-à-dire, que l'on rapporte les autres différentielles à celle-là, comme à un terme fixe de comparaiſon; on en verra bientôt des exemples. Or cette ſuppoſition abrege beaucoup le calcul, parce qu'elle fait diſparoître tous les termes affectés de la différentielle de la quantité que l'on a priſe pour conſtante.

Si on cherchoit, par exemple, la différence de $\frac{ydx}{dy}$, en ſupposant dx constante, on trouveroit $dx - \frac{ydxddy}{dy^2}$; si on eût fait dy constante, on auroit eu $dx + \frac{yddx}{dy}$.

Rem. Nous avons supposé jusqu'ici que les variables qu'on avoit à différentier, augmentoient toutes en même temps. Si les unes augmentant, les autres diminuoient, il faudroit rendre la différentielle de celles-ci négative, écrire, par exemple, $-dy$ au lieu de $+dy$, &c.

Des Différentielles Logarithmiques & Exponentielles, & de la différentiation des Sinus, Cosinus, &c.

853. Soit proposé à différentier le logarithme hyperbolique de la variable x. Je désigne ce logarithme par lx, & faisant $lx = z$, j'ai $z + dz = l(x + dx)$, & dz, ou $d(lx) = l(x + dx) - lx$ $= l\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{\&c.} = \frac{dx}{x}$; donc *la la différentielle du logarithme hyperbolique d'une quantité quelconque est égale à la différentielle de cette quantité divisée par elle-même.* Par conséquent pour un systême dont le module $= m$, on a $d(lx) = \frac{mdx}{x}$.

Mais nous ne parlerons dans la suite que des logarithmes hyperboliques dont le module $= 1$.

Cette regle posée, il est facile d'entendre les exemples suivans;

$$dlx^n = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = \frac{ndx}{x};\ dlxy = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{ydx + xdy}{xy};\ dl\frac{x}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{xy};\ dl(aa - xx) = \frac{-2xdx}{aa - xx} =$$

$$\frac{-dx}{a - x} + \frac{dx}{a + x};\ dl\sqrt[m]{(a + bx^n)^p} = \frac{p}{m}.\ dl(a + bx^n) = \frac{\frac{bpn}{m}x^{n-1}dx}{a + bx^n};\ dl\frac{x}{\sqrt{1 + xx}} = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1 + xx} = \frac{dx}{x(1 + xx)}.$$

854. Si on a des puissances de logarithmes, ou même des logarithmes de logarithmes, leur différentiation sera aisée. Soit, par exemple, $y = (lx)^m$, on aura $dy = m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$. Si on a $y = x^m (lx)^n$, il viendra $dy = mx^{m-1}dx\,(lx)^n + nx^{m-1}dx\,(lx)^{n-1} = x^{m-1}dx\,(lx)^{n-1}(n + mlx)$ &c. Soit ensuite $y = llx$, on fera $lx = z$, & on aura $dy = \frac{dz}{z} = \frac{dx}{xlx}$.

855. L'équation $d(lx) = \frac{dx}{x}$, donne $dx = xd(lx)$. Donc *la différentielle d'une quantité quelconque est égale au produit de cette quantité par la différentielle de son logarithme.* Cette regle peut servir à trouver facilement les différentielles des quantités même algébriques. Par exemple, $d(x^m) = x^m dlx^m = \frac{mx^m dx}{x} = mx^{m-1}dx$; $d(xy) = xy\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) = ydx + xdy$; $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{yy}$ &c. On l'applique sur-tout avec succès à la différentiation des quantités *exponentielles*. On nomme ainsi celles qui ont des exposans variables. Telles sont a^x, x^y, &c qui sont du premier ordre; x^{y^z} est du second, &c.

La différentielle de a^x, ou $d(a^x)$ sera $a^x dla^x = a^x d(xla) = a^x dxla$. Donc si e est le nombre dont le logarithme $= 1$, on aura $d(e^x) = e^x dx$. De même $d(x^y) = x^y d(ylx) = x^y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)$, &c.

856. On auroit pu trouver ces différentielles de cette autre maniere. Nous avons vu (479) que $n = 1 + ln + \frac{(ln)^2}{2} + \frac{(ln)^3}{2.3} +$ &c. Soit donc $ln = z$. Si on nomme e le nombre 2.7182818 dont le logarithme $= 1$, alors $ln = zle = le^z$, & $n = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} +$ &c. Soit $e^z = a^x$, on aura $z = xla$

$x\,la$, & $a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2 \cdot 3} +$ &c. Donc $d(a^x) = dx\,la + x\,dx\,l^2 a + \frac{x^2\,dx\,l^3 a}{2} +$ &c $= dx\,la\,(1 + x\,la + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2 \cdot 3} +$ &c.$) = a^x\,dx\,la$.

A l'égard des exponentielles telles que x^{y^z}, leur différentielle eſt aiſée à trouver : car on a $d(x^{y^z}) = x^{y^z}\,d(y^z\,lx) = x^{y^z}\left(y^z \frac{dx}{x} + y^z lx\,(dz\,ly + \frac{z\,dy}{y})\right) = x^{y^z} y^z \left(\frac{dx}{x} + \frac{z\,dy}{y}\,lx + dz\,lx\,ly\right)$; ſi $x = y = e$, on a $e^{e^z} e^z\,dz$ pour la différentielle de e^{e^z}. On trouveroit de même les différentielles ſecondes, troiſiemes, &c. des quantités logarithmiques & exponentielles, mais nous ne nous y arrêterons pas. Il nous reſte à faire voir comment on différentie les ſinus, coſinus, &c.

857. Soit $\sin x = y$, on aura $y + dy = \sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \sin dx \cos x$. Or dx étant un arc infiniment petit, on aura, 1.° $\cos dx = 1$. 2.° $\sin dx = dx$. Donc $y + dy = \sin x + dx \cos x$, ou $dy = d \sin x = dx \cos x$. *La différentielle du ſinus d'un arc quelconque eſt donc égale à la différentielle de cet arc multiplié par ſon coſinus.*

858. Pareillement, puiſque $dx \cos x = d \sin x$, ſi on fait $x = 90° - y$, on aura $dx = -dy$, & $d \cos y = -dy \sin y$, ce qu'on auroit pu trouver de ces deux autres manieres. 1.° $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Donc $\sin x\,d \sin x + \cos x\,d \cos x = 0$, & $d \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x}\,d \sin x = -dx \sin x$. 2.° $d \cos x = \cos(x + dx) - \cos x = \cos x \cos dx - \sin dx \sin x - \cos x = -d\ \sin x$. Concluons donc que *la différentielle du coſinus d'un arc quelconque eſt égale à la différentielle négative de cet arc multiplié par ſon ſinus.*

859. Soit $\tan x = z = \frac{\sin x}{\cos x}$, on aura $dz = \frac{\cos x\,d \sin x - d \cos x \times \sin x}{\cos^2 x} = \frac{dx \cos^2 x + dx \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x} = d \tan x$. *La différentielle de la tangente d'un arc eſt donc égale à la différentielle de cet arc diviſée par le quarré de ſon coſinus.*

860. Soit $x = 90^\circ - y$, on aura $d\,cot\,y = \frac{-dy}{\sin^2 y}$, de même

$$d\,sec\,y = d.\frac{1}{cos\,y} = \frac{-d\,cos\,y}{cos^2 y} = \frac{dy\,sin\,y}{cos^2 y} = \frac{dy\,tang\,y}{cos\,y}, \;\&\; d\,(cosec\,y)$$
$$= d.\frac{1}{sin\,y} = \frac{-d\,sin\,y}{sin^2 y} = \frac{-dy\,cos\,y}{sin^2 y} = \frac{-dy\,cot\,y}{sin\,y}.$$

Ces regles suffisent pour trouver les différences premieres, secondes, &c. de toute quantité dans laquelle entrent des sinus, des cosinus, &c. Voici quelques exemples. $d\,(sin\,x)^m = m\,(sin\,x)^{m-1} dx\,cos\,x = m\,(sin\,x)^m\,dx\,cot\,x$; $dd\,(sin\,x) = ddx\,cos\,x - dx^2\,sin\,x$; $dd\,(cos\,x) = d\,(-dx\,sin\,x) = -ddx\,sin\,x - dx^2\,cos\,x$; $d\,(sin\,mx) = mdx\,cos\,mx$; $d\,cos\,mx = -mdx\,sin\,mx$; $d\,(sin\,x\,cos\,x) = dx\,cos^2 x - dx\,sin^2 x = dx\,cos\,2x$; $d\sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,d\,(1+cos\,x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(1+cos\,x)^{-\frac{1}{2}} \times -dx\,sin\,x =$$
$$\frac{-dx\,sin\,x}{2\sqrt{2(1+cos\,x)}} = \frac{-dx\,sin\,x}{4\,cos\,\frac{1}{2}x} = \frac{-dx}{2}\,sin\,\tfrac{1}{2}x,$$ puisque (694)
$$\sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}} = cos\,\tfrac{1}{2}x \,;\; d\,(cos\,lx) = -dlx\,.\,sin\,lx = -\frac{dx}{x}\,sin\,lx \,;\; d\,(x\,sin\,x) = dx\,sin\,x + x\,dx\,cos\,x.$$

861. Si x est un arc quelconque, sa différentielle $dx = \frac{d\,sin\,x}{cos\,x}$

$$= \frac{-d\,cos\,x}{sin\,x} = cos^2 x\,d\,tang\,x = \frac{d\,tang\,x}{sec^2 x} = \frac{d\,tang\,x}{1+tang^2 x} = -d\,cot\,x\,sin^2 x = \frac{-d\,cot\,x}{cosec^2 x} = \frac{-d\,cot\,x}{1+cot^2 x}.$$

Application du Calcul différentiel à la Théorie des Courbes.

862. De tous les Problêmes qu'on peut proposer sur une courbe, le plus simple est celui qui a pour objet de mener une tangente à l'un quelconque de ses points. Commençons donc par le

résoudre ; ou plutôt rappellons la solution qui en a été donnée (843). FIG.

Soit la courbe AM, son axe AP, ses coordonnées AP & PM ; 143.
il est clair que pour mener la tangente au point M, il suffit de déterminer la soutangente PT. Imaginons donc l'arc infiniment petit M*m*, les deux ordonnées infiniment proches MP, *mp* & M*r* parallele à P*p*. Soit à l'ordinaire $AP = x$, $PM = y$, & nous aurons P*p* ou $Mr = dx$, $mr = dy$, & $PT = \frac{ydx}{dy}$. Il n'y aura donc plus qu'à différentier l'équation de la courbe, afin d'en tirer la valeur de $\frac{dx}{dy}$, que l'on substituera dans la formule des soutangentes, & PT sera déterminée.

863. L'expression de la tangente MT est $\sqrt{y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}}$, ou $\frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2}$; celle de la sounormale PN est $\frac{y^2}{PT}$, ou $\frac{ydy}{dx}$; la normale $MN = \frac{y}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$; & si on mene par l'origine A la ligne AQ parallele à MP, on aura $\frac{ydx}{dy} . \frac{ydx}{dy} - x$ ou $AT :: y . AQ = y - \frac{xdy}{dx}$. Or ces valeurs de AQ & de AT serviront à trouver les asymptotes de la courbe AM, lorsqu'elle en aura : car si après y avoir substitué la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation même de la courbe, on suppose x infinie, il y aura autant d'asymptotes que de valeurs différentes & finies des lignes AQ & AT. Quant à la position des asymptotes, elle sera toujours déterminée par les points T & Q. Appliquons maintenant ces formules.

EXEMPLES. Dans le cercle $y^2 = a^2 - x^2$; donc $ydy = -xdx$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = -\frac{(a^2 - x^2)}{x} = PT$. Le signe $-$ indique que

FIG. 143. la soutangente doit être prise dans le même sens que l'abscisse; parce que dans la construction de la formule on l'a supposée en sens contraire. Si on eût compté les abscisses du sommet, l'équation $y^2 = 2ax - xx$ eût donné un résultat positif comme la formule. En se servant de l'équation précédente, on trouve $\frac{ydy}{dx}$ ou la sounormale $= a - x$, & la normale $\sqrt{y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = a =$ le rayon, comme cela doit être.

Dans la parabole, $y^2 = px$; donc $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = 2x$.

Dans l'ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; donc $ydy = \frac{b^2}{a^2}(-xdx)$; & $\frac{ydy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2}$; ensuite $\frac{ydx}{yd} = \frac{-a^2y^2}{b^2x} = \frac{-(a^2 - x^2)}{x}$.

Dans l'hyperbole, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$; donc $\frac{ydy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a + x)$; & $\frac{ydx}{dy} = \frac{\frac{a^2y^2}{b^2}}{a + x} = \frac{2ax + xx}{a + x}$. On a aussi AT $= \frac{ax}{a + x} = a$, si x est infinie; & AQ $= y - \frac{xdy}{dx} = \frac{b^2x}{ay} = b\sqrt{\frac{x}{2a + x}}$ qui se réduit à b, lorsque x est infinie. Les deux dernieres valeurs donnent la position des asymptotes, comme nous l'avons déja trouvée.

864. Soit $y^m = x^n a^{m-n}$, on aura $nlx + (m - n) la = mly$, $\frac{ndx}{x} = \frac{mdy}{y}$, & la soutangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{m}{n}x$. Toutes les courbes représentées par l'équation générale $y^m = x^n a^{m-n}$, sont nommées paraboles, lorsque m & n sont positives. Si $m = 2$, & $n = 1$, on a $yy = ax$, équation à la parabole ordinaire ou *Apollonienne*, comme l'appellent quelques Auteurs du nom d'Apollo-

nius, ancien Géometre, dont on a un Traité sur les sections coniques. Si $m = 3$, & $n = 1$, l'équation est $y^3 = a^2 x$, & la courbe qui y répond, est *la premiere parabole cubique* à cause de $n = 1$. Si $m = 3$, $n = 2$, c'est alors *la seconde parabole cubique* dont l'équation est $y^3 = ax^2$. Voyez la Fig. 107. FIG.

865. Si n est négative, les paraboles se changent en hyperboles dont l'équation est $x^n y^m = a^{m+n}$; la soutangente de ces courbes est donc généralement $-\frac{m}{n} x$, c'est-à-dire, qu'elle doit être prise dans un sens opposé aux x. Et si $m = n = 1$, on a l'hyperbole ordinaire dont la soutangente $= -x$ (788).

Dans la logarithmique, on a $x = \log y$, & $dx = \frac{mdy}{y}$. Donc $\frac{ydx}{dy} = m$; *sa soutangente est donc toujours égale au module* (822).

866. Soit maintenant une courbe quelconque BIOC avec une autre courbe AMB, telle que si on prolonge les ordonnées OP de la premiere jusqu'à la rencontre de la seconde, la ligne MO soit une fonction quelconque de l'arc BIO, il s'agit de mener par le point donné M la tangente MT. 136.

Concevons l'ordonnée mp infiniment proche de MP, & Mr parallele à la tangente au point O; si on fait BIO $= z$, MO $= u$, on aura $mr = du$, rM $=$ Oo $= dz$, & $du \cdot dz :: u \cdot$ TO $= \frac{udz}{du}$.

Or u étant une fonction de z, on aura $\frac{dz}{du}$ en prenant les différencielles; ainsi TO, ou le point T sera déterminé, d'où il est facile de mener la tangente MT.

Supposons, par exemple, $u = \frac{b}{a} z$, on aura $du = \frac{bdz}{a}$, & OT $= z =$ BIO. Si BIOC est un arc de cercle, alors AMB est une cycloïde, & cette construction est la même que celle que nous avons déja donnée.

Dans la quadratrice, si on compte les abscisses du centre, on a 137.

(830) $ay = x \cot \frac{cx}{a}$, & $-\frac{xdy}{dx} =$ OT $= -\frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a} +$

FIG. $\frac{cxx}{\mathit{sin}^2 \frac{cx}{a}}$; donc $CO + OT = CT \frac{cxx}{\mathit{sin}^2 \frac{cx}{a}} = \frac{c}{aa} . CM^2$; & lorsque $CM = CT$, au point D, on a, comme nous l'avons déja trouvé, la base $CD = \frac{aa}{c}$, & par conséquent $CT = \frac{CM^2}{CD}$. Il faut donc prendre CT troisieme proportionnelle à la base CD & au rayon CM, ce qui donnera le point T par lequel, & par le point M si on mene MT, elle sera la tangente demandée.

867. Pour mener les tangentes aux spirales, il faut résoudre le problême suivant. Soit décrit un cercle d'un rayon quelconque CA, & soit une courbe CKM telle qu'en menant le rayon CMN, la ligne CM soit une fonction quelconque de l'arc ABN, il s'agit de mener par le point donné M la tangente MT.

On imaginera les deux rayons infiniment proches CMN, Cmn, & le petit arc Mr décrit du centre C & du rayon CM; on menera ensuite CT perpendiculaire à CM. Cela posé, soit $CM = y$, $ABN = x$, $CA = a$, on aura $a . y :: Nn\ (dx) . Mr = \frac{ydx}{a}$, & $rm\ (dy) . \frac{ydx}{a} :: y . CT = \frac{y^2 dx}{ady}$.

Soit, par exemple, $y = \frac{ax}{c}$, la courbe CKM sera la spirale *d'Archimede*, & on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{c}{a}$, $CT = \frac{y^2 c}{aa} = \frac{axy}{aa} = \frac{xy}{a}$ $= MQO$.

Soit la spirale hyperbolique dont l'équation est $xy = ab$, on aura $xdy + ydx = 0$, $ydx = -xdy$, $CT = \frac{xydy}{ady} = \frac{xy}{a} = b$; ce que nous avons déja trouvé (839).

141. 868. Dans la spirale logarithmique, où l'angle CMT est constant, on imaginera les rayons infiniment proches CM, Cm, & décrivant du centre C & d'un rayon quelconque CN un cercle, en faisant $CM = z$, $CN = a$, marquant sur la circonférence du cercle un point fixe A, & nommant AN (x), on aura $a . dx :: z . Mr = \frac{zdx}{a}$. Soit $t = tang.\ Mmr$, on aura $t = \frac{zdx}{adz}$ ou $\frac{dz}{z} =$

$\frac{dx}{at} = d(lz)$; donc $lz = \frac{x}{at}$, ou $\frac{x}{at}$ + une constante A, parce que la différentielle de l'équation $lz = \frac{x}{a}$ est la même que celle de $lz = \frac{x}{at} + A$; elles sont toutes deux $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{at}$. FIG.

Or cette équation $lz = \frac{x}{at} + A$ fait voir, 1.° que la spirale fait une infinité de révolutions autour de son centre, tant pour s'en approcher que pour s'en éloigner; car au lieu de x on peut substituer successivement $x+c$, $x+2c$, $x+3c$, &c. $-c+x$, $-2c+x$, &c. c étant la circonférence ANB. 2.° Que si on fait $A = lA'$, on aura $l\frac{z}{A'} = \frac{x}{at} = \frac{x}{at}le$, ou $\frac{z}{A'} = e^{\frac{x}{at}}$, & $z = A'e^{\frac{x}{at}}$. Donc au point A où $x = 0$, on a $CD = A'$. 3.° Que les abscisses AN (x) croissant en progression arithmétique x, $2x$, $3x$, &c. les ordonnées forment la progression géométrique $A'e^{\frac{x}{at}}$, $A'e^{\frac{2x}{dt}}$, $A'e^{\frac{3x}{at}}$, &c. 4.° Que si $t = \infty$, on a $z = A'$; propriété du cercle qui coupe à angles droits tous ses rayons, comme on le sait déja.

Ces exemples suffisent pour mener les tangentes de toute sorte de courbes soit méchaniques soit géométriques. Au reste on peut voir cette matiere traitée plus en détail dans l'*Analyse des infiniment petits du Marquis de l'Hôpital.*

Des Développées.

869. Imaginons un fil ABC appliqué immédiatement sur une courbe quelconque BC dont l'origine est en B, & dont AB est tangente en ce point; si on développe ce fil en le tenant toujours également tendu, son extrêmité A décrira une courbe AM, qui aura les propriétés suivantes. 144.

1.° La tangente MC de la courbe BC sera toujours perpendiculaire à la courbe AM. 2.° La longueur de cette ligne sera égale à la ligne AB + à l'arc BC. 3.° L'arc infiniment petit Mm pourra être regardé comme un arc de cercle décrit du centre C & du

FIG. 144. rayon CM. 4.° Le point C sera donc le point de réunion des deux normales infiniment proches MN, *mn*.

870. La courbe BC se nomme *la Développée* de la courbe AM; la ligne MC est le rayon de la développée; on l'appelle aussi rayon osculateur, rayon de courbure.

Cela posé, on demande comment on pourroit déterminer le rayon MC de la développée AM pour chaque point M de cette courbe, que l'on suppose connue.

Soient MP, *mg* deux perpendiculaires à l'axe AQ infiniment proches, & CO, M*r* paralleles au même axe; si on appelle MO, u; AP, x; PM, y; M*m* ou $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ds, on aura $dx \,.\, ds :: u \,.\, \text{MC} = \frac{uds}{dx}$. Mais pendant que AP, PM, & MO varient, MC devenant *m*C ne varie point; ainsi l'équation $\text{MC} = \frac{uds}{dx}$ étant différentiée, on aura $(udds + dsdu)\, dx = udsddx$; & puisque $du = mr = dy$, il viendra $u = \frac{dsdxdy}{dsddx - dxdds}$. Supposons maintenant, pour abréger, qu'une de ces différentielles soit constante, l'élément ds de la courbe, par exemple, & nous aurons $\text{MC} = \frac{dyds}{ddx} = \frac{dy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{ddx}$.

Si on eût supposé dy constante, on eût eu $dsdds = dxddx$ *, d'où $dds = \frac{dxddx}{ds}$, ce qui donne $\text{MC} = \frac{dyds^3}{(ds^2 - dx^2)\, ddx} = \frac{ds^3}{dyddx} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$.

Mais si on suppose, comme on le fait ordinairement, que dx est constante, alors $\text{MC} = \frac{dyds^2}{-dxdds} = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$.

---

* Car $dy = \sqrt{ds^2 - dx^2}$; donc si dy est constante, $ddy = o = \frac{dsdds - dxddx}{\sqrt{ds^2 - dx^2}}$; donc $dsdds = dxddx$.

Enfin, si on ne fait aucune différentielle constante, on aura FIG. 145.

$$MC = \frac{dyds^2}{dsddx - dxdds} = \frac{dyds^3}{ds^2ddx - dx(dxddx + dyddy)} = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy} = \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

870. Comme les courbures des cercles sont en raison inverse de leurs rayons, on en déduit qu'en deux points différens d'une courbe quelconque, les courbures sont en raison inverse des rayons de la développée. Ainsi pour savoir en quels points la courbe a une plus grande courbure, il faut chercher le *minimum* du rayon de la développée. Si la tangente en A est perpendiculaire à l'axe, alors pour déterminer la ligne droite BA, ou la distance du sommet A à l'origine B de la développée, il faudra faire $x = o$ dans l'expression du rayon MC, & on aura la valeur de BA. Enfin pour trouver l'équation de la développée, menons CQ perpendiculaire à l'axe, & nommons AB, a; BQ, t; QC, z; nous aurons d'abord, en supposant dx constante, $MO\,^* = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, & $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$. Ensuite $y \,.\, \frac{ydy}{dx} :: dx \,.\, dy :: \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} \,.\, CO = PQ = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$. Donc $AP + PQ - AB = t = x - a + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$. Valeurs qui, avec l'équation de la courbe, suffisent pour déterminer l'équation de la développée.

---

* Si $dx = C$, donc $ddx = o$. Mais $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$, donc $ddx = \frac{dsdds - dyddy}{\sqrt{ds^2 - dy^2}} = o$. Donc $dsdds = dyddy$, & $dds = \frac{dyddy}{ds}$. Mais dans cette supposition MO $(u) = \frac{dyds}{-dds} = \frac{dyds^2}{-dyddy} = \frac{ds^2}{-ddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$.

FIG. 145. 871. Jusqu'ici nous avons supposé les ordonnées paralleles entre elles. Si elles partoient d'un même point B, voici comment on détermineroit le rayon MC.

J'imagine deux ordonnées infiniment proches BM, Bm, & CO, Co perpendiculaires à ces ordonnées, je décris ensuite du centre B l'arc Mr. Cela posé, soit BM $= y$, M$r = dx$, M$m = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $rm = dy$, MO $= u$; à cause des triangles semblables Mrm, CMO, on a $dx \,.\, u :: dy$, OC $= \frac{udy}{dx} :: ds \,.\,$ MC $= \frac{uds}{dx}$. Différentiant cette équation (en supposant dx constante), on a $du = -\frac{udds}{ds}$, & la différentielle de

$$OC, = oC - OC = -OQ = \frac{dudy + uddy}{dx} = \frac{uddy - \frac{udydds}{ds}}{dx}$$

$$= \frac{uddy}{dx} - \frac{udy^2 ddy}{ds^2 dx} = \frac{+uddydx}{ds^2}.$$ Donc OQ $= -\frac{uddydx}{ds^2}$, & $y \,.\, dx :: y - u \,.\, \frac{-udxddy}{ds^2}$. D'où on tire $u = \frac{yds^2}{ds^2 - yddy}$, & MC

$$= \frac{yds^3}{ds^2 dx - ydxddy} = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy},$$ qui se réduit à $\frac{ds^3}{-dxddy}$ lorsque $y = \infty$, ou lorsque les ordonnées sont paralleles, comme nous l'avons déja trouvé. Donnons maintenant quelques exemples.

L'équation à l'ellipse & à l'hyperbole, lorsqu'on compte les abscisses du sommet, est généralement exprimée par $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$; où il est clair que si $a = \infty$, on a $yy = px$ équation à la parabole, qui n'est par conséquent qu'une ellipse dont le grand axe est infini. Ainsi l'équation $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ est générale pour toutes les sections coniques. Cherchons donc par son moyen le rayon de courbure.

FIG.

872. Observons d'abord que $\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}$, étant égale à la normale (863), si on la nomme n, le rayon de la développée sera, en supposant dx constant, $=\frac{n^3dx^2}{-y^3ddy}$; & puisque dans cet exemple $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$, pour assigner le rapport des dx^2 aux ddy, on a $2ydy=pdx\pm\frac{pxdx}{a}$, $2yddy+2dy^2=\pm\frac{pdx^2}{a}$, donc $y^3ddy=\pm\frac{p}{2a}y^2dx^2-y^2dy^2=dx^2\left(\pm\frac{p}{2a}\left(px\pm\frac{pxx}{2a}\right)-\left(\frac{p}{2}\pm\frac{px}{2a}\right)^2\right)=-\frac{p^2}{4}dx^2$. Donc *le rayon de la développée pour toutes les sections coniques* $=\frac{n^3}{\frac{1}{4}pp}$, c'est-à-dire, qu'*il est égal au cube de la normale divisé par le quart du quarré du paramètre.* D'où il suit que dans le cercle où $n=\frac{1}{2}p$, le rayon de la développée est toujours égal à la normale, ce qui est évident.

873. On a $n=\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\sqrt{px-\frac{pxx}{2a}+\frac{pp}{4}\left(1\pm\frac{2x}{a}+\frac{xx}{aa}\right)}$; & au sommet, lorsque $x=0$, $n=\frac{1}{2}p$, & le rayon de la développée, ou la droite $AB=\frac{1}{2}p$.

Dans l'ellipse, la développée a quatre branches BD, Db, bd, Bd, égales & faisant entr'elles quatre points de rebroussement. La distance CB $=$ Cb $=a-\frac{1}{2}p$, & ED $=ed=$ la moitié du paramètre du petit axe. 146.

Dans la parabole, le rayon MC $=\frac{MN^3}{\frac{1}{4}pp}=NT.\frac{MN}{PN}$, car par les propriétés de la parabole $\frac{NT}{PN}=\frac{NM}{\frac{1}{4}p^2}$, & par conséquent OC ou PQ $=$ NT $=2x+\frac{1}{2}p$; donc AQ $=3x+\frac{1}{2}p=3x+$ 147.

FIG. AB, & par conséquent $BQ = 3x$, ce qui donne une construction bien simple pour déterminer le point C, ou le centre du cercle osculateur ; prenez $BQ = 3AP$, & menez QC perpendiculaire à AQ, le point de concours C des deux lignes MC, QC sera le centre du cercle cherché.

Pour trouver l'équation de la développée, soit $BQ = z$, $QC = u$, on aura $x = \frac{1}{3}z$, & $\frac{1}{2}p \cdot y :: NQ \cdot QC :: 2x \cdot u = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$. Donc $\frac{pu^2}{16} = x^3 = \frac{1}{27}z^3$, & $z^3 = \frac{27}{16}pu^2$. *La développée de la parabole ordinaire est donc une seconde parabole cubique, dont le paramètre est les* $\frac{27}{16}$ *de celui de la parabole donnée.*

Par la nature des développées $BA + BC = MC$. Donc $BC = MC - \frac{1}{2}p = \frac{MN^3}{\frac{1}{4}pp} - \frac{1}{2}p$: or $MN = \sqrt{px + \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{1}{3}pz + \frac{1}{4}pp}$. On a donc, en faisant $\frac{27}{16}p = a$, $BC = \frac{8}{27}a\left(\left(1 + \frac{9z}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$, expression d'un arc quelconque de la seconde parabole cubique dont l'équation est $z^3 = au^2$.

148. 874. Soit la cycloïde AMBa, son cercle générateur BODO', l'ordonnée MOP perpendiculaire à BD. Si on fait $BP = x$, $PM = y$, $BD = 2a$, on aura $y = BO + \sqrt{2ax - xx}$; or la différentielle de l'arc $BO, = \frac{ad(\sin BO)}{\cos BO} = \frac{a}{a-x} d . \sqrt{2ax - xx} = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Donc $dy = \frac{(2a-x)dx}{\sqrt{2ax-xx}} = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}} = \frac{dx}{x}\sqrt{2ax - xx}$, équation différentielle de la cycloïde.

Cela posé, pour trouver le rayon MC de la développée, supposons dx constante, & nous aurons en différentiant $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$. Donc le rayon $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a(2a - x)} = 2OD$; or MNC est parallele à OD, puisque (825) la tangente MT est parallele à OB. Donc $OD = MN = NC$.

Il suit de-là, 1.° Que le rayon de la développée au point A est nul, & que par conséquent la développée passe par ce point. 2.° Que le rayon de la développée au point B est la ligne BE double de BD. FIG. 148.

875. Pour déterminer la développée ACE, achevons le rectangle AE, & sur le côté $AB' = DE = BD$, comme diamêtre, décrivons un demi-cercle $AQ'B'$, menons AQ' parallele à CM, & joignons C, Q'; cela posé, l'angle $NAQ' = NDO$. Donc $OD = AQ'$, & l'arc OID ou la droite AN = l'arc ALQ'. Or $OD = CN$. Donc $CN = AQ'$, & par conséquent $CQ' = AN$ = l'arc ALQ'; propriété distinctive de la cycloïde; d'où il suit que la développée ACE est une demi-cycloïde égale à celle que l'on avoit déja, AMB. Elle n'en differe que par sa position. On auroit trouvé la même chose, en cherchant directement l'équation de la développée, par ce qui a été dit (870).

L'arc $AC = MC = 2AQ'$; donc *un arc quelconque de cycloïde est double de la corde correspondante du cercle générateur.* Ainsi $MB = 2OB$, $AMB = 2BD$, & la cycloïde entiere ABa est quadruple du diamètre BD.

876. Soit la spirale logarithmique ADM dont le centre est A; 149.

on aura $cot\ MmA = \dfrac{mr}{Mr} = \dfrac{dy}{dx}$, & en différentiant, (toujours dx étant supposée constante), on aura $ddy = 0$, & le rayon de la développée $MC = \dfrac{y\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,(dx^2 + dy^2) - ydxddy}$ se réduit à $\dfrac{y}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Donc si on mene AC perpendiculaire à MA, & MC perpendiculaire à la tangente en M, leur point de concours C sera à la développée.

877. L'Angle $ACM = 90° - AMC = AMT$; d'où il suit que la développée AC est la même spirale logarithmique AM; elle est seulement disposée d'une maniere différente. Il suit de-là que la tangente MC est égale en longueur à la spirale ABC, quoique celle-ci fasse une infinité de révolutions autour du point A. Donc aussi, si on mene AT perpendiculaire à AM, on aura MT = l'arc ADM. *La spirale logarithmique & la cycloïde sont donc elles-mêmes leurs développées.*

FIG.

Des Points d'inflexion, & de la Méthode de Maximis & Minimis.

150. 878. Si une courbe AMO de convexe qu'elle étoit, devient concave, le point M où ce changement arrive, s'appelle, comme nous l'avons déja dit, un point d'inflexion.

Pour déterminer ces ſortes de points, on peut regarder la tangente en M comme étant tout à la fois tangente des deux parties MA, MO; & dans cette ſuppoſition on peut imaginer de part & d'autre du point M deux élémens M*m*, M*m'* en ligne droite, d'où il ſuit que le rayon de la développée au point M doit être infini. Mais comme ces élémens peuvent être ſuppoſés de plus en plus petits, au point de s'évanouir tous deux, alors le rayon de la développée ſera zéro.

879. Donc *au point d'inflexion, le rayon de la développée eſt toujours infini, ou nul.* Donc en ſuppoſant dx conſtante, on aura toujours $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, ou $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx^2}} = \infty$ ou 0, & par conſéquent $\frac{-ddy}{dx^2} = 0$, ou ∞. On différentiera donc deux fois l'équation de la courbe, en ſuppoſant dx conſtante; & on aura la valeur finie de $\frac{-ddy}{dx^2}$ qu'on égalera à zéro ou à l'infini. Au moyen de cette équation & de celle de la courbe, on déterminera les valeurs de x & de y qui conviennent au point d'inflexion, ou aux points d'inflexion, s'il y en a pluſieurs.

880. Lorſque les ordonnées partent d'un point fixe, alors on a $\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2} = 0$ ou $= \infty$.

Ex. I. Soit la premiere parabole cubique dont l'équation eſt $y^3 = a^2x$, on aura $y = x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$, $dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx \times a^{\frac{2}{3}}$, $ddy = -\frac{2}{9} \times x^{-\frac{5}{3}}dx^2a^{\frac{2}{3}}$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\sqrt[3]{aa} = 0$ au point d'inflexion; on a donc $x=0$. Ainſi le point d'inflexion eſt à l'origine, ce qui eſt évident. FIG.

Ex. II. Soit la conchoïde de Nicomede dont l'équation eſt $y=\frac{b+x}{x}\sqrt{aa-xx}$, on a en différentiant; $dy=\frac{-dx(aab+x^3)}{xx\sqrt{aa-xx}}$, différentiant de nouveau en ſuppoſant dx conſtante, on a $-\frac{ddy}{dx^2}=\frac{2a^4b-3a^2bx^2-a^2x^3}{(a^2x^3-x^5)\sqrt{aa-xx}}=0$ au point d'inflexion. Donc $x^3+3bx^2-2a^2b=0$, équation qui étant réſolue donnera pour x la valeur qui convient au point d'inflexion (318).

Ex. III. Soit une courbe qui ait pour équation $y-a=(x-a)^{\frac{3}{5}}$, il s'agit de trouver les valeurs de x & de y qui répondent au point d'inflexion.

En différentiant deux fois de ſuite, on a $-\frac{ddy}{dx^2}=\frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$, qui étant égalée à zéro, ne fait rien connoître; il faut donc l'égaler à l'infini, & on a $x=a=y$, valeurs qui répondent au point d'inflexion.

881. Si l'ordonnée MP d'une courbe quelconque BM eſt plus grande ou plus petite que celles qui la précedent (pm), & que celles qui la ſuivent ($p'm'$), on lui donne alors le nom de *Maximum* ou de *Minimum*; & la méthode qui apprend à déterminer ces ſortes de quantités, ſe nomme la méthode de *Maximis* & *Minimis*. 151.

882. Si CM eſt le rayon du cercle oſculateur au point M, il eſt clair que l'ordonnée MP doit être plus grande ou plus petite que toute autre ordonnée correſpondante à quelque point de l'arc KMD décrit du rayon CM; d'où il ſuit que l'ordonnée MP (prolongée dans le cas du *Minimum*) paſſe par le centre du cercle oſculateur: donc la tangente en M eſt parallele à l'axe AP, & par conſéquent la ſoutangente $\frac{ydx}{dy}=\infty$. Donc $\frac{dy}{dx}=0$.

Or y peut être conſidérée comme une fonction quelconque de l'abſciſſe AP (x), d'où il ſuit que pour ſavoir dans quels cas une quantité y dépendante de x peut devenir un *Maximum* ou un *Minimum*, il faut différentier l'équation qui exprime leur rapport, & égaler à zéro la quantité $\frac{dy}{dx}$. L'équation qui en réſultera, combinée avec la premiere, donnera les valeurs de y & de x dans leſquelles y eſt un *Maximum* ou un *Minimum*.

FIG. 152. 883. Mais pour distinguer lequel de ces deux cas a lieu ; *il faut observer que le rayon de la développée au point du* Maximum *est positif, & qu'il est négatif au point du* Minimum. Or l'expression du rayon osculateur est $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{ddy}{dx^2}}$; & comme $\frac{dy}{dx}=0$, on a CM $\frac{-dx^2}{ddy}$. Donc si y est un *Maximum*, $\frac{ddy}{dx^2}$ doit être négatif, & s'il est un *Minimum*, $\frac{ddy}{dx^2}$ doit être positif. S'il arrive que $\frac{ddy}{dx^2}$

152. soit infini ou nul, alors M sera un point d'inflexion, ou de rebroussement, la tangente en M sera parallele à l'axe, mais il pourra se faire que MP ne soit ni un *Maximum* ni un *Minimum*.

884. Il peut encore arriver que l'ordonnée MP soit un *Maximum* ou un *Minimum*, lorsque la tangente en M est perpendiculaire à l'axe. Or dans ce cas $\frac{ydx}{dy}=0$; & par conséquent $\frac{dy}{dx}=\infty$; formule qui déterminera ces sortes d'ordonnées. Alors MP peut

153. être tout à la fois un *Maximum* & un *Minimum* à l'égard des deux branches MB, MB'. Mais ce n'est qu'un cas particulier renfermé dans celui dont nous venons de parler, & dont voici quelques exemples.

885. I. Soit proposé de diviser une droite a en deux parties, telles que leur rectangle soit un *Maximum* ou un *Minimum*. En nommant x l'une de ces parties, $a-x$ sera l'autre, & on aura $ax-xx$ pour l'expression du *Maximum* ou du *Minimum*. Soit donc $y=ax-xx$, & on aura $\frac{dy}{dx}=a-2x=0$, d'où $x=\frac{1}{2}a$.

Pour savoir maintenant si cette solution donne un *Maximum* ou un *Minimum*, je différentie l'équation $\frac{dy}{dx}=a-2x$, & j'ai $\frac{ddy}{dx^2}=-2$, quantité négative ; d'où il suit que la valeur $x=\frac{a}{2}$ donne un *Maximum* $y=\frac{1}{4}a^2$.

En

En général, si $y = x^m (a-x)^n$, pour que cette quantité soit un *Maximum* ou un *Minimum*, il faut que $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1} = 0 = \frac{m}{x} - \frac{n}{a-x}$. Alors $x = \frac{am}{m+n}$; & cette valeur donne un *Maximum* pour y, parce que $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{m}{xx} - \frac{n}{(a-x)^2}$.

II. Trouver les diamêtres conjugués de l'ellipse qui font entr'eux le plus petit angle.

Soient m, n ces diamêtres, p l'angle qu'ils font entr'eux, on aura (769) $mn \sin p = ab$, & $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$. Donc $\sin p = \frac{ab}{n(a^2+b^2-n^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $\frac{d \sin p}{dn} = \frac{-ab(a^2+b^2-2n^2)}{n^2(a^2+b^2-n^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; donc $n = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = m$.

Ainsi les diamêtres conjugués & égaux de l'ellipse sont ceux qui par leur intersection, forment le plus petit angle cherché. Son sinus est $\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

Soit $\frac{b}{a} = \tan u$, on aura $\sin p = \frac{2 \tan u}{1 + \tan^2 u} = \frac{2 \tan u}{\sec^2 u} = 2 \sin u \,.\, \cos u = \sin 2u$; donc l'angle p est égal à celui que forment entr'elles les deux lignes menées des deux extrêmités du petit axe à une du grand. FIG. 115.

III. De toutes les paraboles qu'on peut couper dans le cône droit DCB, déterminer celle qui a le plus de surface. 154.

Soit BD $= a$, CD $= b$, BP $= x$, on aura $a \,.\, b :: x \,.\,$ AP $= \frac{bx}{a}$, PM $= \sqrt{ax - xx}$, la surface mAMP$m = \frac{4}{3} \,.\, \frac{bx}{a} \sqrt{ax-xx} = y$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} \,.\, \frac{b}{a} \sqrt{ax-xx} + \frac{4}{3} \,.\, \frac{bx}{a} \frac{\left(\frac{a}{2} - x\right)}{\sqrt{ax-xx}} = 0 = ax - xx + x$

FIG. $\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{3}{2} ax - 2xx$. D'où $x = \frac{3}{4} a$, solution qui donne un *Maximum*, parce que $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-8b}{3a\sqrt{ax-xx}} = \frac{-128b}{3a^2\sqrt{3}}$.

IV. De tous les triangles conſtruits ſur la même baſe AB, & de même perimètre, quel eſt celui qui a le plus de ſurface ?

155. Soit le demi-périmètre $= q$, la baſe AB $= a$, le côté AM $= x$, MB ſera $2q - a - x$. Donc en appellant y la ſurface, on aura $y = \sqrt{q \cdot q - a \cdot q - x \cdot (a + x - q)}$, $2ly = lq + l(q - a) + l(q - x) + l(a + x - q)$, $\frac{2dy}{y} = -\frac{dx}{q-x} + \frac{dx}{a+x-q}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} \times \left(\frac{1}{a+x-q} - \frac{1}{q-x}\right) = 0$. Donc $a + x - q = q - x$, $2q - a - x = x$; & par conſéquent le triangle cherché eſt iſoſcele.

886. Il ſuit de-là qu'entre tous les triangles *iſopérimètres* ou de même contour, celui qui a le plus de ſurface eſt équilatéral. Car ſi AMB eſt le triangle cherché, il eſt clair qu'il doit avoir plus de ſurface que tout autre triangle iſopérimètre AM'B conſtruit ſur la même baſe AB ; donc AM $=$ MB. On prouvera de même que AM $=$ AB.

887. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que le *Maximum* ou le *Minimum* des fonctions d'une ſeule variable x. Pour trouver dans quels cas une fonction quelconque Y de deux variables x & y devient un *Maximum* ou un *Minimum*, voici comment on pourroit réſoudre ce problême. (Le mot fonction eſt pris ici pour toute expreſſion dépendante des valeurs des deux variables.)

Suppoſons que y a déja la valeur propre à rendre la fonction Y un *Maximum* ou un *Minimum* ; il ne s'agira donc plus que de trouver la valeur convenable de x, c'eſt-à-dire, qu'il faudra différentier la fonction Y en faiſant varier x ſeule, & égaler le coefficient de dx à zéro. En faiſant un raiſonnement ſemblable, on verra que pour avoir y, il faut différentier la fonction Y en faiſant varier y ſeule, & égaler le coefficient de dy à zéro. D'où il ſuit que ſi dY eſt repréſenté généralement par $Pdx + Qdy$, on doit avoir $P = 0$, $Q = 0$, équations qui donneront les valeurs de x & de y propres à rendre la fonction Y *Maximum* ou *Minimum*.

Or il eſt aiſé de voir que ce même raiſonnement a lieu quel que ſoit le nombre des variables dont Y peut repréſenter une fonction. D'où il ſuit en général, que pour connoître les valeurs des variables qui rendent la fonction Y *Maximum* ou *Minimum*, il faut prendre la différentielle totale de Y, & égaler à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable, ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues.

888. Par exemple, soit proposé de diviser le nombre donné a en trois parties dont le produit soit un *Maximum*.

En appellant x & y deux de ces parties, $a-x-y$ sera l'autre, & on aura $xy(a-x-y)$ dont la différentielle $=(a-2x-y)ydx+(a-2y-x)xdy$; égalant donc séparément à zéro le coefficient de dx & celui de dy, on aura $a-2x-y=0$ $=a-2y-x$, d'où $y=x=\frac{1}{3}a$. Il faut donc diviser le nombre donné en trois parties égales.

Proposons-nous maintenant de trouver entre tous les triangles isopérimètres celui qui a le plus de surface. Nous avons déja résolu ce problême, mais indirectement.

Soient x, y deux de ses côtés, $2q$ le périmètre, $2q-x-y$ sera l'autre côté, & la surface $\sqrt{q.q-x.q-y.(x+y-q)}$ devant être un *Maximum*, si on la nomme Y, on aura $2lY-lq$ $=l(q-x)+l(q-y)+l(x+y-q)$. Donc $dY=$

$$\frac{Ydx}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-x}\right)+\frac{Ydy}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-y}\right);$$

égalant à zéro le coefficient de dy & celui de dx, on a $x+y-q$

$=q-y=q-x$; d'où $x=y=\dfrac{2q}{3}=2q-x-y$. Le triangle cherché est donc équilatéral, comme nous l'avons déja trouvé.

Des Fractions dont le Numérateur & le Dénominateur se réduisent à zéro dans certains cas.

889. On trouve quelquefois des expressions algébriques en forme de fractions, qui se réduisent à $\frac{0}{0}$. Telle est, par exemple, la quantité $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$, lorsque $x=a$. Or, quoique indéterminés en apparence, ces résultats sont pourtant susceptibles de valeurs déterminées; & voici une méthode pour les trouver.

Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſont des fonctions de x qui ſe réduiſent l'une & l'autre à o lorſque $x=a$. Pour en trouver la valeur, on ſubſtituera $x+dx$ au lieu de x dans P & dans Q, & on aura $\frac{P+dP}{Q+dQ}$, qui dans le cas préſent ſe réduit à $\frac{dP}{dQ}$. Subſtituant enſuite a au lieu de x dans $\frac{dP}{dQ}$, on aura en termes finis la valeur de $\frac{0}{0}=\frac{P}{Q}$.

Ex. On demande la valeur de $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, lorſque $x=a$? .... Ici $P=x^2-a^2$, & $Q=x-a$; donc $\frac{dP}{dQ}=\frac{2xdx}{dx}=2x=2a$ dans le cas préſent, comme cela doit être.

Soit la progreſſion géométrique ∺ $x \,.\, x^2 \,.\, x^3 \ldots\ldots x^n$, dont la ſomme eſt $\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$; on demande la valeur de cette ſomme lorſque $x=1$? ... On trouvera $\frac{dP}{dQ}=(n+1)x^n-1=n$, ce qui eſt évident.

Soit la quantité $\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ qui devient $\frac{0}{0}$, lorſque $x=a$. En prenant les différentielles ſéparément, on aura

$$\frac{\dfrac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}}-\dfrac{a}{3x}\sqrt[3]{a^2x}}{-\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{\dfrac{a}{x}}}=\frac{16}{9}a,$$ valeur de la quantité propoſée.

890. Mais s'il arrive qu'en ſubſtituant a au lieu de x dans $\frac{dP}{dQ}$, cette fraction devienne auſſi $\frac{0}{0}$, on la traitera de même que la premiere, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait une valeur en termes finis.

Ex. Si on différentie la même équation $\div\, x\,.\,x^2\,.\,x^3 \ldots x^n = \dfrac{x - x^{n+1}}{1 - x}$, on aura après avoir divisé par $\dfrac{dx}{x}$, $x + 2x^2 + 3x^3 \ldots + nx^n = \dfrac{x + nx^{n+2} - (n+1)\,x^{n+1}}{(1-x)^2}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 1$. Ainsi $\dfrac{dP}{dQ} = \dfrac{1 - x^n(n+1)^2 + n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$; mais cette nouvelle expression donne encore $\frac{0}{0}$, en y substituant 1 à x; il faut donc différentier séparément son numérateur & son dénominateur, & on aura ... $\dfrac{-nx^{n-1}(n+1)^2 + n\,.\,\overline{n+1}\,.\,\overline{n+2}\,.\,x^n}{2}$, qui en faisant $x = 1$, donne $\dfrac{n(n+1)}{2}$ somme de la progression arithmétique $\div\, 1\,.\,2\,.\,3\,..\,n$.

Dans la Quadratrice, $y = \dfrac{a-x}{a}\, tang \dfrac{cx}{a}$; & cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$. Donc $y = \dfrac{-dx}{ad\,cot - \dfrac{cx}{a}} = \dfrac{sin^2 \dfrac{cx}{a}}{-\dfrac{c}{a}} = -\dfrac{aa}{c}$.

On peut avec ces principes trouver dans chaque cas particulier les valeurs indéterminées de $0 \times \infty$, & de $\infty - \infty$. Car $0 \times \infty$ se réduit à $\frac{0}{0}$, parce que $\infty = \dfrac{a}{0}$. On y ramene aussi $\infty - \infty$, en supposant que le premier ∞ provient de $\dfrac{a}{0}$, & le second de $\dfrac{b}{0}$. par exemple, si $x = 1$, on a $\dfrac{1}{Lx} - \dfrac{x}{Lx} = \infty - \infty$; qui en différentiant $\dfrac{1-x}{Lx}$, se réduit à $-x = -1$.

PRINCIPES DU CALCUL INTÉGRAL.

891. Dans le Calcul différentiel on suppose connu le rapport des quantités variables, & on cherche celui de leurs différentielles ; dans le Calcul intégral, au contraire, on détermine le rapport des variables par celui de leurs différentielles.

892. On se sert de la lettre $\int$ pour indiquer une *intégrale ;* $\int adx$, par exemple, est l'expression générale de toutes les quantités qui par leur différentiation produisent adx ; & comme adx peut également provenir ou de ax seul, ou de $ax +$ une quantité constante, on ajoute à chaque intégrale une constante C que l'on détermine ensuite par les conditions du problême.

893. La quantité ax étant en quelque sorte la somme de tous ses élémens adx, on prononce *somme de adx* l'expression $\int adx$; & *sommer*, *intégrer*, ou *trouver la fluente*, sont des mots synonimes.

S'il n'y avoit de différentielles que celles qui proviennent d'une différentiation exacte, chacune auroit son intégrale : mais comme on entend par différentielle toute quantité affectée de dx, dy, &c. il y en a plusieurs qui ne sont susceptibles d'aucune intégration, parce qu'elles ne peuvent provenir d'aucune quantité différentiée. ydx, par exemple, est de ce nombre.

Il y en a beaucoup d'autres que l'on n'a pu intégrer jusqu'à présent que par approximation. Telles sont les différentielles des logarithmes, des arcs de cercle, & en général de toutes les quantités que l'on appelle transcendentes. Voyons d'abord celles dont on a trouvé les intégrales exactes, ou algébriques.

Des Quantités susceptibles d'une intégration exacte.

894. Puisque la différentielle de x^n est $nx^{n-1}dx$, il est clair que l'intégrale de $nx^{n-1}dx$ doit être réciproquement x^n ; donc

$$\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n};$$ & faisant $n - 1 = m$, on aura $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

ou $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$; formule qui donne pour l'intégration des différentielles monomes la regle inverse de leur différentiation (848).

895. Ainsi *pour intégrer les différentielles monomes, augmentez d'une unité l'exposant de la variable, & divisez par l'exposant augmenté & par la différentielle de la variable.*

896. Cette regle est cependant sujette à exception dans le cas où $m = -1$; car alors l'intégrale devient $\frac{1}{0} + C$, c'est-à-dire, qu'elle prend une forme infinie. Mais comme la différentielle $x^m dx$ se réduit dans ce cas à $\frac{dx}{x}$, que l'on fait d'ailleurs être la différentielle du logarithme hyperbolique de x, son intégrale est lx. Ainsi $\int \frac{dx}{x} = lx + C$, & par conséquent les différentielles monomes à une seule variable peuvent s'intégrer exactement par la formule, ou du moins par approximation au moyen des logarithmes. Voici plusieurs autres différentielles que l'on peut intégrer de la même maniere.

896. Soit $dy = adx(b+x)^m$; si on fait $b+x=z$, on aura $dx = dz$, & $dy = az^m dz$; d'où $y = \frac{az^{m+1}}{m+1} = \frac{a}{m+1}(b+x)^{m+1}$ $+C$; & lorsque $m=-1$, on aura $y = \int \frac{adx}{b+x} = al(b+x) + C = lc(b+x)^a$, en faisant $C = lc$.

Supposons $dy = dx(a + bx + cx^2 + \&c.) = adx + bxdx + cx^2dx + \&c.$ & nous aurons $y = C + ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \&c.$

897. Soit maintenant $dy = ax^{n-1}dx(b+x^n)^m$, on aura $y = C + \frac{a}{n(m+1)}(b+x^n)^{m+1}$; & en général, si on a $dy = x^n dx(a+bx^m)^k$, il viendra, en développant cette expression, $dy = a^k x^n dx + ka^{k-1}bx^{m+n}dx + \frac{k.k-1}{2}a^{k-2}b^2x^{2m+n}dx + \&c.$ dont l'intégrale est $y = C + \frac{a^k x^{n+1}}{n+1} + \frac{k}{m+n+1}a^{k-1}bx^{m+n+1}$ $+ \frac{k.k-1}{2(2m+n+1)}a^{k-2}b^2x^{2m+n+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{k.k-1.k-2}{2.3(3m+n+1)}a^{k-3}b^3x^{3m+n+1} + \&c.$ Or cette inté-

grale sera toujours finie, lorsque k sera un nombre entier. Mais on doit observer que si après avoir développé le binome, il y a des termes de la forme $\frac{dx}{x}$, il faut les intégrer par logarithmes. La méthode est la même pour $x^m dx\,(a + bx + cx^2 + \&c.)^k$.

898. Concluons donc que toute différentielle binome représentée par la formule $x^n dx\,(a + bx^m)^k$ est intégrable algébriquement, 1.° toutes les fois que $n = m - 1$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de m & de k; 2.° toutes les fois que k est un nombre entier, quels que soient m & n. Voici encore deux autres cas où l'intégration exacte est possible.

899. 1.° Soit $a + bx^m = z$; on aura $x^{n+1} = \frac{(z-a)^{\frac{n+1}{m}}}{b^{\frac{n+1}{m}}}$;

$x^n dx = \frac{1}{m b^{\frac{n+1}{m}}} . dz\,(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$, & $x^n dx\,(a + bx^m)^k =$

$\frac{1}{m b^{\frac{n+1}{m}}} z^k dz\,(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$, différentielle intégrable toutes les fois que $\frac{n+1}{m}$ sera un nombre entier.

Par exemple, $x^3 dx\,(a^2 + x^2)^{\frac{1}{3}}$ est susceptible d'une intégration exacte, parce que $\frac{n+1}{m} = 2$. La transformée devient alors

$$\int \tfrac{1}{2} z^{\frac{1}{3}} dz\,(z - a^2) = \int \tfrac{1}{2} z^{\frac{4}{3}} dz - \int \tfrac{1}{2} a^2 z^{\frac{1}{3}} dz = \frac{\frac{1}{2} z^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \tfrac{1}{2} a^2 . \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \tfrac{3}{14} z^{\frac{7}{3}} - \tfrac{3}{8} a^2 z^{\frac{4}{3}} = 3 z^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{14} z^2 - \tfrac{1}{8} a^2 z\right) = 3\,(a^2 + x^2)^{\frac{4}{3}} \left(\tfrac{1}{14}\overline{a^2 + x^2} - \tfrac{1}{8} a^2\right) = \tfrac{3}{56}(a^2 + x^2)^{\frac{4}{3}}\,(4x^2 - 3a^2).$$

Donc $\int x^3 dx\,(a^2 + x^2)^{\frac{1}{3}} = C + \tfrac{3}{56}(a^2 + x^2)^{\frac{4}{3}}\,(4x^2 - 3a^2)$.

900.

900. 2.° $x^n dx\,(a+bx^m)^k = x^{mk+n} dx\,(b+ax^{-m})^k$; or cette différentielle est intégrable, suivant ce que nous venons de dire, si $\frac{mk+n+1}{-m}$, ou $-k-\left(\frac{n+1}{m}\right)$ est un nombre entier.

Soit, par ex. $x^{-2}dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$; on aura $\frac{mk+n+1}{-m}=2$, & $x^{-7}dx(1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}} = x^{mk+n}dx(b+ax^{-m})^k$. Je suppose $1+ax^{-3}=z$, & j'ai $-\frac{1}{3aa}.z^{-\frac{5}{3}}dz(z-a) = -\frac{1}{3aa}$ $z^{-\frac{2}{3}}dz+\frac{1}{3a}z^{-\frac{5}{3}}dz$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{aa}z^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2a}$ $z^{-\frac{2}{3}}$, qni donne $\int x^{-2}dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}} = C - \frac{1}{aa}\left(1+\frac{a}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{2(1+ax^{-3})}\right)$.

Lorsqu'une différentielle binome n'a pas les conditions que nous venons d'indiquer, on tâche de la ramener à quelqu'autre différentielle connue, telle, par exemple, que celle de la quadrature du cercle, des logarithmes, &c. Si cette réduction est possible, voici une maniere de l'effectuer.

Méthode pour ramener l'intégration de plusieurs différentielles binomes à celle d'autres différentielles connues.

901. Soit la différentielle $x^n dx\,(a+bx^m)^k$ qu'il s'agisse d'intégrer, en supposant connue l'intégrale de $x^p dx\,(a+bx^m)^k$, & n étant plus grand que p.

Je considere la quantité $x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}$, dont la différentielle $d(x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}) = (aq+a)x^q dx(a+bx^m)^k + (bmk+bm+bq+b)x^{m+q}dx(a+bx^m)^k$. Donc $\int x^{m+q}dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+m+q+1)} - \ldots\ldots$

$\dfrac{a(q+1)\int x^q dx\,(a+bx^m)^k}{b(mk+m+q+1)}$; soit $-m+q=n$, ou $q=n-m$; on aura $\int x^n dx\,(a+bx^m)^k = \dfrac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \dfrac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)}\int x^{n-m}dx\,(a+bx^m)^k$. Par la même formule, $\int x^{n-m}dx\,(a+bx^m)^k = \dfrac{x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{k-1}}{b(1+n+mk-m)} - \dots \dfrac{a(1+n-2m)}{b(1+n+mk-m)}\int x^{n-2m}dx\,(a+bx^m)^k$. Donc $\int x^n dx\,(a+bx^m)^k$

$$= \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)x^{1+n-2m}}{b^2(mk+n+1)} \times \frac{(a+bx^m)^{k+1}}{(a+n+mk-m)} + \frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)}{b^2(1+n+mk)(1+n+mk-m)}\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^k.$$

On peut donc réduire l'intégrale de la différentielle proposée $x^n dx\,(a+bx^m)^k$ à celle de $x^{n-m}dx\,(a+bx^m)^k$, ou même de $x^{n-2m}dx\,(a+bx^m)^k$; & en général, on la réduira à celle de $x^{n-im}dx\,(a+bx^m)^k$, i étant un nombre entier, par cette formule qui se déduit des précédentes. $Sx^n dx\,(a+bx^m)^k =$

$$\frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(1+n-m)x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{k+1}}{bb(mk+n+1)(mk+n+1-m)} + \frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)x^{1+n-3m}(a+bx^m)^{k+1}}{b^3(mk+n+1)(mk+n+1-m)(mk+n+1-2m)} - \&c. \mp$$

$$\frac{a^{i-1}(1+n-m)(1+n-2m)\dots(1+n-m(i-1))x^{1+n-im}(a+bx^m)^{k+1}}{b^i(mk+n+1)(mk+n+1-m)\dots(mk+n+1-m(i-1))}$$

$$\pm \frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\dots(1+n-im)}{b^i(mk+n+1)(mk+n+1-m)\dots(mk+n+1-m(i-1))}\int x^{n-im}dx(a+bx^m)^k;$$

Le ſigne ſupérieur eſt pour le cas où i eſt pair, & l'inférieur, lorſqu'il eſt impair.

902. Cela poſé, ſi $n - im = p$, ou ſi $\frac{n-p}{m}$ différence des expoſans de x hors du binome diviſée par l'expoſant de x dans le binome donne un quotient i entier & poſitif, on pourra réduire l'intégrale de $x^n dx\,(a + bx^m)^k$ à celle de $x^p dx\,(a + bx^m)^k$, par le moyen de la formule précédente.

Ex. Soit la différentielle $x^{10} dx\,(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ dont il s'agiſſe de réduire l'intégrale à celle de $dx\,(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ que nous verrons bientôt dépendre de la quadrature du cercle. On aura donc $m = 2$, $n = 10$, $p = 0$, $k = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = -1$, $\frac{n-p}{m} = 5 = i$; donc la réduction eſt poſſible, & on a $\int x^{10} dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}} = -\frac{x^9 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12} - \frac{9x^7 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10} - \frac{9.7x^5 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8} - \frac{9.7.5x^3 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8.6} - \frac{9.7.5.3x (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8.6.4} + \frac{9.7.5.3.1}{12.10.8.6.4} \int dx\,(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$.

903. Soit propoſé maintenant de réduire l'intégrale de ... $x^n dx\,(a + bx^m)^p$ à celle de $x^r dx\,(a + bx^m)^q$. Puiſqu'on a $d\left(x^{n+1} (a + bx^m)^p\right) = (n+1) x^n dx\,(a + bx^m)^p + \ldots$ $bmpx^{m+n} dx\,(a + bx^m)^{p-1}$, il eſt clair que $\int x^n dx\,(a + bx^m)^p = \frac{x^{n+1} (a + bx^m)^p}{n+1} - \frac{bpm}{n+1} \int x^{m+n} dx\,(a + bx^m)^{p-1}$. Par la même raiſon $\int x^{m+n} dx\,(a + bx^m)^{p-1} = \frac{x^{m+n+1} (a + bx^m)^{p-1}}{m+n+1} - \frac{bm(p-1)}{m+n+1} \int x^{n+2m} dx\,(a + bx^m)^{p-2}$; donc ....

$$\int x^n dx\,(a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{bpmx^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)\,(n+1+m)} + \frac{b^2m^2.p.p-1.\int x^{n+2m}dx\,(a+bx^m)^{p-2}}{(n+1)\,(n+1+m)},$$

& en général $\int x^n dx\,(a+bx^m)^p = \dfrac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \ldots$

$$\frac{bpmx^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)\,(n+1+m)} + \frac{b^2m^2.p(p-1)x^{n+1+2m}(a+bx^m)^{p-2}}{(1+n)\,(1+n+m)\,(1+n+2m)}$$

$$-\,\&c. \pm \frac{b^{i-1}\,m^{i-1}\,.p\,.p-1\,.p-2\ldots\ldots(p-i+3)}{(1+n)\,(1+n+m)\,(1+n+2m)\ldots(1+n+m(i-1))}$$

$$\times\; x^{1+n+m(i-1)}\,(a+bx^m)^{p-i+1} \mp \int x^{n+im}dx(a+bx^m)^{p-i}$$

$$\times\; \frac{b^im^i\,.p\,.p-1\ldots p-i+1}{(1+n)\,(1+n+m)\ldots(1+n+m(i-1))};$$ le signe supérieur pour le nombre entier i impair, & l'inférieur pour i pair.

Il est clair à présent que si $p-i=q$, ou si $p-q$ est un nombre entier i, l'intégrale de $x^ndx\,(a+bx^m)^p$ se réduira à celle de $x^{n+im}dx\,(a+bx^m)^q$, laquelle pouvant être réduite à .... $\int x^r dx\,(a+bx^m)^q$, lorsque $\dfrac{n+im-r}{m}$, ou $\dfrac{n-r}{m}$ est un nombre entier, la formule proposée pourra s'y réduire aussi.

Qu'il s'agisse, par exemple, de ramener $\int x^4dx\,(1-xx)^{\frac{5}{2}}$ à $\int dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}$; on aura $a=1$, $b=-1$, $n=4$, $m=2$, $p=\frac{5}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $r=0$, $p-q=i=2$. Donc $\int x^4\,dx\,(1-xx)^{\frac{5}{2}} =$

$$\frac{x^5\,(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7\,(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{5\cdot 7} + \frac{5\cdot 3}{5\cdot 7}\int x^8\,dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}};$$

mais $\int x^8dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{-x^7\,(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - \dfrac{7x^5\,(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10\,.\,8} -$

$$\frac{7.5}{10.8.6} x^3 (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{7.5.3}{10.8.6.4} x (1-xx)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

$$\frac{7.5.3}{10.8.6.4} \int dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}.$$ Donc $\int x^4 dx (1-xx)^{\frac{5}{2}} =$

$$\frac{x^5 (1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^7 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{3}{10.8} x^5 (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \ldots$$

$$\frac{3.5}{10.8.6} x^3 (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3.5.3}{10.8.6.4} x (1-xx)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

$$\frac{3.5.3}{10.8.6.4} \int dx (1-xx)^{\frac{1}{2}} + C.$$

904. La méthode réuſſira toujours, lorſque $p-q$ ſera un nombre entier poſitif; mais s'il étoit négatif, ou ſi q étoit plus grand que p, au lieu de ramener $\int x^n dx (a+bx^m)^p$ à $\int x^r dx (a+bx^m)^q$, il faudroit alors réduire la ſeconde formule à la premiere, & on auroit une intégrale de cette forme, $\int x^r dx (a+bx^m)^q = X + A \int x^n dx (a+bx^m)^p$; d'où par une ſimple tranſpoſition on déduiroit $\int x^n dx (a+bx^m)^p = \frac{1}{A} \int x^r dx (a+bx^m)^q - \frac{X}{A}$.

EXEMPLE. Soit la différentielle $x^4 dx (1+xx)^{-3}$ qu'il s'agiſſe de ramener à $dx (1+xx)^{-1}$. Je ſuppoſe, au contraire, qu'il faut ramener celle-ci à la premiere, & j'ai $n=0$, $a=1$, $b=1$, $m=2$, $p=-1$, $q=-3$, $r=4$, $p-q=i=2$. Donc $\int dx (1+xx)^{-1} = x (1+xx)^{-1} + \frac{2}{3} x^3 (1+xx)^{-2} + \frac{2}{3} \int x^4 dx (1+xx)^{-3}$, & par conſéquent, ſans avoir recours à la premiere formule, j'ai $\int x^4 dx (1+xx)^{-3} = -\frac{3}{8} x (1+xx)^{-1} - \frac{1}{4} x^3 (1+xx)^{-2} + \frac{3}{8} \int dx (1+xx)^{-1}$. Or $\int dx (1+xx)^{-1} = \int \frac{dx}{1+xx}$ = l'arc d'un cercle dont le rayon eſt 1, & dont la tangente eſt x; car $d(tang\, z) = \frac{dz}{cos^2 z}$; donc $dz = \frac{(d\, tang\, z)}{1+tang^2 z} = \frac{dx}{1+xx}$, ſi on fait $tang\, z = x$

905. En général, cette méthode peut ſervir à ramener l'intégrale de $x^{2k} dx (1+xx)^{-m}$ à celle de $dx (1+xx)^{-1}$, ou à un arc de cercle.

De l'intégration des fractions différentielles rationnelles.

906. Supposons que $\frac{Pdx}{Q}$ soit une fraction rationnelle, & que le plus grand exposant de x dans P soit plus petit, au moins d'une unité, que dans Q. S'il ne l'est pas, on divisera le numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce que cette derniere condition ait lieu. Soit, par exemple, $\frac{x^4 dx}{a+bx^3}$; on aura en divisant, $\frac{xdx}{b} - \frac{\frac{a}{b} \cdot xdx}{a+bx^3}$, dont la seconde partie est telle que nous l'avons supposée pour $\frac{Pdx}{Q}$.

907. Cela posé, on cherchera les facteurs de Q, comme si on avoit à résoudre l'équation $Q = 0$; & s'ils sont tous réels & inégaux, alors la fraction proposée sera de cette forme $\frac{ax^{m-1}+bx^{m-2}+ \&c. \ldots + \omega}{(x-f)(x-g)(x-h)\&c.}$, en supposant que le nombre des facteurs $x-f$, $x-g$, &c. soit m. Pour intégrer dans ce cas, on décomposera cette fraction en celles-ci $\frac{Adx}{x-f} + \frac{Bdx}{x-g} +$ &c. dont l'intégrale est $Al(x-f) + Bl(x-g) +$ &c. . . avec une constante, & on déterminera les coefficiens A, B, &c. en réduisant d'abord au même dénominateur, en transposant ensuite, & égalant à zéro le coefficient de chaque puissance de x, ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues.

Ex. On demande l'intégrale de $\frac{dx}{(aa-xx)x}$? je décompose cette fraction en celles-ci $\frac{Adx}{x} + \frac{Bdx}{a-x} + \frac{Cdx}{a+x}$, & réduisant au même dénominateur, transposant & ordonnant, je trouve,

$$\left.\begin{array}{l} Aa^2 + Bax + Bxx \\ -1 + Ca \quad -A \\ \qquad\qquad\quad -C \end{array}\right\} = 0.$$

Donc $A = -\frac{1}{aa}$, $B = \frac{1}{2aa}$, $C = -\frac{1}{2aa}$, & $\frac{dx}{(aa-xx)x} = \frac{1}{aa} \cdot \frac{dx}{x}$ $+ \frac{1}{2aa} \cdot \frac{dx}{a-x} - \frac{1}{2aa} \cdot \frac{dx}{a+x}$, dont l'intégrale est $-\frac{lx}{aa} - \frac{l(a-x)}{2aa}$ $-\frac{l(a+x)}{2aa} + \frac{lC}{aa} = \frac{1}{aa}\, l\, \frac{xC}{\sqrt{a^2-x^2}}$. On trouvera de même que

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{\frac{1}{2a}\, dx}{a+x} + \int \frac{\frac{1}{2a}\, dx}{a-x} = \frac{1}{2a}\, l\, \frac{C(a+x)}{a-x}.$$

908. Cette méthode réussira toujours lorsque les facteurs du dénominateur proposé seront tous réels & inégaux ; mais si quelques-uns d'entr'eux étoient égaux, si $(x-a)^m$, par exemple, représentoit un nombre m de ces facteurs, alors on décomposeroit la fraction en celles-ci, $\frac{Adx}{x-f} + \frac{Bdx}{x-q}$ $+$ &c. . . . . $+ \frac{A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \&c. \ldots + R}{(x-a)^m} dx$, & après avoir déterminé les coefficiens, comme ci-dessus, on intégreroit $\frac{A'x^{m-1}}{(x-a)^m} dx + \frac{B'x^{m-2}}{(x-a)^m} +$ &c. ou en général, $x^k dx (x-a)^{-m}$, en faisant $x - a = z$.

Ex. Soit $\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}$, dont on cherche l'intégrale. Je suppose $\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{Adx}{x} + \frac{(Bx+C)\,dx}{(x-1)^2} + \ldots\ldots$ $\frac{(Dx+E)\,dx}{(x+1)^2}$, d'où, en suivant la méthode ci-dessus pour déterminer les coefficiens, l'on trouve $A=2$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{7}{4}$; $D=-\frac{5}{4}$, $E=-\frac{7}{4}$; ainsi $\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{2dx}{x}+\frac{1}{4}\frac{(7-3x)dx}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{(5x+7)dx}{(x+1)^2}$. Maintenant pour intégrer la fraction $\frac{(7-3x)dx}{(x-1)^2}$, je fais $x-1=z$, ce qui la change en $\frac{(4-3z)dx}{zz}=\frac{4dz}{zz}-\frac{3dz}{z}$, dont l'intégrale est $-\frac{4}{z}-3lz=\frac{-4}{x-1}-3l(x-1)$; & en traitant de la même maniere l'autre fraction, je trouve pour l'intégrale totale $2lx-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{3}{4}l(x-1)-\frac{5}{4}l(x+1)+C$.

909. S'il y avoit dans Q des facteurs imaginaires, en représentant l'un d'eux par $x+a+b\sqrt{-1}$, il y en auroit un autre de la forme $x+a-b\sqrt{-1}$. Donc $x^2+2ax+a^2+b^2$ leur produit seroit un facteur réel de Q. On chercheroit donc (326) les coefficients $2a$, a^2+b^2, & le facteur réel du second degré $x^2+2ax+a^2+b^2$, ou pour abréger, le facteur x^2+mx+n seroit déterminé. Ainsi on supposeroit que $\frac{(Ax+B)dx}{x^2+mx+n}$ est une des fractions partielles de $\frac{Pdx}{Q}$, & on détermineroit A & B comme ci-dessus. Ensuite, faisant $x+\frac{1}{2}m=z$, la fraction deviendroit $\frac{(A'z+B')dz}{zz+b'b'}=\frac{A'zdz}{zz+b'b'}+\frac{B'dz}{zz+b'b'}$. Or $\int\frac{A'zdz}{zz+b'b'}=\frac{A'}{2}l(zz+b'b')$, & $\int\frac{B'dz}{zz+b'b'}=\frac{B'}{b'}\int\frac{\frac{dz}{b'}}{1+\frac{zz}{b'b'}}=\frac{B'}{b'}\times$ *Arc de cercle dont la tangente est* $\frac{z}{b'}=\frac{B'}{b'}\times$ *Arc tang* $\frac{z}{b'}$; on auroit donc l'intégrale demandée.

Ex.

Ex. Soit $\frac{(zz-z+1)dz}{(1+z)(1+zz)} = \frac{Adz}{1+z} + \frac{(Bz+C)dz}{1+zz}$; on trouvera $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$, ce qui change la fraction en celles-ci $\frac{1}{2}\frac{dz}{1+z} - \frac{1}{2}\left(\frac{zdz}{1+zz}\right) - \frac{1}{2}\frac{dz}{1+zz}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}l(1+z) - \frac{1}{4}l(1+zz) - \frac{1}{2}$ *Arc tang* $z + C$.

Soit encore $\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+xx)}$ qui se réduit à $\frac{dx}{x}$ $- \frac{(2x+3)dx}{(1+x)^2} + \frac{xdx}{1+x+xx}$. Pour intégrer cette derniere quantité, je fais $x = z - \frac{1}{2}$ & elle devient $\frac{(z-\frac{1}{2})dz}{zz+\frac{3}{4}} =$ $\frac{zdz}{zz+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\frac{dz}{zz+\frac{3}{4}}$ dont l'intégrale est $\frac{1}{2}l(zz+\frac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}}$ *Arc tang* $\frac{2z}{\sqrt{3}}$. Substituant donc la valeur de z, j'ai pour l'intégrale entiere, $lx - 2l(1+x) + \frac{1}{2}l(1+x+xx) +$ $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ *Arc tang* $\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C$.

910. Le dernier cas qui nous reste à traiter est celui où le dénominateur Q auroit un ou plusieurs facteurs de cette forme $(xx+ax+b)^m$. Alors on supposera que la fraction partielle provenue de ce facteur est $dx\frac{(Ax^{2m-1}+x^{2m-2}+\&c.+R)}{(xx+ax+b)^m}$ & on déterminera les coefficients A, B, &c. comme ci-dessus. Ensuite, substituant $x+\frac{1}{2}a$ au lieu de z, la fraction deviendra de cette forme, $\frac{A'z^{2m-1}+B'z^{2m-2}+\&c.\ldots+R'}{(zz+bb)^m}dz$, que l'on peut décomposer ainsi $\frac{A'z^{2m-1}}{(zz+bb)^m}dz + \frac{B'z^{2m-2}}{(zz+bb)^m}dz + \&c.$ Or les termes ou le numérateur a une puissance impaire sont intégrables,

en partie algébriquement, & en partie par logarithmes (899); & ceux où z dans le numérateur a une puissance paire, étant de la forme $\frac{Mz^{2k}dz}{(zz+bb)^m}$, peuvent se ramener (905) à $\frac{dz}{zz+bb}$, c'est-à-dire, qu'on peut les intégrer, en partie algébriquement, & en partie par arcs de cercle; on aura donc par ce moyen l'intégrale de la fraction proposée.

911. Pour éclaircir ces différentes méthodes, voici un exemple qui les comprendra toutes.

Soit la fraction $\frac{dx}{(1+x)xx(xx+2)(xx+1)^2} = \frac{Adx}{1+x} + \frac{(Bx+C)dx}{xx} + \frac{(Dx+E)dx}{xx+2} + \frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I)dx}{(xx+1)^2}$.

On trouvera, en réduisant au même dénominateur $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{6}$, $E=-\frac{1}{6}$, $F=\frac{1}{4}$, $G=-\frac{1}{4}$, $H=\frac{3}{4}$, $I=-\frac{3}{4}$, & la fraction proposée $=\frac{1}{12}\cdot\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)dx}{xx}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(x-1dx}{xx+2}+\frac{(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{4})dx}{(xx+1)^2}$. Or $\int\frac{1}{12}\cdot\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{12}l(1+x)$, $\int\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)dx}{xx}=\frac{1}{2}l\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}$, $\int\frac{1}{6}\cdot\frac{xdx-dx}{xx+2}=\frac{1}{12}\int\frac{2xdx}{xx+2}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\cdot\int\frac{\frac{dx}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}xx+1}=\frac{1}{12}l(xx+2)-\frac{1}{6\sqrt{2}}Arc\,tang\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\int\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3dx}{(xx+1)^2}=\frac{1}{8}l(xx+1)+\frac{1}{8(xx+1)}$, $\int\frac{3}{4}\cdot\frac{xdx}{(xx+1)^2}=-\frac{3}{8(xx+1)}$. Pour intégrer $-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2dx}{(xx+1)^2}$, $-\frac{3}{4}\cdot\frac{dx}{(1+xx)^2}$, il faut se proposer de ramener $\int\frac{dx}{1+xx}$ à la premiere, & on aura (904) $\int\frac{dx}{1+xx}=\frac{x}{1+xx}+2\int x^2dx(1+xx)^{-2}$;

Donc $\int x^2 dx\,(1+xx)^{-2} = -\dfrac{\frac{1}{2}x}{1+xx} + \frac{1}{2}\,Arc\ tang\ x$. Or $\int x^2 dx$ $(1+xx)^{-2} = -x(1+xx)^{-1} + \int dx\,(1+xx)^{-2}$. Donc $\int dx\,(1+xx)^{-2} = x(1+xx)^{-1} + \int x^2 dx\,(1+xx)^{-2} = \dfrac{\frac{1}{2}x}{1+xx} + \frac{1}{2}\,Arc\ tang\ x$. Réunissant donc toutes ces intégrales, on a pour celle de la fraction proposée, $\int \dfrac{dx}{(1+x)\,xx\,(xx+2)\,(xx+1)^2}$

$$= \tfrac{1}{11}\,l(1+x) + \tfrac{1}{12}\,l(xx+2) + \tfrac{1}{8}\,l(xx+1) + \tfrac{1}{2}\,l\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{\frac{1}{4}(x+1)}{1+xx} - \tfrac{1}{2}\,Arc\ tang\ x - \frac{1}{6\sqrt{2}}\,Arc\ tang\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

912. Il suit de ce qui précede que toute différentielle fractionnaire & rationnelle est toujours intégrable, ou algébriquement, ou par les logarithmes, ou par les Arcs de cercle. La seule difficulté consiste à trouver les facteurs du dénominateur Q. Mais c'est plutôt un défaut de l'Algebre ordinaire que de la méthode d'intégration que nous venons de donner.

Lorsqu'on pourra donc rendre rationnelle une différentielle, on sera sûr d'en pouvoir trouver l'intégrale; or voici quelques cas où cette réduction est possible.

913. Soit d'abord une quantité où il n'entre que des radicaux monomes, telle que $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+xx}{x+\sqrt[4]{x}}\right)dx$; je l'écris ainsi, $\dfrac{x^{\frac{4}{12}}dx + x^{\frac{18}{12}}dx + xxdx}{x+x^{\frac{3}{12}}}$. Or il est clair que si je fais $x^{\frac{1}{12}} = z$, la différentielle deviendra rationnelle, & par conséquent intégrable.

Soit maintenant X une fonction rationnelle de x; pour trouver l'intégrale de $dy = Xdx\sqrt{a+bx+cxx}$, je cherche les deux facteurs de $a+bx+cxx$; s'ils sont réels j'ai $\sqrt{a+bx+cxx} = \sqrt{(m+nx)(p+qx)}$. Je suppose cette quantité $=(m+nx)z$, & en élevant au quarré, jai $p+qx=(m+nx)zz$, d'où je tire $x =$

$\frac{p - mzz}{nzz - q}$, $(m + nx)z = \frac{pn - mq}{nzz - q} = \sqrt{(a + bx + cx^2)}\,dx =$
$\frac{-2mzdz(nzz-q) - 2nzdz(p-mzz)}{(nzz-q)^2} = \frac{+2zdz(qm-pn)}{(nzz-q)^2}$. Or ces valeurs étant substituées dans la formule $Xdx\sqrt{a+bx+cx^2}$ la rendront rationnelle, & par conséquent intégrable. On voit que la même chose auroit lieu, si on avoit à intégrer $dy = \frac{Ydx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$.

Ex. Soit $dy = dx\sqrt{aa - xx}$, on fera $\sqrt{aa - xx} = (a - x)z$; donc $x = \frac{-a + az^2}{1 + zz}$, $dx = \frac{4azdz}{(1 + zz)^2}$, $(a - x)z = \frac{2az}{1 + zz} = \sqrt{aa - xx}$, $dy = \frac{8a^2z^2dz}{(1+zz)^3}$, quantité rationnelle & facile à intégrer.

Soit encore $dy = \frac{dx}{\sqrt{xx - aa}}$; en faisant $\sqrt{xx - aa} = (x - a)z$; on aura $dy = \frac{-2dz}{z^2 - 1}$, $y = l\frac{c(z+1)}{z-1} = l\frac{c}{a}(x + \sqrt{xx - aa})$.

914. Lorsque les facteurs de $a + bx + cx^2$ sont imaginaires, il faut faire évanouir le second terme de cette quantité en supposant $x + \frac{b}{2c} = z$, alors $dx\sqrt{a + bx + cxx}$ devient de cette forme $dz\sqrt{zz + b'b'}$. Soit donc $\sqrt{zz + b'b'} = z + u$, on aura $\frac{b'b' - uu}{2u} = z$; $\sqrt{zz + b'b'} = z + u = \frac{b'b' + uu}{2u}$, $dz = -\frac{du}{2uu}(b'b' + uu)$, ces valeurs étant substituées dans la formule $\frac{Zdz}{\sqrt{zz + b'b'}}$, ou $Zdz \times \sqrt{zz + b'b'}$, la rendront rationnelle.

Soit, par exemple, $dy = dx\sqrt{xx + aa}$; en faisant $\sqrt{xx + aa} = x + z$, on aura $dy = xdx + zdz$; or $dx = -\frac{dz}{2zz}(aa + zz)$.

Donc $dy = xdx - \frac{aa}{2} \cdot \frac{dz}{z} - \frac{zdz}{2}$, & $y = C + \frac{1}{2}xx - \frac{aa}{2}lz - \frac{1}{4}$ $zz = C - \frac{1}{4}aa + \frac{x}{2}\sqrt{xx+aa} + \frac{1}{2}aal(x + \sqrt{xx+aa}) - aala$;

soit donc $C - \frac{1}{4}aa - aala = C'$, on aura $y = C' + \frac{x}{2}\sqrt{xx+aa}$ $+ \frac{1}{2}aal(x + \sqrt{xx+aa})$.

915. On peut appliquer la même méthode au premier cas où $a + b'x + cx^2$ a deux facteurs réels ; car en faisant évanouir le second terme, on aura à intégrer $dz\sqrt{zz-bb}$, ou $dz\sqrt{bb-zz}$. Or si on suppose $\sqrt{zz-bb} = z - u$, ou $\sqrt{bb-zz} = b - uz$, on rendra rationnelles l'une & l'autre différentielle.

Méthodes pour intégrer par Séries.

916. Lorsqu'une différentielle n'est pas susceptible d'une intégration exacte, on a recours aux approximations, & les séries sont alors une des dernieres ressources. On voit bien, en effet, qu'en réduisant en série une fonction X de la variable x, on aura une suite de termes monomes dont les intégrales réunies donneront une valeur approchée de $\int Xdx$.

Par exemple, on sait que l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$ est $l(a+x)$, & que $\frac{dx}{a+x} = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} -$ &c. Donc $\int\frac{dx}{a+x}$; ou $l(a+x)$ $= \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ &c. $+ C$. Mais si on fait $x=0$, la constante $C = la$; on aura donc $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} +$ $\frac{x^3}{3a^3} -$ &c. & par conséquent $\frac{-dx}{a-x}$ étant le logar. de $a - x$,

$$\int\frac{-dx}{a-x} \text{ ou } l(a-x) = la - \frac{x}{a}\left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \text{\&c.}\right).$$

Supposons maintenant $x = \frac{az}{a+z}$, & nous aurons $l(a-x) = 2la - l(a+z) = la - \frac{z}{a+z} - \frac{z^2}{2(a+z)^2} -$ &c. donc $l(a+z) = la + \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2(a+z)^2} +$ &c. Par ex. $l\,100 = l\,99 + \frac{1}{100} + \frac{1}{2(100)^2} + \frac{1}{3(100)^3}$ &c. donc $l\,11 = 2.39789527$.

Si on a $dy = \frac{dx}{1+xx}$, alors $y = Arc\ tang\ x$; mais $\frac{dx}{1+xx}$ étant réduit en série, donne $dy = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx +$ &c. donc y, ou $Arc\ tang\ x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$ &c.

Soit à présent y un arc quelconque, x son sinus, ou $y = Arc\ sin\ x$, on aura $dy =$ * $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = dx(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 +$ &c.). Donc y, ou $Arc\ sin\ x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} +$ &c. intégrale à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter; soit $x = 1$, & la demi-circonférence $= c$, on aura $\frac{c}{2} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7} +$ &c. Si $x = \frac{1}{2}$, l'arc y devient $\frac{c}{6} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7.2^7} +$ &c.

917. Ces exemples suffisent pour faire entendre la méthode précédente. Mais il en est plusieurs autres qui donnent des séries plus convergentes dans certaines occasions. Telle est celle qui suit.

* Il faut se souvenir que $cos.\,x = \sqrt{1-xx}$.

La formule $d(xy) = xdy + ydx$, donne $xy = \int xdy + \int ydx$; donc, en général, $\int xdy = xy - \int ydx$, & $\int Xdx = Xx - \int xdX$. Je suppose $dX = X^{\text{I}}dx$; donc par le même principe, $\int xdX$, ou $\int X^{\text{I}}xdx = \frac{X^{\text{I}}xx}{2} - \frac{\int xxdX^{\text{I}}}{2}$. Je suppose encore $dX^{\text{I}} = X^{\text{II}}dx$, & j'ai $\int \frac{xxdX^{\text{I}}}{2} = \frac{x^3}{2.3}X^{\text{II}} - \int \frac{x^3}{2.3}dX^{\text{II}}$; &c. Substituant ces différentes valeurs dans la premiere expression, on a $\int Xdx = Xx - \frac{x^2}{2}X^{\text{I}} + \frac{x^3}{2.3}X^{\text{II}} - \frac{x^4}{2.3.4}X^{\text{III}} + \frac{x^5}{2.3.4.5}X^{\text{IV}} -$ &c. ou bien en supposant dx constante, $\int Xdx = Xx - \frac{x^2dX}{2.dx} + \frac{x^3ddX}{2.3.dx^2} - \frac{x^4dddX}{2.3.4.dx^3} +$ &c.

Ex. Soit $X = \frac{1}{a+x}$, on aura $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2}$, $\frac{ddX}{dx^2} =$ * $\frac{2}{(a+x)^3}$, $\frac{dddX}{dx^3} = \frac{-2.3}{(a+x)^4}$, &c. Donc $\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} +$ &c.....$+ C$, ou bien $l(a+x) = la + \frac{x}{a+x} + \frac{xx}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} +$ &c. comme nous l'avons déja trouvé. Il n'en faudroit pas davantage pour voir l'accord de ces méthodes; elles conduisent toutes au même but, quoique par des routes différentes.

918. Soit maintenant $dy = m(a+x)^{m-1}dx$, dont l'intégrale est $y = (a+x)^m$; on aura $X = m(a+x)^{m-1}$, $\frac{dX}{dx} = m.(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{ddX}{dx^3} = m.m-1.m-2(a+x)^{m-3}$, &c.

---

* Supposant toujours dx constante.

Donc y, ou $(a+x)^m = C + mx(a+x)^{m-1} - \frac{m.m-1}{2}x^2$ $(a+x)^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3(a+x)^{m-3} -$ &c. Soit $x=0$, on aura $C=a^m$, & $(a+x)^m = a^m + mx(a+x)^{m-1} - \frac{m.m-1}{2}x^2(a+x)^{m-2} +$ &c. Faisons $a+x=z$, nous aurons $a^m = (z-x)^m$ & $(a+x)^m = z^m = (z-x)^m + mxz^{m-1} - \frac{m.m-1}{2}x^2z^{m-2} +$ &c. donc $(z-x)^m = z^m - mxz^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}x^2z^{m-2} -$ &c... $(z+x)^m = z^m + mxz^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}x^2z^{m-2} +$ &c... $\frac{(z+x)^m}{z^m} = 1 + m.\frac{x}{z} + \frac{m.m-1}{2}\frac{x^2}{z^2} +$ &c... & $\frac{(z+x)^{-m}}{z-m} = \frac{z^m}{(z+x)^m} = 1 - \frac{mx}{z} + \frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{z^2} - \frac{m.m+1.m+2}{2.3}.\frac{x^3}{z^3} +$ &c. Maintenant si $z+x=b$, on aura $(b-x)^m = b^m\left(1 - \frac{mx}{b-x} + \frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{(b-x)^2} -\text{ \&c.}\right)$, & $(b+x)^m = b^m\left(1 + \frac{mx}{b+x} + \frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{(b+x)^2} + \frac{m.m+1.m+2}{2.3}.\frac{x^3}{(b+x)^3} +\text{ \&c.}\right)$.

919. Pour trouver la valeur de $y = a^x$, je différentie, & j'ai $dy = a^x dxla$ (855). Donc $X = a^x la$, $\frac{dX}{dx} = a^x l^2 a$, $\frac{ddX}{dx^2} = a^x l^3 a$, &c. ce qui donne y, ou $a^x = C + a^x xla - \frac{xxl^2a}{2}a^x$ $+$

$\mp \dfrac{x^3l^3a}{2.3}a^x$ — &c. Soit $x=0$, on aura $C=1$, & $a^x = 1 +$ $xla \times a^x - \dfrac{xxl^2a}{2}a^x +$ &c. divisant par a^x, il viendra $1 =$ $a^{-x} + xla - \dfrac{xxl^2a}{2} +$ &c. Donc $a^{-x} = 1 - xla + \dfrac{xxl^2a}{2}$ — &c. & par conséquent $a^x = 1 + xla - \dfrac{xxl^2a}{2} + \dfrac{x^3l^3a}{2.3} -$ &c. comme on le fait d'ailleurs.

920. Soit maintenant y un arc quelconque, x fa tangente, on aura $dy = \dfrac{dx}{1+xx}$; mais comme en faisant $X = \dfrac{1}{1+xx}$, on trouveroit une série trop compliquée pour la valeur de l'arc y, on pourra modifier ainsi la méthode précédente.

D'abord il est clair que $y = \dfrac{x}{1+xx} - \int xd\left(\dfrac{1}{1+xx}\right) = \dfrac{x}{1+xx}$ $+ \int \dfrac{2x^2dx}{(1+xx)^2}$. Il est clair ensuite que $\int \dfrac{2x^2dx}{(1+xx)^2} = \dfrac{\frac{2}{3}x^3}{(1+xx)^2}$ $+ \int \dfrac{2.4.x^4dx}{3(1+xx)^3}$. (Remarquez ici la différence des deux méthodes).

De même $\int \dfrac{2.4.x^4dx}{3(1+xx)^3} = \dfrac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} + \int \dfrac{2.4.6x^6dx}{3.5(1+xx)^4}$, &c.

Donc *Arc tang* $x = \dfrac{x}{1+xx} + \dfrac{2x^3}{3(1+xx)^2} + \dfrac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} +$ $\dfrac{2.4.6.x^7}{3.5.7(1+xx)^4} +$ &c. Donc en général, $y = \cos y\,(\sin y +$ $\frac{2}{3}\sin^3 y + \dfrac{2.4}{3.5}\sin^5 y + \dfrac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7 y +$ &c.$) = \ldots \dfrac{\sin 2y}{2}$ $(1 + \frac{2}{3}\sin^2 y + \dfrac{2.4}{3.5}\sin^4 y + \dfrac{2.4.6}{3.5.7}\sin^6 y +$ &c.$)$. Si $y = 45°$, on aura $c = 2\left(1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \frac{1.2.3}{1.3.5.7} + \&c.\right)$. Le rayon étant $= 1$ on a $\sin 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

De l'intégration des différentielles Logarithmiques & Exponentielles.

921. Pour intégrer la différentielle logarithmique $Xdxlx$, en supposant X une fonction quelconque de x, soit $y = lx$, & $dz = Xdx$, on aura $\int X\,dx\,lx = \int y\,dz = yz - \int z\,dy = lx \int X\,dx - \int z \frac{dx}{x}$. Donc l'intégrale de la quantité proposée se réduit à celle de Xdx, & de $\frac{dx}{x} \int Xdx$. On pourra donc la trouver par les regles précédentes.

EXEMPLES. Soit $X = x^n$; on aura $\int Xdx = z = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, & $\int z \frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$. Donc $\int x^n dx lx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right)$; intégrale qui n'est sujette à d'autre exception qu'à celle du cas où $n = -1$. Car alors on a $\int \frac{dx}{x} lx = \int lxdlx = \frac{1}{2} l^2 x$.

Soit encore $X = \frac{1}{(1-x)^2}$, on aura $\int Xdx = \frac{1}{1-x}$, $\int \frac{zdx}{x} = \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = lx - l(1-x)$. Donc $\int \frac{dxlx}{(1-x)^2} = \frac{lx}{1-x} - lx + l(1-x) = \frac{xlx}{1-x} + l(1-x)$.

922. Si X est toujours une fonction de x, & qu'il s'agisse d'intégrer $dXl^n x$, on mettra cette expression sous la forme $\int dXl^n x = Xl^n x - n\int \frac{Xdx}{x} l^{n-1}x$; & supposant ensuite $\int \frac{Xdx}{x} = X^1$, on

aura par la même formule, $\int dX^{\mathrm{I}} l^{n-1} x = X^{\mathrm{I}} l^{n-1} x - (n-1) \int \frac{X^{\mathrm{I}} dx}{x} l^{n-2} x$. Si on fait $\int \frac{X^{\mathrm{I}} dx}{x} = X^{\mathrm{II}}$, on aura $\int dX^{\mathrm{II}} l^{n-2} x = X^{\mathrm{II}} l^{n-2} x - (n-2) \int \frac{X^{\mathrm{II}} dx}{x} l^{n-3} x$, &c. Donc $\int dX l^n x = X l^n x - n X^{\mathrm{I}} l^{n-1} x + n \,.\, n-1 \,.\, X^{\mathrm{II}} l^{n-2} x - n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, X^{\mathrm{III}} l^{n-3} x +$ &c. expreſſion qui ne dépend que de l'intégration des quantités algébriques, & qui n'aura qu'un nombre fini de termes, lorſque n ſera entier & poſitif.

Soit, par exemple, $dX = x^m dx$, on aura $X = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\int \frac{X dx}{x} = X^{\mathrm{I}} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, $\int \frac{X^{\mathrm{I}} dx}{x} = X^{\mathrm{II}} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$, $X^{\mathrm{III}} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^4}$, &c. Donc $\int x^m dx l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n \,.\, n-1}{(m+1)^2} l^{n-2} x - \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{(m+1)^3} l^{n-3} x + \text{\&c.} \right)$. Le ſeul cas qui échappe à la formule générale eſt celui où $m = -1$, & alors on a $\int \frac{dx}{x} l^n x = \frac{l^{n+1} x}{n+1}$.

923. Cette formule générale s'applique également au cas où n eſt négatif. Mais comme on a alors pour intégrale une ſérie infinie, voici un autre moyen d'intégrer.

Propoſons-nous la quantité $\frac{X dx}{(lx)^n}$, qui étant miſe ſous cette forme, $Xx \,.\, \frac{dlx}{(lx)^n}$, donne $\int \frac{X dx}{(lx)^n} = \frac{-Xx}{(n-1) l^{n-1} x} + \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{l^{n-1} x} d(Xx)$. Faiſons maintenant $dXx = X^{\mathrm{I}} dx$, $dX^{\mathrm{I}} x = X^{\mathrm{II}} dx$, $dX^{\mathrm{II}} x = X^{\mathrm{III}} dx$, &c. & nous aurons $\int \frac{X dx}{(lx)^n} =$

$$-\frac{Xx}{(n-1)\,l^{n-1}x}-\frac{X^{\text{I}}x}{(n-1)(n-2)\,l^{n-2}x}-\frac{X^{\text{II}}x}{(n-1)(n-2)(n-3)\,l^{n-3}x}$$

— &c. jusqu'à un terme de la forme $\frac{1}{n-1.n-2.n-3\ldots 2.1}\int\frac{xdx}{lx}$, dont l'intégration, si elle est possible donnera celle de la formule proposée.

Soit par exemple $X = x^m$, nous aurons $X^{\text{I}} = x^m(m+1)$, $X^{\text{II}} = (m+1)^2x^m$, $X^{\text{III}} = (m+1)^3x^m$, &c. Donc $\int\frac{x^mdx}{l^nx} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)\,l^nx}$ $\left(lx + \frac{m+1}{n-2}\,l^2x + \frac{(m+1)^2}{n-2.n-3}\,l^3x + \frac{(m+1)^3}{n-2.n-3.n-4}\,l^4x\right.$ $\left.+\ \&c.\right) + \frac{(m+1)^{n-1}}{n-1.n-2\ldots.1}\int\frac{x^mdx}{lx}$; l'intégrale proposée se réduit donc à celle de $\frac{x^mdx}{lx}$. Or si on fait $x^{m+1} = u$, cette quantité deviendra $\frac{du}{lu}$, différentielle qu'on n'a pas encore pu intégrer. C'est pourquoi on ne peut avoir l'intégale de $\frac{x^mdx}{l^nx}$ que par séries, excepté dans le cas où $m = -1$; car alors on trouve par la série précédente, & sans son secours, $\int\frac{dx}{xl^nx} = \frac{1}{1-n}\,l^{1-n}x.$

924. Soit maintenant la formule exponentielle a^xXdx qu'il s'agisse d'intégrer. J'observe d'abord que $a^xdx.la = d(a^x)$; donc $\int a^xdx = \frac{1}{la}.a^x$, & puisque $\int a^xXdx = X\int a^xdx - \int dX\int a^xdx$; on a $\int a^xXdx = \frac{a^xX}{la} - \frac{1}{la}\int a^xdX$. Soit $dX = X^{\text{I}}dx$, on aura

$\int a^x dX = \int a^x X^{\mathrm{I}} dx = \frac{a^x X^{\mathrm{I}}}{la} - \frac{1}{la} \int a^x dX^{\mathrm{I}}$; soit $dX^{\mathrm{I}} = X^{\mathrm{II}} dx$;

& on aura $\int a^x dX^{\mathrm{I}} = \frac{a^x X^{\mathrm{II}}}{la} - la^x dX^{\mathrm{II}}$, &c. Donc $\int a^x X dx =$

$\frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{l^2 a} a^x X^{\mathrm{I}} + \frac{1}{l^3 a} a^x X^{\mathrm{II}} -$ &c. jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale $\int a^x dx'$, qui sera au moins la plus simple des intégrales transcendantes de son espece, si elle n'est pas susceptible d'une intégration exacte.

925. Remarquons que si e est le nombre dont le logarithme $= 1$, on a $\int e^x X dx = e^x X - e^x X^{\mathrm{I}} + e^x X^{\mathrm{II}} - e^x X^{\mathrm{III}} + e^x X^{\mathrm{IV}} - e^x X^{\mathrm{V}}$ + &c. Soit, par exemple, $X = x^n$, on aura $X^{\mathrm{I}} = nx^{n-1}$, $X^{\mathrm{II}} = n \cdot n-1 \cdot x^{n-1}$, $X^{\mathrm{III}} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{n-3}$, &c. Donc $\int a^x x^n dx = \frac{a^x}{la} \left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{la} + \frac{n \cdot n-1}{(la)^2} x^{n-2} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{(la)^3} x^{n-3} \right.$ + &c.), & par conséquent $\int e^x x^n dx = e^x (x^n - nx^{n-1} + n \cdot n - 1 \cdot x^{n-2} - n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot x^{n-3}$ + &c.).

926. Pour trouver l'intégrale de $\frac{a^x dx}{x}$, comme les regles précédentes deviennent inutiles, je réduis en série, & j'ai $\frac{a^x dx}{x} = \frac{dx}{x} \left(1 + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2 \cdot 3} + \text{\&c.} \right) = \frac{dx}{x} + dxla + \frac{xdx}{2} l^2 a +$ &c. Donc $\int \frac{a^x dx}{x} = C + lx + xla + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 l^3 a}{2 \cdot 3}$ + &c. & $\int \frac{e^x dx}{x} = C + lx + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{xx}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3}$ + &c. Soit $e^x = z$, on aura $\frac{e^x dx}{x} = \frac{dz}{lz}$ differentielle d'une quantité tanscendante qui est égale à la série infinie $C + l$. $lz + lz + \frac{1}{2} \frac{l^2 z}{2} + \frac{1}{3} \frac{l^3 z}{2 \cdot 3}$ + &c. Puisqu'on a $\int \frac{dz}{lz} = zllz -$

$\int dz lz$, il est clair que $\int dz lz = z lz - \int \frac{dz}{lz}$, intégrale qui dépend encore de la quantité transcendante $\int \frac{dz}{lz}$.

927. Lorsque les regles précédentes ne pourront pas s'appliquer à l'intégration d'une quantité exponentielle, on la réduira en séries par la formule $a^x = 1 + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \frac{x^4 l^4 a}{2.3.4}$ + &c. & il sera facile d'intégrer.

Soit $dy = x^{mx} dx$; on aura par les séries, $dy = dx\ (1 + mxlx + \frac{m^2 x^2 l^2 x}{2} + \frac{m^3 x^3 l^3 x}{2.3} + \&c.) = dx + mxdxlx + \frac{m^2}{2} x^2 dx l^2 x$ + &c. dont l'intégrale se trouve par celle de $x^m dx l^n x$ (922), & on a $\int x^{mx} dx = x\ (1 - \frac{mx}{2^2} + \frac{m^2 x^2}{3^3} - \frac{m^3 x^3}{4^4} + \&c.) + mx^2 lx\ (\frac{1}{2} - \frac{mx}{3^2} + \frac{m^2 x^2}{4^3} - \&c.) + \frac{m^2 x^3 l^2 x}{2}\ (\frac{1}{3} - \frac{mx}{4^2} + \frac{m^2 x^3}{5^3} - \&c.)$ + &c. qui dans le cas particulier de $x = 1$ se réduit à la série convergente $1 - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4} + \&c.$ Cet exemple suffit pour faire voir comment on peut intégrer ces sortes de quantités par séries.

De l'Intégration des Quantités différentielles où il entre des Sinus, des Cosinus, &c.

928. Puisque $dx \cos x = d \sin x$, & que $- dx \sin x = d \cos x$; il est évident que $\int dx \cos x = \sin x$, que $\int dx \sin x = - \cos x$, & que par conséquent $\int dy \cos ny = \frac{1}{n} \int ndy \cos ny = \frac{1}{n} \sin ny$, & que $\int dy \sin ny = - \frac{1}{n} \cos ny$. Il est clair aussi que $\int dz \cos z\ (\sin z)^n$

$= \int (\sin z)^n \, d \sin z = \frac{1}{n+1} (\sin z)^{n+1}$, $\int (dz \sin z) \cos^n z = -\frac{1}{n+1} (\cos z)^{n+1}$. De même si on avoit à intégrer $dy \sin y \cos ay$, on feroit $\sin y \cos ay = \frac{1}{2} \sin (a+1) y - \frac{1}{2} \sin (a-1) y$, & l'intégrale deviendroit $-\frac{1}{2(a+1)} \cos (a+1) y + \frac{1}{2(a-1)} \cos (a-1) y$.

929. Il en feroit de même pour $dx \sin x \sin ax$, pour $dx \cos x \cos ax$, &c. On traiteroit avec la même facilité $dx \sin x \sin ax \cos bx$, &c. en réduisant ces produits à des sinus ou à des cosinus simples par le moyen des valeurs de $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$, &c. On pourroit donc intégrer par cette méthode $dx \sin^2 x$, $dx \sin^3 x$, $dx \cos^2 x$, &c. Mais il est plus simple de les intégrer de la maniere suivante.

930. La formule $dx (\sin x)^n = dx \sin x \,.\, \sin^{n-1} x$. On a donc $\int dx \sin^n x = \sin^{n-1} x \int dx \sin x - \int (d \sin^{n-1} x \,.\, \int dx \sin x) = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int dx \sin^{n-2} x \cos^2 x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int dx \sin^{n-2} x - (n-1) \int dx \sin^n x$; & en transposant, $\int dx \sin^n x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int dx \sin^{n-2} x$. On a donc aussi $\int dx \sin^{n-2} x = -\frac{1}{n-2} \cos x \sin^{n-3} x + \frac{n-3}{n-2} \int dx \sin^{n-4} x$; & par conséquent $\int dx \sin^n x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n \,.\, n-1} \cos x \sin^{n-3} x + \frac{n-1 \,.\, n-3}{n \,.\, n-2} \int dx \sin^{n-4} x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n \,.\, n-2} \cos x \sin^{n-3} x - \frac{n-1 \,.\, n-3}{n \,.\, n-2 \,.\, n-4} \cos x \sin^{n-5} x - \frac{n-1 \,.\, n-3 \,.\, n-5}{n \,.\, n-2 \,.\, n-4 \,.\, n-6} \cos x \sin^{n-7} x -$ &c. formule qui n'a lieu que dans les cas où n est impair, & alors l'intégrale ne dépend que des quantités $\sin x$, $\cos x$. Mais lorsqu'il est pair, au lieu du dernier terme de la série qui seroit de cette forme $-\frac{n-1 \,.\, n-3 \,..\, 1}{n \,.\, n-2 \,.....\, 0}$

$\cos x \sin x$, on auroit $+ \dfrac{n-1 \,.\, n-3 \ldots\ldots 1}{2 \,.\, 4 \ldots\ldots n-2 \,.\, n} \int dx \sin^{n-n} x = +$ $\dfrac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 1}{2 \,.\, 4 \ldots\ldots\ldots n} x$. L'intégrale seroit donc $- \dfrac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x -$ $\dfrac{n-1}{n.n-1} \cos x \sin^{n-3} x -$ &c. ...... $+ \dfrac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 1}{2 \,.\, 4 \ldots\ldots\ldots n} x$.

Ex. $\int dx \sin^5 x = -\frac{1}{5} \cos x \sin^4 x - \dfrac{4}{5 \cdot 3} \cos x \sin^2 x - \dfrac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$ $\cos x$; & $\int dx \sin^6 x = -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \dfrac{5}{6 \,.\, 4} \sin^3 x \cos x -$ $\dfrac{5 \cdot 3}{6 \,.\, 4 \,.\, 2} \sin x \cos x + \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} x$.

931. Faisons $x = 90° - z$, nous aurons $dx = -dz$, $\sin x =$ $\cos z$, & $\int dz \cos^n z = \dfrac{1}{n} \sin z \cos^{n-1} z + \dfrac{n-1}{n.n-2} \sin z \cos^{n-3} z +$ $\dfrac{n-1 \,.\, n-3}{n.n-2 \,.\, n-4} \sin z \cos^{n-5} z + \dfrac{n-1 \,.\, n-3 \,.\, n-5}{n.n-2.n-4.n-6} \sin z \cos^{n-7} z +$ $\dfrac{n-1 \,.\, n-3 \,.\, n-5 \ldots 2}{n \,.\, n-2 \,.\, n-4 \ldots\ldots 1} \sin z$, si n est impair ; & s'il est pair, le dernier terme $= + \dfrac{n-1 \,.\, n-3 \ldots\ldots 1}{n \,.\, n-2 \ldots\ldots 2} z$. Par exemple, $\int dy \cos^5 y =$ $\frac{1}{5} \sin y \cos^4 y + \dfrac{4}{5 \cdot 3} \sin y \cos^2 y + \dfrac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} \sin y$, & $\int dy \cos^6 y =$ $\frac{1}{6} \sin y \cos^5 y = \dfrac{5}{6 \,.\, 4} \sin y \cos^3 y + \dfrac{5 \cdot 3}{6 \,.\, 4 \,.\, 2} \sin y \cos y + \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \,.\, 4 \,.\, 2} y$.

932. Soit maintenant à intégrer $dy \sin^m y \cos^n y$; puisque $d(\sin^p y \cos^q y) = p \cos^{q+1} y \sin^{p-1} y \,.\, dy - q \cos^{q-1} y \sin^{p+1} y \,.\, dy$, on a $\int dy \sin^{p-1} y \cos^{q+1} y = \dfrac{1}{p} \sin^p y \cos^q y + \dfrac{q}{p} \int dy \cos^{q-1} y \sin^{p+1} y$.

Donc

Donc $\int dy \sin^m y \cos^n y = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} y \cos^{n-1} y + \frac{n-1}{m+1} \int dy \cos^{n-2} y \sin^{m+2} y$. Substituant $1 - \cos^2 y$ à la place de $\sin^2 y$, & transposant, on a $\int dy \sin^m y \cos^n y = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} y \cos^{n-1} y + \frac{n-1}{m+n} \int dy \sin^m y \cos^{n-2} y = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} y \cos^{n-1} y + \frac{n-1}{m+n \,.\, m+n-2} \sin^{m+1} y \cos^{n-3} y + \ldots\ldots\ldots \frac{n-1 \,.\, n-3 \,.\, \sin^{m+1} y \cos^{n-5} y}{m+n \,.\, m+n-2 \,.\, m+n-4} + \&c\ldots\ldots + \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 2 \sin^{m+1} y}{m+n \,.\, m+n-2 \,.\,.\, m+1}$, si n est impair, ou jusqu'au dernier terme $+ \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots\ldots 1}{m+n \,.\, m+n-2 \ldots m+2} \int dy \sin^m y$, si n est pair.

933. Faisons $y = 90° - z$, nous aurons $\int dz \cos^m z \sin^n z = - \frac{1}{m+n} \sin^{n-1} z \cos^{m+1} z - \frac{n-1 \,.\, \sin^{n-3} z \cos^{m+1} z}{m+n \,.\, m+n-2} - \frac{n-1 \,.\, n-3 \,.\, \cos^{m+1} z \sin^{n-5} z}{m+n \,.\, m+n-2 \,.\, m+n-4} - \&c.\ldots - \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 2 \,.\, \cos^{m+1} z}{m+n \,.\, m+n-2 \ldots m+1}$ si n est impair, & jusqu'au terme $+ \frac{n-1 \,.\, n-3 \ldots 1 \int dz \cos^m z}{m+n \,.\, m+n-2 \ldots\ldots m+2}$, s'il est pair.

Par ex. la premiere formule donne $\int dy \cos^3 y \sin^5 y = \frac{1}{8} \sin^6 y (\cos^2 y + \frac{1}{3}) = \frac{1}{8} \sin^6 y (\frac{4}{3} - \sin^2 y)$, & la seconde $\int dy \cos^3 y \sin^5 y = - \frac{1}{8} \cos^4 y (\sin^4 y + \frac{2}{3} \sin^2 y + \frac{1}{3})$. Il faut donc que ces deux résultats ne différent que d'une quantité constante. On trouvera que sa valeur est $\frac{1}{24}$.

934. Considérons maintenant les fractions où il entre des sinus; & comme les plus simples sont $\frac{dy}{\sin y}$, $\frac{dy}{\cos y}$, $\frac{dy \cos y}{\sin y}$, $\frac{dy \sin y}{\cos y}$; commençons par les intégrer.

La premiere, $\frac{dy}{\sin y} = \frac{dy \sin y}{\sin^2 y} = \frac{-d\cos y}{1-\cos^2 y} = \frac{-\frac{1}{2}d\cos y}{1+\cos y} - \frac{\frac{1}{2}d\cos y}{1-\cos y}$. Donc $\int \frac{dy}{\sin y} = \frac{1}{2}l\frac{1-\cos y}{1+\cos y} = \frac{1}{2}l\,tang^2 \frac{1}{2}y = l\,tang\,\frac{1}{2}y$.

Soit $y = 90^\circ - z$, & on aura $dy = -dz$, $\sin y = \cos z$; donc $\int \frac{dz}{\cos z} = -l\,tang\,(45^\circ - \frac{1}{2}z) = -l\cot(45^\circ + \frac{1}{2}z) = l\,tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}z)$.

La troisieme de ces fractions, $\int \frac{dy\cos y}{\sin y}$, a pour intégrale $\int \frac{d\sin y}{\sin y} = l\sin y = \int dy\cot y$.

La quatrieme, $\int \frac{dy\sin y}{\cos y} = -l\cos y = l\sec y = \int dy\,tang\,y$; de même $\int \frac{dy}{\sin y\cos y} = \int \frac{2dy}{\sin 2y} = l\,tang\,y$.

935. Cela posé, cherchons l'intégrale de la formule $\frac{dy}{\sin^m y}$. Nous avons déja vu (929) que $\int dy\sin^n y = -\frac{1}{n}\cos y\sin^{n-1} y + \frac{n-1}{n}\int dy\sin^{n-2} y$; faisons donc $n-2=-m$, ou $n=2-m$, & nous aurons $\int \frac{dy}{\sin^{m-2} y} = \frac{1}{m-2}\cos y\sin^{1-m} y + \frac{1-m}{2-m}\int\frac{dy}{\sin^m y}$; donc $\int \frac{dy}{\sin^m y} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos y}{\sin^{m-1} y} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dy}{\sin^{m-2} y} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos y}{\sin^{m-1} y} - \frac{m-2}{m-1.m-3}\cdot\frac{\cos y}{\sin^{m-3} y} - \frac{m-2.m-4}{m-1.m-3.m-5}\cdot\frac{\cos y}{\sin^{m-5} y}$ — &c. . . . . . . jusqu'au terme $+\frac{m-2.m-4\ldots.1}{m-1.m-3\ldots.2}\int\frac{dy}{\sin y}$, c'est-à-dire, $\frac{m-2.m-4\ldots.1}{m-1.m-3\ldots.2}\,l\,tang\,\frac{1}{2}y$, si m est impair,

& jusqu'à $\frac{m-2.m-4......2}{m-1.m-3......1}.\frac{\cos y}{\sin y}$, si m est pair.

Supposons $y = 90° - z$, & la formule précédente donnera $\int\frac{dz}{\cos^m z} = \frac{1}{m-1}.\frac{\sin z}{\cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{m-1.m-3}.\frac{\sin z}{\cos^{m-3} z} + \frac{m-2.m-4}{m-1.m-3.m-5}.\frac{\sin z}{\cos^{m-5} z} +$ &c. .... jusqu'au terme $+\frac{m-2.m-4.....2}{m-1.m-3....1}.\frac{\sin z}{\cos z}$, si m est pair, & jusqu'au terme $+\frac{m-2.m-4.....1}{m-1.m-3.....2}.\int\frac{dz}{\cos z} = \frac{m-2.m-4.....1}{m-1.m-3.....2}\, l\, tang\,(45° + \tfrac{1}{2}z)$, si m est impair. Par exemple, $\int\frac{dy}{\cos^7 y} = \frac{1}{6}.\frac{\sin y}{\cos^6 y} + \frac{5}{6.4}.\frac{\sin y}{\cos^4 y} + \frac{5.3}{6.4.2}.\frac{\sin y}{\cos^2 y} + \frac{5.3.1}{6.4.2}\, l\, tang\,(45° + \tfrac{1}{2}y)$.

936. Il est donc facile d'intégrer la formule $\frac{dy \cos^m y}{\sin^n y}$: car si m est un nombre impair $2k+1$, on a $\frac{dy \cos^{2k+1} y}{\sin^n y} = \frac{d(\sin y)}{\sin^n y}.(1 - \sin^2 y)^k$, qui est évidemment intégrable, quel que soit n. Si m est un nombre pair $2k$, alors $\frac{dy \cos^{2k} y}{\sin^n y} = \frac{dy(1-\sin^2 y)^k}{\sin^n y}$, expression qui étant développée s'intégrera facilement par la formule $\int\frac{dy}{\sin^m y}$.

Il en seroit de même pour $\frac{dy \sin^m y}{\cos^n y}$, & la formule $\frac{dy}{\sin^m y \cos^n y}$ s'intégreroit par les mêmes principes ; ensorte qu'il est aisé d'intégrer les différentielles où il entre des sinus & des cosinus, lorsqu'elles sont susceptibles d'intégration.

De l'intégration des Différentielles à plusieurs variables.

937. Soit $Pdx + Qdy$ une différentielle proposée à deux variables. Si T est son intégrale, on aura $dT = Pdx + Qdy$. Donc si on ne prend la différentielle de T qu'en faisant varier y, on aura $dT = Qdy$, & si on ne prend la différentielle de T qu'en faisant varier x, on aura $dT = Pdx$.

Marquant donc par $d^y T$ la différentielle de T prise en faisant varier y seul, & par $d^x T$ sa différentielle en ne faisant varier que x, on aura $d^y T = Qdy$, $d^x T = Pdx$. Donc $d^x(d^y T) = dyd^x Q$, $d^y(d^x T) = dxd^y P$. Or il est clair que $d^x d^y T = d^y d^x T$. Donc $dyd^x Q = dxd^y P$, ou $\frac{d^x Q}{dx} = \frac{d^y P}{dy}$; c'est-à-dire, que si la différentielle $Pdx + Qdy$, peut être intégrée, la différentielle de Q prise en faisant varier x seule & divisant par dx, doit être égale à la différentielle de P prise en faisant varier y seule & divisant par dy.

938. Cette condition ayant lieu, il sera facile d'intégrer. Car puisque $d^x T = Pdx$, si on marque par $\int^x$ les intégrales prises en ne considérant que x comme variable, on aura $T = \int^x P\,dx$ + une constante qui peut être une fonction Y de y, comme il est évident. Ainsi T ou $\int(Pdx + Qdy) = \int^x(Pdx) + Y$. On a de même $T = \int(Pdx + Qdy) = \int^y(Qdy)$ + une fonction X de x = $X + \int^y(Qdy)$. Donc $\int^y(Qdy) + X = \int^x(Pdx) + Y$, ou $\int^y Qdy - \int^x Pdx = Y - X$. On fera donc dans la quantité qu'on aura pour la valeur de $\int^y(Qdy) - \int^x(Qdx)$, $x = 0$, & on aura Y. Si on fait $y = 0$, on aura la valeur de $-X$, & par-là l'intégrale de $Pdx + Qdy$ sera déterminée.

Soit, par exemple, la quantité $(3z^2 + 2bzy - 3y^2)dz + (bz^2 - 6zy + 3cy^2)dy$ qui est intégrable, parce que $\frac{d^y(3z^2 + 2bzy - 3yy)}{dy} = 2bz - 6y = \frac{d^z(bz^2 - 6zy + 3cy^2)}{dz}$. On aura $\int^z(Pdz) =$

$z^3 + byzz - 3y^2z$, $\int^y (Qdy) = bz^2y - 3zy^2 + cy^3$. Par conséquent $Y - X = cy^3 - z^3$, faisant $z = 0$, on a $Y = cy^3$, & si on suppose $y = 0$, on aura $X = z^3$. Donc l'intégrale de la différentielle proposée est $z^3 + bz^2y - 3zy^2 + cy^3 + C$.

939. On pourroit trouver la quantité Y sans avoir besoin de $\int^y Qdy$. Car puisque $\int (Pdx + Qdy) = \int^x Pdx + Y$, il est clair que si on différentie $\int^x (Pdx)$ en faisant varier y seule, en sorte que le résultat soit $P'dy$, on doit avoir $Qdy = P'dy + dY$; donc $Y = \int (Q - P')\,dy$. Ainsi dans l'exemple précédent, $\int^z Pdz = z^3 + bz^2y - 3zy^2$, dont la différentielle prise en faisant varier y seule donne $P'dy = (bz^2 - 6zy)\,dy$. Donc $Y = \int (Q - P')\,dy = \int 3cy^2dy = cy^3$.

940. Si on a une différentielle à trois variables $Pdx + Qdy + Rdz$, en appellant son intégrale T, on aura $d^xT = Pdx$, $d^yT = Qdy$, $d^zT = Rdz$. Donc pour que la différentielle proposée soit complette, ou puisse être intégrée, il faut qu'on ait

$$\frac{d^yP}{dy} = \frac{d^xQ}{dx}, \quad \frac{d^zP}{dz} = \frac{d^xR}{dx}, \quad \frac{d^zQ}{dz} = \frac{d^yR}{dy}.$$

Ces trois conditions ayant lieu, l'intégrale sera $\int^x Pdx + V$, V étant une fonction des deux autres variables y & z.

941. Pour la déterminer, on différentiera $\int^x Pdx$, en faisant varier y & z, & on aura une quantité de cette forme $P'dy + P''dz$; il faudra donc qu'on ait $dV + P'dy + P''dz = Qdy + Rdz$, & par conséquent $V = \int ((Q - P')\,dy + (R - P'')\,dz)$ intégrale où il n'entrera que deux variables, & qu'on aura par la méthode précédente. Il est clair qu'on pourroit trouver l'intégrale par le moyen de $\int^y Qdy$, $\int^z Rdz$, de la même maniere que par $\int^x Pdx$.

Soit, par exemple, la quantité $(2xy^2 + 4bz^2x^3)\,dx +$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{yy+zz}} + 3y^2 + 2yx^2\right)dy + \left(4z^3 + 2bx^4z + \frac{z}{\sqrt{yy+zz}}\right)dz$$

qui a les trois conditions nécessaires pour être intégrable; on aura $\int^x Pdx = y^2x^2 + bz^2x^4$, dont la différentielle, prise en faisant varier y & z, donne $P' = 2yx^2$, $P'' = 2bzx^4$. Donc $dV =$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{yy+zz}} + 3y^2\right)dy + \left(4z^3 + \frac{z}{\sqrt{yy+zz}}\right)dz = 4z^3\,dz +$$

$3y^2dy + \frac{ydy + zdz}{\sqrt{yy+zz}}$, dont l'intégrale s'apperçoit tout de suite, sans le secours de la méthode précédente, & on a $V = z^4 + y^3 + \sqrt{yy + zz}$. Donc celle de la différentielle proposée est $z^4 + y^3 + \sqrt{yy + zz} + y^2x^2 + bz^2x^4 + C$. Il n'est pas difficile à présent de trouver les conditions que doivent avoir les différentielles à un plus grand nombre de variables, & d'intégrer lorsque ces conditions ont lieu.

942. Cela posé, voyons comment on integre les différences secondes. Soit d'abord la différentielle du second ordre $Pddx + Qdx^2$ dans laquelle P & Q sont des fonctions quelconques de la variable x. Si on considere dx comme une variable y, la différentielle proposée sera $Pdy + Qydx$. Or pour qu'elle soit intégrable, il faut que $\frac{d^xP}{dx} = \frac{d^yQy}{dy}$; mais il n'entre que des x dans P, & il n'y a point de y dans Q. Donc $\frac{dP}{dx} = \frac{Qdy}{dy} = Q$, ou $dP = Qdx$; condition nécessaire pour qu'une différentielle du second ordre $Pddx + Qdx^2$ soit intégrable. Si elle a lieu, on a $\int(Pddx + Qdx^2) = \int^y Pdy = Py = Pdx$.

EXEMPLE. La différentielle $mx^{m-1}ddx + m \cdot m - 1 \cdot x^{m-2}dx^2$ est intégrable, parce que $dP = m \cdot m - 1 \cdot x^{m-2}dx = Qdx$; & l'intégrale est $mx^{m-1}dx$, qui étant intégrée de nouveau, donne $x^m + C$.

943. Si dx a été supposée constante, la différentielle est Qdx^2, dont l'intégrale (à cause de $P = \int Qdx$) est $dx\int Qdx$ + la constante Cdx. Par exemple, $\int dx^2(1 - xx) = dx\int(dx - xxdx) = dx(x - \frac{1}{3}x^3) + Cdx$, & en intégrant de nouveau, on a $Cx + C + \frac{1}{2}xx - \frac{1}{12}x^4$.

944. Soit une différentielle générale du second ordre $Pddx + Qdx^2$; si on la différentie, on aura $Pd^3x + (dP + 2Qdx)ddx + dQdx^2$. Donc réciproquement une différentielle générale du troisieme ordre $Rd^3x + Sdxddx + Tdx^3$ sera intégrable, ou réductible à une differentielle du second ordre, si $\frac{S}{2} - \frac{dR}{2dx} =$

$\int T dx$; alors l'intégrale sera $R ddx + dx^2 \int T dx$. Par exemple, $xx d^3 x + 2x^3 dx ddx + (3xx - 1) dx^3$, a la condition nécessaire pour être intégrable, & son intégrale est $xx ddx + dx^2 (x^3 - x)$.

945. Si dx est constante, alors il est clair que, sans aucune condition, $\int T dx^3 = dx^2 \int T dx + C dx^2$, l'intégrale de cette différentielle est $dx \int (dx \int T dx) + C x dx + C' dx$; enfin l'intégrale de celle-ci est $\int dx \int dx \int T dx + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$. C'est ainsi que $\int x^m dx^3 = \frac{x^{m+3}}{m+1 \,.\, m+2 \,.\, m+3} + \frac{1}{2} Cx^2 + C'x + C''$. On trouveroit de la même maniere les intégrales des différentielles plus élevées, & les conditions de leurs coefficiens.

946. Considérons maintenant les différentielles du second ordre à deux variables, représentées généralement par $P ddx + Q ddy + R dx^2 + S dx dy + T dy^2$. Pour trouver les conditions des coefficiens P, Q, R, &c. je prends la différentielle de $A dx + B dy$, dans laquelle A & B sont des fonctions quelconques de x & de y, & j'ai $A ddx + B ddy + dA dx + dB dy$. Or $dA = \frac{d^x A}{dx} . dx + \frac{d^y A}{dy} . dy$; on a donc $A ddx + B ddy + \frac{d^x A}{dx} . dx^2 + \left(\frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x B}{dx} \right) dx dy + \frac{d^y B}{dy} . dy^2$; d'où il suit que la différentielle proposée est intégrable, toutes les fois que $R = \frac{d^x P}{dx}$, que $S = \frac{d^y P}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}$, & qne $T = \frac{d^y Q}{dy}$.

947. Ces conditions ayant lieu, l'intégrale sera $P dx + Q dy$; & si dx a été supposée constante, l'intégrale de $Q ddy + R dx^2 + S dx dy + T dy^2$ sera $dx \int^x R dx + Q dy + C dx$, (à cause de $P = \int^x R dx$), & les conditions de cette nouvelle différentielle seront $T = \frac{d^y Q}{dy}$, $S = \frac{d^x Q}{dx} + \frac{d^y \int^x R dx}{dy}$. Par exemple, $6x^2 dx dy + 6xy dx^2 + x^3 ddy$ dans laquelle dx est constante, a les conditions précédentes, & son intégrale est $x^3 dy + 3x^2 y dx + C dx$, qui en intégrant de nouveau donne $x^3 y + Cx + C'$. On trouveroit de la même maniere les intégrales & les conditions pour un plus grand nombre de variables.

FIG.

Applications du Calcul intégral.

Les applications du calcul intégral s'étendent ſur toutes les parties des Mathématiques : mais pour nous borner à celles qui ſont purement géométriques, & qui ſervent de fondement aux autres, nous déterminerons les formules des quadratures & des rectifications des courbes, les ſolidités des corps, celles des ſolides de révolution, ainſi que leurs ſurfaces, & nous finirons par quelques uſages de la Méthode inverſe des Tangentes.

De la Quadrature des Courbes.

156. 948. Soit la courbe AM, ſon axe AP, PM l'ordonnée au point M ; pour trouver la quadrature de l'eſpace AMP, je mene une autre ordonnée mp, & la ligne Mr parallele à Pp ; alors j'ai la ſurface de l'eſpace MmpP $=$ MP $\times$ Pp $+$ Mmr : imaginons maintenant que le point m s'approche du point M, le triangle Mmr diminuera de plus en plus, mais ne pourra devenir zéro que lorſque le point m tombera ſur le point M ; alors MmpP s'évanouira & ſera la différentielle de l'eſpace AMP ; Pp ſera dx, & on aura d(AMP) $= ydx$, & par conſéquent AMP $= \int ydx +$

$$C = (917)\ C + xy - \frac{xxdy}{2dx} + \frac{x^3ddy}{2.3.dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2.3.4dx^3} +$$

&c. Donc l'eſpace AQM $= C + \int xdy = C + xy - \frac{yydx}{2dy} +$

$$\frac{y^3d^2x}{2.3.dy^2} - \&c.$$

157. 949. Ex. I. Soit un cercle décrit du centre A & du rayon a, on aura $y = \sqrt{aa - xx}$, & l'eſpace AQMP $= \int dx \sqrt{aa - xx}$

$$+ C = C + ax - \frac{x^3}{2.3a} - \frac{1.x^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5} -$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9a^7} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{x^{11}}{11a^9} - \&c.$$ Faiſons $x = 0$, nous aurons AQMP $= 0$, & par conſéquent $C = 0$.

Donc

Donc $AQMP = ax - \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4} . \frac{x^5}{5a^3} - \frac{1.3}{2.4.6} . \frac{x^7}{7a^5}$ — &c. (803). FIG. 157.

Ex. II. Dans l'ellipse, $y = \frac{b}{a}\sqrt{aa - xx}$. Donc $\int ydx = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4} . \frac{x^5}{5a^3} - \&c.\right)$, comme nous l'avons déja trouvé (805).

Ex. III. Dans la parabole, $ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, & $\int ydx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy$, ou l'espace APM est les deux tiers du rectangle circonscrit (806). L'équation aux paraboles de tous les dégrés est $y^m = x^n a^{m-n}$, donc $mly = nlx + (m - n)\, la$, $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, ou $m . n :: ydx . xdy :: \int ydx . \int xdy ::$ AMP . AMQ. Par conséquent l'espace APM est au rectangle circonscrit APMQ :: $m . m + n$. 156.

Ex. IV. Dans l'hyperbole équilatere, $xy = aa$, & $ydx = \frac{aadx}{x}$. Donc $\int ydx = aalx + C$. Si on veut compter les espaces depuis l'origine A, où $x = 0$, l'espace sera $= 0$. Donc $C = - aal0$, & l'espace Q'APMN $= aalx - aal0$. 158.

Si $x = a =$ AD, alors Q'ADBN $= aala - aal0$; donc BDPM $= aalx - aala = aal\frac{x}{a}$, comme on le savoit déja.

Ex. V. Dans la cissoïde, $y = \frac{x^2}{\sqrt{ax - xx}}$, & $ydx = x^{\frac{3}{2}} dx (a - x)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\int ydx$ ou l'espace AKMPA $= \int x^{\frac{3}{2}} dx (a - x)^{-\frac{1}{2}}$. 159.

Or $\int dx (ax - xx)^{\frac{1}{2}} =$ le demi-segment AONP, & si on se propose de ramener $\int x^{\frac{1}{2}} dx (a - x)^{\frac{1}{2}}$ à $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a - x)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera que la réduction est possible, & que l'on a (903), $\int x^{\frac{1}{2}} dx (a - x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (a - x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \int x^{\frac{3}{2}} dx (a - x)^{-\frac{1}{2}}$. Donc

FIG.

$\int x^2 dx \,(ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = 3\int dx\,(ax - xx)^{\frac{1}{2}} - 2x\,(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$, ou APMKA = 3APNOA — 4ANP = 3AONA — ANP. Donc l'eſpace infiniment long MKABQ eſt triple du demi-cercle générateur ANB.

160. Ex. VI. Dans la logarithmique, $y\,dx = m\,dy$, & $\int y\,dx$, ou BAPM $= my + C$. Mais lorſque $y = 1 = AB$, l'eſpace ABMP devient nul. Donc $C = -m$, & ABMP $= m\,(y - 1) =$ le rectangle OQM. Si on fait $y = 0$, on aura l'eſpace infiniment long BXYA $= -m =$ le rectangle PQIT.

161. Ex. VII. Soit une courbe BM qui ait pour équation $y = x^x$, on aura l'eſpace ABMP $= Sx^x dx =$ (927) $x\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{4^4} + \&c.\right) + xxlx\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{xx}{4^3} - \&c.\right) + \frac{x^3 l^2 x}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^3} - \&c.\right) + \&c.$ & lorſque $x = AP = PM = 1$, on a l'eſpace ABMP $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \&c. = 0{,}78343049 7589$.

162. Ex. VIII. Soit la courbe des ſinus AMA'M' dont l'équation eſt $y = \sin x$, on aura APM $= \int dx \sin x = C - \cos x$. Faiſons $x = 0$, nous aurons $C = 1$, & APM $= 1 - \cos x$. Soit $x = 180° = c$, on aura AMA' $= 2 =$ le double du quarré du rayon. Si on ſuppoſe $x = 2c =$ AA'', on aura l'eſpace AMA'A + A'M'A''A' $= 0$, ce qui eſt évident, puiſque l'un eſt poſitif & l'autre négatif. En général ſi $x = 2kc$, l'eſpace ſera zéro, & ſi $x = (2k + 1)c$, l'eſpace ſera $= 2$.

163. Si on met l'origine des x au point A milieu de A'A', on aura $y = \cos x$. Donc l'eſpace ABMP $= \sin x$, l'eſpace ABA'A $= 1$, & A'BMA'A $= 0$, ou $= 2$, ſi on ne fait pas attention à ſes deux parties, l'une poſitive, l'autre négative.

164. 950. Si les ordonnées partent d'un point fixe C, voici comment on peut trouver la quadrature de la courbe. On menera les deux rayons CM, Cm, & on décrira du centre C & du rayon CM l'arc Mr; alors le triangle CMm $= \frac{Mr \times CM}{2} +$ Mmr. Mais lorſque le point m eſt infiniment proche de M, l'eſpace Mmr s'évanouit, & il reſte $d\,(\text{COMC}) = \frac{Mr \times CM}{2}$. Soit donc M$r$ $= dx$, CM $= y$, on aura COMC $= \frac{1}{2}\int y\,dx + C$.

Si on nomme Φ l'angle que fait CM avec une ligne fixe partant du point C, ou l'arc qui mesure cet angle dans un cercle dont le rayon est 1, on aura $Mr = y\,d\Phi$, & COMC $= \frac{1}{2}\int yyd\Phi + C$. FIG.

951. Ex. I. Soit la conchoïde AM, son pole P, PM $=$ y, QM $= a$, PB $= b$, & l'angle APM $= \Phi$; on aura 165.

$cos\,\Phi \,.\, b :: 1 \,.\, PQ = \frac{b}{cos\,\Phi}$, & $y = \frac{b}{cos\,\Phi} \pm a$. Donc

l'espace APM $= \frac{1}{2}\int \frac{b^2\,d\Phi}{cos^2\,\Phi} \pm ab\int \frac{d\Phi}{cos\,\Phi} + \int \frac{a^2\,d\Phi}{2} =$

$\frac{b^2}{2}\, tang\,\Phi \pm ab\,l\,tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) + \frac{a^2\,\Phi}{2}$, sans constante. Donc $\pm$ APM $\mp$ PBQ, ou ABQM $= ab\,l\,tang$ $(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) \pm \frac{a^2\,\Phi}{2}$, & AAMM $= 2ab\,l\,tang\,(45^\circ$ $+ \frac{1}{2}\Phi)$.

Ex. II. Dans la cissoïde, si on fait AM $= y$, MAB $=$ Φ, AQ $= \frac{a}{cos\,\Phi}$, AO $=$ MQ $= a\,cos\,\Phi$, & $y = \frac{a}{cos\,\Phi} -$ $a\,cos\,\Phi = \frac{a\,sin^2\,\Phi}{cos\,\Phi}$, donc AKMA $= \frac{1}{2}\int \frac{a^2\,d\Phi}{cos^2\,\Phi} - \int aad\Phi$ $+ \frac{1}{2}\int aad\Phi\; cos^2\,\Phi = \frac{1}{2}\,aa\,tang\,\Phi - aa\Phi + \frac{1}{2}aa$ $(\frac{1}{2}sin\,\Phi\; cos\,\Phi + \frac{1}{2}\Phi) = \frac{1}{2}\,aa\,tang\,\Phi + \frac{1}{8}\,aa\,sin\,2\Phi$ $- \frac{3}{4}\,a^2\,\Phi$. Donc AKMP $= \frac{3}{4}\,a^2\,\Phi - \frac{3}{8}\,a^2\,sin\,2\Phi +$ $\frac{1}{16}\,a^2\,sin\,4\Phi$; & l'espace infiniment long MABQ $= \frac{3}{4}\,a^2\,\Phi$ $= 3$AONB. 159.

Ex. III. Dans la spirale d'Archimede, AGFBN $= x$, AGFBA 164.

FIG.

$= c$, $CM = y$, $CA = a$, $Mr = \frac{ydx}{a}$, $d(COMC) = \frac{y^2dx}{2a}$, $x = \frac{cy}{a}$, $dx = \frac{cdy}{a}$, $COMC = \frac{c}{2aa} \cdot \frac{y^3}{3}$, sans constante. Donc l'espace $COMAC = \frac{ac}{2} \cdot \frac{1}{3} =$ le tiers de tout le cercle; & l'espace compris par la spirale au second tour $= 8$ fois le premier. En général, *les espaces compris entre la courbe & les ordonnées à deux différens points sont comme les cubes de ces mêmes ordonnées.*

166. Ex. IV. Dans la spirale hyperbolique $a . -dx :: y . Mr = -\frac{ydx}{a}$; donc $COMC = \frac{1}{2}\int \frac{-yydx}{a}$. Or $xy = ab$, donc $\frac{-yydx}{a} = bdy$, & l'espace compris entre la courbe & l'ordonnée CM $= \frac{1}{2}by =$ le secteur circulaire CMQ.

149. Ex. V. Dans la spirale logarithmique, si on nomme t la tangente de l'angle constant Mmr, on aura $ADMA = \int \frac{tydy}{2} = \frac{ty^2}{4} =$ la moitié du triangle ATM.

De la Rectification des Courbes.

167. 952. Si on imagine le point m infiniment proche de M, Mm sera la différentielle de l'arc AM, & on aura $dAM = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Par conséquent $AM = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} + C$; formule qui a lieu soit que les ordonnées soient paralleles, soit qu'elles partent d'un point fixe.

157. 953. Ex. I. Dans le cercle $y = \sqrt{aa - xx}$, $dy^2 = \frac{x^2dx^2}{aa - xx}$, & $QM = \int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3aa} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7a^6} +$ &c. donc l'arc $MB = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3aa} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$.

FIG.

$\frac{y^5}{5a^4}$ + &c. comme nous l'avons déja trouvé (709).

Ex. II. Dans la parabole, AM $= \int dy \sqrt{1 + \frac{4yy}{pp}} = \ldots$ 167.

$\int \frac{2dy}{p} \sqrt{\frac{1}{4}pp + yy}$. Or nous avons trouvé (914) $\int dx \sqrt{xx + aa}$

$= C + \frac{1}{2}x\sqrt{(xx+aa)} + \frac{1}{2}aal(x + \sqrt{xx+aa})$. Donc AM

$= C + \frac{y}{p}\sqrt{(yy + \frac{1}{4}pp)} + \frac{1}{4}pl(y + \sqrt{(yy + \frac{1}{4}pp)}$; faisons

$y = 0$, nous aurons $C = -\frac{1}{4}pl\frac{1}{2}p$. Donc AM $= \frac{y}{p}\sqrt{(yy + \frac{1}{4}pp)}$

$+ \frac{1}{4}pl\left(\frac{y + \sqrt{yy + \frac{1}{4}pp}}{\frac{1}{2}p}\right)$.

954. On peut remarquer que si du centre A & du demi-grand axe BA $= \frac{1}{2}p$, on décrit une hyperbole équilatere BN′, l'espace ABN′Q sera $\int dy \sqrt{yy + \frac{1}{4}pp}$. Donc AM $\times \frac{1}{2}p$ = ABN′Q; d'où il suit que *la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, & réciproquement.*

Ex. III. Dans l'ellipse, si on suppose le demi-grand axe $= 1$, 168.
on aura $y = b\sqrt{(1 - xx)}$, & en faisant $\sqrt{1 - bb}$ ou la demi-distance des foyers $= c$, on a BM $= \int \frac{dx\sqrt{1 - ccxx}}{\sqrt{(1 - xx}}$, intégrale qu'on ne peut avoir par les regles précédentes. Il faut donc réduire en séries; mais, pour simplifier, nous ne réduirons que $\sqrt{(1 - ccxx)}$; alors nous aurons BM $= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} (1 - \frac{1}{2}ccxx$

$- \frac{1}{2.4}c^4x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}c^6x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}c^8x^8$ — &c.) $=$

$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{2}cc\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{2.4}c^4\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}}$

FIG. 168. $-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\,c^6\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}-$ &c. Or (901) $\int x^{2i}\,dx\,(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$

$$=-\frac{x^{2i-1}(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{2i}-\frac{(2i-1)\,x^{2i-3}(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{2i\,.\,2i-2}-$$

&c... $-\frac{(2i-1)\,(2i-3)\ldots 3}{2i\,.\,2i-2\ldots 2}\,x(1-xx)^{\frac{1}{2}}+\frac{1\,.\,3\,..\,5\,..\,(2i-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2i}$

$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Donc BM $=(1-\frac{c^2}{2^2}-\frac{3c^4}{2^2\,.\,4^2}-\frac{3^2\,.\,5c^6}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}-$

$\frac{3^2\,.\,5^2\,.\,7c^8}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2\,.\,8^2}-$&c.) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}+c^2x(1-xx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^2}+\right.$

$\left.\frac{3c^2}{2^2\,.\,4^2}+\frac{3^2\,.\,5c^4}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}+\text{\&c.}\right]+c^4x^3(1-xx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\,.\,4^2}+\right.$

$\left.\frac{3\,.\,5c^2}{2\,.\,4^2\,.\,6^2}+\frac{3\,.\,5^2\,.\,7c^4}{2\,.\,4^2\,.\,6^2\,.\,8^2}+\text{\&c.}\right]+$&c. Or DN $=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$; on connoît donc toutes les quantités qui entrent dans cette suite dont il est facile de reconnoître la loi.

Soit $x=1$, on aura AMB $=(1-\frac{c^2}{2^2}-\frac{3c^4}{2^2\,.\,4^2}-\frac{3^2\,.\,5c^6}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}$ — &c.) AND. Donc la périphérie de l'ellipse est à celle du cercle circonscrit :: $1-\frac{1}{2^2}\,.\,\frac{c^2}{a^2}-\frac{1\,.\,1^2}{2^2\,.\,4^2}\,.\,\frac{3c^4}{a^4}-\frac{1\,.\,1^2\,.\,3^2}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}\,.\,\frac{5c^6}{a^6}$ — &c. : 1, (en supposant a le demi-grand axe). Cette suite sera très-convergente, lorsque les foyers seront peu éloignés. Par exemple, si $c=\frac{1}{10}a$, la circonférence de l'ellipse sera à celle du cercle circonscrit :: 0,997495292861261 : 1.

La rectification de l'hyperbole se trouve en suivant à peu près la même méthode, & on peut voir dans les Mémoires de Berlin, an. 1746, & suiv. comment M. d'Alembert ramene à la rectification de ces deux courbes, les intégrales d'un grand nombre de différentielles.

Ex. IV. L'équation à la seconde parabole cubique est $y^3=ax^2$.

Donc $\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int dy\sqrt{\left(1+\frac{9y}{4a}\right)}=\frac{8}{27}a\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}$ FIG.
$+C$, faisant $y=0$, on a $C=-\frac{8}{27}a$, & un arc quelconque de cette courbe compté depuis l'origine $=\frac{8}{27}a\left[\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

Ex. V. Dans la Cycloïde, $dy=dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$. Donc 169.
$\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{\frac{a}{x}}$: intégrant, on a $AM=2\sqrt{ax}=2AN$ (875).

Ex. VI. Dans la logarithmique $ydx=ady$, $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{dy}{y}\sqrt{(yy+aa)}$, soit $\sqrt{(yy+aa)}=z$, on aura $yy=zz-aa$, $\frac{dy}{y}=\frac{zdz}{zz-aa}$, $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dz+\frac{aadz}{zz-aa}$, dont l'intégrale est $z+\frac{a}{2}l\frac{z-a}{z+a}$, ou $\sqrt{(aa+yy)}-al\left(\frac{a+\sqrt{(aa+yy)}}{y}\right)+C$, expression d'un arc quelconque de logarithmique dans laquelle C est facile à déterminer.

Ex. VII. Dans la spirale d'Archimede, si on fait $AGFBN=x$, 164.
$CM=y$, on aura $Mr=\frac{ydx}{a}$, $Mm=d(COM)=\sqrt{\left(dy^2+\frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}$. Or $x=\frac{cy}{a}$. Donc $dCOM=\int\frac{c}{a^2}dy\left(yy+\frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Décrivons une parabole CN dont le paramètre $=\frac{2a^2}{c}$, nous aurons, en faisant $CQ=CM$, & menant l'ordonnée QN, $CN'=\int\frac{c}{a^2}dy\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+yy\right)}$. Donc $CN'=COM$. C'est en des propriétés semblables que consiste la *Symbolization* de la spirale d'Archimede avec la parabole.

Ex. VIII. Dans la spirale hyperbolique, l'arc $COM=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(bb}$ 166.

FIG. $+yy$). Donc si on décrit une logarithmique NK dont la soutangente $= b =$ celle de la spirale, on aura MOC $=$ l'arc infini NK, en prenant l'ordonnée NR $=$ CQ $=$ CM. Mais si on veut avoir l'expression d'un arc de spirale ou de logarithmique compris entre les deux ordonnées y, y', on trouvera $\sqrt{(aa+yy)} - \sqrt{(aa+y'y')}$

$$+ al \frac{y(a+\sqrt{aa+y'y'})}{y'(a+\sqrt{aa+yy})}.$$

149. Ex. IX. Dans la spirale logarithmique, $cos\, Mmr\ (c) . mr\ (dy)$ $:: 1 . Mm = \frac{dy}{c}$. Donc ADM $= \frac{y}{c} =$ MT.

De la Mesure des Solidités.

955. Un solide étant proposé à mesurer, on l'imaginera décomposé en une infinité de petites tranches paralleles entr'elles. Nommant donc t l'une de ces tranches, dx son épaisseur ou une portion infiniment petite d'une ligne perpendiculaire à cette tranche, $\int (tdx) + C$ sera la solidité du solide proposé; il ne s'agira plus que d'avoir t en x.

956. Par exemple, soit B la base du solide, H sa hauteur ou la distance de cette base à son sommet; si on suppose que les surfaces de ces tranches soient proportionnelles à une puissance m de leur distance x au sommet, on aura $H^m : B :: x^m : t = \frac{Bx^m}{H^m}$. Donc la solidité d'une portion du solide sera $C + \frac{Bx^{m+1}}{(m+1)H^{m'}}$, ou simplement $\frac{Bx^{m+1}}{(m+1)H^m}$, si cette portion commence au sommet. Donc le solide entier $= \frac{BH}{m+1}$. Ainsi dans les pyramides cette solidité $= \frac{1}{3}$ BH, parce que $m = 2$.

171. 957. Si une courbe quelconque AM tourne autour de son axe AP, elle engendrera un solide de révolution dont chaque coupe perpendiculaire à l'axe sera un cercle qui aura pour expression cyy, en faisant PM $= y$, & $c = 3 . 141$, &c. Donc un solide quelconque de révolution $= C + \int cyydx$

Ex. I. Dans la sphere, $yy = 2ax - xx$. Donc la solidité d'une calotte sphérique (675), $= cxx\ (a - \frac{1}{3} x)$, & la sphere entiere $= \frac{2}{3} . 2a^3c =$ les deux tiers du cylindre circonscrit.

Ex. II. Dans l'ellipse, $yy = \frac{bb}{aa}\ (2ax - xx)$. Donc le solide engendré

engendré par sa révolution autour du grand axe est à la sphere circonscrite :: $bb : aa$, ou $=$ les deux tiers du cylindre circonscrit. FIG.

958. On nomme *Ellipsoïde allongé* celui que nous venons de considérer, & *Ellipsoïde applati* celui qui est formé par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe. Or il est aisé de trouver que ce dernier solide est aussi les deux tiers du cylindre circonscrit. Donc l'ellipsoïde allongé est à l'ellipsoïde applati :: $abb : aab$ :: $b : a$.

Ex. III. Si une parabole d'un ordre quelconque dont l'équation est $y^m = x^n a^{m-n}$ tourne autour de son axe, elle engendrera un solide qui aura pour expression $\int cy^2 dx = \frac{m}{m+2n} cxy^2$, ou qui sera au cylindre circonscrit :: $m : m+2n$; ainsi la paraboloïde ordinaire dans lequel $m=2$, $n=1$, est la moitié du cylindre circonscrit.

Ex. IV. De même, si l'hyperbole dont l'équation est $y^m x^n = a^{m+n}$ tourne autour de l'asymptote CP, en prenant CD $=$ AD $= a$, le solide décrit par le trapeze ADMP aura pour expression $\frac{m}{2n-m} c(a^3 - xy^2)$, & par conséquent le solide décrit par l'espace infiniment long OADX est au cylindre décrit par ACDE :: $m : 2n-m$, & $=$ ce cylindre dans l'hyperbole ordinaire. 170.

Des Surfaces courbes des Solides de révolution.

959. La différentielle de la surface décrite par la courbe AM $=$ le petit cône tronqué décrit par l'élément Mm. Donc cette surface courbe $= \int$Mm *circ* PM $= 2c\int y\sqrt{dx^2+dy^2} + C = 2c\int ndx + C$, en appellant n la normale MN. 171.

Ex. I. Dans la sphere, $n = a$. Donc la surface d'une calotte sphérique quelconque $= 2acx$, & celle de la sphere $= 4a^2c = 4$ grands cercles (166).

Ex. II. La surface du paraboloïde, est, à cause de $n = \sqrt{yy+\frac{1}{4}pp}$, $\frac{2c}{p}\int 2ydy(yy+\frac{1}{4}pp)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4c}{3p}(y^2+\frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} + C$. Soit $y=0$, on aura $C = -\frac{4c}{3p}\cdot\frac{1}{8}pp$, & la surface du solide $= \frac{c}{6p}\left((pp+4yy)^{\frac{3}{2}} - p^3\right)$.

Ex. III. Dans l'ellipse, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$. Donc la surface décrite par la révolution de l'arc AM autour de l'axe a, $=$ 172.

FIG. 172. $\frac{2bc}{a} \int -dx \sqrt{\left(aa - (aa - bb)\frac{xx}{aa}\right)}$, & comme a est l'axe de révolution, il désignera le demi-grand axe dans l'ellipsoïde allongé, & la moitié du petit dans l'ellipsoïde applati.

Dans le premier cas, soit $aa - bb = mm$, on aura $\frac{2bcm}{aa} \int - dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{m^2} - x^2\right)}$. Donc si du rayon CD on décrit un arc de cercle DBN, on aura pour l'expression de la surface décrite par la révolution de AM autour de AP, $\frac{2bcm}{aa} \times ABNP$.

Dans le second cas, en faisant $bb - aa = mm$, on aura $\frac{2bcm}{aa} \int dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{m^2} + x^2\right)} = \frac{bcmx}{aa} \sqrt{\left(xx + \frac{a^4}{m^2}\right)} + \frac{aabc}{m}\, l\, \frac{m}{aa} \left(x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{m^2} + x^2\right)}\right) =$ la surface décrite par la révolution de AM autour de CE. On doit remarquer qu'ici $CE = a$, $CA = b$, $CQ = x$, $QM = y$.

173. Ex. IV. Dans l'hyperbole, $y = \frac{b}{a} \sqrt{(xx - aa)}$. Donc si cette courbe tourne autour de l'axe AP, la surface décrite par l'arc AM sera, en faisant $aa + bb = mm$ & déterminant la constante, $\frac{2bcm}{aa} \int dx \sqrt{\left(xx - \frac{a^4}{m^2}\right)} = \frac{bcmx}{aa} \sqrt{\left(xx - \frac{a^4}{m^2}\right)} - bbc - \frac{a^2bc}{m}\, l\, \frac{mx + \sqrt{(m^2x^2 - a^4)}}{a(m+b)}$. Et si elle tourne autour du second axe CQ, alors $y = MQ = \frac{a}{b} \sqrt{(bb + xx)}$. Donc la surface décrite par l'arc

$$AM = \frac{acmx}{bb} \sqrt{\left(xx + \frac{b^4}{m^2}\right)} + \frac{acbb}{m}\, l \left(\frac{mx}{bb} + \sqrt{\left(1 + \frac{m^2x^2}{b^4}\right)}\right).$$

De la Méthode inverse des Tangentes, & des Equations différentielles.

960. On appelle *Méthode inverse des Tangentes*, celle qui apprend

à trouver l'équation d'une courbe, dont on connoît une des propriétés relatives au point de contact.

961. Cherchons, par exemple, la courbe dans laquelle la soûnormale est constante, ou $=a$. Puisque nous savons d'ailleurs que l'expression générale de cette ligne est $\frac{y\,dy}{dx}$, nous aurons $\frac{y\,dy}{dx} = a$, $ydy = adx$, & en intégrant, pour exprimer que la propriété donnée convient à tous les points de la courbe, on a $yy = 2a(x+c)$ équation à la parabole qui résout le problême proposé.

962. La méthode inverse des tangentes se réduit toujours à la solution d'une équation différentielle; ainsi comme nous n'avons pas encore parlé de ces sortes d'équations, il est à propos d'en dire quelque chose avant d'aller plus loin.

On appelle équations différentielles du premier ordre, celles où il n'entre que des différences premieres. Les équations différentielles du second ordre sont celles où il entre des différences secondes, sans différentielles d'un ordre plus élevé; & ainsi de suite.

963. Soient donc en général P & Q deux fonctions quelconques des variables x & y, $Pdx + Qdy = 0$ représentera généralement toute équation différentielle du premier ordre à deux variables x & y, & il est évident qu'elle sera intégrable, 1.° lorsque P sera une fonction de x ou de y seule, & qu'il en sera de même de Q. 2.° Lorsqu'on aura $\frac{d^yP}{dy} = \frac{d^xQ}{dx}$.

964. Mais lorsque ces conditions n'ont pas lieu, on tâche de séparer l'équation, c'est-à-dire, de la partager en deux membres qui ne renferment l'un & l'autre qu'une seule variable. Il s'en faut bien qu'on ait des méthodes générales pour faire cette séparation dans tous les cas. En voici cependant quelques-uns où elle réussit.

965. Si $P=XY$, $Q=X'Y'$, X & X' étant des fonctions de x, Y & Y' des fonctions de y, on aura $\frac{Xdx}{X'} = -\frac{Y'dy}{Y}$ équation séparée, & réduite à l'intégration des différentielles à une seule variable.

966. Si P & Q sont des fonctions homogenes de x & de y, ou s'il y a dans tous leurs termes le même nombre de dimensions de x & de y, alors, en faisant $\frac{x}{y} = z$, on voit aisément que $\frac{Q}{P}$ sera une fonction Z de z. Ainsi, on aura $dx + Zdy = 0$, ou $zdy + ydz + Zdy = 0$, & en séparant $-\frac{dy}{y} = \frac{dz}{Z+z}$. Par exem-

ple $(ax+by)dx=(mx+ny)dy$ devient, en faisant $\frac{x}{y}=z$, $\frac{dy}{y}=\frac{(az+b)dz}{az^2+(b-m)z-n}$, quantité facile à intégrer.

967. Soit maintenant l'équation $(ax+by+c)dx+(mx+ny+p)dy=0$, on fera $ax+by+c=u$, $mx+ny+p=z$, & on aura $x=\frac{nu-bz+bp-cn}{an-mb}$, $y=\frac{az-mu+mc-ap}{an-bm}$; substituant, on a $(nu-mz)du+(az-bu)dz=0$ dont l'intégrale est facile à trouver par ce qui précéde.

Soit encore $axdy+bydx+x^m y^n(fxdy+gydx)=0=\frac{ady}{y}+\frac{bdx}{x}+x^m y^n\left(\frac{fdy}{y}+\frac{gdx}{x}\right)$. Si on fait $y^a x^b=z$, $y^f x^g=t$, on aura $\frac{ady}{y}+\frac{bdx}{x}=\frac{dz}{z}$, $\frac{fdy}{y}+\frac{gdx}{x}=\frac{dt}{t}$, $y^{ap}x^{bp}=z^p$, $y^{fq}x^{gq}=t^q$, $y^{ap-fq}x^{bp-gq}=z^p t^{-q}$. Soit $ap-fq=m$, $bp-gq=n$, on aura $p=\frac{ng-mf}{ag-bf}$, $q=\frac{bn-am}{ag-bf}$, & en substituant $\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}z^p t^{-q}=0$, ou $z^{-p-1}dz+t^{-q-1}dt=0$, intégrant, $qz^{-p}+pt^{-q}=C$, ou $(bn-am)(y^a x^b)^{\frac{mf-ng}{ag-bf}}+(ng-mf)(y^f x^g)^{\frac{am-bn}{ag-bf}}=C$.

968. Soit à présent $dy+Pydx=aQdx$, P & Q étant des fonctions de x, on fera, selon la Méthode de M. Bernoulli, $y=Xz$, X étant une autre fonction de x, alors $Xdz+zdX+PXzdx=aQdx$. Supposons $zdX+PXzdx=0$, nous aurons $\frac{dX}{X}=-Pdx$, $lX=-\int Pdx$, $X=e^{-\int Pdx}$, & par conséquent $aQdx=e^{-\int Pdx}dz$. Donc $z=a\int(e^{\int Pdx}Qdx)$, & $ye^{\int Pdx}=\ldots\ldots a\int(e^{\int Pdx}Qdx)+C$.

Par exemple, l'équation $dy+ydx=ax^m dx$ donne $y=ae^{-x}(C+\int e^x x^m dx)=aCe^{-x}+a(x^m-mx^{m-1}+m.m-1.x^{m-2}-\&c.)$.

969. On intégrera par la même méthode l'équation $X y^m dy + X' y^{m+1} dx = X'' y^n dx$, en divisant par $X y^n$ & faisant $y^{m-n+1} = z$. FIG.

Il y a peu d'autres cas où la séparation générale d'une équation soit possible. Voyons maintenant quelques applications de ces principes à la méthode inverse des tangentes.

PROBL. I. Trouver la courbe dont la soutangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{m}{n} x$;

on aura donc en séparant $\frac{ndx}{x} = \frac{mdy}{y}$, $nlx = mly + (n-m) lc$;

$y^m = x^n c^{m-n}$ équation cherchée.

PROB. II. Quelle est la courbe dont la soutangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{aa+xx}{x}$? on aura $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{aa+xx}$, $yy = \frac{b^2}{a^2}(aa+xx)$ équation à l'hyperbole.

PROB. III. Quelle est la courbe dont l'espace APM $= \frac{m}{n}$ AMQ? 174.

on a donc $\frac{m}{n} \int xdy = \int ydx$, $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, $y^m = x^n a^{m-n}$.

PROB. IV. Trouver la courbe BM dont l'espace ABMP = l'arc 175.

BM multiplié par une constante a, ou telle que $\int ydx = a\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Donc $dx = \frac{ady}{\sqrt{(yy - aa)}}$, & $\frac{x}{a} = l \frac{y + \sqrt{(yy-aa)}}{c}$ est l'équation cherchée.

PROB. V. Trouver la courbe AM dans laquelle le rayon osculateur MC $= \frac{m}{n}$ MN. 176.

Si on suppose dx constante, on aura $\frac{m}{n} y = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, ou $\frac{m}{n} yddy + dx^2 + dy^2 = 0$. Pour intégrer, soit $dx = pdy$, on aura $ddy = -\frac{dpdy}{p}$, & $\frac{n}{m} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p(p^2+1)}$. Donc $\frac{n}{m} l \frac{y}{c} = l \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$;

FIG.

$$p = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{\left(c^{\frac{2n}{m}} - y^{\frac{2n}{m}}\right)}}, \text{ \& } dx = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}}\, dy}{\sqrt{\left(c^{\frac{2n}{m}} - y^{\frac{2n}{m}}\right)}} : \text{c'eſt}$$

l'équation différentielle du premier ordre de la courbe cherchée.

Si $n = m$, on a $dx = \pm y dy (cc - yy)^{-\frac{1}{2}}$, & $x = c' \pm \sqrt{(cc - yy)}$ équation au cercle. Si $m = 2n$, on a $dx = \frac{\pm dy \sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}}$ équation à la cycloïde.

177. PROB. VI. Trouver la courbe BM telle qu'en menant par l'origine A la droite AO qui faſſe avec l'axe un angle de 45°, on ait toujours l'ordonnée PM eſt à la ſoutangente PT : : une ligne donnée a : OM. Donc $dy : dx :: a : y - x$, & $adx = (y - x)dy$. Soit $y - x = z$, on aura $\frac{dy}{a} = \frac{dz}{a - z}$, $\frac{y}{a} = l\frac{C}{a - z}$, & $x = y - a + Ce^{-\frac{y}{a}}$.

On auroit pu trouver immédiatement cette intégrale en comparant l'équation $dx + \frac{x}{a} dy = \frac{ydy}{a}$ à celles des numéros 968 & 967. La plus petite ordonnée BD ſe trouve en faiſant $\frac{dy}{dx} = \infty$, & alors on a $BD = AD = al\frac{C}{a}$; l'eſpace $DBMP = xy - \frac{1}{2}yy$

178. $+ ax + aal\frac{a}{C} + \frac{1}{2}aal^2\frac{a}{C}$.

PROB. VII. Trouver une courbe BM qui faſſe par-tout avec l'ordonnée PM un angle EMP proportionnel à l'abſciſſe AP.

On aura donc $EMP = \frac{x}{m}$, m étant conſtant, & $tang\, EMP = tang\, \frac{x}{m} = \frac{dx}{dy}$; par conſéquent $\frac{dy}{m} = \frac{dx}{m} cot \frac{x}{m} = \frac{\frac{dx}{m} cos \frac{x}{m}}{sin \frac{x}{m}}$. Donc $y = C + m \log sin \frac{x}{m}$; équation qui fait voir que la courbe rencontre la ligne des abſciſſes en des points E, F, E', F', &c. tels que $log.\, sin \frac{x}{m} = -\frac{C}{m}$; & que par conſéquent $x = m$ multiplié

178. par tous les arcs dont le ſinus $= e^{-\frac{C}{m}}$: or le nombre de ces arcs

est infini ; car si le premier est a, & si l'arc de 180° est c, ceux qui auront le même sinus, formeront la suite a, $c-a$, $2c+a$, $3c-a$, $4c+a$, $5c-a$, &c. ainsi les distances où la courbe rencontrera la ligne des abscisses, seront représentées par ma, $m(c-a)$, $m(2c+a)$, $m(3c-a)$, &c. On prendra donc $AE=ma$, $AF=mc-ma$, $AE'=2mc+ma$, $AF'=3mc-ma$, &c. & on aura les valeurs positives de x. On trouveroit de même ses valeurs négatives, c'est-à-dire, les abscisses comptées vers la gauche de AS, & les unes comme les autres seroient également propres à faire voir que les intervalles EF, E'F', &c. sont égaux. FIG. 178.

Cherchons maintenant en quels points l'ordonnée de cette courbe est un *Maximum*. Pour cela, soit $\frac{dy}{dx}=0$, on aura $cot\,\frac{x}{m}=0$, & par conséquent $sin\,\frac{x}{m}=1$. Or les valeurs qui satisfont dans le sens positif à cette équation, sont . . . . .

$$\frac{x}{m}=\tfrac{1}{2}c,\ \frac{x}{m}=\tfrac{5}{2}c,\ \frac{x}{m}=\tfrac{9}{2}c,\ \frac{x}{m}=\tfrac{13}{2}c,\ \&c.$$

Et puisque $sin\,\frac{x}{m}$ est égal à 1, dans ce cas, on a $y=C$; donc aux points les plus élevés C, C', C'', &c. les ordonnées sont égales entr'elles & à la constante.

Pour trouver les asymptotes, on supposera $y=\infty$, ce qui donnera $sin\,\frac{x}{m}=0$, équation qui aura lieu soit que $\frac{x}{m}=0$, soit que $\frac{x}{m}=\pm c$, ou $\pm 2c$, ou $\pm 3c$, &c. Alors x aura une des valeurs suivantes, 0, $\pm cm$, $\pm 2cm$, $\pm 3cm$, &c. à l'infini. La courbe doit donc avoir une infinité d'asymptotes perpendiculaires à l'axe. La premiere passe par l'origine des abscisses, c'est AS, la seconde passe à la distance $AD=cm$, la troisieme, à une distance $AD'=2AD=2cm$, &c. Il en est de même dans le sens négatif.

PROB. VIII. Entre toutes les courbes isopérimètres qui passent par les points B & D, trouver celle qui rende l'aire ABDE un *Maximum*, en supposant la ligne AE donnée de position. 179.

Si on considere les trois élémens consécutifs MN, NS, SV, il faudra qu'entre tous les isopérimètres qui passent par les points M & V, MNSV soit propre à rendre l'aire MPTVM *Maximum*. Supposons donc les dy constantes, & nommons $PM=a$, $NQ=b$, $SR=c$, $Nr=Sn=Vs=m$, $Mr=u$, $Nn=t$, $Ss=z$, on aura ; 1.° à cause des points M & V constants, $du+dt+dz=0$; 2.° à cause de MNSV aussi constant, $\sqrt{uu+mm}+\sqrt{tt+mm}+\sqrt{zz+mm}=$ à une constante; & par conséquent

$\frac{udu}{\sqrt{uu+mm}} + \frac{tdt}{\sqrt{tt+mm}} + \frac{zdz}{\sqrt{zz+mm}} = 0$; 3.° à cause de l'espace MPTV *Maximum*, $adu + bdt + cdz = 0$. Au moyen de ces trois équations, éliminant dz & dt, ayant égard à ce que $b - c = -m$, $a - c = -2m$, on a $-\frac{u}{MN} + \frac{2t}{NS} - \frac{z}{SV} = 0$, ou $-\frac{Mr}{MN} + \frac{Nn}{NS} + \left(\frac{Nn}{NS} - \frac{Ss}{SV}\right) = 0$. Or il suit des principes du Calcul différentiel que $-\frac{Mr}{MN} + \frac{Nn}{NS} = d\frac{Mr}{MN}$, & que $\left(\frac{Ss}{SV} - \frac{Nn}{NS}\right) - \left(\frac{Nn}{Ss} - \frac{Mr}{MN}\right) = d\left(-\frac{Mr}{MN} + \frac{Nn}{NS}\right)$. Donc $dd\left(\frac{Mr}{MN}\right) = 0$, exprimant cette équation à la maniere accoutumée, c'est-à-dire, faisant $Mr = dx$, $MN = \sqrt{dx^2+dy^2}$, on a $dd\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0$. Donc $d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{C}$, & $\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{y+C'}{C}$. Donc $\frac{dx^2+dy^2}{dx^2} = \frac{C^2}{(y+C')^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$, & $\pm\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C^2}{(y+C')^2} - 1}$; donc $dx = \frac{\pm dy\,(y+C')}{\sqrt{C^2-(y+C')^2}}$, & en intégrant $x = C'' \mp \sqrt{C^2-(y+C')^2}$, équation au cercle. Donc le cercle est la courbe qui, sous le même périmètre, renferme le plus de surface.

970. Pour déterminer les constantes C'', C', C, ou pour décrire le cercle cherché, on aura ces trois conditions. 1.° Lorsque $x = AP = 0$, $y = AB$. 2.° Lorsque $x = AE$, $y = DE$. 3.° On cherchera par l'équation précédente la longueur de l'arc BMD, & comme cette longueur est supposée connue, on aura la troisieme condition nécessaire pour déterminer les constantes C'', C', C.

I

Fig 1

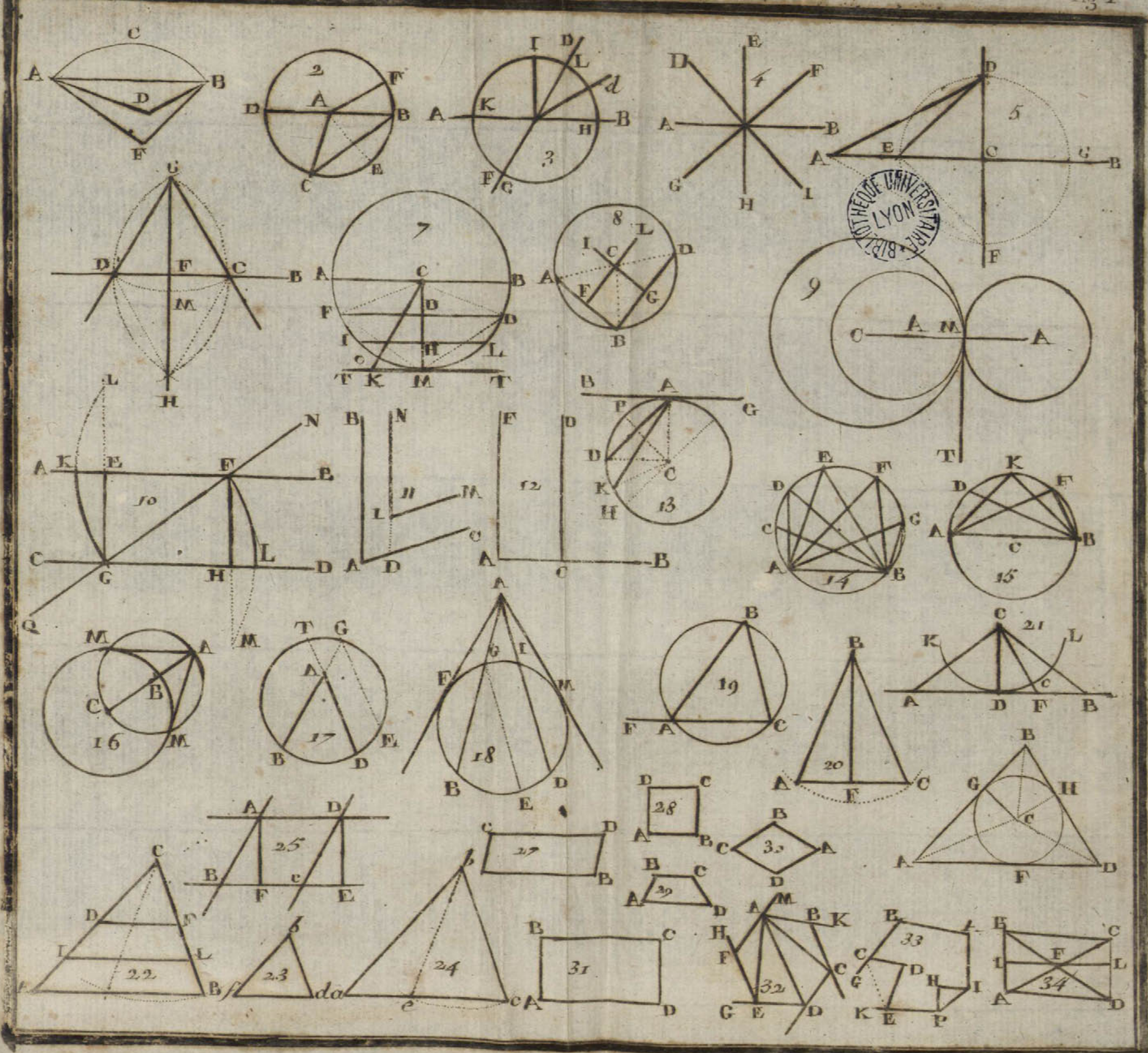
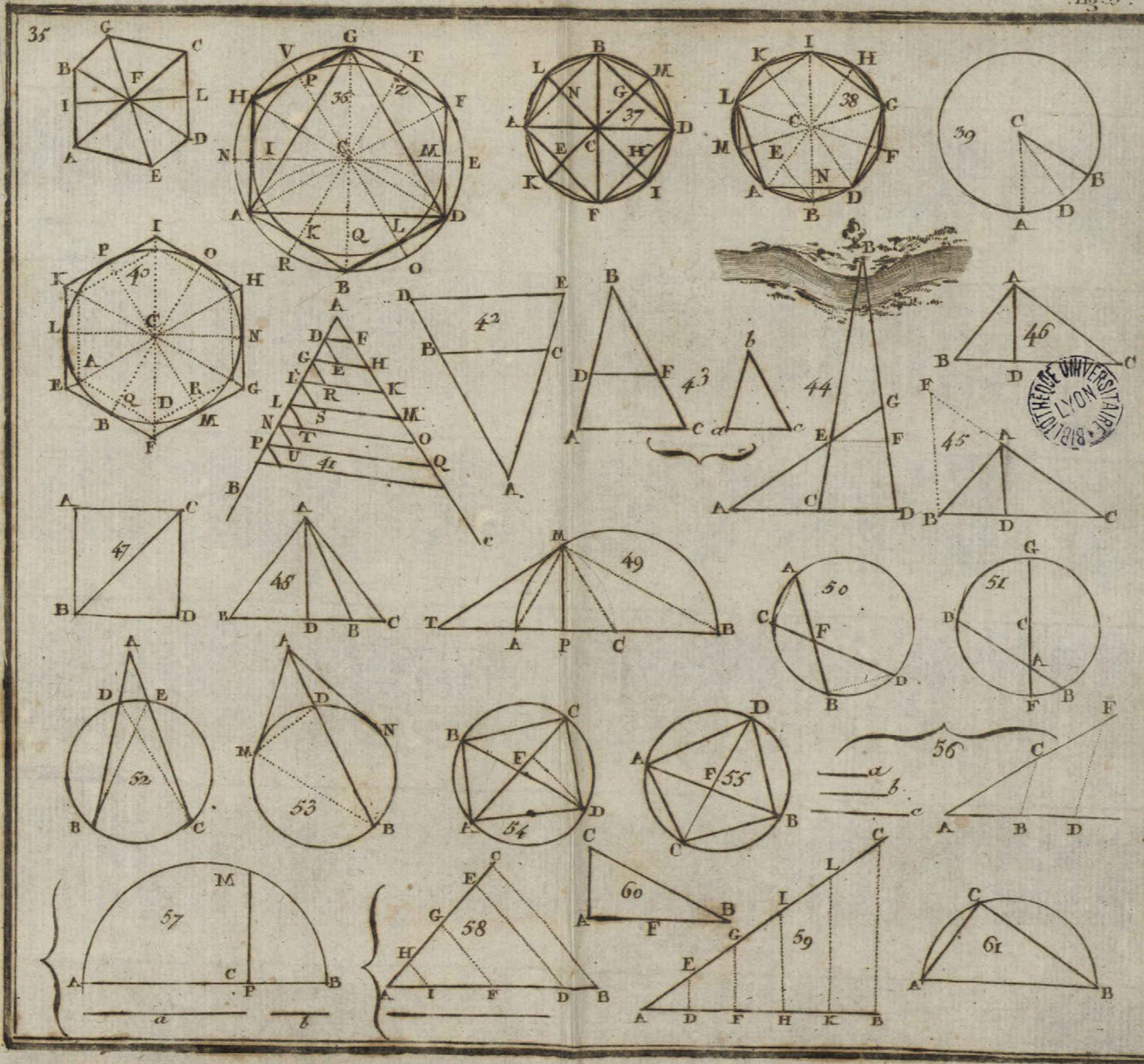


Fig 34


35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61

3 Fig 62

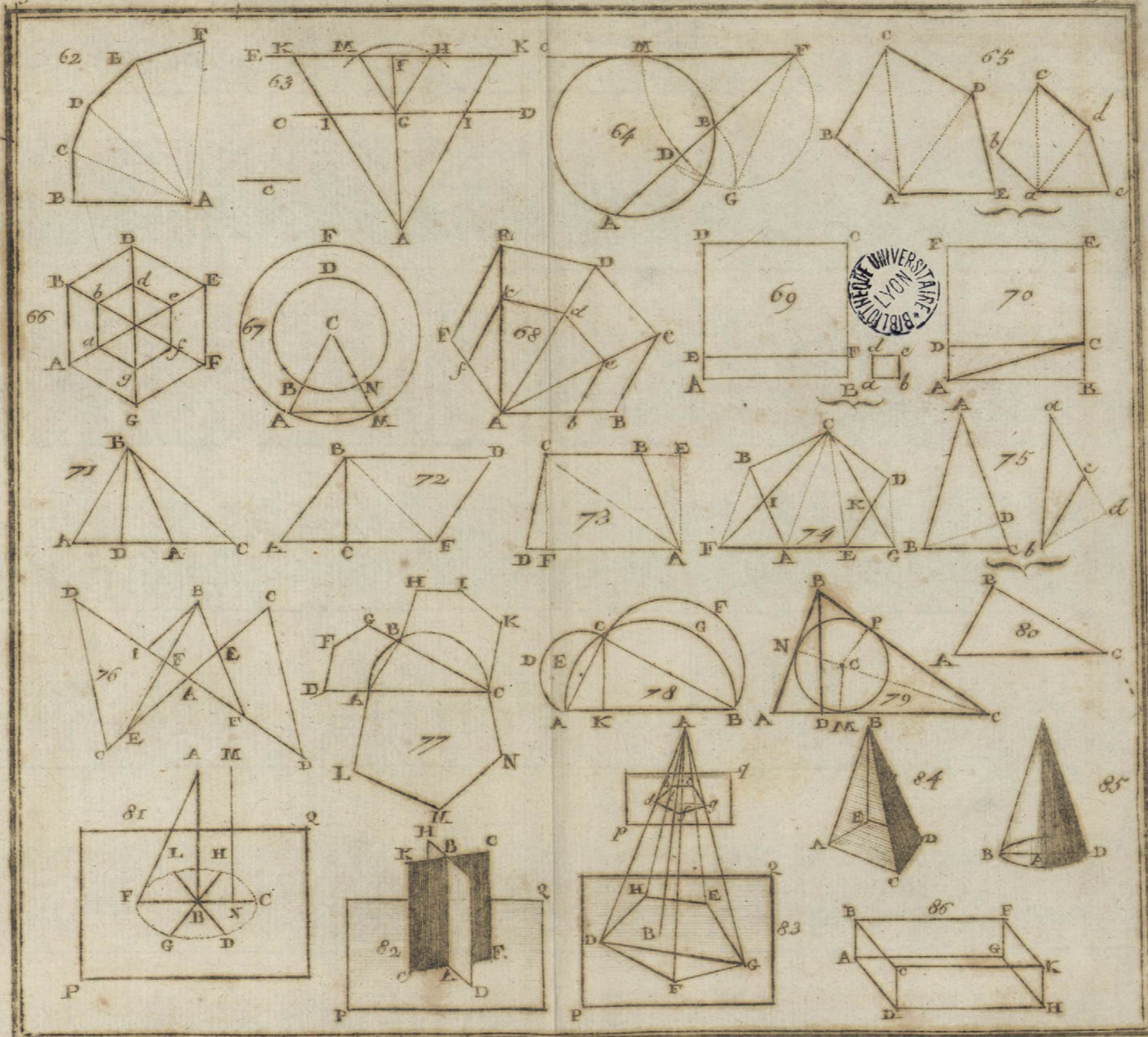


Fig 86

Fig 87

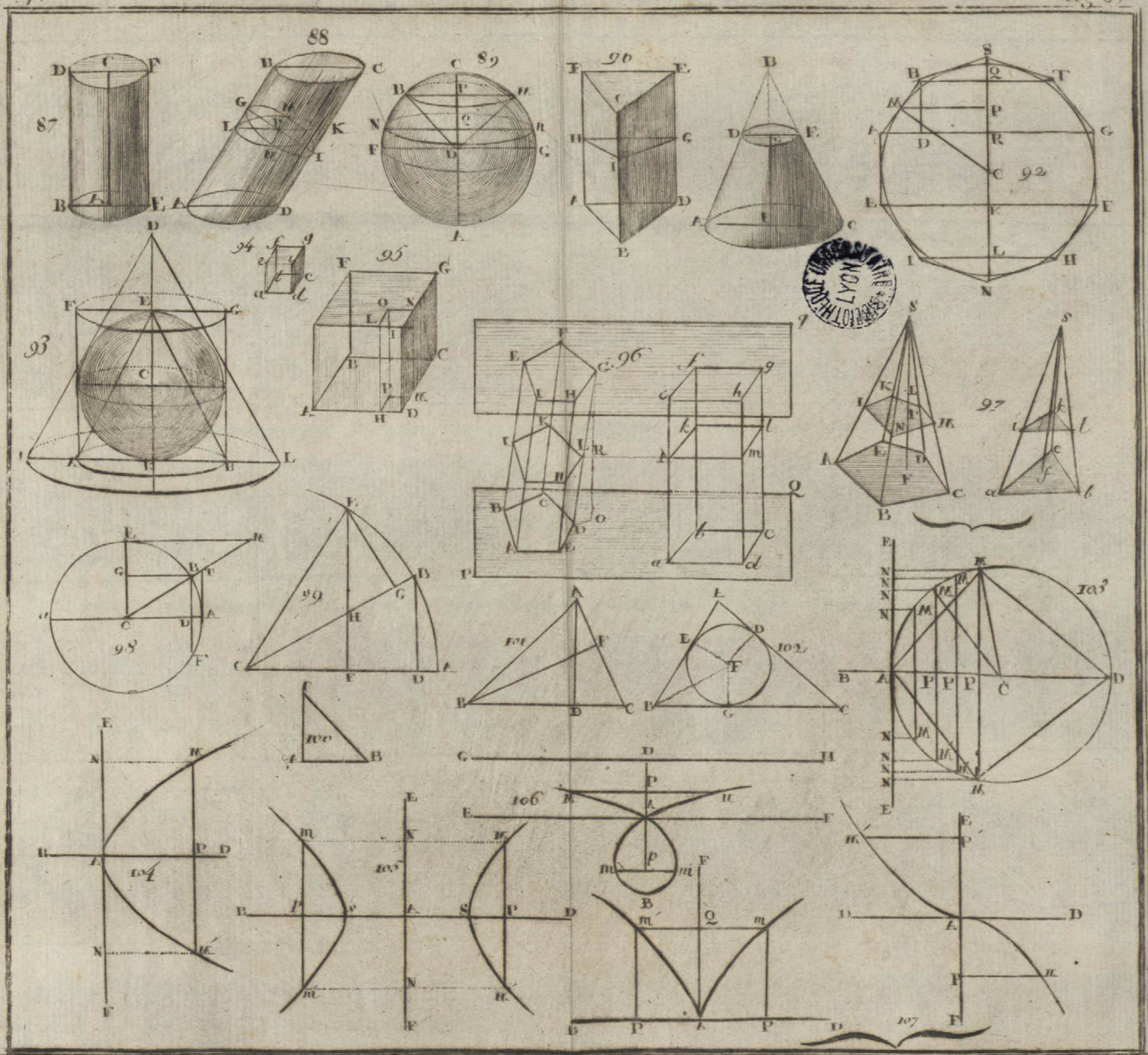


Fig 107

Fig 108

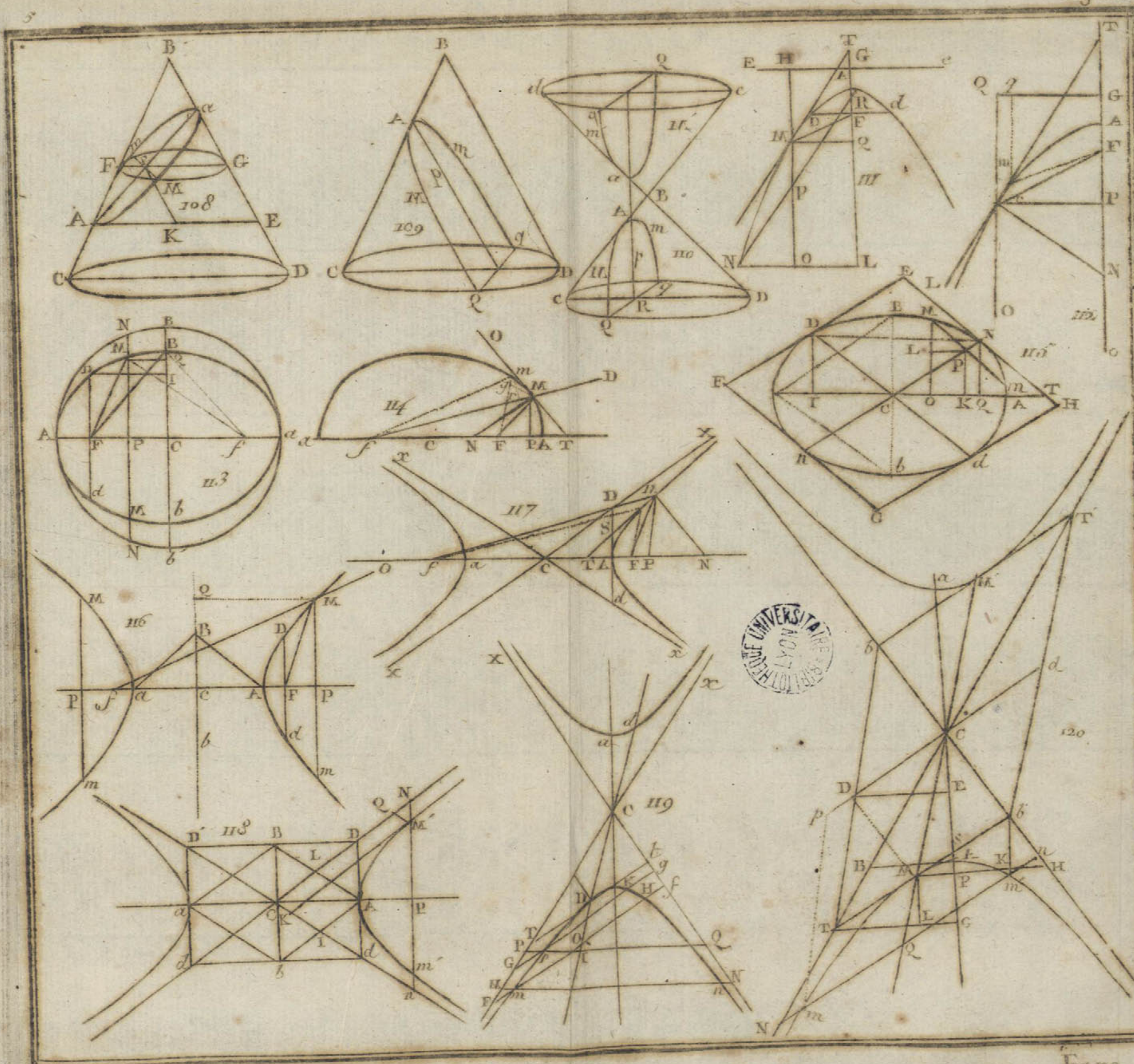


Fig 120

Fig 121.

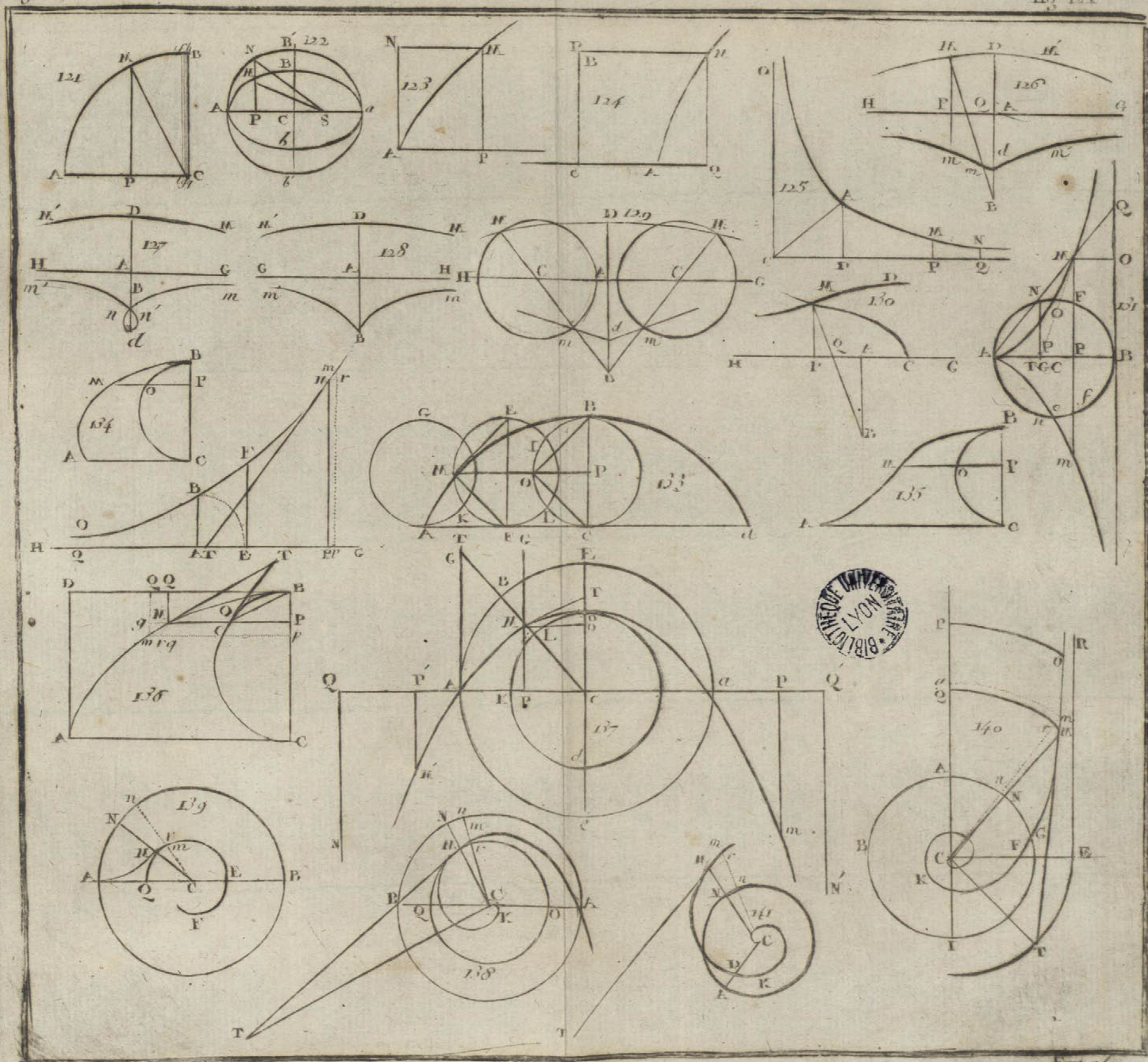


Fig 141.

Fig. 142

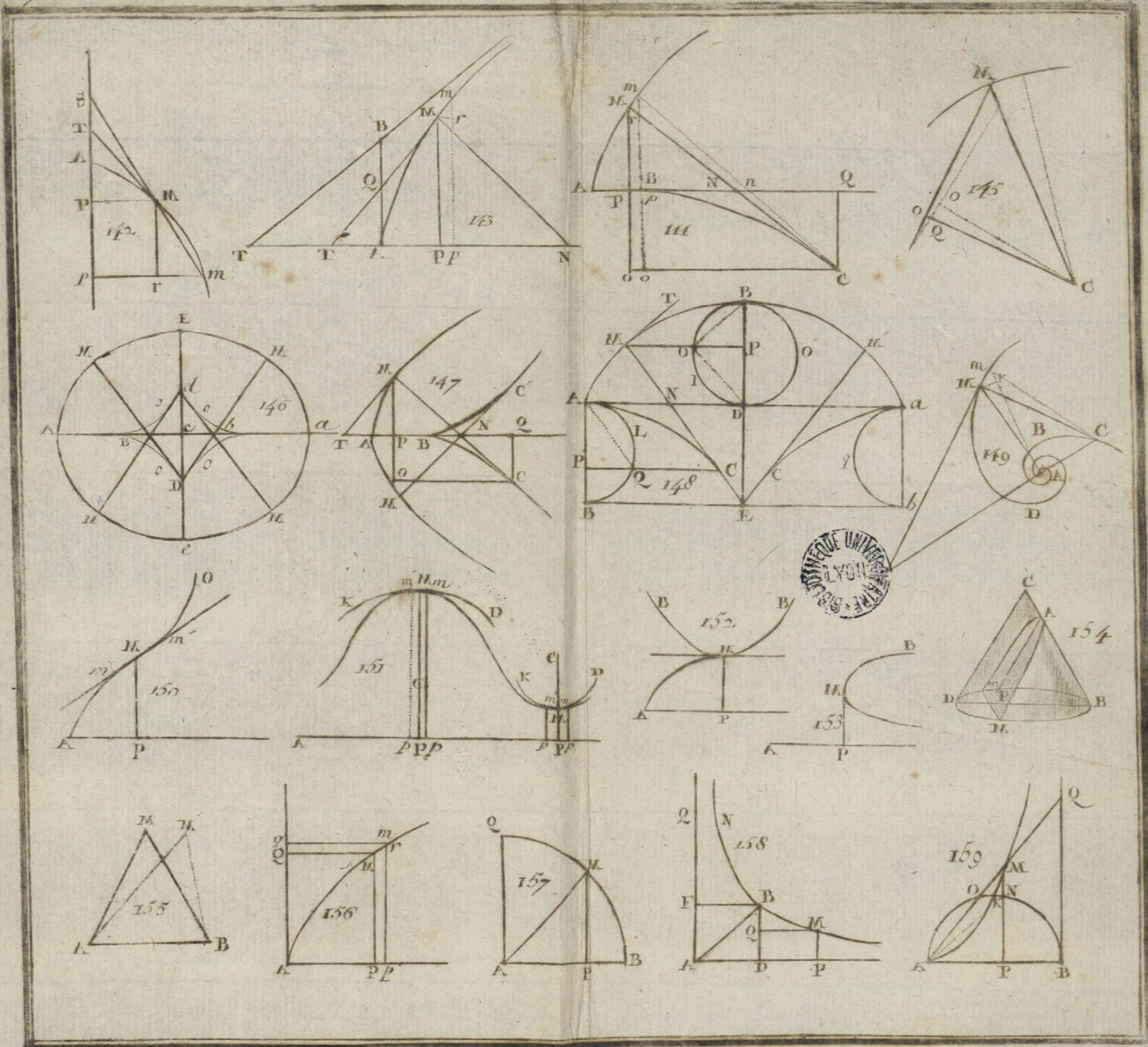
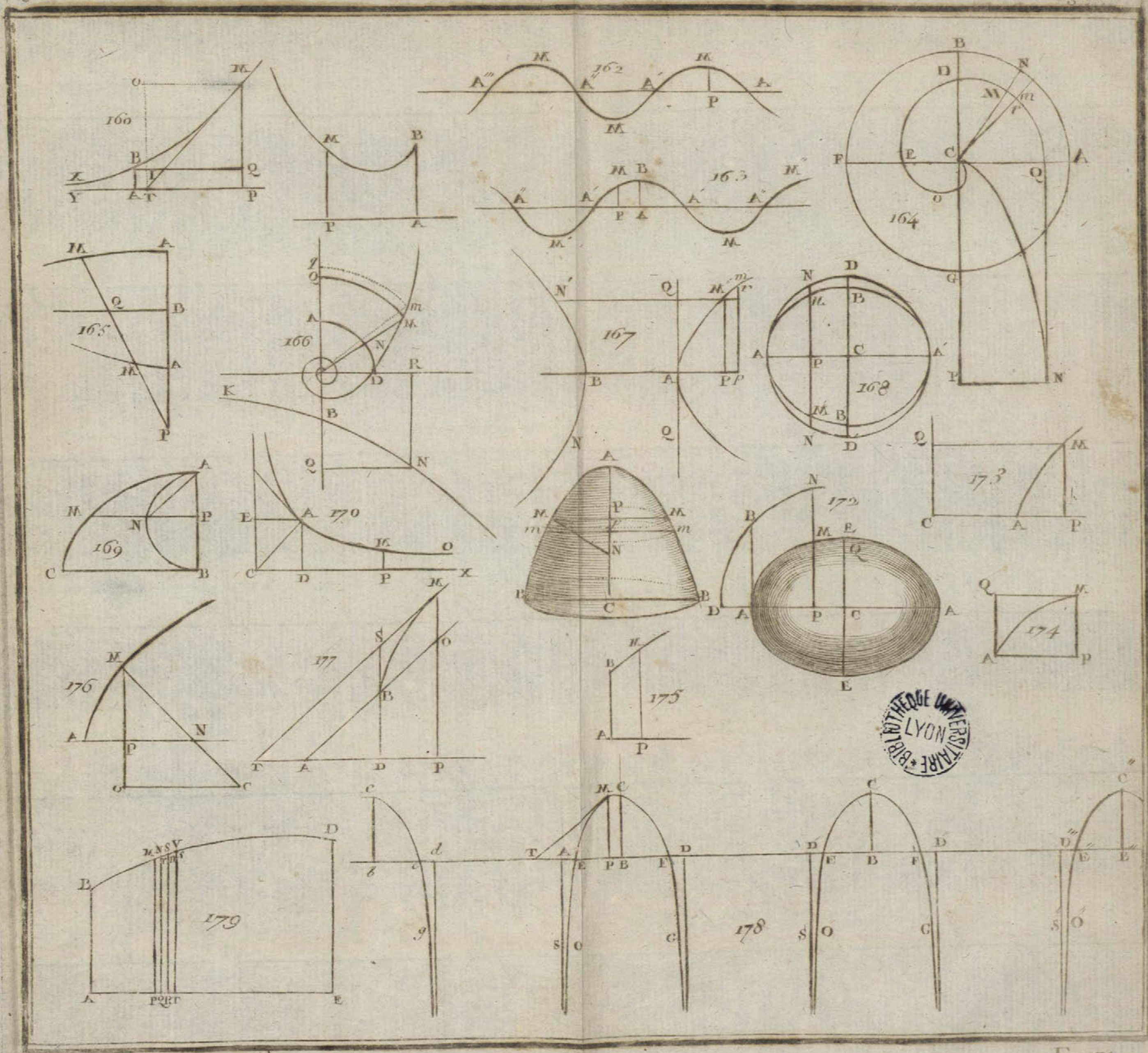


Fig. 159.


160
162
163
164
165
166
167
168
169
170
172
173
174
175
176
177
178
179

MATHEMAT
DE LA
CAILLE