Barrow
lectiones
mathéma
=ticæ.

1.500

Enquêtes de 1664 à 1666

acheté le vendredi 26
octobre 1876.

5 f.

P L

E: Bertrand

ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis:

LONDINI,

Ex Typographiâ J. PLAYFORD,
1704.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

De magnitudinis affectionibus & symptomatis communibus, quæ experientiam incurrunt, adeóque Mathematicis materiam hypothesibus subministrant, disquisiturum præfari subit & præmonere, quod planè conscius sim mihi quàm lubricum & anceps negotium aggrediar. Sunt enim ejusmodi res, quas perdifficile sit non explicando perplexiores reddere, non illustrando obscurare; tam fermè tenuis & abstractæ naturæ res, vix ut illas imaginatio comprehendere, justos singulis limites assignare, alias ab aliis secernere queat; subtilissimam adeò mentis aciem eludunt, & distinctas ipsarum idæas captanti fugaces elabuntur & evanescunt: sic ut illis plerisque non immeritò possit applicari, quod de tempore dixisse perhibetur S. Augustinus, *Quid sit tempus, si nemo quærat à me scio, si quis interroget nescio.* Quid enim v. g. sit extensio, quid spatium, quid motus, qui de illis sermones conserit unusquisque, vel è vulgo se clarè putat intelligere, sin ipsorum mentem excutias, & dum ore proferunt ista vocabula quid mente cogitent explores, inextricabilibus plerosque laqueis irretitos cernes, hæsitantes animo, linguâ præpeditos. Imò post diligentissimam contemplationem cum exquisitissima cura de illis verba facientes, etiam subtilissimi Philosophi vix consona dicere possunt, aut alii aliis, aut sibimet iidem ipsis; nec ferè quisquam eas ita pertractat, ut non è dictis immania paradoxa, gravissimæque consequi videantur difficultates. Ex.g. Cartesius ex suo spatii conceptu deducit infinitam (vel idem efferendo molliùs, indefinitam) mundanæ materiæ extensionem, nec non impossibilitatem vacui, & immediatam contiguitatem corporum antea distantium, annihilatis vel amotis corporibus intermediis, hisque cognata. Quæ velut à communi sensu abhorrentia, quàm meritò non disputo, reprehendit & explodit ejus æmulus Hobbius. At verò num clariora vel certiora, minus ἀσύστατα, magis ἄμεμπτα reponit ipse? Videamus pauxillum: Spatium appellat corporis idæam vel phantasma; locum spatii cum corporis magnitudine coincidentiam; motum unius loci relictionem, & alterius acquisitionem. Quis non videt quàm aut hæc repugnent sibi, vel admodum ridiculis obnoxia sint consequentiis; talibus nempe locus ergò corporis, hujus videlicet

Cap. 7. de Corp.

scholæ,

ſcholæ, nil erit aliud quàm coincidentia phantaſmatis (mei, tui, cujuſvis) cum ſcholæ magnitudine. Quaſi verò Papa Romanus non incolat Vaticanas ædes, non Romæ verſetur, aſt ubique gentium collocetur in omnium quotquot ſunt, aut de eo cogitant, hominum phantaſiis? (quo pacto facilè concipiatur eſſe pontifex œcumenicus). Ergò motus, lapidis puta vel ſagittæ, fuerit unius coincidentiæ phantaſmatis cum magnitudine relictio, & alterius coincidentiæ acquiſitio; dúmque Turca movet exercitum in Hungariam, nil is aliud quàm in tua phantaſia diſcurſitat, in tuo cerebello caſtra metatur. At quomodo obſecro magnitudo corporis cum phantaſmate vel idæa mentis coincidat, congruat, coexiſtat? quomodo derelinqui vel acquiri poteſt coincidentia corporis cum phantaſmate? quomodo phantaſma diſtantia corpora ſejungat & intercedat? quomodo phantaſma occupari, repleri, diſcerpi, menſuram admittere, tótque poteſt aliis attributis ſubjacere, quæ non veretur ipſe poſt traditam iſtam imaginariam ſpatii definitionem ſpatio aſſignare? Quid ſi nullus homo, nullus in univerſo phantaſtes exiſteret, ideóne nuſquam aliæ res eſſent? aut neceſſariò quieſcerent omnia (ſed nec quieſcerent cùm quietis etiam definitionem ſpatii phantaſma ſubingrediatur)? Ideò, inquam, nullum ſpatium, nullus locus, nullus motus exiſtere poſſint? Quàm abſona ſunt hæc, quàm *παράλογα*, nedum *παράδοξα*? Obiter hæc (pauca de multis) ut oſtendam quàm *δυσκατάλεπτα*, quámque *δυσερμήνευτα* ſunt iſta communia magnitudinis ſymptomata,

ptomata, quum ea quàm accuratiſſimè ſtudentes enucleare, viri præ multis ingenioſi tot ſe labyrinthis, difficultatibus, incommodis innectant. Quo magis condonandum ſit mihi, ſi dilutiùs fortaſſis & craſſiùs, ad communem ſenſum, quàm ad Metaphyſicos captus accommodatiùs, quouſque tantùm conducere putem propoſito negotio, hoc eſt, quatenus Mathematicis inſerviant hppotheſibus, τῇ ὑποθέσει δουλευόντων, de iis diſpiciam, ea recenſeam & exponam. Ad rem: E magnitudinis præcipuis & communioribus affectionibus prima ſe nobis offert (nam ad nullum me ordinem aſtringo, cùm nullum ſit, ut in ultima præmonui, ex parte rei fundamentum ordinis inter ejuſdem rei proprietates reciprocas ac eſſentiales) prima, dico, magnitudinem ὡς ἔτυχε contemplantibus, ſe

I. ſenſui noſtro, & cogitationi ſubjicit Terminatio. Nullam certe rem ſenſu attingimus, niſi ceu terminatam; nullius corporis interiora viſcera penetramus, ſed externam tantùm cutem oculo perluſtramus, manu contrectamus. Nec cogitatione (ſaltem diſtincta) quamvis magnitudinem complectimur, niſi ut limitibus quibuſdam concluſam & comprehenſam. Confusè quidem imaginari poſſumus magnitudinem aliquam, puta lineam rectam, potentiâ, ſicuti dixit Ariſtoteles, infinitam; hoc eſt, eam produci vel augeri quouſque libet, vel citra intervallum majus quovis intervallo deſignato, quam proinde denominamus infinitam, nec improprie ſiquidem admittatur Philoſophi,

Phyſ. III. 5. ſubtiliſſima profectò, definitio infiniti, Ἄπειρον τοῦτ᾽ ἐστιν, οὗ κατὰ τὸ ποσὸν λαμβάνουσιν ἀεὶ τι λαβεῖν ἔξω ἐστίν· *(Infinitum eſt, cujus ſiquis aliquam quantitatem accipiat, aliquid extra (vel præterea) ſumi poteſt).* Verùm hoc nihil eſt aliud quàm plures ſucceſſivè lineas, ídque juxta potentiam quandam indeterminatam & arbitrariam, non unam actu lineam interminatam diſtinctè conſiderare; talem animo comprehendere non poſſumus, nam iterum rectè Philoſophus, τὸ ἄπειρον ᾗ ἄπειρον ἄγνωστον, *Infinitum quà tale concipi cognoſcíque nequit.* (Eadem res eſt de infinito καθ' ἀφαίρεσιν, per ſubductionem aut ſubdiviſionem infinitam; quo nil intelligitur aliud quàm ſubtractionem ſeu diviſionem ad libitum poſſe continuari, nec ad impoſſibilitatem ultra progrediendi redigi negotium. De utroque infinito). Rurſum optimè Ariſtoteles de Mathematicis loquens, ὐδὲ νῦν δέονται τῦ ἀπείρυ, ὐδὲ χρῶνται, ἀλλὰ μόνον ὅσην ἂν βύλονται πεπερασμένην· *Infinitâ magnitudine Mathematici nec egent nec utuntur, ſed quantam lubet accipiunt ubi placuerit terminatam.* Revera dum lineam concipimus, idæam formamus alicujus exiliſſimi quaſi fili inter duos extremos apices protenſi (ſaltem ab uno ad ſeipſum recurrentis, ut fit in lineis curvis figuram aliquam ambientibus). Dum ſuperficiem cogitamus, corporis alicujus tenuiſſimam quaſi cuticulam, aut laminam anguſtiſſimâ margine circumſeptam imaginamur; dum corporis effigiem phantaſiæ penecillo depingimus, molem plerunque quandam opacam ſtrictiſſimo rariſſimóque velo undiquaque obductam nobis reprætentamus. Dum angulum concipimus, ſpatium aliquod indeterminatum duabus aut pluribus lineis, vel ſuper-

Phyſ. I. 5. II. 10

Phyſ. III. 13

ficiebus inclusum, vel aliquid tale concipimus. Nec secus de quantis analogicis; dum pondus scilicet cogitamus, aliquam cogitamus potentiam magnitudini cuipiam terminatæ (libræ videlicet uni, vel pluribus) elevandis parem; dum motum, corporis alicujus ab hoc ad illum terminum transitionem successivam; dum numerum, unitatis repetitionem aliquà incipientem, aliquà desinentem; vel multitudinem duabus unitatibus extremis, inclusivè sumptis, definitam (ex vulgi ferè loquor sententia, nam revera unitates non sunt termini numerorum, etsi terminos ipsi suos habent, eosdem nempe quos magnitudines quas repræsentant). Omnis igitur à nobis distinctâ ratione conceptibilis quantitas est aliquo modo terminata, quatenúsque talis (hoc est illa ipsa quantitatis affectio) conducit haud parum Mathematicis hypothesibus. Nam ex ea potissimùm magnitudinis præcipuas species seu dimensiones varias deducimus; & quòd non temerè confingantur, at suo modo revera existant, quodammodo demonstramus. Sic enim licet argumentari: Corpus vel solida magnitudo (quam nemo scilicet non admittit, utpote palpabilem, & quæ propterea præsupponi potest) non ex ulla parte ad infinitum excurrit, & undiquaque terminatur: iste terminus non est introversum, aut quoad profunditatem divisibilis (nam si divisibilis esset, haud totus, sed ejus duntaxat exterius aliquod foret terminus præter hypothesin). Hinc datur solidæ magnitudinis terminus aliquis secundùm profunditatem indivisibilis; is vocetur superficies; ecce unam hypothesin

pothesin Mathematicam, & ex ea resultantem definitionem. Porro dicta superficies non est usquam interminata, sed aliquo ambitu seu extremo clauditur; id extremum simili discursu, quali priùs, versùs interiora, seu quoad latitudinem, est indivisibile. Supponatur ergò dari superficiei terminus quoad latitudinem indivisibilis, qui dicatur linea; ecce alteram hypothesin, eíque connatam definitionem. Itidem, ista linea non est infinita, sed introrsum, hoc est quoad longitudinem, ad utramque partem termino includitur; paríque ratione sunt hi termini prorsus indivisibiles: ergo supponatur dari lineæ terminus indivisibilis, & hic appelletur punctum; quod omni modo indivisibile est, participans quippe de superficiei quoad profunditatem, & lineæ quoad latitudinem indivisibilitate; nec non immediatè quoad longitudinem indivisibile, quatenus lineæ terminus. Hinc tertia suppositio, conjunctam habens puncti definitionem. E quibus patet haud absque fundamento supponi puncta, lineas, & superficies à Mathematicis; nam licèt ut termini nil ferè videantur aliud præter ulterioris extensionis negationes (negationes tamen in re fundatas, ut vidimus, & ab intellectu bene perceptas; sicut umbras & tenebras in Physicis, improbitatem & inscitiam in Ethicis) tamen alio modo consideratæ admodum realia ac positiva sortiri videntur attributa. Superficiei v.g. duobus modis dividi, adaugeri, imminui, mensuram subire, congruere, adæquari, excedere, deficere, nec non quomodocunq; moveri, & quiescere convenit atque tribuitur.

Imò

Imò verò, ſicut innueram, ſolæ ſuperficies immediatè ſenſibus objectantur, coloribus ſubjacent, lucis radios, ſoníque fluctus refringunt, aut repercutiunt; hæ primos motuum impetus excipiunt; hiſce ſolis ſeſe corpora mutuò contingunt, quippe quæ nullâ parte ſui ſe permeant aut penetrant. Eadem ferme vel ſupparia lineis attributa coaptantur; his rerum diſtantiæ cenſentur; ſecundùm has lucis radii diriguntur, gravia deſcenſum affectant, motus omnis tendit; his lucis & umbræ confinia dirimuntur; circa has quieſcentes corpora revolvuntur; produci denique, contrahi, ſecari, menſurari, quomodocunque comparari poſſunt. Nec ipſis punctis, utut ὑπόστασιν ἀμυδρὰν, ſubobſcuram & prætenuem habentibus entitatem, ſua deeſſe videtur attributorum qualiſcunque realitas. Nam & motum hæc & quietem obtinent; motum quidem unà cum corporibus quibus inſunt, quietem verò ſubinde peculiarem ſibi; ſicut rotæ centrum, poli telluris aut cœli (etenim ejuſmodi gyrationes circa quieſcens aliquid peraguntur, & ſecundùm aliquid ſui locum ſervant immutabilem) etiam circa punctum. gravitatis nempe centrum, corporum momenta conſiſtunt, in eo quaſi nodo vires ſuas colligunt & coadunant, eo quodammodo fulciuntur & ſuſtentantur, ſecundùm id motûs ſui ſortiuntur directionem; verſùs unum denique punctum in tellure medium, ceu conſpirantibus votis, propendent & ſponte ruunt omnia, vel directo certe greſſu ab eo refugiunt atque recedunt. Sed audiamus Proclum tale puncto eloginm pangentem: Τάτε γὰρ κέντρα καθ' ἐνέργειαν

Proclus.

ὑφέστηκε

ὑφέστηκε συνεκτικὰ τῶν σφαιρῶν ὑπάρχοντα, καὶ ἑνίζοντα τὰς διαστάσεις αὐτῶν, καὶ σφίγγοντα τὰς δυνάμεις ἐν αὐταῖς, καὶ συνερείδοντα πρὸς ἑαυτά· καὶ οἱ ἄξονες συνελίττουσιν αὐτάς, καὶ περιάγουσιν αὐτοὶ μονίμως ἱδρυμένοι, καὶ περὶ ἑαυτοὺς ἀνακυκλοῦσι καὶ μὴν καὶ οἱ πόλοι τῶν σφαιρῶν, καὶ αὐτοὺς τοὺς ἄξονας ἀφορίζοντες, καὶ τὰς ἄλλας περιφορὰς ἀφ' ἑαυτῶν συνέχοντες πῶς οὐχὶ δηλοῦσιν ἐναργῶς, ὅτι τὰ σημεῖα δημιουργικὰς ἔχει καὶ συνεκτικὰς δυνάμεις, καὶ τελειοτικὰς τῶν διεστώτων πάντων, ἑνώσεώς τε χορηγοὺς, καὶ ἀναπαύστου κινήσεως· ὅθεν ὁ Πλάτων ἀδαμαντίνην αὐτῶν τὴν ὑπόστασιν εἶναι φησὶ, τὸ ἄτρεπτον, καὶ διαιωνίζον, καὶ μόνιμον, καὶ ὡσαύτως ἔχον τῆς οὐσίας αὐτῶν ἐνδεικνύμενος, τόντε ἄτρακτον ὅλον περὶ αὐτὰ κινεῖσθαι φησὶ, καὶ περιχορεύειν αὐτῶν τὴν ἕνωσιν. Hæc magnificè Proclus, etsi speciosiùs & populariùs (opinor) quàm veriùs & accuratiùs. Nihilominus enim cum illo de indivisibilibus istis seriò pronuntiante (καθ' ἐνέργειαν ἵδρυται, καὶ ὕπαρξιν ἔχει, καὶ δύναμιν αὐτοτελῆ, καὶ διήκουσαν διὰ πάντων τῶν μεριστῶν) juxta non sentio. Non existimo superficies, lineas aut puncta separatam quandam existentiam, aut propriam ex seipsis efficaciam possidere, vel aliter à solida magnitudine quàm κατ' ἐπίνοιαν distingui; sed unicam potiùs arbitror ex parte rei magnitudinem dari, quæ prout in varias partes extendi, diversimodè partiri, differentes spissitudinis, latitudinis, & longitudinis considerationes induere vel subire potest, causam vel occasionem suppeditat idoneam rationi nostræ distinctionem istam, magnitudinis in tres quasi species huic scientiæ perquam utilem & accommodatam comminiscendi.

miniſcendi. Sed de terminatione magnitudinis hæc dicta ſufficiant: de figuratione enim ſpeciali ſuccurret opportunior alius

II. dicendi locus. Ei ſuccenturiat Extenſio; quâ nempe ſignificatur magnitudinis terminos non immediatè conjungi vel coëxiſtere, ſed iis aliquid intercedere vel interponi. Id enim exigit ratio termini vel extremi, quæ diverſi quiddam ſupponit intra terminos

Phyſ. VI. 1. comprehenſum. (Οὐκ ἅμα τὰ ἔσχατα, οὐ γὰρ ἐστιν ἔσχατον οὐθὲν τοῦ ἀμεροῦς, ἕτερον γὰρ τὸ ἔσχατον, καὶ οὗ ἔσχατον· *Extrema ſimul conſiſtere nequeunt, nec enim aliquod ejus quod partibus caret extremum eſt; aliud enim extremum eſt ab eo, quod extremum habet*, inquit Philoſophus:

περὶ ἀτόμων γραμμῶν. & alibi, τὸ πέρας ἄλλο καὶ οὗ πέρας) nec ſanè concipere poſſumus ullam magnitudinem niſi velut extenſam, & terminos habentem aliquo diſſitos intervallo; non lineam niſi ceu ſemitam inter extrema duo loca porrectam; non ſuperficiem, niſi ceu pavimentum intra limbos ſuos conſtratum; non corpus aliter quàm ut (vaſculum aut) cameram ſuos intra parietes aliquid complectentem. Tales enim nobis experientia ſimilitudines ac idæas ſuggerit magnitudinum. Nec ſecus ipſis κατ' ἀναλογίαν quantis etiam ſuo modo convenit extenſio qualiſcunque. Nam inter vim uni libræ attollendæ parem, & illam quæ decem libras poteſt elevare, media jacet potentia duas, tres, &c. libras evehere valens; unde pondus ſuo modo extenditur. Et inter anni, menſis, diei, horæ, τὰ νῦν primum ac ultimum duratio quædam intercedit, juxta quam tempus extenditur. Ac inter motûs initium & finem medium quiddam decurſo

ſpatio

ſpatio reſpondens jacet. Numeri verò eadem eſt, quæ magnitudinis, quam denominat & repræſentat, extenſio ; binariis ſcilicet quo linea bipalmaris exprimitur, duorum ad palmorum longitudinem extenditur ; binarius quo bijugerus ager effertur, ad duorum jugerum latitudinem exporrigitur. Cùm igitur ex conceptibus noſtris ab experientia deſumptis ſatis apparet, omnem magnitudinem & quantitatem aliquatenus omnem extendi, licebit Mathematicis hanc ſupponere, quáſque poſſunt ab ea ſuppoſita conſequentias elicere : valebúntque v.g. tales hypotheſes : inter deſignata puncta ſumatur media linea : inter expoſitas lineas jacet media ſuperficies : inter ſuperficies extremas concipiatur interjecti corporis aliquid : inter duo inſtantia medii temporis quiddam intelligatur : inter duo momenta ponatur aliquid intercepti ponderis : inter duos terminos aliquid porrigatur intercurrentis motûs. Et ejuſmodi quævis adſumantur haud illicitæ ſuppoſitiones. Sed de Extenſione hactenus. Illam conſequitur altera magnitudinis affectio, Compoſitio ; hoc eſt, quòd magnitudo continet in ſe diverſa, vel III.
conſtat ex alio ac alio. Namquoniam extenditur,& diſtant ejus extrema,non eſt tota ſimul ; unde deſignari poteſt aliud atque aliud in ipſa ; adeóque componitur ex alio ac alio, hoc eſt ex partibus ; nam magnitudo quatenus componitur è diverſis in ea contentis dicitur totum, iſta verò diverſa partes appellantur. Pari modo cùm ſingula dictarum partium non ſit tota ſimul, (nam ſi tota ſimul foret, cum totius magnitudinis extre-

mo,

mo, vel cùm adjacentis ſibi partis extremo coincideret, adeóque non eſſet medium quid, nec aliud, nec pars) ergo itidem deſignari poteſt in ea aliud atque aliud, adeóque componitur ipſa ex aliis partibus, & hæ pariter ex aliis, ac ita ad infinitum, hoc eſt quouſque libuerit eam è partibus minutioribus compoſitam imaginari. Unde conſectatur magnitudinem quamvis ex homogeneis ſibi magnitudinibus conflari atque conſtitui, lineam è lineis, ſuperficiem è ſuperficiebus, corpus è corporibus; non verò lineam è punctis, aut ſuperficiem è lineis, aut corpus è ſuperficiebus. Nam puncta, dicis causâ, reſpectu lineæ præterquam quòd nil aliud ſint, ut ſupradictum, quàm negationes ulterioris extenſionis, & vix aliquid obtineant poſitivi; & præterea ceu termini connotent aliquid interjectum, ſicut ſibi nequeant immediatè cohærere, totúmque quicquid eſt lineæ ſitum cogitetur inter ipſa; ſunt etiam indiviſibilia, ac idcirco ſi duo ſupponantur adpoſita ſibi, toto ſui contingent ſe mutuò, hoc eſt coincident & coëxiſtent; nec adeò quid habens extrema vel extenſum conſtituent. (Ita ratiocinatur Philoſophus; Ὁπότε γὰρ ἥπτοντο ἐν ἑνὶ μεγέθει καὶ ἓν ἦν μέγεθος, καὶ πάντῃ ὁμοῦ, ἅμα οὐδὲν ἐποίουν μεῖζον τὸ πᾶν· διαιρεθέντος γὰρ ὡς δύο καὶ πλείω, οὐδὲν ἔλαττον οὐδὲ μεῖζον τὸ πᾶν τοῦ πρότερον· ὥστε κἂν πᾶσαι συντεθῶσιν, οὐδὲν ποιήσουσι μέγεθος· de Atomis loquitur) eadem eſt ratio lineæ reſpectu ſuperficiei, & hujus reſpectu corporis. Quin & eodem modo tempus ex temporibus, non ex inſtantibus; motus ex motibus, non ex tendentiis indiviſibilibus; ve-

De Gen. & Corrupt. l. 2.

locitas

locitas ex velocitatibus, & pondus ex ponderibus, neutrum ex gradibus vel impetibus abſolutè minimis; numerus ex unitatibus, illæ ex fractis partibus, non ex cyphris, conſtant & integrantur. Ex his etiam liqueat ubivis in linea ſumi poſſe punctum, ubivis in ſuperficie lineam & punctum, ubivis in corpore ſuperficiem, lineam, & punctum, pro arbitrio. Nam quia partium corporis infinitarum (vel indefinitarum, hoc eſt plurium quavis multitudine determinatâ) aliqua deſinit ubivis aut incipit, ubivis habetur ejus terminus ſuperficies, in hac partem aliquam terminans linea, in ea partem aliquam terminans punctum. Nec ab his abludit conceptus noſter & ſenſus communis (ad hunc enim ſæpiùs appellandum eſt, quoniam is teſtis eſt & index experientiæ, in experientia verò fundantur hypotheſes, ut toties inculcatum) nam nullam omnino magnitudinem concipimus niſi ceu compoſitam ex partibus, nec has partes niſi quadantenus extenſas, adeóque conflatas ex partibus. Penitus incompoſitum, poſitivè in materiatis, ſicut omnem ſenſum, ita prorſus omnem fugit imaginationem. Igitur compoſitionem hanc, & quicquid eam immediatè conſequitur ſupponere licet Mathematicis, quales ſunt quas ſubſequentis, huic arctiſſimè connexæ, proprietatis declarationi ſubjungam, ſuppoſitiones, nè cogar eadem repetere. Nam Compoſitionem excipit ejus individuæ comes & conjux Diviſibilitas. Quoniam enim, ut modò oſtenſum, magnitudo IV.
componitur ex partibus revera diſtinctis, hæ poſſunt ſeparatim exiſtere, poſſunt ſaltem

ſeorſim

seorsim considerari, hoc est rè vel mente divisi, seu in partes resolvi. Quare quanti
*Met.IV.*13 definitionem hinc extruit Philosophus? Τὸ διαιρετὸν εἰς ὑπάρχοντα, ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἕν τι, καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι· *Quod dividi potest in ea quæ insunt, quorum utrumque (nempe si tantùm duæ sunt partes) vel unumquodque unum quid, idque determinatè aptum natum est esse.* Adeò scilicet intima est quantitati divisibilitas, ut ex ipsa videatur commodè definiri. Quod sanè communibus hominum conceptibus apprimè congruit. Nam indivisibile quantum verbo tenus afferat non nemo, sed nullus, opinor, ejus imaginem animo depingat: cum divisibilitate mentem effugit ex-
De Gen.& Corrupt. l.2. tensio, cum partibus totum evanescit. Τί γὰρ ἐστιν ὅπερ τὴν διαίρεσιν διαφεύγει; meritò sciscitatur Philosophus (*Quid illud est quod divisionem respuit?* Planè nihil.) De tota magnitudine valet hoc; de partibus etiam quibuscunque pari ratione valet; sicut omnes conflantur ex partibus, ita possunt omnes in partes alias ac alias resolvi: nullum datur in quacunque specie magnitudinis absolutè minimum. Quicquid dividitur in
*Phys.VI.*1. partes dividitur iterum divisibiles (Λέγω δὲ συνεχὲς, τὸ διαιρετὸν εἰς αἰεὶ διαιρετά, Arist.) Non ignoro, siquidem nemo ignorat, doctrinam hanc à nonnullis gravatim admitti, ab aliis planè rejici, magnâque passim pertinaciâ de perpetua quantitatis divisibilitate, déque compositione magnitudinis (an ex indivisibilibus, an ex partibus homogeneis) controversiam agitari; scio multis involutam difficultatibus, multis obnoxiam contradictoriis argutiis, ob intervenientem præsertim

ſertim infiniti nobis haud perfectè comprehenſibilem conceptum. Tot iſtas tricas evolvere, tot ſalebras explanare, tritam adeò vexatámque, prolixam atque perplexam, quæſtionem aggredi non eſt mihi nunc animus; integrum volumen accuratè pertractata compleret; nimiam curam expoſceret & longiorem moram, quàm ex uſu foret ei jam impendere. Sufficiat quòd perpetua diviſibilitas, & compoſitio quantitatis ex partibus homogeneis communibus, ut innuimus, hominum idæis bene reſpondeat; quòd ipſam præſtantiſſimi plerique Philoſophi poſuerint & propugnârint: (Plato imprimis, ſi fides Ariſtoteli; Πλάτων ἄπειρα δύο ἐποίησεν, ὅτι καὶ ἐπὶ τὴν αὔξησιν δοκεῖ ὑπερβάλλειν, καὶ εἰς ἄπειρον ἰέναι, καὶ ἐπὶ τὴν καθαίρεσιν· Ariſtoteles ipſe multis in locis, Phyſ. Auſc. VI. 1. de Gen. & Corrupt. I. 2. & peculiari libello perquam erudito, περὶ ἀτόμων γραμμῶν, non tantùm aſſerit, ſed validè probat; tota ſchola Stoicorum, & in iis acutiſſimus Chryſippus, ei ſuffragati dicuntur. Recentium quoque Philoſophorum ſubtiliſſimus Carteſius calculum ſuum adponit, & nedum diviſibilem eſſe materiam in partes infinitas, ſed actu dividi, argumento Phyſico, ex peractis continuis per circulorum excentricorum inæqualia interſtitia motibus deprompto, penè demonſtrat. Accedit omnium Mathematicorum neceſſarius conſenſus; quamvis enim vix hoc uſquam apertè ſupponunt, ſæpe tamen tectè ſumunt, & niſi verum ſit, ipſorum corruunt pleræque demonſtrationes. Sumunt, inquam, ut in definitione rectæ lineæ, ſeu dicatur ex æquo ſuis interjecta punctis,

Phyſ. III. 8.

ſeu definiatur breviſſima linearum, quæ duci poſſunt ab uno puncto ad aliud. Nam quo modo linea duobus punctis conſtans, inter ſua puncta jacet omnino? Et ſi ſumatur circuli ſemidiameter conſtans, ex adverſantium mente, tribus tantùm punctis, erit illa æqualis lateri hexagoni iſti circulo inſcripti, ſextans verò circularis circumferentiæ non attinget quatuor puncta (aliàs enim tota circumferentia punctis 24 conſtaret, adeóque quadrupla foret diametri, contra manifeſtiſſimas Archimedis demonſtrationes, & communem ſenſum quo circumferentia circuli perimetro circumſcripti quadrati minor dignoſcitur) atqui ſi ſextans peripheriæ non attingat quatuor puncta, neutiquam (juxta indiviſibilia propugnantium hypotheſin) excedet tria; non erit igitur ſubtensâ ſuâ major; nec proinde recta linea brevior erit omnibus, quæ inter eadem puncta duci poſſunt lineis. Similis conſequetur difficultas, ſemidiameter circuli 5 punctis conſtare ſupponatur; nam peripheria 60 graduum non attinget 6 puncta (aliàs integra peripheria contineret 36 puncta, hoc eſt, diametri triplum & ſemiſſem excederet, quod itidem communi ſenſui facilè demonſtretur refragari). Quæ certè ſola conſideratio ſufficiat evertendæ contrariæ ſententiæ, ſaltem ejus cum Mathematicis principiis manifeſtè declarat repugnantiam. Item cùm à puncto quovis ad quodvis punctum ſupponitur duci recta linea, quomodo conſiſtat id cum indiſtantia, vel immediata punctorum cohærentia? Quinetiam quòd aſſumitur duas rectas lineas à concurſu ſtatim divaricari, ſeu di-

discedere à se invicem, nec præterquam uno se puncto secare, nec habere communem aliquam partem, extra punctum intersectionis; hisque cognata, ab indivisibilium positione manifestè destruuntur; ponatur enim circuli circumferentia constare quotlibet punctis, ad quæ singula ducantur è centro radii, liquet evidentissimè plurium circulorum concentricorum peripherias, aut totidem è punctis quot ille prior conflari, adeóque ipsam adæquare, quod absurdissimum, aut istos radios alibi quàm in centro se contingere, sibimet occurrere, vel intersecare se mutuò. Et quod ad conclusiones attinet Geometricas; quomodo bisecari potest recta linea constans punctis imparibus? quomodo linea quævis possit in tot partes æquales secari in quot alia quælibet secta supponitur? quomodo si trianguli crura sint utlibet inæqualia, per majoris quotlibet puncta duci possint ad basim parallelæ, quæ minoris crus pertranseuntes non coincidant, intersecent, aut contingant seipsas, contra parallelarum naturam & definitionem? Et si crura base longè majora sint, quomodo parallelæ crescant uniformiter, seu proportionem cum interceptis ad verticem crurum partibus conservent eandem, ut basim multo non excedant, quæ tamen minores sunt, etiam ipso sensu judicante? quomodo in eadem recta indefinitè producta sumptis centris quotlibet, puta millies millenis aut utlibet pluribus, per terminum dictæ rectæ descripti circuli se in uno tantùm puncto contingant, juxta manifestissimum Geometriæ præceptum, ut non clarissimè consequatur indè, rectam quantumvis minimam contactui vicinam circulorum istorum circumferentias secantem punctis secari indefinitè multis; adeóque potentiâ infinitis vel innumeris? quomodo, secundùm adversarios, inter duas rectas unam puta 7, alteram 9, punctis constantem reperiri possit media proportionalis, vel ad easdem 7 & 9 tertia proportionalis exhibeatur? Nequicquam adinveniendæ mediæ super conjunctas illas tanquam diametrum constituatur semicirculus, & à segmentorum communi termino erigatur perpendicularis; nec enim illa poterit esse proportione media inter dictas rectas, cùm juxta positionem adversam nulla talis dari possit. Quomodo non tollatur funditùs omnis magnitudinum ἀσυμμετρία, quam tot exemplis ostendunt, tot demonstrationibus muniunt Geometriæ? Cùm communis omnium magnitudinum mensura punctum existat, habeátque se magnitudo quævis ad aliam, sicut numerus punctorum ad numerum punctorum, si lineæ constent è punctis, & superficies è lineis, & è superficiebus corpora. Quomodo non pessum ibit universa de lineis asymptotis, mirabilis equidem, sed nullâ Geometriæ parte minùs certa vel clara doctrina; quæ magnitudinis infinitam divisibilitatem aut invictè confirmat, aut unà concidit, utpote quâ minima quæpiam linea continuo ad infinitum decremento non exhauriri, neque continuo ad infinitum incremento datam, paulo majorem, adæquare lineam, perspicuè demonstratur? Quomodo denique non omnis auferatur motuum quoad velocitatem differentia? Nempe si mobile punctum uno tempore quinque percurrat puncta, quomodo possit alterum eodem tempore conficere sub-

ſubduplum, ſubtriplum, aut ſubquadruplum, ejuſce ſpatii, quum totum in iſtas partes dividi nequeat? Infinita poſſem excogitare, & adferre talia, quibus oſtendatur ab iſta compoſitionis ex indiviſibilibus aſſertione totam concuti, proſterni, penitus ſubverti Geometriam; nil in ea ſani vel ſolidi relinqui, ſed immanem & deplorandam ruinam, confuſionem, ἀσυστασίαν in diviniſſimam iſtam induci ſcientiam*; cujus tamen effata, præter evidentiam principiorum & diſcurſuum rigorem, ita cùm admiranda (qualis falſis ſeu principiis ſeu ratiociniis obvenire nequit) inter ſe conſonantiâ, tum perpetuo exquiſito cum experientia conſenſu firmè ſtabiliuntur, ut mundi citiùs cardines emoveantur loco, rerúmque machina collabatur, quàm Geometriæ fundamenta (τὰ θεῖα τῆς γεωμετρίας ἀξιώματα) labefactentur, aut ejus concluſiones falſitatis arguantur. Sed dimittenda nobis eſt hæc quæſtio, poſtquam admonuero breviter, præcipua quæ contra perpetuam quantitatis diviſibilitatem adferuntur argumenta, vel petitione principii laborare, vel falſis ſuppoſitionibus inniti, vel parum ad rem pertinere. Objecit Epicurus, in ſuarum atomorum gratiam & patrocinium, ſi partes magnitudinis infinitæ ſint, magnitudinem ex iis conflatam intelligi non poſſit finitam. Quid hoc eſt aliud quàm petere τὸ ἐν ἀρχῇ, vel idem per idem aſtruere? Hoc enim ipſum quæritur, an finita magnitudo (nam de infinita non agitur)

* Οὗτος γὰρ τοὐλάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστα κινήσειε τῶν Μαθημάτων. *Ariſt. de Cælo l. 5.*

Τῷ μὲν γὰρ ἀληθεῖ πάντα συνᾴδει, τῷ δὲ ψευδεῖ ταχὺ διαφονεῖ τὸ ἀληθές. *Ariſt. Eth. l. 8.*

agitur) poſſit habere partes infinitas. Id verò dicit adverſarius non poteſt eſſe, nequit intelligi. Magìs appoſitè rogâſſet explicationem modi quo fiat, quàm ita fieri non poſſe concluſiſſet. Cui quæſtioni reſponderem, quòd rationi quidem adverſatur, ut magnitudo finita partes habeat aliquotàs (centeſimas puta vel milleſimas) infinitas, imò repugnat ut habeat harum plures quàm centum vel mille; ſed quòd partes habeat plures milleſimis millies acceptis, vel plures partibus alio quovis numero denominatis, non equidem video quomodo repugnet, imò potiùs perſpicio quòd rationi conſentiat optimè. Certè quòd ſicut integri numeri poſſint ad infinitum augeri κατὰ πρόσθεσιν, ita fracti poſſint ἀντιστρόφως diminui τῇ καθαιρέσει (quod nempe ſicut concipitur aliquis ultra millenarium numerus, eodem modo concipiatur aliqua pars infra milleſimam) ſignum eſt magnitudinis, quibus reſpondent, utroque pariter modo verſus infinitum vergere. Quinimo quòd infinita ſeries fractionum certâ qualibet proportione decreſcentium æquetur certo numero, vel unitati, vel unitatis parti, (v.g. quòd talis ſeries decreſcentium proportione ſubſeſquialtera æquetur binario, decreſcentium ratione ſubduplâ æquetur unitati, decreſcentium ratione ſubtriplâ æquetur ſemiſſi unitatis) ſatìs clarè docetur & oſtenditur ab Arithmeticis, unde non repugnat finitum aliquod infinitas in ſe partes continere: præſertim cùm numero nihil conveniat, quod non potiori jure convenit magnitudini, quam numerus repræſentat ac denominat. Et ſanè ferè tollit om-

omnem difficultatem imaginandi quo pacto possit evenire, quòd res finita conflari possit ex partibus infinitis, si modò consideretur, prout adcrescit multitudo partium, ita pari passu reciprocè ipsarum magnitudinem decrescere. Ut si tres partes habeat illarum singula non est nisi tertia pars totius, si quatuor non nisi quarta; sic ut ipsarum parvitas multitudinem compenset. Sed urget Epicurus, vel ejus nomine Lucretius:

Præterea nisi erit minimum, parvissima quæque
Corpora constabunt ex partibus infinitis.
[Rectè, quid inde?
Ergo rerum inter se summam minimámque
quid escit?

Nempe futurum putat, admissâ nostrâ hypothesi, ut minimum quantum adæquet maximum, ut granum papaveris æquiparetur toti mundo, nec musca amplitudine cedat elephanto; quia pariter ista cum his partes continent infinitas. Sed hæc argumentatio nil efficit: quid enim obstat quo minùs exigua res tot habeat partes minores, quot amplior alia majores obtinet; ut solidus in tot denarios, quot in uncias libra distribuatur; ut tot octantes pes, quot ipsum miliare stadios complectatur? Quidni sicut universus terrarum orbis ad arenam, sic arena se habeat ad aliam arenulam, ut quoties ille continet istam, toties ista comprehendat hanc? Cùm mundus ipse respectu alterius mundi, quem Deus condere potest, major non sit quàm hic ipse respectu minutissimi pulvisculi vel arenulæ. Igitur constare potest utrumque (quod majus & quod minus est) ex partibus infinitis, sed illud ex majoribus, hoc ex minoribus, tantâ scilicet proportione minoribus, quantâ totum hoc illo toto minus est. Sed instant porro, saltem ex assertione nostra sequi, quòd infinitum infinito sit inæquale: numerus quippe partium in linea bipedali duplus erit infiniti numeri partium existentis in linea pedali; siquidem numerus iste quisquis est hunc evidentissimè bis includit. Absurdum autem videtur infinitum excedi, contineri, multiplicari. Respondeo etiam, in hoc adversariorum argumento palmario principium repeti; hoc est, idem ex eodem aliis verbis prolato deduci. Numerus enim infinitus nil innuit aliud, quàm id cui tribuitur posse dividi, vel concipi divisum in infinitum; id quod nos asserimus utrique lineæ tam pedali quàm bipedali convenire, non obstante quòd illa sit hujus dupla; negant hoc οἱ ἐξ ἐναντίας sub aliis verbis, at nihil in contrarium subdunt novi argumenti. Certè numerus (sicut multoties inculcatum, & mihi persuasissimum est) numerus, inquam, seu finitus seu infinitus, nullam ex se vel æqualitatem vel inæqualitatem habet alterius numeri respectu, nisi quatenus uterque generis ejusdem magnitudinem designat & repræsentat; quare dicere numerum hunc infinitum majorem esse illo numero infinito, & hoc absurdum pronunciare, nil est aliud quàm dicere magnitudinem hanc, quæ concipitur ad infinitum divisa majorem esse illâ, quæ concipitur etiam ad infinitum divisa, & hinc absurdum consequi, hoc est, nostram thesin negare, sed illam aliquâ novâ machinâ non oppugnare. Præterea, quòd nullatenus absurdum videatur

tur infinitum infinito contineri (infinitam dico magnitudinem infinitâ magnitudine, vel infinitum numerum infinito numero comprehendi: nam ſi ponatur, in ſpatio quod nemo ferè non imaginatur immenſo, protendi infinita linea recta; in illa proculdubio continebuntur infiniti numero pedes, & infinitæ orgyæ, & infiniti ſtadii: item illa infinita recta ſæpius continebitur in infinita ſuperficie, & hæc innumeris vicibus in infinito ſolido corpore. Nec abſimiliter in æterna duratione facilè concipiantur infiniti anni, infinitiores dies, hiſque pluries infinitæ horæ, & infinitiſſima momenta. Dices poſitiones iſtas impoſſibiles eſſe, & ἑνὸς ἀτόπου δοθέντος τἆλλα συμβαίνειν. Reſpondeo, cùm adverſarius ex infiniti natura ſtruat argumentum, licet ipſum ſupponere; & quanquam ipſius rei poſitio fortè ſit impoſſibilis, conſecutio tamen perceptibilis eſt & manifeſta, nempe quòd neutiquam (ut volunt illi) infiniti naturæ repugnat in altero infinito contineri: uti licet impoſſibile ſit hircocervum exiſtere, ſatis evidens eſt hircocervi notioni non adverſari quòd pedes habeat aut cornua. Saltem valuerit hoc ad homines, Epicureos intelligo propugnatores atomorum, qui ſuum κενὸν magnitudine ſtatuebant immenſum, ſuas atomos infinitas multitudine. Εἶναι αὐτὸ τὸ κενὸν ἄπειρον, καὶ τὰ σώματα ἄπειρα, ſtatutum ab Epicuro refert Plutarchus in placitis) & atteſtatur Lucretius:

——patet ingens copia rebus
Finibus exemptis in cunctas undique partes.

Quo

Quo poſito clariſſimè liquet infinitum numerum infinito numero, ſpatium infinitum infinito ſpatio, vel de facto comprehendi. Nam in infinito numero atomorum continentur infiniti numeri octonarii, magìs infiniti quaternarii, infinitiores binarii, & unitates infinities infinitæ. Paritérque de ſpatiis. Objecit denique Zeno contra noſtram ſententiam, infinitis partibus conſtans ſpatium non poſſe ſucceſſivè pertranſiri, adeóque per eam motum è rerum natura tolli. Tribus verbis repono, rectè ſequuturum hoc, ſi mobile ſupponatur infinitè tardum; at ſi velocitatem habeat aliquantam, illa cuidam ſpatii determinatæ parti reſpondebit, quàm adeò deſignato tempore mobile poterit emetiri. Moneo quæ contra compoſitionem ex indiviſibilibus dicta ſunt, illos pleraque ſpectare, qui magnitudinem conſtitui volunt ex indiviſibilibus numero finitis; quæ ſententia Geometricis decretis magis adverſatur. Cum quibus fortaſſe conciliari poteſt, nec aliàs quàm loquendi modo differt opinio Galilæi, & aliorum ei συμ-ψήφων, ex infinitis ipſam atomis compoſitam cenſentium. Sed iſtam ſententiam miſſam facio; (etenim ſi quæ mihi cogitanti obveniant omnia minutatim excuterem, in immenſum redundaret ſermocinatio noſtra. Complura vobis ut maturiori judicio veſtro corrigenda, ſic & diligentiore curâ ſupplenda linquo). Cæterum nè tumultuaria hæc diſputatio provehatur in infinitum, haud diſſimulo nec diffiteor ab intellectu noſtro difficilè capi, quomodo dividi poſſit unaquæque pars, ſic ut actu diviſæ omnes non ad indiviſibilia,

vel

vel ad nihilum aut nihilo proximum aliquid redigantur; nec tamen ideo propter imperfectam conditionem humanæ mentis, & captûs nostri tenuitatem, deserendam esse sentio tot manifestis indiciis compertam, tot argumentis firmissimis suffultam veritatem. Egregiè Aristoteles; Ἀλλ' ἄτοπον ἴσως τὸ μὴ δυναμένους λύειν τὸν λόγον δουλεύειν τῇ ἀσθενείᾳ, καὶ προσεξαπατᾷν ἑαυτοὺς μείζους ἀπάτας, βοηθοῦντας τῇ ἀδυναμίᾳ· h. e. *Equidem rationi dissentaneum est, quòd instantias omnes repellere nequeamus, infirmitati nostræ servire vel succumbere; majorésque nos in errores conjicere, quòd minoribus angustiis nos expedire nequeamus.* Cui non absimili prudentiâ succinit Cartesius; Quamvìs quomodo fiat indefinita ista divisio cogitatione comprehendere nequeamus, non ideo tamen debemus dubitare quin fiat, quia clarè percipimus illam necessariò sequi, ex natura materiæ nobis evidentissimè cognitæ, percipimúsque etiam eam esse de genere eorum, quæ à mente nostra, utpote finita, capi non possunt. Maneat igitur omne quantum componi è partibus compositis, & dividi posse in partes iterum divisibiles, & proinde Mathematicis licere quaslibet eis fundamentis hypotheses superstruere. Tales nempe; A majori quavis magnitudine subduci posse æqualem cuilibet minori. Inter duas homogeneas magnitudines inæquales utcunque desumi posse mediam aliquam ejusdem generis. Ubivis in linea sumi posse punctum, in superficie punctum & lineam, in corpore punctum, lineam, & superficiem, pro lubitu. Quamlibet magnitudinem habere partes homogeneas numero quovis de-

περὶ ἀτ. γρ.

Princip. II. 34.

denominabiles, decimas putà, centesimas, millesimas, &c. nec abhorrere à ratione, si speculandi gratià quomodocunque divisa supponatur. Et consimiles his; nec enim jam omnes hypotheses enumerare, sed ipsorum duntaxat fontes aperire propositum habeo. Supersunt alia magnitudinis attributa, quæ nunc persequi tempus vetat.

LECT. II.

CUM instituti discursûs filum eò me pertraxerit, ut Mathematicarum hypothesium gratià, de magnitudinis affectionibus & symptomatis communioribus dispiciam, & de nonnullis quæ se primùm objecerant (terminatione nimirum, extensione, compositione, divisibilitate) pro rerum dignitate pauca, pro nostro proposito satìs multa disseruerim, superest ut reliqua deinceps perstringam, occupationem spatii, positionem determinatam, mobilitatem, mensurabilitatem, proportionem, & siqua occurrerint alia, de quibus Mathematici depromunt, aut legitimè depromere possunt hypotheses ratiociniis suis accommodatas. Imprimis magnitudini solet attribui quòd occupet & repleat spatium. Quid vero sit hoc spatium difficile sit exponere. Nam an detur necne spatium aliquod ab ipsa rerum magnitudine distinctum, si vel ad conceptus vulgares attendamus, aut subtiliores Philosophorum excutiamus sententias, haud in proclivi sit

sta-

ſtatuere; adeò repugnantes ſententiæ cum ſpecioſis nituntur argumentis, tum gravibus urgeri videntur incommodis. Imprimis nullum à rebus quantis reverà diſtinctum exiſtere ſpatium iſta videntur arguere ſatìs manifeſtè. Primò, quod ſi ſit improductum & independens, æternúmque proinde & immenſum ſit oportet (nam prӕterquam quòd à ſpatii realis aſſertoribus tale plerumque concipitur & ſupponitur, ſi tale non ſit ceſſabit omnis ratio, propter quam dari ſupponatur, ut ejus conſtituendi cauſas expendenti liquebit) atqui dari quid eximiorum iſtorum divinæ naturæ attributorum particeps, à Deo quoque non creatum nec dependens, tam rectæ rationi diſcrepare, quàm à pietate videtur abhorrere. Tum ſi ſpatii quæcunque ſit idæam examinemus, nihil in ea præter extenſionem quandam, & capacitatem indefinitam deprehenſuri videmur; quæ cùm ipſius magnitudinis ſint proprietates, ſpatii nullum à magnitudine diſcrimen arguunt, cur enim re differant, quæ proprietatibus congruunt? Non Carteſii modò, ſed ipſius Ariſtotelis eſt hæc argumentatio: Ὡς εἰ τȢ τόπȢ (inquit Philoſophus) μηδὲν διαφέρει, τί δεῖ ποιεῖν τόπον τοῖς σώμασι παρὰ τὸ ἑκάστȢ ὄγκον; *Si magnitudo rerum à ſpatio nihil diverſum habet in ſe, quamobrem diſtinguitur à ſpatio ſuo rei cujuſpiam moles?* Porro, ſpatium ſi quod eſt à magnitudine differens, ſciſcitamur in qua rerum claſſe reponatur. Cùm enim res omnis aut ex ſe ſubſiſtat, aut accidat alteri, neutrum iſti ſpatio convenire videtur. Non ad ſubſtantiæ dignitatem ipſius patroni ſpatium evehent, nec res ipſa patie-

Phyſ. Auſc. IV. 12.

tur.

tur. Sed nec accidens eſt, quoniam omni ſubſtantiæ extrinſecum eſt, & cum ea non circumfertur, eâque ſublatâ permanet; & ab alia nulla re pendet. Prætereo Zenonis iſtam argutiam; quòd res omnis ſit alicubi, ſpatium ergò ſi ſit aliquid ab aliis diſtinctum, alicubi exiſtet; unde ſpatii ſpatium erit, & hujus ſecundi ſpatii ſpatium aliud, & ſic in-
Phyſ.IV.3. finitè; quod ludicrum eſt. (Ἐι πᾶν τὸ ὂν ἐν τόπῳ, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ τόπου τόπος ἔσαι, καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον πρόεισιν; ut eſt apud Philoſophum in Phyſicis). Ejuſmodi ratiociniis impugnatur ſpatii realis à magnitudine diverſitas: at non minùs validis in ſpeciem argumentis aſtruitur. Nam primò, communes hominum conceptus appellando, videtur omnibus aut innata vel alicunde conquiſita no-
Phyſ.IV.1. tio ſpatii à rebus diſtincti. Τὰ ὄντα πάντες ὑπολαμβάνουσιν εἶναί που, inquit Ariſtoteles: h.e. Omnes ubi rerum animo ſeparant ab ipſarum Eſſe. Quinimo vulgus hominum imaginari conſuevit ὑφιστάμενόν τι, commune quiddam cunctis rebus ſubſtratum, quod infinitè diſtendatur, & nullis circumſcribatur limitibus, quod omnino penetrabile ſit, & facillimè quidvis in ſe recipiat, nec ullius in ſe rei refugiat ſubingreſſum; quod mobilium ſucceſſiones excipiat, & motuum velocitates determinet, & rerum diſtantias metiatur; quod immobiliter fixum ſit, etiam quoad omnes ſui partes nulli rei alligetur, nuſquam aliò transferatur; quod immenſæ denique ſit capacitatis vas & conceptaculum
Phyſ.IV.6. (ἀγγεῖον ἀμετακίνητον, ait Philoſophus) univerſa complectens in ſe quæ ſunt, & quæ poſſunt exiſtere. Tale quid omnes ferè mor-

mortales phantasiis suis insculptum habent. Et quod revera tale quid existat, præter hunc imaginandi consensum, permulta videntur arguere. Quorum vis ut pateat, & aliquid efficiat, præstruendæ sunt aliquæ theses aut assertiones, quibus suffulciuntur adducenda pro spatii realitate ratiocinia. Primò, materia non est infinitè extensa, saltem quod proposito nostro sufficit, haud necessariò talis est. Nam unde necessitatem istam habeat? an à se? Non pium hoc, cùm Deo cunctarum rerum originem toties disertis verbis
ascribant sacræ literæ; (Τὰ πάντα δι' αὐτοῦ καὶ *Eph. III.9.*
εἰς αὐτὸν ἔκτισται· σὺ ἔκτισας τὰ πάντα, καὶ διὰ *Col.I.16.*
τὸ θέλημά σου εἰσὶ καὶ ἐκτίσθησαν· πάντα δι' αὐτοῦ *Apo.IV.11*
ἐγένετο· ἡ χείρ μου ἐποίησε ταῦτα πάντα· id *Job.I.3.*
est, Quicquid uspiam est rerum, exceptâ *Isa.LXVI.*
nullâ: innumera passim occurrunt talia). *1,&c.*
Nec ulla ratio suadet, ut à se potiùs infini- *Act.VII.*
tam, quàm infinitam habere credatur subsi- *50.*
stentiam: an à Deo? Quis ei (agenti liberrimo & independenti) necessitatem imposuit, ut infinitatem tribueret materiæ? Quo liquet indicio revera tribuisse? Num potuerit haud disputo (quis enim divinæ potentiæ limites assignet?) At longè credibilius videtur, ut reliquis rebus vires & potentias præfinitas indidit, ita certos ipsum materiæ terminos statuisse. Id quod etiam sacrosancta scripta satìs perspicuè videntur
attestari. Ecce (semel ac iterum dicit Rex *II Chron.*
sapientissimus) non cœli, ne quidem cœli *II.6.*
cœlorum capiunt te: hoc est, angustior est *VI.18.*
tota rerum universitas, quàm ut Deo coëxistat; extimos ille rerum fines transcendit; adeóque materia non est de facto ad infini-

tum

tum protensa, nedum ut necessariò talis est. Regeret Cartesius, *Ideo necessarium esse, ut materia infinitè protendatur, quoniam ubicunq; fines ejus fingamus, semper ultra ipsos aliqua spatia indefinitè extensa non modò imaginamur, sed etiam verè imaginabilia; hoc est, realia esse percipimus, ac proinde etiam substantiam corpoream indefinitè extensam in iis contineri; quia scilicet idæa ejus extensionis, quam in spatio qualicunque concipimus, eadem plane est cum idæa substantiæ corporeæ.* Verùm hæc ratio subtilior videtur quàm solidior. Nam primò materiam actu infinitam nemo concipit, aut concipere potest; indefinitè verò protensam concipere, nihil est aliud quàm ejus terminos non attingere, vel nullos ei certos limites in animo defigere; sicut vulgus hominum telluris planitiem indefinitè protractam existimat, aut astans maris littori, incerto limite definitum æquor cogitat; vel sicut arenas maris indefinitè multas concipimus. Porro, ex eo quòd ultra præstitutas quascunque metas spatia quædam imaginari possumus, nullo pacto sequitur actu materiam aliquam ulteriorem existere. Id saltem verisimiliter colligatur, ideo posse talem existere; quia nempe quicquid nos ut evidenter possibile percipimus, id valet divina potestas effectum reddere. Enimvero innumera nos imaginari posse, quæ nec sunt, nec erunt unquam, quis mentis compos inficias ierit? Nil repugnat, & facilè possem imaginari, non secus ac è vulgo quilibet, uti adnotatum modò, tellurem ad summas cœli oras, & extrema mundi mœnia pertingere; possim Solem millies majorem, Lunam multis parasangis pro-

Princ.II. 21.

propinquiorem, ſtellas plurimis vicibus numeroſiores,& ſexcenta talia factu neutiquam impoſſibilia, neque penitus abſurda, mecum animo volutare, quæ tamen an idcirco vera erunt de facto? non certè magis quàm ſomnia quævis, aut ægrorum deliria. Imaginabilitas igitur quantumlibet realis ad ſummum rei poſſibilitatem aliquam, non actualem exiſtentiam ullatenus coarguit. Ex imaginatione non infinitus actu, ſed utcunque potentiâ finito (determinatè finito) major mundus comprobetur. Verùm ut penitus agnoſcamus, ſumma ſua ſubtilitas hac in cauſa quantopere deſtituit & fugit Carteſium, imaginationis iſtius de ſpatiis ultramundanis noſtræ perſcrutemur & paulo perpendamus originem; illam certe, ſicut alias pleraſque non aliunde quàm ex ſenſibus noſtris hauſtam comperiemus. Cùm quippe nil ferè quicquam ſenſu quovis attigerimus, quin aliquid ultra ſitum pariter ſenſibile progrediendo fuerimus experti; præſertim cùm ad cœlum oculos elevando vaſtum undique χάσμα nullo perceptibili limite concluſum, & in ignotas nobis regiones procurrens intueamur, hinc immenſum quendam, ſeu indeterminatum cœleſtis ſpatii gurgitem, in quo nubes pendeant, venti diſcurrant, ſtellæ ceu piſciculi natent, noſtrâ in phantaſia deſcribendi nobis obrepit occaſio; à qua tamen ſenſione, vel ab imaginatione confuſa eam excipiente, perabſurdum videtur de vera mundi, ſeu finita ſeu infinita, extenſione quicquam inferre vel decernere. Nam omnis ſenſio eſt ſingularium, ab exiſtentia verò rei ſingularis compertam licet

C qui-

quidem deducere, quòd aliud quid simile possit existere, non autem quod aliud quid actu sit vel existat, ut aliquoties admonitum est. Taceo quòd eodem jure paríque ratione, quibus materiæ necessaria tribuitur extensionis infinitas, eidem æternitas & in e-pendentia tribuantur; nam prout ultra quoslibet mundi limites aliquid spatii, sic ante quodvis initium. Post quemvis finem aliquid temporis æquè clarâ cogitatione solemus imaginari; æterna proinde necessariò, & consequenter etiam independens. Secundum hunc argumentandi modum materia demonstretur, quæ tamen divinæ perfectionis idiomata periculosum sit, & Christiano Philosopho summopere cavendum, alteri quàm Opt. Max. Deo adscribere. Ratum igitur fixúmque sit materiam, seu molem corpoream non esse penitus interminatam, saltem non esse talem necessariò. Hoc primò supponatur. Adsumatur quoque secundò, quod Deo competat potestas, prout adlubescet ipsi, materiam existentem adaugendi vel imminuendi, hoc est, e nihilo procreandi quantum velit, & quamlibet ejus portionem in nihilum redigendi. Jubet hoc fides, cogit pietas admittere; nec reclamat ratio, sed potiùs suffragatur & suadet. Nam ex eo quod concipere possimus materiam ampliorem quavis præfinitâ, nil obstat quo minus, imò satis evidenter inde consectatur, quod Deus omnino valeat id effectum dare. Quòd si potest ampliare, pari potestate potest minuere, quámque de novo pertexuit telam eadem facilitate retexere valet; quinimo quia nobis contractiorem imaginari fas est,

eſt, imò nullam ſupponere, divinæ potentiæ ſubjacebit illud præſtare. Ad hæc tertiò facillimè concipitur, & nulla ratione negari debet, poſſe Deum quamcunque rem in ſuo quem nunc obtinet ſtatu ſitúque conſervare, ſic ut à nullis extrinſecus accidentibus immutetur intrinſecè, nedum ut ejus natura penitus deſtruatur: ut nempe recta linea, plana ſuperficies, circuli circumferentia, ſphærica orbicularitas tales permaneant, quicquid extra illas fieri contingat, hoc eſt, tametſi circumjacens omnis materia quomodocunque mutetur, tollatur, aut annihiletur. Quibus pro jure noſtro legitimè ſuppoſitis, atque ſubſtratis ſpatii qualiſcunque realitas à magnitudine diſtincta multis adſtrui modis videtur. Primò, cùm materia poſſit eſſe finita, Deus autem eſſentiâ ſit infinitus, ultra materiæ fines ſubſiſtet, aliàs ejus limitibus clauderetur, aut finiretur utcunque, nec eſſet propterea infinitus. Ergo datur aliquid ultra, hoc eſt, ſpatium qualecunque. Et niſi Deus ultra materiæ fines exiſtat, poſſet imaginatio noſtra locum confingere, ubi non eſt, adeóque divinæ exiſtentiæ modum aliquatenus tranſcendere, nec immenſum proinde Deum concipere poſſemus aut agnoſcere. Tum Deus extra hunc poſſit alios mundos condere, ſicut & nos conditos imaginari, non illos quidem nullibi, ſed alicubi; dabitur igitur ſpatium aliquod, in quo collocari poſſint & conſiſtere. Novis quoque productis mundis intererit Deus, abſque eo tamen quòd omnino moveatur (immobilitas enim eſt & immutabilitas omnimoda, eſt indubitatum divinæ perfectionis attributum) id id quod aliter intelligi nequit, quàm concipiendo præſentem antea fuiſſe ſpatio, in quo jam reponuntur. Ergo quos habemus, aut habere debemus, de divina infinitate, potentia, immutabilitate conceptus ſpatii qualemcunque diſtinctam realitatem involvunt. Porro, materialis mundus ex hypotheſi quam aſſeruimus terminatus aut terminabilis, aliquâ figurâ præditus erit, & proinde quâvis figurâ præditus ſupponi poteſt. Sit ergo ſphæricus; & quod etiam ſupponere licet, ſtatuatur alius eum contingens itidem ſphæricus; is priorem unico puncto continget, igitur inter alia ſphæricarum puncta medium quid, hoc eſt, aliquid ſpatii, interjacebit. Sumantur enim in contiguarum ſphærarum ſuperficiebus duo puncta quælibet, extra contactum, hiſce dico ſpatium aliquod interjici; ſi neges, ergo duo iſta puncta ſeſe contingent, contra clariſſimè demonſtratum in Geometricis theorema. Item connectantur duo ſphærarum iſtarum centra rectâ lineâ per contactum, ut Geometria quoque docet ac probat, tranſeunte, ductaque intelligantur è centris ad dicta extra contactum duo puncta duo radii; quoniam igitur ex adverſariorum ſententia dicta puncta ſibi contigua ſunt, è tribus rectis conſtituetur triangulum, cujus duo latera tertio adæquantur, itidem contra clariſſimum & certiſſimum Geometriæ theorema. Rurſus ſupponatur ubicunque in maſſa corporea duæ ſphæræ concentricæ, ipſarúmque ſuperficiebus interjacens materies annihiletur, aut amoveatur aliò (id quod à Deo præſtari poteſt ex præſtratis) ergò hæ ſuperficies, ſi nihil intercedat ſpatii,

ſpatii, ſibi coincident, etſi millies iſta major ſit hac (ſupponamus enim ex antedictis quòd utraque ſphærica ſuperficies ſuam retineat magnitudinem, non obſtante medii corporis evacuatione, quæ extrinſecus accidit, & nihil in illis internum mutat; ipſarum utcunque magnitudinem & poſitionem ſartas tectas conſervante divinâ potentiâ). Eodem modo ſi verticem inter & baſim pyramidis quicquid intereſt medium auferatur, quando nihil ſpatii relinquitur, ipſa quoquam modo disjungens, punctum verticis adjacebit proximè punctis omnibus baſis, adeóque toti baſi congruet & adæquabitur. Hæc & innumera talia conſectari videntur ex negatione realis ſpatii, communibus hominum conceptibus non minùs quàm Geometricis decretis repugnantia. Præterea duriuſculum videtur, ut mundana materia quoad ſe totam planè ſtatuatur immobilis, aut poſito rei dilucidandæ gratiâ, præter unam ſolidam ſphæram nihil uſpiam exiſtere, quòd iſta ſphæra ne quidem à Deo transferri poſſit, aut circa axem rotari; neque περιφορὰν (ut Platonicis utar vocabulis) admittere. Id quod ſatis infert manifeſte ſublatio ſpatii. Nam quum in hoc utrovis motu, partes eundem inter ſe retineant ſitum, eandémque diſtantiam, quomodocunque feratur totum, non aliter concipi poteſt ipſum moveri, quàm ex ſpatii ſucceſſiva mutatione, ſcilicet ut una pars ſpatium ſubingrediatur à priore derelictum, unde negato ſpatio tollitur ejus mobilitas. Stringit hoc quod alicubi notat Ariſtoteles; Ὅτι οὐκ ἂν ἐζητεῖτο ὁ τόπος, εἰ μὴ κίνησίς τις ἦν ἡ κατὰ τόπον· διὰ τοῦτο γὰρ τὸν *οὐρανὸν μάλιστα οἰόμεθα ἐν τόπῳ, ὅτι ἀεὶ ἐν κινήσει*· i. De loco vel ſpatio diſquirendi ſolus præſtat occaſionem motus, (qui ſcilicet abſque ſpatii poſitione vix concipi poteſt) cœlúmque præ omnibus potiſſimè videtur eſſe in loco, quia maximè movetur: nec tamen id (reſpectu primi præcipuíque motûs diurni, quem reſpicere videtur Philoſophus) ſecundum partium ſitum ac diſtantiam ullatenus variatur, at quaſi tota circumfertur. Eatenus ergò movetur aut non movetur omnino, quatenus partes ejus ſpatia ſua permutant, quæque nunc Eoas plagas obſident, mox eædem meridianum culmen attingunt, ipſúmque confeſtim prætervectæ veſpertinas ad oras declinant. Neque ſufficiet hîc actionem à motu ſecernere cum Carteſio, quando præter ſpatii mutationem nullus cogitari poſſit actionis iſtius effectus. Unicam hiſce ſuperaddam ratiunculam: Quæro quid efficiat ut inter duo diſtantia corpora facilis ſit commeatus, proclivis itus reditúſque; annon quia medium his interjicitur ſpatium eis intro recipiendis paratum? Quid contra faciat, ut difficile poſſimus inter duo contigua corpora medium aliud intrudere, imò non poſſimus omnino niſi motum illis imprimendo ſatis validum, quo procul amandentur, & à ſe invicem ſejungantur; annon quia deficit interſtitium medii corporis capax? Supponatur, e.c. inter duo corpora A, B corpus aliud C reſidere, tum intelligatur hoc corpus C amoveri, ſic ut non permittatur aliud ſuccedere, ablatâ ſcilicet corporum circumſtantium propenſione ad motum, vel inhibito parumper effectu (per ſu-

superiorem potentiam) ex eo secundum adversarios immediatè, nullâ aliâ vi adhibitâ, nullâ actione interveniente, resultabit corporum A,B contiguitas arctissima; symplegadum instar sponte suâ collidentur, & continuò nullus hiatus relinquetur; adeóque difficilimum evadet, ut corpus C impetu converso se in priorem locum restituat, vel corporibus A,B rursus intercedat, nisi corpora ista validâ virtute disjungantur. At vix intelligi potest, cur tantopere vis major requiratur ad tantillùm semovendas res sibi contiguas, quàm ad quantâlibet distantiâ separatas sibimet admovendas; quamobrem tam ultroneè coëant, tam dirimantur invitè: quid in causa sit quòd priorem statum nullo negotio, nullo cum motu deperdant, in eundem vix nisu vehemente, motu multo reponantur: cùm sicut à Thebis Athenas, & ab Athenis retro Thebas eadem sit via, sic ad conjungenda quæ distant, & reciprocè disjungenda quæ assident, vis eadem, par motus, ejusdem spatii pertransitio postulari videatur. Quinimo subobscurum est illud quamobrem juxta contrariam sententiam eodem instanti, quo corpus medium elabitur, non confestim attingant se ripæ, & non successuræ materiæ præcludatur ingressus; cùm vix infinitè velox, nedum tardus (quales in natura plusculi dantur) & testudineus sufficere videatur motus ei congressui præveniendo, utpote cùm hîc nullam actionem desiderat, & per meram instantissime resultantiam emergat. Quòd si faciliùs, aut citiùs coaluerint corpora terminantia, quàm intercurrentis materiæ pars ingruens præcedentem assequatur, obstruatur oportet omnis fluxus, & motus sistatur ac auferatur, id quod nemo nescit quàm perpetuæ discordet experientiæ. Annon simpliciùs & clariùs expediantur hæc dicendo, propterea per adjacentium corporum commissuras iter perrumpi difficiliùs, eò quòd deest intervallum, quo corpus influens recipiatur; sed inter nonnihil dissitos corporum terminos idcirco promptum haberi transitum, quia campus exporrigitur medius, penetrabilis & capax ingressuri tanti corporis; adeóque si depleatur vasculum non collabi latera, nec si repleatur divelli (quum impossibile videatur illud, & hoc minimè necessarium) sed positionem eandem, eandem intercapedinem, eandem capacitatem invariatè retineri. Prætereo quas pro vacuo spatio (seu coacervato, seu corporibus interspersо) rationes adducunt & experimenta physica, tum quia nimium in his etiamnum contrivi temporis, & adhuc operæ multum deposceret istorum examinatio, tum quia pleraque solvi vel utcunque possent eludi per materiæ subtilis, motûs circularis, & indefinitæ divisibilitatis non absonas adeò, nec inconcinnas hypotheses. Ita fermè disceptatur utrinque; quid ergo tandem statuemus? quomodo conciliabimus has adversa fronte pugnantes verisimilitudines & undique circumsidentia nos incommoda declinabimus? Nihil ego certè, nihil in re tam ardua lubricáque pro vero venditem, aut asseverem confidentiùs; at si dicendæ sententiæ necessitas incumberet, & quid vero mihi videatur similius in medium cogerer producere, ne con-

ceptibus

ceptibus hominum nimis adversarer, & sacrosanctis Geometriæ scitis impingerem, dicerem primo spatium revera dari, distinctum à magnitudine; hoc est, illo nomine designari quid, ei conceptum respondere, fundatum in re, alium à conceptu magnitudinis, ac ita quidem ut ubi non existit magnitudo, quamvis ea non exsisteret omnino, spatium nihilominus extiturum. Dicerem secundò, spatium non esse quid actu existens, actúque diversum à rebus quantis, nedum ut habeat dimensiones aliquas sibi proprias, à magnitudinis dimensionibus actu separatas. Quid ergo erit? quid sibi vult hic griphus? Non admodum mihi placeo, nec audeo sperare me vobis ex responso meo satisfacturum; at quia dicta lex est respondeo, spatium nihil est aliud quàm pura puta potentia, mera capacitas, ponibilitas, aut (vocabulis istis veniam) interponibilitas magnitudinis alicujus. Mentem meam explicatam do: olim ante conditum mundum, nullum alicubi corpus exstitit (ut credere fas est & pium) at potuit etiam tum existere quantumcunque corpus, potuit hoc determinatam positionem obtinere, volente scilicet & effectore Deo: hoc est, fiat spatium. Ultra molem mundanam nullum corpus excubat, nulla reperitur actualis dimensio; verùm potest ultra ipsam corpus aliquod constitui, aliqua realis dimensio extendi, hoc est, datur spatium ultramundanum. Inter hos parietes omni per divinam potentiam exclusâ distentâque materiâ, nullum corpus jacebit, at poterit aliquod reponi, hoc est, datur spatium illis interjectum. Inter duas denique magnitudines

tudines adjacentes seu contiguas, nulla magnitudo potest interponi; hoc est, nullum datur inter ipsas spatium aut intervallum. Potest inter duas istas turres protendi funiculus decempedalis, hoc est, datur inter ipsas spatium seu distantia decempedalis. (Ubi potest obiter adnotari spatii cujuslibet singularis naturam esse quodammodo determinatam, & quodammodo indefinitam; determinata quidem quoad Mathematicam speciem & quantitatem figuræ suæ (est enim capacitas non omniscunque, sed talis & tantæ magnitudinis) indefinitam quoad alias qualitates, & physicam speciem, nec non quoad individuitates, ut ita loquar, magnitudinum; (est enim capacitas cujusvis magnitudinis tantæ talísque figurâ præditæ: inter latera nempe vasis cubici spatium habetur recipiendo cuivis tanto cubo seu aqueo seu aereo; non verò potest adæquatè occupari, vel repleri à corpore pyramidali vel sphærico, neque majorem cubum admittet.) Hinc non denotatur spatii vocabulo διάστημα, quodvis positivum, actuali dimensione præditum, actu extensum ex se, vel divisibile, vel terminatum, vel pertransibile, vel congruum corporibus; at solummodo notat & significat corpus aliquod taliter extensum, eo modo figuratum, tali mensuræ adaptabile, vel simul unâ vice, vel successivè per motum existere posse. Non actualem aio, sed naturæ tantùm suæ consentaneas agnoscit figuras, dimensiones, partes, nempe potentiales; hoc pacto, capacitas admittendi corporis alicujus includit capacitatem admittendi (respectivè) lineas & superficies; potentia lineam

neam quadrupedalem interponendi continet potentias interponendi lineam pedalem, & bipedalem, & tripedalem, & alias minore numero denominatas. Potentia circulum interferendi potentialem, implicat rotunditatem perfectam. Neque quantum aut quale sit spatium immediatè vel ex se primò determinari vel agnosci potest, nec nisi per mensuram, aut determinationem magnitudinis alicujus realis ipsam occupantis; ut v. g. spatium duabus urbibus interjectum quantum sit aliter dignosci nequit, quàm designatæ super terram (vel aerem transeuntis) lineæ quodam pacto longitudinem emetiendo. Nec ideò merum nihil est aut tenerè confictum hoc nomen, sicut hircocervi vel chimæræ, sed in eodem entium ordine, quo creabilitas, sensibilitas, mobilitas, & cujusmodi possibilitates, merito jure reponendum (istis verò nemo ferè non aliqualem adjudicat realitatem) nec fermè video cur hujusmodi spatium non æquè sit ens, ac ipsa contiguitas, cui directe videtur opponi. Contiguitas enim est modus magnitudinum significans nullam ipsis motu secluso interponi posse magnitudinem; spatium verò contrà modus earundem, quo innuitur aliam magnitudinem interponi posse, vel adponi; quamvis loco neutiquam emoveantur. Hac autem spatii notione supposità concessâque licebit utriusque prædictæ sententiæ nodos solvere, difficultates amoliri. Nam imprimis nihil hinc divinæ perfectionis prærogativis decedit, ens aliquod subrogando, realiter æternum ac infinitum, non productum, & non dependens à Deo; sed asseritur potius tiùs ipſius illimitata poteſtas, corpora pro lubitu ſuo producendi diſponendíque. Neque coincidet hujus talis ſpatii idæa cum idæa magnitudinis, aſt ab ea tantum quantum ab actu potentia differet atque diſtabit. Nec alia præter ſubſtantiam & accidens entia nova refert in cenſum, ac realis mundi donat civitate, ſed utriuſque modum duntaxat aliquem, & poſſibilitatem connotat. Nec alium locum deſiderabit hoc ſpatium; quia nuſquam actuali modo exiſtit, at ubique ſaltem erit ſuo modo, quia Deus ubique poteſt magnitudines collocare. Neque diſconvenit hoc cum communi ſenſu ac ſermone hominum, qui cùm ſpatium intercedere cogitant aut pronunciant, nihil intelligunt aliud, quàm inter deſignatos terminos poſſe corpus aliquod interponi. Nec materiæ deducatur hinc infinitas ulla, ſed utcunque talis extenſio conſequetur, qualem ei Deus ultro volet aſſignare. Nec ubiquitati divinæ derogat omnino, quæ nil aliud ſignificat, quàm omni ſpatio Deum adeſſe, vel ubicunque res aliqua poteſt exiſtere. Cum Geometria verò conſpirat & congruit ad amuſſim; nec enim depoſcit hæc, ut inter duo puncta, vel duos quoſcunque terminos medii quid actu reale ſemper intercedat, at ſaltem nonnunquam (in aliquibus caſibus) ut linea, ſuperficies, aut corpus poſſit intercedere. Satisfacit etiam Phyſicorum experimentis & phænominis, vacui tantum eis præbens, quantum ſufficit recipiendis corporibus, & motibus ſuis peragendis, nec tamen aliquid immiſcens fictitii vacui veris actualibus dimenſionibus induti, quale partem mundi dimidiam,

midiam, corporſimque principium cum affe-
clis ſuis ſomniavit Epicurus. Ut præteream
quomodo pateat hinc, quòd immobile ſit ſpa-
tium, neque cum corporibus aſportetur;
quia nempe cùm corpus unum alterorum
confinium aut interſtitium deſtituit, rema-
net nihilominus iſta poſſibilitas, & nihil hinc
obſtat, quin alia corpora æquè vicina, pari-
ter intermedia ſubſtituantur & ſuccedant.
Obiter adnoto quam deſcripti ſpatii notio-
nem illi, quam tradit D. Hobbius ſpatii,
definitioni penè videri è regione contrari-
am. Spatium is definit, *Phantaſma rei exi-* *Cap. VII.*
ſtentis quatenus exiſtentis. At ſi ſpatium eſt *de Corp.*
phantaſma (ut ſanè non eſt, ſed objectum
phantaſmatis, imaginabile quid, non ipſa
imaginatio, nec imaginationis effectus) phan-
taſma potiùs erit rei ſeu poſſibilis, quàm ut
exiſtentis. Quippe cùm ſpatium concipi-
mus, magnitudinem aliquam poni, vel exi-
ſtere poſſe, non ſemper actu poſitum aut exi-
ſtens concipimus, ut ante mundum condi-
tum, vel extra mundum præſentem, ſecun-
dùm prædicta. Quod & ipſius præmiſſis ra-
tiociniis magìs convenit, quàm ejus propria,
quam ex iis colligit, definitio. Nam confi-
cto rerum omnium interitu, remanſurum af-
firmat in animo ſpatii phantaſma; atqui fin-
gere res omnes ſublatas, & eaſdem velut exi-
ſtentes cogitare ſunt *ἀσύστατα*· reſtabit po-
tiùs idæa rerum ceu poſſibilium. Quin ipſe
totidem verbis ait, *Nemo ſpatium ideo eſſe di-
cit quòd occupatum ſit, ſed quòd occupari poſſit*;
à vero non abludens, ſed à ſeipſo diſſenti-
ens: ſpatium enim per occupationem quo-
dammodo definit eſſe ſpatium, quatenus per

actum

actum potentia velut extinguitur & ceſſat ulterius poſſibile, cùm quid jam exiſtit; nec male vulgò dicitur in vaſculum repletum nihil infundi poſſe, propter defectum ſpatii. ſed me neſcio quæ blanda Siren quantumvis refugientem allicit, & ſcopulis ſuis affixum, caſſibus ſuis irretitum detinet; ad interioris Matheſis portum velis omnibus remíſque contendenti remoram injicit hæc qualis qualis ἐξωτερικὴ philoſophia. Ut hanc de ſpatio παρέκβασιν, nimis equidem prolixam & ſpatioſam, aliquando claudam, & ceu figuram terminis circumſcribam, unicum ſolummodo propoſito meo conducens inſuper monebo, quòd nempe quicquid Phyſici ſtatuant, hæc quam hactenus deſcripſi ſpatii concipiendi ratio cùm optime quadrat, tum abundè ſufficit Geometris; ſi quid majus ineſſe deprehendatur, aut attribuatur illi, neutiquam id iis officiet; aſt nil amplius deſiderant, quàm ut talis concedatur intercapedo, quà figuræ magnitudinum, ſalvis ſuis proprietatibus, incolumes perſiſtant, ut hæ per poſſibilem annihilationem aut remotionem, non confundantur aut pervertantur. E. g. Si duo circuli vel duæ ſphæræ ſeſe contingant, & accipiantur, ut ſupradictum eſt, duo extra contactum (in circumferentia circuli, vel in ſphæræ ſuperficie) puncta, flagitat Geometria non ut aliqua realis & actualis linea recta duobus iſtis punctis interjaceat, ſed tantùm ut potentialis quædam intercedat, hoc eſt, ut aliqua duci vel interponi poſſit, vel ut ſeſe non contingant, ſiquidem repudiato tali interſtitio vel adſerto punctorum iſtorum contactu, circulorum & ſphærarum natura

pe-

perimitur, proprietates pessundantur. Tale spatium igitur indulgeri debet Geometris, ipsorum hypothesibus substernendum; eóque magìs id quoniam congruentia, commensuratio, determinata positio, motus, & ipsa quadantenus proportio magnitudinum cum eo cohærent, per id explicari possunt. Nam congruentia per ejusdem spatii possessionem, mensuratio per applicationem aut successionem congruam, sitûs determinatio, motúsque per spatii identitatem, & alterationem commodè describuntur, & quomodo pendeat ab his, his adhæreat, per hæc elucidetur proportio, posthac forsan apparebit. Ex dictis, ut hæc accommodemus instituto nostro, licebit Mathematico tales hypotheses procudere. Ponatur hoc aut illud spatium posse occupari, hoc est, quòd inter designata puncta, datas superficies, exposita corpora (quæ nempe propter naturæ suæ proprietatem, aut ex præcedanea quapiam suppositione sese non contingunt) lineæ, superficies, aut corpora (respective) possint interponi. Vicissímque ponatur quamvis magnitudinem spatium occupare, hoc est, ipsam inter contiguas magnitudines non posse collocari, sed adjacentes utrinque magnitudines ab ipsa dirimi & elongari, pro modo positæ magnitudinis. Ponatur etiam nullum uni singulari magnitudini spatium alligari, sed ab innumeris aliis (pro modulo suo, ac magnitudinum circumpositarum exigentia) posse successivè, sicuti res feret, adimpleri. (Est enim spatium, ut antehac expositum) non peculiaris aliqua, sed quodammodo generalis & indefinita capacitas) nec non reciproce, quòd quod nulla magnitudo ſingulari cuipiam ſpatio aſtringetur. Adhuc ponatur, vel ut conſectarium è dictis axioma utcunque affirmetur, Quod plures magnitudines idem ſpatium nequeant ſimul occupare (adæquatè ſcilicet). Nam actus plures etiam plures arguunt potentias; vel unus actus unicam potentiam penitus explet ac exhaurit; ergo plures magnitudines plura requirunt ſpatia, vel una magnitudo totam unius ſpatii conſtitutivam capacitatem devorat. Sicut exiſtentiam Petri totam Petri poſſibilitatem complet & quaſi ſatiat, efficiens ne poſſit alius idem numero Petrus exiſtere. Item quâ ratione plures aliquæ magnitudines unum ſpatium occupant, eâdem quotlibet aliæ poſſent idem illud ſpatium occupare; unde tota magnitudinis poſſibilis infinitas in unum hordeacei grani ſpatium poſſit coarctari; quod abſonum & abhorrens videtur à ſana ratione. Demum ex eo quod idem ſpatium obtineant magnitudines, terminationem etiam & extenſionem, & reliquas his connexas magnitudinis affectiones poſſidebunt eaſdem, adeóque plures illæ prorſus evadent eædem; præter enim iſtas affectiones quod magnitudinem conſtituat aut diſtinguat, nil fermè quicquam concipimus, aut opinor concipere poſſumus. Cæterum quod hæc poſtrema ſuppoſitio (ſeu quis malit axioma) pronunciat & præ ſe fert, exprimi ſolet impenetrabilitatis vocabulo, cui nonnulli primas partes deferunt inter omnia magnitudinis attributa, quàm meritò viderint ipſi; mihi nulla προσωποληψία placet, omnéſque reciprocæ affectiones pari loco ſunt.

ſunt. Id tantùm nobis ex uſu fuerit advertere poſitionem ejus (ratione ſubnixam, ut vidimus, & experientiæ quantum ſcimus perpetuæ conſentaneam) Mathematicis eſſe perneceſſariam. Ei ſiquidem innititur quicquid ex corporum pulſione, ſeu vi pulſiva, deducitur in Mechanicis; quicquid ex motuum dependentia ſuboritur in Geometria (qualis eſt illa à Carteſio excogitata elegantiſſima curvarum linearum deſcriptio, in ejus Geometria, quæ regularum truſione vel impulſu certa ratione ordinato peragitur) quòd ſi plures magnitudines idem ſpatium ſimul poſſent occupare; vel quod perinde dicatur, una poſſit aliam penetrare, non una neceſſariò cederet alteri, ſed immota perſiſtens alteri tranſitum præbere poſſet, unde vana foret pulſionis ſuppoſitio, nullus reſultaret (ex ſcientifica ſaltem neceſſitate) effectus. Itaque neceſſariò ſupponitur à Mathematicis magnitudinum impenetrabilitas, ideóque non abs re fuit illius cum ratione conſenſum, quódque non illicitè ſupponi debeat, oſtendiſſe. Pari jure vice verſâ ſupponi poteſt, quòd nulla ſingularis magnitudo plura ſimul ſpatia poſſit occupare. Nam unus actus pluribus potentiis ſatisfacere nequit; nec poſſibilitas ut Petrus & Socrates exiſtant, ſolâ Petri exiſtentiâ completur. Item qua ratione ſingularis una magnitudo plura ſpatia poſſideat, eâdem quibuſcunque ſpatiis poſſidendis ſufficiat. Poſſit igitur granum papaveris, aut arenulæ minutiſſimæ magnitudo quicquid uſpiam eſt ſpatii replere, totíque poſſibilis magnitudinis infinitati coextendi; quod nemo ſanus in animum facilè inducat cogitare. Ut prætercam, quòd eadem magnitudo plura ſpatia occupando plures extenſiones, terminationes, & reliquas magnitudinis affectiones ſortiretur, unde non una magnitudo perſtaret, at in plures evaderet. Nec inutilis eſt hæc ſuppoſitio, ſed perquam neceſſaria Mathematicis. Non ex ea dependet quicquid ab illis de poſitione determinata ſupponitur aut demonſtratur. Nam quomodo, e. c. non fruſtra ſupponitur aut oſtenditur punctum aliquod intra vel extra circulum quempiam exiſtere, ſi poſſit ſimul intra ac extra exiſtere? Quomodo dicatur iſta linea cum hac talem aut tantum angulum efficere, ſi poſſet alium ſitum tunc unà obtinens alium quemvis angulum conſtituere? Quomodo recta curvam tangere demonſtretur ex eo, quòd tota præter unicum punctum contactûs extra curvam cadat, quum non repugnet ſimul in illa, vel etiam intra illam jacere? Quomodo denique punctum aliquod non eſſe centrum circuli propoſiti comprobetur inde, quòd diametrum non biſecet, ſi propter varios poſſibiles ſitus poſſet idem punctum biſecare ſimul, & non biſecare diametrum? Quicquid igitur ſit de Theologia Pontificia, niſi vera ſit hypotheſis, eandem magnitudinem aptam natam non eſſe plura ſimul ſpatia occupare, penitus actum erit de tota Geometria. Sed de poſitione determinata quicquid obſervatu dignum eſt, non jam licet attexere; prout neque de reliquis aliis magnitudinum ſymptomatis, quæ ſequentibus aſſervanda ſuperſunt. Unicum inſuper monitum adjiciam, magnam tempori cum ſpatio cognationem,

&

& analogiam intercedere. Sicut enim ſpatium ad magnitudinem, ita ſe tempus habere videtur ad motum, ita ut tempus ſit quodammodo ſpatium motûs. Quum enim tempus dicitur (annus puta, menſis, vel dies) nihil aliud indigitari videtur, quàm talem aut tantum interea motum peragi, vel intercedere, vel interponi poſſe; ſcilicet una periodus Solis in Ecliptica, reditus unus Lunæ ad Solem, una cœli (vel terræ) circa ſuum axem revolutio. Sed hoc obiter, nam ut de tempore jam diſſeratur pleniùs, ipſum tempus vetat & refragatur.

L E C T. III.

~~1666~~.

De natura ſpatii, déque nonnullis ei ſuperſtructis vel adnexis hypotheſibus Mathematicis, ſatis fusè diſquiſitum eſt in Lectione præcedente. Proxima magnitudinis affectio circumſpectantibus objicit ſe (quippe non ita procul à ſpatio diſſita, ſed ei propiùs adjacens) congruentia, cujus certè ſuppoſitio quodammodo primarius eſt tibicen, & præcipuum fulcrum totius Matheſeôs. Nam ab ea æqualitatis (quæ quidem in Mathematicis utramque ferè paginam facit, & quam Proclus Πρώτιστον ἐν τῷ ποσῷ σύμπτωμα, principaliſſimum & quaſi primiſſimum in quantitate ſymptoma vocat) optimè *Ad* 4.1.
meâ ſententiâ formalis ratio deſumitur; ſaltem ejuſdem de facto veluti potiſſimum κριτήριον, & palmarium adhibetur argumentum.

tum. Id quomodo ſit operæ forſan pretium fuerit oſtendere. Quarta primi elementi propoſitio (quæ à Proclo Ἐν θεωρήμασιν ἁπλούστατον & ἀρχοειδέστατον non admodum immeritò dicitur) comprobans æqualitatem duorum triangulorum habentium æqualia duo crura, híſque comprehenſos angulos æquales (quoad omnia æqualitatem) demonſtratur ex laterum & angulorum congruentia (adſumpto tantùm axiomate, duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt, vel potiùs hoc eodem recidente, Duæ rectæ lineæ terminos habentes eoſdem congruent). Ab hac (adhibito duntaxat axiomate, eóque etiam per congruentiam demonſtrabili (ſicut poſt hoc oſtendemus) ſi æqualibus æqualia addantur tota, vel ſi ab æqualibus æqualia ſubtrahantur reſidua ſibimet exæquantur) demonſtratur æqualitas triangulorum ac parallelogrammorum ſuper eaſdem baſes, & inter eaſdem parallelas conſtitutorum. Inde per axioma, Quæ eidem æqualia ſunt, æquantur ſibi mutuò (quod itidem axioma per congruentiam demonſtrari poteſt) de parallelogrammis atque triangulis ſuper æquales baſes conſtitutis idem demonſtratur. Ab his, adhibitâ ſolummodo præterea proportionalium definitione, deducitur parallelogrammorum & trigonorum æquè altorum cum ſuis baſibus, vel æquales baſes habentium cum ſuis baſibus proportionalitas. Hinc æquiangulorum triangulorum ſimilitudo, tum in æqualibus & unum angulum æqualem habentibus triangulis & parallelogrammis reciproca laterum (circa pares angulos) proportio, permutatímque

ex

ex reciproca proportione laterum æqualitas figurarum, aliæque reliquæ quæ præsertim in sexto continentur elemento planarum figurarum affectiones principales derivantur. Aliter etiam (non adhibitâ quartâ primi elementi) ex sola ferè congruentia deducantur istæ triangulorum & parallelogrammorum æqualitates atque proportionalitates supradictæ, per egregiam illam à Cavallerio non ita pridem in lucem usúmque communem protractam methodum indivisibilium, fœcundissimam novorum in Geometria repertorum matrem. Cujus certè pulcherrimæ & utilissimæ methodi (sicut ejus author ipse non obscurè insinuat) fundamentum in congruentia ponitur, ex congruentia demonstratur, sicut apparebit primas libri de Geometria indivisibilium secundi, vel itidem primas aliquot Exercitationis primæ ejusdem auctoris, propositiones attentiùs inspectanti. Octava quoque primi elementi propositio (circa æqualitatem angulorum subtensorum æqualibus lateribus, in triangulis sibi mutuò æquilateris) quæ Geometricorum Theorematum est altera uberrima scaturigo, per omnem eam præsertim quæ circulorum affectiones speculatur Geometriam diffusa, demonstratur isthic, nec aliter demonstrari potest, quàm (immediatè scilicet aut mediatè) per hanc ἐφάρμοσιν. Ut prætercam particulares alias complures, quæ hujus suppositione ac subsidio nituntur demonstrationes, extantes apud Archimedem, Pappum, & alios insignes Geometras. Unde meritò vir acutissimus, Willebrordus Snellius luculentissimum appellat Geometriæ supellectilis in- *Snell. præf. ad Cyclometr.*

inſtrumentum hanc ipſam ἐφάρμοσιν. Eam igitur in demonſtrationibus Mathematicis qui faſtidiunt & reſpuunt, ut Mechanicæ craſſitudinis ac αὐτουργίας aliquid redolentem, ipſiſſimam Geometriæ baſin labefactare ſtudent; aſt imprudenter & fruſtra. Nam ἐφάρμοσιν Geometræ ſuam non manu ſed mente peragunt, non oculi ſenſu ſed animi judicio æſtimant. Supponunt (id quod nulla manus præſtare, nullus ſenſus diſcernere valet) accuratam & perfectam congruentiam, ex eáque ſuppoſita juſtas & logicas eliciunt conſequentias. Nullus hîc regulæ, circini, vel normæ uſus, nullus brachiorum labor, aut laterum contentio, rationis totum opus, artificium & machinatio eſt; nil Mechanicam ſapiens αὐτουργίαν exigitur; nil, inquam, Mechanicum, niſi quatenus omnis magnitudo ſit aliquo modo materiæ involuta, ſenſibus expoſita, viſibilis & palpabilis, ſic ut quod mens intelligi jubet, id manus quadantenus exequi poſſit, & contemplationem praxis utcunque conetur æmulari. Quæ tamen imitatio Geometricæ demonſtrationis robur ac dignitatem nedum non infirmat aut deprimit, at validiùs conſtabilit, & attollit altiùs, ad ſumptæ ſuppoſitionis realitatem ac poſſibilitatem, (quæ ſanè genuinum eſt, ut ſæpiùs innuimus, omniſcunque ſcientiæ fundamen) ipſis oſtentans ſenſibus, & rationis auctoritatem fulciens ſuffragio experientiæ. Virtutis adeò maximæ, non labis alicujus aut vitii demonſtrationes accuſant congruentiam adhibentes, qui Mechanicæ cognationem illis adſpergunt; nil eis revera aliud quàm familiaritatem & facilitatem eximiam, nimi-

am

am evidentiam, & quasi nobilitatem exprobrantes. Sanè nec ipse Ramus, quanquam in veteres haud æquus adeò vel benignus quid hîc habet quod culpet, at calculum suum adponit perlibenter, & à congruentia ductam argumentationem vehementer adprobat, collaudat, usurpat. *Hoc*, inquit, *demonstrationis Euclideæ genus tam expeditum, idmque facilè, vehementer amplector.* Sed quid receptum communiter ac ab ipsis Geometriæ principibus & coryphæis (Euclide, Archimede, Apollonio, Pappo, aliisque) usurpatum demonstrandi modum contra sciolos nescio quos propugnatum eo? Quin ejus potiùs naturam, & qualis sit hæc congruentia Mathematica propiùs intueamur. Congruentiam per ejusdem loci vel spatii occupationem, possessionem, repletionem describi solet. Eam verò triplici modo factam concipere licet; per applicationem, per successionem, per mentalem penetrationem. Per applicationem, cùm una magnitudo superimposita vel apposita concipitur alteri, sic ut illam omnibus sui partibus immediatè contingat, & nusquam ab ea recedat aut separetur. Ut cùm mensura rei mensuratæ (virga putes mensoria telæ limbo, vel rectæ lineæ super terræ planiciem designatæ) applicatur & coextenditur; in qua applicatione partes unius lougitudinis omnes alterius partibus exactè respondent, & aliæ alias immediatè contingunt, adeóque istæ sibi invicem congruunt hoc modo. Per successionem, cùm unius magnitudinis amotæ locum ingredi concipitur altera (veluti cùm effusâ aquâ è vasculo vinum infunditur) congruere dicantur

Schol. Math. lib. VIII. 170.

tur iſtæ magnitudines, ob identitatem ſpatii quod occupant ſucceſſivè. Per mentalem penetrationem, cùm duorum corporum magnitudines per ejuſdem loci ſimultaneam poſſeſſionem coaleſcere, coincidere, & tanquam coadunari cogitamus. Quo ferè pacto ſupponunt Perſpectivæ ſcriptores inter oculum & objectum radians interpoſitam tabulam, velut ubique perſpicuam, à lucido quaſi cono vel pyramide penetrari, ſic ut trajicientes radios nuſquam impediat, at recipiat in ſe cunctos, eorúmque veſtigia ſibi velut impreſſa vel unita retineat. Ex hiſce congruentiæ modis, quæ per applicationem fit ex parte rei, ſolis quadrat lineis ac ſuperficiebus, quæ ob indiviſibilitatem ſuam poſſent aliæ alias ſe totis immediatè contingere; & per hunc contactum ſeipſas quaſi penetrant, & in unum coincidunt. Unde taliter congruas lineas & ſuperficies (hoc eſt, ita ſibimet adjacentes, ut medii nihil interjaceat ſpatii) pro unis habent Geometræ Id voluiſſe videtur Euclides, cùm negavit à duabus rectis lineis ſpatium comprehendi; ut & quòd duo plana ſolidum ſpatium non concludunt. Et quæ plures lineas contiguas, aut ſe interſecantes terminant, puncta ſemper habent pro uno communi puncto; ut & quæ plures ſuperficies conjunctas, aut ſe mutuò ſecantes dirimunt, extremas lineas pro una ſumunt linea; & quæ corpora diſpeſcunt ſuperficies, in unam ſupponunt coaleſcere. Id ſibi poſtulandum cenſuit Vitello, nempe cùm duæ ſuperficies planæ contingunt, unam ex iis fieri ſuperficiem. Paríque ratione circularis annuli peripheria

con-

concava convexæ circuli concentrici incluſi peripheriæ, vel annuli ſphærici concava ſuperficies adjacentis ſphæræ concentricæ convexæ ſuperficiei coincidit. Corpora verò, propter introverſum reductam profunditatem ſuam, ſolis externis ſuperficiebus contiguæ fiunt, adeóque nullâ parte ſui congruere poſſunt, hoc applicationis modo. Quapropter è recentioribus non nemo negavit iis ἐφάρμασιν omnino competere. At ſaltem ad omnes univerſim magnitudines, quæ per ſucceſſionem fit (mediante ſcilicet communi ſpatio) congruentia pertinet & extenditur. Quatenus nulla magnitudo cuilibet uni ſpatio, neque viciſſim ullum ſpatium uni magnitudini peculiariter aſtringatur, & ab una derelictus locus ab alia tanta talíque magnitudine poſſit occupari. Mentalis denique congruentia magnitudinum, etiam ſolidarum (quicquid prædictus arbitretur Philoſophus) haud abſurdè ſupponitur à Geometris. Námque primò per eam non aſſeritur actualis ſeu realis penetratio, ſed tantùm abſtrahitur mente, vel in conſiderationem non venit corporum vis excluſiva penetrationem realem impediens: ſeu generalis & indefinita capacitas admittendi tanti corporis, quæ præcipua ſpatii proprietas eſt, per ſe ſola ſeparatim conſideratur. Quem concipiendi modum ſæpe falſitatis abſolvit Philoſophus; οὐδὲ γίνεται ψεῦδος, inquit, *Phyſ. II.2.* χωριζόντων. Secundò, mentalis iſta penetratio non aliter ſupponitur à Mathematicis, quàm ut per eam deſtruatur realis penetrabilitas, & abſurda demonſtretur. Nam ex eo quòd ſupponatur duo corpora locum eundem

dem occupare oſtendunt, eandem eſſe utriuſque magnitudinem, & proinde quòd ſe penetrando deſinant eſſe duo; adeóque quod duo (formaliter duo) ſeſe nequeant penetrare. Licet autem quidvis utcunque falſum vel abſurdum ſupponere, quo meliùs iſta falſitas aut abſurditas dignoſcatur. Nec aliâ ferè ratione falſitatis argui poſſit ulla propoſitio negativa, quàm τῇ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ, hoc eſt, ex ejus veritate ſuppoſitâ conſequentia falſa detegendo. Sic igitur penetrationem hanc ἐξ ἐπινοίας ſuppoſitam adhibent Mathematici, prout adhibent illi, qui magnitudinis ipſam impenetrabilitatem, ex penetratione ſuppoſita, conantur demonſtrare. Ipſam enim uſurpant Mathematici duntaxat indicandæ vel comprobandæ magnitudinum æqualitati vel inæqualitati, hoc utique pacto: aſſero duas ſphæras æqualibus diametris deſcriptas æquari; nam concipiatur unius centrum alterius centro congruere, inde propter æqualitatem radiorum quorumcunque, uniuſcujuſvis extima ſuperficies alterius ſuperficiem non tranſcendet, ergò congruent totæ duæ ſphæræ, ergò magnitudinem eandem habebunt, hoc eſt, æquales erunt. Quòd ſi ponatur unius diameter alterius diametro major, congruentibus ut prius κατ᾽ ἐπίνοιαν centris unius ſuperficies ambiens alterius ſuperficiem excedet, (quippe quæ propter ſuppoſitos inæquales radios e communi centro longiùs diſtet) ergò non erit eadem utriuſque magnitudo; hoc eſt, eæ propterea inæquales erunt. Quòd ſi quis fictitiæ huic penetrationi nihilominus moroſiùs obloqui pergat, ut ei fiat ſatis, adjicio

cio mentalem iſtam congruentiam concipi poſſe per modum ſucceſſionis, intelligendo ſcilicet unum ſubduci vel evaneſcere, alterum in ejus locum ſubſtitui; hoc eſt, iiſdem terminis interponi, vel eodem ambitu contineri; quomodo nihil ſuberit difficultatis, quin eo ferè modo concipiatur hæc penetratio, quo ſphæra circa ſuum axem revoluta, ſeipſam quaſi penetrat; quatenus ejus unæ partes in alterarum locum continuò ſuccedant. E quibus patet, quòd congruentia nil ſit aliud quàm ejuſdem ſpatii ſeu loci occupatio & completio, ſive ſimultanea ſive ſucceſſiva; ex qua magnitudinum aliqualis reſultat identitas, & in unum coalitio. Nam indiviſibiles magnitudines, eò quòd (ſecundùm id quo indiviſibiles ſunt) applicantur ſibimet invicem, ſimul idem ſpatium occupant, & quaſi coincidunt; ſolidæ verò magnitudines omnifariam diviſibiles revera per ſucceſſionem, aut ſimultaneè per mentalem penetrationem in eodem concipiuntur ſpatio reponi; cúmque iſto ſpatio quoad quantitatem unitam & identificatam, ejus interventu uniuntur & identificantur inter ſe. Sed ut hujus ſymptomatis indoles magìs adhuc eluceſcat, adverto præterea congruentiam (eam præſertim quæ per ἐπίθεσιν facta concipitur) variis modis, & per aliquos quaſi gradus intelligi poſſe peractam.
Primò, ſic ut totæ ſimul magnitudines ſitu partium nullatenus variato ſpatium idem poſſideant. 1.
Quomodo cunctæ rectæ lineæ, planæ ſuperficies, æqualium circulorum peripheriæ, æqualium ſphærarum ſuperficies, ſimiles in æqualibus circulis, cylindris, ſphæris

ris helices, & alia quæcunque perfectissimè similes (hoc est, similes & æquales) magnitudines congruere possunt. Hic summus est
2. perfectissimæ congruentiæ gradus. Secundò, sic ut successivè per partes, itidem non immutato partium situ, eidem spatio coincidant. Quo pacto rectæ lineæ figuræ cujuslibet perimeter rectæ lineæ in continuum exporrectæ, & prismatis superficies superficiei planæ in directum positæ potest adaptari. Qui proximus est quasi gradus possibilis con-
3. gruentiæ. Tertiò, sic ut omnia magnitudinis utriusque indivisibilia in eundem locum succedant, útque etiam neutra positionem evariet partium. Quâ ratione dum rota vel circulus super rectam lineam ei semper contiguam incedit motu progressivo, eodémque tempore circa centrum suum volutatur, ejus peripheria dictæ rectæ lineæ congruit; puncta quippe cuncta peripheriæ circularis omnibus rectæ lineæ punctis ordine continuè successivo applicantur (quæ ex congruentia, ut hoc obiter moneam, manifestè perspicitur aliquam rectam lineam peripheriæ curvæ circulari adæquari, adeóque circuli tetragonismum non esse naturâ suâ prorsus impossibilem; id quod sic exprimit supradictus acutissimus Geometra in Cyclometrico suo; *Talis utique est Mechanica circuli cujusque revolutio, donec ad idem peripheriæ punctum recurrat, unde circumduci occœperat; quæ illud quidem arguit, & tanquam ob oculos ponit rectam aliquam lineam circuli perimetro revera æqualem exhiberi posse.* Paríque ratione cùm cylindrus circa suum axem rotatus supra planam superficiem progreditur, ejus curva

curva ſuperficies dictæ planæ ſuperficiei exquiſitè congruit. Omnes quippe quæ deinceps in cylindri ſuperficie diſpoſitæ jacent rectæ lineæ parallelæ, parallelis omnibus in plana ſuperficie rectis lineis continuâ indivulsâ ſerie applicantur. Quartò, ſic ut ſimul eundem locum occupent partium unius aliquatenus immutato ſitu, at ordine nihilominus conſervato, retentâque priori ſingularum contiguitate. Quomodo peripheria circuli, vel alia quævis curva, ſic diduci poteſt aut extendi, ut in rectam lineam tranſeat, adeóque rectæ lineæ congruat; & recta linea ſic incurvari poteſt, ut in peripheriam circuli, vel in aliam quancunque curvam degeneret. Paríque modo quævis curva ſuperficies in planam extendi, vicisſímque quævis plana ſuperficies in curvam inflecti poſſit. Et quidem (ut hoc nonnihil ulteriùs explicemus) in multis quomodo fiant è rectis lineis lineæ curvæ, & in quas hæ rectas reſolvantur; nec non è quibus planis oriantur curvæ ſuperficies, ſatìs liquidò diſcerni poteſt; id quod curvarum linearum ἔνθυνσις, curvarum ſuperficierum πλάτυνσις appelletur. E.g. quoad curvas ſuperficies; ſuperficies curva cylindri nihil eſt aliud quàm parallelogrammum rectangulum, habens baſim æqualem peripheriæ circuli, qui baſis eſt cylindri, eandémque cum cylindro altitudinem; cujus omnes lineæ rectæ baſi parallelæ in circulorum peripherias incurvantur: unde congruet cylindrica ſuperficies huic parallelogrammo, ſi latus aliquod cylindri (hoc eſt, aliqua recta ducta in ejus ſuperficie à baſe ad baſim) ad latus parallelogrammi applicetur,

plicetur, & dehinc tota ſuperficies in planum diſtendatur; aut ſi applicato latere parallelogrammi ad latus aliquod cylindri planum ejus circa cylindrum circumflectatur, ipſamque velut inveſtiat, & contegat undiquaque. Conica ſimiliter ſuperficies nihil eſt aliud, quàm ſectator planus circuli radium habentis æqualem lateri coni, & arcum æqualem peripheriæ circuli, qui baſis eſt coni, cujuſque concentrici arcus in totidem perfectas circulares peripherias intorquentur. Vel potiùs aliter, conica ſuperficies nihil eſt aliud quàm triangulum rectangulum, cujus altitudo vel perpendiculum æquatur lateri coni, baſis peripheriæ circuli, qui baſis eſt coni, cujúſque baſi parallelæ omnes rectæ in totidem peripherias circulares ſinuantur. Sic & curva ſuperficies ſphærica (nec non alia quævis curva ſuperficies figuræ planæ non abſimili rotatu procreata) ad trilineum quoddam planum duabus rectis lineis angulum rectum conſtituentibus, & ſubtensâ lineâ curvâ comprehenſum facilè redigatur. (Id autem quomodo fit, non eſt in præſens exponendi locus). At quoad curvas lineas, præter circuli circumferentiam, quæ nil eſt aliud quàm recta linea per omnes ſui partes ubique ſimiliter aut uniformiter inflexa; præter hanc, inquam, ſpiralis cylindrica, quæ reliquarum curvarum omnium eſt ſimpliciſſima, maximè uniformis & ὁμοιομερὴς, nihil eſt aliud quàm recta linea parallelogrammi ſupradicti (ad quod reducitur cylindrica ſuperficies) diagonio æqualis, & circa cylindricam ſuperficiem convoluta. De curvis aliis ad rectas redigendis, aut ad alias diverſi generis

neris curvas, jam conticeo, nè prolixior & simul obscurior sim, in re tantùm ex transcursu attrectata.] Ad hunc verò modum quoque pertinet, aut ei perquam affinis est ejusmodi congruentia, qualis capaces sunt æquales figuræ parallelis iisdem lineis aut planis inclusæ. Quarum omnes lineæ vel omnia plana in iisdem parallelis intercepta sunt æqualia. Ut duo triangula vel parallelogramma, non sibi mutuò æquiangula, vel duæ pyramides (prismata, coni, cylindri) inæqualiter inclinatæ, inter parallelas easdem lineas rectas, vel eadem parallela plana, & super æqualibus basibus constitutæ. Nam ut horum unum alteri congruat, debet situs partium unius ad alterius partium positionem accommodari, ipsarum tamen ordine non perturbato; nec earundem quæ priùs affuit contiguitate deperditá. Quintus modus est, cùm ita peragi possit ἐφαρμογὴ, sic ut 5.
partium quarundam positio varietur & ordo pervertatur. Hic congruentiæ modus omnium imperfectissimus, & apprehensu difficillimus, convenit figuris homogeneis omnino sibi mutuò dissimilibus. Ut v.g. non aliter triangulum circulo, conus sphæræ congruant, quàm alterutrius partes transponendo, partem unius applicando parti alterius, & residui partem in uno parti remanentis in altero, & sic perpetuò, donec exhauriatur negotium, & unius omnes partes tandem alterius partibus evaserint applicatæ, quam rem qui distinctiùs expositam cupit, adeat consulo priùs insinuata Cavallerii loca. Ex his rem attentiùs experienti liquebit quaslibet ejusdem generis magnitudines sibimet in-

invicem, hoc eſt, lineas lineis, ſuperficies ſuperficiebus, ſolida ſolidis aliquo modo, hoc eſt, vel totas ſimultaneè, vel per partes (aut per indiviſibilia ſua) ſucceſſivè, retento partium ſitu, vel eo nonnihil laxato, ſaltem iis tranſpoſitis, fieri poſſe congruentes. Quaſlibet, inquam, congruere poſſe ſumendo congruentiam laxiùs, pro coincidentia quavis etiam inadæquata; quomodo minor linea recta, majori lineæ rectæ ſuperimpoſita congruet ei, hoc eſt, ei toto, licèt non toti, coincidet. At verò ſtrictiùs accepta congruentia ſolis tribuitur æqualibus magnis, quæ eundem præcisè locum occupant, & nec ejus terminos excedunt uſpiam, aut ab iis deficiunt, at juſtè complent ipſum, & ipſo continentur. Et quidem in aptitudine vel poteſtate ſic congruendi, quæ ſubinde præditæ ſunt magnitudines, nonnulli formalem conſtituunt ipſius æqualitatis rationem, & ipſam ex ea definiunt, equidem meâ ſententiâ non malè. Ex antiquis magnus Apollonius in ea mente fuit, ut patet ex ea quam Proclus adducit & impugnat, demonſtratione celebris pronunciati, quæ eidem æqualia. Quæ demonſtratio ſcil. innititur huic æqualitatis definitioni, Τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα εἰσὶν· & nuper D. Hobbius noſtras æqualia corpora definivit, quæ eundem locum poſſidere poſſunt; *Poteſt autem* (ait) *corpus aliquod locum occupare eundem, quem aliud corpus occupat, quamvis non ſint ejuſdem figuræ, ſi modò flexione & tranſpoſitione partium in eandem figuram redigi intelligatur.* Quæ ab Hobbio tradita vehementer exagitat, & perquam acutè refellere conatur ejus egregius

gius Elenctes; at me judice, nè verum diſſimulem, haud penitiſſima cum efficacia. Nihilominus enim Apollonianæ ſententiæ animo propiùs accedo, & æqualitatem ex poſſibili congruentia commodiſſimè puto definiri. Quamobrem ita ſentiam, (quoniam id προὔργου videtur, & ad res noſtras aliquid faciat) adjungam non nullas rationes, neq; gravabor hanc rem aliquando curatiùs examinare. Id quod gradatim progrediendo ſatagam. Et primò quidem cùm ſubdubitari poſſit an ullam expediat æqualitatis definitionem aſſignare, minimeque neceſſarium id exiſtimare videatur Ariſtoteles, ὃ πάνυ, propter æqualitatis ex ſe ſatis perſpicuam notionem, & ſignificatum nemini non abundè perſpectum; (Τὰ πάθη, inquit Philoſophus, μὴ λαμβάνει τί σημαίνει, ἂν ᾖ δῆλον, ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινὰ οὐ λαμβάνει τί σημαίνει, τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν ὅτι γνώριμον· hoc eſt, *Affectiones non aſſumit* (id eſt, non explicitè docet aut exponit) *quid ſignificent, ut neque communia* (id eſt, communium ſententiarum vel axiomatum termini) *quid ſignificent aſſumit* (aut explicat); *ut quid ſignificet æqualia æqualibus ſubducere, quoniam id manifeſtum eſt*, & vulgò ſatis exploratum. Cùm, inquam, ſic ambigi poſſit an debeat æqualitas omnino definiri, ego nihilominus rei Mathematicæ conducere reor, ut definiatur & explicetur diſtinctè quid per eam veniat intelligendum. Nam quum æqualitas ſit ejuſmodi ſymptoma, quod immediatè ſenſum non incurrit, nec experientiæ ſubjacet, at ex rerum inſtituta comparatione reſultat (abſque comparatione ſaltem à nobis non deprehenditur)

Poſt. I. 10.

ditur) & cùm res diverſimodè poſſint inter ſe comparari, ideo requiri videtur, ut ex quâ qualique comparatione, quando & quomodo reſultare concipiamus æqualitatem, per certum aliquod argumentum, indubitatum κριτήριον, adnexum ſignum evidens & reciprocum definitione expreſſum determinemus; ſic ut ejus inſit nobis diſtincta notio, nec ulla poſſit emergere dubitandi vel diſſentiendi cauſa. Nos quidem immediatiùs & frequentiùs expoſitæ ſenſibus (nam obiter illorum nihil moror ſententiam, qui æqualitatis, ſimilitudinis, & ejuſmodi relationum ingenitas nobis à natura ſpecies arbitrantur; quando commentum illud, ut jam antea vidimus, haud ſit neceſſarium, & minus idoneum ſcientiis, nec ullâ, quod ego percipiam, præter Metaphyſicas quaſdam vocabulorum perplexitates & argutiolas, ſolidâ ratione ſubnixum, res, inquam, immediatiùs objectatæ ſenſibus) è qualibus conſtant primæ indemonſtrabiles hypotheſes non opus eſt, ut aliis, præter vulgò recepta ſua nomina, verbis explicentur, quoniam eaſdem omnino cunctis hominibus ſui ipſarum diſtinctas idæas ingerunt inſculpſintque. At ex primis iſtis inter ſe comparatis, vel utcunque reſultantes alios conceptus ſecundarios, quo præcidatur omnis occaſio diſcrepandi, ex ſcientiarum uſu videtur, primas iſtas è quibus oriuntur hypotheſes allegando, quàm accuratè determinare. Rigidéque rem taxando, in ſcientia qualibet è primis fundamentis extruenda, ferè nullum adhibere licet vocabulum non antea definitum, aut ſaltem cui reſpondentem in natura rem non poſſimus exerto di-

digito commonſtrare. Quod eò magis in hoc, quod præ manibus habemus, magnitudinis ſymptomate debet obtinere, quoniam præcipuas fert partes, & ferè ſemper intervenit in omni materia, diſcurſúque Mathematico, adeóque multum referat ut unam omnes harum ſcientiarm ſtudioſi conſonam & communem ejus idæam, claram, diſtinctam, rationi conſentaneam habeant, nec ut eam confusè vel diſcorditer apprehendant. Quinimo quòd jam quid ſit æqualitas, in quo conſiſtat ejus formalis ratio, quomodo definiri debeat, ipſi jam quærimus & diſceptamus, argumento ſit illam definiri debere. Addo, quòd mihi ſaltem incumbat hoc ſuſtinere, quoniam axiomata cuncta pro theorematis habeo, quæ poſſunt, & debent, ſi res exigat, demonſtrari; ídque præſertim ex definitionibus terminorum, è quibus conſtant; unde quò veritas conſtet iſtorum axiomatum: quæ eidem æqualia ſunt; ſi æqualibus æqualia ſubtrahantur aut apponantur; & conſimilium, innoteſcere debet, & in promptu haberi æqualitatis definitio. Addo propter hujuſce definitionis defectum fieri poſſe, quinimo fortaſſe de facto contigiſſe (nonnullum in hujuſce ſcientiæ dedecus & detrimentum) ut in maximè tranquilla atque pacifica Geometriæ provincia contentiones & turbæ viguerint, incaluerint iræ, clamores & convitia ſtrepuerint. Undenam enim quæ Clavium inter & Peletarium, nec non inter alios Geometriæ ſtudioſos atque peritos, de angulo contingentiæ, infenſis animis, & verbis contumeliæ non expertibus, agitata lis exerſit, niſi quòd æqualitatis

& anguli definitiones non ritè fuerint conſtitutæ; nec vocabulorum illorum ambiguitas penitùs eſt ſublata; rixas iſtas una fortè vel altera commoda definitio facilè ſedâſſet, decidiſſet, ſuſtuliſſet. Expedit igitur definitionem aliquam æqualitatis præſterni. Hoc teneatur imprimis. Porro, Secundò, quoniam, ut antehac ſæpe diximus, & nobis habemus perſuaſiſſimum, unaquæque definitio peti debet ex aliqua ſuppoſitione poſſibili per experientiam manifeſtè compertam; & cùm ſi agnatas huic negotio quàm attentè perluſtremus & excutiamus univerſas, nulla ſe præbitura ſit opinor hâc poſſibili magnitudinum congruentiâ commodior æqualitatis definitioni fundandæ hypotheſis: ergò hanc amplecti decet & agnoſcere. Quòd nulla commodior objiciat ſe, compluribus attendenti liquebit indiciis. Nam nulla frequentiùs obſervatur, & ſenſibus exponitur, oculis conſpicitur, manibus attrectatur; nulla clariùs intelligitur, aut poſſibilior exiſtimatur. Et quum de rerum æqualitate (vel inæqualitate) vertitur quæſtio, ſemper ei dijudicandæ liti ad congruentiam accurritur & appellatur. Id quod ſignum ſit ſatis evidens hanc æqualitatis notionem communibus hominum conceptibus apprimè conſentire; quódque nil aliud intelligunt homines, quum duas magnitudines æquari dicunt, quàm eas ſibimet applicatas inter ſe congruere, vel ejuſdem ſaltem ſpatii capacitatem adimplere. Quod & adhuc experimento mihi bene familiari dabo confirmatum. Sæpe rogatus ſum à Geometriæ non admodum aſſuetis quid ſibi velit, aut

quid

quid ſignificet illud de circuli tetragoniſmo famigeratum problema. Reſpondere mihi fuit in promptu, figuram inquiri planam rectilineam quadrilateram rectangulam æquilateram, cujus area vel ſpatium lineari perimetro incluſum, propoſito circulo (hoc eſt, areæ planæ circulari peripheriâ circumſcriptæ) ſit accuratiſſime æqualis. At quid, inſtare ſolebant, per æqualitatem iſtam intelligis? Quomodo enim ſpatium cirulare rotundum angulari ſpatio poſſit æquari; cùm illa congruere nequeant, & ſibimet adaptari? Cui dubitationi (ſatis equidem ſubindicanti hominum pleroſque nil aliud per æqualitatem quàm ipſiſſimam magnitudinum congruentiam intelligere vel denotare) tum demum facilè ſatis iri factum comperio. ſi dicam modò reperta dicta figura quadrilatera quaſi cerea foret (hoc eſt, è materia molli penitúſque flexili conſtaret) partium quarundum inflectione, tranſpoſitione, vel compreſſione quomodocunque circularem in figuram transformetur, circulóque tunc appoſita congruat exacte, figuras iſtas æquales evadere, peractúmque fore quem tanto ſtudio indagamus tetragoniſmum. Huic reſponſo ſuam ad præconceptam notionē de induſtria accommodato continenter acquieſcunt; unde ſatis liqueat homines per æqualitatem nil aliud intelligere vel ſignificare, præter poſſibilem congruentiam. Accedat huc tertiò quæſtionis hujus ut mihi videtur peremptorium argumentum. ex eo ſymptomate, cui innituntur, à quo deducuntur, ad quod ultimò referuntur omnia circa magnitudinum æqualitatem theoremata (à quo proinde reliquæ magnitudinum æqualium ceu talium affectiones derivantur) ex ejusmodi dico symptomate commodissimè definitur æqualitas. Atqui congruentiæ innituntur, ab ea deducuntur, per eam demonstrantur (immediatè scilicet aut mediatè) in eam demum ultimò resolvuntur omnia circa magnitudinum æqualitatem demonstrata. Per eam igitur commodissimè definiatur æqualitas. Majoris in isthoc syllogismo propositionis veritas è definitionis natura satìs elucescit; cujus officium est ut symptoma quoddam primarium exhibeat, ex qua, tanquam formali causa, reliquæ definiti passiones per legitimum discursum inferantur. Igitur si magnitudines æquales definiantur, quæ sibimet invicem præcisè congruere possunt, & ex hoc expresso symptomate magnitudinum æqualium quà talium affectiones demonstrari possunt, satis constabit indè definitionem istam esse legitimam. Atqui res isto modo se habet, & minor æquè vera est. Nam de facto quicquid in Elementis (adeóque quicquid uspiam alibi in Mathematicis) circa rerum æqualitatem demonstratur, ab isto axiomate, Quæ congruunt sunt æqualia, dependet, ut aliquatenus hujus lectionis initio commonstratum est, & posthac fortasse clariùs ostendemus. Quod axioma proinde qui pro æqualitatis definitione positum accipiunt, rectissimè facere videntur, quibus (præter memoratos Apollonium & Hobbium) doctissimum accensere potero Borellium; *Nam*, inquit is, *si nomen æqualitatis non esset adhuc impositum. dici posset, Quæ sibi mutuò congruunt vocentur æqualia, & hæc esset definitio, non pronunciatum*;

Eucl. Restit. p. 16.

nunciatum; non igitur aliter differre putat hoc pronunciatum ab æqualitatis definitione quàm efferendi modo; & posse concedit ipsum in definitionem facile transmutari. Quòd innuit verò propter nomen æqualitatis priùs impositum, & vulgò receptum id axiomatis potiùs quàm definitionis vicem subire, non in eo viro doctissimo prorsus assentio. Nam etsi rerum quarumvis, trianguli videlicet aut circuli, recepta nomina sint, & communiter usurpata, tamen expedit ista nomina definiri, ad excludendos nempe confusos de rebus istis & vocabulis conceptus. Vulgus enim, ut in diverbio fertur, non distinguit, & idæas sæpiùs fovet, nominibus usitatis respondentes admodum confusas & inadæquatas; scientiarum verò genius & ratio distinctos admodum & adæquatos conceptus postulant; adeóque vel receptissima nomina rerum, (sensibus præcipuè non obversantium, & sui clarissimas idæas non imprimentium) scientiarum magistri definire debent, & vocabulorum significatus à vulgari confusione compurgare. Quanquam nec aliter receptum est æqualitatis nomen, quàm ut designet id, quod dicto pronunciato exprimitur, magnitudines nempe quæ dicuntur æquales, inter se congruere. Continet igitur illud axioma definitionem æqualitatis, etiam vulgaribus idæis bene consentaneam. His adjiciatur quartò, quòd nullam adversarii magis idoneam comminisci possint æqualitatis notionem, neque per eam, hac exclusa ratione quid velint aut distinctè intelligant, commodè queant interpretari. Argumento sint quas Hobbio suggerit antagoniſta ſuus alias duas ejus deſcriptiones, ut ipſe credit, magis appoſitas illâ, quæ ex congruentia deſumitur. Hobbium hiſce totidem verbis ſcitatur; *Annon ſimul & ſemel dixiſſe poſſes, id alteri æquale eſt quod tantundem eſt atque ipſum: vel æqualia ſunt quorum eadem eſt quantitas; vel ſi neutra horum placeat, ſaltem aliam definitionem inveniſſe?* Ad quæ verba licet advertere primò, quòd veriſimile ſit acutiſſimum illum virum nullam excogitare potuiſſe definitionem accuratiorem illis, quas adducit, duabus (nec enim ſiquæ ſuccurriſſent, illas omiſiſſet); atqui hæ duæ, vel nihil omnino ſignificare videntur. Aut in congruentiam recidere. Illam imprimis (quæ ab Ariſtotele mutuò videri poteſt Met. IV. 16 accepta, cujus eſt ἴσα ὧν τὸ ποσὸν ἕν) æqualia ſunt, quorum eadem eſt quantitas non improbo, ſed pronè amplector, ſi per eam ſaltem denotetur non actualis ſed poſſibilis identitas quantitatis (ut ſanè debet intelligi, nè manifeſtæ falſitatis convincatur ipſa enunciatio tribuens eandem rebus æqualibus, hoc eſt, rebus actu diverſis, quantitatem). Sic, inquam, intellectam definitionem iſtam non reprehendo, ſed interrogo quomodò poſſit eadem evadere duarum rerum quantitas aliter quàm per congruentiam; niſi per applicationem, aio, vel mentalem penetrationem; aut ejuſdem medii ſpatii interventu coincidant, & quaſi coadunentur ſibimet invicem, aliquo modo ſuperiùs expoſito; aliter, inquam, quomodo poſſint duarum rerum à ſe revera diſtinctarum identificari quantitates, vix equidem video vel capio. Quod alteram verò ſpectat definitionem, id

al-

alteri æquale eſt, quod tantundem eſt atque ipſum, ei primò legem oppono Dialecticam ab Ariſtotele ſumma cum ratione præſcriptam; Ἀεὶ ὁ ὅρος ἀποδίδοται τοῦ γνωρίσαι χάριν τὸ λεχθέν· γνωρίζομεν δὲ οὐκ ἐκ τῶν τυχόντων, ἀλλ' ἐκ τῶν προτέρων, καὶ γνωριμοτέρων. Φανερὸν (οὖν) ὅτι ὁ μὴ διὰ τοιούτων ὁριζόμενος, οὐχ ὥρισται· (hoc eſt, *Cùm definitio tradatur rei declarandæ causâ, declaremus autem non ex quibuſvis (temerè arreptis) ſed ex prioribus & manifeſtioribus; unde conſtat illum, qui non è talibus definit, haud quaquam definire)* Hanc, inquam, juſtiſſimam legem objicio citatæ definitioni, quis enim non æquâ ſaltem facilitate concipiat quid ſit æquale alteri, ac quid ſit tantundem atq; ipſum? At verò penitiùs attendenti vocabulum tantundem nil fortè comperietur aliud deſignare quàm tantum idem, vel idem in quantitate, vel cujus eadem eſt quantitas; adeóque hæc deſcriptio nullatenus à præcedente diſtabit, & pariter relabetur in noſtram congruentiæ hypotheſin, ſi rectè percipiatur & enucleetur; adeò noſtram ſententiam adverſarii, nec opinantes, dum evertere ſtudent, coguntur ſtabilire, ſuóque ſatis ipſorum indicio produnt ſe vix, ut maximè velint, à noſtro conceptu revera diſſidere. Prætereo denique quòd Euclides æquales magnitudines expreſse perhibeatur definiviſſe, quæ replent eundem locum; in libello de gravi & levi, mihi nunquam viſo, ſed quem auctor mihi Ramus eſt alicubi proſtare. Cæterum major huic cauſæ (major, inquam, naturæ cum congruentiæ tum æqualitatis) lux affulgebit, ex illorum, quæ tum à Proclo, tum à dicto eruditiſſimo viro

Topic. VI. 4

Schol. Mathem. VII. p. 163.

viro producuntur in contrariam partem, argumentorum, equidem haud diffiteor satis in speciem validorum, discussione; à qua tamen omnino, ne prolixior sim, in præsens abstinebo.

LECT. IV.

E Magnitudinum communioribus affectionibus & symptomatis observationi subjectis, & Mathematicas ingredientibus hypotheses, novissimè se tractandam exhibuit congruentia, quâ supposita resultare, & ab ea commode definiri magnitudinum æqualitatem in præcedenti quadantenus astruximus lectione. Quam tamen doctrinam acriter & animose, invictis ut ipsi putant argumentis, impetunt Proclus, & Hobbii præclarus antagonistes in Elencho suo Geometriæ Hobbianæ. Sed an penitus debellatum sit, & opinioni suæ parem, hoc est integram, ipsi victoriam reportàrint, superest jam & nobis incumbit, objectorum efficaciam ad rationis trutinam exigendo pensitare. Id quod eo promptiùs aggredimur pertentare, quoniam ex hoc adversantium sententiarum atque discursuum conflictu non exigua rebus istis lux. Neutiquam aspernandæ quædam veritatis scintillæ extundi posse videantur; nec tamen omnibus extricandis captiunculis anxiè desudabo, sed quæ candide accepta rem propiùs attingere, vis aliquid in se momentíque gravioris continere, videntur argumenta

gumenta curatiùs excutiam; memor divini quod apud Aristotelem habetur præcepti; (Ἅμα δὲ καὶ μᾶλλον ἂν εἴη πιστὰ τὰ μέλλοντα λεχθήσεσθαι προακηκοόσι τὰ τῶν ἀμφισβητούντων λόγων δικαιώματα· τὸ γὰρ ἐρήμην καταδικάζεσθαι δοκεῖν ἧττον ἂν ἡμῖν ὑπάρχοι· καὶ γὰρ δεῖ διαιτητὰς, ἀλλ' οὐκ ἀντιδίκους εἶναι τοὺς μέλλοντας τἀληθὲς κρίνειν ἱκανῶς). *De Cœlo l. 10.* Proponam igitur argumenta, non illa quidem delumbata, sed quoad potero nervosiùs astricta. Primo debet, obtendunt, æqualitatis eadem univoca ratio communis, & notio generalis assignari, pro rebus iis universis, quibus vere attribuitur, & justè convenit æqualitas. Atqui non solis magnitudinibus (quibus nimirum peculiaris est ista, pro qua nos certamus, congruentia) sed quantis etiam omnibus homogeneis, aptísque natis inter se comparari (puta motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus, numeris) æquo jure, pari ratione, simili loquendi proprietate tribui solet, & verè convenit æqualitas, etsi nulla ratione quadret aut congruat eis ἐφάρμοσις· (Τὸ γὰρ ἴσον καὶ ἄνισον, καὶ τὸ ὅλον καὶ τὸ μέρος, καὶ τὸ μεῖζον, καὶ τὸ ἔλαττον κοινὰ, καὶ τῶν διῃρημένων ἐστὶ ποσῶν καὶ τῶν συνεχῶν· i.e. communiter omnibus quantis continuis atque discretis convenit æqualitas, ait Proclus. Et alter adversarius; *Annon eadem est æqualitatis notio in his omnibus, imò & in rebus aliis omnibus, quotquot æqualitatis aut inæqualitatis sunt capaces?* *Elench. p. 10.* Quo facit quòd quam circa æqualitatem versantur axiomata, Geometricis elementis præstrata, quantis indifferenter omnibus accommodari solent, & jure possunt, unde vocantur ἀξιώματα κοινά. Οὐ μόνον λέ-

λέγεται μεγέθεσιν ἀληθεύειν τούτων ἕκαστον, ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῖς, καὶ κινήσεσι, καὶ χρόνοις, iterum ait Proclus. Eique ſuffragium fert ipſe Philoſophus; *Met. XI. 4.* Ὅτι γὰρ (inquit, exemplum afferens principii communis) *ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων ἴσα τὰ λειπόμενα, κοινὸν μέν ἐστι πάντων τῶν ποσῶν*). Igitur à congruentia (ſolis quippe magnitudinibus propriá, nec aliis quantis competente, adeóque neutiquam æqualitati coëxtensà, ſed multò ſtrictioribus cancellis coarctatâ) perperam deſumi aſſeritur æqualitatis ratio. Debet enim ex Logicæ juſtiſſimo præſcripto, definita res attributo ſuo, per quod definitur, exactiſſimè coæquari; cum ea reciprocari & converti. Huic exceptioni primariæ, ſatis ut non nemini videatur preſsè nos urgenti, repono ſummatim primò, quòd hîc ſola magnitudinum æqualitas propriè atque præcipuè definitur. Secundò, quòd non injuriâ nec abs ratione ſola definiatur. Tertiò, quòd hæc definitio (è congruentia dico petita definitio) ſuo modo, quantúmque ſatis eſt, omnibus quantis adaptari poſſit. Denique quartò, quòd expediat, ſaltem liceat, majoris perſpicuitatis atque ſecuritatis causá, ut reliquorum quantorum æqualitates ſeorſim definiantur. Quibus diſtinctiùs expoſitis, & ſufficienter apud æquos rerum arbitros approbatis, ſatis opinor factum erit allatæ objectioni. Quod primum punctum attinet, in eo nulla verſatur controverſia; nam ſolas magnitudines congruentiæ præſertim capaces eſſe non diffitentur adverſarii, quin obtendunt potiùs, & in eo collocant vim argumenti ſui; ſatíſque liquet ex ſe, cùm locum

cum implere, ſpatium occupare, contingere ſe mutuò, ſibimet applicari, ſe quodammodo penetrare, magnitudinibus proprium & peculiare ſit attributum. Ergò ſolis illis hæc definitio, ſiquidem definitio, propriè competit & quadrat. Verùm ſecundò, non iniquè dico magnitudinum æqualitatem per ſe ſolam propriè definiri. Nam cum illis primariò & propriè conveniant quantitas & quantitatem conſequentes, vel concomitantes affectiones (extenſio, terminatio, compoſitio, diviſio, menſuratio, reliquæque) quidni primariò conveniat illis æqualitas, & proinde ex reſpectu ad ipſas propriè definiatur? Docet nos Philoſophus generis definitionem præcipuæ ſpeciei τοῦ πρὸς ἕν, primùm & propriè convenire, reliquis ſecundariò, conſequenter & per ſimilitudinem; Τὸ τί ἐστιν ὑπάρχει πᾶσιν, ἀλλ' οὐκ ὁμοίως, ἀλλὰ τῷ μὲν πρώτως, τῷ δ' ἑπομένως· (*Ratio rei convenit omnibus, at non eodem pacto, ſed huic primò, illis conſecutivè*) καὶ ὁ ἁπλῶς ὁρισμὸς τῶν ἄλλων ὁμοίως ἐστὶ, πλὴν ὁ πρώτως. Simpliciter accepta definitio τῷ πρώτῳ δεκτικῷ propriè convenit; ergò reſpectu ejus definitio condi debet. Annon autem alia quanta quævis ex reſpectu ad magnitudines tanta quanta ſunt nedum æſtimantur & dignoſcuntur, ſed etiam dicuntur atque denominantur? Ipſa vocabula majoris & minoris, totius & partis, finiti & infiniti, continui, diſcreti, extenſi, contracti, ſymmetri, aſymmetri, reliquaque talia, quæ toties aliis aſcribuntur quantis, num aliunde quàm à magnitudinibus originem trahunt, & ab iis ad alia ſecundariò transferuntur? Nec id

Met. VII. 4.

con-

contingenter aut immeritò, ſed neceſſitate quadam & ſumma cum ratione. Nam gradus certè quoſdam, *τάσεις* & *ἐπιτάσεις*, intenſiones & remiſſiones ſuas habent aliæ res, ex accidente Mathematicæ conſiderationi ſubjectæ, at quæ nullo modo comprehendere vel exprimere poſſumus, niſi per magnitudinum aliquarum (quibus inſunt, in quas agunt, quas producunt, circa quas quomodocunque verſantur) inſtitutam collationem, & adhibendo vocabula mutuatitia de magnitudinum attributis tranſducta. Ut inſtemus, quomodo pondus aliquod aut momentum rei gravitantis concipiatur, aut quare dicatur tantum, ita magnum aut parvum, niſi quatenus ineſt tanto corpori, vel quod tantum corpus attollere, tantam magnitudinem valet ſuſtinere? Quomodo diviſibile, vel totum intelligatur, niſi corpus cui inhæret, aut quod reſpicit partes habeat ſingulas ejuſmodi virtute præditas, illíve potentiæ reſpondentes? Unde finiti titulum adipiſcitur, niſi vel ex terminis illi ſubſtratæ magnitudinis, aut ſaltem ex finibus illius eatenus extenſi corporis, quod evehere poteſt aut ſuſtentare? Commenſurabile pariter & incommenſurabile prædicetur ex eo, quod aut ſubjectum ſuum aut objectum, ſymmetriâ vel aſymmetriâ verſus alias quibuſcum comparatur magnitudines, itidem pondere ſimiliter donatas, affecta comperiuntur. Sic & motus ex ſpatii quod permeatur magnitudine tantus (longus, brevis; magnus, parvus; ſeu abſolutè ſeu comparatè) è ſpatii limitibus eouſque protenſus, ibíque terminatus, ex ejus dimenſionibus menſurabilis, ex

ejus

ejus compositione totus, è divisibilitate partibilis habetur & dicitur. Haud absimiliter (nam exempla nonnunquam undicunque conquisita coacervo (plura certè quàm quæ dilucidandæ rei propositæ requisita censeam ipse) libenter & datâ operâ consulens harum rerum minùs assuetarum utilitati, ut nempe χεῦμα quoddam præparatorium universæ Matheseôs obiter & sensim instillem ipsis, ac profuturos aliquando conceptus aliud agens insinuem) haud, inquam, aliter tempus ex spatii ab aliquo determinato mobili, Sole nempe vel Lunâ, peragrati magnitudine concipitur & appellatur; neque non terminos, extensionem, symmetriam, aliásque suas passiones ex illo, quem ad ejusdem magnitudinem obtinet, respectu mutuatur. Velocitas etiam ex spatii percursi magnitudine (non quidem absolutà, sed comparatâ cum magnitudinis spatii ab alio determinato mobili, Sole videlicet aut Lunâ transacti, hoc est, ex magnitudine spatii tanto tempore peracti) taxatur; parilíque ex relatione ad spatii magnitudinem limitari, componi, dividi, ad mensuram exigi; quomodocunque comparari solet, neque vix aliter potest æstimari. Numeri verò quòd non alia ratione quàm ut symbola magnitudines designantia quantitatis participes sunt & proportionis, abundè jam antehac dictum & ostensum est nobis. Nec omnino solus, & authoritatis omnimodæ suffragio destitutus hæc affirmo (quamvis non raro quas pertractandas suscipio quæstiones, & materias distinctè quod sciam explicuerit nemo, solámque quod ille dixit Libera per vacuum vestigia ponere—

nullo

nullo ferè viæ duce vel comite, qui molesti per hasce salebras itineris tædium consoletur, quò magis condonandum sit, si nonnunquam cespitare videar, aut impeditiùs procedere, ac) saltem in hac re principem habere videor astipulantem & præcinentem mihi Philosophum, cujus hæc imprimis alicubi leguntur verba, nostram in rem satis luculenta;
Phys. IV. 86. Ἐπεὶ δὲ τὸ κινούμενον κινεῖ(ται) ἔκ τινος εἴς τι, καὶ πᾶν μέγεθος συνεχὲς ἀκολουθεῖ τῷ μεγέθει ἡ κίνησις· διὰ γὰρ τὸ μέγεθος εἶναι συνεχὲς καὶ ἡ κίνησίς ἐστι συνεχὴς, διὰ δὲ τὴν κίνησιν καὶ ὁ χρόνος· ὅση γὰρ ἡ κίνησις τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι· τὸ δὲ δὴ πρότερον καὶ ὕστερον ἐν τόπῳ πρῶτόν ἐστιν· ἐνταῦθα μὲν δὴ τῇ θέσει. Ἐπεὶ δ' ἐν τῷ μεγέθει ἐστὶ τὸ πρότερον καὶ τὸ ὕστερον, ἀνάγκη καὶ ἐν κινήσει εἶναι τὸ πρότερον καὶ τὸ ὕστερον ἀνάλογον τοῖς ἐκεῖ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἐν τῷ χρόνῳ ἐστὶ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον διὰ τὸ ἀκολουθεῖν ἀεὶ θατέρῳ θάτερον αὐτῶν· hoc est, explanatiùs aliquanto; *cùm quicquid movetur ab alio termino ad aliquem terminum promoveatur, & omnis magnitudo continua sit, magnitudinem eatenus consequitur motus. Ob magnitudinis quippe continuitatem continuus est motus, & propter motum tempus quoque continuum est. Quantus enim extitit motus, tantum quoque tempus perpetuò videtur affluxisse. Prius autem & posterius spatio primitus insunt, ex diversa partium ejus positione: cùmque magnitudini insit partium ordo, motui quoque necessariò inerit, analogicè respondens illi. Quin etiam in tempore reperitur prius & posterius, quia semper eorum alterum alteri consequens est* (quoad hujusmodi nempe passiones & attributa). Ita satis clare motûs ac temporis continuitatem

ſimul & quantitatem magnitudinis ὁμωνύ-
μων ſtatuit conſectarias & derivatas. Idem
rurſus alibi: Ἀκολουθεῖ τῷ μεγέθει ἡ κίνησις, *Phyſ. IV.*
τῇ δὲ κινήσει ὁ χρόνος τῷ καὶ ποσὰ καὶ συνεχῆ καὶ 18.
διαιρετὰ εἶναι· διὰ μὲν γὰρ τὸ μέγεθος εἶναι τοιοῦ-
τον, ἡ κίνησις ταῦτα πέπονθε· διὰ δὲ τὴν κί-
νησιν ὁ χρόνος· hoc eſt, *Magnitudinem ſe-
ctatur motus, motus verò tempus, quatenus hæc
quanta ſunt, & continua, & diviſibilia. Quia
nam magnitudo talis eſt, ideo taliter affectus eſt
motus, & propter motum tempus.* Ita Philoſo-
phus in Phyſicis, ut vix potuerit ad rem no-
ſtram magis appoſitè, vel pleniùs & liqui-
diùs pronunciâſſe; niſi fortè quæ tradit in
Metaphyſicis etiam his expreſſiora ſint, ac
magis noſtram corroberent, illuſtréntque
ſententiam. Nam de motu & tempore ita
proloquitur; Καὶ γὰρ ταῦτα ποσὰ ἄττα λέγεται, *Met. IV.*
καὶ συνεχῆ τῷ ἐκεῖνα διαιρετὰ εἶναι, ὧν ἐστι ταῦτα 13.
πάθη· λέγω δὲ οὐ τὸ κινούμενον, ἀλλ᾽ ᾧ ἐκινή-
θη· τῷ γὰρ ποσὸν εἶναι ἐκεῖνο, καὶ ἡ κίνησις ποσή,
ὁ δὲ χρόνος τῷ ταύτην· hoc eſt, *Motus &
tempus aliquo modo quanta dicuntur & continua,
propterea quòd illa, quorum affectiones ſunt (vel
quibus accidunt) diviſionis ſunt capacia. Intelli-
go autem pro ſubjecto ipſorum non ipſum mobile,
ſed juxta quod movetur (hoc eſt, ſpatium tranſ-
actum) non eò quòd illud eſt quantum, etiam mo-
tus eſt quantus, & propter hoc tempus.* Ita no-
bis ſuffragium ſuum & patrocinium præſtat
Philoſophus. Æquum igitur eſt, quum alia
quanta ſuam magnitudini quantitatem (ejus
ſaltem notitiam & comprehenſionem) ac
quantitati connexas affectiones referant ac-
ceptas, ut eorundem etiam æqualitas (hoc
eſt, quantitatis velut identitas & coalitio)

ex magnitudinis æqualitate censeatur; útque per analogiam & secundariò quanta sunt, sic analogicam & tralatitiam quoque sortiantur æqualitatem. Id quod à veritate non abludere rem ipsam immediatiùs & intimiùs exploranti, communémque sensum & consensum hominum consulenti manifestiùs apparebit. Nam v.g. si quem mortalium (seu Philosophum, seu è vulgo quempiam) sciscitetur aliquis quid intelligat, quum dicit æquari duo tempora, nihil hæsitans, opinor, statim respondebit, intelligere se duo æqualia spatia ab eodem uniformiter lato mobili (saltem à diversis æquâ velocitate latis) peragi; Solem nempe suæ diurnæ vel annuæ revolutionis æquales partes absolvisse. Si quid significet per duorum ponderum æqualitatem; quòd extrema, dicet, vis hujus magnitudinem aliquam elevare vel sustinere queat æqualem (ejusdem speciei) magnitudini, quam extrema vis alterius elevare poterit aut sustinere; nec aliter de motuum ac velocitatum, & aliorum, quæcunque sunt, quantorum æqualitate consulti statuent, aliquam semper magnitudinem quarundam æqualitatem allegando, cujus respectu dicta quanta constituantur ac denominantur æqualia. Scilicet à magnitudinis æqualitate reliquorum æqualitatem vix mente quisquam secernere potest, aut penitus abstrahere; vix illâ seclusâ quod sint æqualia deprehendere vel agnoscere; quomodo sint æqualia mente cogitare, vel verbis exprimere; quid ipsa denuò sit æqualitas distinctè concipere valent. Illam igitur cùm alia quævis æqualitas intimè connotet & involvat ut naturâ pri-

priorem & sibi præstratam, constitutivam, & definitivam sui; non igitur nisi minùs principaliter & secundariò, dependenter & consecutivè, derivativè & per participationem, κτ̄ σχέσιν aut καθ᾽ ἀναλογίαν, æqualia sunt alia quanta. Unde quò de reliquorum æqualitate clarior apprehensio sit, & certiùs fiat judicium, magnitudinum æqualitas quid significet, in quo consistat, præcognosci, distinctéque comprehendi, adeóque jure merito per se priùs definiri debet. Id quod secundò suscepimus explicandum & ostendendum. Verùm porro, tertiò, quantis etiam aliis quibuscunque quodammodo convenit ἐφάρμωσις nostra, prout inquam (utì jam ante satìs declaratum) aliquo modo terminantur, extenduntur, componuntur, dividuntur, mensurantur, alias magnitudinum affectiones admittunt, suo modo, sic & aliquo modo congruentiam vendicant sibi (mediante præsertim magnitudinum quibus insunt, quas respiciunt congruentiâ) concipiatur enim, exempli causâ, duabus in rectis lineis, vel in duabus æqualium circulorum peripheriis æquâ velocitate deferri mobilia duo puncta (vel alia quævis æqualia & similia duo mobilia) intelligatur etiam lineas istas aut peripherias, utique congruentiæ capaces, sibimet applicari, sic ut dicta quoque puncta vel mobilia sibimet apponantur, adeóque sibi congruunt tum ab initio, tum in progressu sui motûs (quod eveniet ob suppositam motûs æqualem celeritatem) inde congruentibus perpetuò mobilibus, & ipsorum orbitis coincidentibus, haud difficile concipitur ipsos motus ἐφαρμόζειν, uniri, coalescere, adeóque ean-

eandem quantitatem habere, ſeu ſibimet adæquari. Item ſi in curriculo corporis alicujus (puta Solis aut Terræ) cujus æquabili motu determinatur temporis quantitas, adſumpta concipiantur duo puncta ceu termini, de quibus motuum, adeóque tempore, decurrentium initia computentur, iſtíque termini ſibi concipiantur adponi, ſic ut exinde (modo mox expoſito) duo motus ab iis auſpicantes congruant invicem, etiam ipſa tempora ſimul confluent, & in unum commigrabunt. Neque ſi confingatur animo duorum annorum initia conjungi, difficile ſit ut parili tenore procedentes illi ſimul exiſtant, ſe quaſi penetrent, in unum coëant imaginari. Quod perinde eſt ac ſi diceres, duo æqualia tempora ſi ſimul incepiſſent, unà deſiiſſent. Quinimo qua ratione tempus tempori quodammodo congruum revera ſit, hinc quoque licebit judicare. Cùm tempus ejuſdem nobiliſſimi conſtantiſſimíque mobilis æquabili circulari motu ſæpiùs iterato menſuretur & determinetur optimè (ſicuti
Phyſ.IV. 20. notat Ariſtoteles; Ἡ κυκλοφορία (inquit) ἡ ὁμαλὴ μέτρον μάλιστα, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ταύτης γνωριμώτατος) circulus autem iſte, periodico mobilis ejuſdem recurſu toties emenſus, ſemper unus idémque perſiſtat, hinc illo conciliante mediantéque, motus & tempus (nec non motuum temporúmque partes ab eodem iſtius peripheriæ puncto capientes exordium, & in idem punctum deſinentes) velut uniuntur & identificantur inter ſe, adeòque congruunt perfectiſſimè. Quamobrem annus in ſe verti, redire menſes, inſtaurari ſecula, lapſas tempeſtatum vices atque perio-

dos reſtitui, eoſdem denique temporum circuitus iteratò obiri menſe cenſetur, & ſermone teritur vulgi (*καὶ γὰρ ὁ χρόνος αὐτὸς εἶναι δοκεῖ κύκλος τις, Tempus ipſum videtur eſſe cyclus quis* (aut circulus) ob motum quo determinatur, circularem ſæpiùs repetitum, & in ſe quaſi replicatum, inquit Philoſophus: idémque rurſus in hanc mentem; *Ὡς ἐνδέχεται* *Phyſ.IV.*
κίνησιν εἶναι τὴν αὐτὴν, καὶ μίαν πάλιν καὶ 18.
πάλιν, οὕτω καὶ χρόνον ἐνδέχεται, οἷον ἐνιαυτὸν, ἢ ἔαρ, ἢ μετόπωρον. Aſt opportunum non eſt de tempore plura nunc effundere. Velocitatum par eſt ratio, quæ mediantibus itidem ſpatiorum ſimul decurſorum congruentiiis ipſæ ſibi congruant, & conſequenter æquales oſtendantur. Quinetiam ſi duo corpora gravia ejuſdem ſpeciei, puta duæ ſphæræ æquales aqueæ vel aereæ, per mentalem iſtam antehac expoſitam penetrationem congruere ſupponantur, eàdem opera gravitates ſeu ponderoſitates, ipſarum coincident & congruant, eáque ratione deprehendentur æquales. Quin & ipſis rationibus, ſeu proportionibus æqualibus, aliquo modo tribuatur congruentia, quatenus omnes coincidunt & identificantur uni cuidam in numeris, lineis, aut aliis quantis expoſitæ (quæ quidem expoſita ratio ſpatii quoddam inſtar habet, (reſpectu infinitarum quas repræſentet & exprimat rationum, illas omnes quaſi recipiens in ſe, & inter ſe coadunans). Numeri verò quatenus æquales, eatenus & congruentes eſſe poſſunt, per congruentiam ſcilicet ipſorum quantorum æqualium quæ repræſentant ac denominant. Adeò cujuſque generis quanta ſicut alias magnitudinum

proprietates, ita congruentiam recipiunt ſuo modo. hoc eſt, analogicè, conſecutivè, participativè, propter magnitudinum, à quibus determinatur eorum quantitas, congruentiam; & conſequenter æqualitatis à congruentiæ ſuppoſitione reſultans definitio, ne quidem illis omnino diſconvenit, imo revera tantùm illis, quantùm æqualitas ipſa competit & aſſignatur meritò. Sed ad quartum reſponſi caput promoveo pedem; Quòd expediat aut ad minimum liceat aliorum quantorum æqualitates ſeorſim definiri vel explicari; ex æqualitate ſcilicet reſpectiva magnitudinum, quibus inſunt, aut circa quas modo quovis occupantur. Nam (ut priùs inſinuatum) eorum quæ ſunt & dicuntur πρὸς ἕν, id ratio communis exigere videtur, ut quæ primaria ſunt in ſuo genere, adeóque quaſi menſuræ reliquorum definiantur imprimis per ſe, cum alia conſequenter ex relatione, quàm ad iſta priora ſortiuntur, peculiari declarentur. Ita nos iterum docet horum callentiſſimus & perſpicaciſſimus Philoſophus; Met. III.2. Ὥστε διελόμενον inquit, ποσαχῶς λέγεται ἕκαστον οὕτως ἀποδοτέον πρὸς τὸ πρῶτον ἐν ἑκάστῃ κατηγορίᾳ πῶς πρὸς ἐκεῖνο λέγεται· τὰ μὲν γὰρ τῷ ἔχειν ἐχεῖνα, τὰ δὲ τῷ ποιεῖν, τὰ δὲ κατ' ἄλλους λεχθήσεται τοιούτους τρόπους· hoc eſt, eorum quæ inæqualiter attribuuntur aut prædicantur (ſeu τῶν πρὸς ἕν) diſtinguendum eſt imprimis quotupliciter ſingula dicuntur, tum explicandum eſt quo pacto referantur ad id quod in dicto genere (vel prædicamento) primum eſt; quædam enim quòd habeant ipſum, quædam quòd efficiant, quædam ſecundùm alios hujuſmodi modos attribuentur).

tur). Ita cùm æqualitas pluribus conveniat, magnitudini quidem originaliter & præcipuè, reliquis quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, potentiis motricibus) minùs principaliter & ſecundario; primùm illius quæ magnitudinibus convenit æqualitatis conſtituenda ratio eſt, tum explicandum quomodo reliquorum quantorum æqualitates an ipſam referuntur; eóque fit ut ſeparatim definiuntur. Et velocitates quidem, e.g. æquales, ex Ariſtotelis mente definiantur, à quibus eodem tempore (vel æqualibus temporibus) eadem vel æqualia ſpatia tranſmittantur (Ὁμοταχὲς, inquit, τὸ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἴσον κινούμενον. Et, Τὰ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὸ αὐτὸ μέγεθος κινούμενα ἰσοταχῆ. Ecce ut æquè velocium definitionem ingrediatur μέγεθος, útque non illicitum nec ἀπροσδιόνυσον cenſuerit Philoſophus, velocitatis æqualitatem definire) pariter æqualia tempora definiantur, in quibus æquabili motu latum corpus aliquod notabile (tempori determinando ſcilicet aſſumptum, Sol puta vel Luna) æquales peragit ſui curriculi partes; & ἰσόχρονα vocentur, quæ coexiſtunt iſtis æqualium ſpatiorum confectionibus. Similiter æqualia pondera dicantur (abſolutè loquor, & ſeposito ad Mechanicas applicationes eorundem gravium momenta variantes reſpectu) reſpectu ſubjecti, quæ magnitudibus ſpecie iiſdem, & quantitate æqualibus inſunt; reſpectu objecti, vires motrices æqualium (ſimiliter poſitarum & quoad omnes conditiones partium) magnitudinum; vel quæ poſſunt eaſdem, aut æquales ejuſdem ſpeciei magnitudines ſublevare: & ἰσοβαρῆ, quæ viribus ac potentiis prædita sunt æqualibus. (Quidam apud Aristotelem veteres Philosophi, ex subjacente materia definiebant ἰσοβαρῆ, τὰ ἐξ ἴσων συγκείμενα τῶν πρώτων, vel τὰ ἐξ ἴσων συνεστῶτα· quæ ex æqualibus principiis, aut æqualibus materiæ particulis constant). Æquales denique numeri definiri possent, quæ repræsentant magnitudines eodem modo divisas (vel accuratiùs aliquovis simili modo). Hisce consimilibúsque pactis nil obstat, quin definiantur omnium quantorum æqualitates, imò multùm fortè proderit hoc ipsarum distinctæ comprehensioni. Neque desunt exempla præstantissimorum authorum, qui nedum hujusmodi quandam præ se ferentium homonymiam, at majoris perspicuitatis causâ quorundam etiam συνωνύμως dictorum quantorum æqualitates separatim definire non dubitàrint. Nam Euclides elemento undecimo, solidas definivit æquales figuras, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur. Et magnus Apollonius (initio sexti Conicorum libri, nuper ex Arabico in Latinum sermonem transfusi, & à præstantiss. Borello luce donati) æquales definivit coni-sectiones, quæ ad invicem sibi mutuò superpositæ congruunt. Ut reticeam Euclidem (id quod innui jam antehac) in libello de gravi & levi, æqualia magnitudine definivisse (formaliter & exprefse juxta nos) quæ replent eundem locum. Nec ferè dubito quin gravium æqualium aliqua isthic extet definitio, cui prælu- serit hæc de magnis æqualibus. Quinimo, quod affine est nostro negotio, Euclides partis definitionem tradidit aliam atque aliam,

De Cœlo l. 4. 2.

dé

de magnitudinibus & numeris. Idémque quinto in elemento, ex usu putavit magnitudinum analogiam seorsim definire (ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι) numerorúmque proportionalitatem aliter in elemento septimo definire; unde necessitatem imposuisse sibi videtur, siquando de quantis aliis instituisset dicere, ipsorum quoque proportionalitatem singillatim definire, vel istam saltem de magnitudinum proportonalitate traditam iis accommodare. Quare si peccatum est (quod pertendunt adversarii) nomen idem, quatenus diversis genere vel specie rebus attribuitur, aliter ac aliter definire, ejus admissi reos allegemus, quibuscum errare non admodum pudeat nos, auctores perquam nobiles & eximios. Tandem (ut hujus objectionis examini coronidem imponamus) plurimùm haud diffiteor adducta valeret ratio, si possit alia quæpiam bene commoda generalior æqualitatis notio assignari. Sed nulla succurrit alia, saltem hâc potior, hypothesi cuivis ad sensûs observationem, vel ad mentis captum evidentiùs exploratæ subnixa. Tentavit quidem (ut adnotavimus in Lectione præcedente) duas memoratus egregius vir, nec alias, opinor, meliores potuit comminisci, quæ tamen, ut ostendimus, in nostram hanc penitius excussæ recidunt, quódque non aliter vel eædem, vel tantæ eædem concipiantur esse diversarum rerum quantitates, quàm per congruentiam aliqualem, seu propriam seu analogicam. Nam ut hoc unum adjiciam, nonnihil elucidandis & confirmandis tunc dictis; quantitatis identitas specifica minimè sufficit æqualitati con-

constituendæ (tunc enim omnes circuli, cunctæ sphæræ, quælibet figuræ similes æquarentur sibi mutuò) sed ad hoc identitas quædam numerica postulatur; non illa quidem actualis, at saltem possibilis, qualis optimè (nec aliter opinor) per illam quæ ex congruentia emergit, quantorum coincidentiam & coalitionem exhibetur. Hæc igitur notio, cum magnitudinibus (hoc est, propriè & primariò quantis) eximiè quadret; & aliis quantis aliquo modo; cúmque alia quanta per magnitudinis æqualitatem definiri possint & debeant; & quando non alia possit excogitari convenientior; his, inquam, expensis hæc non gravatim admittenda videtur & approbanda, nequicquam obstante proposito contrario discursu. Hoc igitur argumento præcipuo, maximam verisimilitudinis speciem præ se ferente defuncti, alterum huic succenturians aggrediamur, ut adversarii confidunt, haud minùs Achilleum & invictum, sed ut mihi videtur, enervius & pusillius multo. Ejusdem (inquiunt) loci possessio vel repletio æqualitati extranea & accidentaria est; nec minùs æquales sunt magnitudines, etsi non possideant eundem locum, quàm si maxime possideant. Et figuræ dissimiles eundem locum occupare nequeunt, nisi partium situs transmutetur. *Quid autem* (aiunt) *motus & locus, & transmutatio ad æqualitatem spectant? Pyramis enim, etiam dum manet pyramis, non minùs est æqualis (ut ut non similis) quàm ubi transformatur; atque dum alibi manet æqualis est (ut ut non ibidem) non minùs quàm ubi in eundem locum movetur. Ergò non magìs ex respectu*

ad

ad locum (adsumptâ partium quum opus est transpositione) *debet æqualitas definiri, quàm homo ex eo quòd possit esse princeps Transylvaniæ* (sic enim argumentum suum etiam sale condiunt, nè fortè putrescat, aut minùs sapiat). Verùm respondeo respectum ad spatium ab ipso occupabile non esse magnitudini cuivis accidentarium aut extrinsecum, sed ei necessariò, intiméque connexum; sicut actui cuivis convenit intrinseca sibi connata σχέσις ad potentiam, cui respondet, quam complet. Non magìs, inquam, magnitudinis naturæ convenit essentialiter, ut terminetur, extendatur, componi possit aut dividi, vel ut alio quovis attributo gaudeat, quàm ut tantam talémque sui capacitatem (tantum & tale spatium) adimpleat. Ex hujusque suppositionis fonte multæ Mathematicis necessariæ hypotheses promanant, ut ex antehac ostensis satis pateat. Porrò, etsi magnitudinibus, ceu talibus, non obtingat necessariò, definitum ut locum aut situm, hunc vel illum, possideant; tamen illis ut æqualibus necessariò convenit, ut eandem aliquo modo quantitatem habere possint, & proinde ut locum eundem insidere possint, tum quoniam ex eo quòd eandem actu quantitatem habent, planè consequetur ipsas de facto spatium idem occupare; tum quia nullo alio modo concipi potest identitas ista possibilis. Ad hæc, quòd non contingenter æqualibus accidat magnis hæc ejusdem spatii possidendi capacitas, ex eo clarissimè liquet, quòd rem seriò perpendenti nil aliud de quibusvis magnitudinibus inter se quoad æqualitatem, aut quamvis proportionem, collatis demon-
strant

ſtrant Geometræ, quàm illas congruere, vel eundem locum occupare poſſe: quum, inquam, Euclides triplum conum æqualem oſtendit cylindro; cùm Archimedes ſuperficiem ſphæræ quadruplo maximo ejuſdem ſphæræ circulo demonſtrat adæquari, cúmq; circulum æquiparari docet ſuo ipſius radio ducto in ſemipeipheriam, eò res recidit (ipſam ſcilicet altiùs è primis principiis repetenti) & nihil evincunt aliud ipſorum ratiocinia, quàm iſtas tales magnitudines ſibi congruentes eſſe poſſe. Siquidem ipſorum demonſtrationes pendent è primis elementis, nominatim ex quarta & octava primi elementi, ubi demonſtratur triangulorum æqualitas, ex eo quòd poſſint congruere. Ergò ſi poſſe locum eundem occupare ſit quid accidentarium magnitudinibus iſtis, nihil neceſſarium demonſtrârunt Geometriæ principes; id quod horridule ſonat auribus Mathematicis. Præterea, occupatio loci non magìs eſt aliena, non minus eſt intrinſecè conjuncta cum magnitudine, quàm motus, ſeu mutatio loci; úcque magnitudines ubicunque poſitæ concipiuntur æquales, ita figuræ utcunque quieſcentes ac innotæ, ſuam eandem naturam obtinent atque ſervant. Nihilominus omnes Geometræ non dubitant figuras quaſvis à motu quocunque, quo nimirum facilè poſſint progenerari, definire. Ut Euclides ſphæram ex revolutione ſemicirculi circa diametrum, cylindrum ex parallelogrammi circa latus, conum ex trianguli circa crus rotatu; Apollonius universè conicam ſuperficiem ex rectæ lineæ circularem peripheriam circumeuntis tranſitu; Archimedes

medes conoidæa ac ſphæroidæa ex conicarum ſectionum portionibus planis circa diametrum volutatis: & nemo non Geometrarum ſimili modo magnitudines quaſlibet (lineas, ſuperficies, ſolida) è motibus circularibus, rectis, parallelis, mixtis utcunque pro ſuo arbitratu fas eſſe ducit definire. Quæ quidem definitiones nedum legitimæ, ſed omnium optimæ ſunt: nec enim ſolummodo definitæ magnitudinis naturam explicant, ſed poſſibilem ejus exiſtentiam commonſtrant, conſtructioníſq; modum evidenter indigitant, non modò qualis ſit deſcribunt, at quòd talis eſſe poſſit experimento probant, & quo pacto talis evaſerit, extra dubitationis aleam conſtituunt. Et par eſt ratio, ſimilis virtus hujus noſtræ ex congruentia deſumptæ definitionis; non enim ſolùm exponit quod ſit æqualitas magnitudinum, at quòd æquales dari poſſint, indicat luculentè quâ ratione fiant, dignoſcantur, explorentur æquales magnitudines edocet manifeſtè modo ſcilicet qui frequentiſſimo paſſim in uſu eſt, & nuſquam non æqualitati diſcernendæ dijudicandæque ſolet adhiberi. Itaque nemini diſplicere debet hæc definitio, cui definitionum indoles perſpecta eſt, & quomodo ſemper ex aliqua poſſibili ſuppoſitione reſultent ipſæ, probè ac prudenter animadvertit. Superſunt multa, quæ cogitàram attingere, ſed levioris momenti, quorúmque facilè poſſit è dictis & inſinuatis ſolutio perſpici deducíque; ut & à vobis ſuppleri poſſunt, quæ congruentiam & æqualitatem ſpectant reliqua. Et alioquin me, pariter ac vos, impensè tædet hujus in re tenui

je-

jejunáque tam enormiter profusæ disputationis. Neque nonne fas esset à tanto sublimioribus, quæ vos monent, ratiociniis detinere. Igitur, optimi Auditores, jam valete. Proximâ Lectione me conferam aliò; & magnitudinum præcipua symptomata proportionem ac analogiam ad partes vocabo.

LECT. V.

E Magnitudinum attributis & symptomatis, quæ Mathematicis subjacent hypothesibus, ultimum tractavi congruentiam; & ex ea rectissimè desumi notionem æqualitatis effusè dissertavi. Res jam poscere videtur ut aliò transeam; verùm quæ mea est infelicitas, materiam istam dimittere nequeo, priusquam è dictis consectariam unam aut alteram annotatiunculam; ad ulteriorem propositi declarationem ac usum spectantes, adjunxero. E traditis igitur ac disputatis
1. detegatur imprimis notabilis error Procli, & plerorumque, qui post eum in octavum elementi primi pronunciatum commentati sunt, interpretum. Axioma sic exprimitur; Quæ sibi mutuò congruant, ea inter se sunt æqualia: hoc negat Proclus universaliter conversum valere; (Τοῦτο (inquit, hoc est, æquales magnitudines congrueret) τοῦτο οὐκ ἐπὶ πάντων ἀληθὲς, ἀλλ' ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν· *Non omnibus verè convenit, at solis ejusdem speciei, vel perfectissimè similibus magnis).* Eíque postremò succinens Borellus; *Conversum verò*

rò

rò (ait) *quòd scilicet ea quæ æqualia sunt, invicem sibi congruant, non in omnibus verum est, sed in iis quæ specie similia sunt, ut lineæ rectæ inter se, & circumferentiæ æqualium circulorum, ut Proclus animadvertit.* Verùm hæc exceptio diligentiùs inspecta, nedum non est necessaria, sed (id quod mirum videatur tot perspicaces viros effugisse) planè falsa comperietur. Nam per congruentiam intelligunt illhic vel actualem aut potentialem congruentiam. Utrolibet accipiatur modo, veritati discrepabunt ab iis enunciata. Si de actuali capiunt, evidentissimæ falsitatis convincuntur, ex eo quòd non omnes æquales rectæ, nec æqualium circulorum peripheriæ, nec æquales utcunque magnitudines vel simillimæ, actu congruant, at loco sæpè disjunctissimæ sint; quantum scilicet ab Arctico circulo distat circulus Antarcticus ei, situ contrarius, ac specie persimilis, & magnitudine prorsus æqualis: si de potentiali, patet ex ostensis & non ostendendis etiam falsò affirmari, quòd æquales aliquæ magnitudines non congruant. Nam contrà verissimum est, omnia magna æqualia, quantumvis specie diversa, vel dissimilia sibi posse congruere. Verum quidem est ejusdem speciei magnitudines, & sibi perfectissimè similes (ut nempe rectas lineas, æquali radio descriptos circulos, æquales angulos rectilineos) peculiari quodam modo, retento nempe partium ordine, sitúque neutiquam variato congruentiam actualem admittere; faciliùs etiam ipsarum possibilis congruentia deprehenditur, & ex ipsarum forsan definitione statim infertur; at non minùs hoc verè convenit

venit omnibus aliis æqualibus magnis, quæ partibus suis quibusdam translocatis, & figurâ suâ nonnihil immutatâ possunt quàm accuratissimè fieri congruentes; hoc est, unius partes (quæ à toto non differunt) alterius spatium exactè possidebunt. Figuræ verò retentio nihil adjicit, ut nec ejus alteratio derogat æqualitati vel congruentiæ magnitudinum; nec omnino facit πρὸς τὰ ἄλφιτα ejus hîc consideratio; ut neque possibilis congruentiæ facilis vel difficilis comprehensio: nam æquè verum est, quòd per mille discursuum ambages legitimè demonstratur, ac quod intuitu primo perspicitur, aut unico confestim elicitur syllogismo. Euclides sanè datæ rectilineæ figuræ cujusvis, cum aliquo determinato quadrato, cujusvis solidæ figuræ planis superficiebus contentæ cum aliquo certo cubo congruentiam demonstravit (aut, quatenus hoc postremum fieri potuit, attentavit) id est, ipsas dimetiendi modum edocuit aut investigavit: Archimedes ultrà progressus circulos & sectores circulares, nec non superficies curvas, conicas, cylindricas sphæricas comparavit, & alias cum aliis congruere, per clarissimas consequentias demonstravit. Cùm, inquam, e.g. demonstravit Archimedes circulum æquari rectangulo triangulo, cujus basis radio circuli, cathetus peripheriæ exæquetur (vel quod eodem recidet, quadrato cujus latus est media proportionalis inter radium & semiperipheriam circuli) nil ille, siquis propiùs attendat, aliud quicquam quàm aream circuli ceu polygoni regularis indefinitè multa latera habentis, in tot dividi posse minutissima triangula, quæ

quæ totidem exilissimis dicti trianguli trigonis æquentur; eorum verò triangulorum æqualitas è sola congruentia demonstratur in elementis. Unde consequenter Archimedes circuli cum triangulo (sibi quantumvis dissimili) congruentiam demonstravit. Item cùm ab eodem conica superficies æqualis ostenditur areæ circuli, cujus radius proportione medius est inter coni latus & semidiametrum basis, nil ostendit aliud (ut planè liquebit ad primam demonstrationis originem recurrenti) quàm superficiem istam velut ex infinitis exiguis triangulis consistere, quæ singula congruunt tot singulis triangulis dictum circulum componentibus. Ita congruentiæ nihil obstat figurarum dissimilitudo; verùm seu similes sive dissimiles sint, modò æquales, semper poterunt, semper posse debebunt congruere. Igitur octavum axioma vel nullo modo conversum valet, aut universaliter converti potest; nullo modo, si quæ isthic habetur congruentia designet actualem congruentiam; universim, si de potentiali tantùm accipiatur; quasi diceretur, Quæ congruere possunt, æqualia sunt; & conversè. Quo pacto potior ratio suadet ut intelligatur. Etenim præstat utilissimum illud pronunciatum sic exponi, ut valeat omnimodè conversum, quàm ut nullatenus converti queat; útque magnitudinis essentialem passionem contineat, quàm ut accidentarium solummodo symptoma respiciat. Nam actu congruere nihil ad magnitudinis aut æqualitatis naturam pertinet, at ipsis contingenter accidit; nec ob aliam causam adhibetur, quàm ut ab ea seu manifesto indicio (quippe cùm actus semper antegressam arguat potentiam) congruentia potentialis innotescat, quæ nempe sola cum æqualitate cohæret intimè, cúmque ea perpetuò reciprocatur. Sicut enim magnitudini non actu dividi, sed esse divisibilem connatum censetur, & arctissimè connexum; ista verò divisibilitas ex actuali (utcunque fortuitâ vel arbitrariâ) divisione dignoscitur ac arguitur; ita quantis æqualibus, ut talibus, accidentaliter obvenit, ut congruant actu, convenit autem inseparabiliter & perpetuò ut possint congruere; huic autem commonstrandæ potentiæ deserviat actus iste, proptereáque solet adhiberi. Igitur perperam Proclus, & alii plerique Procli vestigiis insistentes, explicant hoc axioma, non satìs animadverso, quod actualem inter & possibilem congruentiam versatur, discrimine, solámque quæ minùs hîc attendenda fuerat respicientes actualem congruentiam. Unus ab hac erroris contagione se conservavit immunem optimus Clavius; quem immeritò propterea reprehendit doctissimus ejus ὁμόφυλος Tacquetus; *Non rectè Clavius* (inquit) *hoc axioma convertit; falsum est enim ea quæ universim inter se æqualia sunt sibi mutuò congruere, dissimiles enim magnitudines possunt esse æquales, neque tamen congruent, quòd si similes & æquales fuerint, valebit conversa.* Ego verò potiùs Clavii singularem aut prudentiam aut εὐτυχίαν demiror, qui communiter arreptum errorem feliciter evitavit, istámque falso fundamento subnixam exceptionem prorsus omisit, veréque licèt haud plenè, satísque luculentè pronunciatum illud exposuit. Sed in hoc nimius

2. fui, quamvis nonnulla subticeo. Noto secundò,

cundò, quòd ex æqualitatis hac præstrata definitione, quæ æqualitatem spectant, axiomata possunt demonstrari. Id quod ejus arguit convenientiam atque præstantiam. Debent enim axiomata (sicut admonitum est sæpiùs) ut theoremata quædam è ritè constitutis terminorum, quibus constant, definitionibus demonstrari posse. Solem igitur istum, quem appellavit Ramus, in Mathematicis clarissimum, Quæ eidem æquantur, sibimet æquantur mutuò, sic petitâ hinc demonstratione illustravit Apollonius : Sint duæ magnitudines A,C, utraque singillatim æqualis alteri tertiæ B. Dico magnitudines A,C sibimet æquari. Nam quoniam ex hypothesi æquantur magnitudines A,B, ipsæ (æqualitatis definitione præmissa) congruere vel occupare poterunt eundem locum. Occupent igitur locum Z. Item quoniam C æquabilis ponitur ipsi B occupanti locum Z, etiam C; ex æqualitatis definitione poterit locum Z occupare. Ergò utraque A & C poterit locum Z occupare. Unde reciprocè ex æqualitati definitione A & C æquales erunt, Q,E,D. Huic autem definitioni objicit Proclus, quòd innitatur assumptis duobus hujusmodi pronunciatis, Quæ possident eundem locum sunt æqualia; quæ eundem cum altero locum occupant, locum ipsa possident eundem; quorum utrumque propositâ conclusione demonstrandâ longè asserit obscurius & concessu difficilius; Ταῦτα (dicit) ὅτι πολλοῦ ἀσαφέστερα τοῦ προθέντος ἀξιώματος ἐναργές. Et nihilo mitiùs, Οὐκ ἔστι παντελῶς ἐν παραδεκτέον τὸ μεταβαίνειν ἐπὶ τὸν τόπον, ὅς ἐστιν ἀγνωστότερος ἡμῖν ἡμῶν τῶν ἐν τόπῳ ὄντων. Sed in magni Geometræ defensionem breviter respondeo: Primò, liquidò falsum esse, quòd loci seu spatii, quàm æqualitatis consideratio sit obscurior, & ignotior nobis. Cùm ex antehac ostensis, æqualitas non aliter quàm ex ea possit elucidari. Congruentia quoque, vel ejusdem loci possessio supponi potest, ex eo quòd à sensu possibilis discernatur; ast æqualitas immediatè sensum non incurrit, at ex aliqua comparatione supposita resultat; itaque clarior est congruentiæ notio quàm æqualitatis. Et cùm quæ eundem locum occupant æquantur, sit commodissima definitio æqualitatis (uti sufficienter astruxisse videmur) erit illa simplicior ac evidentior aliâ quàvis æqualitatem includente propositione. Sicut definitio trianguli simplicior est & clarior quovis circa triangulum theoremate. Secundò, quod alterum attinet pronunciatum, Quæ eundem cum altero locum occupant, eundem & ipsa locum possident; nego quicquam illo clarius esse posse, nedum ut hoc obscurius sit propositâ conclusione. Est enim ad fundum explorata, propositio prorsus identica, nec specie differens ab hac, Petrus est Petrus; ad hanc enim reducitur ejus sensum nihil immutando, tantùm verò perspicuitatis gratiâ nomina magnitudinibus imponendo, Z locus communis ipsorum B, A, est idem cum Z loco communi ipsarum B, C. Aut ista Categorica, Quæ eundem cum altero locum occupant, locum ipsa possident eundem, redigi possit in hanc ἰσοδύναμον enunciationem hypotheticam, Si A occupet Z locum ipsius B, & C locum Z ipsius B occupet,

tum

tum A & C occupabunt locum eundem Z. Ubi repetitur in consequente, quod in antecedente ponebatur. Quænam igitur, obsecro, poterit hæc esse manifestiùs vera propositio? non illa certè, Quæ eidem æqualia: quum æqualitas quid sit, quid distinctè significet antea præcognosci debet, quàm ejus propositionis veritas queat comprehendi. Sed adhuc tertiò, hoc modo dictum nugax & futile pronunciatum demonstrationi nostræ prætermi, vel in ea adhiberi nego. Nos tantùm ex eo quod magnitudo supponatur occupare locum Z, inferimus ei parem C posse locum istum Z occupare: id quod immediatè consectatur ex æqualitatis præmissa definitione. Nec aliud ab eo principium adhibemus. Attendat quilibet: Nequicquam igitur ficulneis telis Proclus Apollonii demonstrationem impugnat; quòd verò graviter concludit, Πάντα ἀξιώματα ὡς ἀμέσους καὶ αὐτοφανῆ παραδοτέον γνώριμα ἀφ' ἑαυτῶν ὄντα καὶ πιστά. Ὁ γὰρ τοῖς φανερωτάτοις ἀπόδειξιν προσάγων, οὐ βεβαιοῖ τὴν περὶ αὐτῶν ἀλήθειαν, ἀλλ' ἐλαττοῖ τὴν ἐνέργειαν (ἐνάργειαν lege potiùs) ἣν ἔχομεν ἐν τοῖς ἀδιδάκτοις προλήψεσι· (hoc est, *Omnia axiomata, velut immediata, suâque luce clara tradi debent, à seipsis manifesta fidémque promerentia. Nam qui rebus evidentissimis demonstrationem applicat, non ipsarum constabilit veritatem, sed evidentiam imminuit, quam in præconceptis absque doctrina notitiis possidemus.*) Cui sententiæ, quòd ad vulgarem praxin attinet, ipse lubens subscribo, nec opus esse fateor, ut tam facilem assensum impetrantes notitiæ scrupulosiùs examinentur. At quo demonstrationis ingenium, ſcientiæ natura, principiorum differentia, magìs declarentur; quòd extremus rigor etiam axiomatum exigat probationem, quòd ea revera poſſint demonſtrari, quòd definitiones bene conſtitutæ ſint, iiſque demonſtrandis inſerviant, non inutile cenſeo prolatis nonnunquam experimentis edocere. Neque qui proinde vel hiſce de cauſis, vel ingenium exercitandi gratiâ tale quid attentaverit, furoris illum aut faſtûs meritò putem arceſſendum, quorum tamen eapropter Apollonium ipſum, immenſæ ſubtilitatis, & conſummatiſſimæ in Mathematicis eruditionis virum, inſimulare, non dubitat è recentioribus nonnemo ſeverior Ariſtarchus, utinam ipſe vitiis iiſdem non propior. Utcunque tanti viri fretus exemplo non verebor ipſe, duo quæ dicto primo proximè ſuccedunt axiomata protinus è dictis oſtendere. Secundum axioma taliter ſe habet; Si æqualibus æqualia adjiciantur, compoſita (vel tota) ſunt æqualia. Quod ita demonſtro: Sint æquales duæ magnitudines A,B; quæ propterea ex æqualitatis definitione congruere poterunt, & eundem locum occupare. Occupent igitur locum X; adjiciatur ipſi A magnitudo C, cujus locus ſit Y. Ergò compoſitæ A+C locus eſt X+Y. Adjiciatur etiam ipſi B magnitudo D æqualis adjectæ priori C; unde itidem ex æqualitatis definitione D poterit occupare locum X: adeóque B+D occupare poterit locum compoſitum X+Y; eundem nempe quem A+C potuit occupare. Ergo ex æqualitatis definitione B+D æquabitur ipſi A+C. Q.E.D. Simili diſcurſu demonſtretur axioma proxi-

mè

mè subsequens; Si ab æqualibus auferantur æqualia, residua erunt æqualia. Sint enim rursus æquales duæ magnitudines A,B; quarum proinde communis esse poterit locus X. His auferantur æquales C,D quarum etiam communis esto locus Y. Ergò residuus locus X—Y communis esse poterit locus utrique residuæ magnitudini A—C & B—D. Ergò residuæ A—C & B—D æquantur. Quod E.D. Nec dissimili ratione quævis ad abstractam æqualitatem pertinentia theoremata (vel axiomata) dictæ definitionis subsidio demonstrentur, quod ejus ostendit præstantiam atque commoditatem. Sed hanc observationem missam faciens subnoto tertiò, Quòd ex dictis facilè perspiciatur quid sit inæquale, quid majus, quid minus altero. Horum nempe quidvis vix ex respectu ad oppositum æquale, vel immediatiùs ex relatione ad spatium utcunque poterit explicari. Respiciendo spatium ad inæquale dicetur, quod alteri semper & necessariò discongruens erit, hoc est, quod alteri quomodocunque applicatum (seu simul, seu successive, seu per mentalem penetrationem, seu retento partium situ, seu ipsarum ordine perturbato, quolibet ex modis superiùs expositis) nullo pacto coincidet exactè, sed aut excedet ipsum, vel ab eo deficiet. Consequenter ex duabus inæqualis speciebus, id Majus erit, quod alteri sic appositum vel applicatum, excedet ipsum, hoc est, totum alterius spatium occupabit, & aliquid insuper ulterioris spatii; vel cujus pars alteri toti congruet, seu totum alterius spatium replebit; Minus, quod alteri appositum deficiet ab ipso, vel alterius parti coincidet; non nisi partem occupabit spatii, quod ab altero possidetur. Habito autem ad æquale respectu, dicetur inæquale, quod alterum vel alteri æquale continet in se, & aliquid insuper, vel continetur in altero (vel in aliquo quod alteri æquatur) sicut aliquid præterea supersit. Majus nempe, quod continet alterum, aut alteri æquale, nec non aliud præterea: Minus, quod continetur in altero, vel in eo quod æquatur alteri, sicut adhuc supersit aliquid in altero. Vel cum D. Hobbio, non inconcinne definiatur Major magnitudo magnitudine (corpus corpore dicit ille, sed universaliùs efferri præstat) quando pars illius huic toti æqualis est: Minor autem, quando illa tota parti hujus æquatur; quanquam forsan in hisce definitionibus nonnihil desideretur. Nam objici potest, quòd non respondent eis magnitudinibus inæqualibus, quarum una comprehendit alteram. Quod facilè tamen excusetur aut condonetur, quoniam omnis magnitudo sibi perfectissimo modo censeatur æqualis; & æqualitatem eminenter continet identitas, id quod passim in demonstrationibus Geometricis supponitur. Vel corrigantur, & suppleantur definitiones istæ, hoc modo ipsas enunciando: Magnitudo magnitudine major est, quando pars illius huic toti æqualis est, aut eadem; Minor verò, quando illa tota hujus parti æqualis est, aut eadem. Quæ definitiones (aut descriptiones) inæqualis, majoris, minoris, aliis quoque quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus, numeris) analogicè suóque modo quadrabunt, sicut de

æqua-

æqualitate prolixiùs est declaratum. Unicum admonebo de inæqualitate dicta sic accipienda esse, semper ut excessus & defectus, id quod abundat aut subest, penes aliquod homogeneum intelligatur. Nam omnino diversi generis quanta quoad æqualitatem & inæqualitatem nequeunt inter se comparari. Quæ de proportione postmodum acturis distinctiùs explicanda venient. Ego verò nunquámne me tricis istis & leptologiis expediam? Semper in everrendis quisquiliis tempus prodigam? In tam opima messe, tam ubere vindemia, tanta gravissimarum disquisitionum copia, quid sparsas hinc inde spicas lego, neglectos racemos inquiro, dilapsa grana, deciduas uvas colligo? Cùm grandium & arduarum rerum in Mathematicis tam varia, tam jucunda, tam certa suppetat venatio, quare leviculas ego minutulásque quæstiones, ceu muscas, stylo prosequor & confodio? Solennia scilicet devito, seriò nugor, graviter ineptio, minima quæque studiosè conquirens, fastidiosè repetens & inculcans. Adeóne perpetim tot longinqua diverticula, tot devias ambages consectabor, & in tritos regiæ λεωφόρυ calles nunquam remeabo? Num in hoc generalium materiarum atrio subdiali consenescam, in scientiarum vestibulo diversabor æternùm, hærebo semper in limine, Mathematum ostia tantùm pulsabo, nec in ipsorum unquam intimas ædes, in adyta sanctiora penetrabo? Præludam semper, & eminus velitabo, nunquam cominus aggrediar, manum conferam, stato prælio decernam? Quid quòd in illa, quæ nil nisi clarum & evidens, certum & exploratum,

ploratum, pacatum & serenum pollicetur atque jactat scientia, dubitationum nebulas offundo, lites & bella sero, turbas ac tempestates excito; disceptando denique liberiùs, & ad scrutinium pleraque revocando, Mathematum certitudini & evidentiæ (quæ à rixis tantopere & à tumultibus abhorrent) detrahere videor & derogare. Ita mihi soleo, forsan & alii (saltem haud sine causâ vel specie justâ possint) exprobare. Neque tamen nihil est quod criminationibus istis diluendis, excusandóque mihi contrà possim obtendere; cúmque tantum insperatò nunc effluxerit huic Lectioni destinati temporis, ut novam aliam materiam jam non invitus adoriri nequeam, indulgete precor (auditores humanissimi) veniæ pauxillum & patientiæ vestræ nostras has affanias aliquatenus propugnanti, consilisque quod hactenus inierim mei ratiunculas exponenti. Quòd istas rerum & quæstionum minutias attinet repono, non semper esse parva quæ talia videntur; cùm stellæ perquam exiles, & Sol non ita magnus appareat; unde veniat igitur, & quorsum tendat aspectatæ rei species, antequam ejus dijudicetur magnitudo, pernoscendum esse. Tum quæ mole parva sunt, vi nonnunquam eximiâ donari; quæque nihil in se notabile continent, permagnas subinde post se trahere consequentias. Maximarum rerum origines ferè semper parvas existere; parvis è seminibus ingentissimas stirpes excrescere, parvis è fontibus immensos fluvios intumescere, veritatis & erroris præcipuè feracem esse naturam, è paucis veri scintillis vastam undiquaque lu-

cem

cem diffundi, è minima falsitatis radice copiosam errorum segetem pullulare; in scientiis præsertim, è tenuibus filis maxima rerum momenta suspendi, nec sine maximi dispendii periculo minima contemni: sicut unâ rotulâ transpositâ tota perit machina, vel ad usum inepta redditur, venulâque subinde disruptâ vel magnus perimitur elephantus; ita nonnunquam unica, quæ gracilis videri possit & sterilis, notio malè posita, perperam intellecta, vastam confusionem, spissam caliginem, multiplicem errandi causam, ex foecundâ consequentiarum propagine, in quamvis derivet scientiā. Prudenter hoc (ipse quoq; suæ acribologiæ, strictæque quibusdam in minutioribus diligentiæ patrocinans) observavit Aristoteles, verbis animadversione dignissimis, quæ extant in De Cœlo I. 5. Καὶ τὸ μικρὸν (inquit) παραβῆναι τῆς ἀληθείας ἀφισταμένοις γίνεται πόρρω μυριαπλάσιον· οἷον εἴ τις ἐλάχιστον εἶναί τι φαίη μέγεθος· οὗτος γὰρ τοὐλάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστ' ἂν κινήσειε τῶν Μαθηματικῶν· τούτου δ' αἴτιον, ὅτι ἡ ἀρχὴ δυνάμει μεῖζον ἢ μεγέθει· διόπερ τὸ ἐν ἀρχῇ μικρὸν, ἐν τῇ τελευτῇ γίνεται παμμέγεθες· hoc est Latine, *Modica quæpiam aberratio recedentibus à veritate, statim immane quantum adaugetur & multiplicatur. Ut siquis magnitudinem affirmet minimam dari; is certè minimum inducens, maxima subvertet Mathematicorum decreta. Id autem exinde provenit, quod principium omne potestate sua, quàm absoluta magnitudine prævalentius est. Unde quod initio videtur exiguum, progressu tandem permagnum evadit.* Adeó periculosum est Philosophi judicio minimorum curam posthabere, quibus

non

non tantùm sua gratia, sed & inest non rarò sua quædam utilitas non aspernenda; his præsertim in scientiis, quæ ex humilibus, & penè ridiculis initiis, ad incredibilem inopinatò amplitudinem & excelsitatem enituntur. Non itaque mihi graviùs succensendum est, si videar nonnunquam haud præcipui ponderis rebus quàm par est curiosiùs attendere, prolixiùs immorari; quando nempe res suadet, ut putem ex iis bene perceptis etiam gravioris momenti rebus aliquid lucis accedere. Quod autem ad illas, quas non infrequenter moveo controversias, ex iis nemo suspicetur Mathematicarum quicquam scientiarum certitudini decedere; nam circa res illæ versantur à Mathematum fundamentis admodum remotas. Vix extimam Geometriæ cutem stringunt hæ quæstiones, nedum ut ejus intima viscera pertingant. Non ejus principia quatiunt hi arietes, non ratiocinia diruunt, aut omnino solicitant. Dum in ejus confiniis atque suburbiis contentiones oriuntur & pugnæ, clamores & jurgia perstrepunt; intra muros, in ipsa acropoli alta pax, profundum habitat silentium; nihil isthic auditur ἀμφισβήτητον aut ἀντίῤῥητον. Exempla desumamus licet cùm aliunde, tum ex nuperrimis quas agitavimus controversiis. Disceptatum est quæ sit æqualitatis genuina notio, unde commodissimè definiatur; an demonstrari possint, quæ circa illam assumuntur axiomata: at num vera sint ista axiomata, nemo disputat aut dubitat; & proinde nemo collectis eorum subsidio conclusionibus dissentiet aut repugnabit. De principiorum natura & numero,

déque

déque modo ipsorum notitiam consequendi (num innata sint, aut aliunde comparata, num ex inductione generali, vel ex observatione tantum singulari dependeat) disquiritur & disputatur; attamen ut sarta tecta permaneat, extra dubitationis aleam collocetur ipsorum veritas. Ambigitur & controvertitur an Euclides parallelismum commodè definiêrit ex negatione concursûs rectarum infinite protractarum; at tales dari rectas, quæ sic nunquam conveniant, quæque non ineptè nominentur parallelæ, hactenus opinor inficiatus est nemo. An idem rectè principii loco sumpserit duas rectas, quæ cum insistente recta faciant internos ad easdem partes angulos minores duobus rectis, ab ista parte sibimet occursuras, ita negetur à quibusdam, ut tamen ipsius propositionis veritas à nemine vocetur in dubium. Et num Euclides istam proportionalium affectionem bene selegerit, à qua definivit ipsa (cum bona Prosodiæ venia liceat παρωδεῖν) Geometræ *certant, & adhuc sub judice lis est*, salvâ tamen cui nemo sapiens non astipulatur istius propositionis, sub theorematis forma traditæ, veritate. Complura proferre possem exempla, quibus constet quas Mathematici versant lites Mathematum certitudini vel evidentiæ nihil officere, sed ipsam potiùs inconcussam veritatem, intemeratam claritatem arguere, quas nulli disputationum tumultus dimoveant, nullæ discordiarum nubes obtenebrent. Neque mirandum hoc, quum non de præcipuarum rerum veritate, sed de quarundam propositionum ordine; non de scientiæ certitudine, sed de sciendi

ſciendi methodo modóque, de quibuſdam tantùm exterioribus litigetur Philoſophicis potiùs quàm Mathematicis; quæ quidem non parùm interſit ſcire, quæque diſtinctam, plenam, & accuratam ad comprehenſionem rerum in Mathematicis pertractatarum nonnihil conducant, at cum Geometriæ principiis comparata (principiis iſtis, quorum dum incolumis perſiſtit veritas, nullum Matheſi gravius incommodum accedere poterit, nulla Geometrica concluſio ruet) cum his, inquam, collata, parva vel nulla reputari poſſint iſta, de quibus digladiamur; adeo verum eſt & hîc,

—Minimas rerum diſcordia vexat,
Pacem ſumma tenent—

Nec igitur mihi magnopere vitio vertenda eſt pugnacitas iſta, ſeu proclivitas ad diſputandum de rebus ad haſce ſcientias ſpectantibus, cùm nihil id noceat ipſarum firmitati, ſed ad ἀκρίβειαν aliquid conferat. Præſertim cùm ipſe nil agam aliud, eò conatum omnem dirigam, ut diſputando radices evellam, cauſas amoveam diſputandi, rerum quoad potero rationes experientiæ trutinam exponendo, à Metaphyſicis argutiis ad communem ſenſum omnia redigendo; nec pleraſque quæſtiones ipſe cudo, ſed alicubi (quanquam ut plurimùm leviùs diſcuſſas) reperio, ſententiam meam argumentis quibuſdam communitam interponens, veſtróque deciſionem ultimam arbitrio committens. Necnon regulam iſtam Ariſtotelis æquiſſimam, religiosè colens & obſervans, ſuperiùs (ſi bene commemini) allegatam, ſæpiùs repeti dignam: Μᾶλλον ἂν εἴη περὶ τὰ μέλλοντα (*De Cœlo l. 10.*)

λε-

λεχθήσεται προακηκοόσι τὰ τῶν ἀμφισβητούντων λόγων δικαιώματα· τὸ γὰρ ἐρήμην καταδικάζειν δοκεῖν, ἧττον ἂν ἡμῖν ὑπάρχοι. Καὶ γὰρ δεῖ διαιτητάς, ἀλλ' οὐκ ἀντιδίκους εἶναι τοὺς μέλλοντας τ' ἀληθὲς κρίνειν ἱκανῶς. Quæ verba ſic verterim, *Fidem meliùs obtinebunt dicta, ſi partium argumenta priùs audiantur: nam indictâ causâ ſententiam ferre, partémque quamvis inauditam condemnare, minùs addeceat nos (Philoſophos nempe veritatem indagantes) oportet enim non tam adverſarios eſſe quàm arbitros (& mediatores) qui de vero congruè velint judicare.* Quâ ſententiâ nihil juſtius, ſanctius, prudentius. At porrò, quod generalibus hiſce procœmialibus & præluſoriis inſiſtam largiùs & longiùs, excuſari poteſt: primò, quòd in illis ſe meditanti ſuggerant obſervatu non indigna, nec illa paſſim obvia, vulgóque protrita; ſed aut fermè non occurrentia, vel alibi parciùs expoſita) nec non in illis quædam paradoxa, veſtris adeò cum excitandis ingeniis, tum exercitandis judiciis comparata. Tum generatim diſtincta comprehenſio plurimùm conferre videtur ad ſubſequentium captum facilem atque perfectam notitiam. Nam de principiis variis & demonſtrationibus, de magnitudine, numero, ſpatio, motu, tempore, velocitate, pondere; de compoſitione & diviſione, terminatione & figuratione, æqualitate & inæqualitate, ſymmetria & aſymmetria, proportione & proportionalitate, ſimilitudine & diſſimilitudine, determinatione & indeterminatione; reliquíſque talibus à Mathematicis edita tot egregia problemata, tot pulcherrima theoremata legentibus demonſtrata, annon prævios iſtarum re-

rerum conceptus genuinos & adæquatos habere proderit multùm & intererit? Quales ego ſi minùs edocere poſſim, ſaltem occaſionem ingeram vobis propoſita ratiocinia maturiùs examinantibus tales acquirendi. Utcunque non parum refert has ambientibus ſcientias ipſarum communem quaſi genium familiariter habere perſpectum, & per eas omnes diffuſam indolem agnoſcere. Et ſanè mihi ſæpè contingit animadvertere (videor ſaltem animadvertiſſe) doctiſſimos aliquando viros, ex minus attenta generalium iſtorum conſideratione, & quia non niſi pravos aut confuſos (χυδαίους ad minus & ἐπιπολαίους) eorum conceptus animo ſibi præfigurârint, non raro crudè, crebrò falsè loqui ac differere, ſubinde σολοικίζειν in re Mathematica, nonnunqnam & παραλογίζεσθαι. Præterea, non illibenter illorum vobis obſequor, & honeſtæ conſulo voluptati, qui cùm ad abſtruſiora Matheſeôs arcana percipienda minus idonei variant, & adhuc nonnihil imparati, guſtum tamen aliquem cupiunt, & capere poſſunt harum ſuaviſſimarum ſcientiarum; ipſarum non injucundum nec inutile quiddam per tranſennam inſpicere volunt & valeant; quos nolim omnino ſpe ſuâ caſſos, operæque prorſus irritos, (hoc eſt, difficultáte nimia vel apparente rerum obſcuritate turbatos) dimittere; neque diffiteor ad illorum captum tam dictorum plerunque materiam, quàm dicendi ſtylum attemperari; multa propterea dici quæ reticerem aliàs, & quæ dicerem, ideo complura prætermitti. Quin ſanè metuo, ne pleroſque particularium demonſtrationum, quales intima tractat

Ma-

Matheſis, arida ſubtilitas, extremus rigor, & penitiſſimam attentionem deſiderans, argumentandi modus aliquantum offendat ac abſterreat; quo nomine, ne diſſimulem, mihi videri ſolent illæ publicis hoc genus lectionibus haud adeò convenientes, unde libentiùs in his non ita jejunis & auſteris materiis aliquam moram traho; ut nonnulla tamen interſpergere ſtudeam (& deinceps, modò pergam in hoc ſtudio, liberaliùs interſperſurus ſim) ad Matheſin interiorem attinentia. Accedit quòd aliquibus, qui ſcientias iſtas primoribus labiis deguſtare non contenti ſeſe velint illis altiùs immergere, totóſque ſe Mathematico gurgite proluere, quíque Lectionibus hiſce noſtris dignabuntur intereſſe, temporis aliquid concedendum exiſtimem, dum hæc perſequimur ἐξωτερικὰ, Geometriæ ſe elementis penitiùs imbuendo, quibus ut non ſegniter incumbant, vehementer ab iis efflagito; alias impoſſibile credo fuerit, ex abſtruſioribus iſtis, imò nec è clarioribus ferè cujuſvis Mathematicæ diſciplinæ documentis quippiam audientibus intelligendum propinare; verùm ſphingis inſtar ænigmatici, vel σκοτεινοῦ cujuſdam Heracliti, meros griphos edere, denſis involvi tenebris videbor. Quòd ſi pleroſque ſcirem Geometricis elementis mediocriter initiatos, poſſem ſperò cum aliquo fructu, nec nulla cum veſtra voluptate, ſeu ſingularum diſciplinarum ima fundamenta detegere, regulaſque præcipuas demonſtrationibus ſuis munitas exhibere; vel quod ſcitu perjucundum eſt, & viros præſertim Academicos decet (qualibus antiquæ ſapientiæ ſtudium, & à fontibus ſuis diſciplinas imbibere præ cæteris incumbit) veterum Mathematicorum in theoremats suis inveniendis demonstrandísque, adhibitam methodum explorare; vel qui præcipuus est scopus, & summus apex universæ Matheseôs, generales quasdam methodos faciliori omnifariorum problematum resolutioni, theorematum inventioni, horum & illorum constructioni demonstrationique, conducentes exhibere demonstratas, & illustratas exemplis; quales multas utilissimas & elegantissimas methodos veteribus ignotas, saltem immemoratas, recentiorum invenit aut protulit industria. (Quales sunt, obiter insinuo, præter novum à Vieta & Cartesio præcipuè excultum Analysis modum, cuicunque ferè quæstioni solubili parem; methodus indivisibilium Cavallerii, jam antehac sed nunquam satìs laudata; methodus circa maxima & minima, utilis & ipsa quamplurimis problematis promptissime solvendis; variæ regulæ generales tangentium curvas investigandi; modi curvas lineas producendi, ipsarúmque proprietates investigandi ex motuum dependentia, necnon è motuum compositione; modi magnitudinum ordine certo crescentium aut decrescentium series comparandi, necnon inde planorum & solidorum innumerorum mensuras determinandi; regulæ generales pro centris gravitatum expeditè reperiendis, in quolibet genere magnitudinum; necnon è deprehensis gravitatum centris ipsarum magnitudinum dimensiones facillimè deducendi; cum aliis minoris notæ plusculis. Quorum aliquid si nunc aggrederer tradere, subvereor ut plurimi mentem

meam

meam haud penitus aſſequantur, ex hoc loco fugacia verba proferentis; ſaltem (ut vobiſcum familiariter agam) ſi liceat aliorum ingenium æſtimare de meo; qui me profiteor ita tardum, & minùs ἀγχίνουν, ut multò faciliùs capere poſſim oculis ſubjecta fidelibus, quàm per infidas aurium cavernulas inſinuata. Denique, quò garriendi finem aliquando faciam, quod me ſpectat ipſum, multum mihi facilius eſſet, id quod nullo negotio præſtare poſſem, particulares quaſdam è Mathematum locuplete penu materias depromere, vel ſingulares nonnullas, qualium nemini non ad manum ingens proſtat copia, concluſiones demonſtrare, quàm in hoc Philoſophico-Mathematicarum diſquiſitionum ſalo fluctuare. Non igitur hæc generalia proſequens otio quicquam meo, ſed utilitati potiùs veſtræ lito; non deſiderio meo gratificor, at veſtræ plerorunque, quantùm conjecturâ aſſequi poſſum, voluntati morem gero, facturus id ſemper, & eò mentis aciem intenturus, ut ingenuis veſtris votis, mandatis rectiùs dixero, pro mea tenuiſſima virili parte ſatisfaciam & obtemperem. Ita cauſam dixi, quanquam non citatus, apologiam texui, licèt à nemine quod ſciam accuſatus aut laceſſitus; at quî meipſum violatæ fidei purgabo, promiſeſque non præſtiti, quo me velut obſtrinxeram hac in Lectione de proportione diſcepraturum? Ita fit, multa ſpondemus nobis, promittimus aliis quæ vix implendo ſumus: fidem obligamus faciliùs quàm liberamus. Certè materiam iſtam cogitatione pererranti, tot ſe difficultates objectant evolvendæ, tot quæſtiones eventilandæ, tot expendendæ diversæ sententiæ, vix ut in hoc exeuntis termini deliquio tantum ingredi pelagus sustineam, quod præ temporis angustiâ emoliri & enavigare nequeam. Aliquid tamen forsan eò præludens attingam, & sternam utcunque viam subtilissimæ materiæ enodandæ. Cúmque nihil in hac dixerim ad rem, conabor in duabus quæ supersunt Lectionibus hunc defectum compensare.

L E C T. VI.

E Magnitudinum attributis postremas consideravimus æqualitatem & inæqualitatem, iísque quoad in nobis situm erat, genuinas notiones asseruimus. Illas ordine nunc excipere possit ratio vel proportio, quippe quæ ferè nihil est aliud, quàm ex quantorum comparatione resultans æqualitatis aut inæqualitatis determinatio quædam. Cùm enim ab æqualitate, quæ simplex est & ut ita dicam unimoda, recedendo possint inter se comparabilia quanta, generaliter loquendo, modos inæqualitatis infinitos suscipere, singularis alicujus ex his alicujus modi rebus comparatis appropriati determinatio, numeris vel aliis idoneis terminis expressa, dici solet ipsorum proportio; quâ nempe significatur an sint æqualia, vel quo certo peculiari pacto sint inæqualia. Hoc tamen præcipuum magnitudinum symptoma, quo distinctiùs & clariùs explicatum

tum demus, expedire videtur, cùm ut, propter ſymmetriam & aſymmetriam proportionum doctrinæ neceſſariò intervenientes, nobilem illam magnitudinum affectionem Menſurabilitatem priùs exponamus, tum ut de quantorum ad comparationem aptitudine & ineptitudine (hoc eſt, de ipſorum homogeneitate & heterogeneitate) diſpiciamus aliquantillum; quibus bene perſpectis, facilius erit de proportionis natura judicium. Menſurabilitatem quod attinet, illa vel hoc nomine curioſiùs meretur expendi, quòd ex ea nomen imponatur illi, quæ circa magnitudines occupatur ſcientiæ, reliquorum Mathematum matri ac dominæ; quæ ſcilicet (etſi Platoni viſum eſt perquâ ridiculâ nomenclaturâ) Geometria conſuevit appellari (ex uſu primævo nimirum adſcito vocabulo, quia primitus ad tellurem ſolummodo dimetiendam, ac diſterminandos poſſeſſionum limites adhibebatur) meliúſque quidem Plato latiori ſubſtituto nomine μετρικὴν eam appellat, aliíque poſt eum παντομετρίας titulo donant, eò quòd omnigenas magnitudines dimetiendi rationem edocet: quanquam nec hi ſatìs illi proprium aut adæquatum nomen attribuerint, cùm hæc ſcientia non iſtam ſolam magnitudinis affectionem, at nonnullas etiam contempletur alias, quibus ad menſuram pertinens nihil intermiſcetur. Nec enim tantummodo quantæ ſunt magnitudines diſpicit illa, ſed quales etiam (hoc eſt, quâ partium diſpoſitione, quâ figurâ præditæ ſunt, num rectæ vel curvæ, planæ vel gibbæ, directæ vel inflexæ, rotundæ vel angulatæ ſunt) neque non ubi ſitæ, quam de-

determinatam positionem obtinent, investigat atq; demonstrat. Magnitudinum (inquam) species & similitudines æque speculatur, ac ipsarum mensuras & proportiones. Quinimo quoad ipsam praxin, nedum magnitudines inter se metiendo comparare docet, sed & ipsas constituere, describere, transformare; ipsarum centra, diametros, tangentes reperire, nullo quantitatis respectu considerato. Unde liquet obiter, quòd Geometria perperam definitur à plerisque, *Ars vel scientia metiendi*; vel, *Scientia magnitudinis quatenus mensurabilis*: quas à censore suo traditas alicubi carpens, & corrigere præ se ferens D. Hobbius, nihilo meliorem apponit ipse, sed elaboratiùs ineptam, & planiùs eodem vitio laborantem; *Geometria* (inquit) *est scientia determinandi magnitudinem rei cujuslibet non mensuratæ, per comparationem ejus cum alia, vel aliis magnitudinibus mensuratis.* At vero sciscitor ab his nostræ scientiæ finitoribus: cùm rectam lineam vel angulum rectilineum bisecat Geometer; cùm è dato saltem puncto perpendicularem excitat aut demittit rectam, cùm per datum punctum datæ rectæ parallelam ducit, aut cùm rectam ducit quæ datam curvam contingat; cùm super data recta linea triangulum æquilaterum aut quadratum constituit; cùm per tria data puncta circulum describit, aut triangulo dato circulum circumscribit; cùm datæ circumferentiæ centrum, vel datæ conicæ sectionis focum investigat; cùm talia complura peragit, & solam magnitudinum positionem spectantia problemata resolvit, annon officio suo probe defungatur Geometra: quas tamen illic ma-

magnitudines, quoad ipſarum quantitatem comparat inter ſe, quam ullius menſuræ rationem habet? Nullam prorſus, at ſolum linearum ſitum determinat, & punctorum quorundam poſitionem inquirit. Ut prætercam quòd motus æquè penſitat Geometra, quibus figuræ generantur, &c. Inadæquatæ ſunt igitur & incongruæ definitiones iſtæ, falſis in præjudiciis fundatæ. Cognomentum ille, quiſquis erat, magìs appoſitum aſſignavit huic ſcientiæ, qui μεγεθικὴν appellandum cenſuit; ſcientiam nempe circa magnitudines verſantem, quæ ipſarum omnigenas affectiones ſpeculatur; hoc eſt, inquirit, invenit, demonſtrat. Quæ proinde non malè deſcribitur à Proclo; Γνωστικὴ μεγεθῶν, καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων· ἔτι τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς, καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτὰ, καὶ τῶν παντοίων θέσεων καὶ κινήσεων. Ita quidem; tametſi minimè diffitendum ſit in hoc verti magnam hujus ſcientiæ partem, præcipuum ejus uſum in hoc conſiſtere, magnitudinum ut quantitates ex comparatione dignoſcantur & æſtimentur; hoc eſt, ut ipſæ quomodocunque menſurentur. Quare non ſegnem impendemus operam huic magnitudinis affectioni dilucidandæ. Igitur primò vocabuli menſuræ, & ex conſequentiâ τοῦ menſurare menſurabile, ſimiliúmque παρωνύμων ambiguitates & πολυσημίας evolvere diligentiùs annitemur, tum quoniam id ex ſe jucundum ſit ac utile pernoſcere, tum nè tam ancipitis vocabuli ſignificatione variâ diſtracti deluſique (quod nonnullis accidit) in errorem prolabamur; tum ut hujus ſymptomatis quæ ſit præcipua notio diſtinctiùs agnoſcamus.

noſcamus. Et quidem ſi menſuræ popularem uſum ſpectemus, vix aliquod occurrat vocabulum ad plures ſignificatus detortum, quod Metaphoricos ſenſus obtineat crebriùs, aut aptiùs admittat. Ut inſtemus, viro bono recta ratio virtutíſque præſcriptum, menſura vitæ dicitur & morum, Epicureo homini τὸ ἡδὺ, avaro lucellum, ambitioſo potentia civilis & gloria; quoniam ab his hominibus ad iſtas res pleraque conſilia, ſtudia, facta diriguntur & adaptantur; conſuetudo vel opinio populi dicitur menſura decori, quoad externas rerum circumſtantias; uſus communis menſura ſeu norma ſermonis & ſignificatûs vocabulorum. Apud Ariſtote-
Top.VI.2. lem alicubi lex deſcribitur μέτρον τῶ δικαίων, quia per quandam cum illa congruentiam quid ſit juſtum declaratur ac deciditur. Apud
Met.X.1. eundem ſcientia vocatur μέτρον τῶ πραγμάτων, quia per illam juſti rerum limites determinantur, quomodo ſe res habent, quouſque tendunt indicatur. Taceo quòd menſura μετωνυμικῶς ponatur pro ipſo judicio, ſeu facultate quâ rerum quantitas diſcernitur ac æſtimatur, ut à Cicerone, cùm ait, *Quicquid ſub aurium menſuram aliquam cadit, numerus vocatur:* hoc eſt, id cujus auris quantitatem dijudicare poteſt. Prætereo quoque, quòd perſæpe menſura pro definita rei cujuſvis quantitate legitur uſurpata. Ut in iſtis apud
Sat. XIV. Juvenalem aureis carminibus;

——menſura tamen quæ
Sufficiat censûs, ſiquis me conſulat edam:
In quantum ſitis atque fames & frigora poſcunt;
Quantum Epicure tibi parvis ſuffecit in hortis.

Quan-

Quantum Socratici ceperunt ante penates.
Nunquam aliud natura, aliud sapientia dicit.
Mensura quæ sensûs; hoc est, quæ præcisa rei familiaris quantitas. ——alibi apud eundem;

——sed quæ præclara & prospera tanti, Sat. X.
Ut rebus lætis par sit mensura malorum?

Hoc est, ut incommodorum quantitas commodorum modum non excedat? Addo Lucanum;

——fuit hæc mensura timoris, Luc. III. v. 100.
Velle putant quodcunque potest ——

Hoc est, tantum extimescebant Romani, quantùm videbant Cæsarem posse; quia omnia in eos poterat, omnia sibi ab eo metuebant. Non secus accipienda Hesiodi sententia compensare præcipientis beneficia eâdem mensurâ; hoc est, eâdem quantitate, quâ acceperis, vel etiam cumulatione, αὐτῷ τῷ μέτρῳ καὶ λώϊον. In sacris etiam literis aliquoties μέτρον hunc habet sensum; ut, Ὡς ἑκάστῳ ἐμέρισεν ὁ Θεὸς μέτρον πίστεως· Rom. 12. 2.
hoc est, secundum fidei quam dispensavit Deus quantitatem certam & definitam. Ast infinitum sit omnes usu tritas hujus vocis acceptiones tralatitias & improprias percensere. Meretur tamen etiam ex istis una vel altera notabilior utcunque leviter attingi, Mathematicæ mensuræ notioni propiùs accedens, eíque nonnihil deserviens illustrandæ. Talis est imprimis illa, quâ mensura passim designat justam, debitam, naturæ conformem, aut rationi consentaneam cujusque rei quantitatem, quam si vel excedendo transgrediatur, aut deficiendo non attingat, habetur pro deformi, vitiosa, monstrosa;

adeóque cujus reſpectu virtus omnis in materia morali, in naturali pulchritudo, in artificiali decus & utilitas æſtimantur. In re morali dico cenſetur omnis virtus (τὸ δέον) cùm ex affectuum moderamine quodam, tum ex actuum certa mediocritate, hoc eſt, ex ipſorum juſta debitáque quantitate, per prudentiæ, ſeu rectæ rationis practicæ, dictamen indigitata. Paritérque vitium in hujus quantitatis exceſſu vel defectu conſiſtere videtur, nec aliud eſſe quàm affectuum ac operum ἀμετρία, hoc eſt, exorbitantia quædam, vel abnormitas à ſtata morum menſura. Quod in hiſce virtutis & vitii formam conſtituit Ariſtoteles, ignorat nemo: diſertiſſiméque (ſecus quàm aliqui cenſent) adſentitur Plato hiſce verbis; Τί δὲ τὸ τὴν τοῦ μετρίου φύσιν ὑπερβάλλον ἢ ὑπερβαλλόμενον ὑπ' αὐτῆς, ἐν λόγοις εἴτε καὶ ἐν ἔργοις, ἆρ' οὐκ ἂν λέξομεν ὡς ὄντως γιγνόμενον, ἐν ᾧ καὶ διαφέρουσι μάλιστα ἡμῶν οἵ τε κακοὶ καὶ ἀγαθοί· hoc eſt, *Quod menſuræ debitæ vel mediocritatis* (τοῦ μετρίου) *naturam excedit, vel ab ea deficit, ſeu in verbis ſeu in factis, nonne dicemus id revera bonorum hominum à malis diſcrimen conſtituere?* Verba ſunt τοῦ Ξένου differentis in dialogo, qui πολιτικὸς inſcribitur; cui Socrates adponit ſuum φαίνεται. Quo referendum illud Heſiodi, Μέτρον πᾶσιν ἄριστον, ὑπερβασίη δ' ἀλεγεινή. Menſura in omnibus optima, hoc eſt omni propoſito certus terminus præfigitur, quem non eſt abſque vitio vel culpa tranſilire. Quod & in iſtis teritur;

Eſt modus in rebus, ſunt certi deníque fines,
Quos ultra citráque nequit conſiſtere rectum.

Polit. p. 531.

Quic-

Quicquid cum hac menſura coincidit, aut ei ſatis accedit μέτριον & ἔμμετρον dicitur, & in laude ponitur; quicquid diſcedit ac abludit ab ea, vocatur ἄμετρον & vitio verti ſolet. Unde paſſim qui ſuos affectus, ambitionem præſertim & animoſitatem, temperant & bene componunt, appellantur μέτριοι, nec ulla viri politici potior laus habetur. Sed in Ethicam nihil cogitans prolabor; abſcedo, tantummodo ſubjiciam de voluptate cum ſcientia & ratione comparatis dictum Platonis; Οἶμαι γὰρ ἡδονῆς μὲν καὶ περιχαρείας οὐδὲν τῶν ὄντων πεφυκὸς ἀμετρότερον εὑρεῖν ἄν τινα, νοῦ δὲ καὶ τῆς ἐπιστήμης ἐμμετρότερον οὐδ' ἂν ἕν ποτε· *Voluptate nihil difficiliùs ad juſtam menſuram redigatur, ſcientiâ & intellectu nihil faciliùs intra debitos fines contineri poſſit.* In naturalibus etiam forma ſeu pulchritudo penes hujuſmodi menſuram, hoc eſt, juſtam quandam magnitudinem, taxatur. Ita qui certam quandam ſtaturam proceritate corporis aut craſſitie giganteâ ſuperat, aut incongruè gracilis vel curtus eſt; cujus aliquæ partes protuberant, aut ſubſidunt immodice; cui quidvis numero vel mole deeſt, aut redundat indebitè, dicitur ἄμετρον, & deforme vel monſtroſum exiſtimatur. In artificialibus etiam quadantenus è tali menſura dijudicatur τὸ πρέπον & τὸ συμφέρον. Nec enim aliò ferè collineant artes unæquæque, quàm ut juſtam quandam rebus circa quas occupantur quantitatem conferant, deſtinatis quibuſdam uſibus aut apparentiis accommodatam. Unde Plato cunctas artes τῆς μετρητικῆς portiones conſtituit, & ſuos ad τὸ μέτριον conatus dirigere docet, quod aſſequentes opera ſua bona

Phileb. p. 405.

In Politico.

bona atque pulchra efficiunt: Τὸ μέτρειον σώζουσαι πάντα ἀγαθὰ, καὶ καλὰ ἀπεργάζονται. Iterum, Μετρήσεως μὲν γὰρ δή τινα τρόπον πάνθ' ὁπόσα ἔντεχνα μετείληφεν. Ahuc expressius, Δηλονότι διαιροῖμεν ἂν τὴν μετρητικὴν ταύτῃ δίχα τέμνοντες· ἓν μὲν τιθέντες αὐτῆς μόριον συμπάσας τέχνας, ὁπόσαι τὸν ἀριθμὸν, καὶ μήκη, καὶ βάθη, καὶ πλάτη, καὶ ταχυτῆτας πρὸς τοὐναντίον μετροῦσι, τὸ δ' ἕτερον, ὁπόσαι πρὸς τὸ μέτριον, καὶ τὸ πρέπον, καὶ τὸν καιρὸν, καὶ πάνθ' ὁπόσα εἰς τὸ μέσον ἀπωκίσθη ἀπὸ τῶν ἐσχάτων· hoc est, *Ars dimetiendi (vel mensoria) bisecanda est hoc pacto; ut una pars ejus complectatur omnes artes, quæ numeros, longitudines, profunditates, latitudines, & velocitates contendunt inter se; alia verò reliquas, quæ respiciunt id quod moderatum, decens, opportunum est, & quæcunq; devitatis extremis ad medium nituntur.* Sed de hac acceptione populari modũ excessimus. Ei tamen affinem alteram perstringemus; juxta quam mensura designat aliquod statum, communiter agnitum & probatum, sensibus expositum, aut intellectu comprehensum exemplar, ad quod reliquorum in eo genere quantitates aut valores examinari debent aut solent. Ejusmodi mensura duplex est, naturalis & arbitraria. Arbitraria, quales illæ, quas authoritas publica proponit (vasa, pondera, regulæ) ex conformitate vel congruentia, cum quibus reliquæ mensuræ jus suum, nomen, & rationem mensuræ mutuantur; nec aliter mensuræ sunt, nisi quatenus cum istis prototypis consentiunt. Mensura verò cujusque rei naturalis est id quod primum & perfectissimum est in illo genere; quomodo divina natura bonitatis & sapientiæ

tiæ menſura eſt, quia Deus primariò bonus & ſapiens eſt, αὐτάγαθος καὶ αὐτόσοφος· & eatenus aliæ res bonitatis ac ſapientiæ participes ſunt, quatenus cum divina bonitate conveniunt, & ei aſſimulantur. Talem unaquæque res, ex mente Platonis, menſuram habet, idæam ſui æternam ac indefectibilem; exemplar nempe quoddam exactiſſimum, è ſimilitudine vel correſpondentia cum quo vera, pulchra, perfecta cenſetur; & à quo ſi vel hilum diſcordet, eouſque vitioſa eſt, turpis, & imperfecta. Certè ſub finem Philebi res inter primas & ſempiternas τὸ μέτρον primo loco digerit; Πάντῃ (inquit) φήσεις, ὦ Πρώταρχε, ὑπό τε ἀγγέλων πέμπων, καὶ παροῦσι φράζων, ὡς ἡδονὴ κτῆμα οὐκ ἔστι πρῶτον, οὐδ' ἂν δεύτερον ἀλλὰ πρῶτον μέν πῃ περὶ μέτρον, καὶ τὸ μέτριον, καὶ τὸ καίριον, καὶ πάντα ὁπόσα τοιαῦτα χρὴ νομίζειν τὴν ἀΐδιον εἰρῆσθαι φύσιν· hoc eſt, *Prædicabis omnibus, ô Protarche, cùm aliò nuncios dimittens, tum præſentibus eloquens ipſe, quòd voluptas ſit res nec in primo nec in ſecundo cenſu ponenda, ſed primum dici circa menſuram, & menſuræ congruum & opportunum, & quæcunque talia ſempiternam ſortita naturam putare decet.* Ubi per μέτρον intelligere videtur τὸ αὐτόμετρον, primævam cujuſque rei idæam: verùm in his contero tempus. A popularibus iſtis accedamus ad menſuræ ſignificatus à Mathematicis frequentatos; qui ſanè multiplices quoque ſunt, & à nobis gradatim exponentur, à latioribus ad ſtrictiores procedendo. Convenit autem aliquatenus his omnibus, quam tradit Ariſtoteles, menſuræ definitio ſeu deſcriptio; Μέτρον ἐστὶν ᾧ τὸ ποσὸν γινώσκεται, *Met. X. I.*

Men-

Mensura est quâ rei quantitas dignoscetur. At cùm diversimodè secundùm varios gradus & respectus apprehendatur hæc quantitatis cognitio, mensuræ consequenter nomen aut latiùs extenditur, aut arctiùs restringitur.
1. Et quidem primò, mensura sæpè ponitur pro re quapiam, quæ alterius quantitatem utcunque monstret & notificet; nec aliud denotat, quàm argumentum certum, seu signum, indubitatum κριτήριον aut τεκμήριον alicujus determinatæ quantitatis. Sic arcus circuli ex angulari puncto ut centro descripti, anguliquе rectilinei cruribus interceptus. Et in sphæricis, arcus circuli angulari puncto ceu polo descripti, angulique sphærici lateribus interjectus, est mensura dicti utriusvis anguli rectilinei vel sphærici: quia si per organicam dimensionem, vel aliter quomodocunque dignoscatur illius arcûs quantitas (hoc est, quæ pars sit, aut quam rationem habeat ad integram circuli circumferentiam, vel ad ejus quadrantem) inde consequenter agnoscetur quantus sit dictus angulus, hoc est, quæ pars sit, aut quam habeat proportionem ad quatuor angulos rectos, vel ad unum rectum. Nec minùs propriè vicissim angulus, in centro vel polo circuli verticem habens, dici poterit arcûs circularis mensura, quatenus iste per hypothesin aut discursum agnitam habens ad quatuor rectos proportionem arcûs, intercepti rationem indicabit ad totam circumferentiam. (Nam crudè non nemo perperámque dicit arcum interceptum esse propriam anguli quantitatem; cùm non magis arcus anguli, quàm angulus ipsius arcûs quantitas sit; imò

imò non magis hic quàm ille menſura ſit, vel ex parte rei, vel ex uſu communi; cùm ipſorum quantitates proportionaliter incedentes coordinentur, connectantur neceſſariò, ſe reciproce prodant & indigitent. Eádemque ratione ſectores circulares angulorum, & permutatim illorum hi menſuræ nominentur. Porro, hoc modo nedum magnitudo ſpatii, ſpatium motûs ac temporis; at viciſſim quoque motus & tempus ſpatii, ſpatium magnitudinis menſuræ dicuntur; quatenus à ſpatio prius agnito magnitudinis ipſum occupantis quantitas innoteſcat; à motu vel tempore prædeterminatis ſpatii percurſi quantitas indicetur. Ut ſi ſciatur quantum temporis effluxerit ab ortu Solis, indè colligamus quantam interea paralleli ſui peripheriam Sol pervaſerit. Quam in menſuræ ratione ſpatii, temporis, & motûs permutationem exertè notavit Ariſtoteles; Ὀυ μόνον (inquit) τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει τὸν χρόνον, διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ἀπ' ἀλλήλων· μετροῦμεν τὸ μέγεθος τῇ κινήσει, καὶ τὴν κίνησιν τῷ μεγέθει· πολλὴν γὰρ φαμὲν τὴν ὁδὸν, ἂν ᾖ ἡ πορεία πολλή, καὶ ταύτην πολλὴν, ἂν ἡ ὁδὸς ᾖ πολλή, καὶ τὸν χρόνον ἂν ἡ κίνησις, καὶ τὴν κίνησιν ἂν ὁ χρόνος. Ad hæc, ut exempla congeramus, teli vel lapidis jactus juxta modum hunc, licèt imperfectiùs, menſura ſit ſpatii; quatenus ſi notæ ſint, per antecedens experimentum, projicientis vires, inde ſciatur quantum inter ejus ſtationem & miſſilis caſum protendatur intervalli. Imò cùm unaquæque res, agens quodvis naturale, definitam habeat activitatis ſuæ ſphæram, poteſt ali-

Phyſ.IV. 18.

quatenus

quatenus tale quidvis mensuræ defungi officio. Cùm videlicet ignis ad certum intervallum calefaciendi vim exerat, ultrà nil efficere sentiatur; flòsculus, aut odoratum quodvis, aliquousque motivos olfactûs vapores dispergat, objectum visibile conspiciatur è certa distantia, ad longinquiorem disspareat; vocis sonus percipiatur ab auribus intra præfinitum terminum collocatis, ultra quem insensibilis est; si prius ab experientia singulari constiterit, quantus sit hujus cujusque sphæræ (sphæræ dico activitatis) radius, inde de istis interstitiis feratur aliquale judicium; hoc est, illarum virium quantitates exploratæ fient spatiorum quodammodo mensuræ. Ita saltem vulgatum est, ex æstimato spatio quod designato quolibet tempore conficere possit εὔζωνος vir, locorum distantias ab historicis computari; neque non quod ex tempore velificationis ab æquabili vento peractæ maris tractus, & portuum interstitia dijudicent nautæ. Ex perpendiculi verò suspensi recursibus ἰσοχρόνοις dinumeratis perquam accuratè tempus metiuntur Astronomi. Umbra quoque (quantumvis obscura, tenuis, & ferè nulla res) multis nominibus hujusmodi mensuræ rationem subit: ejus motus in horologiis sciotericis temporis quantitatem enunciat; ejus in pariete susceptæ magnitudo Solis apparentem magnitudinem arguit; illa demum in Eclipsibus dimetiendæ veræ Solis magnitudini deservit. Ita nulla fermè res non hujesmodi mensuræ vicem obeat, aut eam æmuletur; & (quod præcipuè notandum) res genere diversissimæ sibi mutuò

possint

possint esse mensuræ, juxta *latitudinem* hujus acceptionis. Aliquanto strictiùs autem secundò, mensura dicitur id, cujus ex quantitate necessariò dependet notitia quantitatis, quâ præditum est mensurabile; adeò ut hujus quantitas non aliter, quàm ex illa præcognita possit innotescere. Qualis quidem respectu præcedentis jamjam expositæ dici possit mensura naturalis, & à priori; quia non adeò desumitur arbitrariè, sed necessariò requiritur, & ab ipsa natura suggeritur, ad dimetiendæ rei quantitatem investigandam. Ita magnitudo est mensura spatii, quia spatii quantitas aliter comprehendi nequit, quàm magnitudinem aliquam realem ei insistentem dimetiendo, vel utcunque sufficienter æstimando. Spatium verò talis est mensura motûs & temporis. Spatium (inquam) ab aliquo notabili cum certa velocitate æquabiliter toto mobili decursum est mensura temporis (mediatè saltem, motûs interventu) nec enim aliter dignosci potest, quantum effluxerit temporis, nisi talis spatii quantitatem æstimando. Arcus e.g. circuli æquinoctialis duos inter meridianos per ortivum Solis punctum in horizonte, pérque Solis centrum transeuntes interceptus est mensura naturalis & genuina temporis, ab ortu Solis ad datum instans elapsi. Et arcus in Solis eccentrico, (juxta Ptolemæi doctrinam) est talis mensura temporis annui, quod insumptum est, dum Sol istum arcum pertransivit. Similiter velocitatis, quâ fertur uniformiter aliquid mobile, mensura est spatium designato tempore peractum; hinc enim certam conjecturam faciemus,

2.

quantum ſpatii permeabit id mobile quolibet alio determinato tempore; nec alio modo quanta ſit iſta velocitas poterimus expiſcari. Sed adhuc ſtrictiori modo, tertio,
3. menſura dicitur id, quod propter eximiam quandam determinationem, aut ſimplicitatem, aut notabilitatem, aut facillimam comprehenſionem, aptiſſimè poterit adhiberi ad rerum modos determinandos, aut quantitates inter ſe comparandas. Ita cùm inter duo loca vel puncta deſignata protendantur infinitæ curvæ vel indirectæ lineares orbitæ, penes quas ipſarum diſtantiæ cenſeantur, recta tamen linea propter unitatem & ſimplicitatem ſuam intervallum illud metiri dicitur. Et cùm à dato puncto ad datam poſitione rectam lineam innumeræ duci poſſint inæquales rectæ lineæ, tamen illius ab ea diſtantiam menſurare dicitur recta perpendicularis, quia ſimplex eſt & unica. Propter eandem cauſam diſtantia rectæ in circulo ſubtenſæ, vel circuli minoris in ſphæra à centro circuli vel ſphæræ, penes perpendicularem æſtimatur à centro ductæ ad ſubtenſam, vel ad dicti circuli minoris planum demiſſæ. Paríque ratione diſtantia rectarum parallelarum à ſe invicem menſuratur à perpendiculari recta qualibet iis intercepta, diſtantia verò peripheriarum concentricarum à radii cujuſvis e communi centro trajecti intercepta portione taxatur: quia ſemper hæc unius eſt quantitatis. Sic & apud Apollonium in quinto Conicorum, recta linea vertici & puncto in diametro ſignato interjecta nuncupatur ab ipſo (ſaltem ab Arabe qui libros illos interpolavit) menſura; quia nulla ſuc-

currit

currit aliorum ramorum quantitati determinandæ simplicior aut major. Non absimili fere ratione, quoniam inter superficies maximè simplex & uniformis est superficies plana; inter planas verò figuras præcipuè comprehensibilis est illa, quæ rectis lineis includitur; inter rectilineas autem figuras simplex, unimoda, facilliméque notabilis est quadratum; ideo quadratum dicitur & haberi solet mensura figurarum superficialium, & quoad fieri potest ad hoc illorum quantitates referuntur. Eadem in solidis est cubi ratio; ad quem propter ejus manifestam determinationem, & bene conceptibilem naturæ proprietatem, aliorum solidorum quantitates exiguntur. In angulis vero rectilineis, mensuræ sic acceptæ rationem subit angulus rectus, quia reliquis aliquo pacto notabilior, & peculiari nomine gaudens, & simpliciorem lineæ insistentis ad illam, cui insistit, respectum includere videtur. Ita denique lineas omnes, curvas atque compositas, ad simplicissimam omnium rectam lineam revocare conantur Geometræ, earúmque quantitates ex aliqua, quam ad hanc obtinent, relatione determinare. In aliis quantis eadem observatur ratio. Nam quia cœli (vel ex hypothesi jam receptiore telluris) diurna revolutio motuum maximè constans, uniformis, & notabilis est; ideo reliquorum in motuum, temporum, & velocitatum mensuram adsumitur ac adhibetur. Et ad auri (gravissimíque corporis, eatenúsque præsertim determinati, vel ad olei præ cæteris levissimi) quantitatem aliorum ponderum quantitates rediguntur à Staticæ magistris.

Et in alio quovis genere quanti, commoditatis gratia, tale quid adsciscitur in mensuram, simplicitate suâ vel mobilitate prælustre.
4. Sed ad nostram rem propius quartò, mensura dici solet aliquid ut nobis notius, aut quomodocunque determinatius in medium profertur, assumitur, exponitur hac intentione, ut alia quanta considerationi subjecta cum eo, vel eo mediante inter se secundùm quantitatem comparentur; scilicet ut investigetur quoties hoc illa continet, vel in illis continetur, aut utcunque proportionem illa sortiuntur ad hoc, & ex consequentia quomodo referantur ad se mutuò, ac ita quantitates ipsorum priùs ignotæ & indeterminatæ dignoscantur ac determinentur aliquatenus. Ita pes, palmus, ulna, cubitus, orgya; cyathus, sextarium, modius; reliquæque quarum apud vulgus nomina certam longitudinem aut capacitatem innuunt, magnitudines sunt ideo mensuræ, quoniam nota communiter, & ex pacto definita supponitur ipsorum quantitas; unde per comparationem cum istis (ex congruentia vel idoneo discursu) de aliarum ignotarum & indeterminatarum magnitudinum definita quantitate judicetur. Sic & cùm chordarum circuli peripheriis subtensarum quantitas requiritur, aut regularium inscriptarum circulo figurarum latera quanta sint inveniendum proponitur, assumi solet in mensuram circuli radius, ut linearum omnium in circulo notissima, penitùsque determinata, ínque partes aliquot æquales, tot quot ex usu visum fuerit, divisus supponitur, tum quot ex istis particulis singulæ chordæ, vel singulo cuique la-

lateri cedere debent, adhibito Geometricorum theorematum subsidio, vel quacunque legitimâ ratione exquiritur & computatur. Vel utcunque per aptam ratiocinationem inquiritur æquatio aliqua, quæ dictarum subtensarum aut laterum ad circuli radium relatio notificari vel exprimi possit. Vel denique, si fieri potest, ipsa chorda, seu latus illud quæsitum, actu ducitur & delineatur, ut æstimetur ex comparatione sensibili, vel per organicam commensurationem dignoscatur ejus ad radium proportio. Vel saltem aliæ duæ lineæ exhibentur, quarum proportio sit eadem cum proportione dictæ lineæ ad radium; quarúmque proinde quovis modo comperta ratio quæsitam rationem indicabit. Etenim variis hisce modis quantitatum dimensio peragatur, & propositæ quantitatis ad nobis cognitam, aut natura determinatam ratio exprimi, & æstimari possit. Per numeros scilicet, aut per æquationem aliquam, aut per æstimationem sensibilem, ex ipsis iisdem terminis immediatè, vel ex aliis analogis ad sensum expositis; quorum etiam dimensio, idoneis organis explorata, numericam proportionem exhibebit. Sed hæc aliàs pleniùs & distinctiùs explicanda sunt. Ut ad exempla redeam: Simili modo, pro dictarum reliquarum figurarum areis, quantæ sint, inveniendis, adhibetur quadratum radii vel diametri, ceu mensura quacum conferantur. Neque non similiter in corporum regularium lateribus, superficiebus, soliditatibus æstimandis & comparandis inter se, sphæræ cui includi vel inscribi possunt, radius accipitur; & cùm eo, vel cum ejus quadrato, vel cum ejus cubo contenduntur ista, quo reperiatur, & in censum reponatur eorum mutua proportio. Sic & communiter ab Astronomis astrorum veras inter se distantias, & veras magnitudines indagantibus adhibetur terræ semidiameter, ut communis mensura quædam, ad quam illarum quantitates exigantur. Ut cúm Luna tot semidiametris terrestribus à telluris centro distare, diameter ejus tot ejusdem semidiametri partes aliquotas exæquare perhibetur. Paríque modo de reliquis. Neque quod notandum obiter prosequentibus, refert omnino in hac acceptione mensuræ, utrum magnitudo mensuræ vicem sustinens sit major an minor illâ, quæ mensuratur: ut in suprapositis exemplis radius minor est chordâ graduum 120, vel latere trianguli regularis circulo inscripti, sed major chordâ graduum 36, vel latere decagoni, itidem circulo inscripti. Et semidiameter terræ major est semidiametro Lunæ, sed Lunæ distantiâ longè minor. Item assumpto passu Geometrico, per eam æquè comparando dignoscatur, quanta sit longitudo pedalem æquans, ac alia major stadio vel miliari par. Ut neque respicitur hîc utrum collata quantaliter inter se, vel ad expositam afficiantur mensuram, ut ipsorum proportio numeris exprimi possit; hoc enim modo magnitudines omnes (licèt ipsarum quarundam proportio sit in numeris ineffabilis) sunt inter se commensurabiles; hoc est, ipsarum una designari poterit, ad quam aliarum quantitates referantur, atque per eam mensurentur. Ut radii ad chordam graduum 90, vel latus qua-

quadrati circulo inſcripti, ratio nullis numeris explicari poteſt præciſe, tamen hujus quantitas cum illius quantitate comparari poteſt, & eatenus illæ commenſurantur. Hæc, inquam, adnoto propter illam quæ ſubſequitur, Mathematicis peculiarem, & in uſu frequentiſſimo poſitam acceptionem menſuræ, juxta quam quinto, menſura ſtrictiùs accipitur pro magnitudine, quæ aliam 5.
aliquoties ſumpta conſtituit & componit; vel quæ ab alia aliquoties ſublata nihil linquit reſidui, ſed eam penitus exhaurit. Per aliquoties intelligendum ſemel, aut aliquot vicibus, ſecundùm unitatem, aut aliquem determinatum numerum; unde conſtat quòd menſura ſic accepta nunquam excedet rem menſuratam, at vel æquatur ei, vel ejus pars eſt, quæ dici ſolet aliquota, hoc eſt, quæ aliquoties, juxta numerum quemvis, repetita totum componit; vel qualium aliquot totum conſtituunt & adæquant; vel quæ vicibus aliquot abſtracta nihil e toto relinquit. Ita pes eſt menſura paſsûs Geometrici, paſſus iſte ſtadii, ſtadius milliaris & leucæ, quia pes quinquies acceptus paſſum Geometricum efficit, quinquies eum ſubductus perimit. Paſſus verò centies vigeſies quinquies acceptus ſtadium, ſtadius octies ſumptus complet miliare. Sic & minutus horam, hora diem, dies menſem civilem, menſis civilis annum civilem metiuntur. At non hoc modo dies menſem, aut annum naturalem; nec menſis annum naturalem menſurant. Quia dies 365 deficiunt ab anno naturali, 366 eum exuperant: paritérque de reliquis. Hoc autem modo ſemper in elementis intelligun-

tur mensuræ, eique *παρωνύμων* vocabula; (licèt isthic, quod non nemini mirum videtur, nulla prostet mensuræ definitio) ut cùm initio V. elementi definitur pars (aliquota) Μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον· *Magnitudo magnitudinis, minor majoris, pars est, quum majorem ipsa demetiatur.* Hoc est, cùm aliquoties accepta totum sic exhaurit, ut plane nihil superſit. Id enim ibi designat καταμετρεῖν, demensurare, vel penitus emetiri. Ut & simplex μετρεῖν idem denotat passim; & clarissimè initio decimi, ubi definiuntur magnitudines commensurabiles, (σύμμετρα μεγέθη) τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα· hoc est, Quarum utramq; eadem quædam magnitudo aliquoties sumpta constituat, aliquoties adempta tollat. Semper, inquam, per μέτρησιν innuitur perfecta divisio, vel subtractio talis, simplex an multiplex cui nullum supersit residuum. Ita quoque vocabulum hoc usurpare videtur Philosophus, ista proferens verba; Παρὰ γὰρ τὸ μετρεῖν οὐδὲν ἄλλο παρεμφαίνεται τὸ μετρούμενον, ἀλλ' ἢ πλείω μέτρα, τὸ ὅλον· hoc est. *Præter mensuram aliquoties acceptam nihil insuper videtur esse totum quod mensuretur.* Unam adhuc strictissimam acceptiunculam suppeditat Aristoteles in Metaphysicis, juxta quam mensura designat id quod in unoquoque genere primum, minimum, ad sensum indivisibile (vel in usu minimè divisum) aliorum dignoscendæ quantitati consuevit adhiberi. Quomodo minimum in numeris unitas, in ponderibus granum, in temporibus minutum, in nummis τὸ λεπτόν, in sonorum intervallis diesis, in

Phys. IV. 20.

Met. X. 1.

lineis

lineis pollex (apud Græcos longitudo pedalis, adtestante Philosopho, ἐν ταῖς γραμμαῖς (inquit) χρῶνται ὡς ἀτόμῳ τῇ ποδιαίᾳ) mensuræ sunt καθ' ἐξοχήν. Verùm hæc persequi non vacat. Ut neque jam attexere licet, quænam è dictis præcipua sit, & maximè propria notio vel acceptio, juxta quam intelligi debet quod præ manibus habemus symptoma magnitudinis, Mensurabilitas. Ut & alia complura silentio jam comprimenda sunt. Tempus enim monet ut receptui canam, & vereor ne quis præ cæteris ingeniosus obvio me diasyrmo feriat, & de mensura sermocinantem afferat ad sermonis mensuram parùm attendisse.

LECT. VII.

POstremâ Lectione diversas usu tritas vocabuli mensuræ acceptiones haud indiligenter exponere conati sumus. Eque dictis facilè liqueat, quot accipiantur modis vocabula paronyma. Mensurare, Mensurabile, &c. quot enim modis mensura, totidem illa sumantur respectivè. Restat ut juxta quem præcipuè modum, quod præ manibus est symptoma magnitudinis, Mensurabilitas, intelligi debet, & quæ sit ejus primaria notio despiciamus. Ad hoc ex iis duo modi Mathematicis familiares, à nobis potissimùm considerandi sunt, cautéque distinguendi, ad quos omnes alii referantur. Primus latior est, at maximè proprius, à quo nempe Geometria,

metria, sicut ostendemus, nomen desumpsit, & quem ex officio suo præcipuè respicit; juxta quem mensurare significat alicujus magnitudinis quantitatem notificare vel determinare, respectu magnitudinis alterius homogeneæ, nobis utcunque magis notæ, vel utcunque determinatæ, declarando scilicet, exhibendo, repræsentando numeris, aut alio modo comprehensibili proportionem ejus cum hoc; significando nempe quota pars illa sit hujus, vel quomodo multiplex, quóve pacto sit inæqualis, quanto excedat, aut quousque deficiat, vel adsimili quopiam modo. E.g. propositâ quâvis longitudine, nobis hactenus ignotâ, si quovis modo (seu operationem organicam, seu per mentale ratiocinium, legitimis hypothesibus, aut prædemonstratis conclusionibus innixum) si quovis, inquam, rationi consentaneo pacto reperiamus quæ sit ejus ad expositam quamvis, à nobis bene comprehensam (puta pedalem) longitudinem in quantitate relatio, quoties illam continet, aut continetur in ea, quanto semel aut aliquoties accepta superat illam, vel ab illa deficiat; nam habet se ad illam, sicut numerus quispiam ad alium; vel sicut aliqua recta linea, quam exhibere possum ad aliam, quam etiam possum efficere; vel ut radix alicujus æquationis, quæ analyticæ subdatur ἐξηϛήζει, & per artem quomodocunque resolvi possit; tunc eam mensurare dicamur longitudinem. Qualis rectarum longitudinum dimensio nuncupatur μηκομετρία vel εὐθυμετρία (hybridis autem subinde vocabulis, Longimetria & Altimetria). Similiter propositâ quâvis figurâ planâ; cùm quæ

quæ sit ejus ad exhibitam aliam figuram planam, pedem videlicet quadratum, proportio colligimus, & numeris aut alio modo repræsentamus, illam habemur dimensi; cujusmodi planorum dimensio dicetur ἐμπεδομετρία, vulgò barbaréque Planimetria. Pari ratione, cùm solidum aliquod cum pede cubico, vel cum tanto talíque cylindro, vel cum alio probe cognito quovis corpore conferentes, ejus ad hanc rationem expiscamur, στερεομετρεῖν dicimur. Item; ejusmodi comparatio laterum & angulorum alicujus trianguli, per quam è notis in eo quibusdam lateribus aut angulis aliorum angulorum ad rectum angulum ratio, vel aliorum laterum ad unum designatum, & aliunde notum proportio comperiatur, appellatur Trigonometria. Cúmque peripheriam inter & diametrum circuli (nec non inter aream circularem, & diametri quadratum) quænam intercidat proportio, quoad possumus exactè conamur definire, tunc operam damus τῇ κυκλομετρίᾳ. Quibus ab exemplis, in id consultò prolatis, illud constat quod dixi, mensurationis hanc maximè genuinam & primariam esse notionem, cùm circa illam præcipuæ Matheseōs partes potissimùm occupentur, & ab ea consequenter denominationem accipiant. Unde penes hanc censeri debet affectio magnitudinis, disquisitioni nostræ subjecta, quam mensurabilitatem appellamus (Græcè μέτριον· magis ambiguo, & cum actu potentiam confundente vocabulo) quæ nihil denotat aliud, quàm magnitudinem cum aliis ejusdem generis magnitudinibus comparari posse, sic ut ejus, alioquin ignotæ

notæ & indeterminatæ, quantitas ex relatione, quam ad illas aliquam ſortitur, utcunque dignoſci poſſit & determinari. Hoc enim omnicunque magnitudini connatum & eſſentialiter connexum eſt, quatenus omnis magnitudo cuivis alteri magnitudini homogeneæ (linea lineæ, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido) neceſſariò vel æqualis eſt, vel inæqualis aliquo certo modo, qui modus ex parte rei noſcibilis eſt & determinabilis ex ſe, tametſi perſæpe difficulter acquiratur ejus notitia, nec interdum ullo modo queat à nobis accuratè comprehendi. Nec ſoli magnitudini convenit hæc affectio, ſed (quale quid in aliis affectionibus ſigillatim oſtendimus) etiam aliis quibuſcunque quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus) ἀναλόγως & ſuo modo; quatenus ipſorum mutua proportio determinari, exhiberi, exprimi poteſt, adeóque quantitas unius ex relatione quam habet ad notam alterius quantitatem indicari. Tempus e.g. metimur, quum oſtendimus illud tot diebus, horis, minutis æquari, vel ad notum aliud tempus ſic habere, ſicut iſta recta linea, vel iſta circuli peripheria ad hanc, quarum ſcilicet inter ſe proportionem cognoſcimus: velocitatem, quando commonſtramus in tempore talem habente proportionem ad aliquod aliunde notum tempus, ſpatium reſpectu ſpatii cogniti tantum peragi; hoc eſt, ipſam ad notam velocitatem habere proportionem cognitam. Pondus denique menſuramus, cùm perſpectum habemus, quantam compertæ gravitatis magnitudinem elevare poterit aut ſuſtinere, hoc eſt, quam rationem habet

ad

ad aliud cognitum pondus. Pariterque reliquis in quantis sese res habet. Sed ut hujus symptomatis adhuc dilucidiùs innotescat, de talis mensuræ proprietatibus quibusdam, & de magnitudines dimetiendi modo nonnulla subjungemus. Prima mensuræ, qualem jam innuimus, proprietas est, ut sit 1.
homogenea rei mensuratæ; hoc est, ut cum ea secundùm congruentiam & discongruentiam, æqualitatem & inæqualitatem, excessum & defectum, additionem atque subductionem, juxta rationem denique seu proportionem comparari possit; linea nempe lineæ, superficies superficiei, corpus solidum corporis, tempus temporis, velocitas velocitatis, pondus ponderis mensura potest esse; sed linea superficiei, superficies corporis, magnitudo temporis, tempus ponderis mensuræ nequeunt esse, secundùm hanc accuratiorem mensuræ acceptionem. Laxior illa quidem & ἀκυρότερος antehac satis declarata mensuræ notio, juxta quam quicquid alterius arguit, indicat, aut quomodocunque notificat quantitatem eam mensurare dicitur, etiam heterogeneis quantis competere potest, istísque non raro tribuitur & applicatur à Mathematicis: eóque modo linea temporis, superficies velocitatis, corpus ponderis; reciprocéque tempus lineæ, velocitas superficiei, pondus corporis mensuræ nuncupari possunt ac solent. Attamen solicitá circumspectione distinguendæ sunt acceptiones istæ, nè cum D. Hobbio (distinctionem istam, seu ambiguitatem hujusce vocabuli, non observante, vel minus expendente) multiplices in labyrinthos difficultatum ac errorum improvisò ruamus.

ruamus. Quales sunt, quòd linea ad tempus (paríque ratione superficies ad velocitatem, solida magnitudo ad pondus) proportionem habent: (quia nempe linea tempus, superficies velocitatem, magnitudo solida pondus aliquo modo metiuntur). Quòd eædem sunt omnium rerum quantitates, vel quòd omnium quantitates mutuò sunt homogeneæ; quoniam omnes iisdem mensuris, lineis scilicet & numeris subjiciuntur. Denique quòd unum quantum cujusvis alterius quantitas sit, linea videlicet temporis, velocitatis, ponderis, imò superficiei & corporis quantitas sit, quia mensuræ vice fungens illorum determinat quantitatem. Quæ absurditatum portenta non ex alio, quam ex hujus non animadversæ distinctionis fonte promanâsse videntur. Quod ut breviter instando commonstremus; cùm is sibi præstravisset hanc mensuræ definitionem, mensura est magnitudo magnitudinis, una alterius, quando ipsa, vel illius multipla, alteri applicata cum ea coincidit; subnotâsset autem præterea, lineam motu transactam appellari subinde mensuram temporis, hinc ei proclive fuit colligere, lineam aliquando tempori coincidere, adeóque tempori æquari, vel inæquale esse, & proinde lineam ac tempus mutuam inter se proportionem sortiri, non secus quàm linea proportione refertur ad lineam. At verò, si in animum induxisset cogitare, cùm linea dicitur mensura temporis, non strictè sumi mensuram pro quanto, quocum tempus secundùm quantitatem comparatur (nedum non pro parte juxta propriam ipsius definitionem aliquota) sed laxiùs,

pro

pro qualicunque indicio vel argumento quantitatis tempori competentis: ad hoc, inquam, si contigisset illi mentem suam tantillùm intendisse, non ita temerè commiscuisset, & confudisset inter se res toto cœlo dissitas diversásque. Sed hæc alibi penitiùs discutienda sunt, cùm de quantis homogeneis & heterogeneis ex composito disseremus. Interim unicum adjiciam huc faciens, animadversione dignum, ideò tantùm heterogenea quanta nonnunquam dici altera alterorum mensuras, quoniam homogenearum mensurarum notitiam utcunque quendam subministrant. E.g. propositus arcus æquatoris, horizontem inter & solem in æquatore positum interceptus, mensura temporis diurni præterlapsi propterea dicitur, quoniam aliunde cognitus ipse per suam proportionem ad totam æquatoris circumferentiam temporis illius rationem coarguit ad tempus integrum diurnum: hoc est, inservit ejus ad propriam homogeneam mensuram comparationi. Sic & linea decursa velocitatis mensura dicitur eatenus, quatenus innuit quæ sit hujus ad alteram præconceptam velocitatem ratio. Nec aliter se res habet in aliis impropriè dictis mensuris: unde satìs liquidò patet id quòd insinuatum est modò, quòdque sit operæ pretium considerare, reliquas expositas mensuræ acceptiones hanc respicere, vel ab hac desumi. Porro secundò, 2.
altera mensuræ, qualem jam persequimur, proprietas est, & ad illius rationem requiritur, ut quantitatem ipsa determinatam habeat, hoc est unicam, eandem certam, sibi constantem & invariatam quantitatem; ut

sit,

fit. quod in Metaphyficis innuit Ariftoteles, *Met. X. 1.* ἓν καὶ ἀδιαίρετον, nullam differentiam aut latitudinem admittat, aft quantitatem habeat immotam, & velut in puncto conftitutam. Alioquin per comparationem cum ipfa menfuratæ rei jufta quantitas æftimari non poterit; at non minus adhuc incerta, indeterminata, ignota permanebit. Unde quicquid anceps fignificatu, vel naturâ varium eft, eatenus menfuræ refpuit officium. E.g. pes, pro humani pedis modulo; palmus aut cubitus (itidem humanus) miliare fumptum ἀπολύτως (non adponendo Germanicum, Italicum, Anglicum) & quælibet talia non funt rigidè loquendo menfuræ; quoniam inter Herculis clavigeri, telumque geftantis arundineum Pygmæi palmum, cubitum, pedem immane quantum verfatur difcriminis. Nec proinde qui propofitam longitudinem bipedalem effe dicit, aliquid eo certum indigitat, nifi quem unum præfinitum pedem intelligat, commonftret explicatiùs. Et qui duas urbes unius miliaris intervallo disjunctas pronunciat, illius diftantiæ quantitatem non exprimit, nifi quodnam è prædictis miliare refpicit, adfignificet difertiùs, & indeterminati vocabuli fenfum fatìs reftringat. Item fi quis longitudinem quandam exæquari dicat diftantiæ folis à centro terræ, nihil dicit, nifi præterea doceat, quam velit diftantiam, apogæam, an perigæam, an mediæ longitudinis, an aliam quamvis in folaris orbitæ circumferentia fixam ac determinatam. Denique, fi quis rectam lineam parem affirmarit lineæ rectæ à centro cujufdam ellipfis ad ejus ambitum prætenfæ, neu-

neutiquam ex eo poterit iſtius rectæ dimenſio cenſeri, quia millies mille tales à centro ellipſis deduci poterunt, longitudine diverſæ, & ſibi impares rectæ lineæ, quámque præ reliquis ſignet ille, niſi ſubdat aliquam ulteriorem determinationem, conſtare poterit nemini. Porro notandum, quòd non unius ſit modi, ſed aliquam differentiam admittat hæc determinatio quantitatis, adeóque conſequens illam menſuræ ratio nonnihil erit diverſa. Nam alia determinatio quodammodo naturalis eſt & univerſalis, alia ſingularis & prorſus arbitraria. Naturaliter & genericè determinatur id quod certam naturam habet, & ſemper eodem modo reſpicit ea quanta cum quibus comparatur, aut quibus dimetiendis inſervit; unde habet, quòd immediatè ſit aptum natum eorum proportionibus generaliter determinandis: & conſequenter etiam ſingularibus ipſorum quantitatibus notificandis, modò ſingulariter ipſum notum ſupponatur. Quo pacto circuli radius & latus quadrati naturaliter determinata ſunt: radius, inquam, circuli taliter determinatur, quoniam ſimilium arcuum ſubtenſæ, & ſimiliter utcunque poſitæ quælibet in circulo rectæ lineæ proportionem ad radium eandem habent, & ex relatione ad radium ita quantitate determinantur, ut eo ſingulariter determinato, ſemper earum quantitas unà ſingulariter determinatur. Ut in quocunque circulo, majore nil refert an minore, latus hexagoni radio æquatur, ſinus rectus graduum 30 radii dimidius eſt, chorda graduum 90 radii potentià dupla eſt: unde ſi determinetur & cognoſcatur ipſa ſingularis radii quantitas (hoc eſt, ſi ſensûs æſtimationi ſubdatur, vel numero denominetur alicujus ſingularis cognitæ menſuræ) innoteſcat inde ſtatim dictarum linearum quantitas. Similiter è cognito latere quadrati, exceſſus diametri ſupra latus, & aliarum definite poſitarum in quadrato linearum quantitas facilè certóque dignoſcatur. Hujuſmodi verò determinationes adhibet, & circa tales dimenſiones occupatur Geometria theoretica; quæ nempe non tam immediatè ſingularium magnitudinum quantitates, quàm univerſalium rationes inveſtigat; è quibus tamen ſingularium dimenſiones fluunt, vel in iis fundantur. Arbitrariè verò determinantur illæ menſuræ quæ ſingularibus dimetiendis quantis applicantur; quæ nempe cùm nullam ad id ex ſe peculiarem aptitudinem habeant, ex infinitis ſui generis aliis ad libitum ſeliguntur, ex pacto vel inſtituto deputantur huic officio metiendi. Qualem obtinent determinationem paſſus, ſtadius, arundo, ſchœnus, aliæque quæ verſantur in uſu communi, quáſque Geometra practicus adſumit in peculiarium magnitudinum dimenſione. Verùm non eſt quod his ſatis à ſe perſpicuis diutiùs immore-

3. mur. Tertia menſuræ proprietas eſt, ut ejus quantitas ſit aliquatenus præcognita, cùm enim (juxta definitionem Ariſtotelicam, *μέτρον ἐστιν ᾧ τὸ ποσὸν γινώσκεται*) menſuræ ratio præſertim exigat, ut quantitatem ignotam declaret, priùs ipſa cognoſcatur oportet: ſiquidem ab ignoto nihil innoteſcat, ab obſcuro nihil illuſtretur. Advertimus autem quòd & quantitatum notitia ſit diverſimoda: de qui-

bus

bus primò, una radicalis est, absoluta, prima 1.
notitia, quà res sensibus exposita quanta sit ab ipsis immediatè discernitur & æstimatur, illam velut intuitu quodam attingendo, neque præterea cum aliis quantis comparando. Hoc modo notum habetur in Geometria quicquid efficere possumus vel exhibere, ignotum verò cujus constructionem ignoramus. Ut si proponatur circulus aliquis, Geometris notum est latus inscripti regularis trigoni, tetragoni, pentagoni, hexagoni, decagoni, pentecaidecagoni, omniumque progredientium duplo deinceps ab his numero (vel etiam aliquatenus triplo, quia per Geometriam planam communem bisecari, pérque sectiones conicas utcunque trisecari potest arcus quilibet, vel angulus designatus) sed complurium aliarum regularium figurarum latera sunt ignotiora, vixque nullâ scientificâ ratione possunt exhiberi. Quinetiam hoc modo singularis expositi circuli peripheria nota dici potest, quia quanta sit utcunque sensû potest apprehendi, tametsi cum recta linea justè comparari nequit, & quæ sit ejus ad hanc exacta proportio forte nullatenus comprehendi potest à nobis. Veruntamen sicut recta linea conspectui repræsentata speciem imprimit sui, certúmque de se judicium procreat, à quo nota dicitur: ita circuli circumferentia suæ quantitatis idæam insculpit phantasiæ, juxta quam cognita reputetur. Neque forsan magis recta linea sui generis lineis, quàm peripheria circularis peripheriis circularibus, & aliis quæ ad eas referri possunt lineis dimetiendis appropriettur & congruat. Cæterùm hoc mo-

do notæ ſunt, nec alio modo, primitivæ quæque menſuræ, ad quas ejuſdem generis menſuræ referuntur; quarum quidem quantitatem vix aliter explicare licet, quàm ad illas digitum intendendo, déque ipſarum quantitate percunctanti reſpondendo, tanta eſt quantam intueris, aut ſenſu percipis. Unde conſectatur, ut hoc modo quidpiam dignoſcatur, & prototypæ menſuræ rationem ſubeat, imprimis exigi, ut à ſenſu quopiam æſtimabilem quantitatem habeat; & proinde cùm ut ſubjiciatur ſenſui, tum ut mediocrem habeat quantitatem, intra debitos limites ita conſiſtentem, ut ſenſus in ejus æſtimatione non facilè decipiatur, hoc eſt, ut ſi conſiderabile quid apponatur ei, vel ab ipſa ſubtrahatur, non id ſenſum effugere queat. Quapropter optimè notat Ariſtoteles, id quod obiter moneri par eſt, cæteris paribus minimas ſenſibiles magnitudines

Met. X. 1. menſuræ vicem obire commodiſſimè: Ὅπου μὲν οὖν δοκεῖ μὴ εἶναι ἀφελεῖν ἢ προσθεῖναι, τοῦτο ἀκριβὲς τὸ μέτρον· *Ubi nihil adjici poteſt aut adimi, quin à ſenſu facilè percipiatur & agnoſcatur diſcrimen, id accuratiſſima fuerit menſura.* Minora verò quanta præſertim talia ſunt, quoniam majora faciliùs aucta vel imminuta ſensûs judicium latent; Ἀπὸ γὰρ σταδίου καὶ ταλάντου, καὶ ἀεὶ τοῦ μείζονος λάθοι ἂν προστεθέν τι καὶ ἀφαιρεθὲν μᾶλλον ἢ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος· *A ſtadio vel talento, & univerſim à quolibet majore magìs lateat ablatum aliquod aut adjectum, quàm a pede, vel ab obolo, vel à quovis minore deductum, ſeu ei appoſitum.* Unde concludit Philoſophus, Ἀφ' οὗ πρώτου κατὰ τὴν αἴσθησιν μὴ ἐνδέχεται, τοῦτο πάντες ποιοῦνται μέτρον,

τρον, καὶ τότ᾽ οἴονται εἰδέναι τὸ ποσὸν, ὅταν εἰ-
δῶσι διὰ τούτου τοῦ μέτρου· *(Id à quo primum
quoad ſensûs æſtimium nihil abſtrahi poteſt, men-
ſuram ſtatuunt omnes, & tunc ſe quantum aliquod
arbitrantur cognoſcere, quum per hujuſmodi men-
ſuram cognoſcunt).* Saltem hoc nomine ſunt
ad hoc ineptæ, & ab originalis hujuſmodi
menſuræ, ratione penitus excluduntur omnes
grandiuſculæ magnitudines; eò quòd illorum
differentiæ nequeunt omnino, vel non ſatis
exquiſitè dijudicari à ſenſu. Nam, ut Optici
notant, diſtantiæ pedes ducenos ſuperantes à
viſu, ſenſu longiſſimè pertingente, diſcerni
nequeunt, & ſibi videntur omnes æquari (Lu-
na nempe, Sol, ſtellæ fixæ, quamvis revera
tot milliarum myriadibus aliæ aliis longin-
quiùs à nobis ſemotæ, videntur nihilominus
omnes intervallo pari diſtare, ac velut uni-
us cujuſdā in oculo centrum habentis ſphæræ
perimetro verſari) quin & earum quæ ad
dictum intervallum propiùs accedunt, longi-
tudinum differentiæ vix æſtimantur à ſenſu.
Unde etiam evenit, quòd (propter radiorum
nempe viſualium longiùs procurrentium ve-
ras differentias non animadverſas) objecta
planities, campeſtris vel æquorea, videatur
aſſurgere, vel in gibbam ſuperficiem intu-
meſcere. Sed de hujuſmodi notitia ſenſibili
nimis. Cognoſcitur ſecundò, quantitas ex 2.
collatione cum menſura quapiam per ſenſum
expoſito modo dijudicata; quando nempe
ſcitur quam in quantitate relationem habet
ad iſtam, quoties eam continet, aut in ea
continetur, quanto ſuperat eam, vel exce-
ditur ab ea. Hoc modo nota quanta men-
ſuræ poſſunt eſſe dicique, ſed mediatæ vel

secundariæ. Magnitudines, inquam, neutiquam sensibus objectæ, nec ab iis ullatenus æstimabiles mensuræ rationem bene sustentent, si per dimensionem organicam, vel per legitimum qualecunque ratiocinium reperta fuerit ipsarum ad alias sensu jam æstimatas proportio. Semidiameter e. g. telluris, etsi nemini visa, sensûsque nostri transcendens æstimium, poterit tamen esse mensura magnitudinum ac distantiarum, quas habent cœlestia corpora, modò per idoneas hypotheses, & probum discursum innotuerit, quot ipsa stadios, passus, aut pedes complectitur ac exæquat. Vel quòd ita se habet ad aliquam ex istis prænotis mensuris primitivis, ut talis exposita recta linea ad aliam rectam lineam exhibitam.
3. Verùm adhuc tertiò, peculiari ratione notum dicitur id, quod numeris exprimitur, ejus relationem denotantibus ad expositum aliquod priùs æstimatum quantum (sive familiari nobis usu præcipue cognitum, seu gratis & ex arbitrio sumptum) si nempe concipiatur illud præcognitum quantum vel indivisum, hoc est, unitate designatum, vel in æquales aliquot partes distributum, juxtáque divisionem istam certo quodam numero denominatum, tunc autem reperiatur quis numerus istarum partium æqualium, vel quot ex istis unitatibus, vel quæ pars istius unitatis conveniat proposito quanto, dicetur inde perfectè notum illud quantum, hoc est, in datæ mensuræ partibus notum. Quinimo sæpe quantum, alioqui sensibus expositum, & per ipsos æstimabile (vel cujus ad expositam ratio per terminos sensibiles æstimetur) nihilominus ignotum cen-

censetur, donec ejus ad statam aliquam mensuram proportio in numeros redigatur, per numeros explicetur. E.g. quamvis in aliis quo circulo ductus fuerit, & oculis objectus sinus rectus graduum 30, tamen aliquatenus ignorata reputabitur ejus quantitas, donec animum advertendo, ratiocinandóque colligamus eum adæquari dimidio radii; tunc autem penitissimè comperta censebitur ejus quantitas. Id quod (ignota scilicet haberi, quorum ad solennem & usitatam aliquam mensuram ignoratur in numeris ratio) causis è compluribus oriri videtur. Tum primò, quia judicium sensûs magis lubricum & incertum, minúsque perspicax & exquisitum est, quàm in numerorum certâ proportione fundata quantitatis æstimatio; tum secundò, quia faciliùs & commodiùs, per numerorum symbola repræsentantur animo, quàm reipsâ sensibus exhibentur quantitates, aut quantitatum rationes: tum tertiò, quia sensibiles objecti species magis evanida, fluxa, mutabilis est, quàm numerus, qui facillimè retinetur in memoria, chartæque commendatur; ubicunque nullis ferè mutationibus, accrementis, decrementis obnoxius asservatur. Tum denique quartò, quia numerorum interventu rerum omnium quantitates ad paucas, familiares admodum, ab omnibus, & ex condicto communiter usurpatas mensuras rediguntur. Quas (& si quæ sunt consimiles) hujusce rei causas (quamobrem scilicet id præcipuè notum & penitus exploratum habetur, cujus ad aliquid antea cognitum ratio numeris exprimitur) etsi consideratu non indignas, quoniam ad alia prope-

ro, jam transilio. Singulares hactenus attigi quantorum notitias; at quartò, notum
4. quodammodo dicitur omne quantum (sicut & determinatum ut supra diximus) cujus generalem naturam utcunque comprehendimus, etsi singularem ejus quantitatem ignoramus, aut non consideramus. Ita scimus quomodo se habet in circulo radius, in quadrato latus, etsi quæ sit hujus aut illius radii circularis, vel lateris quadratici singularis quantitas nescimus aut negligimus. Quomodo præsertim nota sunt illa quanta, quæ aliorum generationi præsternuntur & inserviunt, adeóque generationem consequens omne determinant, indéque naturâ suggerente mensuræ sibi munus afferunt. Ut si circulus procreatus supponatur ex revolutione radii, quadratum ex ductu lateris in se, vel ejusce motu recto parallelo; quoniam omnium reliquarum in circulo vel quadrato linearum quantitas atque positio dependent ex radii laterísque quantitate, ac motu tali, proinde primario nota, nec immeritò, censentur ista; súntque primitivæ generales mensuræ, ex comparatione cum quibus, quæ ipsorum respectu similem perpetuò determinatum situm obtinent, generali consequenter modo dignoscantur; hoc est, horum ad illa constans proportio sciatur, adeóque quantitas etiam horum singularis non lateat, ex hypothesi quòd istorum singularis quantitas innotescat. Siquidem compertà duorum quantorum proportione, ex uno eorum cognito protinus alterum cognoscetur. De mensuræ proprietatibus hactenus; jam quod in proposita methodo succedit, de mensurandi modis paucula subdemus.

mus. Varii ſunt ii, ſed nos præcipuos aliquos cogitanti ſemet objicientes perſtringemus. Comparantur inter ſe homogenea quanta utcunq; ignota & determinata, cum notis & determinatis; hoc eſt, menſurantur primò, per 1.
merum ratiocinium ipſorum proportiones indagando. Sic ex radio dato colligit Geometra quantum ſit latus inſcripti regularis trigoni, demonſtrando ſcilicet è ſuis principiis, quod ſit potentià triplum radii. Sic & ex aliunde prænotis apparente Lunæ diametro, Lunæque diſtantia ab oculo quanta ſit ejus vera diameter, declarat ope canonis ſinuum, Geometricis è ratiociniis conſtructi. Hic modus omnino theoreticus eſt, utpote quo generalis quantitatum dimenſio perficitur, quam ſola ratio poteſt attingere: proinde modus hic perfectus & ad rigorem exactus eſt. Secundò, per ſolam organicam 2.
dimenſionem, quæ deſervit ignotorum quantitatibus ad certæ menſuræ numeros adducendis; iſtis præſertim quæ nequeunt à ſenſu, commodè ſaltem & ſatìs accuratè æſtimari. Ita arcus & angulos per quadrantes circulares in gradus & minuta diſtributas, longitudines autem per regulas & ſcalas in æquales particulas utcunque diviſas metimur. Hic modus circa ſola quanta ſingularia verſatur, & purè mechanicus eſt, nec ideo plerunque præciſus & accuratus. Ter- 3.
tius autem modus per diſcurſûs, & organicæ dimenſionis, mentis & manûs, conjunctas peragitur operas. Qui quidem practicus eſt, & verſatur circa τὰ καθ' ἕκαστον, ſic tamen ut generalium theorematum opem adſciſcat; unde pede claudicat uno, ſed altero re-

rectus & certus incedit, heroicúmque refert genus quatenus Geometriæ regulas adhibet, divinitatem quandam habens, æternæ & indefectibilis veritatis particeps, quatenus autem mechanicam ἀῦλεργίαν desiderat, caducum & mutabile, peccatis & erroribus obnoxium. Hoc modo nedum obvia quæque nobis ob oculos, ante pedes, intra contactum posita, sed & res innumeras manibus intractabiles, vestigiis nostris impervias, imò sensibus ipsis inaccessas, & vix animo bene comprehensibiles attingimus ac dimetimur; telluris profunditatem & ambitum, astrorum magnitudines & intercapedines, & quicquid cum quantis organicæ dimensioni subditis aliquam sensibiliter finitam proportionem habet. Nam ex mechanicè dimensorum ad aliā dimensionem excedentia proportione, etiam horum quantitatem, Geometriæ subsidio prorsus infallibili ratione perscrutemur licet & pernoscamus. His subjicio mo-
4. dum, juxta quem sciscitantibus quanta sit aliqua magnitudo respondemus, ipsam realiter exhibendo sensibus æstimandam, aut per dictam organicam dimensionem ad cujusvis mensuræ cognitæ numeros reducendam. Ut si quis interroget quanta sit recta linea à dato puncto circulum propositum contingens, Satisfactum erit quadantenus, Geometricè ducendo rectam istam, & quærentis oculis ostentando. Nam ita vel ipsam intuendo quanta sit discernet, aut ad scalam quamvis examinando quot notæ mensuræ particulis præcise vel præterpropter adæquetur com-
5. periet. Quintus modus est, quo declaretur ignota quantitas per æquationem aliquam, quæ

quæ ipsius ad alias notas quantitates utcunque relationem exprimat, adeóque menti præbeat ipsam aliquousque comprehendendam; cujus quidem æquationis artificiosa resolutio juxta regulas quasdam ei proposito accommodatas, & in analytica doctrinæ præscriptas, dimensionem hanc integre consummabit, quæsitámque quantitatem, seu Geometricè seu Arithmeticè, reddet perspectam. Ita si detur circuli radius & arcûs designati tangens, quæratúrque quanta sit tangens arcûs dupli, repræsentabitur ejus quantitas per talem æquationem: $xrr - xaa = 2rra$; vel $rr - aa. 2rr :: a. x.$ Tangens quæsita dati dupli arcûs ducta in differentiam quadratorum radii, & notæ tangentis arcûs simpli æquetur duplo quadrato radii ducto in tangentem arcûs simpli. Vel quod eodem recidit per hunc analogismum; Excessus quadratorum radii & datæ tangentis se habet ad duplum quadratum radii, sicut data tangens ad tangentem quæsitam. Quo theoremate præstantissimus D. Pellius Longomontani tetragonismum refutavit.

$r =$ radius.
$a =$ tangens data.
$x,$ tangens quæsita.

Item si detur in numeris subtensa cujusvis arcûs, & radius circuli ponatur unitas, & quæratur quanta sit hujus arcûs triplicati subtensa, quantitatem istam hujusmodi declarabit æquatio: Quæsita subtensa tripli arcûs æquabitur triplæ subtensæ dati arcûs subtripli minùs ejus cubo; ($q = 3z - z^3$; vel $qrr = 3zrr - z^3$). Quod theorema conducere posset eidem proposito.

$z =$ arcus.
$q =$ arcus triplus.

Sed his ulteriùs explicandis immorari non li-

licet. Indulgete tamen oro patientiæ veſtræ pauxillum, alteram menſuræ præcipuam notionem leviùs attrectanti, ſub hac tamen conditione, nè vobis per aliquot abhinc ſeptimanas iterum faſtidio ſim; quòd ſi viſus ero juſto ſolitóque prolixior, perſpicite vel hinc quàm ægrè divellar à conſpectu conſortióque veſtro, quámque vobis illibenter valedicam. Altera principalis menſuræ acceptio, juxta quam ſemper in elementis deſignat id, quod aliquoties acceptum exactè componit & conſtituit, vel aliquouſque ablatum perimit, & penitus exhaurit rem homogeneam menſuratam, ſatis antehac ipſa per ſe luculentè deſcripta eſt in Lectione præcedente. Quoad hànc autem intellecta menſurabilitas itidem quantis omnibus convenit; ſiquidem omne quantum (magnitudo quidem πρώτως καὶ ἁπλῶς, reliqua verò quanta ἑπομένως καὶ κατὰ σχέσιν) ſuo modo menſurabile eſt ſecundùm hanc notionem, hoc eſt, diviſibile quotvis in partes ſeu gradus æquales; vel quovis numero denominabile, repræſentabile, explicabile eſt; prout à Trigonometris radius circuli quantumvis exigui diviſus ſupponitur in centies millenas, vel millies millenas, aut utlibet plures particulas æquales; & tempus quodvis utcunque breviuſculum in minuta quotvis diſpertiatur pro computantis arbitrio; & velocitatis ponderíſque cujuſvis tot gradus ſupponere licet quot quiſque velit. Numerus enim quilibet quanti cujuſvis idoneum ſymbolum eſt, ei ſignificando comparatum: & ſicut numerus quilibet Mathematicus, conſtans nimirum unis æqualibus inter ſe, ab

uno

uno toties accepto componitur, eóque toties abstracto exhauritur; hoc est, ab eo exquisitè dividitur & mensuratur, ita correspondenter numero quovis expressum quantum (hoc est, juxta numeri istius exigentiam in tot æquales particulas distributum singulas uni respondentes) à quavis per unum designatâ particulâ mensuratur. Nihil hîc subesse difficultatis videtur aut obscuritatis: & hujusmodi mensuræ respectu comparata quanta dici solent à Geometris symmetra vel assymmetra, quorum symptomatum contemplatione nihil in Mathematicis mirabilius est ferè vel utilius, quamvis nihil à vulgari captu conceptúque remotius. Notat Aristoteles hinc desumptâ instantiâ, quantum admiratio plebis imperitæ discrepet & adversetur sententiæ peritorum atque scientium; siquidem inter ea, ad quæ vulgus potissimùm stupet, censetur *ἀσυμμετρία διαμέτρου* (incommensurabilitas diametri cum latere quadrati) *θαυμαστὸν γὰρ εἶναι δοκεῖ πᾶσιν,* Met. I. 2.
εἴ τι οὐκ ἐλαχίστῳ μετρεῖται· *Omnibus*, hoc est *τοῖς πολλοῖς*, *mirabile videtur, si quid aliquousque magnum non possit admodum exiguâ quâpiam alterius homogenei quanti mensurâ exhauriri; contrà verò nihil magis Geometra miraretur, quàm si non contingeret hoc*, *οὐδὲν γὰρ ἂν θαυμάσειεν οὕτως ἀνὴρ γεωμετρικὸς, ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητή.* Plato verò communem hujus passionis ignorantiam patheticè deplorat, quam & vocat *γελοίαν καὶ αἰσχρὰν* Plato VII.
ἄνοιαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσι, *ridiculam & turpem inscitiam plerorumque omnium hominum animis insidentem*: neque non sibi videri prædicat non tam humanum, quàm pecuinum de Leg. versus finem.

affectum talia non percipere: Τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα, καὶ ἔδοξέ μοι τοῦτο οὐκ ἀνθρώπινον, ἀλλ' ὑηνῶν τινῶν εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων. Se denique Græcorum omnium causâ pudore non modico profitetur affectum, quoniam hanc tam obviam quantorum passionem plerique nescirent; & contrario potiùs errore abducti, magnitudines ejusdem generis omnes inter se commensurabiles existimarent. Ἠσχύνθην δὲ οὐχ ὑπὲρ ἐμαυτοῦ μόνον, ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ ἁπάντων τῶν Ἑλλήνων, &c. De his igitur adeò mirandis

1. symptomatis tantillum videamus. Quod symmetriam attinet, penes vulgus, & apud scriptores exotericos aliquando denotat rei cujusque debitam quantitatem, intra certos naturæ suæ congruos fines constitutam. Ut

Eth. II. 2. apud Aristotelem in Nichomachiis, Τὰ ποτὰ καὶ τὰ σιτία πλείω, καὶ ἐλάττω γινόμενα φθείρει τὴν ὑγίειαν, τὰ δὲ σύμμετρα ποιεῖ, καὶ αὔξει, καὶ σώζει. Ubi σύμμετρα bene vertas modica, moderata, conformia, à debitæ quantitatis modulo neutra ex parte, nec excessu nec defectu aberrantia. Plato in Politico, Δεύτερον δὲ περὶ τὸ σύμμετρον, καὶ καλὸν, καὶ τὸ τέλεον, καὶ ἱκανόν. Ubi τὸ σύμμετρον idem valet, vel affine est τῷ pulchro, perfecto, idoneo; quod ejus declarat acceptionem. Sæpiùs autem apud eosdem symmetria rei variis ex partibus compositæ, decoram & aptam in partibus congruentiam, seu conformitatem inter se mutuam designat; in qua præcipuè consistit pulchritudo rerum & elegantia: quapropter in Architectura talis potissimùm symmetria spectatur, & à Vitruvio sic defi-

Vitruv. l. 2 nitur; *Symmetria est ex ipsius operis membris*

con-

conveniens consensus, ex partibúsque separatis ad universæ figuræ speciem, ratæ partis responsus. Juxta quas acceptiones, ex contrariorum ingenio, satis liquet quid sit asymmetria, rei scilicet enormis, immodica, discongruens, excessiva vel defectuosa quantitas; vel inepta & indecora partium aggregatio. Hisce verò tralatitiis significationibus obmissis, symmetria secundò, nonnunquam denotat 2.
quamvis magnitudinum (aut aliorum quantorum) comparabilitatem inter se, quoad quantitatem, hoc nempe secundùm alteram latiorem acceptionem τȣ͂ mensurare, pro comparare rerum quantitates inter se, vel ignotæ quantitatis ad notam investigare proportionem. Quomodo symmetrum nihil est aliud quàm homogeneum, & asymmetrum prorsus idem cum heterogeneo; quatenus ejusdem generis omnia quanta proportionem habent inter se, adeóque sunt hoc modo commensurabilia; quanta verò diversi generis nullam ad se mutuò rationem habent, adeóque nullatenus commensurari queunt. Ita lineæ cunctæ σύμμετροι sunt inter se, sed linea respectu superficiei vel corporis, respectúque temporis, velocitatis, & ponderis, ἀσύμμετρος est. Verùm communiter apud 3.
Geometras strictiùs dicuntur σύμμετρα quanta, quæ ab eodem quolibet homogeneo quanto mensurari; hoc est, perfectè dividi, sicut nihil supersit residui, pérque subtractionem ejus (sive factam semel, seu quotiescunque repetitam) penitus exhauriri queunt: vel, quorum idem quantum est pars aliquota nonnulla: vel, quæ se habent sicut numerus aliquis ad alium generis numerum (unitatem ad-

scribendo

ſcribendo numeris). Quomodo nimirum uncia, pes, & paſſus, ſunt ſymmetræ lineæ, quoniam uncia ſemel accepta ſeipsā, duodecies accepta pedem, ſexageſies accepta paſſum conſtituit; vel toties ablata dividit, ut nihil remaneat; vel quoniam ſe habent hæ longitudines ut numeri 1, 12, 60. Sic in ponderibus marca & libra ſunt commenſurabiles, quoniam tertia pars ſolidi metitur utrumque, nempe quadragies accepta marcam, ſexagies ſumpta libram efficit; vel quia ſunt ut 2 & 3, in temporibus cyclus Solis cyclo Lunæ commenſurabilis eſt, quoniam ſe habent ut 28 ad 19, & annus unus utrumque demetitur. Aſt hæc ſatis perſpicua ſunt. Aſymmetra verò quanta ſunt, quorum omnino nulla reperiri poteſt, imò nulla datur in rerum natura quantumlibet minima communis menſura, quæ nempe toties accepta compleat hoc, toties illud; toties & toties, juxta quoſlibet numeros, ablata completè dividat utrumque, ſic ut nihil relinquatur; quæ non ſe habent ut ullus quicunque numerus ad alium quemcunque; nullam habent proportionem numeris ullis, integris aut fractis, explicabilem: quorum proinde ſi quod unum numero exprimatur aliquo, reliquum prorſus ineffabile erit. Cujus affectionis celeberrimum & pervulgatiſſimum exemplum præſtant latus & diameter quadrati, quæ ſic afficiuntur inter ſe, ut nulla quamcunque proximè ad atomum accedens lineola metiatur utrumque. At ſi millies milleſima pars unius, puta lateris, applicetur alteri, nempe diametro, vel auferatur ab ea quoties fieri poteſt, ſemper ad extremum reſtabit aliquid, & nunquam com-

pleta

pleta fiet congruentia vel diviſio. Et hoc quidem eſt illud mirabile ſymptoma quod humanum penè captum ſuperat, & horum inſuetos meritò torquet; id quod adhuc fortaſſe mirabilius videatur, modò perpendantur una vel altera, quam ſubjiciemus, obſervatiuncula. Primò, quod ſi proponantur 1.
incommenſurabilia duo quanta A, B, poſſit inveniri quantum alterutri A commenſurabile qualibet in proximitate ad B, vel differens à B minùs quàm aſſignabili quavis quantitate (id quod facillime demonſtrari poteſt, & conſectatur, ni malè commemini, è lemmatio quodam, quod habetur demonſtratum in libro tertio ſphæricorum Theodoſii). Unde patet illud quicquid eſt, à quo quantorum hæc incommenſurabilitas exurgit, vel quo incommenſurabile quantum exſuperat, vel non attingit aliud expoſito quanto commenſurabile, fore infinitè parvum, minus quovis aſſignabili, vel per animum comprehenſibili quanto. Quod & ex radicum extractione (numerorum ſcilicet irrationabilium quos vocant) eſt pariter manifeſtum: iſthic enim ad verum quæſitæ radicis valorem propiùs ſemper & propiùs acceditur, ad infinitum progrediendo, nunquam tamen juſtus valor obtineri poterit; hoc ἀξιοθαύμαστον, præ-
ſertim cùm ſecundò, non ſolùm ſimpliciter 2.
incommenſurabilia ſunt quanta, ſed & plures (fortaſſis infinitos) incommenſurabilitatis quaſi gradus videntur admittere; ut unum nempe quantum reſpectu quanti cujuſvis expoſiti magis alio à commenſurabilitate procul elongetur. Et aliud magis hoc, & ſic porro deinceps, donec extremum aliquod

Vide Cavaller. Exerc. p. 526.

quod à primo velut infinito distet intervallo. Notavit ὁ στοιχειωτὴς quasdam lineas cum exposita quapiam nedum longitudine, sed quod magis est etiam potentiâ incommensurabiles esse; atqui nonnullarum etiam quadratiquadrata cum expositæ quadriquadrato, & quævis harum potestates superiores cum illius potestatibus respectivè coordinatis incommensurabiles sunt. Unde si cujus potestas velut infinitè ab unitate dissito numero denominata sit expositæ respectivè coordinatæ potestati incommensurabilis, illa videtur expositæ respectu gradus incommensurabilitatis velut infinitos sortiri. Quomodo se res habere videtur in circuli circumferentia respectu radii. Nam inscripti quadrati latus est longitudine radio incommensurabile, & proinde quadrati ambitus est radio incommensurabilis. Octogoni verò inscripti quadratum est incommensurabile radii quadrato, & proinde quadratum octogonalis perimetri est incommensurabile quadrato radii; neque non ita continuò regularium inscriptorum circulo polygonorum ambitus potestates habent superiores coordinatis radii potestatibus incommensurabiles, unde polygonum horum ultimum, hoc est, ipse circulus, videtur habere perimetrum infinitis gradibus incommensurabilem cum radio. Quod si verum fuerit, actum erit de circuli tetragonismo, cùm ratio circumferentiæ ad radium inde sit ex natura rei penitus inexplicabilis; adeóque problema illud, talis rationis ἐξήγησιν desiderans, solutu sit impossibile, vel eo potiùs ipso solvatur, quod impossibile deprehenditur. Siquidem duo-

duobus punctis resolvitur problema, vel ostendendo quale sit & quomodo fiat quod requiritur, vel indicando quod fieri nequit. Sed hoc tantum mysterium tribus verbis evolvi nequit; si tempus & opportunitas sivissent, plura saltem huic explanandæ firmandæque conjecturæ conatus essem producere. Denique, nè sim ultrà tædio, monebo præter hæc tantùm, præcipuam asymmetriæ rationem in hoc videri fundatam; quòd cùm inter duos numeros planos sibi similes (hoc est, qui procreantur ex multiplicatione numerorum inter se proportionalium) semper inveniri possit medius numerus proportionalis (quippe productus è numeris planis similibus in se multiplicatis est semper numerus quadratus, cujus radix est iste numerus proportione medius) item inter solidos duos similes numeros semper intercedunt duo medii proportionales: & pari modo duos inter similes planoplanos dantur tres proportione medii, ac ita porro quoad reliquas ulteriores imaginarias dimensiones; cùm, inquam, in similibus numeris ita se res habet, idque demonstretur in Elementis, omnino secus accidit in numeris planis, solidis, planoplanis, & reliquis dissimilibus: nam ex parte rei nullus datur inter planos duos dissimiles numeros medius propoporti-onalis numerus; nec inter solidos dissimiles duo, nec inter planoplanos tres, ac ita deinceps; id quod etiam ibidem ostenditur. Unde si duo quanta ponantur habere se in ratione duorum numerorum planorum dissimilium, & hæc inter quanta reperiatur medium proportionale, quod perpetuò fieri poteſt ob indefinitam cujuſque quanti diviſibilitatem, nullus extabit numerus in univerſa rerum natura, qui repræſentet hoc quantum, aut ei reſpondeat, & conſequenter hoc, illis primò poſitis, pérque numeros expreſſis, ἀσύμμετρον erit. Eodem diſcurſu, ſi inter duo quanta diſſimilibus numeris ſolidis expreſſa duo reperiantur quanta proportione media (quod & rei natura patietur fieri) nullum tota, quanta quanta, eſt numerorum ſeries ſuppeditabit hiſce repræſentandis idoneum numerum; adeóque hæc reſpectu quantorum expoſitorum ineffabilia prorſus erunt, & incommenſurabilia. Unde patet in tranſcurſu, quòd numerorum quàm aliorum quorumcunque quantorum infinities reſtrictior, & quaſi pauperior ſit natura; pauciſſimis enim, comparatè loquendo, quantorum proportionibus exprimendis ſufficiunt, aut inſervire valent, numeri rationales ſeu vulgares: nec aliter plerarunque figurarum regularium, cùm latera, tum areæ quàm per ſurdos & irrationales numeros exhibentur aut explicantur. Verùm hæc tantummodo curſim & tumultuariè licuit inſinuare, fuſiorem explicationem deſiderantia. Jam nihil ſupereſt, præterquam ut vobis (auditores optimi & humaniſſimi) grates referam propenſiſſimas & ampliſſimas, pro eximia veſtra per totum hujuſce longiuſculi termini decurſum, liberaliter indultâ nugis noſtris patientiâ. Utinam aliquando tam benignâ candidâque attentione digniora, votíſque veſtris acceptiora poſthac nobis obtingant argumenta diſſertandi; quæ & veſtram magis oblectent ingenuam curioſitatem,

tatem,

tatem, & nostram exacuant tenuem industriam. Interim valere dico vobis, & animitus voveo. Valete, bono cum Deo.

Hactenus Lectiones, ut habitæ sunt publicè, sic ordine descriptæ veniunt nusquam interturbato; nunc seriem abrumpo. Cùm enim nec lege tenear, & præ tædio laboris ac temporis penuria non possim omnes (at saltem decem ad minus) exhibere, decrevi reliquis aliquot intermissis tres ultimas adponere.

FINIS.

ISAACI BARROW

Mathematicæ Profeſſoris Lucaſiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigienſis:

CONTINUATIO.

LONDINI,

Ex Typographiâ J. PLAYFORD,
1704.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

SAlutem gratulor, auditores optimi, voveóque perquam vobis diuturnam, nec ultra de procemiis ſolicitus penſum repeto, ſic ut methodo pridem inſtitutæ pergam inſiſtere. Propoſitum fuit (meminiſtis opinor) generales magnitudinum (& inde reliquorum quantorum) affectiones pertractare. E quibus cùm pluſculas excuſſerim, pro meo modulo non incuriosè, nunc ad illam Matheſeôs velut animam penè deventum eſt, proportionalitatem; è qua ferè pendet quicquid uſpiam in Mathematicis mirabile vel abſtruſum demonſtratur. Cùm autem proportionalitas in comparatione proportionum, proportio conſiſtat in comparatione rerum quantarum, expedire videtur, προπαρασκευῆς, ſeu præludii loco, ut de quantorum imprimis ipsâ ad pro-

proportionem requiſita comparabilitate diſpiciamus. Nec enim omnia quanta ſic inter ſe comparari poſſunt, ut mutuam habere dicantur proportionem, at illa tantùm quæ peculiari ratione ſe propriùs attingunt, cujus gratiâ dici ſolent homogeneæ. De quantorum igitur homogeneitate & heterogeneitate jam diſquiremus. In hanc verò rem imprimis notandum præter attributa communia, quæ conveniunt omnibus quantis, eáque diſtinguunt à rebus quantitatis expertibus (extenſionem nempe, diviſibilitatem, menſurabilitatem qualeſcunque, & his connexas paſſiones) alias haberi differentias, quæ res quantas diſpeſcunt à ſe invicem, & in proximè ſubordinata genera diſtribuunt; ſic ut quæ ſub uno generum iſtorum continentur omnia dicantur homogenea, quæ ſub diverſis collocantur, heterogenea vocitentur. Sunt autem iſta ſubordinata quantorum genera veluti totidem claſſes & prædicamenta quantitatis, eodem ferè modo ſub quantitate diſpoſita, quo vulgaria prædicamenta ſub Ente; valde diſcreta à ſe mutuò, prætérque dictas illas generales quantitatis affectiones nihil inter ſe commune vel ſimile ſortita. Cæterùm iſtarum convenientia & diverſitatis ratio generalis eſt aptitudo vel ineptitudo, capacitas aut incapacitas quantorum ad compoſitionem ſeu coalitionem in unum totum; vel ad ſubtractionem ſeu conſtitutionem novi reſidui; addibilitas, ut ita dicam, vel inaddibilitas unius ad alterum; ſubducibilitas vel non-ſubducibilitas unius ab altero; exceſſus certus eſt animo comprehenſibilis unius ſupra alterum, vel defectus unius

ab

ab altero; vel talis excessûs aut defectûs incapacitas; & hinc æqualitas vel inæqualitas unius respectu alterius: in his, inquam, & hæc concomitantibus aut consectantibus fundatur homogeneitatis & heterogeneitatis ratio respectivè. Nam quæ sic affecta sunt, ut possint esse partes unius per se mente conceptibilis quanti, in unam summam aggregari, adjectione sui se mutuò augere, vel detractione minuere; quæ certo excessu vel defectu differunt à se invicem; quorum unum haud impropriè vel ineptè dici possit æquale alteri, vel altero majus minúsve; homogenea sunt, & ad eandem quantitatum inter se comparabilium classem pertinent; quæ secus heterogenea, diversas ad tribus inter se discretas & ἀσυμβλήτες referenda. Sin hujusce varietatis originem ulteriùs persequi libeat, & unde talis subinde quantorum incomparabilitas exurgat indagare, ex hujusmodi ferè causis ipsam comperiemus proficisci. Primò, ex valde di- 1.
versâ quorundam quantorum naturâ, quâ fit ut uni communi mensuræ subjici nequeant, quæ pariter utrique congruat aut conveniat; imò nec ut ipsa mens nostra possit ea connectere, vel sub unius certi quomodocunque uniformis compositi ratione concipere; non secundùm æqualitatem aut inæqualitatem, excessum aut defectum, ullatenus ea contendere vel committere inter se. Ita v.g. magnitudo, pondus, velocitas, tempus, resistentia, vis, heterogenea & incomparabilia sunt; quia naturâ discrepant adeò, nihil ut commune metiatur ipsa; nec quomodo possint ipsorum quælibet connecti, congrue-

re,

re, compositum aliquod non admodum difforme & Chimæricum ingredi; sibimet adæquari, se superare, mentis acies omnino valet attingere. Quis enim intelligat qualis summa conficiatur duobus annis ad tria milliaria adjunctis; quanto tres unciæ ponderis excedant duo minuta temporis; quid supersit si ex tribus cylindris auferantur quatuor gradus velocitatis? non magis quàm quot toni musici tot radios lucis adæquent, quot odores tot coloribus æquiparentur. Hæc nempe quò minus ad se juxta quantitatem intelligibili quopiam modo referantur, ingens obsistit naturæ dissimilitudo atque distantia. Magnitudinis quantitas continua est & simultanea, absoluta, sensibus attrectabilis & conspicua; temporis fluxa, successiva, menti tantùm imaginabilis, motum consequens & connotans; velocitatis quantitas à temporis & spatii conjunctis rationibus pendet; pondus, vis. & resistentia, quasdam actiones implicant, & ex effectibus quibusdam censentur. Ita dissonant hæc inter se, ut in unum refugiant compingi. Hæc prima sit & potissima τῆς ἑτερογενείας causa. Al-
2. tera ratio discriminis istius petatur ex variis quoad quantitatem quasi gradibus perfectionis; quatenus aliqua quanta pluribus modis extenduntur, & plurifariam dividi possint præ aliis, sic ut hæc istorum respectu sint quodammodo non quanta; nec possint adeò cum illis secundùm quantitatem comparari. Ita pluribus modis divisibilis est superficies quàm linea, corpus quàm superficies; nec aliter se habet linea ad superficiem, & ad corpus superficies quàm punctum ad lineam, hoc

hoc eſt, quàm indiviſibile ad diviſibile, vel ut
non-quantum ad quantum (linea ſiquidem
reſpectu ſuperficiei nihil aliud eſt fere quàm
punctum longum, & ſuperficies reſpectu cor-
poris nil aliud quàm linea lata, vel punctum
quaſi longo-latum) igitur ἀσύμβλητα ſunt
linea, ſuperficies, corpus, adeeque heteroge-
nea. Evenit enim inde quod hæc ſecundùm
æqualitatem & inæqualitatem inter ſe ne-
queant comparari, nec ita componi, ut ſum-
mam aliquam conficiant, nec unum ab alio
ſubtrahi ſic ut aliqua reſultet differentia,
nec incrementum pariant addita, nec decre-
mentum ablata. Eadem eſt ratio inſtanti-
um reſpectu temporis; graduum velocitatis
creſcentis ſingulis inſtantibus acquiſitorum
reſpectu velocitatis integræ, conatuum iti-
dem momentaneorum reſpectu motûs, &
ponderis, & potentiæ; hæc enim inferioris
& imperfectioris naturæ ſunt, quàm ut illis
ullatenus æquiparentur, & genere conveni-
ant. Verùm adhuc tertiò diverſitatis hujus 3.
origo ſit indefinitus & incomprehenſibilis
unius quanti reſpectus ad aliud; qualis in-
ter res (alioquin nomine naturáque cogna-
tas) finitas & infinitas verſatur. Unde di-
verſi generis habentur linea recta finita &
infinita; quamvis in infinita recta reperia-
tur linea quævis recta finita, cenſeríque poſ-
ſit iſta conſtituta ex hac infinities repetita.
Hinc πολυθρύλλητον illud, finiti ad infinitum
nulla eſt proportio (Λόγος δ' οὐδεὶς ἐςι τοῦ *De Cœlo*
ἀπείρου πρὸς τὸ πεπερασμένον, apud Ariſtote- *I.6.*
lem) cujus tamen gnomes, ſeu axiomatis per-
vulgati veritatem quadantenus infregiſſe
videtur modernorum Geometrarum ſoler-
tia,

tia, dum innumerorum planorum & solidorum ad infinitum protractorum cum aliis planis & solidis finitis justam proportionem & ipsissimam æqualitatem demonstrârint, id monstri primùm exhibente clarissimo Geometra Torricellio. Ex quo pateat infinitas magnitudines finitis interdum homogeneas esse, cùm iis æquentur, & ab iis interdum excidantur. Vel inde potiùs inferatur, non quicquid extensione interminatum est, idem esse quantitate prorsus infinitum; vel adhuc explicatiùs, quod ab unius dimensionis infinitate non semper consequatur superficiei, vel corporis infinitas; cujus rei ratio non admodum difficilis videtur, id enim accidit ex eo quòd unius dimensionis infinita diminutio compenset alterius infinitum accrementum; unde non adeò fidem exsuperat magnitudinem finitam, utcunque perexiguam, longitudine protendi ad infinitum. Igitur ut veritatem suam universalem tueatur, ita debet explicari prænotatum axioma: finiti magnitudine vel quantitate, ad magnitudine vel quantitate in illo genere infinitum proportio nulla est. Non autem ut intelligatur generatim terminatæ figuræ ad magnitudinem interminatam nullam dari rationem. His è radicibus pullulat heterogeneitas quantorum, & quæ contrario modo conveniunt inter se; quæ naturâ non adeò dissimilia sunt inter se, nec in diverso quantitatis gradu constituta, nec infinito intervallo à se dirempta sunt, ea sunt homogenea. Cæterùm Euclides in definitionibus libri quinti, homogeneas magnitudines definit, quarum una, minor scilicet, aliquoties

ac-

accepta ſeu multiplicata, poteſt alteram excedere. Iſtius libri definitio tertia talis eſt : Λόγος ἐστι δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Ne quis autem dubitet quid per magnitudines homogeneas intelligit ſubjungit, Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται) ἃ δυνάμενα πολλαπλαζιόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. Ubi ὁ στοιχειωτὴς, ſicut rectè meâ ſententiâ notat doctiſſimus & clariſſimus vir, in ſua adverſus Meibomium diſputatione, non id agit (ut præter Meibomium alii exponunt, & quod demiror ille ſagax Clavius eò videtur propendere, quamvis alibi diverſa tradat) ut oſtendat quænam homogeneæ magnitudines rationem habent (quaſi ex illis aliquæ nullam haberent) at verò potiùs quænam magnitudines ſunt homogeneæ, ne quis iſtius vocabuli, in præcedente definitione poſiti, obſcuritate deceptus erret, aut ſuſpenſus hæſitet. Quum enim iſthic proportionem definit, relationem magnitudinum homogenearum, indefinitè proloquens, ſatis innuit, ſe magnitudines homogeneas univerſaliter, non quaſdam ſolummodo particulares intelligere ; alioquin etiam niſi quantis omnibus homogeneis mutuam inter ſe proportionem exiſtimâſſet competere, perperam illas ceu ſubjectum proportionis inſeruiſſet ejus definitioni ; rectiúſque ſecluſis illis earum loco adæquatum aliquod ſubjectum ſtatuiſſet. Vult igitur omnes homogeneas magnitudines proportione verſus ſe mutuâ affectas eſſe ; igitur lineæ duæ, una finita altera infinita, quamvis in genere lineæ quodammodo conveniunt, non ſunt ex Elementoris ſententia

tia homogeneæ, quia finita quotiescunque sumpta nunquam superabit infinitam; paritérque se res habet in quovis finito respectu cujusvis alterius quantitate infiniti (quantitate dico, non extensione locali, propter ante jam insinuata) itidémque juxta hanc definitionem satis liquet puncta, lineas, superficies, corpora esse heterogenea; quatenus non innumerabiles punctorum myriades unicam certissimam lineolam, non millies millenæ superficies unicum excedant minutissimum corpusculum. Sic & anguli plani κεραλοειδεῖς, si modò anguli sunt, aut quomodocunque quanti, quorum utrumque dubitatur & denegatur a præclaris Mathematicis, de qua re nihil ego quicquam in præsens disceptabo; at saltem, inquam, si corniculares istæ divergentiæ, quas efficiunt rectæ lineæ cum curvis quas contingunt sint verè anguli, quantitate præditi, rectilineis saltem angulis homogenei non erunt; quia minimus quilibet vel acutissimus angulus rectilineus infinitis vicibus excedit innumerabiles istos κεραλοειδεῖς· sicut Euclides de corniculari quem efficit tangens cum peripheria circuli, Apollonius de illis quos efficiunt tangentes cum sectionibus conicis, * Archimedes de iis, quos constituit tangens cum spirali demonstrârunt, nósque possimus unicà demonstratione universali, è motuum compositione petita, de omnibus ad easdem partes convexis curvis demonstratâ dare: sic ut non aliter isti contactûs anguli se habeant ad angulos rectilineos, quàm punctum ad lineam, vel linea ad superficiem. Lineæ verò omnes finitæ quantumvis dissimiles sibimet ho-

* *Saltem ex demonstratis ab eo consectetur id.*

homogeneæ ſunt, nedum rectæ rectis, at curvæ rectis, & curvæ quævis inter ſe; quatenus tametſi de curvarum plerarumque determinatis ad rectas proportionibus (ut peripheriæ circularis aut ellipticæ ad aliquam è diametris) nondum conſtet, in dubium tamen ſit aliquam inter eas proportionem exiſtere; quia nempe v. g. diameter circuli quater acceptus circumferentiam excedit. Quinimo quod ſibi gratuletur habet præſens ætas, in eo quòd humano quam ingenio crediderunt, aut valde ſuſpicati ſunt, imperveſtigabilem anteriores Geometræ, quarundam curvarum ad rectas proportionem mirifica ſubtilitate adinvenerint, ſatíſque perſpicuè demonſtrárint hodierni Geometræ. Pariter ſuperficies omnes finitæ ſuperficiebus finitis homogeneæ ſunt, etiam planæ curvis quandoquidem harum ad illas proportio non ſolùm poſſibilis adſtruitur, at qualis ſit facilè demonſtratur, ſicut ab Archimede cui circulari areæ planæ recti coni, recti cylindri, ſphæræ, ſphæricæque cujuſvis portionis curva ſuperficies adæquatur. Conſimiliter & omnia ſolida ſolidis finitis homogenea ſunt. Imò ſi anguli omnino quanti ſunt, & æqualitatis vel proportionis participes (quod ut diximus ambigitur) etiam anguli rectilinei curvilineis nonnullis homogenei erunt, hoc ſenſu, quoniam ex iſtis aliqui horum nonnullis æquales demonſtrantur, à Proclo ſcilicet libro tertio ad axioma duodecimum. Saltem verò homogenei ſunt inter ſe cuncti anguli rectilinei. Hæc autem adeò manifeſta viſa ſunt Archimedi, ut non dubitârit aſſumere quòd quævis determinata magnitudo possit multoties adjecta sibi, vel aliquoties multiplicata quamvis aliam ejusdem classis magnitudinem superare. Ἔτι (inquit in præstratis libro nobilissimo de sphæra & cylindro, hoc est, præterea assumo) τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον ἑαυτῷ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. Cui simile postulatum præmittit Clavius elemento decimo: Postuletur quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamvis magnitudinem ejusdem generis excedat. Nec minus evidens est tempora quævis finita temporibus finitis homogenea esse, quia brevissimum minutum sæpiùs replicatum longissimum quodcunque superabit æternitate minus durationis intervallum. Etiam velocitates omnes homogeneæ sunt, quatenus utcunque perexiguus & plusquam testudineus velocitatis gradus satis multis vicibus repetitus, rapidissimam primi mobilis velocitatem transcendet. (Cùm & alioquin repugnare videatur infinitam dari velocitatem; siquidem eâ præditum mobile distantiam in unico τῷ νῦν quantamvis emetiretur, adeòque plura simul loca possideret, hoc est, congrueret spatio seipsum quantumlibet excedenti, quod videtur impossibile). Numeri verò possunt omnes invicem esse homogenei, quatenus omnes ejusdem generis magnitudinibus repræsentandis apti nati sunt inservire; possunt etiam quicunque sibi mutuò heterogenei censeri, quatenus diversi generis quantis exprimendis adhibeantur; imò quilibet numerus quo-

quodammodo poteſt heterogeneus eſſe ſibimetipſi, quatenus idem heterogenea quanta repræſentet; nullus enim numerus eſt qui non linearis, planus, ſolidus, planoplanus, planoſolidus, ſolidoſolidus, eſſe poſſit; qui non dimenſiones quaſcunque naturales aut fictitias ſubire concipiatur, pro computantis arbitratu. Pondera vero modò ſolis ſolidis corporibus gravitas aſſignetur (ut certè ſolis aſſignatur in Phyſica) ſunt inter ſe omnia homogenea; ſin ſuperficiebus & lineis ut magnitudo quædam, ita gravitas nonnulla tribuatur (id quod ſupponunt Geometræ, dum trianguli, parallelogrammi, plani parabolici, reliquarúmque planarum figurarum; neque non ſuperficies ſphæricæ, conicæ, cylindricæ, & reliquarum curvarum ſuperficierum; item dum linearum quarumvis, ſeu curvarum ſeu ex rectis compoſitarum, centra gravitatis inveſtigant; hoc, inquam, poſito) non omnia pondera ſunt homogenea, ſed illa tantùm quæ ejuſdem generis magnitudinibus inhærent. Unde non immeritò Platonem reprehendere videtur Ariſtoteles, quòd (in Timæo) corporum in gravitate differentias aut exceſſus imputat τῷ πλήθει τῶν ἐπιπέδων. Siquidem ſuperficierum ſiquæ ſunt gravitates quotlibet aggregatæ corporis gravitatem conſtituere nequeunt vel adaugeri, diverſi generis cùm ſint, nec eapropter ad hoc idoneæ. Nec aliò ſanè tendunt hæc omnia, quàm ut ſciamus quæ quanta quibus quantis ſecundùm quantitatem conferre liceat; nullum enim in Geometria majus peccatum eſt, quàm heterogeneorum quantorum inter ſe rationem in-

De Cœlo, III. 1.

inquirere vel aſſerere. Ut ſiquis quærat quot tantæ lineæ rectæ æquentur tali quadrato; quot peripheriæ tantæ circulares tali circulo, quot quadrata tali cubo, quot tempora tali ſpatio vel ponderi. Unde ſummus artis analyticæ præceptor Vieta, primam hanc in omnibus diſquiſitionibus ana-
Iſag. cap. 3. lyticis obſervandam legem præſtituit; *Prima & perpetua lex æqualitatum ſeu proportionum eſto, quæ quoniam de homogeneis concepta eſt, dicitur lex homogeneorum, hæc eſt, Homogenea homogeneis comparari* (excluſivè nimirum, homogenea ſolis homogeneis comparari). *Nam* (ſubjicit) *quæ ſunt heterogenea quomodo inter ſe adfecta ſint cognoſci non poteſt, ut dicebat Adra-*
* Cap. 19. *ſtus.* Rectè ſic Adraſtus* apud Theonem Smyrnæum, Τὰ μὲν γὰρ ἀνομογενῆ, πῶς ἔχει πρὸς ἄλληλα, φησὶν Ἄδραστος, εἰδέναι ἀδύνατον. Verum eſt apud illos, qui in problematum ſolutionibus aut demonſtrationibus theorematum præclaram illam adhibent methodum indiviſibilium, ejuſmodi ſæpe voces occurrere; Omnes iſtæ lineæ parallelæ tali plano æquantur, ſumma planorum iſtorum parallelorum tale ſolidum conſtituit; explicant verò mentem ſuam, & per lineas nil aliud intelligere ſe dicunt, quàm admodum exiguæ & inconſiderabilis (verbo veniam) altitudinis parallelogramma; per plana conſimiliter altitudinis haud computandæ priſmata vel cylindros. Aut ſaltem per ſummam linearum & planorum non ſummam denotant aliquam finitam & determinatam, ſed infinitam aut indefinitam rectæ cujuſdam lineæ punctis ἰσάριθμον. Ex quali infinita inferiorum homogeneorum ſumma componi

ſu-

ſuperiùs heterogeneum (ex infinitis puta lineis rectis ſuperficiem planam, ex infinitis peripheriis concentricis circulum planum, ex infinitis ſuperficiebus planis vel curvis ſolidum corpus) ſi quis aſſerat id quod magnus ille Galilæus aſſerere non dubitat, haud facilè poterit erroris convinci, vel funditus expugnari. Sed utcunque, dimiſsâ iſtâ controverſiâ, nihil uſus iſte noſtræ quicquam officit doctrinæ, & vel illorum qui methodum iſtam ambabus ulnis amplexantur, ſententiâ irrefragabiliter valet hoc præceptum, ne definita quantitate vel numero heterogenea comparentur inter ſe. Quod cùm ex ſe liquidò verum & ſummopere rationi conſentaneum ſit, de eo tamen, ut ex parte jam antè monui, movit nuper controverſiam noſter D. Hobbius, & rem adeò claram ſpiſſis quantum in ſe nebulis offuſcavit. Nec enim lineas & tempora, quamvis inter ſe diſſitiſſimæ naturæ, velut homogenea quanta, mutuámque ſortita proportionem veretur inter ſe comparare. Nam quia motibus ἰσοταχέσι percurſæ longitudines ſe habent ut tempora, *Erit* (inquit) *permutando ut tempus ad longitudinem, ita tempus ad longitudinem.* Quaſi diceret, Quoniam ſtadius ad mille paſſus ſe habet, ut hora una ad octo horas; ergo permutatim ut ſtadius ad unam horam, ita mille paſſus ad octo horas; cujuſmodi argumentatio nemo non perſpicit quàm ſit abſonè ridicula. Idem in Dialogis, quibus hodiernā examinare profitetur & emendare Mathematicam (exoptare liceat, utinam ſaltem penſitatiùs examinâſſet, & feliciùs emendâſſet ſuam) *Erit*, inquit, *ut quantitas ponderis ad longitudinem lineæ quæ*

De Corp. cap. 16.

Dial. 3. p. 80.

ipsam repræsentat, ita quantitas ponderis dupli ad longitudinem lineæ duplæ ipsam repræsentantis. Adeò scilicet hunc errorem à redargutore suo monitus omnino recusat deponere; ast ejus excusandi vel propugnandi gratiâ novas procudit vocabulorum definitiones & acceptiones, tam sibi parum consonas, quàm ab usu communi semotas, & conclusionibus plerunque suis repugnantes; miros comminiscitur prætextus alienos & abhorrentes ab omni syncera ratione, quod paucis ostendere non abs re fuerit, cùm elucidandæ rei subjectæ causâ, tum ne quis in similes lapsus incautè ruat & quò pateat quàm in his rebus oportet circumspectè versari. Mensuram
Dial. 1. p. 11. hoc modo definit ille, *Est mensura magnitudo una alterius, quando ipsa vel ipsius multipla alteri applicata cum ea coïncidit.* Et rursus, verbis paululum immutatis, sed in eandem men-
Dial. 2. p. 43. tem; *Mensura est magnitudo magnitudinis minor majoris vel non minoris, cùm minor ipsi applicata semel vel pluries ipsam æquat.* Juxta quas definitiones patet mensuram nihil esse aliud, quàm rei mensuratæ partem aliquotam, quæ nimirum aliquoties accepta totam illam exhaurit, ut nihil supersit residui; quomodo vocabula μέτρον, μετρεῖν, καταμετρεῖν, sæpiùs aut semper accipiuntur in Ele-
Pag. 110. mentis, ut antehac ostensum; *Homogeneas porro quantitates* definit, *quarum mensuræ applicari possunt una ad alteram, ita ut congruant.*
Dial. 3. p. 80. Et *quarum mensuræ* ἐφαρμόζουσι. Mensuræ verò sunt ei, ut jam visum, partes quantorum aliquotæ. Ergo modò sibi constet, quantitates homogeneæ erunt, quarum partes aliquotæ congruere possunt. Verùm par-

partes aliquotæ quantitatis temporis non aliæ ſunt quàm quantitates temporis, nec ponderis quàm quantitates ponderis, nec lineæ quàm lineæ, neque corporis quàm corpora. Ergo cùm nemo concipere poſſit quo pacto quantitas lineæ quantitati temporis (puta lineæ quantitas cubitalis annuæ vel unciali temporis aut ponderis quantitati) poſſit applicari, ſicut ei congruat aut coincidat; non erunt lineæ temporis & ponderis quantitates homogeneæ, juxta proprias ipſius definitiones ac hypotheſes. Ita communis intuliſſet Logica, verùm mirificâ ſagacitate contrarium is colligit; *Quoniam* (inquit) *quantitas temporis per lineam menſurari poteſt, & linea lineæ applicari poteſt, erit quantitas temporis quantitati lineæ homogenea.* Ecce fontem, ex quo complura quibus iſti dialogi ſcatent abſurda promanârunt. *Quoniam quantitas* (ait) *temporis per lineam menſurari poteſt:* atqui reſpice ſodes, ingenioſe vir, tuam ipſius definitionem, & vide num juxta illam linea poſſit eſſe menſura temporis (aut quia malis involutiùs loqui, quantitas temporis) h.e. linea poſſit eſſe pars aliquota quantitatis temporis, vel an quantitas temporis conſletur ex lineis, vel an linea ſit aliqua quantitas temporis (pars enim aliquota quantitatis temporis eſt aliqua quantitas temporis) pariq; ratione num linea ſit quantitas ſuperficiei, corporis, ponderis, & alterius cujuſvis quanti; vel an omnes omnino quantitates componantur ex lineis; quantitas (inquam) annua vel menſtrua, quantitas uncialis aut pondialis, quantitas pedalis quadratica vel cubica num lineæ ſint, aut conſtituantur ex lineis: an-

Dial. 5. *p.* 110.

non si quid horum statueris audienti debebis ludibrium? Atqui non satis animadvertit clarissimus vir, in usu vocabuli mensuræ se multùm à sua ipsius definitione recedere, eóque sibi labendi occasionem ministrare; quúmque toties lineam appellat mensuram temporis, & ponderis, & cujuscunque quanti, nullatenus intelligere potest lineam esse partem aliquotam temporis, aut ponderis, aut motûs, aut corporis, neque cum iis lineam posse congruere; sed laxiori mensuræ significatu abutitur, juxta quem, ut antea distinctiùs exposuimus, mensura subinde rem quamlibet designat, quæ possit aliam vel commodè repræsentare, vel quomodocunque notificare. Quo duplice respectu linea (recta præsertim aut circularis ob simplicitatem & uniformitatem suam) temporis, ponderis, velocitatis, & cujusvis quanti mensura dici potest & solet. Nam quia ratio quævis quantorum rectis lineis exprimi potest, ideo satis commodè rectæ lineæ eis repræsentandis adhibentur; ut v.g. pro duobus solidis, quorum unum ad alterum proportione sic se habet, ut $\sqrt{2}$ ad 1, vel ut diameter quadrati ad latus, quando præter ipsarum proportionem nihil obvenit considerandum, substitui possunt duæ rectæ lineæ ipsarum rationem exhibentes; paríque ratione duorum temporum, vel duorum ponderum rationibus exhibendis assumi possent rectæ lineæ; & eatenus acceptione latissimâ quantorum istorum mensuræ dicantur hæ lineæ; quo sensu numeri sunt mensuræ maximè communes & usitatæ quantorum omnium commensurabilium, eorum rationem exprimentes,

próque

próque iis in ratiocinii decursu substitutæ; quomodo etiam nedum lineæ, sed alia quævis quanta aliorum quorumvis respectu mensuræ rationem subeant; sicut enim quodcunque quantum rectâ lineâ pro arbitrio sumptâ repræsentari potest, ita possit æquè superficie quavis, possit corpore, possit literâ, charactere, nomine quolibet designari. Magìs adhuc propriè, quamvis ab Hobbiana definitione satìs remotè, mensuræ nomen obtinet recta linea (parísque jure quævis alia magnitudo posset obtinere) quatenus inservire potest aliorum quantorum quantitati determinandæ seu declarandæ; quomodo longitudo lineæ, quam percurrit aliquid mobile designato tempore velocitatem indicat, adeóque metitur ejus; & arcus circularis anguli rectilinei cruribus interceptus anguli quantitatem arguit & ostendit, hoc est, mensurat secundùm hanc acceptionem τοῦ mensurare, quam nos fusè satìs & luculentè pridem explicuimus. Hanc igitur ambiguitatem vocabuli mensuræ si perspexisset is aut perpendisset, quocum agimus; aut si definitioni propriè constantiùs adhæsisset, non ita puto commiscuisset omnium rerum quantitates, & inter se pronunciâsset homogeneas, ejusmodi scilicet argumento permotus. Quoniam linea est mensura temporis, erit quantitas temporis quantitati lineæ homogenea. Atqui respondeo, linea dici potest mensura temporis, sumendo mensuram pro symbolo, vel argumento, vel indicio quantitatis quam habet tempus; at sumendo mensuram juxta suam ipsius definitionem pro parte aliquota, satìs liquet, nec ipse diffitetur, *Pag.*77.

tetur, lineam non esse mensuram temporis, adeóque juxta suam etiam homogenei definitionem, lineæ quantitas non erit temporis quantitati homogenea. Imò eodem ratiocinio quo probatum it temporis & lineæ quantitates homogeneas esse, æquè concluditur easdem esse heterogeneas. Quia nempe quantitas temporis per superficiem parallelogrammam aut corpus cylindricum mensurari (hoc est, per ea designari potest, & declarari vel notificari) & linea nequit superficiei parallelogrammæ nec corpori cylindrico congruere, erit juxta definitionem τῆς ἑτερογενείας ab ipso traditam, quantitati lineæ heterogenea. Quinetiam omnes omnino quantitates simul homogeneæ
Pag. 47. sunt & heterogeneæ: nam, *Homogenea sunt* (ait) *quæ eodem genere mensuræ mensurabilia*; ergo cùm omnes quantitates lineis mensurabiles sint, erunt omnes homogeneæ. *Heterogeneæ verò sunt* (ut idem ipse nos docet) *quæ diverso genere mensuræ mensurantur*: ergo heterogeneæ sunt omnes quantitates, quoniam omnes lineis, superficiebus, solidis angulis, (numeris pleræque rationalibus aut surdis) mensurari possunt, eo nempe modo quo mensuram accipit ipse, dum suos struit paralogismos. Et sanè cuncta ejus huc spectantia ratiocinia laborare videntur hâc unâ τῆς ἀμφιβολίας fallaciâ: etenim revera quæ eodem genere mensuræ determinantur homogenea sunt, sumendo mensuram pro parte, vel aliquo congruo rei mensuratæ; sed non semper homogenea sunt, quæ eodem genere mensuræ mensurantur, sumendo mensuram pro signo vel argumento; ita certè nulla fo-

rẹt

ret quantorum heterogeneitas, & facilè confecta res esset. Cæterùm ex his angustiis eluctari se posse sperat, rerum quantitates ab ipsis quantis perquam subtiliter distinguendo. *Quantitas* (inquit in Abstracto) *cujuscunque rei quantitati in abstracto cujuslibet alterius rei homogenea est, ideóque linearum, superficierum, solidorum, temporis, motûs, vis, ponderis, roboris, resistentiæ quantitates sunt homogeneæ, etsi res ipsæ sunt heterogeneæ.* Rursus, *Video jam quanquam absurdum sit lineam dicere tempori æqualem esse, non tamen absurdè dici quantitatem lineæ æqualem esse temporis quantitati.* Alibíque passim hoc inculcat mirificum commentum. Quo tamen nil efficit; verba tantùm dat nobis, aut potiùs sibi. Quòd enim per quantitatem istam abstractam ab ipsis linea & tempore distincti nihil animo concipiat ipse, quovis ausim pignore cum illo contendere. Quid est, obtestor, quantitas lineæ, præter ipsius lineæ singularem & determinatam magnitudinem, vel ipsa linea quà sic determinata? Quid quantitas temporis, nisi definita sui generis extensio, vel ipsum tempus quatenus taliter extensum? Ergo si linea & tempus heterogenea sunt, etiam ipsorum quantitates heterogeneæ erunt. Tempus & lineam esse res heterogeneas, non solùm ut res physicas, sed ut Mathematicæ contemplationi subditas, rei nimiâ coactus evidentiâ vix diffitetur ipse; at quomodo? non utique ceu calida vel frigida, nigra vel alba, sed ut quanta; nec enim aliter ea considerat Mathematicus. Quamobrem? quia nullam habent σχέσιν, non comparari queunt inter se κατὰ πηλικότητα

Dial. 3. *p.* 81.

Pag. 77.

(nos

(nos ut veridicus docet Euclides) quia ſcilicet non eodem modo quanta ſunt, at diverſi generis quantitatem habent; vel quia ſine magna dici nequit abſurditate, tantum eſt tempus quantum eſt linea, tantus eſt annus quantum eſt ſtadium. Ergo quantitates temporis & lineæ ſunt diverſi generis. Verùm reponit, quantitas temporis à linea menſuratur: ita dico rurſus, æquivocè ſumendo vocabulum menſurare; nempe non menſurat ut pars iſtius quantitas, aſt duntaxat ut ſignum cauſale vel conſequens; ex quo nihil in ejus rem concludatur. Addo, nec admodum propriè quantitatem temporis menſurari, ſed ipſum potiùs tempus ut quantum menſuratur, vel quoad quantitatem; ſicut non tam videtur albedo, quàm corpus quatenus album, ſeu propter albedinem, hoc eſt, quia taliter diſponitur, ut tali modo viſum afficiat. Unde nec juxta definitionem ejus, Homogenea ſunt quorum menſuræ congruunt, quantitates abſtractè ſumptæ ſunt homogeneitatis bene capaces; quia non ipſæ menſurantur, at concreta potiùs quanta propter aut quoad ipſas; & ſanè propter ipſas etiam homogenea ſunt, aut heterogenea Mathematicè. Verùm adhuc inſtat, temporum rationes rectè comparantur cum linearum rationibus; dicitur enim, Ut ſe habet annus ad biennium, ita linea pedalis ad bipedalem; quidni igitur quantitas temporis cum lineæ quantitate conferatur? At quàm immanis eſt ἀβλεψίας ejuſmodi ratiociniis, cum plurium rationum ſimilibus rationibus abſolutas ſimplicium quantitates confundere? Ex eo nimirum quòd ovum ſe habet ad duo ova, ſicut

ſicut angelus ad duos angelos; vel quòd unius ovi ad duo ova talis ſit relatio, qualis unius angeli ad duos angelos, quomodo inferatur ullo modo ovi & angeli ſimiles eſſe, vel homogeneas quantitates? vel quòd quantitatibus ovi & angeli eadem menſura congruat? vel quòd angelus ullam omnino poſſideat abſolutam quantitatem? At hujus & præcedentis inſtantiæ nulla prorſus eſt diſparitas. Non ovum ovo, quod aiunt, ſimilius. Ita ſcilicet uſu venire ſolet, ut qui ſuos errores extenuare vel defendere malunt, quàm ingenuè confiteri, nedum non declinant eos, at plures ſæpiùs, eóſque prioribus deteriores accumulent. Sed excidit mihi verſus ritè adagialis,

Μὴ κινεῖν καμαρίναν, ἀκίνητος γὰρ ἀμείνων.

Maneat autem quoniam temporis quantitas (annua ſcilicet, menſtrua, diurna) cum lineæ longitudine (pedali, cubitali, ſtadiali) ſecundùm æqualitatem aut inæqualitatem, exceſſum aut defectum, additionem vel ſubductionem nequit appoſitè comparari, illa penitus eſſe homogenea; neque non eodem modo affecta reliqua quanta, nec à Mathematicorum hac in parte communi ſententia atque ſermone diſcedendum eſſe. Quòd ſi hæc vocabula nonnunquam aliter occurrant uſurpata, ut ſi quis propter naturæ ſubalternam quandam diverſitatem, lineas curvas rectis, aut ſuperficies gibbas planis heterogeneas dicat; quomodo Ramus angulos rectos rectilineos obliquis rectilineis heterogeneos dicit (paríque ferè de cauſa potuiſſet quadrantem peripheriæ circularis ſextanti, lineam pedalem ſemipedali heterogeneas ap-

appellare); aut ſi propter convenientiam aliquam peculiarem genere disjuncta quanta vocentur homogenea; quomodo recens quidam Geometra, alioqui non ineruditus, parallelogrammum & cylindrum homogeneas figuras appellitat; eò quòd in hoc lineæ rectæ baſi parallelæ ſimili tenore procedunt, quo circuli paralleli in illo; quod is vocat per elementa proportionalia procedere. Tales (inquam) καινοφωνίας & peregrinas vocum novitates limpidiſſimis hiſce ſcientiis caliginem & confuſionem inducentes cavere præſtat & reſpuere; multóque ſatius eſſet exprimendis ſenſibus noſtris nova vocabula confringere, quàm veteribus uſu ſancitis abuti. Sed manum de hac tabula. Cogitâram his de quantorum ὁμογενείᾳ & ἑτερογενείᾳ diſputatis circa ipſorum ὁμοείδειαν & ἑτεροείδειαν (ſimilitudinem & diſſimilitudinem) quædam ſubjungere. Sed cùm currentis impetu calami præſtitutas etiamnum temporis metas fuerim prætervectus, ſufficiat ita jam ad illas, quæ cùm opportuna ſe præbuerit occaſio, proximè conſequentur de quantorum analogia diſquiſitiones utcunque viam muniviſſe. Vos interim bene valeatis precor, optimi & humaniſſimi auditores.

Ant. Farbius.

LECT.

LECT. II.

PRo more meo, posthabitis prooemiis, & ambagibus omnino prætermissis (postquam tamen vobis, auditores optimi quotquot estis, omnimodam salutem & gratulatus fuero præsentem, & diu futuram exoptavero) ad rem me confero protinus; & diutiùs intermissum pensum in manus resumo. Liceat autem bona vestra cum venia pridem institutæ methodo inhærere, quódque reliquum est susceptæ circa Matheseôs *προηγούμενα* tractationis detexere; quæ quidem spero fore cum hoc termino ut penitus absolvatur, quódque postquàm tamdiu circa littus hæsimus, & horam quasi scientiarum oras legimus, in altum tandem æquor provehemur. Quanquam revera quas modò discutiendas aggredimur materiæ, sive subtilitas ipsarum, sive spectetur utilitas, vix illæ multùm abesse videntur ab intima profundissimáque Mathesi. Veniunt siquidem imprimis considerandæ ratio vel proportio, tum analogica seu proportionalitas; circa quas nimirum aliquatenus universa Mathesis occupatur, vel ut objecta sua, vel ut instrumenta inveniendi ac demonstrandi; nec analogiam proinde immeritò vir divinus in opere divinissimo (Timæum intelligo) censuit, *δεσμὸν καὶ συνοχὴν τῶν μαθημάτων* (vinculum & commissuram Mathematum, an disciplinarum potiùs omnium). Nec inde abit il- *Theon Smyr. p.* 131. *Plato Tim. p.*1048.

illustrissimus author præclaræ de methodo
Pag. 18. utendi ratione diatribæ: *Quia* (ait) *animadvertebam illas* (particulares nempe scientias quæ Mathematicæ dicuntur) *etiamsi circa diversa objecta versarentur, in hoc tamen omnes convenire, quod nihil aliud quàm relationes sive proportiones quasdam, quæ in iis reperiuntur, examinent, has proportiones solas mihi esse considerandas putavi*. Theon. cap. Addo Eratosthenem pronunciantem, Πάντα τὰ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐξ ἀναλογίας ποσῶν τινῶν συστηκέναι. Adeo proportionum consideratio disciplinas hasce pervadit, & quodammodo complectitur universas. Non igitur ipsarum videri debemus tam extimam cutem lambere, quàm medullam intimam degustare, dum proportionum naturam contemplamur. Succedet huic θεωρίᾳ de magnitudinum situ vel positione determinata, quâ, simul cum ipsarum proportione, figurarum varia simimilitudo constat, & multifaria diversitas; tum de consequentibus has magnitudinum speciebus, seu convenientiis ac differentiis specificis; dein de motu quo progenerantur magnitudines: de his (inquam) succedet dispicere. Ita postquam pleraque, præcipua saltem, omnia magnitudinum symptomata, quæ Mathematicis quidem substernuntur, aut implicantur hypothesibus, utcunque perlustravimus, in eam, à qua primitùs digressi sumus, orbitam revertentes, de hypothesibus ipsis & reliquis principiis particularia quædam, quæ se suggesserint observatu digna, licebit in medium producere. Quibus defuncti negotiis ad id quod, ni malè memini, jam olim polliciti sumus conferemus operam, ut Mathematicæ sci-

ſcilicet inventionis modum exponamus. Erit autem quòd gratulemur nobis, ſi propoſitum hoc ſtadium hujus intra termini decurſum emetiri, vel utcunque ex animi ſententia conficere poterimus. His in anteceſſum prælibatis ad rationem ſeu proportionem excutiendam accedamus. Rationem & proportionem quod attinet (hæc enim nomina jam apud pleroſque Latinè ſcribentes ἰσοδύναμα ſunt) eam Græci deſignant vocabulo λόγος, quo certè vix ullum ſuccurrit in iſta lingua magìs anceps & πολύσημον. Significatus ejus quàm plurimos recenſere non abs re putavit Theon Smyrnæus expoſitione eorum quæ ad Platonis lectionem neceſſaria ſunt. *Cap.*18. Ego verò nimium philologus, & ἔξω λόγου, hoc eſt, extra propoſitum viderer evagari, ſi vel exſcribens eum vel imitans (quod in promptu foret eò connitenti) percenſere pleroſque ſtuderem & exemplis confirmare. Nemini non notum eſt, quòd vocabulum λόγος communiter utcunque ſermonem mentis ἐνδιάθετον, & oris προφορικὸν (ita recentiores diſtinguunt Peripatetici) ſermonis, inquam, utriuſque, tum conceptivi tum prolatitii, tam facultatem operatricem quàm operationes ipſas, nec non immediatos effectus ab eo manantes denotet ac exprimat, præſertim quicquid horum cum diſcurſu jungitur ad hominis naturam appropriato, qui ſolus inter animantia cenſetur ζῶον λογικὸν, animal ſermocinativum vel diſcurſivum. Neque magìs quenquam fugit literis mediocriter imbutum, quòd peculiari quadam ratione paſſim apud Græcos authores nedum ſententiæ ſingulares mente conceptæ vel

ore prolatæ, sed plurium sententiarum farragines & systemata diversimoda; fabulæ nempe vel apologi (hoc est, sermones ex arbitrio & ingenio conficti) nugæ & offuciæ (hoc est, mera verba, sensûs vacua vel veritatis) adagia, seu jactatæ vulgò sententiæ; rumores famâ vel populari sermone dispersi, historiæ omnimodæ, orationes jugi serie pertentæ; demum quælibet literæ λόγοι dicantur. Exempla præsto sunt, quibus hos usu tritos hujus vocabuli significatus firmem, ast illos lubens prætereo. Nescio tamen an operæ sit alias quasdam, quas etiam in popularibus obtinet scriptis acceptiones, ad rem nostram & sensum Geometricum propiùs accedentes paucis perstringere. Tales sunt quum λόγος designat taxationem & comparationem quamcunque rerum inter se, prout istis in phrasibus usitatis, Ἀποδιδόναι λόγον, συναίρειν λόγον, ὑπέχειν λόγον. Exempla dant etiam Sacræ Literæ; S. Lucas,
Luc. XVI. 2 Ἀπόδος λόγον τῆς οἰκονομίας σου. S. Matthæ-
Matth. XXV. 19. us, Ἔρχεται ὁ κύριος τῶν δούλων ἐκείνων καὶ συναίρει μετ' αὐτῶν λόγον. Ἀποδιδόναι λόγον, rationem reddere; συναίρειν λόγον, rationem inire: nempe muneris administrati, vel rei cujusvis concreditæ; quod nihil est aliud quàm actiones cum regulis ad quas exigendæ sunt, ex præscripto superioris potestatis, vel summas rerum exhibitas cum iis quæ jure debentur, aut meritò expectantur comparare. Item cùm λόγος rerum valorem, pretium, meritum innuit, quomodo dici solet ἐν οὐδενὶ λόγῳ τίθεσθαι· quod negligitur, posthabetur, vilipenditur, ——οὐδ' ἐν λόγῳ, οὐδ' ἐν ἀριθμῷ, quod in nulla ratione, nullo nu-

numero eſt, hoc eſt, inſtar nihili habetur, in cenſum non venit, neutiquam computatur. Sophocles,

> Ὀυκ ἂν πριαίμην ὐδενὸς λόγυ βροτὸν,
> Ὅστις κεναῖσιν ἐλπίσιν θερμαίνε).

Non caſsà nuce hominem emptitem, qui vana ſpe fervet. Ἐν λόγῳ θεὺς ποιεῖσθαι, dixit nonnunquam pro Deos venerari; & λόγον δικαίυ ποιεῖσθαι Demoſthenicum eſt, pro juſtitiam reſpicere vel ſuſpicere, non pro nihilo ducere. Addo Galenum, Ἐπὶ πάντων τῶν ζητυμένων εἰς λόγον χρὴ μεταλαμβάνεσθαι τὔνομα, in omni diſquiſitione nomen ipſum in conſiderationem aſſumi debet. Scilicet in hujuſmodi locutionibus λόγος aliquam rerum magnitudinem, vim, potentiam calculo vel æſtimio ſubjectam ſignat. Parúmque videtur hinc abludere quod λόγος ſubinde pro cauſa rei vel conditione ponitur, hoc eſt, pro eo quod conſiderari debet & requiritur, ut aliquid fiat. Plato epiſt. 7. ad Dionis, Ὀικείυς, ἥξειν (inquit) ὡμολόγησα ἐπὶ τύτοις τοῖς λόγοις, his conditionibus huc me venturum promiſi. Δέχεσθαι λόγον, uſitatur à Demoſthene pro cauſam agnoſcere, vel conditionem accipere. Ἐις λόγον ἀρετῆς, propter virtutem affici præmio, vel laude decorari. Et εἰς λόγον κακίας, pro vitio luere pœnas, vituperio defamari, ſunt oratoribus Græcis in uſu loquendi formulæ: propter virtutem & vitium, hoc eſt, ex virtute vel vitio conſideratis, juxta moralium præceptorum normas examinatis. Eo tantùm hæc attuli quò conſtaret à Geometris adhibitum hujuſce vocabuli ſenſum haud ita longè recedere ab uſu ſcriptores apud alios recepto

De Meth. Med. l. 5.

ſatíſque pervulgato; nec abhorrere noſtram à communi more loquendi conſuetudinem. Idem oſtendi poterat de Latina voce ratio, quæ Græcam λόγος exprimere ſolet, & ſuos ab illo pleroſque ſignificatus mutuari: ſed rei nimia claritas facit (& quia nimium jam hujuſmodi parergis datum eſt) ut iſti parcam operæ. Addam ſolùm, inde videri λόγον ejuſmodi ſenſus, cùm iſtos extraneos tum peculiarem Geometris ſenſum deſumpſiſſe, quod diverſas res inter ſe comparando dicitur, effertur, exprimitur ipſarum determinatus valor, aut quantitas, ex reſpectu quem una res obtinet ad aliam. Ratio autem ducitur à ratus, hoc eſt, à reor, idem deſignante quod puto vel exiſtimo; rerúmque proinde cenſum aut æſtimium indicat ex comparatione notificatum. Quomodo etiam verbum putare, deductáque ab illo computare, ſupputare, denotat numerando vel uteunque res conferendo quantæ ſunt (magnitudine vel pretio quantæ) æſtimare: quod & Græcis dicitur λογίζεσθαι. Vox autem proportio reperitur à Cicerone aliquoties uſurpata, quanquam ſenſu non uno exactè eodem. Alias enim apud ipſum idem valere videtur quod ſimplex ratio, nonnunquam verò rationum ſimilitudinem vel analogiam deſignare: primúſque videtur ille ipſe ejus uſum adinveniſſe, ſaltem ad res Mathematicas primus applicuiſſe. Sic innuit in fragmento quod Timæus inſcribitur, vel de univerſo: verba ſunt,* *Sed vinculorum id eſt aptiſſimum atque pulcherrimum, quod ex ſe atque de his*

* Δεσμῶν δ' ὁ κάλλιστος, ὃς ἂν αὐτὸν καὶ τὰ ξυνδούμενα ὅτι μάλιστα ἓν ποιῇ. Τοῦτο δὲ πέφυκε ἀναλογία κάλλιστα ἀποτελεῖν.

quæ

quæ astringit, quàm maximè unum efficit. Id optimè aſſequitur quæ Græcis ἀναλογία, Latinè (audendum eſt enim, quoniam hæc primùm à nobis novantur) *comparatio, proportióve dici poteſt. Porro ſæpiùs in iſto libello proportionis utitur vocabulo, ſenſu tamen, ut videri præmonitum, aliquà vario.* Ejus autem effingendæ hinc accepta videtur origo vel occaſio. Cùm in corrogandis vectigalibus, & importandis oneribus publicis, pro facultatum modo ſecundùm æquas leges taxato, ſua cuique pars perſolvenda ceſſerit, quæ nempe rata cujuſque portio dicta eſt; hinc unuſquiſque ſolvere dictus pro portione, vel pro rata ſua portione; hinc emerſit vocabulum proportio, dignum viſum Ciceroni, quum Græcas literas ſuo donare Latio ſtuderet, quod λόγον & ἀναλογίαν, obvias Platonem & alios Græcos Philoſophos inſpectanti voces, referret & exprimeret. Sed manum ferulæ ſubducamus, & Grammaticorum egreſſi ſcholis videamus quid per λόγον eíque reſpondentem rationem, & proportionem (juxta frequentiorem & probatiorem uſum proportionis, nonnunquam enim analogiam ſignificat, hoc eſt, proportionalitatem) intelligant ipſi Geometræ, quæque ſit hujus adeò triti vocabuli genuina notio diſquiramus. Permirum ſiquidem videatur ejuſce de rei, quæ paginam ferè replet utramque, nuſquámque non occurrit in Matheſi, natura viros inter Matheſeôs haud in poſtremis peritos acriter diſceptari. Quaſi neſciri poſſit res tam obvia, toties jactata, adeò diligenter excuſſa. Unde proveniat hoc? Inde opinor, quòd perdifficile ſit res admodum abſtractas

& universales, præsertímque modos & relationes rerum, vel imaginari distinctè vel accuratè definire. Ferè neminem arbitror fore, saltem è gnaris Mathematum, qui non utcunque quantúmque satis est intelligat, quid velit ipse dum profert hoc vocabulum, quídque concipiant alii proferentes ipsum; sed non ita forsan in promptu est ei respondentem conceptum mentis, proprium vel alienum, aliis verbis explicare, hoc est, ipsum definire. Hinc litigandi causâ non secus in hac quàm in aliis plerisque consimilibus materiis, à sensu disjunctis: subnotavit hoc Cartesius, & inde vitio vertit Philosophis morosam illam verba definiendi curiositatem, istis verbis; *Non hîc explico multa nomina, quibus jam usus sum vel utar in sequentibus, quia per se satìs nota videntur. Et sæpè adverti Philosophos in hoc errare, quòd ea quæ simplicissima erant, ac per se nota Logicis definitionibus explicare conarentur; ita enim ipsa obscuriora reddebant.* Quæ subtilissimi viri observatio vel inde validissimè confirmatur, quòd circa definitiones istas raro convenit inter illos, qui saltem nulli sectæ nomen suum addixerunt; at quam unus probat, alter respuit, & vel minùs aptam, aut non satìs accuratam judicat definitionem. Ut & exinde quòd illorum abstractissimorum nominum definitiones rarò vel nunquam demonstrationes ingrediantur; nec inserviant (qui tamen primarius definitionum usus est & scopus) conclusionibus eliciendis; instantiæ causâ, jam obiter, sed opportunè, adnoto definitionem τῦ λόγυ traditam in elementis, nusquam in toto elementorum systemate, nec alibi (quòd sciam

Princ.I.10.

am, imò diſtrictè aio non alibi) quovis in libro Mathematico citatur aſtruendæ ulli demonſtrationi, vel concluſioni deducendæ. Suppeditet alterum exemplum vox *διάστημα* veteres apud Muſicos, quod ex iis nemo non definit, at verbis diſcrepantes, & ſenſu nonnihil varii à ſe omnes: apparebit id Ariſtoxenum, Euclidem, Nicomachum, Bacchium, Ariſtidem, Gaudentium, Capellam, ſi cui ad lubitum erit, inſpectanti. Sed rem adoriamur propiùs. Adnotanda verò primùm occurrit ambiguitas, vel diſtinctio quædam, cui ſubjacent vocabula ratio & proportio, etiam prout illa uſurpantur à Mathematicis; Latinorum (inquam) vocabulorum, nam Græcum *λόγος*, ut exiſtimo, non agnoſcit iſtam homonymiam. Duplex igitur à quibuſdam ſtatuitur ratio vel duplex proportio, uni nomen indunt Arithmeticæ, alteri Geometricæ rationis vel proportionis. Quibus explicandis prænotetur imprimis rationem utramque, quæ dicitur cùm duorum homogeneorum quantorum comparationem innuat qualemcunque, ad claſſem iſtam ſeu categoriam entium ſpectare, quæ *τὰ πρός τι* Ariſtoteles, alii relationes vel habitudines, Græci *σχέσεις* indigitârunt. Quorum duorum quantorum ſeu terminorum (terminum enim vocant Mathematici horum correlatorum quantorum utrumvis: *Ὅρος* (inquit Theon Smyrnæus) *ὁ τὸ καθ' ἕκαστον ἀποφαίνων ἰδίωμα τῶν λεγομένων, οἷον ἀριθμὸς, μέγεθος, δύναμις, ὄγκος, βάρος.* Terminus eſt qui peculiarem dictorum naturam, ſeu proprietatem exprimit, ut numerus, magnitudo, moles, pondus. Et alibi cla-

Cap. XX. riùs, Ὅρους δὲ λέγομεν τὰ ὁμογενῆ, ἢ ὁμοειδῆ λαμβανόμενα εἰς σύγκρισιν· Terminos dicimus quæ cùm genere vel ſpecie conveniant, in comparationem adſumuntur. Horum (inquam) duorum terminorum in comparatione prior appellari conſuevit ἡγούμενος antecedens, ei verò correlatus poſterior ἑπόμενος conſequens. Hoc præmiſſo, Arithmeticam rationem ſeu proportionem, appellant nonnulli duorū quantorum, Τὴν κατὰ τὸ ὑπερέχειν καὶ ἐλλείπειν σχέσιν (verba ſunt Scholiaſtæ veteris à Meibomio citati) relationem ſecundùm differentiam, quatenus unum excedit alterum, vel deficit ab altero (poſſit adjici κατὰ τὸ ἰσοῦσθαι, adæquari, ſibi vel nihilo differre; nam & inter æqualia quanta poteſt inſtitui comparatio, potéſtque ſingularis hæc ipſorum relatio denotari per τὸ differre nihilo, quod inter exceſſum & defectum medius interjicitur limes). Per differentiam autem hîc intelligimus ipſum τὸ διαφέρειν, ſingulari modo comparari vel referri hoc ad illud, non abſolutum id quantum, quod poſt unius ab altero ſubductionem eſt reſiduum, quod quidem διαφορὰ & differentia plerunque dicitur. E.g. relatio quæ verſatur inter lineam tripedalem & lineam bipedalem, juxta quam illa ſuperare concipitur hanc lineâ pedali; vel inversè, relatio bipedalis ad tripedalem, quatenus illa concipitur ab hac deficere quantitate lineæ pedalis, appellantur rationes Arithmeticæ, illa exceſsûs, hæc defectûs; ipſa verò pedalis linea, abſoluta magnitudo, quamvis differentiæ nomine venire ſolet, attamen ratio non eſt; ſed hæc excedere vel deficere ratio dicitur Arithmetica. Hanc

talem

talem (aio) quantorum habitudinem ad ſe invicem nonnulli rationis Arithmeticæ donant appellamento. (Cur Arithmeticam dixerint non jam diſputabo, res quippe controverſa eſt; tantùm inde ſic denominatam videri dicam, quòd analogiam quandam veteres Arithmeticam appellârint, qua de cauſa tum diſpiciendi locus erit, cùm de analogiis agemus). Verùm apud Græcos nuſquam reperio λόγον aliquem Arithmeticum; ſemper ii quantorum λόγον contra diſtinguunt ab ipſorum differentia, quæ ſignificant vocabulis διαφορὰ & ὑπεροχὴ, nec raró διάστημα nuncupant (intervallum, ſpatium, diſtantiam, non ex poſitione locali reſultantem innuentes intercapedinem, aſt diverſitatem & quaſi diſtantiam in quantitate, per quam unum abeſt ut alteri ſit æquale; determinatam quandam ab æqualitate remotionem) per λόγον autem (ut opinor) perpetuò deſignant illam quantorum σχέσιν, quæ dici ſolet ratio Geometrica, vel ratio ſimpliciter. Apud omnes enim cùm ratio ponitur ἀπολύτως, & ab epitheto libera, ratio intelligitur Geometrica, hoc eſt, ea σχέσις juxta quam unum quantum alterius totuplum vel quaſi totuplum concipitur (ita continere aliud, vel ita contineri in alio, ſicut numerus iſte continet alium, vel continetur in alio; vel ſaltem ſicut expoſitorum duorum quantorum illud continet hoc, vel continetur in hoc) quo pacto v.g. relatio lineæ tripedalis ad bipedalem, juxta quam illa ſemel hanc, & ejus inſuper ſemiſſem concipitur includere; vel ad hanc ſe habere, ſicut numerus ternarius ad binarium, dicitur ratio Geometrica, vel ratio

tio (ſimpliciter) ſeſquialtera: inverſéque relatio lineæ bipedalis ad tripedalem, juxta quam illa duas hujus partes efficit tertias, vel ſe habet ad hanc ſicut numerus binarius ad ternarium, dicitur ratio ſeſquialtera. E quibus utcunque liquere poteſt, quantum interſit diſcriminis inter haſce duas relationes, Arithmeticam & Geometricam, quas appellitant. Valde differunt enim aliud hoc vel illo excedere, & aliud toties (vel quaſi toties, id addo certa de cauſa poſthac inſinuanda) continere; hoc vel illo deficere, & toties ab alio comprehendi. Vulgò explicatur hoc diſcrimen haud malè ex modo, quo inveſtigantur & innoteſcunt hæ relationes, tum ſaltem quum termini comparati numeris exprimuntur (exceptionem hanc oppono, quia video propter illum neglectum rationum doctrinam aut perperam aut obſcurè tradi) ſed ponamus terminos inter ſe collatos numeris exprimi; tum invenitur ipſorum Arithmetica ratio, ſubducendo terminum conſequentem ab antecedente; Geometrica verò dividendo terminum antecedentem per conſequentem (invenitur inquam, hoc eſt, indicatur, æſtimationi noſtræ ſubjicitur). E. g. comparando duo quanta numeris ternario & binario denominata, lineas puta tripedalem & bipedalem, ſubducendo binarium ex ternario relinquitur differentia unum, vel una pedalis linea. Sin tranſpoſitis terminis auferatur linea tripedalis ex bipedali remanet minus uno, vel defectus unius lineæ pedalis pro differentia; ex his verò reſiduis inclareſcunt relationes quoad differentiam, vel Arithmeticæ propoſitorum

sitorum quantorum rationes; quatenus si inventum ab utravis subductione residuum addatur consequenti, summa resultans æquabitur antecedenti: nam in priori comparatione $1+2=3$, in posteriori $-1+3=2$. (Huc verò tendere videtur omnis quantorum σύγκρισις, ut ad æqualitatem, quæ præ reliquis maximè simplex, unicè permanens, facillimèque comprehensibilis est relatio, redigantur aliæ, & utcunque per eam æstimentur). Vocatur autem prior relatio ex priore differentia excessûs unius, altera defectûs unius, itidem scilicet ex differentia posteriore. Jam verò si comparentur duo quanta, repræsentata numeris 20 & 4, dividendo antecedentem 20 per consequentem 4, fit quotiens 5; sed invertendo terminos, dividendóque 4 per 20, surgit quotiens $\frac{1}{5}=\frac{4}{20}$. Hisce verò quotientibus declarantur rationes Geometricæ propositorum quantorum, quatenus si quotiens inventus per consequentem multiplicetur, productus emergit æqualis antecedenti: nam in priori comparatione $5\times4=20$, in posteriori verò $\frac{1}{5}\times20=4$; quomodo res iterum ad æqualitatem revocatur. Denominatur autem prior relatio à quotiente invento ratio quintupla, posterior ἀντίστροφος ratio subquintupla, itidem à quotiente $\frac{1}{5}$. Ast causa mihi jam reddenda videtur, quamobrem aliter quàm vulgò fit Arithmeticam rationem explicuerim, non subducendo minorem terminum à majore, sed indifferenter consequentem ex antecedente. Causam assignare licebit multiplicem: Primò, commodior est hic modus isti, cui declarando insistimus, discrimini rationum

num

num harum diversarum per subductionem & divisionem declarando. Quia secundùm hunc modum subductio, qua indicatur ratio Arithmetica, per omnia respondet & quadrat divisioni, quâ ratio Geometrica declaratur. Nam juxta nos peragitur isthic duplex subductio, sicut hîc duplex divisio: subducitur isthuc terminus major à minore (quæ impropriè est subductio) sicut hîc dividitur minor terminus à majore (quæ impropria est divisio). Emergit isthuc residuum nihilo minus, sicut hîc quotiens unitate minor; illuc ex consequentis & residui additione semper fit antecedens, planè sicut hîc ex consequentis & quotientis multiplicatione procreatur antecedens; ita pulchrè congruunt omnia: commodior igitur est hic modus altero, juxta quem fit tantùm una subductio, differentia tantùm est unimoda (semper intelligo positiva) seu major nihilo, nec reliqua quovis pacto bene consentiunt. Secundò, in se quoque verior est, & ipsissimæ rationi convenientior hic modus rationes Arithmeticas per subductionem explicandi. Quum enim comparando duo quanta inæqualia terminorum transpositio duplicem efficiat σχέσιν (non enim eodem modo refertur major terminus ad minorem, quo minor ad majorem) per unicam differentiam, minoris è majore subductione, acquisitam vel inventam, hæ duæ rationes non explicantur rectè & ex usu. Præstat eas duabus differentiis exprimere, alterâ positivâ excessum, alterâ negativâ defectum indicante. Non idem est deficere quod excedere, non igitur eodem signo denotandi sunt excessus

&

& defectus. Hoc quum non observarent aliqui, nullam dari quoad *διαφορὰν* quantorum *σχέσιν* asseruerunt; quoniam si daretur aliqua, duplex esse debuerit; at differentia positiva simplex est & unica. Nicomachus in Enchiridio Harmonices, Κακῶς γὰρ οἴονται διαφορὰν καὶ σχέσιν τὸ αὐτὸ εἶναι· ἰδοὺ γὰρ τὰ δύο πρὸς τὸ ἓν διαφορὰν μὲν ἔχει τὴν αὐτὴν, ἣν ἓν πρὸς δύο, σχέσιν δὲ οὐ τὴν αὐτήν· *Malè opinantur qui differentiam & relationem pro eodem habent: ecce enim duo ad unum differentiam habent eandem, quam unum ad duo, sed neutiquam eandem relationem.* Satìs consequenter arguit ex unicæ differentiæ hypothesi; at enim respondeo quòd differentia inter 1 & 2 sit —1, significans 1 à 2 deficere uno; differentia verò inter 2 & 1 est +1, significans 2 superare 1 ipso 1. Quum igitur duplex sit differentia, nil obstat quin sint duæ relationes sibi quasi contrariæ vel universæ. (Malè igitur Theon ille Smyrnæus, Nicomacho consentiens, Τῶν δὲ ἀνίσων διάστημα μὲν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, ἐφ᾽ ἑκάτερα ἑκάτερον· λόγος δὲ ἕτερος καὶ ἐναντίος ἑκατέρου πρὸς ἑκάτερον, & quæ sequuntur in eandem sententiam). Sanè vix percipio cur non æquè confundi debeant rationes Geometricæ, quæ inter duos terminos inæquales, ex terminorum intercedant Metathesi sic ut pro una ratione habeantur, æquè ac vulgò commiscentur, próque una censentur relationes secundùm *διαφορὰν*, quæ inter terminos itidem æquales versantur. Nec obstat quòd impropria sit hujusmodi subductio majoris à minore, quódque difficile videatur concipere quid ipso nihilominus. Nam haud ferè minùs impropria censea- Cap. 30.

tur

tur diviſio minoris per majus, neque faciliùs videatur concipere quoties majus à minore continetur. Satìs eſt quòd hujuſmodi ſubductio, pari modo ac iſtiuſmodi diviſio, exactè calculo paret, ac legibus ſubjacet Arithmeticis, & non ſine ratione confingitur aut adhibetur. Adjici poſſet hunc ſubducendi modum, quoad alia valde utilem eſſe, præſertim in progreſſionum Geometricarum comparatione cum Arithmeticis; & imprimis illarum progreſſionum, quæ utrinque ab unitate procedunt hinc creſcendo, illinc decreſcendo; ſicut enim creſcentibus terminis exponentes aſſignantur poſitivi, ita decreſcentibus commodiſſimè tribuuntur negativi. Sed hoc non eſt jam perſuadendi locus. Moneo tantùm in Geometria facilè differentes haſce negativas, ſeu nihilo minores terminos exhiberi. Nam ab eodem fixo limite tantùm in partes ſtatuuntur & computantur contrarias iis, in quas procurrunt termini poſitivi nihilo majores. Ut ſi in linea recta indefinitè extenſa duæ rectæ AM, AN,

ſumptæ utrinq; in partes contrarias, ſingulæ æquentur cuilibet rectæ Z, & recta AM anteriùs excurrens repræſentet +Z, tum AN retrorſum accepta repræſentabit —Z. Ut puta nantem ab A verſus anteriora, ſed adverſo flumine brachiorum contentione progreſſurum ad M, ſed fluminis impetu duplo valentiore retrò deportari. Igitur ab eo confectum iter erit AM—2AM vel —AM, ab A verſus partes à tergo poſitas computanda, & pertingens ad N. At ſufficiant

hæc

hæc aliquatenus illuſtrando diſcrimini, quod inter rationes Arithmeticam & Geometricam intercedit, per ſubductionem & diviſionem. De eadem forſan re poſthac opportuniùs & accuratiùs differemus, quum examinanda veniet eorum ſententia, qui rationum doctrinam numeris volunt alligari, & quæ iſti cohærent diſquiſitioni. Nunc unum ſolummodo vel alterum harum relationum diſcrimen attingemus, ex ipſorum natura petitum. Illud imprimis advertatur rationem Arithmeticam eandem unius tantùm generis terminis exhiberi, rationem verò Geometricam cujuſvis generis quantis bene repræſentari vel exprimi. Cauſa eſt, quia ratio Arithmetica determinatur per abſolutum quiddam intra certum genus conſtitutum, differentiam nempe quantorum duorum homogeneorum, quæ terminis ipſis ita comparatis ſemper homogenea exiſtit: ſed ratio Geometrica determinatur ex modo, quo res una continet aliam, vel continetur in alia, qui modus terminorum heterogeneorum conjugationibus variis æquè poteſt competere; unde fit ut quælibet duo quanta ſint apta nata quorumvis aliorum duorum quantorum ſimiliter affectorum relationes exprimere, vel menti æſtimandas ſubjicere. E.g. ratio Arithmetica duarum linearum inæqualium ſolis duabus lineis (non duobus ponderibus, temporibus, corporibus) exhiberi poteſt, quia nulla linea pondere quovis aut tempore, vel corpore lineam alteram excedit, at aliquâ lineâ tantùm, eâque ſecundùm abſolutam ſuam quantitatem definitâ; ſed ratio Geometrica duarum earundem linearum exprimi mi poteſt duobus ponderibus, duobus temporibus, aut aliis cujuſvis generis duobus quantis: ut nempe quæ pedem inter & unciam longitudinalem verſatur, ratio repræſentetur librâ & unciâ ponderibus, anno & menſe temporibus, aut aliis quibuſvis ſimilibus terminis, quorum unus alterum continet duodecies; quia ſcilicet harum conjugationum utut ſecundùm abſolutas ſuas quantitates invicem heterogenearum termini inter ſe collati eodem ſe modo reſpiciunt, versùs ſe conſimiliter affecti ſunt. Exhinc anſam cepit doctiſſimus vir dicendi, *Rationes omnes Geometricas quarumcunque ad invicem quantitatum eſſe inter ſe homogeneas, quippe in genere numeroſo omnes.* Adjungítque poſtea, *Ubi comparatio fit quoad rationem, quæ emergit ratio comparatorum, genus non rarò deſerit, & tranſit in genus numeroſum, cujuſcunque ſint generis quæ comparantur.* Quæ tamen dicta minùs probo, cùm aliis de cauſis non jam exponendis, tum quia nullum ego vel rationum vel numerorum genus, ſub quantitate comprehenſum agnoſco; nec enim rationes ſunt meâ ſententiâ quantitates, nec quantitatis capaces (ut ſuo poſthac loco conabor evincere) ſed meræ relationes in quantitate fundatæ; numeros autem pro nominibus tantùm & ſymbolis habeo rerum quantarum, quod jam antea ſæpiùs expoſui & aſtruxi. Addo manifeſtum videri, quòd cùm duo quanta comparantur inter ſe (ut ſcilicet ipſorum ratio per artificioſas quaſlibet operationes Arithmeticas vel Geometricas inveſtigetur, hoc eſt, menti noſtræ comprehenſibilis & æſtimabilis reddatur) non tamen inde nova procu-

D. Wallis Arithm. p. 226.

ditur

ditur aut emergit ratio, quàm eadem aliis terminis exhibetur; nec unquam ratio genus suum deserit, sed diversi generis terminis, simplicioribus ut plurimùm & menti notioribus exhibetur; plerumque quidem (cùm id fieri potest) numeris, ideo quia hi symbola sunt rerum mensuris ad nostrum captum determinandis accomodatissima. Percontanti v.g. quam rationem in valore vel in pondere habet solidus ad drachmam, qui respondet, rationem habet numeri 12 ad 4, non aliam producit rationem, at quæsitam exponit terminis numericis; & qui porro quærit quæ sit ratio numeri 12 ad 4, dividendóque antecedentem 12 per consequentem 4, comperit hanc esse triplam, non is novam rationem educit aut enunciat, at propositam exprimit terminis faciliùs æstimandis, hoc est, numeris, iísque tandem minimis ternario ac unitate. Qui dicit enim illud hujus triplum esse, dicit æquipollenter, & illud vult intelligi illud ad hoc se habere sicut 3 ad 1; antecedente scilicet expresso, sed consequente (qui semper in hujusmodi rationum denominationibus est unitas) verbo tenus suppresso, re subintellecto. Hinc altera diversitas harum rationum adnotari potest, quòd Geometrica semper duobus terminis, saltem quoad intellectum, exprimitur, iísque semper positivis (nam etiam duorum negantium terminorum ratio positiva est, puta τοῦ —4 ad —2 est dupla, vel ut 2 ad 1, quod inde patet, quia multiplicando terminum utrumque per —1, producitur +4 & +2, habentes se ut 2 ad 1). Sed Arithmetica ratio tantùm uno termino exprimitur, eóque nonnunquam negativo: ut talis ratio inter 1 & 3, commodissimè indicatur per negativum terminum —2, ut supra mox admonitum. Accedit quòd Arithmetica ratio reperitur inter duos terminos diversis signis affectos; at inter tales nulla versatur ratio Geometrica. E.g. ratio Arithmetica inter 2 & —2 est eadem rationi quæ inter 6 & 2; nam utrobique excessus antecedentis supra consequentem est 4, at 2 ad —2 nullam Geometricam obtinet rationem; habet enim se ad illud, sicut aliquid ad plusquam infinitè parvum, nec ullus est cogitabilis numerus, utcunque magnus, qui non sit minor respectu unius, quàm 2 respectu —2. Porro, æqualium ratio Geometrica semper denominatur unitate, ratio Arithmetica nihilo; majoris ad minus ratio Geometrica, numeris explicabilis, denominatur unitatem excedente numero, integro vel misto. Pariter & ratio Arithmetica nihilum excedente differentià, (quæ tamen unitatem non semper attingit) minoris autem ad majus ratio Geometrica semper fractione vel numero, qui sit unitate minor denominatur, at ratio Arithmetica talium terminorum signatur infra nihilum subsidente numero negationem involvente, ut antehac inculcavimus. At verò de harum rationum discrepantiis diximus plusquam satìs. Cùm igitur adeò naturâ diversæ sint hæ relationes, idem rationis nomen utrique non conveniet univocè quod aiunt; adeóque præstat id vocabuli Geometricæ soli appropriatum relinqui. Nósq; dimissâ jam istâ ἀκύρως dictâ ad propiùs explorandam hujusce Geometricæ rationis notionem accedamus. Aperuisse

ruiſſe viam ancipitiis præpeditam ſuffecerit τὸ νῦν. Ei proxima Lectione preſſius inſiſtemus; interim (auditores optimi) precor valeatis.

LECT. III.

1666

PRæfationibus utcunque defuncti, diſcuſſiſque quæ ſe objecerant ambiguitatum nebulis, ipſam Geometricæ rationis naturam jam aggredimur inquirendam & enodandam. Geometrica verò ratio, vel ratio ſimpliciter (hoc enim ſenſu deinceps perpetuò hoc vocabulum uſurpavimus, ut & ei æquipollens proportio) ratio, inquam, vel proportio, ὁ λόγος definitur ab Euclide (vel ab Eudoxo ſi quidem is fuerit, ut perhibetur, elementi V compoſitor) Δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Circa quam definitionem duo quæri poſſunt & diſceptari; primò quæ ſit ejus genuina mens, tum an ipſa ſatis proba ſit & accurata. Utrique diſquiſitioni ſatisfacere conabor, ad ſingulos ejus terminos quædam annotando, quò magiſtri noſtri ſimul interpretatur ſenſus, & tueamur auctoritatem. (Ignoſcite verò pugnacitati meæ, neque ſequiùs accipite, quòd pietate quadam adductus immeritis undique criminationibus impetitum Geometriæ patrem & principem ſtudeam vindicare). In omni imprimis definitione 1.
ſpectandum eſt, ut res definita ad certam entium claſſem reſtringatur; id enim ad

ejus naturam determinandam, & ab aliis secernendam, apprime confert. Ergò primò genus inquiritur: hoc in hac definitione est σχέσις, habitudo vel relatio; rectè quidem, nam quum omne quantum dupliciter considerari possit, vel ut certam quandam absolutam sui generis extensionem (absolutam, inquam, & ex intrinseca naturæ suæ proprietate determinatam) habens, vel quatenus cum alio quanto collata certo versùs ipsum modo se habet; cujus modi comprehensio menti nostræ deserviat, ad quantitatem ejus absolutam meliùs concipiendam, & aliis enunciandam; certo modo, dixi, se habet, hoc est, ut vel ei penitus congruat & æquetur, vel inæquale sit ratione quadam peculiari, quæ per numeros (hoc est, symbola quantorum in æquales partes divisorum connotantia) vel per aliorum quantorum eodem modo se habentium expositionem, nobis utcunque nota reddatur & æstimabilis. (Ignoscite quæso vos rem explicatu perdifficilem, & subtilitate sua mentis attentissimæ cogitationi illudentem, crassiusculè laboranti illustrare) hoc autem certo modo se habere versùs aliud, alteri sic æquari, vel certa ratione quadam inæquale esse dicitur (ex instituto dicitur, consensúque magistrorum rebus in hac scientia consideratis nomina præscribentium) hanc vel illam ad alterum rationem habere; & respectus ipse talis abstractè sumptus ratio nuncupatur, quæ proinde meritò relationum classi seu categoriæ accensetur: liquet enim ipsa quanta hoc pacto considerata fore τὰ πρός τι referri ad se mutuò, cuncta subire, quæ relatis & correla-

tis

tis aſſignant Logici; unde prima τ̃ πρόςτι deſumpſit hinc exempla Philoſophus, cùm in Metaphyſicis tum in Logicis: Οἷον (inquit) τὸ μεῖζον τοῦθ' ὅπερ ἐστὶν ἑτέρου λέγεται· τινὸς γὰρ μεῖζον λέγεται· καὶ τὸ διπλάσιον τοῦθ' ὅπερ ἐστὶν ἑτέρου λέγεται· τινὸς γὰρ διπλάσιον. Nihilominus tamen hoc nomine mirificus ille Matheſeὸs hodiernæ caſtigator noſtras, Euclidem ſugillat inclementiſſime & irreverentiſſimè. *Rationis*, inquit, *definitio* (hanc innuens Euclideam) *ſatis inepta.* Iterum, *Id quod Euclides inſignificanter dixerat.* Adhuc, *Fieri poteſt ut Euclides non ſatis ipſe perſpexerit rationis naturam; imò fieri aliter non poteſt, cùm definierit rationem per ποιὰ σχέσις.* Denuò cenſet Euclidem hoc loco tuſſiiſſe, hoc eſt, cùm nihil haberet quod ad rem diceret, ſonum mentis vacuum edidiſſe. Sed bona verba; quæ cauſa tam tragicè ſæviendi? quia ſcilicet ὁ στοιχειωτὴς rationem per σχέσιν definivit; σχέσις autem quod tu capere potes, aut vis nihil ſignificat: quid facias hoc homine? ipſe rationem, teſte ſeipſo ac judice, verè ſicut omnia & accuratè definit, hoc modo, *Ratio eſt relatio antecedentis ad conſequens ſecundùm magnitudinem.* Ratio eſt relatio, quid aliud cogitavit aut voluit Euclides? quis ejus unquam mentem aliter cepit? Sed pro jure ſuo vult hic ordinis Dictatorii vir non tantùm ipſe loqui, ſed alios loquentes intelligere ſuum ad modum & arbitrium; adſumit ſibi (quis enim prohibeat?) vocabulorum peritiſſimus faber, animi ſui ſenſum præter morem efferre, ſed nec eo contentus adrogat ſibi poteſtatem, alienas quoque ſententias contra commune ſuffragium & receptiſſi-

Pag. 44, 100, 88, 82.

Pag. 45.

mum uſum interpretandi. Σχέσις, quando ſic ipſe jubet & ſtatuit, habitudinem ſignificare debet; habitudo verò nihil, quicquid alii plerique reclament mortales, iſta vocabula certos ad ſenſus ſuos deſignandos adhibentes. Grammatici congruentiam iſtam ſeu connexionem inter ſubſtantivum & adjectivum, nomina intercedentem σχέσιν ὀνομάτων vocant. Theologi diſputant an imagines ſint adorandæ σχετικῶς, hoc eſt, propter σχέσιν ſeu relationem quam obtinent ad prototypa quæ repræſentant. Illas quæ cognatos & affines verſantur relationes, ex naturæ conjunctione vel mutuis pactionibus oriundas, communis ſermo σχέσεων deſignat appellamento. Plauſtra liceret exemplorum invehere; ſufficiat probatiſſimi unius Grammatici luculentum teſtimonium: Ἡ σχέσις (inquit Suidas) ἐπὶ τῶν πρός τι λέγεται, οἷον πρὸς πατέρα υἱός, πρὸς φίλον φίλος· ταῦτα γὰρ καὶ ἔχει καὶ ἔχεται ἀπ' ἀλλήλων, διὸ καὶ σχέσεις προσείρηνται· πρὸς δέ τι εἰσὶν καὶ τὰ κατὰ σύγκρισιν λεγόμενα, οἷον μικρὸν, μεῖζον, διπλάσιον, καὶ ἐπιστήμη, καὶ αἴσθησις. Non igitur vocabulum σχέσις prorſus inſignificans & ſenſûs expers eſt at certè quiddam aptè ſatis notat, nec aliud planè quam ipſam relationem. *Sed*
Pag.45. *quæro*(inquit adverſarius)*quid eſt quod hoc loco habet, quid quod habetur? Et an ratio dicatur habitudo, ab eo quòd ipſa habet aliquid, vel ab eo quod habetur? Et ſiquidem habet quid ſit quod habet, ſin habeatur a quo habetur. Quæ omnia ſunt inepta.* Ad quæ regero, quum ab ipſo ratio dicitur relatio, ſciſcitor & ego quòd ſit iſthic quod fertur aut refertur, unde vel quò fertur; qui motus iſthic inter terminos duos com-

comparatos reciprocatur. Scilicet revera non vacat ineptiâ vocabulorum vires & significatus strictâ severâque lege solis ex etymis colligere vel adstruere, qui potiùs ab utentium consuetudine consensûque, cui suam unicè significandi vim ac potestatem debent, accipiendi sunt & approbandi. Quanquam cùm τὸ ἔχειν innumeris modis usurpetur, nihil usitatius sit Philosophis, quàm eo relationem & respectum τοῦ πρός τι denotare. Aristoteles in Categoriis, Ἔστι δὲ τὸ εἶναι τοῖς πρός τι ταυτὸν τῷ πρός τι πῶς ἔχειν. Relationum essentia consistit in hoc, quòd ad aliquid se certo modo habeant, vel quodammodo sint affecta. Illud autem habere fundamentum innuit verum & reale quod habetur & reperitur in terminis singulæ cujusque relationis, propter quod vel secundùm quod se mutuò respiciunt. Habetur v.g. (quò pleniùs respondeatur adversario) determinata quantitas in terminis cujuscunque proportionis, propter aut juxta quam una comparatur cum alia; unde forma loquendi frequentata Geometris, nec ab ipso non animadversa, quæ rationum similitudines explicantur per ὡς ἔχει, οὕτως ἔχει· Ut se habet A ad B, ita se habet C ad D. Non igitur delirat Euclides (is cui tot seculorum communi voce toties acclamatum est, nusquam erravit) sed ejus censor insolenter cavillatur; non is insignificanter scribit, ast hic oscitanter legit; non ille rationis naturam minùs perspexit, at hic rationem explicantis verba pervertit; non denique tussit Euclides, sed ὁ δεῖνα inverecundè crepat: omnino sanè dignus, cui talionem quis remetiatur, & illud increpet

Euripideum, ——'Ἐπεὶ τὰ μὴ καλὰ
Λέγειν ἐτόλμας, πλῆθε καὶ τὰ μὴ φίλα.
Sed illum soleo nimium morari; (unum obiter adnotabo, quod Nicomachus Gerasenus in Musicis, qua ratione vel authoritate fretus nescio, ordine permutato σχέσιν habet pro specie; λόγον pro genere; Σχέσις, inquit, λόγος (ἐστὶν) ἐν ἑκάστῳ διαστήματι μετρητικὸς τῆς ἀποστάσεως. Post genus in accidentium definitionibus subjecta proximè spectari debent, in relationibus qui dicuntur termini. Hinc adverto proximè τῆς στοιχειώσεως, cùm Geometricæ materiæ dicaret hoc elementum magnitudinem solummodo rationum definiendam suscepisse. Hinc habetur μεγεθῶν, pro quo siquidem ratio generalissimè definienda esset, substitui deberet τῶν ποσῶν aut τῶν ὅρων· sicut apud Theonem Smyrnæum, Λόγος δέ ἐστιν ὁ κατ' ἀνάλογον δυοῖν ὅρων ὁμογενῶν ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις· & Nicomachum in Arithmeticis, Λόγος ἐστὶ δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλους σχέσις. Reprehendit autem auctorem nostrum Ramus hac de causa, quod magnitudinum rationem seorsim definierit, quum ratio convenit omnibus rebus: *Elenchus*(inquit) *toto libro perpetuus est Logicæ & Arithmeticæ, ad posteriorem materiam de magnitudinibus alligatæ.* Respondeo primùm, saltem ab hoc ipso censore majorem committi elenchum, qui rationem numeris alligat, materiæ æquè speciali & minus aptæ: *Altera*(inquit) *quantitatis comparatio est è numeratione conjuncta, & dicitur ratio, quæ spectatur quotiens consequens in antecedente contineatur.* Quasi verò quantitatis omnimoda comparatio numerationi subderetur, numeris con-

Nicom. Muf. l. 1. p 24.

2.

Cap. 19.

Lib. 2. p. 62

Schol. 13.

Arith. 2. 2.

conveniret omnis ratio, vel numeris exprimi poſſet. Satis conſtat, nec ipſe diffitetur, rationes quaſdam dari ἀλόγους & ἀῤῥήτους, ſurdas & numeris inexplicabiles; at nulla datur in univerſum ratio, quæ in cujuſvis generis magnitudinibus nequit exhiberi. Numerus igitur ineptiùs adſumitur pro rationis adæquato ſubjecto; magnitudo multùm aptior eſt, utpote cui nullus rationis modus, nulla ſpecies non convenit. Secundò reſpondeo, cùm (ut jam olim abunde mihi videor comprobâſſe) magnitudo ſit præcipuum & ſolum proprie dictum genus quantitatis, & reliqua non niſi κατὰ θέσιν, κατὰ μετοχὴν, κατ' ἀναλογίαν, adeóque non niſi ſecundariò quantorum attributa ſibi vindicent, cúmque nos id bene doceat Philoſophus, id rationem exigere talium, τῶν πρὸς ἕν vel analogorum, ut quæ primaria ſunt eorum reſpectu communia ſymptomata ſeorſim, & imprimis definiantur ('Αποδοτέον πρὸς τὸ πρῶτον ἐν ἑκάστῃ κατηγορίᾳ πῶς πρὸς ἐκεῖνο λέγεται· &, 'Ο πρώτως καὶ ἁπλῶς ὁρισμὸς τῶν ἄλλων ὁμοίως ἐστὶ, πλὴν οὐ πρώτως) hinc meritò magnitudinum ratio primùm definitur & ſeparatim, eíque primariò conveniens definitio nil obſtat, quin ad aliorum quantorum rationes analogicè transferatur. Et ſanè quicquid magnitudinum rationibus verè tribuitur, & de iis demonſtratur, id quantorum omnium rationibus exactè congruit; quatenus omnia quanta prout ipſam ſuam abſolutam quantitatem, ita reſpectivam quoque conſequenter à magnitudine dependentem & determinandam habent. Reſpondeo tertiò, elementi V conditorem, cùm (ſicut

Met. III. 2.
VII. 4.

(ſicut paulo jam ante inſinuatum) magnitudinum rationes rebus Geometricis illigatas, ſibimet unicè proponeret excutiendas, ideo ſatis habuiſſe ſi duntaxat ipſarum naturam apertè profiteretur exponere. Scientiarum omnium particularium Magiſtris hoc in uſu poſitum eſt: Grammatici modos & tempora deſcribunt tantùm, ut verborum flectionibus adſignificata: Rhetorici tropos & ſchemata, non ut rebus omnibus, ſed ut dictionibus & ſententiis convenientia: Ethicus virtutes definit, non ut ipſis comprehendantur, quas Plato toties prædicat, equorum canúmque virtutes, ſed humanas tantùm, & τὰς μετὰ λόγου πρακτικὰς· Muſici rationes & diaſtemata non omnium explicant quantorum, ſed τῶν φθόγγων, hoc eſt, ſonorum ἐμμελῶν· nè plura diſciplinæ quæque particulares hoc ſibi juris adſumere ſolent, ut vocabulorum quibus expedit uti, laxiores alioquin ſignificatus ad ſuam ſpecialem deducant, ad ſubſtratam ſibi σκέψιν adaptant aſtringántque terminos ſuos, quatenus uſurpant, eatenus definiunt aut deſcribunt, cùm aliis de cauſis, tum perſpicuitati præſertim ſtudentes, ſed & aliquatenus conſulentes brevitati; eo ſcilicet vitantes, nè aut generalem quandam à ſuo propoſito maxima ex parte ſejunctam doctrinam aliunde cogantur repetere, vel dicendorum intelligentiæ conducentem explicationem omittere. Quòd ſi Logicæ Ramæanæ legibus minùs ad amuſſim congruat hoc, non ideo rationis ipſius adverſatur decretis, aut culpæ obnoxium eſt; nam ex illis vel aliis quibuſcunque Logicis præſcriptis agere ſummo jure, ſumma ver-

versùs authores bonos, & ipsas versùs artes injuria fit. Quin aliud est totam Philosophiam in unum corpus compingere, aliud particulares scientias tradere; isthic ordo rerum, & concinna brevitas, hîc dictorum claritas, facilitas, firmitas potissimùm attenduntur; ubivis interest doctrinam addiscentis captum accommodari. Sed nimis excurro. Porro, responderi posset cum nonnullis, quòd τὸ μέγεθος sic accipi possit, ut omne quantum designet, per istius vocabuli levem quandam & satis vulgarem κατάχρησιν. Nam si numerus sæpe magnus dicitur, & pondus magnum, & magnum tempus, quidni res istæ quatenus quantæ dicantur aliquo modo μεγέθη; & sic elementaris definitio directè satis ad omnia quanta pertendatur? Verùm Euclidis contra Ramæanam oppugnationem defensioni satis datum: pergo. Annoto tertiò, cùm magnitudines etiam heterogeneæ possint aliquo modo secundùm aliquid inter se comparari, vel se mutuò respicere; linea nimirum superficiem respiciat, & superficies corpus, quatenus superficies ad lineam παραβάλλεσθαι (vocabulum est Euclideum) applicari potest velut ad latus ipsius, & corpus ad superficiem tanquam ad basin cui insistat; útque sit linea superficiei perimeter, & superficies corpus ambitu suo claudat; potest & linea quoad unam dimensionem superficiei, superficies quoad duas corpori coëxtendi, ac eatenus ista cum his comparari: neque non quoad communes alias affectiones, inter istiusmodi quanta genere diversa, compluribus modis institui possit comparatio qualiscunque; à quibus tamen 3.

col-

collationibus emergentes reſpectus admodum diſcrepant ab hoc, juxta quem homogeneæ magnitudines ad ſe referuntur, modo quem hîc intelligit, definitur; eapropter ad excludendos iſtos, quæcunque magnitudines inter heterogeneas verſari poſſunt relationes, aſſignat proprios relationis à ſe deſignatæ terminos, adæquata rationis ὑπoκείμενα, limitibus ſuis circumſcripta per adjectum ὁμογενῶν. Sola ſcilicet homogenea quanta rationem habere dicuntur, quia ſolæ ſunt æqualitatis & inæqualitatis capacia, ſola mutuum exceſſum atque defectum admittunt, & his adjuncta ſymptomata Geometricis ſpeculationibus ſubſtrata: ſed de hac re jam antè ſatis ubertim eſt diſſertatum. Neque magnopere Ramum morabor hîc ſanè nulla cum rationis ſpecie nos vellicantem: *Schol.* 13. *Imò verò* (inquit) *ratio iſta quam ſibi definiendam proponit Euclides æqualitatis & inæqualitatis, communis eſt omnium rerum, lineáque ſuperficiei corporíque comparari poteſt. Sic lib.* 14. *Elementorum comparantur corpora, ſuperficies lineæ inter ſe; & ſic lunula Hippocratis quadratur, & anguli obliquilinei rectilineis æquantur.* At verò præter hunc cenſorem (anſas ut videatur arripientem omnes, & undicunque cauſas aucupantem laceſſendi veteres illos ſcientiarum Magiſtros, quos tamen æquum eſſet non abſque graviſſima cauſa reprehendere, ſicubíque manifeſtè ceſpitaverint, mitiùs cum iis agere deceret nos, tantorum inventorum illis debitores; præter hunc, inquam, quis iſtiuſmodi comparationes linearum cum ſuperficiebus & corporibus, quales in 14 tractantur elemento, ad rationum naturam

turam cogitavit pertinere? Cùm pentago-
ni vel decagoni, pyramidis aut octaedri re-
gularium latera qualiter affecta sint inter
se, vel erga radium circuli aut sphæræ, qui-
bus inscribi possunt istæ figuræ, investiga-
tur; quis unquam censuit istas rectas line-
as, seu latera figurarum, cum ipsis figuris
suis quoad rationem comparari? neminem
existimo eò imperitiæ accessisse. Id tamen
vult Ramus aut nihil, ad rem certè nil ali-
ud quantum assequor intelligere potest.
Quis etiam unquam, illo supposito, lunulam
Hippocratis, figuram nempe planam termi-
natam quadrato, vel alteri cuivis figuræ pla-
næ censuit heterogeneam? Quidni pari
jure protulisset exemplum magìs obvium
sphæram cum cono vel cylindro comparan-
tem, hoc est, corpus unicâ rotundâ superficie
comprehensam cum corpore mixtâ superfi-
cie concluso? Nempe quid sit homogene-
um & heterogeneum, saltem quid per ista
vocabula perpetuò significant Geometræ,
noluit intelligere, noluit ὁμογένειαν & ἑτερο-
γένειαν ab ὁμοειδείᾳ & ἑτεροειδείᾳ, distingue-
re. Sed abhinc transeo, & adnoto quartò, 4.
quòd cùm etiam homogeneæ magnitudines,
quoad ipsis accidentia multa, comparari que-
ant (quoad speciales puta nonnullas proprie-
tates suas, quoad situm, quoad localem di-
stantiam, quoad ipsarum diversimodas quali-
tates; addo cum vetere Scholiasta, quoad
valorem seu pretium, καθ' ἀξίαν (διττὸς γὰρ,
ait, ὁ λόγος ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δ' ἐν ποσῷ)
ut e. g. duæ lineæ secundum rectitudinem
aut curvitatem similiter aut dissimiliter se
habere possunt; una præstò sit, altera vigin-
ti

ti ſtadiis abhinc ſemota; una ſit alba, altera nigra; cùm tamen hujuſmodi relationum nulla ſignificetur hîc, iis ſecludendis adjungitur κατὰ πηλικότητα, fundamentum ſcilicet indigitans hujuſce relationis. Ad relationum quippe naturam explicandam poſt genus expreſſum, & terminos ritè conſtitutos, fundamentum proximè ſubjiciendum eſt, formalem ejus rationem ultimè complens, & differentiæ, quam Logici vocant, eſſentialis vice defungens. Κατὰ πηλικότητα, quoad quantitatem, hoc eſt, quoad magnitudinis ſuæ determinationem, vel magnitudinem ipſam determinatam; ſaltem ſecundum quòd quæritur quantæ ſunt, & reſpondetur tantæ. Nam μέγεθος πηλίκον, cui relativè opponitur ποσὸν hoc πηλίκον, nil videtur aliud denotare quàm magnitudinem ipſam, quatenus per ſuam (ut ita loquar) ſingularitatem determinatur in ſe, & ab aliis quantis diſtinguitur. Cauſa verò propter quam aliqua magnitudo, vel potiùs aliquod magnum (plerumque enim confunduntur nomina concreta & abſtracta) tali modo refertur ad aliud magnum non alia concipi poteſt, quàm ideo quòd abſolutè tantam in ſe magnitudinem habet; ſicut univerſim omnis relatio fundatur in aliquo abſoluto. Unde non admodum probo, quòd κατὰ πηλικότητα nonnulli exponunt, ſecundùm quod unum alterius tantuplum eſt, vel ſecundùm tantuplicitatem (ejuſmodi nempe vocabula nihil verentur confingere ſυγκατάληπτον neſcio quid ſignificantia). Præterquam enim v.c. quòd non bene ſonet hujuſmodi definitio duplæ rationis, relatio duorum quantorum ſecundùm duplicitatem

tatem, videtur tantuplicitas intrinsecè continere vel connotare relationem quandam; at verò relationum fundamenta non sunt relationes, nec relationum implicant, at res absolutæ sunt, propter aut secundùm quas relationum termini ad se referuntur. Malè diceretur, opinor, hoc ei simile est, quia similiter affectum; at bene, quia calidum est vel album; seu propter calorem & albedinem qualitates absolutas: sic & æquale dicitur hoc illi, propter vel secundùm utriusque magnitudinem absolutam, & propter eandem hoc illius tantuplum aut totuplum. Nec eadem de causa mihi perplacet illa Clavii interpretatio, *Secundùm quantitatem, hoc est, secundùm quòd una major est quàm altera, vel minor, vel æqualis.* Non æqualitas, majoritas, minoritas, sunt vocabula quoque relativa, nec idonea proinde relationi fundandæ. Quinimò cùm ratio definitur, ipsæ aliquatenus & virtualiter æqualitas, majoritas, & minoritas, utpote sub ratione seu genere suo comprehensæ, definiuntur. Unde malè collocari videntur in ipsius rationis definitione. Non improbo tamen, & dignam existimo quæ memoretur observationem Græci Scholiastæ, qui κατὰ πηλικότητα potiùs quàm κατὰ ποσότητα consultò positum autumat, quia non omnes rationes numero exprimi possunt, nec omne quantum alterius ullo comprehensibili modo totuplum est: Ἐπεὶ μὲν (ait) τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν ἐστί τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ, διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν τὸ κατὰ πηλικότητα· ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς καὶ κατὰ πηλικότητα καὶ κατὰ πο-

ποσότητα ἐστὶν, οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα καὶ ῥητός· hoc est, Noluit Euclides quantorum rationem fundari ἐν τῇ ποσότητι (in ipsorum quotitate vel quotuplicitate) quia non omne quantum alterius est ποσὸν, toties ipsum continet, aut continetur in ipso, vel perfectè vel imperfectè, secundùm se, vel secundùm quaspiam ipsius partes aliquotas; sed κατὰ πηλικότητα, quia saltem omne quantum determinatum in se quantitatem habet, juxta quam cum altero & ipso determinatè quanto comparari potest. Sed objectatur huic definitioni sic expositæ, quòd æquè conveniat isti quantorum relationi, quæ differentiam innuit ipsorum τῇ κατὰ τὸ ὑπερέχειν καὶ ἐλλείπειν σχέσει· Nam & illa verè dicitur relatio quædam duorum quantorum ejusdem generis κατὰ πηλικότητα. Respondeo primùm, cùm κατὰ πηλικότητα dicitur hîc, subintelligi αὐτῶν, secundùm ipsorum terminorum quantitatem. At relatio differentiam innuens non videtur in ipsorum comparatorum quantitate fundari, sed in quantitate tertii cujusdam, excessûs scilicet, seu quanti absoluti, quo antecedens exsuperat consequentem, vel ab eo deficit. Ejusmodi nempe relatio quæ versatur inter 10 & 8, fundari videtur in binarii quantitate, non in ipsorum 10 & 8 numerorum quantitate. Nam relationem illam satis indicat, exprimítque solitarius iste terminus, exhibitus nempe numerus binarius; at Geometrica ratio non nisi duobus terminis, explicite potiùs, aut mente saltem intellectis, exprimi potest. Agnoscit hoc doctissimus vir in sua contra Meibomium Diatriba, *Differentiam illam dicimus* (inquit) *non*

Pag. 41.

qui-

quidem Aritmeticam rationem esse, propriè loquendo, aut etiam ipsius rationis essentiam, sed fundamentum istius relationis, quæ dicitur ratio Arithmetica. Quo dicto solvit suam ipsius exceptionem contra definitionem Euclideam nostro modo expositam. Hoc etiam observâsse videtur Aristides Quintilianus, quum Geometricas & Arithmeticas quantorum σχέψεις ita distinguit; Διττοῦ ὄντος τοῦ ποσοῦ, τοῦ μὲν συνεχοῦς ἐπιστάτης ἐστὶ γεωμετρία, κατὰ μέγεθος ποιοῦσα τοὺς λόγους ὅλα μέρεσι τῶν αὐτῶν συγκρίνουσα· τὸ δὲ διαστηματικὸν ἀριθμητικὴ γνωματεύουσα, μερίζουσα τὸ ὅλον, τὰς τῶν μερῶν πρὸς ἄλληλα ποιεῖται συγκρίσεις. Quæ verba satis obscura sic accipio, Ratio Geometrica comparat inæqualia duo quanta; hoc est, totum & partem, secundùm suas ipsorum quantitates; at ratio Arithmetica quantorum inæqualium differentias spectans consequentem terminum, & excessum considerat ut partes antecedentis. Sed respondeo secundò, forsan Euclides, cum veterum aliis antea citatis, istam Arithmeticam quantorum σχέσιν non agnoverit, saltem à Geometris nullam habendam ejus rationem censuerit; satisque proinde visum ei fuerit, si definitio sua congrueret omnibus & solis istis quantorum συγκρίσεσι, quas secundùm quantitatem instituunt Geometræ. Nam quantorum dimensionibus & aliis, quoad speciem & situm determinantibus, qui Geometræ scopi præcipui sunt aut soli, sufficere videtur istius relationis consideratio. Nec aliam ferè vulgus ipsum quantorum concipit relationem: etenim cùm vulgo quærunt homines quantum est hoc vel illud, nihil inqui-

runt aliud, quàm quoties id continet statam aliquam & familiariter sibi cognitam mensuram, vel quoties in illa continetur, hoc est, ejus ad hanc mensuram exquirunt rationem Geometricam. Addo tertiò, quòd relatio secundùm differentiam, cùm exprimitur numero comparatorum terminorum aliquem denominante, vix reipsâ differat à ratione Geometrica. Ut cùm dico B excedit A per 3A, idem est ac si dicerem B est quadruplum τȣ̃ A, vel ad A referri sicut 4 ad 1. Aut si dicerem B excedere A unâ tertiâ ipsius *B*, perinde est ac si dicerem, & hinc facilè consectatur, B esse sesquitertium ipsius A, vel habere se ad A ut 3 ad 2. Ac huc fortè
Hobb. de Corp. c. 11. § 3, 5. 12. § 8. 13. § 1. respexerint, qui rationem consistere dixerunt in quantorum differentia comparata cum utrovis quanto; qui tamen loquendi modus admodum in se difficilis est & obscurus, errorúmque ferax gravissimorum, ut videre est ex iis quæ contra Hobbium & Meiboium disputat eximius vir; quorum igitur rationes explicandi modum nec probo nec defendo. At saltem dico relationem quantorum quoad differentiam, siquando pro determinandis quantorum mensuris considerantur à Geometris, eam ut ab illis adhibentur plerumque cum Geometrica ratione tantundem innuere. Quapropter eam neglexerit Euclides ut vel parum utilem, vel ut minimè diversam à ratione Geometrica.
5. Sed progredior advertendo quintò, voces in definitione positas πρὸς ἄλληλα communiter exponi mutuò vel ad se invicem, quo significari videtur reciprocatio quædam, & alterna relationis hujusce permutatio, terminis ita trans-

transpositis, ut nunc sit antecedens, qui modò consequens fuerat; quæ quidem interpretatio mihi non arridet, utpote quandam ipsi definitioni absurditatem impingens. Enimvero si terminis transpositis alternetur aut invertatur comparatio, exsurgunt duæ relationes admodum inter se diversæ. Ut v. g. lineæ tripedalis ad pedalem relatio est relatio tripli ad unum, vel ratio tripla; sed inversè relatio lineæ pedalis ad tripedalem est relatio unius ad triplum, vel subtripla ratio, quas rationes denominantium numerorum unus alterius noncuplus est. $(\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times 3)$. Igitur πρὸς ἄλληλα potius interpretor unius ad aliam, vel alterutrius ad aliam. Voluit enim proculdubio, certissimè debuit, unam simplicem unius magnitudinis ad aliam, non duas simul rationes sibimet inversas definire. Quia verò nihil intererat utra magnitudo præcedentis, in hac comparatione, vel consequentis locum occuparet (quandoquidem indiscretè quævis magnitudo ad quamvis alteram homogeneam rationem obtinet aliquam) ideò posuit πρὸς ἄλληλα, quo significatur ἀδιαφορία quædam, quoad situm & ordinem terminorum. Si nempe comparentur inter se duæ quælibet magnitudines homogeneæ quoad quantitatem, quæcunque ponatur antecedens, ejus ad alteram relatio dicitur ratio. Neque respuit hanc interpretationem vocabulum ἄλληλον, vel ad rigorem primævæ notionis exactum, sed potiùs favet & juvat. Nam ἄλληλον ex origine denotare videtur ἄλλο ἢ ἄλλο, aliud vel aliud disjunctivè; non ἄλλο καὶ ἄλλο conjunctim. Sed nolo diutiùs hîc κριτικίζειν. Unicum

6. sextò restat excutiendum vocabulum ποιὰ, de cujus jam ambigitur significatu. Ποιὰ σχέσις verti solet relatio vel habitudo quædam; sed hanc interpretationem nuper è nostratibus egregius quidam Mathematicus improbat, & nescio quid abstrusioris mysterii sub involucro delitescere suspicatur adjecti ποιὰ. Mavult pro quædam substitui qualitativa, hoc est, (ut ipse explicat) quæ ad qualitatis prædicamentum spectet, ideo scilicet quia ratio cum indicatione vel situ partium figurarum speciem & qualitatem determinat. Rejicit autem interpretamentum vulgare, quia vox ποιὸς (ipsius verba sunt) ex usu perpetuo qualitatem respicit; neque tam indefinitè aliquam quàm aliqualem, seu potiùs qualitativam habitudinem hîc innuit, quæ nempe prædicamentum qualitatis spectat. Subjungit autem, Et quidem in accurata definitione nullo modo ferendum videtur, ut ratio definiatur indefinitè ratio quædam, sed determinandum erat, quænam relatio. Porrò, cùm responderi possit satìs determinari relationem ex præcedentibus, præsertim ex adjecta conditione κατὰ πηλικότητα· negat hoc sufficere, quia datur alia relatio quantitatem ex æquo spectans, nempe toties memorata relatio secundùm differentiam, quæ tamen ut censet, non est ποιὰ σχέσις. Sed hanc ego tam subtilem expositionem non facilè tamen adducor, ut credam ipsius στοιχειωτοῦ sententiæ consentaneam. Nam primò duriusculum est, ut ποιὸς significet ad qualitatem spectans, vel qualitatis potiùs (secundùm ipsius doctissimi viri sententiam) effectivus seu determinativus.

Arithm. c. 25 contra Meib. 7. Ἐαυτον-τιμ. p. 60.

Va-

Valet equidem ποιὸς apud Ariſtotelem & alios paſſim idem quod qualis, vel aliqua quantitate præditus (ut qui habitu quovis, aut potentiâ, vel paſſione afficitur, ab eo denominatur ποιός τις) at qualificativus vel qualificus (ſic enim expoſitioni ſuæ congruentiùs vertiſſet, quàm qualitativus) nuſquam ut puto; ad id denotandum rectiùs adhibeatur ποιωτική (nam ποιεῖν eſt talem reddere) vel explicatiùs τὸ τῶν σχημάτων ποιότητος διοριστική. Igitur loquendi modum attribui t auctori ſatis improprium, inuſitatum, obſcurum, adeóque definitionum legibus & naturæ nimìs incongruum. Addo quòd ab intrinſeca rationis natura videatur ſatìs remotum, eíque tantùm ex accidente competere, quòd nonnihil aliquando conferat ad figurarum ſpeciem, ſeu qualitatem determinandam. Non in ſolis figuris conſideratur, at ſæpiùs extra illas, nec aliter illarum determinationi inſervit, quàm magnitudinum quarundam, linearum nempe vel ſuperficierum quibus ambiuntur figuræ, quantitates priùs determinando. Non igitur veriſimile videtur, definitiones auctorem huc attendiſſe, quum definitiones neceſſaria tantùm, univerſalia, ac primaria notionum attributa complecti debeant. Et quòd ad rationis prædicamentum attinet, ipſa ſimpliciter ad relationem pertinet, reſpectivè verò propter terminos comparatos ad quantitatem (ſemper enim illi ſunt res quantæ quatenus quantæ) reducatur, magíſque propter fundamentum ſuum, quod eſt abſoluta quædam quantitas, ut ſupra dictum. Vulgò dicitur & quantitatis proprietatibus accenſetur, quòd ab illa res dicuntur æquales & inæquales, hoc eſt, una alterius ſimpla, dupla, tripla, &c. hoc eſt, erga alteram tali ratione affecta. Ergò potiùs ratio eſt σχέσις quantitativa, ſicut ſimilitudo, quia fundatur in aliqua qualitate, dici ſolet relatio in qualitate, ſeu qualitativa. Abſonum verò pleriſque ni fallor auribus foret dici, relatio qualitativa ſecundùm quantitatem; nam ſi ſecundùm quantitatem, ergò quantitativa potiùs quàm qualitativa. Prætereà, quòd non ut pertenditur vox ποιὸς etiam in definitionibus poſita ſemper qualitatem aliquam propriè dictam, at verò ſæpiùs meram particularitatem, hoc eſt, generalis vocabuli reſtrictionem indefinitam, deſignet (eo pacto ac ſi homo definiretur, animal quoddam ratione donatum, ubi quoddam innuit tantum, confuſè quidem & indiſtinctè nullos certos limites aſſignando, hominis nomen ſub animalis nomine contineri, nec ei penitus adæquari) quòd, inquam, ita ſe res habeat, innumeris adſtrui poſſit exemplis proſtantibus apud veteres etiam Mathematicos. Ita Theon analogiam definit,

Cap. XXI. Ἀναλογία δ᾽ ἐστὶ λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις, rationum inter ſe habitudo, non qualitativa opinor, quæ enim iſthic intervenit qualitas? at quædam ſaltem. Muſicæ harmoniæ genus (γένος) Ariſtides Quintilianus

Pag. 16. definit, ποιὰν τετραχόρδου διαίρεσιν, non qualitativam credo ſignificans diviſionem neſcio quam, at certam aliquam: quum ſcilicet tetrachordum innumeris modis dividi poſſit, genus tamen Muſicum non omneſcunque ſectiones iſtæ, ſed certæ quædam conſtituunt; una ſcilicet aliqua genus diatonicum, alia

chro-

chrometicum, tertia enharmonicum. Consonat Euclides, Γένος (inquit) ἐστὶ ποιὰ ποιὰ τετλάρων φθόγγων διαίρεσις. Idem Aristides, Ἡρμοσμένον δ' ἐστὶ τὸ ἐκ φθόγγων, καὶ διαστημάτων ποιὰν τάξιν ἐχόντων. Ποιὰν τάξιν, ordinem quendam, non ordinem opinor qualitativum. Nicomachus in Enchiridio διάστημα definit, ὁδὸν ποιὰν ἀπὸ βαρύτητος εἰς ὀξύτητα ἢ ἀνάπαλιν. Ejusdem est Thrasylli definitio, Ἐστι διάστημα φθόγγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις· ubi notabile est Arithmeticam ipsam rationem vel differentiam, quæ inter duos φθόγγους, seu sonos harmonicos intercedit, districtè vocari ποιὰν σχέσιν, quas scilicet doctissimus vir solam quantitativam relationem agnoscit, & Geometricam rationem velut ei contradistinctam appellari censet ποιὰν σχέσιν, hoc est, relationem qualitativam. Quia verò ferenda non arbitratur in definitionibus accuratis indefinita talia vocabula, dicendum est optimos saltem authores admisisse talia; præter mox adductos, unum citabo Euclidem, qui in Isagogetharmonica proximè contiguis duabus definitionibus inseruit vocabulum τις· Τόνος (inquit) ἐστὶ τόπος τις τῆς φωνῆς, δεκτικὸς συστήματος, ἀπλατής. Et dein, Μεταβολὴ δ' ἐστὶν ὁμοίου τινὸς εἰς ἀνόμοιον τόπον μετάθεσις. Ecce τόπος τις, ὁμοίου τινός Non abhorruit is scilicet ab ejusmodi vocibus, neque certè meâ sententiâ abhorrere debuit. Nam in omni prædicatione vocabuli latioris de angustiore, generalioris de magìs speciali, si non exprimitur, tacitè saltem intelligitur restrictio quædam. Ut cùm dicitur, Homo est animal, intelligitur animal quoddam; quódque

Lib.I.

Theon.

que ſubticetur in propoſitione directa, redditur & expreſse pronunciatur in converſa, Quoddam animal eſt homo. Quod autem ſemper ſubintelligitur, id nonnunquam ſine culpa proferri poteſt, quare non video cur improbari debeant iſtiuſmodi definitiones; homo eſt animal quoddam ratione præditum; triangulum eſt figura quædam plana tribus rectis lineis comprehenſa; ratio eſt relatio quædam homogeneorum quantorum ſecundùm quantitatem. Quòd vero definitionem hanc vulgari modo acceptam æquè convenire putat Arithmeticæ rationi, à qua tamen diſtingui debuit; ad id jam ante προληπτικῶς reſponſum eſt, cùm quid ſit κατὰ πηλικότητα, referri conati ſumus explicare. Nunc tantùm adjiciam, elementatori hac in definitione tradenda non aliud forſan propoſitum fuiſſe, quàm ut methodi plenioris aut ornatûs qualiſcunque causâ, præludens ſcilicet accuratioribus iſtis Ejuſdem, Majoris, & Minoris rationis definitionibus mox ſubjungendis, generalem quandam & ὁλοσχερῆ τοῦ λόγου, idæam diſcentium inſinuaret animis per Metaphyſicam hanc definitionem; Metaphyſicam dico, nec enim propriè Mathematica eſt, cùm ab ea nihil quicquam dependeat, aut deducatur in Mathematicis, nec ut exiſtimo deduci poſſit. Cujuſmodi quoque cenſeri poteſt poſthac tradita definitio, vel definitio potiùs analogiæ; analogica eſt rationum ſimilitudo, quæ nulli Mathematico deſerviat uſui, nec alio opinor fine proponitur, quàm ut per eam generalis quædam analogiæ notio, craſſa licet & confuſa, tyronibus indatur. Definitionibus autem exqui-

ſitis

ſitis Mathematicis, mox ab illo ſubjunctis tota rationum doctrina, tota res Mathematica ſubnititur; ad illas igitur potiſſimùm attendi debet, per illas rationum doctrina perfectiùs eluceſcit; hæc & conſimiles abſque notabili Matheſeôs detrimento prorſus omitti poſſent: ſicut in Elem. VII. factum videmus, ubi numerorum analogia definitur & pertractatur, nullâ tamen rationis numero competentis exhibitâ definitione; quamvis illic æquè neceſſaria fuit & utilis definitio talis atque hîc eſt; ſed neutro loco magna fuit neceſſitas. Quanquam haud credo rem ipſam adeò generalem & abſtractam, eóque conceptu magìs arduam & explicatu, definitionis eſſe capacem commodioris hâc quàm Elementator aſſignavit, quam ideò viſum eſt uberiùs explicare; neque non ab oppugnantium captionibus aſſerere. Ubi pedem figo nunc; proximâ Lectione rationis ad ſpecies, & ſymptomata potiora gradum promoturus.

LECT. IV.

RAtionis Geometricæ naturam utcunque delineavimus, definitionem ejus in elementis conſignatam quà explicando quà aſſerendo. Aliter (τυποδιςέρως quidem & παχυλωτέρως, at fortaſſe magìs ad captum communem) declaretur hæc res dicendo, quod ratio ſit modus determinatus, quo unum quodvis quantum continet aliud, vel ab eo continetur, idem vel perſimilis ei modo, juxta quem unum alterius totuplum dicitur, aut

al-

alterum toties continere; vel esse talis pars vel tot partes alterius, aut toties in altero contineri; qui certè modus, quum collata quanta numeris efferri possunt, facillimè comprehenditur à nobis; ut modus quo libra continet unciam nil innuit aliud, quàm quòd hanc illa duodecies contineat, vel ad hanc se habeat, sicut 12 ad 1, unde libra dicitur ad unciam sortiri rationem duodecuplam. Modúsque quo longitudo pedalis in passu Geometrico continetur, nihil est aliud quàm illam hujus esse partem quintam, vel ad eum se habere sicut 1 ad 5, quod significatur dicendo rationem pedis ad passum esse subquintuplum. Qui modus abstracto vocabulo quintuplicitas, aut (verbo veniam) quintuplitas (πενταπλότης aut πενταπλασιότης) exprimitur & enuntiatur. Cùm verò collata quanta (quoad absolutam suam quantitatem) talia sunt, ut numeris perfectè nequeant exprimi, saltem intelligi potest, quòd aliquo determinato modo illud continet hoc, vel in hoc continetur, aliter scilicet quàm aliud quodvis illi inæquale continet, hoc vel in eo continetur; ac ita quidem ut iste continendi modus persimilis sit ei, quo numeris denominata quanta se continent, aut in se continentur respectivè; posśítque simpliciter & ex parte rei semper numeris exprimi quàm proximè. Sicut v.g. cùm ratio peripheriæ circularis ad diametrum, nobis quoad ἀκρίβειαν ignorata, repræsentatur dicendo, quod peripheria sit diametri tripla sesquiseptima, hoc est, ter ipsam contineat & ejus unam septimam partem, apponendo ferè vel propè. Sic & ratio

tio diametri ad latus quadrati, quæ numeris exprimi præcisè natura rei non patitur, potest utcunque numeris ad verum accedentibus repræsentari; dicendo quòd diameter se habet ad latus, ut 1.4 ad 1 ferè; vel propiùs, ut 1.41 ad 1; vel adhuc accuratiùs, ut 1.416 ad 1: & sic porro magis ad ἀκρίβειαν appropinquando. Verùm rationis naturam ulteriùs illustrare conabimur, primò species ejus & differentias exhibendo (siquidem ad generum perfectiorem notitiam lucis plurimùm & subsidii confert subjectarum specierum comprehensio, utpote quarum ex convenientia quoad essentialem aliquam proprietatem, constituantur & quasi generantur ipsa genera) tum secundò, rationum accidentia quædam primaria (comparationes inter se, compositionem, continuationem, additionem, subtractionem, divisionem, reductionem exponendo) nec non interea quæstiones aliquas obiter incidentes in controversia positas, non parum ad cujusce materiæ dilucidationem conferentes, eventilando. Quod rationis species attinet, ejus divisio naturalissimè prima terminorum diversam affectionem consequitur hoc modo: antecedens rationis vel major est consequente, vel æqualis ei, vel minor eo; hinc tres rationis species subnascuntur: Ratio quanti majoris ad minus, æqualis ad æquale, minoris ad majus; communiter appellantur, Ratio majoris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis; possint autem simpliciùs & breviùs nuncupari majoritas, æqualitas, minoritas (nósque nominibus his eas subinde brevitatis causâ designabimus) nonnulli verò

ma-

majoritatem & minoritatem vocitant rationem excessûs & defectûs; quæ vocabula nos quoque fortassis interdum adhibebimus. Eodem recidit διχοτομία duplex, quum nempe ratio primò scinditur in rationem æqualitatis & inæqualitatis, tum porrò subsecatur inæqualitatis ratio in rationem majoris & rationem minoris inæqualitatis. Quæ divisio proba satis & commoda; rectéque Nicomachus, Τοῦ πρός τι τοίνυν ποσοῦ δύο αἱ ἀνωτάτω γενικαὶ διαιρέσεις εἰσὶν ἰσότης καὶ ἀνισότης· πᾶν γὰρ ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρούμενον ἤτοι ἴσον ὑπάρχει, ἢ ἄνισον, τρίτον δὲ παρὰ ταῦτα οὐδέν. Res ex se clarior est, quàm ut exemplis illustrari possit aut debeat; unum tamen apponemus, ratio libræ ad unciam (vel numeri 12 ad 1) est majoritas, aut ratio majoris inæqualitatis, aut excessûs ratio, quoniam antecedens consequente major est. Ratio ponderis quadrantalis ad 3 uncias est æqualitatis ratio, quoniam antecedens adæquatur consequenti; ratio verò unciæ ad libram est minoritas, vel ratio minoris inæqualitatis, vel ratio defectûs, quia antecedens consequente minor est. Nescio verò num attineat observare, quò devitetur ex ambiguitate pronascens error, quòd nonnunquam apud scriptores Græcos ratio majoris ad minus dicitur μείζων λόγος, æqualis ad æquale ἴσος λόγος, & minoris ad majus ἐλάσσων λόγος· Theon Smyrnæus, Τῶν λόγων οἱ μὲν εἰσὶ μείζονες, οἱ δὲ ἐλάττονες, οἱ δὲ ἴσοι· quas modò descripsimus innuens rationum species. Sed impropriè proferuntur, & bene nobis cavendæ sunt ejusmodi locutiones; nam ratio major, æqualis minor, frequentiùs

Lib. I. p. 24.

Cap. 22.

quentiùs

quentiùs & magìs propriè designant ipsarum rationum inter se comparatarum respectus, non singularum absolutè sumptarum rationum species. Instantiæ causâ, comparando rationis dodrantis ad trientem, & bessis ad trientem; major est ratio dodrantis ad trientem, quàm bessis ad trientem: (hoc est, major est ratio numeri novenarii ad quaternarium, quàm octonarii ad eundem quaternarium). Sed rationis dodrantis ad trientem, & bessis ad trientem, simpliciter in se spectatæ, non bene dicuntur majores rationes, sed majoritatis, aut excessûs, aut inæqualitatis majoris rationes, hoc est, rationes majorum quantorum ad quanta minora. Hæc est rationum prima divisio. Aliter autem dividitur ratio (vel inæqualitatis ratio, nec enim interest utrum ratio sic universim vel singillatim inæqualitatis ratio dividatur) aliter, inquam, ratio dividitur, intuendo quantorum ista symptomata, nobis jam ante quadantenus explicata, symmetriam dico & asymmetriam. Nam quia terminorum inter se comparatorum aliqui symmetri vel commensurabiles sunt, hoc est, eodem quanto semel aut aliquoties accepto mensurari, completè dividi, penitus exhauriri, adeóque numeris accuratè exprimi possunt; alii verò termini sunt asymmetri, vel incommensurabiles, hoc est, nullâ communi mensurâ mensurabiles, nullâ parte aliquotâ eidem gaudentes, & proinde sic affecti, nullis ut numeris possint exprimi, vel perfectè repræsentari. Hinc emergit divisio rationis in effabilem & ineffabilem, λόγον ῥητὸν & λόγον ἄῤῥητον. Ubi tamen notandum quod hæ vo-

ces

ces (ῥητὰς ἄῤῥητος) ab Euclide in Elemento χ paulò secius usurpantur, cùm enim adverteret Euclides expositâ quâvis rectâ lineâ (quam ῥητὴν vocavit, utpote quolibet ad arbitrium numero denominabilem vel effabilem) cum illa comparatas lineas in triplice differentia versari; alias nempe longitudine cum illa commensurabiles esse; alias verò quoad longitudinem quidem incommensurabiles dari, sic tamen ut ipsarum quadrata commensurabilia sint, & numeris denominabilia, veras ipsorum ad expositæ quadratum rationes exhibentibus perfectissimè; alias autem complures non longitudine tantùm ipsi expositæ, sed potentiâ quoque (hoc est, secundùm ipsorum quadrata expositæ quadrato) incommensurabilia esse; hoc, inquam, cùm adverteret, priorum duorum generum lineas appellare voluit ῥητὰς· hoc est, quadantenus & qualitercunque exprimibiles; at postremi generis lineas vocavit ἀλόγους vel ἀῤῥήτους, hoc est, nullatenus explicabiles, aut ineffabiles numeris. Itaque secundùm Euclidem asymmetra nonnulla quanta videntur habere λόγον ῥητὸν inter se (si enim quanta ipsa dicantur effabilia, consequenter ipsorum ratio fuerit effabilis) habent, inquam, longitudine (vel aliter in suo genere) commensurabilitatis incapacia quanta λόγον ῥητὸν, quatenus etsi nequit ipsorum ratio numeris ullis communibus immediatè repræsentari, potest tamen quodammodo mediatè, quadratorum nempe suorum interventu, quando numeris illa verè denominantur & exprimuntur: siquidem inde dici possunt latera vel radices quadratæ talium nu-

numerorum ; cujuſmodi ſaltem expreſſio ſufficit ipſorum relativæ quantitati determinandæ, faciendóque cùm ut ipſa qualitercunque ſubjiciantur æſtimationi noſtræ, tum ut reipsâ facilè poſſint exhiberi. Verùm invaluit apud pleroſque, rationíque bene conſentaneum videtur, ut incommenſurabilium quantorum rationes dicantur ἄῤῥητοι, hoc eſt, ineffabiles ; quia ſcilicet hujuſmodi rationum termini vulgò notis & receptis numeris propriè & immediatè nequeunt efferri, nóſque proinde ſenſum hunc retinebimus, quamvis maluit doctiſſimus Borellus (hanc forſan ambiguitatem vitans) dividere proportionem in commenſurabilem & non menſurabilem, vocabula nova comminiſcens, nec admodum ut exiſtimo commoda. Nam proportiones quantorum incommenſurabilium æquè ſunt ipſæ menſurabiles, ac proportiones quantorum commenſurabilium ; aptiùs opinor & accuratiùs mentem enunciâſſet ſuam obliquo caſu, dicens proportionem eſſe vel quantorum commenſurabilium, vel incommenſurabilium quantorum. Sed ἐν παρόδῳ hoc, ad rationum propoſitas ſpecies revertamur. Λόγος ῥητὸς, effabilis ratio eſt, quæ numeris exprimi poteſt ; numeris (inquam) veris, quos vocant, & vulgaribus ; integris, mixtis, fractis ; imò ſemper integris numeris exprimi poteſt : quandoquidem ratio quævis numerorum utcunque fractorum, vel ex integris & fractis compoſitorum, ſemper ad integros adduci poteſt per fractorum denominatores multiplicando. Exempla præſtant omnes ejuſdem generis menſuræ, in uſu vulgari conſtitutæ, quales

pro

pro dimetiendis longitudinum intervallis digitus, ſpithama, palmus, pes, cubitus, orgya, paſſus, ſtadium, miliare, leuca; pro taxandis ponderibus granum, drachma, uncia, libra; pro computandis pecuniis as, ſeſtertius, denarius, ſolidus, marca, libra; pro temporibus computandis annus, menſes, dies (civiles hos intelligo, nam an hæ partes temporis naturales ſint commenſurabiles inter ſe nullo conſtat, aut conſtare poteſt indicio) hora, minutum. Hæc enim & conſimilia quanta rationes inter ſe effabiles habent, eóque vulgares ad uſus accommodantur. Ratio, inſtantiæ causâ, marcæ ad libram effabilis eſt, quia numerus $\frac{2}{3}$ & 1, vel numeris 2 & 3, vel aliis quibuſvis ſubſeſquialteram obtinentibus inter ſe rationem exprimuntur. Sic & aſſis ad ſeſtertium ratio effertur numeris $\frac{2}{5}$ & 1, vel numeris 1 & $2\frac{1}{2}$, vel numeris 2 & 5; quæ ratio dicitur ſub-multiplex-dupla ſeſquialtera, ut ſtatim oſtendemus. Λόγος autem ἄῤῥητος (ineffabilis ratio, quibuſdam ἄλογος λόγος, ratio irrationalis, vel potius indicibilis, quia dici vel exprimi nequit) eſt illa quæ verſatur inter aſymmetra quanta, quorum ratio nullis numeris, veris & vulgaribus, exprimi poteſt exactè perfectéque. Talis eſt in exemplo vulgatiſſimo ratio diametri ad latus quadrati; nam in tota ſerie numerorum poſſibilium (integrorum, fractorum, miſtorum) nulli duo numeri poſſunt inveniri, nulli dantur omnino, quorum ratio repræſentat exquiſitè rationem quantis iſtis duobus intercedentem. Quoniam enim (quod in elementis demonſtratur) quadratum ex diametro duplum eſt quadrati ex la-

tere

tere, nullíque dantur in tota vulgarium numerorum congerie numeri duo quadrati, duplex alter alterius, ergò nulli dantur numeri, qui rationem exhibeant diametri ad latus. Taléſque reperiuntur in omni genere quantorum innumeræ rationes, adeò quidem ut inter ſe comparando figuras regulares, cùm planas tum ſolidas, eidem circulo vel ſphæræ inſcriptas aut circumſcriptas, vix ullas invenire ſit, quæ vel quoad latera ſeu perimetros, vel quoad areas, & quoad ſoliditates ſuas rationem habeant inter ſe numeris explicabilem. Unde quo rationes horum & aliorum plerorumque quantorum qualitercunque referri poſſent ad numeros (utpote ſymbola quantorum generaliſſima, notiſſima, commodiſſima) neceſſe fuit numeros ſurdos (quos vocant & irrationales) comminiſci, quibus iſtorum quantorum rationes utcunque poſſent exprimi. Et harum quidem ineffabilium rationum nullæ recenſentur ſpecies (quia differentes, quibus ipſarum termini ſe continent aut reſpiciunt, modi bene concipi diſtingui nequeunt, & nullum excogitari proclive ſit pro iis aliter exprimendis compendium) at rationum, quæ vulgò numerantur, effabilium ſpecies percenſere conabor, & exponere quàm breviſſimè (quorſum enim quæ tradita proſtant ubivis, & per ſatìs clara ſunt, operoſiùs inculcare? Mihi potiùs inſtitutum eſt, quæ protrita minùs, & magis involuta videntur, ſtudio meo qualicunque ventilata, judicio veſtro perpendenda commendare, quæ paſſim obvia, vel admodum aperta ſunt levi pede tranſcurrendo) ad rem. Nihil imprimis manifeſtius est, quàm æqualium quantorum rationem semper effabilem esse, utpote quæ quibusvis æqualibus numeris exprimi queat. Habet v.g. se quodvis æquale quantum ad aliud quodvis, ut unitas ad unitatem, vel binarius ad binarium. Igitur æqualitatis ratio constitui potest prima species effabilium rationum. Inæqualitatis autem ratio cùm duplex sit, ut vidimus, majoritas aut minoritas, vel excessûs defectûsque ratio, majoritatis effabilis quinque vulgò species statuuntur, quibus inverse correspondent totidem species minoritatis. Eas recensebimus & exponemus, ita tamen ut divisionis hujus fundamentum & originem (id quod in omni divisione technica potissimùm spectari debet) priùs investigemus. Id aggredimur facere notando, quod cùm duo quanta comparamus inter se rationem habentia effabilem, vel eorum vice numeros quibus repræsentantur, modum scilicet inquirentes, quo antecedens consequentem continet, aut in eo continetur, hunc repræsentare contendimus in numeris quoad ejus fieri potest minimis; quia ratio quævis in minimis terminis faciliùs æstimatur & comprehenditur. Igitur enitimur, ut eorum alter, consequens nempe, sit ipsa unitas, numerorum infimus & simplicissimus; quo præstrato terminum antecedentem indagamus unitati, tanquam consequenti congruentem: iste terminus rationis æstimationi subjectæ denominator dicitur, ipsam quippe denominans, & declarans ad captum nostrum commodissimè. Quoniam verò divisionis Arithmeticæ talis est natura, ut quoties numerus dividendus di-

diviſorem continet, toties inventus quotiens contineat unitatem, ideo reperitur iſte denominator (vel antecedens rationis, cujus conſequens unitas) dividendo propoſitæ rationis antecedentem per conſequentem. Porrò, cùm denominator iſte, vel quotiens inventus, pro ipſorum terminorum intrinſeca diverſitate diverſimodæ ſpecie numerus eſſe poſſit (integer nempe, vel fractus, vel miſtus; & fractus quidem ac miſtus non uno modo) conſiderando puta v.g. rationem majoris inæqualitatis dictus quotiens per terminorum diviſionem repertus, poterit eſſe vel numerus integer, vel unitas cum adjecto numero fracto, cujus numerator ſit unitate major, vel numerus integer unitate major cum fracto adnexo, cujus numerator ſit unitas, vel denique numerus integer cum fractione, cujus numerus exſuperet unitatem. Ex his quinque dicti quotientis variis modis aut ſpeciebus emergunt quinque ſpecies majoritatis effabilis, quæ vulgò cluent ratio multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens; quibus opponuntur & inversè reſpondent (ἀντήκειν) & ἀνθυπακούουσι, verba ſunt Nicomachi) minoritatis rationes ſubmultiplex, ſubſuperparticularis, ſubſuperpartiens, ſubmultiplex ſuperparticularis, ſubmultiplex ſuperpartiens: quas nunc ordine perluſtrabimus. Multiplex vel multi- 1.
pla ratio dicitur inter duos terminos verſari, quum antecedens conſequentem continet multoties (unde nominis impoſitio) vel cùm antecedens conſequentem aliquot vicibus (bis, ter, decies, centies, aliquoties utcun-

que) continet exactè; vel quum consequens antecedentem perfectè dementitur (ἀπαρτιζόντως καταμετρεῖ) hoc est, sic ut nihil quicquam supersit residui. Vel, quod idem est, cùm consequens est antecedentis pars quæpiam aliquota, quæ aliquoties accepta totum eum componit, exæquat, complet; adeóque denominator hujusce rationis est perpetuò numerus aliquis integer. Ita passus Geometricus ad pedem habet rationem multiplam, integro numero quinario denominatam; quia pes quinquies acceptus passum constituit præcise, vel quia passus quinquies includit pedem, & nihil præterea. Hinc liquet hanc rationem tot habere species sibi subordinatas, quot dari possunt integri numeri, per quos denominentur & distinguantur, infinitas. Ut ratio dupla, tripla, decupla, centupla, millecupla, &c. sunt rationis multiplæ species. Græcis autem dicitur hæc ratio λόγος πολλαπλάσιος (quasi πολλαπολλάσιος vel πολλαπλεονάσιος) & species ejus similiter terminatæ sunt διπλάσιος, τριπλάσιος, δεκαπλάσιος, ἑκατομπλάσιος, &c. Huic universè respondet & ἀντίστροφος est minoritatis ratio, submultiplex dicta, quam scilicet obtinent multiplicis rationis termini transpositi; ut si A sit multiplex τοῦ B, erit B submultiplex τοῦ A. Ideo ratio submultiplex est, quum antecedens consequentem justè demetitur, est ejus aliquota pars, aliquot vicibus in eo continetur; ejúsque denominator est semper aliquis simplex numerus fractus, habens unitatem pro numeratore. Ita pes ad passum rationem habet submultiplicem, utpote quinquies in

Theon.

passu

paſſu comprehenſus, & denominatorem habens $\frac{1}{5}$. Habet item ſimiliter hujuſmodi ratio tot ſpecies, quot eſſe poſſunt numeri fracti ſimplices numero quolibet denominati, ſed unitatem obtinentes loco numeratoris. Ut ratio ſubdupla, ſubtripla, ſubdecupla, ſubcentupla, &c. Nam quia commodè ſignificari nequeunt hæ rationes vocabulis vulgò uſurpatis deſignantur à Mathematicis, præponendo ſub ipſis inverſarum multiplicium rationum nominibus. Quod attinet enim vocabula, ſecunda, tertia, decima, centeſima, milleſima (quibus efferuntur unitatis partes aliquotæ) non ita commodè poſſunt hiſce denotandis rationibus adhiberi, quia præterea ſunt ordinales, & nedum diviſionem in partes, at locum quoque certum indigitant rerum in aliqua ſerie diſpoſitarum: ut tertius à Romulo rex, ſapientum octavus, centeſimus abhinc annus; reſpondéntque Græcis πρῶτος, δεύτερος, τρίτος, &c. ideóque ſubjacent ambiguitati. Aliàs non video quin ratio tertia, quarta, decima poſſint hiſce denotandis rationibus inſervire, æquè ac dupla, tripla, decupla multiplis. Vocabula verò ſemiſſis, triens, quadrans, &c. rationes quidem has indigitant, ſed obliquo tantùm caſu, nam bene dici poteſt ratio ſemiſſis, trientis, quadrantis ad unum; nec ipſa tamen ſemiſſis aut triens eſt ratio. A Græcis verò deſignatur hæc ratio terminatione μόριος aut μοιριαῖος (liquet unde deductâ) ſubjunctâ vocabulis numerorum ordinem ſignantibus; ut λόγος ἡμιμόριος (aut ἡμιμοιριαῖος) τριτημόριος, δεκατημόριος, δωδεκατημόριος, &c. pro ſubdupla, ſubtri-

pla, &c. ſed ab hiſce ſubinde deſignantur hæ rationes anteponendo præpoſitionem ὑπό.
Pag.25. Nicomachus, Οὕτω καὶ ἕκαστον ἑκάστῳ τῇ προλεχθείσῃ τάξει μετὰ τῆς ὑπὸ προθέσεως ἀντιδιαστελλόμενα, ὑποπολλαπλάσιον, ὑπεπιμόριον, ὑπεπιμερές· & apud illum, ὑποδιπλάσιος, ὑποτετραπλάσιος, & ſic porrò ſubmultiplicis ſpecies adnumerantur. Ex his patet quòd rationis multiplicis & ſubmultiplicis communes ſunt termini correlati totum & pars; accipiendo totum juxta nativam vocis originem, pro eo quòd toties aliud complectitur, & partem pro parte aliquota, juxta ſenſum & definitionem Euclidis; Μέρος ἐστι μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Sed ad alias ſpecies pro-
2. gredimur. Ratio ſuperparticularis dicitur, cùm antecedens conſequentem ita excedit, ut ſuperſit conſequentis pars quæpiam
Theon.c.24 aliquota (hinc ratio nominis) vel cùm antecedens conſequentem ſemel, nec pluries includit, & præterea tantùm unam ejus partem aliquotam; vel cùm per conſequentem diviſus antecedens quotientem exhibet unitatem, cum unitate quoque reſidua per conſequentem adhuc dividenda; adeóque cujus denominator eſt unitas cum annexo numero fracto vice numeratoris habente unitatem. Talem rationem obtinet cubitus ad pedem, quia cubitus pedem ſuperat unà parte dimidiâ pedis; ſic & dodrans ad beſſem rationem habet ſuperparticularem quia dodrans beſſem continet ſemel, & ejus inſuper partem octavam, vel quia $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$. Rationis hujus quoque ſpecies infinitæ ſunt, pro denominatorum infinita multitudine; quæ diſtinctè

ſtinctè ſignificari ſolent ad numerorum ordinalium nomina præfigendo particulam ſeſqui (hoc eſt, ſe atque partem aliquam præterea; licèt aliter minùs ad rem noſtram ἐτυμολογȣ̃σι Grammaticorum filii) ut ſeſquialtera (vel ſeſquiſecunda) ſeſquitertia, ſeſquidecima, ſeſquicenteſima; quæ voces ſic intelligi debent, cùm antecedens conſequentem ſuperat unâ parte dimidiâ, (quomodo 12 excedit 8, vel as beſſem) dicitur ille ſeſquialter, aut ſeſquiſecundus hujus: cùm antecedens conſequentem ſemel includit, & ejus unam partem tertiam (ut 12 excedit 9, vel as dodrantem) dicitur is hujus ſeſquitertius: & ſimili perpetuò ratione. Græcis hæc ratio dicitur λόγος ἐπιμόριος (propter particulam conſequentis unitati ſubnexam modo expoſito) & deſignantur ejus ſpecies ordinalibus numeris præponendo ἐπὶ. Ut ἐπιδεύτερος (qui ſæpiùs ἡμιόλιος, quaſi totus conſequens cum ejus ſemiſſe, vel totus antecedens demptà conſequentis ſemiſſe; ſed & obiter adnoto Græcos antecedentem hujus rationis plerumque efferre, præponendo conſequentis nomini vocem τριημι· ut τριημιώριον ſeſquihora, τριημιόβολον ſeſquiobolus; quia nempe ſeſquihora (hoc eſt, una hora cum horæ ſemiſſe) eſt dimidia pars trium horarum, & ſeſquiobolus eſt ſemiſſis trium obolorum: ſed in orbitam). Species, inquam, hujus rationis à Græcis nominantur ἐπιδεύτερος (vel * ἡμιόλιος) ſeſquialter, ἐπίτριτος ſeſquitertius, ἐπιδέκατος ſeſquidecimus; & ita ſimiliter. Hujus rationis inverſa vel ὑπολόγος (antequam progredior hoc adverto, quòd à veteribus Arithmeticis

* *Apud Theonem* ἐφημιόλιος, *forſan ex mendo.*

ticis rationum majoritatis ſpecies (vel ipſarum denominatores) dicebantur προλογοι, minoritatis autem iis correſpondentes ſpecies ὑπόλογοι· unde Nicomachus ait, Τὰς ὑπολόγους ἀντιτάσσειν τοῖς προλόγοις, hypologos prologis ex adverſo reſpondere: ut v.g. ratio quadruplex eſt πρόλογος, ratio ſubquadruplex ὑπόλογος· ratio ſeſquitertia eſt πρόλογος, ratio ſubſeſquitertia eſt ὑπόλογος· & ita de reliquis quæ ſubſequuntur. Rationis, inquam, ſuperparticularis hypologus vel inverſa dicitur ſubſuperparticularis (etiam
Met.IV. Græcis ὑπεπιμόριος· quæ vox alicubi ſuccurrit hoc ſenſu apud Ariſtotelem) ſicut & ejus ſpecies ſubſeſquialtera, ſubſeſquitertia, ſubſeſquidecima, & ſic perpetuò; Græcis itidem ὑφημιόλιος, ὑποεπίτριτος, ὑπεπιδέκατος. Quarum rationum indoles ſatis elucescit ex oppoſitarum perſpecta natura; differunt enim ab iis ſolâ terminorum tranſpoſitione, & ipſarum denominatores ita ſe habent ad unitatem, ut unitas ad denominatores rationum ipſis inverſarum.De quo tamen hoc adnotabimus, quòd rationis ſubſuperparticularis denominator eſt ſemper aliquis numerus fractus, cujus numerator à denominatore deficit unitate; ut ſubſeſquialteræ denominator eſt $\frac{2}{3}$, ſubſeſquitertiæ $\frac{3}{4}$,
3. & ſic continuò. Procedimus ad rationem ſuperpartientem, ea dicitur inter duos numeros haberi, quum antecedens conſequentem ſuperat partibus quibuſdam aliquotis, unà pluribus (hinc nominis cauſa). Vel cùm antecedens conſequentem ſemel includit, & plures adhuc ejus partes aliquotas (plures ſcilicet partes, quæ partem unam ali-

aliquotam conficere nequeunt; notanda est hæc exceptio, quo distinguatur hæc species à superparticulari) vel quum antecedens per consequentem divisus exhibet unitatem pro quotiente, cum residuo unitatem excedente; idcircóque cujus denominator est unitas cum adnexo numero fracto, cujus numerator unitatem superat. Ita dodrans ad septuncem (hoc est, numerus 9 ad 7) habere dicitur rationem superpartientem, qui dodrans septuncem exsuperat duabus septimis partibus. Gaudet & hæc ratio speciebus infinitis, ex denominatorum infinita varietate, quæ verbis ita sunt exprimendæ, ut fractionis unitati subnexæ (in denominatore propositæ rationis) cùm numerator tum denominator enuncientur. Appellantur nempe ratio superbipartiens tertias, quintas, septimas, &c. In exemplum, ratio numeri 12 ad 7, hoc est, assis ad septuncem, dicitur superquinquipartiens septimas; in qua locutione numerale septimas distinctè commonstrat, cujusmodi partibus aliquotis antecedens consequentem excedit; quinque verò denotat quot ex ejusmodi partibus ipsum excedit. Nec absimiliter in cæteris. Verùm (ut diximus) observari debet exceptio, quòd antecedentis supra consequentem excessus non debet ullo modo partem unam aliquotam constituere; vel quòd unitati subnexa fractio minimis terminis prolata non debet unitatem admittere loco numeratoris: tunc enim ratio non superpartiens erit, prout hinc distinctim accipitur, at superparticularis. Ut v.g. assis ad dodrantem ratio (vel numeri 12 ad 9) non secundùm hujus divisionis institutum,

&

Pag.31. & τὴν τῆς τεχνολογίας καταλληλίαν, ut loquitur Nicomachus, dicetur ratio ſuperpartiens, at ſuperparticularis, ſeſquitertia, quoniam as dodrantem excedit unâ dodrantis parte tertiâ, hoc eſt, 3 unciis. Quamvis ſecundùm rei veritatem, hác limitatione ſepoſitâ, dici poſſit hæc ratio ſupertripartiens nonas, quatenus 12 ſuperat 9 per 3, quæ eſt $\frac{3}{9}$ dodrantis; quæ fractio æquipollet ipſi $\frac{1}{3}$. Verùm exigit harum rationum diſcrimen, ut denominatores ipſas diſtinguentes efferantur terminis ſimpliciſſimis & omnium minimis; alioqui vel ipſa ratio multiplex cum ſuperpartiente quodammodo coincidet; nam inſtando, ratio 9 ad 3 verè dici poteſt ſuperſextipartiens tertias, quia 9 excedit 3 ſex partibus tertiis ipſius 3, hoc eſt, 6 unitatibus; ſed liquet multò ſimpliciùs & commodiùs hanc rationem enunciari, dicendo quòd 9 ſit multipla, tripla nempe τοῦ 3. A Græcis autem hæc ratio vocitatur λόγος ἐπιμερής, quaſi parti partem adjiciens; quoniam antecedens non unâ ſolâ parte aliquotâ conſequentem excedit, at præter hanc aliâ quâdam, aut aliis partibus. Ut 5 continet 3 ſemel, & ejus duas quintas, hoc eſt, unam quintam & alteram inſuper quintam; & 11 ſuperat 6 ejus parte dimidiâ (3), & tertiâ (2); ſcilicet $11 = 6+3+2$: (ita vocem ἐπιμερής expono, propter difficultatem quandam mox attingendum, quæ ex hujuſmodi tantùm interpretatione videtur ſolubilis). Hinc & hujus rationis ſpecies ita nominantur, Λόγος δὶς ἐπίτριτος, δὶς ἐπίπεμπτος, τρὶς ἐπίτεταρτος, τρὶς ἐπιδέκατος, & in ſimilem formam. Puta ratio quincuncis ad quadrantem

tem (hoc eſt, numeris 5 ad 3) dicitur *δὶς ἐπίτριτος*, quia 5 continet 3 ſemel, & ejus duas partes tertias, vel ejus tertiam partem bis; & ratio numeri 13 ad 10 eſt *τρὶς ἐπιδέκατος λόγος*, quia 13 continet 10 ſemel, & ejus præterea decimam partem, ut [illegible]tatem nempe ter, ac in reliquis conſimili pacto. Adnoto tamen Nicomachus aliter compingit harum rationum nomina; nam *ἐπιμερεῖς λόγους* dividit primùm in *ἐπιδιμερεῖς, ἐπιτριμερεῖς, ἐπιτετραμερεῖς*, &c. ex prædictarum fractionum numeratoribus; tum harum rationum ſingulas ex earundem denominatoribus ſubdividit, ut puta *ἐπιδιμερῆ* in *ἐπιδίτριτον, ἐπιδίπεμπτον, ἐπιδιέβδομον*, &c. & *ἐπιτριμερῆ* in *ἐπιτριτέταρτον, ἐπιτριπέμπτον*, &c. Hujus autem rationis, quæ ſecundùm minoritatem oppoſita eſt, unà cum ejus ſpeciebus, ex hinc (ut in præcedentibus) facilè intelligitur. Differt enim quoad rem ſolà terminorum tranſpoſitione, quoad appellationem tantùm vocem ſub vel *ὑπὸ* præfigendo; ſubſuperpartiens, ſubſuperbipartiens tertias, quartas, decimas, &c. *ὑπεπιμερὴς δὶς ὑπεπιμερὴς, δὶς ὑπεπίτριτος, τρὶς ὑπεπιτέταρτος*, &c. quare nil attinet his diutiùs immorari. Et hæ quidem tria ſunt ſimpliciorum rationum genera, cùm antecedens conſequentem non niſi ſemel continet. Reſtant è prima (multiplice) cum reliquis duabus (ſuperparticulari & ſuperpartiente) quodammodo conjuncta reſultantes alter[illegible] duæ, multiplex ſuperparticularis & multiplex ſuperpartiens; ac his inverſæ. Cùm ſcilicet antecedens conſequentem pluries includit, & unicam inſuper partem ejus aliquotam (ut dodrans continet 4.

tri-

trientem bis, & ejus præterea quartam partem) dicitur horum terminorum ratio generaliter multiplex ſuperparticularis, ſpecialem autem in exemplo propoſito ratio duplaſeſquiquarta: & ſic in aliis. Hujúſque ἀντίστροφος ratio, numeri 4 puta ad 9 dicitur in genere ſubmultiplex ſuperparticularis, in ſpecie ſubdupla ſeſquiquarta. Græcis pari modo prior πολλαπλασιεπιμόριος, poſterior
5. ὑποπολλαπλασιεπιμόριος, nuncupatur. At cùm antecedens conſequentem pluries continet, ampliúſque plures unà partes ejus aliquotas (ut bes continet quadrantem, vel numerus 8 numerum 3, bis, & duas ejus partes tertias) ita ſe habentium terminorum ratio dicitur generatim multiplex ſuperpartiens, ſpeciatim in exemplo propoſito dupla ſuperbipartiens tertias: & ad hunc modum in reliquis. Hujus item inverſa, veluti numeri 3 ad 8, dicitur in genere ratio ſubmultiplex ſuperpartiens, in ſpecie ſubdupla ſuperbipartiens tertias. Græcis itidem ſimili pacto prior majoritatis ratio dicitur πολλαπλασιεπιμερὴς, poſterior (minoritatis) ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς. Nec his exiſtimo ſatìs liquidò manifeſtis ulteriùs inſiſtendum. Ita rationum effabilium genera (quinque majoritatis & illis oppoſita minoritatis totidem) utcunque recenſuimus & expoſuimus breviter; nec ulla datur per numeros exprimibilis inæqualitatis ratio, quæ non ad harum aliquam redigatur; quatenus omne quantum majus continet minus aut aliquoties perfectè adeóque multiplex eſt ejus (& hoc illius ſubmultiplex) aut ſemel & ejus unicam partem aliquotam, adeóque ſuperparticulare

culare eſt ejus (& hòc illius ſubſuperparticulare); vel ſemel & plures ejus partes aliquotas, unde ſuperpartiens eſt ejus (& hoc illius ſubſuperpartiens) vel pluries & unicam ejus partem, quare multiplex ſuperparticulare dicetur (& hoc illius ſubmultiplex ſuperparticulare) vel pluries demum & plures partes aliquotas, quamobrem id hujus erit multiplex ſuperpartiens (& hoc illius viciſſim ſubmultiplex ſuperpartiens) neque rei natura plures admittit continendi modos, adeò perfecta eſt hæc enumeratio. Attamen apud Theonem Smyrnæum reperio, *Cap.*28.
præter haſce ſpecies aliam adnumerari, quam ſimpliciter effabilem eſſe dicit, ejúſque terminos habere rationem numeri ad numerum, ſed à prædictis diſtinctam; quam ideò nomine deſignat οὐδετέρου λόγου· &, Ἀριθμοῦ *Cap.*22.
(inquit) πρὸς ἀριθμὸν λόγος ἐστιν ὅταν ὁ μεί- 28.
ζων πρὸς τὸν ἐλάττονα ἐν μηδένι ᾖ τῶν προειρημένων λόγων. Exempli loco ſubjicit rationem quæ verſatur inter terminos harmonici intervalli, quod λεῖμμα dicitur, habentes ſe majorem cum minore comparando, ſicut 256 ad 243: Καθὰ (inquit) δειχθήσεται καὶ ὁ τὸ λεῖμμα περιέχων φθόγγος λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν, ἔχων τοὺς ὅρους ἐν ἐλαχίστοις, ὡς ὁ σνϛ πρὸς σμγ. Hunc ſectatus Meibomius, in dialogo de proportionibus (an alios veteres neſcio, ſaltem hunc) *Porrò*, inquit, *& hoc monendum numeri ad numerum rationem dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum, cujus rationis eſt limma in harmonicis contentum bis minimis numeris* 256 *ad* 243. Quod ob dictum ita vapulat, *Omnino ſomniâſſe videtur.* Non immeritò quidem id, juxta

juxta rei veritatem & rationis ſuperpartientis nomen intelligendo ſecundùm vulgarem acceptionem. At non ſolus Meibomius è ſuo cerebello, ſed Theonem (ut vidimus) nactus contubernalem, & ejus afflatus authoritate dormitavit. Quid igitur ipſe Theon, an erravit? Videtur quia ratio limmatis eſt planiſſimè ſuperpartiens, nempe ſupertredecupartiens ducenteſimas quadrageſimas tertias; nec igitur à prædictis diſtincta. Nodum hunc aliter expedire nequeo, nec ab errore Theonem eximere, quàm dicendo Theonem, & alios fortaſſe vetuſtiores Mathematicos, rationem ἐπιμερῆ rectiùs intellexiſſe, pro tali ſolummodo ratione, cujus antecedens ita conſequentem excederet, ut reſiduum dividi poſſet in duas partes ſimplices conſequentis aliquotas (ſimplices appello quarum numerator eſt unitas) eo pacto quo ſicut oſtendi priùs comparando 11 cum 6, reſiduum 5 continet 3 & 2, quorum 3 eſt una dimidia pars, & 2 una tertia conſequentis 6. Unde dicta videatur hæc ratio ἐπιμερὴς, ex mente ſaltem Theonis, & ex interpretatione τῦ λόγυ ἐπιμερῦς quam ille tradit. Juxta quam acceptionem limmatis ratio non erit ἐπιμερὴς· nam 13, exceſſus numeri 256 ſuper 243, divi nequit in duas partes ſimplices aliquotas conſequentis 243, ut experiendo conſtabit. Bullialdus aliud exemplum ſubjicit numeri 29 ad 23, difficultatem hanc aut non advertens omnino, vel conſultò diſſimulans, & Theonis errori, ſiquidem error fuit, ſubſcribens. Nam numeri 29 ad 23 ratio eſt planè ſuperſextipartiens vigeſimas tertias, accipiendo rationem ſuperpartientem

Ad cap. 22. *The. Smyr.*

modo

modo communi. Sed de hac re ſatis. Potuiſſem adjeciſſe regulas inveſtigandi terminos quotlibet harum omnium jam expoſitarum rationum; at præterquam quòd audientium intelligentiæ vix accommodari poſſet hoc, & non admodum utile foret, & multa verba depoſcens chariſſimi temporis nimium devoraret; adeat, ſi cui volupe eſt hæc ultra proſequi, Clavium in præcedaneis ad V elementum, vel è vetuſtioribus Nicomachum in Arithmeticis. Ego jam conquieſco.

LECT. V.

RAtionis in præcedentibus naturam expoſuimus, & percenſuimus ſpecies: ad ejus proximè accidentia quædam excutienda devenio. Accidit autem rationibus juxta vulgarem loquendi modum, quantorum ad inſtar, addi & ſubtrahi, augeri & imminui, protrahi & contrahi, multiplicari ac dividi, inter ſe ſecundùm æqualitatem & inæqualitatem comparari; quorum ultimum cùm præcipuum ſit in ſe, reliquiſque penitus intelligendis neceſſarium, ut & toti rationum doctrinæ illuſtrandæ, de eo primùm diſquiremus. Ita tamen ut meâ referat præfari rem aggredi me ſubtiliſſimam & intricatiſſimam, ſeu rei naturâ, ſive tractantium culpâ denſiſſimis nebulis involutam, quibus ut omnino liberetur, non eſt quòd mea tenuitas aut ſperet aut ſpondeat, præſertim cùm difficillimum experiar obverſantes, hæc ſeriâ me-

meditatione perpendenti, cogitationes aptis verbis enunciare, clarâ methodo digerere. Integrum quinquennium impendisse se profitetur M. Meibomius huic speculationi, neque præter leviculos quosdam criticismos sani quicquam aut solidi videtur elephantinus iste partus in lucem protulisse. Diutiùs, opinor, & graviùs eidem incubuit (an ferè succubuit dicam?) maximus vir, & recentium Geometrarum nulli posthabendus Gregorius Vincentius, attamen ut rem meo judicio reliquerit, haud minùs obscuram quàm invenerit, fusissimè licèt & elaboratissimè pertractatam. Quid igitur à paucularum horarum studio, quid (ut cætera taceam) ab hac extemporanea pene scriptione circa materiam ejusmodi contumaciter perplexam meritò possit expectari? Sed obsequendum est nihilominus instituto nostro; pergendum est in itinere suscepto, prærupto quantumvis & impedito; suggerendum est aliquid utcunque crudiùs & asperiùs à maturiori judicio vestro excoquendum & elimandum. Hæc prælocutus, ad opus accingor atque certamen multiplex. Imprimis autem decidenda venit quæstio, dicendorum intelligentiæ maximopere conducens. Quum nempe rationes, haud secus quàm absoluta quævis quanta, dicantur inter se comparari, sic hæc æqualis sit aut inæqualis illi; quum componi, resolvi; addi, subtrahi; multiplicari, dividi; potest ambigi quo sensu debeant hæc intelligi, num propriè vel impropriè: vel, an rationes accuratè loquendo res quantæ sint, quantitatis affectionibus istis, æqualitati, inæqualitati, rationi, compositioni, divisioni,

ſioni, reliquiſque propriè ſubjacentes. Pleríque recentiores in hac ſententia verſantur, ídque diſertis verbis aſſeverant, rationem eſſe genus peculiare quantitatis, eíque quantitatis attributa jure competere: hoc Vincentius toti ſuarum proportionalitatum doctrinæ ſubſternit, eique ſuccinit eruditiſſimus ejus conſocius Tacquetus; inculcat hoc D. Hobbius adverſario ſuo doctiſſimo nihil reclamante; agnoſcit idem egregius ille Borellus, *Agimus* (inquit) *jam de nova ſpecie quantitatis.* Quid Merſennum, Meibomium, alios referam, cùm uno ore videantur omnes, præſertim qui circa proportionalitatis doctrinam innovare ſtuduerunt, huic aſtipulari ſententiæ? Nihilominus audendum eſt mihi tot & tantis viris obniti, tam illuſtri authoritati ἀντιβλέπειν. Veritas exigit (ſaltem exiſtimata mihi) à tam validis hoſtibus aliquale patrocinium: hæc certè ſententia mihi non ſolùm falſa, ſed & admodum noxia videtur, quippe quæ controverſias aliquam multas inutiles genuerit & foverit, plurimaſque (ſicuti mihi videtur) confuſiones, ἀκυρολογίας, errores invexerit in proportionum doctrinam Pluſculæ, arbitror, reſecabuntur lites, difficultates auferentur, evitabuntur errores, & tenebræ diſcutientur, aſſerendo rationem non eſſe genus quantitatis, nec quantitati ſubjacens quid, & quantitatis attributa neutiquam propriè, per ſe, directè, nec aliter quàm per κατάχρησιν aut μετωνυμίαν quandam ei convenire. Et ſane mirum videatur aliter quemvis cenſuiſſe; quum enim ratio ſit & agnoſcatur pura puta relatio, quomodo veluti tranſire poteſt

Ad 7. def. lib. 3.

in aliam categoriam, & genus aliquod constituere quantitatis? Quum nil sit aliud quàm duorum quantorum respectus in quantitate fundatus, quomodo poterit ipsa concipi res ex se quanta, vel quantitati subjacens? Quum sit abstractè relatio, quomodo concretè dicatur relata? Annon hoc est res absolutas cum respectivis, nomina concreta cum abstractis confundere? Hactenus docuerunt Logici relationes inesse, tribui, niti rebus absolutis; res autem absolutas relationibus inhærere, vel accidere nemini dictum, opinor, vel auditum Logicæ studioso. Sicut nec relationes ipsas referre, respectus se respicere, habitudines hoc vel illo modo se habere, distantias distare, similitudines assimilari, comparationes inter se conferri, dictu plausibile, conceptu possibile videtur. Cùm e. g. dicitur, hæc ratio major est illà, primùm (ex adversariorum sententia dictum id propriè sumentium) tribuitur rationi magnitudo quædam, seu quantitas, inhærens vel accidens rationi; propter quam refertur ad aliam, vel in qua fundatur ejus ad aliam ratio; tum interpretativè consequentérque dicitur, inæqualitas hæc inæqualis est illi inæqualitati, hæc majoritas major est istâ majoritate: ita res absolutæ relationibus inerunt ac innitentur, relationes attribuentur relationibus; concretæ voces de paronymis suis, & ejusdem familiæ vocibus abstractis prædicabuntur. Porrò quâ causâ quóque jure, rationes inter se comparando sibi pronunciet aliquis æquales propriè vel inæquales, & inter se rationem obtinere, possit eâdem causâ æquóque jure, ra-

rationes iſtarum rationum conferendo æqualitatem iis & inæqualitatem novſque generis adeò rationem aſſignare; quin & harum ulteriùs rationum alias rationes ſtatuere, ac ita nunquam deſituro ad infinitum progreſſu. Si ratio quantitatis genus ſit, à magnitudinum comparatarum quantitate diſtinctum, & rationem ipſa ſortitur, hæc nova ratio pari jure novum quantitatis genus erit; & rationis hujus ratio genus alterum diſtinctum conſtituet, & ſic infinita quantitatum genera lucrabimur, hactenus nemini puto vel in ſomnis cogitata, neminíque ſano cogitanda. Verùm meritò videtur & reſpuitur à Philoſophis hujuſmodi nimium liberalis & facilis entium multiplicatio, minime neceſſaria neutiquam comprehenſibilis. Addo, quòd nulla rationis cujuſvis quantitas immediatè diſcerni, vel per ſe poteſt æſtimari; non ſenſum incurrit, non per effectus ſe prodit, non ullâ certâ ratione colligitur aut comprobatur; ut poſthac oſtendere conabimur. Itaque gratìs ſupponitur & affirmatur, eâdémque facilitate rejici poteſt ac abnegari. Sed contra primum noſtrum diſcurſum objici poſſe video ſic inſtando percontandóque: relatio patris ad filium, annon ſimilis dici ſolet, & verè dicitur relationi principis ad ſubditum, ducis ad militem, paſtoris ad gregem? Ac ita relationi relatio, paternitati ſimilitudo tribuitur ac ineſt. Repono breviter primò, ſaltem ejuſmodi relationes paternitas & ſimilitudo ſunt admodum diverſæ naturæ, neque cùm dicitur paternitas eſt ſimilis, committitur ejuſmodi abſona reduplicatio, nominúmque concretorum cum abſtractis confuſio,

fuſio qualis incurritur dicendo, ſimilitudo eſt ſimilis, vel inæqualitas eſt inæqualis. Sed reſpondeo potiùs ſecundo, cùm dicitur paternitas eſt ſimilis principatui, iſta ſimilitudo non in ipſis fundatur relationibus, nec in aliquo quo his ineſt, ſed in rebus abſolutis, quibus & ipſæ dictæ relationes innituntur; vel in aliis rebus abſolutis quæ conſequuntur & exurgunt ab illis fundamentis: quia ſcilicet gignere filium & populum aggregare, regere familiam & civitati præſidere, ſimilia ſunt; quoniam affectu proſequi, conſilio juvare, pœnis coercere; curâ ac operâ prodeſſe, providere, tutari: reverentiam, obſequium, gratitudinem ſibi debita exigere, communia ſunt patri principíque; hinc pater & princeps abſolutè multis de cauſis & multis nominibus (ut talibus affecti qualitatibus, agentes talia vel patientes) ſimiles dicantur: unde per tranſlationem nominis ipſæ relationes, paternitas & principatus, ſimiles prædicantur; non quia σχέσεις hæ ſtrictà proprietate referuntur ad ſe (quomodo enim intelligi poterit, cùm paternitas & principatus nil ſint aliud quàm τὸ eſſe ad alia, convenit ipſis alterum eſſe ad aliud; ut nempe dicatur, hoc eſſe ad aliud eſt ad aliud?) Sed quia relationibus iſtis perpetuò conjunguntur iſtiuſmodi qualitates aut actiones, propter quas ipſi termini relati verè ſimiles habeantur. Igitur hæc ſimilitudinis relatio non tam inhæret dictis relationibus, quàm ipſas comitatur, ipsíſque propter hanc accomitantiam attribuitur. Non abſimile quid contingit in hac quam proſequimur materia: quæ nempe quantis abſolutis revera convenit æqualitas aut inæqualitas, aut ſpecialis quælibet ratio, ipſorum rationibus adſcribitur. Quum e. g. ratio ſextupla dicitur major reſpectu, & quidem dupla, rationis triplæ, nil ſignificatur aliud, quam rem denominatam numero ſenario majorem eſſe, in dupla ratione majorem, re denominata numero ternario; vel antecedentem unius rationis æquare duplum rationis alterius antecedentem; propter quem inæqualitatis modum una ratio, quaſi metonymice dicatur alteri taliter inæqualis. Quod ſiquis attente rem animo penſitet, agnoſcere poterit, etſi veriſſime dicatur & non impropriè, ſextuplum tripli duplum eſt (concretas nempe voces adhibendo, adeóque res quaſdam abſolutas involvendo) tamen nec verè nec propriè nominibus abſtractis utendo, dici ſextuplicitas eſt dupla triplicitatis. Certe ſextuplum ſemper dividi poteſt in duo tripla; triplum duplicari poteſt, & bis accipi, ſic ut ſextuplum componat. At ipſa ſextuplicitas videtur eſſe quid indiviſibile, neque triplicitas apta eſt compoſitionem ingredi. $3+3$ exæquat 6; at eſſe triplum + eſſe triplum (hoc eſt, triplicitas + triplicitas) qualem ſummam efficiat non aſſequi poſſum cogitando. Triplex eſt trihorium horæ, triplex triennium anni, iſta triplicitas huic triplicitati adjuncta, quæ Mathematice computabilem ſummam efficiant, equidem non capio; video potiùs ex duabus iſtis Metaphyſicè duabus, triplicitatibus ſextuplicitatem nullam conflari vel emergere. Cæterùm ut hæc dilucidiùs pateant, & quòd nulla poſtulet neceſſitas diſtinctam aliquam ratio-

nibus quantitatem assignari, circa rationum συγκρίσεις nonnulla pressiùs advertemus. Ad-
1. verto nempe primò, Quòd nullæ rationes inter se comparari possunt, sicut innotescat aut æstimabilis reddatur ista, quæ adversarii pertendunt, ipsarum ratio, nisi priùs ad commune consequens reducantur, immediatè nimirum aut mediatè, actu & explicitè, vel virtualiter & implicitè. Scire v. g. nemo potest aut concipere, quænam ratio, num numeri 12 ad 3, vel 4 ad 2 major sit, aut quomodo major, nisi considerando quòd 12 ad 3 taliter se habet ut 4 ad 1, & 4 ad 2 sicut 2 ad 1. (Vel unitatis loco quodvis aliud substituendo commune consequens, puta 5, considerando quòd 12.3 :: 20.5 & 4.2 :: 10.5). Quibus consideratis atque perspectis, tum demum ex antecedentium, in hisce novis æquipollentibus rationibus, collatione dignoscitur ipsarum rationum inæqualitas & ratio (quæ dicitur). Unde provenit hoc, quàm exinde, quòd rationes ipsæ nullam ex se quantitatem habent ullatenus imaginabilem, distinctam à terminorum suorum quantitate, nullam propriè dictam inæqualitatem; at saltem, postquam commune consequens obtinent, propter antecedentium inæqualitatem inæquales & ipsas denominari?
2. Pariter adverti poterit secundò, quòd cùm duarum quarumcunque rationum termini sunt heterogenei, nullatenus illæ comparari possunt aut æstimari, nisi priùs ad commune genus aliquod revocentur. Proponantur e.g. duo pondera & duo tempora, quænam sit major ratio duorum istorum ponderum, an binorum temporum, dignoscatur aliquatenus;

nus; nec alio ferè quàm hoc pacto: Adsumatur aliquod quantum, cujusvis generis pro lubitu tuo: (sed commodissimè plerunque propter summam rectarum linearum simplicitatem, & capacitatem exprimendæ cujusvis rationis, adsumetur recta linea) adsumatur, inquam, recta quævis linea, quòd si fieri possit ut primum pondus ad secundum, ita linea quævis ad lineam acceptam; item ut primum tempus ad secundum, ita quædam linea ad eandem itidem assumptam; tum sicut se habet prior linea sic inventa ad secundam ita repertam, taliter habere se dicetur ratio ponderum ad rationem temporum; dicetur, inquam, idcirco quia dictæ lineæ taliter se habent, ab ipsarum ratione denominationem hanc mutuando. Posset commodissimè loco lineæ numerus adsumi, modò constet propositas rationes ponderum & temporum numeris explicabiles fore; at si non constet, aut quod multoties evenit, reipsâ non contingat hoc, numerus ad hanc σύγκρισιν ineptior est. Unde minùs rectè, quod obiter adnoto, vir eximius, in opere Arithmetico numeris omnibus absoluto, pronunciâsse videtur omnes rationes existere in genere numeroso: quasi verò reliqua quanta, numerorum omni consideratione seclusâ, rationem non obtinerent, eámque satis notabilem atque tractabilem? Quamobrem præsertim sit ejusmodi ratio, modo quolibet in genere numeroso, quæ cùm possit aliis terminis exhiberi, numeris tamen nullatenus exprimi possit? Ut & quòd ex hinc infert, veritatis expers videtur, universam nempe rationum doctrinam, Arithmeticæ potiùs quàm

Pag. 226.

Geometricæ ſpeculationi convenire: quid enim, annon pleraque de rationibus adhuc inventa vel tradita planè generalia ſunt, & quantis ex æquo cunctis conveniunt? Et ejuſmodi ſaltem rationes, quæ numeris exprimi nequeunt, Arithmeticæ ſpeculationis limites egredientur, quales innumeræ ſunt, quibus elementi quinti theoremata non minùs quàm Arithmeticis adaptantur. Sed hoc ἐν παρόδῳ, neſcio num aliàs pleniùs elucidandum. Conſequenter ad hæc advertatur
3. tertiò, quòd nulla ratio ſeorſim & per ſe poteſt æſtimari vel comprehendi, neque ullam determinatam quantitatem peculiariter apta nata eſt exprimi ſeu repræſentari, ſed per omnes, vel unamquamvis indifferenter; nec ideo cuivis abſolutæ quantitati ſubjacet, qualis enim illa quantitas foret, per omnia quantorum genera deſultans atque pererrans? Et ſi nullam ex ſe quantitatem intelligibilem habet, quomodo cum alia ratione collata deprehendetur habere? Quo pacto nullâ ratione per ſe comprehenſibilium quantorum feliciter inſtituetur comparatio, notáque reſultabit relatio quantitatum ignotarum? Quinimo cum alia ratione collata ratio non niſi vagam & arbitrariam ſortitur quantitatem; prout enim commune conſequens ex arbitrio varium accipitur, ita rationum collatarum quæ dicuntur quantitates evariantur. Deſultoriam igitur & indeterminatam quantitatem habent, ſiquam habent, hæ rationes; hoc eſt, nullam. Eſt enim aliquid determinate, quicquid eſt; quod utique eſt, nuſquam eſt. Vidit hoc, & palam agnovit, luculentéque declaravit acutiſſimus

mus

mus Vincentius, at seu verborum ambiguitate delusus, seu spe novæ con endæ scientiæ nonnihil elatus, aliorsum rapuit. *Respondeo* (inquit) *verum esse, si ratio quæ in numeris exprimi nequeat, solitariè sumatur, denominatorem ejus exhiberi Geometricè non posse* (imò verò interpono, semper exhiberi potest, sumendo quodvis quantum pro consequente, quod eodem munere fungetur, quo communiter unitas defungitur in rationum effabilium denominatoribus exhibendis; neque rationum numeris effabilium quoad hoc peculiare quicquam est) *quòd si* (pergit Vincentius) *binæ vel plures fuerint datæ rationes, assignari poterunt singularum denominatores, qui nimirum demonstrent qualis inter rationes ipsas proportio intercedat, atque hoc non tantùm à duabus certis lineis præstabitur, sed à quibuscunque aliis, quæ prioribus proportionales existunt.* Sic ille. Cùm igitur præter hujusmodi denominatores, nullæ possint assignari rationum quantitates, & si simpliciter accepti possint esse quamlibet varii, non erit ulla rationum absolutè determinata quantitas. At Vincentius (ut dixi) verborum ut puto quorundam obscuritate turbatus, aliò deflexit hæc. Quamobrem adverto quartò, quòd fundamentum unicum, cui innititur, e quo deducta videtur & enata de rationum quantitatibus & rationibus ista quam oppugnamus doctrina, est usitatus iste loquendi modus: Hæ duæ magnitudines sunt æquè inæquales, ac illæ duæ; hæ magis aut minùs inæquales sunt quam illæ, inde rationum quantitates & rationes colligunt dari. Si major est hæc ratio illâ, ergò quantæ sunt, ergò rationem 4.

hæc

hæc habet ad illam. *Ex quo* (inquit D.Hobbius) *intelligitur rationem tam excessûs quàm defectûs esse quantitatem* (esse quantam opinor vult dicere) *quippe quæ suscipit majus & minus* (intelligit, credo, quæ major dicitur & minor). Et Vincentius, in prima demonstratione libri de proportionalitatibus Geometricis, sic argumentatur; *Ratio est mutua quædam antecedentis ad consequens habitudo, secundùm excessum, & defectum, & æqualitatem. Cùm igitur unius rationis antecedens magìs excedat consequens, vel ab eodem magìs deficiat, quam alterius rationis antecedens suum excedat consequens, vel deficiat ab eodem, manifestum est unam rationem majorem minorémve esse alterâ, planè ut una quantitas alterâ major minórve est.* Sed ad hunc plausibilem discursum repono, quoad loquendi formulas usu receptas spectandum esse, non quid verba sonant, at quid loquentes intelligunt. Nihil autem aliud hujusmodi verbis concipi posse, satìs declaratum est nuperrimè, quam ad commune consequens reductis quantorum quibuscunque rationibus, illarum antecedentes se taliter excedere, vel taliter deficere, vel sibimet exæquari. Nec enim, ut ipsi necesse habebunt fateri, possunt æstimari, vel inter se comparari rationes ullæ, nisi talis fiat reductio; postquam verò reducuntur, haud aliter quàm ex antecedentium collatione dignoscitur aut denominatur hæc, quam ipsi nominant, ratio. Quapropter & ex ipsorum mente ac usu vocantur antecedentes isti rationum denominatores. Ergo nihil est necesse per locutiones antedictas aliud quicquam præter antecedentium æqualitatem aut

aut inæqualitatem (hoc eſt, ipſorum rationem) deſignari vel intelligi. Nec igitur valet ab hiſce loquendi formulis deducta argumentatio. Dixi nihil eſt neceſſe, ſed neque de facto quicquam aliud concipitur, unde quo coronidem imponam huic diſſertationi, adverto quintò, quicquid vulgò rationibus 5. tribuitur, id vere tantùm & proprie rationum denominatoribus, hoc eſt, ipſarum ad idem conſequens redactarum antecedentibus, convenire. Quam illis adſignant quantitas, nihil eſt aliud quàm denominatorum quantitas & ratio; quum ipſas videri volunt addere vel ſubtrahere, non niſi denominatores iſtos addunt vel ſubtrahunt; ſed & cùm ipſas multiplicant vel componunt, partiunt aut reſolvunt, eadem res eſt. Liquebit hoc propoſitiones Vincentianas, egregio ſanè niſu contextas, attentiùs expendenti; quas quidem is univerſaliter proponit, & ſecundùm definitiones ac hypotheſes ſuas ritè demonſtrat, at ſi quis eas ſpeciatim veluti de numericis rationibus prolatas accipiat, ejus totam doctrinam huc recidere deprehendet, ut fractionum quaſi numeralium, aut quotientium diviſione compertorum, additio & ſubtractio, multiplicatio ac diviſio, quoádque proportionem comparatio, indagetur atque tradatur. Quod autem in Arithmeticis eſt numerica fractio, vel diviſionis quotiens, id in Geometria eſt denominator rationis cujuſpiam, hoc eſt magnitudo quæpiam ad homogeneam ſibi magnitudinem, unitatis loco habitam, ſic affecta, prout fractio vel quotiens numerica refertur ad unitatem. Quare nihil aliud proſequi videtur Vincentius,

tius, quàm fractiones Arithmeticas, iiſque reſpondentes rationum Geometricarum denominatores; quibus congruentia quæque ſymptomata rationibus ipsis aſcribit. Sint e.g. duæ rationes numericæ 3 ad 5, & 7 ad 3; harum denominatores erunt fractiones $\frac{3}{5}$ & $\frac{7}{3}$ (quatenus $\frac{3}{5}$ ad 1, ita ſe habet ut 3 ad 5; & $\frac{7}{3}$. 1 :: 7. 3) vel reducendo dictas fractiones ad communem denominationem, erunt iſtarum rationum denominatores numeri fracti $\frac{9}{15}$ & $\frac{35}{15}$. Has igitur fractiones cùm addiderit ſibimet, aut unam ab alia ſubduxerit; cùm unam per alteram multiplicarit aut diviſerit, & cùm ipſarum proportionem exhibuerit, præ ſe fert ipſas dictas rationes addidiſſe vel ſubtraxiſſe, multiplicaſſe vel diviſiſſe, vel ipſarum rationem exhibuiſſe. Non igitur ille vir egregius tam novam circa proportiones ſcientiam condidiſſe, quod cenſet Tacquetus, at veterem ante perſpectam doctrinam alio modo, nec eo nimis appoſito, contexuiſſe, noviſque vocabulis enunciaſſe videtur; quam tamen à ſe repertis compluribus theorematis inſigniter locupletavit. Commune verò quod diximus, eſt illi cum cæteris hanc de rationum rationibus & quantitatibus doctrinam amplexantibus, rationes ſcilicet, dum numeros attrectant, cum numericis fractionibus confundere, dum alias rationes conſiderant, tanquam ſuis denominatoribus eaſdem tractare. Quod nonnunquam apertè diſertíſque verbis faciunt, imprudenter eò delabentes, ſæpiùs autem verbis declinantes reipsà incurrunt. Notat hoc & ſæpe taxat Hobbius in antagoniſta ſuo, ſed nec ipſe modò ſibi conſtet immunis

ab

ab hac culpa; idem enim est rationem rationibus tribuere, ac rationes cum denominatoribus suis easdem reputare, vel saltem nihil & insignificanter loqui; hoc enim aut nihil planè quicquam concipiunt. At sufficiant hæc quadantenus exponendæ confirmandæque sententiæ nostræ, quòd scilicet rationes nullam propriè dictam quantitatem habent; neque quoad rationem inter se verè comparantur. Unde nonnulla consectaria deducemus. Hinc primò clarè faciléque 1.
decidetur quæstio de rationum, quam appellat Euclides compositione συνθέσει, num rectiùs pro rationum additione sit habenda, vel pro ipsarum multiplicatione: nam è dictis quoad rem ipsam rationibus, utpote quantitatis expertibus, neutrum convenit, nec addi nec multiplicari; quoad verò loquendi modum, quia cùm componi dicuntur rationes, ipsarum denominatores multiplicantur, manifestum est rectiùs dici rationes multiplicari quàm addi. Sicut & cùm denominatorum unus alium dividit, rectiùs operatio talis dicetur rationis divisio quàm subtractio. Quamvis obtinuerit, ut illa prior operatio dicatur προσθέσεως, hæc posterior autem * ἀφαιρέσις. Secundò, radicitùs hinc evellitur, aut planè decernitur controversia, quam agitant nonnulli quámque videtur † Mersennus excitâsse; num ratio scilicet æqualitatis nihilum referat, aut exæquetur nihilo, ratio majoris æqualitatis attollatur supra nihilum, ratio minoris inæqualitatis infra nihilum deprimatur. Nam 2.

* *Apud Ptolemæum, lib. I. συντ. & Theonem isthic.*

† *In Præfat. ad Cogit. Physico-Mat.*

ex

ex vero cùm nulla ratio quanta ſit, intercidit hujuſce quæſtionis fundamentalis hypotheſis, ipsáque ſimul collabitur & ruit. Aſt ex hypotheſi quòd denominatorum affectiones rationibus ſuis adjudicandæ ſunt, evidentiſſimè liquet etiam minoritatis & æqualitatis rationes ſupra nihilum aſſurgere. Semper enim minoris rationis denominator eſt aliquod quantum conſequente minus; adeóque in Arithmeticis pars vel fractio minor unitate. Æqualis vero rationis denominator conſequenti ſemper adæquatur, & unitate ſignatur in Arithmeticis. Nec amplius quid ad hujuſce quæſtionis deciſionem requiratur.
3. Tertiò, facillimè refelluntur hinc quæcunque Meibomius, adverſus antiquos juxta ac recentiores Geometras, ſtylo certè nimiſquam inverecundo, diſputavit ac adſervit. Qualia ſunt, quòd ratio ſubmultipla ſit eadem rationi multiplæ, propter idem ab æqulitate διάϛημα. Præterquam enim quòd non idem ſit διάϛημα, nam longiſſimè diſtant defectus & exceſſus, differentia negativa ac poſitiva, ſatìs liquebit haſce rationes ad commune conſequens exigendo (quod pro rationum collatione toties neceſſarium monuimus) ſubduplæ denominatorem minorem fore (quadruplâ ratione minorem) denominatore rationis duplæ. Sit puta commune conſequens 2, igitur antecedentes erunt 1 & 4, unde conſtat propoſitum. Item, cùm colligit rationes exceſsûs & defectûs inter ſe non poſſe comparari; nam æquè comparantur hæ, ac aliæ quævis, denominatorum interventu. Etiam, cùm ſolummodo rationem minorem auferendam ſtatuit è majore;

(re-

(rectiùs minorem per majorem dividi dixisset, ut præmonitum est) in eo liquidissimè fallitur: quid enim impedit minoris rationis denominatorem dividi per denominatorem majoris, seu Arithmeticè seu Geometricè? Rursus, cùm rationem alicujus ad majus, subinde majorem esse pronunciat ratione ejusdem ad minus: ut rationem 4 ad 7, majorem esse ratione 4 ad 5; adeóque rationis majoris & minoris nomina pe peram ab omnibus hactenus Geometris usurpata. Nam ejusmodi rationes, 4 ad 7 & 4 ad 5, ad idem consequens revocando, puta subrogando pro illis æquipollentes 20 ad 35 & 28 ad 35, liquet 20 minorem esse quàm 28, adeóque rationem 4 ad 7 majorem esse ratione 4 ad 5. Et universim hinc patet quòd & quare majores & minores appellamenta commodissimè sunt à veteribus applicata; quia scilicet id quod rei ratio depoposcit, ab antecedentium post reductionem quantitatibus legitimè derivata sunt, à quibus cùm ipsæ rationes indicantur, ac denominationem accipiunt, tum habent omnino quòd ullatenus comparari possunt aut comprehendi. Quamobrem & abunde perspicuum est eundem virum nullâ validâ ratione fretum, definitiones Euclideas falli postulâsse. Nam si ratio quævis aliâ major est, quod ipse non diffitetur, (& si nulla propriè major sit, quod ego sentio, docendi tamen causâ nil vetat, nec ego repugno quin aliqua major appelletur) si, inquam, aliqua major supponatur, ille major jure meritissimo dicetur, cujus denominator est major, & quæ talis ab Euclide nominatur, egregiéque definitione circumscribitur, ac distinguitur

ab

ab aliis. Eâdem facilitate difflantur, ut autumo, quæcunque vir ille communi Geometrarum sententiæ pugnantia suggessit animo paradoxa.
4. Neque demum molestiam nobis facesset ista tantopere jactata λογομαχία, circa rationem multiplam ac multiplicatam, duplam ac duplicatam, triplam & triplicatam, atque consimiles. Nam e traditis manifestè dilucescet rationem (v. g.) duplicatam, quæ dicitur minimè duplam esse rationis, quacum confertur. Ut ratio numeri 9 ad 1, non est dupla rationis 3 ad 1, quoniam existente jam communi rationum harum consequente, denominator unius 9, alterius denominatori 3 duplato non æquatur. Unde patet istiusmodi rationum multiplicationes ab alia causa nuncupari, posthac commodiùs expedienda. Id solum adjiciam, admisso, quod astruere conatus sum, rationes nullam ex se quantitatem habere, nulla quantitatis attributa sortiri nisi naturalia, quæque debent accepta referre denominatoribus suis, difficultates hujusmodi plerasque statim evanescere, dubia planè tolli vel facilè solvi, lites & rixas plerasque consopiri; quæ nimium haud aliunde quàm ex ambiguitate per falsam istam hypothesin introductâ videntur emersisse. Quamobrem haud abs re duxi quæstionem hanc tam fusè sedulóque ventilare. Cæterùm quia vulgò solent rationes inter se comparari, verbóque tenus æquales, majores, minores haberi; nec scientiarum magistris deneganda videatur licentia, tales voces cudendi ac usurpandi (doctrinæ nempe clarioris & succinctioris gratiâ, modò de re constet, ac errorum occasio præcidatur. Nec enim

enim ego vulgares loquendi modos libenter improbo, ſed genuinos ipſorum ſenſus inveſtigo, nè verba rebus officiant, & per inanes ſonos illudatur veritati) hæc, inquam, cùm ita ſe habeant, & non abſque fundamento quodam atque cauſâ probabili, locutiones iſtæ pridem admiſſæ ſint, ac dudum invaluerint, quid per illas diſtinctè ſignificetur inquiremus. Quæ nempe ſint æquales, majores, minores rationes (hoc eſt, alio modo breviter nec inconcinnè, rationum comparationes iſtas efferendo, quid ſit analogia, quid hyperlogia (aut prologia) quid hypologia, quomodo definiri poſſint, & à ſe bene diſtingui, proximâ Lectione quæremus; quâ nulla fortaſſe ſubtilior aut gravior apud Mathematicos diſceptatur controverſia. Optimè (quantum res ipſa patitur, optimè) mihi videtur ab Euclide definitiones has eſſe conſtitutas, pleriſque jam ſecus videtur, cúmque nemo ferè non in hoc damnat & deſerit; an juſtis de cauſis & validis ſubnixi ratiociniis hoc fecerint, id examinatis & expenſis quæ dixero penes veſtrum erit judicium ſtatuere. Interim ἐυπραγεῖτε.

LECT. VI.

IN præcedente Lectione satis astruxisse videmur rationibus ex se, verè propriéque loquendo, nullam quantitatem, nullam rationem competere, nec ideò propter aliquid ipsis inhærens, aut ex se conveniens unam alterius respectu majorem, minorem, æqualem prædicari; sed ab absolutis quantis ad ipsorum rationes hæc derivari attributa. Quia verò pridem invaluit usus, ut rationes inter se ceu quanta absoluta comparentur; & æqualis, majoris, minoris rationis nomina sortiantur; & nos locutiones istas, interpositâ justâ cautione, non illibenter admittimus, id proximè sequitur, ut quo certo signo vel indicio dignosci queat, quando ratio una alteri æqualis est, quando major, quandóque minor dici debeat, hoc est, quomodo definiri possint & distingui ratio, major, minor, æqualis, dispiciamus. Et quidem è dictis satis manifestè consequi videtur, siquidem duæ rationes homogeneis terminis constantes, commune consequens habeant, illas commodissimè definiri posse per antecedentium respectivam quantitatem, ut æquales nempe rationes dicantur, quarum antecedentes æquantur, & ratio major hæc illâ, cùm hujus antecedens illius antecedentem excedit; & minor hæc illâ, cùm hujus antecedens ab illius deficit antecedente. Verùm cùm id quod accidit plerumque, diversi consequentis rati-

ones

ones comparantur, adeóque deficit iſta conditio, liquet aliud indicium requiri, quo rationum iſtarum relatio dignoſcatur; indicium ſcilicet aliquod univerſale, ſufficiens determinandis quibuſcunque rationum habitudinibus inter ſe. Tale verò ſufficiens indicium reperire, magnæ res difficultatis hactenus viſa compertáque eſt; cùm obſtent variæ cauſæ, duæ præſertim diſcrimen inter rationes effabiles & ineffabiles (hoc eſt, quantorum aſymmetria) & terminorum, quibus diverſæ conſtant rationes, ἑτερογένεια. Si rationes enim omnes effabiles eſſent, & inter quantitates tantummodo ſymmetras verſarentur, eodem modo definiri poſſet æqualis ratio, quo numerorum proportionalitas in elemento ſeptimo, per diviſionum nempe quotas æquales; & major minórque ratio per quotorum inæqualitatem reſpectivè: ſed hoc univerſim ſufficere prohibet terminorum, quibus inſunt pleræque rationes, incommenſurabilitas, quo fit ut exquiſitè peragi nequeat diviſio, neque per numeros vulgò notos exprimi poſſit, aut animo clarè concipi modus, quo rationum termini ſeſe reſpiciunt. Terminorum etiam, quibus inſunt aut conſtant comparatæ rationes, ἑτερογένεια modos alios nonnullos (excogitabiles aut etiamnum excogitatos) excludit, quibus alioqui rationum reſpectus univerſaliter utcunque definiri poſſit, ut poſtea forſan oſtendetur. Hinc perdifficile videtur univerſale quoddam indicium exhibere, quo propoſitis duabus rationibus, quarum termini ſint indifferenter ſymmetri vel aſymmetri, homogenei vel heterogenei, de ipſarum æqualitate vel inæqualitate, liquidò pronuncietur & certò. Videamus igitur quæ talia indicia Geometræ conati sunt assignare, vel quo pacto rationum hosce respectus definiendos censuerunt. Et quia si deprehendi posset apta rationis æqualis definitio, non difficile sit ex illa rationum inæqualium, majoris ac minoris, definitiones efformare, de rationum æqualitate primò differemus; quæ scilicet anima Matheseôs & nucleus habetur, imò disciplinarum omnium vinculum (δεσμὸς τῶν Μαθημάτων) à Platone dicitur. Rem itaque tantam velut ex imo fundamento pertractandam ordiemur. Rationis æqualitas unico vocabulo (brevitatis & claritatis causâ) vocitari solet analogia. Quæ vox extra Mathesin vulgò quamvis denotat congruentiam, conformitatem, aut aptam rerum inter se quarumvis correspondentiam; sicut (instando) convenientia sermonis cum regula generali dicitur à Grammaticis analogia; & quæ in ratione quapiam communi conspirant, à Logicis dicuntur analoga. Nempe Græcis ἀνὰ præpositio rerum identitatem, æqualitatem, aut convenientiam innuit qualemcunque. Exempla suggerunt Scripturæ sacræ; Joannis secundo habetur, Ἀνὰ μετρητὰς δύο χωροῦσαι ὑδρίαι· Hydriæ binas metretas capientes æqualiter, aut singulæ binas. Matthæi vigesimo, operarii loco mercedis, Ἀνὰ δηνάριον ἔλαβον· Unusquisque denarium pariter accepêre. Lucæ nono, Κατακλίνατε αὐτοὺς ἀνὰ πεντήκοντα· Facite discumbant quinquaginta simul, vel in singulo discubitu æquè quinquageni. Neque non apud medicorum filios in pharmacorum

In Timæo.

macorum compoſitione præſcribi, Sumantur horum vel illorum tot taléſque menſuræ ana, hoc eſt, æquè, vel ſingillatim tantæ, ignotum nemini. Simili fere pacto ἀνάλογον dicuntur bina quanta binis collata, quæ λόγον habent ἀνὰ congruè vel æqualiter; hoc eſt, quæ rationem habent æqualem: abſtractéque rationum ipſarum convenientia talis appellatur ἀναλογία. Latinis eadem uſitatiùs proportionalitas dicitur, diſtinctionis gratiâ, quia proportio ſæpiùs ipſam rationem τὸν λόγον deſignat. Quanquam, ut mihi præmonitum, Cicero cùm in Plat. Timæi verſione vocem ἀναλογίαν in Lat. transfunderet ſermonem, adhibuerit vocabulo proportio. Fabius autem Quintil. ἀναλογίαν per ſimilitudinem bene cenſuit exprimi: quapropter analogia vel proportionalitas definitur ab Euclide λόγων ὁμοιότης, à Theone Smyrnæo λόγων ταυτότης· meliùs (etſi non admodum referat) meâ ſententiâ diceretur λόγων ἰσότης (cùm quia ſimilitudo verbum eſt laxiùs & magìs ambiguum; & identitas haud optimè quadrat rebus actu diverſis, immediate quà talibus & ſub diverſorum ratione comparatis; tum quia rationum habitudines aliæ, hyperlogia nimirum & hypologia, non ex diſſimilitudine vel diverſitate, ſed ex inæqualitate denominantur majoritas & minoritas; quia denique rationum æqualium denominatores, à quibus, ut expoſitum, rationes habent quòd ullatenus inter ſe comparantur, non iidem aut ſimiles, ſed æquales ſunt) definitiones autem illæ non ſunt ὐσιώδεις, rei definitæ certam aliquam eſſentialem paſſionem exhibentes, ſed tantùm ὀνοματώδεις, *Quintil. lib.V. H.*

τῶδεῖς, quid analogiæ nomen ſignificet quadantenus indicantes; Euclidi ſaltem tales ſunt, ut ex eo ſatìs patet, quòd definitioni quintæ (rationem ſcilicet eandem habentium magnitudinum definitioni) ſubjicit, Τὰ δὲ αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον ἀνάλογον καλείσθω, quæ mera eſt vocabuli ἀνάλογον explicatio. Mox autem, interjectis ſolùm inæqualem rationem habentium definitionibus, Ἀναλογία δέ ἐστι λόγων ὁμοιότης. Quamobrem Euclidis mentem haud optimè capit Borellus, cùm exiſtimat eum hanc velut eſſentialem, & ſcientificam analogiæ definitionem proponere; cúmque cenſet ex Euclidis mente, rationum ſimilitudinem ceu notam & primam analogiæ proprietatem aſſignari. Nil tale cogitâſſe videtur is; at cùm ſubinde vox analogiæ, vel ἀνάλογον εἶ), rationis æqualitatem concinniùs exprimens & conciſiùs, interdum uſurpanda videretur, eam nè quid ignorata diſcentibus faceſſeret negotii, vel caliginis effunderet, explicatam voluit dare. Quare nec Euclidem meritò taxat (taxat, inquam, ex hypotheſi quòd Euclides iſtam definitionem tradiderit) quaſi ſuperfluè, pravéque binas ejuſdem rei definitiones exhibentem. Nam eandem vel æqualem rationem habentium unicam exhibuit revera definitionem generalem, per eſſentialem quandam ipſorum paſſionem; quin autem præterea rationem habentia æqualem appellari ἀνάλογον & rationum identitatem vel ſimilitudinem iſtam analogiæ quoque nomine deſignari ſubmoneret, quid obſecro juſtæ cauſæ debuit impedire? Imò ſatis habuit cauſæ vim declarare vocabuli, pleriſque for-

forſan ignoti. Fraudi verò fuiſſe videtur eruditiſſimo viro, quòd in Claviana, aliiſque Latinis pleriſque elementorum editionibus analogiæ deſcriptio loco ſuo legitur emota; & anteriùs protruſa quartum iſthic locum occupat, quæ jure meritóque Græcis in codicibus octava numeratur. Itaque rectiſſimè ſuboluit ſagaciſſimo viro, deſcriptionem iſtam loco quem obſidet inſerctam temerè; neque forſan in ſuum ordinem repoſitam ità ſugillâſſet. Quanquam præterea non diffiteor elementi quinti definitiones attentiùs inſpectanti, nonnihil in iis exſcriptorum culpâ videri tranſpoſitum ac immutatum; qua de re non eſt opportunum conjecturas proferre. Quia eò potiùs accingimur, ut quod in hac materia præcipuum eſt æqualis rationis vel analogiæ definitionem exploremus appoſitam & accuratam. Id quod exequemur hâc methodo: Primò, definitionem Euclideam explicatam dabimus; neque non ei legitimæ definitionis conditiones ad amuſſim quadrare monſtrabimus. Secundò, quæ contra definitionem iſtam adferuntur objectiones adnotabimus & diluemus. Tertiò, novas huic definitioni ſubrogantium doctrinas & methodos excutiemus; & quid in iis deſideretur ac deficiat, quouſque cedant Euclideæ definitioni, vel quatenus eâ deteriores ſunt, adnitemur oſtendere. Quod primum caput attinet, elementaris definitio ſic Græcè ſonat; Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα. Hoc eſt, reddente Clavio; in eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam & tertia ad quartam, cùm primæ & tertiæ æquemultiplicia à ſecundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel unà deficiunt, vel unà æqualia ſunt, vel unà excedunt, ſi ea ſumantur quæ inter ſe reſpondent (vel ſi ordine ſumantur, hoc eſt, ut multiplex antecedentis primi cum ſui conſequentis multiplice, & multiplex ſecundi antecedentis cum ſui conſequentis multiplice conferantur). Talis eſt proportionum definitio Euclidea; μορμολυκεῖον illud, quo plerunque deterrentur ingenia virorum modeſta vel ignava: modeſta, quæ ſimul ac difficultatis aliqua ſpecies objectatur, ſuis diffidunt ipſorum viribus; ignava verò, quæ fermè nolunt attentionis aliquid ediſcendis ſcientiis impendere; quaſi nobis in hac rerum obſcuritate conſtitutis ſapere liceret ἀπουδεί. Quorum utrique monendi ſunt, illi nè planè deſpondeant animo, hi nè tantillum curæ refugiant, quando ſtudium res aliquod, at non improbum, deſideret. Cæterum verbis aliis concipi poterit hæc definitio, breviùs aliquantum, & forſan ad quorundam captum accommodatiùs. Proportionalia quanta ſunt, bina binis, quum antecedentium æquè multipla quælibet conſequentium æquè multiplis quibuſcunque ſunt, unà ſemper vel æqualia, vel majora, vel minora, ordinatè. Vel ſic; analoga quanta (vel analogica, nos brevitatis causâ ſubinde dicemus ana-

analoga) cùm antecedentia quomodocunque pariter multiplicata, versùs consequentia pariter itidem utcunque multiplicata perpetuò conservant iidem genus rationis (hoc est, simul excessum, defectum, aut æqualitatem). Pariter multiplicata dixi versùs pariter multiplicata, sed obiter adnoto dici potuisse, pariter divisa versùs pariter divisa; hoc est, pro æquè multiplis accipi potuisse partes símiles aliquotas; scilicet ut talis emergeret definitio, consonans Euclideæ. Analoga quanta sunt, cùm antecedentium similes quælibet aliquotæ partes consequentium quibusvis aliquotis partibus semper unà majores, vel æquales, vel minores sunt. Vel, cùm antecedentia pariter utcunque divisa cum consequentibus, utcunque pariter divisis, idem rationis genus unà retinent. Potuissent & hæc in eadem definitione copulari, sic ut ea tam æquè multipla, quàm similes partes sub disjunctione contineret, hoc modo; proportionalia quanta sunt, cùm antecedentia pariter utcunque multiplicata vel divisa, consequentibus utcunque pariter multiplicatis aut divisis, &c. Horum utrovis modo potuisset, inquam, ὁ στοιχειωτὴς æquâ ratione quod rem ipsam spectat, proportionalium definitionem effinxisse. Sed quia divisio multiplicatione nonnihil impeditior videtur, & simplicior, conceptúque facilior est integrorum quàm fractorum calculus, & paucioribus expeditur, æquimultiplicia potiùs quàm similes partes, consultò selegisse videtur & adhibuisse. Cæterùm ut hoc modo proportionalitatem declararet, in causa fuit, quòd cùm generalem investigaret de-

definitionem, tam earum æqualium rationum quæ ſymmetris terminis conſtant, quàm illarum quarum termini forent aſymmetri, ipſæque proinde non effabiles; cúmque rationum ineffabilium antecedentes explicabili modo conſequentes ſuos reſpicerent, ſic ut immediatè quomodo continerent ipſos, vel in ipſis continerentur, vix concipi poſſet; non eapropter à continendi modo (per quem effabilium rationum æqualitatem facilè definiviſſet, & actu quidem in elemento ſeptimo definivit) ſed aliunde peti debuit univerſale quoddam ſymptoma rationum pariter omnium, effabilium & ineffabilium, æqualitati connexum, eíque determinandæ ſufficiens; quale dum expiſcaretur, omnia perluſtrans animo tandem advertit, opinor, aliqua quanta cum aliis vel ex naturæ ſuæ ſpeciali quadam proprietate, vel ob adſumptam quandam conditionem ita combinari, connectíque inter ſe (vel ab alteris altera, quoad ſuæ quantitatis modum ita dependere) ut cùm univerſaliter ab illorum æqualitate vel inæqualitate, conſequenter horum æqualitas vel inæqualitas ejuſdem generis ſimultanea, tum etiam illorum ſimilia quævis augmenta vel decrementa, prorſus arguerent & ſecum traherent neceſſariò ſimilia horum incrementa vel decrementa. E.g. duo quævis æquè alta triangula naturæ ſuæ ſpeciali proprietate quadam in elemento primo demonſtratâ, cum baſibus ſuis ita connectuntur, ut ipſorum priori modo quolibet aucto vel multiplicato, baſis etiam ſua ſimiliter augeatur aut multiplicetur: neque non prout adaugetur aut multiplicatur poſterius, ita ſimiliter

ter accrescit & multiplex evadit ejus basis: itémque si prius augmentum vel multiplex posteriore majus sit, una basis ei respondens alterius augmenti vel multipli base major erit; si minus illud, hæc minor; si illud æquale, hæc etiam æqualis. Rursus, duo quævis tota, cum similibus suis partibus aliquotis, propter adsumptam istam similitudinis conditionem, ita connectuntur, ut illorum quælibet multiplicationes includant & secum deferant harum consimiles multiplicationes respectivè, neque non si prioris totius multiplex excedat posterioris multiplum, etiam partium prioris multiplex unà superabit partium posterioris multiplum; si deficiat illud, hoc deficiet; si adæquetur illud, hoc etiam necessariò adæquabitur. Hæc cùm adverteret auctor, etiámque porrò deprehenderet, in aliis aliter affectis quantis secus evenire, verbi gratiâ, sicut posthac ostendemus, in triangulis differenter altis, neutiquam ex unius cum base sua pariter multiplicati excessu, super alterius multiplum infertur basis suæ excessus supra basim alterius, cum altero pariter multiplicatam: neque si tota cum dissimilibus ipsorum partibus comparentur, indè quòd prius æque cum suis partibus multiplicatum excedat posterioris multiplex aliquod, ullatenus consequetur ideo partium prioris multiplum excedere partes posterioris æquè cum suo toto multiplicatas. Hæc, inquam denuò, cùm observaret Euclides (seu quis alter harum definitionum conditor) & proprietatem istam antedictam omnigenis promiscuè quantis, symmetris & asymmetris, convenire (nulla siqui-

dem

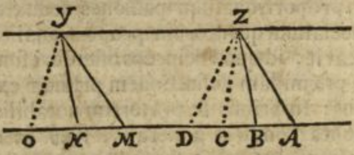
dem illic symmetriæ vel asymmetriæ cujusvis intervenit consideratio) hinc ex illa rationum taliter affectis quantis accidentium mutuos ad se respectus generatim æstimandos censuit ac definiendos. Arbitratur Clavius auctorem cùm primò perspexisset hoc symptoma symmetris quibuscunque proportionalibus accidere, tum nonnullis etiam asymmetris quatuor quantis aliquando convenire, inde jure suo usum proportionalitatem ex illo generaliter determinandam censuisse. Mihi potiùs videtur, quando nedum id effabili ratione præditis analogis (juxta definitionem aliquam priorem ità denominatis) sed universim omnibus ità, sicut innui, per naturæ suæ proprietatem specialem, aut per adsumptam conditionem in se connexis bis duobus quantis id comperisset accidere, per ipsum habitudines rationum ejus modi quantis competentium ab aliis existimâsse distinguendas; quas meritò quidem easdem vel æquales dixit, quoniam si quando contingeret ejusmodi rationes idem consequens habere, vel ad idem utcunque consequens revocari posse, semper ipsarum antecedentes adæquarentur. Sed ita forsan auctor hujusce definitionis ratiocinari potuit, & secum animo versare: è confusa proportionalitatis idæa, quatenus illa rationum summam præ se fert similitudinem, perspicitur antecedentes eodem genere rationis simul ad consequentes referri. Quòd si multiplicentur antecedentes per eundem quemlibet numerum, satìs adparet hanc similitudinem, quoad rationis genus neutiquam immutari, quum hi termini similiter adcrescant. Sin

&

& præterea per eundem quemvis numerum conſequentes etiam multiplicentur, adhuc perdurabit eadem ſimilitudo, retinebitur idem utrinque rationis genus; quamvis prout numeri multiplicantes adſumuntur majores aut minores, ipſæ ſingulares rationum ſic immutatarum quantitates innumeris modis variantur, augentur, & minuuntur, ſic ut ſubinde termini antecedentes conſequentibus æquentur, ſubinde deficiant ab illis, vel illos exſuperent magis minúſve. Hujuſmodi fortaſſe diſcurſu nonnihil Metaphyſico, neque tamen admodum obſcuro, vir ſagaciſſimus ad hujuſce rei fundum penetravit, & inde definitionem nobis hanc extraxit. Verùm quocunque modo, quacunque anſâ arreptâ, devenerit auctor ad hujus ſymptomatis notitiam, ejus ſaltem ut ſubtiliſſima fuit inventio, ſic uſus eſt præclarus, & perquam opportunus propoſitæ materiæ; ſiquidem ex eo immediatiſſimè, directiſſimè, breviſſimè, clariſſiméque præcipuas pleraſque generales proportionalium paſſiones deduxit, ut & ſpecialium quantorum proportionalitates indicavit: id quod deinceps oſtenſuri ſumus. Sed præmiſſam definitionem primùm explicemus: Imprimis & præſertim notabilis eſt appoſita conditio generalis, Καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν· ſecundùm quamcunque multiplicationem, nec enim ſufficit ut aliquando contingat homologorum terminorum æquè multiplicia ſic affici (nimirùm ut unà excedant, deficiant, aut æquentur) ſed argumentis manifeſtis evinci debet hoc ſemper eventurum. Debet, inquam, evinci non ex inductione quapiam perpetua (inductio

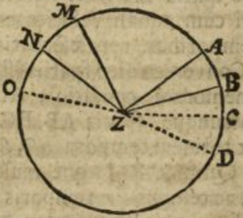
res

res eſt infiniti negotii, quámque Matheſis omnino reſpuit) aſt univerſali demonſtratione derivatâ, ex ſpecialium quantorum proprietate aliqua eſſentiali, vel fundatâ in magìs univerſalium quantorum peculiari quadam conditione ſuppoſitâ vel compertâ. Accidere poteſt in aliquo caſu ſimultaneus ille defectus, exceſſus, aut æqualitas, etiam quantis minimè proportionalibus, aſt ſolis proportionalibus univerſaliter convenit, & ex ipſorum conſtitutione neceſſariò fluit; adeóque poteſt & debet de iis univerſaliter demonſtrari, quo conſtet proportionalitas ipſorum, & hanc eis definitionem congruere. Verùm non aliter meliùs illuſtretur hæc definitio, quàm exempla præponendo, quibus evidentiſſimè diluceſcat hanc conditionem multis revera quantis competere, quódque poterit hæc definitio facili negotio rebus applicari; quòd ad intellectum minimè difficilis, ad uſum ſatìs prompta ſit. Ordiemur ab exemplis ſpecialioribus.



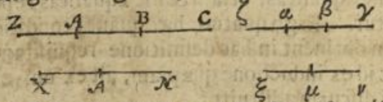
Sint duo triangula ZAB, YMN æquè alta (vel inter eaſdem parallelas conſtituta) ſuper baſes AB, MN. Habentur itaque bis duo quanta; duo nempe trigona ZAB, YMN & duæ baſes AB, MN; quibus aſſero definitionis noſtræ conditionem accidere. Nam *utcunque* pro lubitu æquè multiplicentur antecedentes

cedentes termini, triangulum ZAB ejúſque baſis AB, juxta numerum puta ternarium, adſumendo rectas BC,CD æquales ipſi AB, ducendóque rectas ZC, ZD (liquet enim ob æqualitatem baſium AB,BC,CD etiam triangula ZAB,ZBC,ZCD æquari). Item ad arbitrium æquemultiplicentur conſequentes, triangulum YMN, ejúſque baſis MN, puta per binarium accipiendo rectam NO=MN, & connectendo rectam YO. Jam ex demonſtratis in elemento primo planiſſimè liquet, quòd ſi antecedentis trianguli triplex ZAD ſuperet conſequentis trianguli duplex YMO, etiam antecedentis baſis tripla AD ſuperabit conſequentis baſis duplam MO; ſi defectus ſit iſthic, etiam hîc defectus erit; ſi iſthic æqualitas, etiam & hîc æqualitas reperietur. Ergo quatuor hæc quanta conditionem obtinent in hac definitione requiſitam; nec id ex inductione quapiam, aſt ex univerſali diſcurſu adſtruitur.



Rurſus, ſit circulus cujus centrum Z, & ad centrum anguli duo AZB, MZN, inſiſtentes arcubus AB,MN: oſtendendum eſt definitionis hujuſce conditionem etiam iſtis convenire angulis & arcubus. Sumatur arcûs AB quomodocunque multiplus, puta triplus, AD;

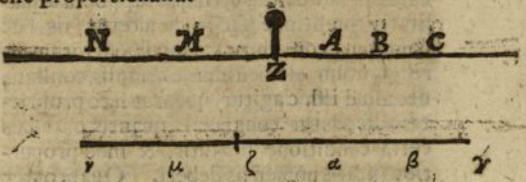
AD; & connectatur ZD. Liquet ex elemento tertio, angulum AZD etiam triplum eſſe anguli AZB. Tum arcûs MN quilibet accipiatur multiplus, pone duplus MO, & connectatur ZO. Itidem liquet angulum MZO anguli MZN duplum eſſe. Quod ſi angulus AZD ſuperet angulum MZO, etiam (è demonſtratis in elemento tertio) arcus AD arcum MO excedet; ſi is illum adæquet, etiam hic adæquabit hunc; ſin defectus iſthic fuerit, etiam unà defectus hìc erit. Ergò quatuor hiſce quantis dicta conditio per demonſtrationem quandam univerſalem oſtenditur convenire. Porrò, (nam exempla libenter huic penitius enucleandæ rei multigena congeram)



Sint duo ſpatia ZA, XM, ab uniformiter lato mobili cum æquali velocitate percurſa diverſis temporibus, repræſentatis à lineis $\zeta\alpha$, $\xi\mu$. Conveniet dico ſpatiis iſtis ac temporibus memorata conditio; Aſſumantur enim quotcunque ſpatia AB, BC ipſi ZA æqualia, & totidem tempora $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ipſi $\zeta\alpha$ æqualia. Quin & XN æquè multiplex ſit ſpatii XM, ac tempus $\xi\nu$ temporis $\xi\mu$. Liquet $\zeta\gamma$ eſſe tempus lationis per ZC, & $\xi\nu$ eſſe tempus lationis per XN (ex definitione ſcilicet motûs uniformis, juxta quem temporibus quibuſcunque æqualibus peracta ſpatia æquantur; & viciſſim æquantur tempora, quibus æqualia conficiuntur ſpatia). Item, ob æqualem ex hypotheſi velocitatem, ſi

ſpa-

ſpatium ZC majus ſit, minus, vel æquale ſpatio XN, erit eodem ordine reſpectivè tempus $\zeta\gamma$ majus, minus, vel æquale erit reſpectu temporis $\zeta\nu$. Unde liquet hæc quatuor quanta habere ſe juxta conditionem in definitione noſtra præſtitutam. Iterum; ſi adſumatur, id quod rationi ſimul ac experientiæ conſentaneum eſt, momenta ſeu vires motivas ponderum, pro diſtantiarum à centro libræ modo ſic adaugeri vel imminui, ut æqualia diſtantiarum incrementa vel decrementa ponderibus iiſdem, æqualia momenta ſuperaddant aut detrahant, hinc oſtendetur juxta definitionis hujuſce ſententiam momenta ponderum æqualium diſtantiis ſuis eſſe proportionalia.



Ut ſi punctum Z ſit centrum libræ, cui ad intervalla ZA, ZM appendantur æqualia pondera, rectæque $\zeta\alpha$, $\zeta\mu$ repræſentent ipſorum momenta, juxta dictas diſtantias; acceptis ipſorum ZA, $\zeta\alpha$ quibuſvis æquemultiplis ZC, $\zeta\gamma$; liquet è ſuppoſitione modò præſtratâ $\zeta\gamma$ eſſe momentum ponderis appenſi ad diſtantiam C. Et ſimiliter acceptis ZN, $\zeta\nu$ æquemultiplicibus τ̃ ZM, $\zeta\mu$; liquet $\zeta\nu$ æquari momento ponderis ejuſdem ad N ſuſpenſi. Quòd ſi ZC excedat, vel adæquet, vel deficiat reſpectu τ̃ ZN; etiam unà correſpondenter momentum $\zeta\gamma$ excedet, vel æquabit, vel deficiat respectu τῦ ζν. Ergò quanta ZA, ZM proportionalia sunt ipsis ζα, ζμ, juxta definitionem Euclideam. Consimili pacto specialibus quibuscunque materiis adaptari poterit hæc definitio, sic ut postquam è propositorum quantorum proprietate quapiam elicita fuerit hæc conditio, per eam ipsorum proportionalitas demonstretur. Sed & exempla plura suggeri possent universalium, hoc est, ad nullam quantitatis speciem restrictorum quantorum, quibus ob adnexam conditionem aliquam accommodetur hæc definitio. Veluti si bina quævis æqualia quanta sumantur A, B, aliaque quævis sibimet æqualia C, D: demonstrabitur A, B ipsis C, D esse proportionalia. Nam ex ista utrinque supposita æqualitatis conditione facile deducetur iis hoc symptoma convenire. Hujusmodi totum ferè quintum elementum exemplis constat; nec aliud istic agitur, quàm ut hæc proprietas ostendatur congruere quantis omnibus certâ conditione præditis, & inde proportionalitatis nomen iis deberi. Quapropter ejusmodi pluribus adducendis exemplis non immorabor. Unicum duntaxat adjiciam, à quo fermè constet universaliter ex hac definitione plerasque ab aliis subrogatas definitiones (hoc est, proprietates, à quibus alii quantorum definiunt analogiam) deduci demonstraríque posse. Sint quæcunque bis duo quanta A, B & C, D juxta definitionem hanc nostram proportionalia, scilicet ut sit ratio A ad B, æqualis rationi C ad D. Dico, consequi quantum A divisum per B adæquari quanto C diviso per D (hoc est, iis com-

competere paſſionem iſtam ex qua Euclides in Elem. VII. commenſurabilium quantorum analogias definivit, pérque quam non nemo cenſet etiam aſymmetrorum proportionalitatem utcunque poſſe non incommodè definiri. Quandoquidem nimirum etſi v.g. poſitis A,B aſymmetris, non poſſit A per B ſic dividi, ut quotiens emergat rationalis vel effabilis, attamen aliquis revera talis quotiens confuſo modo poſſit intelligi ſubeſſe; qui differat ab aſſignabili rationali quotiente (tam quoad exceſſum quàm quoad defectum) minori quàm aſſignatà quavis quantulacunque quantitate. Nec ideo repugnamus, quin ſupponatur etiam aſymmetrorum quantorum diviſio qualiſcunq; ; quotiénſq; diſtinctè non effabilis concipiatur dari: quinimo libenter hoc ſuſcipimus, ut eò magis univerſalitas conſtet ſubſequentis ratiocinii. Hiſce ſubnotatis, præmiſſam hypotheſin repetens dico, ſi juxta definitionem noſtram ſit A.B : : C.D, erit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Si neges, eſto exceſſus penes alterutram partem, puta ſit $\frac{A+X}{B} = \frac{C}{D}$. Multiplicetur X per aliquem numerum M, donec MX excedat B (quod fieri poteſt ex axiomate clariſſimo, quod aſſumunt cum Archimede Geometræ: quodlibet quantum toties accipi poteſt, ut ejus multiplex aliquoties acceptum excedere poſſit quodvis aſſignatum ejuſdem generis quantum) igitur liquet B multiplicari poſſe per aliquem numerum N, ut NB non ſuperetur ab MA, ſed ſuperetur ab MA+MX (quoni-

am MX majus eſt uno B). Quoniam verò $\frac{A+X}{B} = \frac{C}{D}$ ex hypotheſi tua) utramque partem æquationis multiplicando per eundem numerum M, erit $\frac{MA+MX}{B} = \frac{MC}{D}$; item rurſus dividendo partes hujus æquationis per eundem numerum N, erit $\frac{MA+MX}{NB} = \frac{MC}{ND}$. Itaque quoniam oſtenſum eſt $MA+MX \sqsubset NB$, erit $MC \sqsubset ND$ (quum enim duæ fractiones æquantur, ſi numerator unius excedat ipſius denominatorem, etiam alterius numerator ſuum denominatorem exſuperabit, aliàs inæquales forent contra hypotheſin, una major, altera minor unitate) quum igitur oſtenſum ſit eſſe $MC \sqsubset ND$, ſed non eſſe $MA \sqsubset NB$, liquet non eſſe juxta noſtram definitionem A.B :: C.D; quod primæ repugnat hypotheſi. Perperam igitur negavit adverſarius quantum A diviſum per B æquari quanto C diviſo per D. Quod erat demonſtrandum. Jam verò tandem è tot hiſce prolatis exemplis
1. evidenter patet; Primò, quòd hæc definitio nititur hypotheſi clarè poſſibili, quæ ſcilicet innumeris exemplis commonſtretur; haud abſque fundamento confingi, ſed actu rebus eſſe; ſeu quòd hujus definitionis conditio
2. multis quantis revera congruit. Secundò, quòd proprietas hæc ita generaliter extenditur, ut ei nihil obſtent quantorum aſymmetria nec ἑτερογένεια· cùm nec iſtæ, nec iis oppoſitæ ſymmetria & ὁμογένεια, omnino in ejus

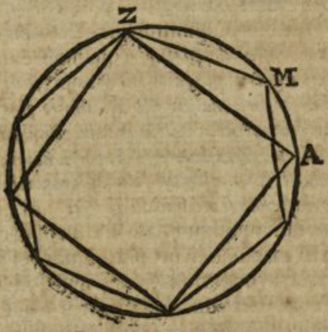
ejus applicatione confiderentur. Tertiò, 3.
quòd hæc proprietas neceſſariò fluit ex natura, vel intimè conjungitur cum ſpecifica conditione quantorum quibus attribuitur, adeóque minimè removetur ab ipſorum quà proportionalium eſſentia. Semper enim oſtenditur competere quantis propoſitis per ipſorum, ut taliter conditionatorū, definitiones, aut per proprietates aliquas præcipuas & eſſentiales. Quartò, quod hæc definitio 4.
ſterilis non eſt, nec inutilis, at concluſionum circa materias tam generales quàm ſpeciales fœcunda mater. Ex ea ſiquidem totum Elem.V. & quicquid uſpiam in elementis Geometricis circa proportionalitates oſtenſum eſt, derivatur ac dependet. Addo quin- 5.
tò, quòd neque μογοστόκος eſt, cum moleſtia vel tædio pariens, at concluſiones quamplurimas admodum facili nixu prodit in lucem. Nam immediatè, directóque diſcurſu, nullis ambagibus, quantorum ab illa proportionalitates primæ ac præcipuæ, eliciuntur & demonſtrantur. Sextò, quòd ex hac definiti- 6.
one ſatis facilè deducantur cùm affectiones iſtæ, à quibus alii definitiones ſuas extruunt, tum reliquæ proportionalium paſſiones, quas è ſuis ii definitionibus eliciunt; adeóque rurſus quòd hæc proprietas cum proportionalitatis natura perquam intimè copulatur. Ad- 7.
jicio, propter inductionis calumniam, nuſquam hîc ullam inductionem comparere, ſed univerſalibus omnino proportionibus conſtare, qui adhibetur, diſcurſum, & ex univerſalibus principiis dimanare. Neque video qui tot ad exempla tam luculenta mediocriter attenderit, cur Euclideæ definitionis

hypothesi nè dum incomprehensibilitatem quandam, at vel obscuritatem ullam aut difficultatem exprobret meritò. Nisi quòd omnes omnium rerum notitiæ quatenus attentionem exposcunt, eatenus difficiles videantur humanæ mentis fastidiosæ socordiæ. Commune nobis hoc vitiumne dicam, an symptoma quòd immunes omnis curæ degere, nullóque præsertim cum negotio sapere cupiamus. Quid verò tandem hisce perspectis & ritè perpensis impedit, quin utcunque reclamantibus Neotericis Doctoribus audacter pronunciemus Euclideæ huic definitioni definitionis cum primis optimæ notam ac titulum convenire? Quando nempe definitionis optimæ potissimis, quas ego quidem experientiâ duce comperio, vel astipulante possum agnoscere ratione, legibus apprimè consonet. Cùm scilicet hypothesi nitatur clarissimè possibili; cùm subjectum suum distinguat ab aliis omnibus; cùm ejus ut talis passionem exhibeat necessariam, essentialem, reciprocam; cùm ex ea aliæ passiones elici possint: adeoque sit utilis conclusionibus astruendis, & procreandæ scientiæ; cùm denique facilè, clarè, directè rebus applicari possit, & ad usum transferri; præter quas vix alias mihi bonæ definitionis leges, conditiones, virtutes hactenus licuit observare; quæ cùm nostræ conveniant, optimam asserere non dubito. Quod luculentiùs apparebit ex telorum depulsione, quibuscum infensè petunt adversarii, quæ certè tam denso nimbo volitant, adeò validâ vi contorquentur, iis ut excipiendis haud sufficiat præsens Lectio, proximâ tentabimus.

LECT.

L E C T. VII.

IN proximè differtatis Euclideam proportionalium definitionem utcunque conati sumus exponere, neque non argumentis quibusdam κατασκευαστικοῖς asserere. Quia verò plerique recentiores eam vehementer impugnant, aut planè rejiciunt (perpauci quidem simpliciter ut falsam propositionem, plures ut pravam definitionem) superest ut quas ei dicas impegerint excutiam. Imprimis omnium pessimè Ramus eam accepit, *Schol.* 13. acerbissimáque perstrinxit sententiâ; sic tamen ut planissimè monstret se temerè, nec intellectâ penitùs causâ pronunciâsse. Primò, valde lubricam dicit & falsam: quæ profectò mera calumnia est, nec aliunde quàm ab errore spississimo nata; quia nempe quid sit per quamcunque multiplicationem simul excedere, deficere, æquari minùs rectè percepit. Disertissimè requirit Euclides ad proportionalitatis indicium, ut excessûs, defectûs, æqualitatis de homologorum terminorum æquè multiplis omnimoda simultaneitas & perpetua comprobetur: hic quia quanta non-proportionalia, subinde quasdam ejusmodi simultaneitates obtinere contingit, Euclideam enunciationem lubrici falsique postulat: quid iniquius aut infirmius? Si quis, ut è vulgari materia simile quid depromam, virum probum definiret aut describeret, istiusmodi virum, qui ad rectæ rationis normam suos omnes actus componit & conformat, an descriptionem hanc labefactat, quod subinde vir improbus aliquas actiones edit rationi consentaneas, justè nonnunquam operatur aut sobriè? Imò verò quòd ille, juxta sensum loquendo moralem, constanter ac perpetuò, sed incertò hic & contingenter ex virtutis agit præscripto, probum ab improbo satis dirimit ac secernit. Pariter & hic; perpetua simultaneitas proportionalia distinguit ab improportionalibus, quæ non eam necessariò vel perpetuò sortiuntur; neque quòd hisce nonnunquam obtingit, quicquam officit definitioni nostræ. Quid quòd, præterquam quòd Archimedes & alii sagacissimi veteres Geometræ, demonstrationes haud quaquam suas falso fundamento superextruxissent, plerique definitionis hujus, ut talis, impugnatores moderni, hoc eam præsertim nomine reprobant, quòd demonstrabilis, hoc est, necessariò vera, sit; adeóque suis è principiis Tacquetus, Borellus, Hobbius (& quoad numeros è principiis Euclideis ipse Clavius) illam demonstrârunt, tam longè abest ut hæc enunciatio falsa sit, aut justa Rami accusatio. Sed instat Ramus hisce verbis ipsissimis; *Neque enim proportio ex illa triplici differentia satis accuratè concluditur, cùm fallacissimus in isto argumento sit elenchus* (ubinam verò Rame? me beabis si ostenderis!) *subtensa*, inquis, *æqualis subtendit peripheriam æqualem, major majorem, minor minorem. Ergo* (secundùm nempe definitionem Euclideam) *subtensæ sunt proportionales. Id quod* (rectè ais) *falsum conjicit Ptolemæus.* At vero, præclare censor, hæc argugumentatio, juxta diverbium, Οὔτε γῆς, οὔτ' οὐρανοῦ ἅπτεται, nullatenus attingit aut ſpectat quod præ manibus eſt negotium, aſt ab eo longiùs quàm à tellure cœlum removetur. Ubi definitionis Euclideæ ulla hîc applicatio? ubi æquemultiplicium aliqua mentio? ubi quid his affine vel ſimile, quo deducatur peripheriarum cum ſuis ſubtenſis proportionalitas? Enimvero neque colligitur, neque colligi poterit, tale quicquam è definitione noſtra, non perperam intellecta. Contrarium certè conſequitur, & rectè colligitur ab ipſo Ptolemæo, e propoſitionibus elementaribus derivatis ex hac, eíque cognatis ſubſequentibus definitionibus Euclidæis. Ne gratis hoc dicere videamur, unam adſcribemus facillimam inſtantiam.



Sint arcus duo ZA, ZM, ille quadrans, hic ſextans totius circumferentiæ. Dico arcus ZA, ZM non eſſe proportionales ſuis ſubtenſis ZA, ZM, juxta noſtram definitionem. Multiplicentur enim antecedentes ZA per numerum

merum quaternarium, & consequentes ZM per numerum senarium; liquet quadruplam arcûs quadrantis ZA æquari sextuplo arcûs sextantalis ZM (cùm utrumque multiplex integram adæquet circuli peripheriam). Verùm quadruplex chordæ ZA minus est sextuplo chordæ ZM, perimeter scilicet inscripti circulo quadrati perimetro hexagoni eidem inscripti: Ergò licuit peripherias ZA, ZM non esse juxta definitionem Euclideam proportionales chordis suis. Quod erat ostendendum; unáque instantiæ Ramææanæ demonstratur infirmitas ac (verbo veniam) impertinentia. Interim demirari subit hujusmodi licentiosam crisin, quàm in veteres exercere solet Geometras homo, ne quid graviùs dicam, argutulus & dicaculus. Sed porrò disputat, *Ut elenchus iste non subesset* (ut quidem interpono minimè subest) *nihil tamen definitione istâ definietur* (quamobrem ita? sciscitor ego) *neque enim hîc*, inquit, *docebitur quid sint proportionales, sed alternatio proportionalium proponetur. Denique docebit ista definitio simplices terminos esse proportionales, quorum multiplices alterni fuerint proportionales. Itaque hysterologia duplex est, &c.* At quibus oculis vidit aut legit ullam hîc proportionalium alternationem proponi? ubi vel hilum comparet proportionalitatis multiplicium? excessum, defectum, æqualitatem æque multiplicium significari video; sed alternationis, aut proportionalitatis nullam volam, nullum cerno vestigium. Num hoc est differere, vel Sabinorum more quidlibet somniare? Quid, talibus adductum causis, talibus instructum argumentis falsitatis, fallaciæ,

ciæ, sophistices, absurditatis notas inurere venerandis istis capitibus; improperiis proscindere tam inurbanis illos scientiarum conditores & coryphæos, absque quibus fuisset, nil forsan haberet magnus hic tricarum artifex, præter Æsopicas fabulas, quarum analysi mirificam illam suam addiceret dialecticam? Id quod innocentiùs plerumque fecisset & tutiùs, quàm in tales viros atrociter invocâsset. Sanè vix indignationi meæ tempero, quin illum accipiam pro suo merito, regerámque validiùs in ejus caput, quæ contra veteres jactat convicia. Reliqua proferre tædet quæ objicit, paris acuminis & peritiæ, quæque nil aliud præter hoc probant liquidissimè, quod omnino disparis sit negotii Logicas methodos texere, déque scientiarum arcanis judicare. Quod autem peremptoriè, tristissimáque cum severitate concludit, *Quare talis definitio tollatur è Mathematis.* Replico, nisi machinis impulsa validioribus æternùm persistet inconcussa, nec unquam è Mathematis dimovebitur. Illo dimisso, Tacquetum aggrediamur, nasi sagacioris hominem; qui sicut modestiùs, ita prout usu venit fortiùs, & majori cum verisimilitudinis specie, nos lacessit. Differentem audiamus; *Imprimis, certum est eâ definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari.* Repono primò, quòd nulla definitio rei cujusvis naturam aliter explicat, quàm aliquam ejus affectionem necessariam & reciprocam, id est, huic nostræ parem, assignando. Siquam exhibere poterit, haud illibenter causâ cedam; at si nullam, ut ego confido nullam dari,

dari, definitiones ergò cunctas uno involvit crimine, uno telo configit. Qui circulum è radiorum paritate, triangulum è trium rectarum concursu spatium includente, quadratum è laterum æqualitate, & angulorum rectitudine definit, quid aliud quàm figurarum istarum naturam ex affectionibus quibusdam suis explicet? Dico secundò, nullam dari vel concipi posse naturam, qualem ille confingit ac supponit ab affectionibus ejusmodi necessariis distinctam, iisve priorem. Habere talem aliquam affectionem ipsa rei natura est, ei essentiale est, eam constituit. Saltem, quod perinde est, habere quandam affectionum congeriem ita connexarum, ut una quævis alias implicet, & secum necessariò trahat, ipsissimam rei cujusque naturam constituit. Unde qui dicit, res habens talem affectionem, ejus naturam explicat: ut e.g. circulus est figura pares habens radios, vel figura naturæ talis, ut pares habeat radios: ubi habere pares radios est ipsa circuli natura; vel saltem pares habere radios, & alias hanc concomitantes affectiones, ejus naturam integrè complectitur ac declarat. Sicut etiam habere rectos ad circumferentiam angulos diametro subtensos, vel aliam quamvis reciprocam affectionem æquè naturam exprimit circuli. Alias rerum naturas qui cogitant aut quærunt, nil aliud quàm chimæras insectando fugaces ac evanidas imponunt ac illudunt sibi; nullas sanè tales unquam deprehendent aut assequentur. Igitur Euclides cùm proportionalium affectionem necessariam exhibuerit, ejus naturam, quantùm fieri solet & po-

test,

teſt, abundè declaravit & explicuit. Adeóque factum ſatìs videtur huic objectioni. Porrò, biſulcò nos argumento perſequitur Tacquetus; *Deinde* (inſit) *illa multiplicium proprietas adducitur vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualium, ut quandocunque ea demonſtrata fuerit, de quibuſvis rationibus inferre certò liceat æquales eas eſſe, vel is ſenſus illius eſt, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere vel excedi.* Reſpondeo, utrumque verum eſſe, ut ſignum infallibile producitur, & exhibetur ut character proportionalium eſſentialis ac diſtinctivus. Quæ certè duo reipsâ nihil differunt, omníque probæ definitioni conveniunt. Nullum enim infallibile rei cujuſvis ſignum datur præter ejus eſſentialia attributa. Poteſt unaquæque res omnibus extra ſuam eſſentiam poſitis denudari, neque poteſt ideo quidvis non eſſentiale certam rei præſentiam indicare. Sed utrumque ſigillatim impugnat adverſarius hiſce verbis; *Si primùm demonſtrare debuerat eam affectionem omnibus & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex ea rationum æqualitas certò poſſit inferri. Id verò minimè vulgare eſt theorema, quod neque Euclides neque poſt Euclidem ullus demonſtravit.* Reſpondeo, legem hîc Euclidi reliquíſque definitionum auctoribus injuſtam & impoſſibilem figi, ſcilicet ut demonſtrent definitionis prædicatum ſubjecto convenire: non tenentur, neque poſſunt id demonſtrare, ſed gratìs aſſumunt; hoc eſt, attributo proprium ſubjecti nomen imponunt ex arbitratu ſuo. Num incumbit mihi demonſtrare circuli nomen ſolis pares ra-

radios habentibus figuris competere? Minimè verò, ſed iis omnibus & ſolis jure meo circuli nomen adſigno. Eodem planè modo pro lubitu ſuo (quamvis non temerè nec imprudenter, at certis quas non ſemel inſinuavi de cauſis juſtis illis & idoneis) æqualium rationum nomen attribuit ὁ ϛοιχειωτὴς omnibus & ſolis dictà proprietate præditis rationibus; proportionalium appellamentum appropriat quantis conditionem iſtam obtinentibus: unde propter hoc ipſum rationum æqualium, & quantorum proportionalium nomen meritò cenſendum eſt iis omnibus & ſolis congruere. Ut enim ſcientiarum magiſtris jus ſit imponere nomina, diſcipuli teneantur ea recipere, juſtiſſimâ ſumméque neceſſariâ lege ſancitum eſt. Unicum eſt, quod definitionis auctor oſtendere tenetur (exemplis ſcilicet ad ſenſum claris, aut per evidentem diſcurſum) attributum definitionis impoſſibile nihil, aut mere imaginarium complecti, ſed revera poſſe res exiſtere proprietate ſeu conditione ſuppoſitâ præditas. Ut qui circulum definit è radiorum paritate (utor enim libenter & conſultò facillimis & familiariſſimis exemplis) nihil aliud demonſtrare tenetur, quàm non repugnare tales figuras exiſtere, quibus iſta conveniat proprietas. Id quod ex ipſarum generatione, per rectæ lineæ circumductum aut alio pacto, poteſt oſtendere clariſſimè. Ita cùm perfacile perſpicuéque probari poſſit, idque paſſim præſtetur ab Euclide, ubicunque definitionem hanc applicet materiæ cuivis determinatæ, dari quanta, quibus conveniat hujuſce definitionis hypotheſis, nihil am-

ampliùs eſt exigendum, eâque licet optimo jure, quantis iis omnibus & ſolis proportionalium nomen affigere. Quod ſubdit autem hanc proprietatem proportionalibus accidere, eſſe theorema minimè vulgare: reſpondeo, repetens è jam olim expoſitis, quòd ſecundùm rem ipſam omnis definitio eſt theorema; propoſitio ſcilicet demonſtrabilis ex aliis ſubjecti definitionibus, aut ex aliis reciprocis affectionibus priùs attributis ſubjecto. Neque non viciſſim, quòd omne theorema poſſit in definitionem compingi, modò poterit exemplo perſpicuo conſtare, quòd poſſibilem includit hypotheſin. Quare quòd ex aliis proportionalium definitionibus inferri poſſit hæc proprietas, & ex ea theorema conſtitui, nihil ejus ad hoc capacitati derogat aut impedit, quò minùs legitimam ingrediatur definitionem: ſicut neque permutatim, quia poſſit, ut ſupra oſtenſum, ex hac definitione deduci proprietas, è qua Tacquetus ipſe malit proportionalitatem definire, adeóque quod ejus definitio theorematis indutura ſit formam, ullatenus id officit, nè ejus definitio proba cenſeri debeat atque legitima, quamvis alia forſan officiant. Quòd verò non vulgare theorema dicit, innuens nimirum è definitionibus ac principiis à ſeipſo præſtratis difficulter elici proprietatem hanc, nihil ad rem facit. Nec enim ad definitionis perfectionem requiritur, ut quæ in ipſa adhibetur proprietas ex aliis utcunque poſitis principiis facilè conſequatur. Et prorſus eodem pacto quam ipſe prolaturus eſt definitio theorematis haud vulgaris titulum merebitur, quia non omnibus adeò pro-

clive

clive fuerit eam è definitionibus aliis, nominatim ex hac noſtra, derivare. Neque deinde mirum eſt, nec ab Euclide, nec ab alio quopiam demonſtratum fuiſſe hoc theorema, cùm in definitionem aſſumpſerint, & principium habuerint aliis demonſtrandis inſerviens; quis enim unquam principia ſua aggreditur demonſtrare? Quopropter & nihili pendo diſcurſum iſtum, quem alibi Tacquetus effert his verbis; *Cujus quidem negotii cùm ſatis ardua atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam reipſâ cognoſcemus, facilè apparebit præposterè egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum & fundamentale indicium ſumi voluit ex hac multiplicium indemonſtrata hactenus proprietate, cujus tam remota & obſcura eſt cum rationum æqualitate connexio.* Quæ ſic in accuſatorem retorqueo, ut minimè dubitem præpoſterum ei judicium objectare, qui vitio vertit Euclidi, quòd indemonſtratam proprietatem poſuerit in definitione ſua; quaſi verò ſubjecti proprietas in definitione poſita ſine manifeſta contradictione demonſtrari poſſit ab eo, qui per illam ſubjectum definiverit. Nam ex eo quòd in definitione ponitur; aſſumitur eſſe prima omnium proprietas, at quatenus demonſtrabilis aliquam ſupponit priorem, & idcirco nequit eſſe prima. Quare non præpoſtero, ſed rectiſſimo proceſſit ordine magiſter noſter. Cùm verò remotam & obſcuram eſſe clamat hujuſce proprietatis cum rationum æqualitate connexionem, notoriè petit principium; nam Euclides certè manifeſtiſſimam eſſe ponit, & ponendo facit connexionem ejus cum hac, cùm ex ea hanc definierit. Sed peragit, ut opinatur

natur, nos premere; Si ſecundùm (hoc eſt, *Si voluit Euclides per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi, quàm earum magnitudines dicto modo excedere vel excedi) ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſoluta rationum æqualitate.* Ad quæ nihil amplius habeo quod reſpondeam, quàm hîc ab eo neſcio quam rationum abſolutam æqualitatem ſomniari, præexiſtentem & diſtinctam à paſſionibus per quas rationum æqualitas definiatur; qualis profectò nulla datur, & ab illo ſine fundamento dari ſupponitur. Rationum æqualitas (ſicut aliæ quævis in ſcientiis conſideratæ materiæ) non aliunde quàm ex convenientia cum definitione ſua, ſeu Euclidea ſeu quævis alia, ſiqua reperiri poteſt, legitima cenſeri poteſt. Rationes ſunt exinde abſolutiſſimè formaliſſiméque æquales, hoc ipſo quod proprietatem habent expreſſam in definitione ſua: quare cùm in Euclideis theorematis demonſtratur hæc proprietas quibuſcunque quantis convenire, ſimul conſtat iis rationum æqualitas competere; ſicut quando de figura qualibet oſtenditur radiorum paritas, eo ipſo demonſtratur illam eſſe circulum. Infirmum igitur & irritum eſt epiphonema, quo ſuas haſce claudit argumentationes; *Quomodocunq; igitur illa definitio accipiatur librorum 5, ac 6 demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexum.* Juxta quam certè ſententiam vacillabunt omnes cujuſcunque ſcientiæ demonſtrationes. Nam ſi

perpetuò demonstrari debet in definitionibus attributas proprietates veris suis subjectis connecti, nullus omnino finis erit demonstrandi, vel nullum potiùs principium, ast ad infinitum retro procurrat oportet omne ratiocinium: præterquam quòd quamcunque proportionalitatis definitionem ipse nobis assignaverit, idem ei verbis & sententiis iisdem objectari poterit; suâ lege constrictus tenebitur ipse demonstrare proprietatem, quam assumit rationibus æqualibus congruere, è priore scilicet aliqua, & illam porrò ab alia, donec interminabilis molestiæ pertæsus errori suo renunciandum agnoverit. Demum ad hosce Tacqueti discursus
1. universim adnoto; Primò, quòd ubique principium petit, & vitiosos committit circulos: non est proxima (vel est remota) proprietas, quia demonstrari potest, hoc est, quia datur alia propior: datur alia propior, quia demonstrari potest. æqualitatem rationum non constituit hæc proprietas (hoc est, ejus definitionem ingredi nequit) quia differt ab ea, non clarè connectitur, valde remo-
2. vetur ab ejus natura. Et ita passim. Secundò, quòd nec ille nec alii plerique, quantum judico, definitionis naturam satis perspiciunt; in quibus revera nihil fit aliud quàm nomen imponitur rei, quatenus illa passioni subjacet, utcunque per sensum aut per ratiocinium evidenter exploratæ: verùm nescio quas illi naturas, essentias, formalitates abstrusiores cogitant, in apricum nunquam proferendas. Per quas naturas rem ad vivum resecando, dilucebit eos nihil aliud intelligere, quàm rei definitæ nomini, qua-

quatenus in uſu communi verſatur, reſpondentes conceptus aut ſignificatus aliquos imperfectos & indiſtinctos, in ſcientiis minimè reſpiciendos, & ad condendas demonſtrationes ineptos; ad quos proinde nullatenus exigendæ ſunt definitiones: imò ſecludendis & eliminandis iis, ipſorúmque loco ſubſtituendis rerum certis, diſtinctis, atque claris idæis efformantur definitiones, rebus appropriantes nomina, quatenus illæ ſubjiciuntur affectionibus quibuſdam ad ſenſum vel ad intellectum conſpicuis. Noto tertiò, quòd hujuſmodi ratiociniis adductus Tacquetus, æqualium rationum definitionem aſſignârit admodum vitioſam & inutilem. Ait enim æquari rationes, cùm unius antecedens eodem modo continet ſuum conſequens, vel in eo continetur: quo alterius antecedens ſuum conſequens continet, aut continetur in eo. Quæ definitio non niſi craſſam & confuſam ingenerat proportionalitatis idæam, nulli procreandæ concluſioni parem aut idoneam. Anceps enim & obſcura phraſis eſt, eodem modo continere, neque revera, niſi per aliam definitionem limitetur, aliquid diſtinctè ſignificans. Multi modi ſunt aliquatenus iidem τȣ̃ continere; majora quælibet continent minora eodem exceſsûs modo; inæqualia duo quævis eodem inæqualitatis modo ſe reſpiciunt quo alia bina inæqualia. Ergò niſi per aliquod reſtrictius & certius indicium declaretur, quid ſit eodem modo continere, quænam modi deſignetur hîc identitas, & proinde quid ſit æqualitas rationũ ignorabimus aut ambigemus. Ut alia jam prætercam incommoda, quib⁹ iſta ſubjicitur definitio: 3.

unica ſupereſt exceptio, præ reliquis maximè plauſibilis, & cui vereor ne penitus expediendæ non ſim; non quia magnam vim habet in ſe, verùm quia multorum præjudiciis favet, & patrocinatur ignaviæ: his ab eo verbis proponitur; *Denique, ut ſibi conſtarent omnia, tamen illa multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit, & tyronibus ſemper plurimum faceſſivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant.* Quod capitale crimen ut aliquatenus amoliar atque depellam, reſpondeo primò, diſpiciendum eſſe quibus ex cauſis iſta multis adeò faſtidioſa quam obtendunt perplexitas oriatur; num ex reipſa, quæ commodiorem nullam aut clariorem expoſitionem admittat; vel ex interpretum incuria, qui non ſatìs hanc definitionem perſpicuis exemplis elucidârint; an ex diſcentium culpa, qui priuſquam animum adverterint ſedulò, ſerióque perpenderint, faſtidio correpti difficultatem ſibi quandam inſuperabilem imaginantur & perſuadent. Si quid horum in cauſa ſit, ut certè mihi compertum eſt hæc omnia nonnihil conferre, quo perplexior videatur hæc definitio, abſolvendus eſt auctor, aliiſque cauſis hoc quicquid eſt culpæ imputandum. Res ipſa penitus excuſari nequit, quæ propter aſymmetriam quantorum aliquâ peculiari difficultate laborat; ſic ut nemo non arduum eſſe fateatur, affectionem aliquam proportionalibus æquè congruam deprehendere, definitionem aliquam cunctas rationum æqualitates complectentem exhibere. Quod & hinc patet, quia præclaris viris huic morbo remedium ad-

adhibere connisis hactenus accidisse videtur, ut vel nihil præstiterint omnino sufficiens, aut ut viis institerint prolixioribus, nec minùs impeditis & implicitis; aut methodos saltem tradiderint culpæ cuipiam graviori subditas: adeò res ipsa contumaciter repugnat, ut ratione pertractetur admodum facili & expeditâ. Nec interpretes omnino culpâ libero, nè quidem optimum Clavium, qui licet hanc definitionem cùm explicuerit probè, tum judicio meo validè propugnârit, tamen exemplis eam satìs illustribus & appositis haud videtur declarâsse. Nam exempla quæ profert verborum sensum potiùs explicant, quàm (id quod præcipuè definitionem quamvis commendat simul ac illustrat) conditionis in definitione positæ possibilitatem, & veram in rebus existentiam repræsentant; ut & nimiâ generalitate quadam suî discentium phantasias obturbant, tum fortè non satìs expresè luculentéque cavet, nè discentes (imo potiùs occasionem præbere videtur ut ipsi) inductionem quandam exigi, sibíque putent infinita quædam multiplicationum tentamina mente percurrenda; quod certè mirum non est, si confusos eos reddat & desperabundos; cùm tamen nihil hîc tale desideretur, utì toties monuimus. Quod ipsos discentes attinet, nimis quàm apparet, eos sibi plerunque deesse. Cùm enim hujusce definitionis verba clarissima sint & omnis homonymiæ expertia, quotusquisque tamen est qui vel iis penitus intelligendis operam navat, qui tantam à suo stomacho patientiam impetrat, ut trium lineolarum sensum accuratè perpendat? Equidem haud modico pignore contendere, meámque penè fidem obstringere non dubitem, qui definitionem hanc seriò perlegerit, ac ad ejus tantùm in prima, vel in ultima sexti elementi propositione applicationem haud segniter attenderit, illi deinceps hanc definitionem haud ita perplexam, intricatam, aut difficilem apparituram. Hisce præmissis ad Tacqueti verba repono, negando planè quòd ullus hîc extet labyrinthus, rem quàm in se est intricatiorem reddens, quem non expositoris extricet mediocris solertia, à quo non attentionis modicæ filum tyrones expediat. Addo, ubi nulla versatur in vocabulis amphibologia, ubi nullum à prolixitate tædium, ubi semper directissimus adhibetur discursus (quæ sedulò rimanti deprehendentur omnia in hoc casu concurrere) non ibi tanta subesse potest obscuritas aut difficultas. In paucis elementi quinti propositionibus, iísque præcipuis, adhibetur hæc definitio; sed ubique quantùm memini directè per eam, & immediatè demonstratis. Ac ubi specialibus accommodatur materiis in aliis elementis, vel in aliis libris Geometricis, conclusionem semper infert uno simplicissimo directissimóque modo, non ut alii suis in methodis faciunt indirectè, vel ad absurdum reducendo; qui demonstrandi modus (ut omnes agnoscunt) obscurior est & ignobilior. Porrò, si liceret cum Tacqueto quicquid velimus, ut suâ luce clarum adsumere, quódque maximopere veteres devitàrunt Geometræ, axiomatum numerum in immensum cumulare, magno quidem sæpe compendio res agi posset, at quantum brevitatis accederet, & exurgentis inde

non

non nullius evidentiæ, tantum decederet firmitati, quæ multo potior eſt, & imprimis ſpectari debet in ſcientiis. Qua de re jam olim plura (ſi commemini) diſſertavimus. Quare non eſt quòd ſuæ methodi brevitatem aut evidentiam jactitet Tacquetus; præſertim cùm nullam (aut æquipollentem nulli) analogiæ definitionem ipſe ſubſtraverit, & propoſitiones ſuas, ſeu gratìs aſſumptas, ſeu ut ipſe exiſtimet demonſtratas, incerto ſubjecto accommodaverit. Aſt videmur eximium hunc adverſarium jam ſatìs repuliſſe. Succedit D. Hobbius, quo tamen breviſſimè defungemur, quoniam ejus argumentis in præcedentibus adaptabiles ſuggeſſimus ſolutiones. Audiamus: *Sed invenire per hanc definitionem hujuſmodi quatuor quantitates impoſſibile eſt, quia multiplicatio per omnes numeros, cùm infiniti ſunt, eſt impoſſibilis; non eſt ergò definitio hæc, ſed hypotheſis.* Ad hunc diſcurſum prænoto, quòd malè ſumit hic philoſophus Euclidem, id in hac ſibi definitione negotii dediſſe, ut proportionalitatis generationem traderet. Nihil ille tale meditatus aut molitus eſt, ſed ut proportionalitatis ſolummodo diſtinctivam proprietatem adſignaret, utì cùm circulum ex radiorum paritate definivit. Ubi forſan ἐν παρόδῳ ſit operæ pretium annotare, quòd etſi communiter optimæ ſint ejuſmodi definitiones, quæ rerum generationes exprimunt (imo revera ſolæ tales accuratè loquendo bonæ ſunt, cùm res definitæ ſunt immediatè generabiles, & per ſe quaſi primariò ſubſiſtunt) attamen nonnullis rebus ejuſmodi definitiones non conveniunt; iis ſcilicet quæ non per ſe *Dial. 2.*

generantur, atceu passiones secundariæ ex aliarum rerum jam progenitarum constitutione resultant, & promanant ex ipsarum primariis affectionibus. E.g. qui focum parabolæ vel ellipsis definiendum suscipit, postquam animadverterit inesse talem parabolæ jam constitutæ proprietatem, ut omnes ad axem paralleli radii à curva parabolæ linea, ad certum quoddam in axe punctum reflectantur; ut & ellipsi tale quoddam symptoma competere, quòd ab uno quodam in axe puncto prodeuntes radii, ab ellipsis ambitu versùs aliud in axe punctum retorquentur; hac (inquam) proprietate (quæ è primariis aliis linearum istarum proprietatibus fluit) deprehensâ, focum optimè definiat, non è generatione suâ, quod impeditissimi foret negotii, sed è comperta dicta proprietate; punctum in axe scilicet, in quod radii ad axem paralleli, vel ex uno quodam designabili in axe puncto prodeuntes dicto modo reflexi congregantur aut tendunt. Ita proportionalitas, cùm non sit res primariò subsistens, nec immediatè generabilis, at passio quædam è quantorum aliqua prædeterminata conditione resultans, vix fieri potest, saltem non expedit, ut per generationem aliquam definiatur. Utcunque manifestum erit, hujusce definitionis verba perscrutanti, nullam hîc de facto generationem attingi, sed aliquod duntaxat symptoma quatuor subinde quantis conveniens innui, quibus ex hypothesi quòd illo gaudent symptomate, nomen inditur eandem habentium rationem seu proportionalium. Jam ad exceptionem Hobbianam respondeo, quòd etsi prorsus im-

impoſſibile concedatur, per hanc definitionem quatuor proportionales quantitates expiſcari (ſicut impoſſibile eſt e radiorum paritate circulum invenire, tentando ſcilicet & experiendo, num ſinguli in figura propoſita qui inſunt infiniti radii pares ſunt) tamen id quod hîc ſolùm intenditur & ſufficit, admodum facile eſt demonſtrare, quòd quatuor nonnullis quantis (v.g. duobus æquè altis parallelogrammis & eorum baſibus) hæc proprietas univerſaliter conveniat (ſicut & facile fuerit è datis quibuſdam conditionibus oſtendere figuram aliquam habere radios omnes inter ſe pares). Ad illud nulla requiritur per omnes numeros multiplicatio, nullus labor infinitus, ut multoties oſtenſum. Igitur hæc objectio nihil efficit. Sed porrò; *Non eſt* (inquit) *definitio hæc, ſed hypotheſis, & quidem vera, ſed non principium, quia demonſtrabilis eſt, & ab Hobbio demonſtratur.* Regero primùm, quòd eandem rationem habentia vel proportionalia quanta vocitari debuerint ab Euclide, quæ proprietatem obtinent hac in definitione ſignatam, nec ille nec alius quiſquam demonſtravit, aut potuerit demonſtrare. Hoc enim ſolùm ab Euclidis libero pendebat arbitrio. Non igitur omnino verum eſt hanc definitionem ab ipſo fuiſſe demonſtratam. Secundò, ut priùs dico, nihil officere definitioni cuivis, quòd proprietas, à qua definitur, poſſit de ſubjecto per aliam quandam paſſionem definito demonſtrari; aliàs nulla definitio bona foret. Sanè nonnullæ res πολυπαθεῖς (multis paſſionibus præditæ) poſſint compluribus modis commodè ſatis & rectè definiri: ſint exem-

plo

plo conicæ sectiones, quæ cùm admodum variis modis progigni possint (per motuum dependentias, & per motuum compositiones diversimodas; per variorum corporum sectiones, pérque multifarias methodos infinita puncta designandi) cúmque passiones innumeras obtineant intimè sibi connexas, & ex parte rei æquè primas, æquéque claris hypothesibus subnixas, eapropter pluribus modis definiri possunt & solent; adeò quidem ut ego nullam ex iis rejiciendam arbitror, quamvis unâ quàvis selectâ, ceu primâ, reliquarum ex ea proprietates consectentur, & proinde demonstrabiles sint. Ex quo liquet obiter falsum esse, quo præsertim niti videntur adversarii, pronunciatum illud seu placitum Aristotelis in Topicis traditum,
Topic. VI. 5 Πλείους οὐκ ἐνδέχεται τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοὺς εἶναι (*Fieri nequit, ut ejusdem rei plures sint definitiones*). Imò fieri potest, ut reipsâ plusculæ sint, tot nempe rei cujusvis definitiones, quot ipsa proprietates reciprocas habet, liquidò nobis expositas & apparentes. Igitur nequicquam D. Hobbius definitioni nostræ repugnat. Recitabo tantùm quæ circa definitionem hanc in opere profert Arithmetico vir clarissimus & eruditissimus partim ei faven-
Cap. 35. tia, partim adversantia; *Nos* (ait) *hanc definitionem, quamvis veram quidem, & Euclidis satìs accommodam, in nostris demonstrationibus omittendam duximus, neque ad hoc κριτήριον proportionalia accommodamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeò forsan, tyronibus præsertim, perspicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate respicit, quàm eorundem affectionem aliquam satìs remotam.* Hæc ille,

ille, quibus haud abludentia cùm antehac satis expenderim, causæ nihil est cur iis immorer ampliùs discutiendis. Ad triarios jam deventum est, ad ipsum illum subtilissimum Borellum, adversarium acerrimum, quíque præ reliquis hoc præstitit egregium, ut novam proportionalitatis doctrinam, equidem pulchram & solidam, attamen Euclideæ minimè sicut existimo cunctis expensis anteferendam, è sua penu protulerit. Verùm nec in ejus disputatione sedulò perscrutans, omnia quicquam reperio gravioris momenti, definitioni nostræ derogans, cui non in prædictis videatur abundè satisfactum. Clavium pleraque magìs quàm Euclidem attingunt; Clavii verò dicta, ut ut possem, non è re nostra jam duco propugnare. Utcunque quia modulum suum etiamnum excessit præsens dissertatio, quæcunque nova pertendit Borellus consideratu digna, posthac examinanda relinquo; cùm & in ejus ac aliorum recentiorum methodos animadversionem instituam. Interim sufficiat hactenus prodiisse.

LECT.

L E C T. VIII.

POstremâ Lectione connisi sumus à nonnullis præcipuis adversariis contra definitionem proportionalium Euclideam vibrata tela depellere. Superest Borellus, omnium gravissimus, opinor, & acerrimus ejus impugnator, eóque pluris habendus, quòd ab aliis frustra tentatam novam proportionalitatis eruendæ methodum, admodum (ut quod verum est liberaliter agnoscamus) pulchram è proprio cerebro concinnârit; operam in eo præstans (fateor ultro) laudabilem & non inutilem, cùm variis modis easdem pertractari materias, è diversis principiis eadem deduci theoremata voluptati simul ac usui sit; in sua tamen (ut arbitror) extruenda methodo felicior fuit, quam in communi diruenda. Id quod è vestigio jam aggredimur ostendere. Quid objiciat audiamus:
Pag. 125. *Revera* (inquit) *dici non potest, quòd assignata proprietas naturam rei declaret, & distinguat à qualibet alia, imò rem difficilem obscuriorem reddit.* Ita judicat: at nos hæc temerè dici satis (opinor) in præcedentibus ostendimus; scilicet proportionalitatis non aliam esse naturam, quàm hujusmodi proprietatem aliquam habere, quam aliæ proprietates sequantur; adeóque naturam ejus in hac definitione (quantùm in ulla fieri potest) abundè declarari: quódque distinguat hæc proprietas analoga à non analogis, cùm analo-
gia

gia cum ea reciprocetur, & ex instituto vel arbitrio definientis (non quidem illo licentioso, sed legitimo ac rationabili) nil aliud significet analogum, quàm τὸ hanc habere proprietatem. Denique, rem ab ea obscuriorem reddi pernego: *Nam* & (id quod ipse verbis disertis fatetur) *verba definitionis exponunt absque ambiguitate quid sit talis proprietas:* Et (ego addo) clarissimè patet eam rebus quamplurimis inesse; nec non ejus applicatio quod experientia planè monstrat, haud difficilis est; & nihil obstat quin proportionalium nomen, aut aliud quodvis, hanc proprietatem habentibus quantis attribuatur; saltem è nominis istius assignatione nulla potest obscuritas oriri. In quo igitur (obsecro) consistit ubi versatur, unde resultat hæc obscuritas? Nusquam certè. Nisi quis proportionalitatis arcanam nescio quam naturam, omni definitionem ingrediente proprietate priorem somniet. Verùm judicii sui rationes ac firmamenta subjicit; illas & hæc breviter expendamus: *Ignoratur* (ait) *an in natura reperiri possunt quatuor quantitates habentes talem passionem, quòd nimirum infinitæ æquemultiplices antecedentium, si comparentur cum infinitis æquemultiplicibus consequentium debeant unà excedere, vel unà deficere, vel unà æquari.* Respondeo, non ignoratur hoc, quoniam exemplis perspicuis commonstrari potest, existere complura 4 quanta dictâ conditione dotata. Quòd si non constaret, haud quaquam hæc definitio posset ad usum applicari. Nam quoties applicatur, tot suppeditantur exempla quantorum hác proprietate gaudentium. Non aliter ignoratur dari figuram æquales

ra-

radios habentem, donec id ex generatione quapiam ad ſenſum, vel ad mentem, ex aliquo ſatis evidente diſcurſu certius fiat. Itaque nihil valet hoc primum ἐπιχείρημα. Rurſus. *Infinitæ* (inquit) *infinitæ iſtæ comparationes comprehendi non poſſunt; & ideo hæc paſſio non erit evidentiſſima, qualis debet eſſe illa, quæ principium ſcientiæ conſtituit.* Primùm, demiror ab acutiſſimo viro ejuſmodi diſcurſus inſtitui, tum (nè repetam quæ ad ſimiles diſcurſus antea repoſui) ſciſcitur an non experientia doceat ab Euclide, Archimede, cæteris pleriſque Geometris ſæpè, minimóque negotio demonſtrari, quòd multis quantis (triangulis videlicet & parallelogrammis æquè altis ac ſuis baſibus, pyramidibus, priſmatibus, conis, cylindris itidem cum ſuis baſibus, circulis & ſphæris cum ſuis ſimilibus ſectoribus, angulis cum arcubus quibus inſiſtunt, ſpatia uniformi velocitate percurſa cum ſuis temporibus, momenta ponderum cum ſuis à centro ſtateræ diſtantiis, innumeríſque talibus) conveniat hæc proprietas? Quomodo igitur incomprehenſibilis eſſe poteſt? Secundò, dico nullam hîc comparationum infinitatem ſupponi, non certè magis quàm in quavis enunciatione generali, terminorum univerſalitas infinitatem ſupponit. Nam quod habetur in definitione καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν (per quamcunque multiplicationem) quid aliud quàm univerſalitatem innuit conditionis præſtitutæ; non ex omnium ſingularium luſtratione, vel inductiva quavis collectione, ſed ex univerſali ratiocinio comprobandæ? Requiritur nempe duntaxat, ut omnia æquemultiplicia an-

antecedentium taliter afficiantur erga omnia consequentium æquemultiplicia; taliter (inquam) afficiantur, hoc est, idem rationis genus, seu modum eundem obtineant, excessum, defectum, aut æqualitatem. Si subest hîc incomprehensibilis aliqua infinitas, etiam omnia scientiarum omnium theoremata, universalibus quippe terminis constantia pariter incomprehensibilia sint oportet. Neque comprehensibilis erit hæc propositio, Omnis homo est animal, quoniam in ea affirmatur animalitatis proprietatem infinitis qui existere possunt hominibus competere. Tertiò, manifestissimè refellit hanc instantiam ipsa definitionis hujus applicatio; quæ non aliter procedit, quàm unam quamvis indeterminatam & arbitrariam multiplicationem antecedentium unámque consequentium pro omnibus, quæ cogitari possunt ipsorum multiplicationibus substituendo; prorsus eodem modo quo solent universales quæcunque propositiones applicari. Nulla deprehenditur hîc infinitas, ambages nullæ, sed argumentatio simplicissima. Nec igitur hæc ratio quicquam efficit. Cæterùm infit tertiò, *Licèt hypotheticè concedatur adhuc ignotum est, quidnam ex ambage ista infinitarum comparationum colligi debeat.* Repono nihil opus esse ut quid hypotheticè concedatur, potest enim asseri positivè, potest velis nolis extorqueri reipsâ dari quanta tali conditione prædita, quod multoties ostendimus. Dein, percontor quid sibi velit *ignotum est quid colligi debeat*; nihil hîc quicquam colligitur: at verò saltem fit, id quod in omni definitione fieri solet, aliquâ conditione seu proprietate præ-

ditis

ditis quantis nomen imponitur, æqualem ſcilicet rationem habentium aut proportionalium nomen imponitur quantis ità conditionatis aut affectis. Ex quo poſtea colligitur, ſi quando per diſcurſum aut aliunde patet hanc conditionem quibuſvis quantis convenire, quòd illa quanta proportionalia ſunt. Addo, quòd malè rurſus ambagem increpat infinitarum comparationum, quæ nuſquam hìc ulla comparet. Sed inſtat porrò; *Nam nec ipſe Clavius expeditè & lumine naturæ colligere potuit, ex paſſione æquemultiplicium in magnitudinibus commenſurabilibus proportionalitatem, ſed coactus fuit hoc demonſtrare in ſuis illis quatuor propoſitionibus. Sed quomodo erit notiſſima illa paſſio. quæ abſque demonſtratione acceptari non poteſt in magnitudinibus commenſurabilibus?* Reſpondeo, ad hoc ut proprietas aliqua non injuriâ definitionem ingredi poſſit nihil referri quomodo demonſtretur, aut demonſtrari poſſit ex alia quavis proprietate præſuppoſita; alias, ut antehac oſtenſum, nulla definitio daretur bona, poſſint enim omnes ita demonſtrari. Secundò, quòd Clavius proprietatem hanc ex alia ſymmetrorum proportionalium definitione (non quidem in quatuor, aſt in uno ex quatuor, nec illo perquam intricatè prolixéve demonſtrato theoremate) deduxerit, id non propterea fecit (opinor) quia neceſſe fuit ut reciperetur hæc proprietas eam demonſtrari; nec ut ejus evidentiam propalaret; ſed ut hujuſce conſenſum & connexionem cum altera ſymmetrorum bene nota paſſione monſtraret. Id quod conari vel efficere, nihil hujus proprietatis aliunde per exempla notæ (vel no-

noscibilis) evidentiæ præjudicat. Porrò tertiò, licèt (hoc ei demus) hæc non sit notissima passio quantorum commensurabilium eandem rationem habentium, ut talium; nil tamen impedit quin sit generalium, omnibus tam symmetris quàm asymmetris proportionalibus convenientium, passionum notissima; quódque de facto notissima sit, experientia suadere videtur, quoniam etsi complures operâ maximâ contenderint, nemo quòd sciam hactenus genuinam aliquam hâc notiorem assignaverit. Quinimo denique, nullius hypothesis possibilitas evidentior esse potest, illâ quâ subnititur hæc definitio. Non igitur ulla potest proportionalium evidentior passio demonstrari; nec igitur succedit hæc argumentatio. Sed Euclidem ictu tandem atrocissimo ferit, & tantùm non prosternit, ipso suo testimonio reum, & proprio tacite judicio condemnatum. *Insufficiens* (inquit) *judicata fuit ab ipsomet Euclide, quando proportionalitatem commensurabilem (commensurabilium vult dicere) iterum libro septimo definivit.* Ad hanc criminationem respondeo prorsus inficiando, quòd eapropter Euclides hanc definitionem suam insufficientem judicavit, quoniam in Elem. VII. adhibuit aliam; nec enim hanc si insufficientem ipse judicâsset, omnino adhibuisset, sed aut nullam tradidisset, aut aliam investigâsset. Abhorruit hoc ab Euclides cùm ingenio tum instituto sibi minùs probata, nedum improbata proferre; suam ut sciens prudens στοιχείωσιν insufficientibus principiis contaminaret. E contra potiùs quia septimi elementi definitionem omnigenæ proportionalitati deprehendit

hendit haud competentem, solis utpote symmetrorum proportionalitatibus adaptabilem; hanc vero comperit universis congruam, idcirco dum hîc loci generalem iniret analogiæ tractatum, illâ rejectâ hanc amplexatus est, jure meritóque. Illam verò (postea vel prius haud dixero) symmetris proportionalibus applicuit non tam necessitatis quàm commoditatis gratiâ, quia nonnihil ad vulgarem captum istius specialis materiæ respectu facilior ac simplicior videbatur. Neque mirandum adeò cùm Arithmeticam theoriam separatim, & ab aliis independenter susciperet pertractandam, simplicissimam delegisse proprietatem, quâ numericas analogias determinaret, etsi neutiquam ista conveniret aliis analogiis, neque generali proportionalitatum doctrinæ sufficeret. Quòd autem liceat, & nonnunquam expediat (varietatis ac facilitatis causâ) speciales doctrinas è specialibus principiis extruere (Logicæ communi rigore quantumvis adversante) quamvis ad plenam Euclidis defensionem spectat, extra tamen præsentem controversiam ponitur asserere, neque nos idcirco quæstionem istam nunc attingemus. Sufficiat indicâsse non exinde, quod pertendit adversarius, sequi quia particularem definitionem alibi particulari materiæ accommodavit Euclides, quòd ideò generalem hanc, & materiæ generali adaptatam definitionem ipse suam improbârit, aut insufficientem judicârit. Ex hisce tandem patet quod haud firmis nititur præmissis, quam Borellus subjicit conclusio: *Certum ergo est obscuram & difficilem esse proprietatem proportionalium*

nalium definitionis sextæ, propterea quòd nedum evidenter naturam proportionalium incommensurabilium declarat, ut vicesima definitio septimi facit, sed rursus quod mirum est neque manifestat ea, quæ de reipsa definienda præcognovimus. (Interpono, quòd sæpiùs inculcatum est, nullam esse proportionalium naturam dictâ proprietate priorem, nec à nobis ante definitionem de iis quicquam, distinctè saltem & certò præcognosci. Sed pergit) *Nam ex eo quòd quatuor magnitudinum æquemultiplices habent illam conditionem excessûs vel defectûs minimè percipitur quando aut quomodo, si antecedentes unà excedant aut deficiant à suis consequentibus, sint proportionales, neque si excessus sint inter se æquales, necne.* Quæ Borelli verba perquam obscura videntur & ambigua; quicquid verò significant, mihi certum est, ea nobis haud quaquam officere. Nam ex eo quòd quatuor quantorum æquemultiplices illam habent conditionem, omnino percipitur iis proportionalium nomen congruere, neque refert aliud quid percipi. Post hæc omnia superest una, præque reliquis gravissima, (verâ modò suppositione niteretur) objectio submovenda. *Nec demum* (ait) *hæc minima cognitio ex dicta proprietate colligi potest, quod scilicet quatuor magnitudines sint proportionales, cùm prima excedit secundam, necessariò tertia magnitudo quartam superare debet, quod Clavius confitetur in prop. 16. lib. 5. Elem.* Respondeo 1. Clavio falsam, ut videtur, confessionem impingi; nihil in loco citato tale deprehendo. 2. Si non ex illa proprietate, quomodo demonstravit Euclides, quando nullam proportionalium alteram definitionem præmiserit? Per eam certè demonstravit, etsi non immediatè. Et quis nescit in plerisque demonstrationibus subjecti proprietatem non immediatè ex ipsius definitione deduci. Sufficit id fieri mediatè per proprietates alias è subjecti definitione priùs enatas. 3. Ad 'o, quamvis Clavius non collegerit, tamen immediatè, neque difficilè, colligi posse cognitionem istam ex hac ipsa proprietate; quod sic (apagogico discursu) probo: Sit A.B : : C.D, juxta definitionem nostram; sitque $A \sqsubset B$, dico fore $C \sqsubset D$. Si negas, esto $C =$ vel $\sqsupset D$, & multiplicentur omnes termini per eundem quemvis numerum M; éstque ob $A \sqsubset B$ (ex hypothesi) etiam $MA \sqsubset MB$; & ob $C \sqsupset D$ erit $MC \sqsupset MD$. Ergò non erit juxta definitionem A.B : : C.D, contra primam hypothesin; maléque negavit adversarius posito esse $A \sqsubset B$ fore $C \sqsubset D$. Ita dicta cognitio (quam vocat) è nostra definitione prolicitur, & adversarii diluitur objectio. *Quis ergo* (demum infit objectator) *dicet sextam definitionem esse bonam, & principium scientiæ si tam obscuram affert cognitionem & imperfectam.* Ego, coronidem imponens huic prolixæ disputationi, me non diffiteor esse qui (quicquid ille, quicquid alii contradixerint) asseveranter dicam quòd definitio sit in primis optima, quòd accommodatissimum huic ipsi scientiæ principium, quòd cognitionem suggerat evidentissimam & perfectissimam. Id quod mihi videor adversùs omnes contra nitentium assultus evicisse; ita cùm non magis antiquitatis adductus reverentiâ, quàm rei verisimilitudine compulsus, Euclideam definitionem, & ab eo pendentem proportionalitatis do-

doctrinam, utcunque vindicárim; proximè sequitur, ut quod pollicitus sum aliarum quas ei subrogandas autumàrunt definitiones ac methodos paucis perstringam, quo constabit ampliùs Euclideæ doctrinæ præstantia; neque non quasi necessitate constrictus, quosúmque devitandorum incommodorum gratiâ, toties memoratam huc proprietatem adsciverit. Prima methodus est illorum, qui censent similitudinem vel identitatem respectûs esse passionem proportionalium notissimam, à qua debent definiri. Juxta quam existimant præcipuas nonnullas Elem. V. propositiones axiomatum loco habendas, lumine quippe naturali perspicuas, & probationem nullam desiderantes; tum ex iis reliquas proportionalium affectiones deducunt. Hanc sententiam jampridem vir doctissimus Johannes Benedictus amplexatus esse dicitur; eam verò (saltem ei reipsâ non disparem) nuperrimè vir acutissimus And. Tacquetus in formam redegit & expolivit. Hæc methodus insufficientiæ arguitur à Borello, mihíque laborare videtur multiplice defectu. Nempe primò, videtur inepta quædam in hujuscemodi definitionibus tautologia committi, próq; definitionibus enunciationes apponi prorsus identicas; tales scilicet similes (vel easdem) rationes obtinent quanta, quæ similes (vel eosdem) in quantitate respectus habent; h.e (quid enim aliud intelligi datur) quæ similes (vel easdem) rationes habent. Annon hoc est idem per idem definire? num hoc est rei propositæ naturam declarare? num demonstrandi principium substernere? vel saltem, quod eodem recidit. Nihil hoc videtur aliud, quàm per solum genus, adhibitâ nullâ differentiâ definire, tali pacto: identitas rationis est identitas respectûs; eandem rationem habent, quæ habent eundem respectum. Num obtestor hujusmodi definitio censeri meretur perfecta? Secundò, similitudo vel identitas respectûs vocabula perquam æquivoca sunt, & significationis incertæ, nullum audientis animo distinctum conceptum imprimentia. Multæ siquidem similitudinis & identitatis species, multi gradus sunt. Ergò nisi distinctio quædam ulterior excogitetur (hoc est, nisi passio quædam hac notior & specialior adsciscatur) ex hoc vocabulo nil elucebit. Quare definitiones laxis hujusmodi terminis constantes nihil explicant, inutiles & minime scientificæ sunt. Tertiò, asymmetra quanta quo modo se respiciunt, vix comprehendi potest aut explicari; non ergò quid sit illa simili vel eodem se modo respicere, perspici potest immediatè; neque quando tali respectûs similitudine sunt affecta dignosci. Videatur Borellus his oppositam Tacqueti responsionem impugnans, nam mihi deproperandum. Ex his verò consectatur quartò, quòd quæ de proportionalibus vel assumant axiomata, vel demonstrare præ se ferunt theoremata qui huic methodo insistunt, illa nec assumi rectè, nec verè demonstrari. Nam quomodo sumi vel probari potest aliquid proportionalibus competere, quum ipsum quid sit esse proportionalia nondum certò constet, aut clarè concipiatur? Quare nullo fundamento nititur hæc methodus, & quasi de nihilo tractat. Ut prætereã, quod adeò multa gratis ſis arripere, vel indemonſtrata petere, & quaſi emendicare, Geometriæ dignitati nonnihil deroget, & nimiam inferat Matheſi licentiam. His adjicio quinto, quòd hujuſmodi definitiones nequeunt ſpecialibus materiis adaptari; ſed earum proportionalitas per intermedias, eaſque bene prolixis & intricatis ratiociniis fultas concluſiones demonſtratur. Ut patebit Tacquetianam primæ vel ultimæ propoſ. Elem. VI. demonſtrationem inſpectanti. Non ibi proportionalium definitio citata comparet, ſed alia propoſitio, propria Tacqueto, ab eo alibi longo (illóque indirecto & apagogico diſcurſu) comprobata. Quod mihi ſignum videtur haud dubium incommodæ, & imperfectæ definitionis præſtratæ, methodíque parum ſcientificæ. His defectibus breviter animadverſis, obnoxia videtur methodus Tacqueti; quorum nullus Euclideæ doctrinæ poteſt objectari. Nihil iſthic nugatorium, ambiguum, incomprehenſibile; recto pede procedunt, firmo tibicine fulciuntur omnia, pauciſſimæ præſtruuntur hypotheſes; & denique (quod præſtantiſſimæ definitionis optimum eſt judicium) ſpecialium materiarum analogiæ immediato directóque diſcurſu ex ipſis ejus viſceribus derivantur; ut patebit omnes in elementis, aut alibi proſtantes ejus adplicationes, & nominatim allegatas libri ſexti propoſitiones conſulenti. Verùm adhuc obiter adnotabo, quòd A. Tacqueti methodum attinet, eum longè (meo quidem judicio) conſultiùs facturum, ſi per illud quod affert, & qualitercunque demonſtrat, proportionalitatis indicium definiviſſet ipſa pro- *Part 2. th. 5.*

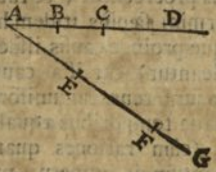
proportionalia; nec non ejusce definitionis subsidio reliquas (quod opinor potuit, & ipse se potuisse profitetur) proportionalium affectiones demonstrásset. Id agens Euclidem fuisset æmulatus, & scientificâ viâ processisset, incommodæ quæ attigimus pleraque devitâsset, & eodem quo Euclides modo defendi potuisset. Cui affinem ego (quanquam ut videtur aliquanto faciliorem) hanc proportionalium affectionem exhibeo, quâ subnititur hujusmodi definitio. Proportionalia quanta dicantur, cum antecedentes in consequentium æquemultiplicibus (vel consequentes in antecedentium æquemultiplicibus) quibusvis æquali numero continentur (vel illa ab his æquè toties auferri possunt). E cujusmodi quidem definitione tota proportionalium doctrina non difficilè posset extrui, juxta progressum Euclideo persimilem, attamen ut existimo nequaquam eo succinctiorem aut dilucidiorem. Cui saltem objici posset, quicquid Euclideæ methodo objectatur; neque non aliquid fortassis præterea, è quantorum asymmetria petitum, à quo liberior est Euclidea doctrina: quapropter operæ pretium esse non sentio quicquam innovare. Tacqueto jam, & cum eo sentientibus dimissis D. Hobbii methodum quasi per transennam inspectabo. Analogiam is ita definit (ipso judice perquam accuratè) ratio Geometrica rationi Geometricæ eadem est, quando causa aliqua æqualibus temporibus æqualia, faciens utramque rationem determinans eadem assignari potest. De qua definitione temperare mihi nequeo quin dicam, si quis omnia Mathematicorum (veterum, re-

De Corp. 13. §6. *Dial.* 2 p. 49.

recentiorum (scrinia pervolutet, nusquam opinor comperiet ullam rei, quam illustrandam accipit, offuscandæ magis comparatam, nullam pluribus & gravioribus vitiis laborantem. Nam & intellectu difficilis ac anceps est (adeò quidem ut mihi constet ab authore suo non penitus intellectam) & à proposito commiscet admodum aliena; & nescio an ullis (certè perpaucis) materiis accommodari potest; & quæ illi superstruitur doctrina tota sic infirma, confusa, præpostera (nec non in aliquibus magni momenti falsa) nihil ut usquam simile præstitum viderim in Mathematicis. Illam certè (Physicam potiùs quàm Mathematicam) definitionem dum excutio, nihil video quod probem, nihil ferè quod improbem, adeo nihil explicitum continet aut evolutum. Quid sit rationem ab aliqua causa determinari, vel quomodo determinetur, haud explicat, & per se satis obscurum est. Cur eandem causam ingerat, non liquet (cùm sæpiùs etiam rationum singularum homogenei termini diversimodis causis procreentur; & rationum collatarum termini sæpiùs itidem heterogenei sint, nullísque proinde causis iisdem determinabiles videantur) cur ista causa determinans rigido jure teneatur uniformiter agere, vel æqualia temporibus æqualibus effecta producere (cùm rationes quantorum inæquali quantumvis impetu productorum æquari possint) haud adeò cuilibet in propatulo. Quamobrem deinde rationum æqualium expositioni generalis particularis interveniat temporum consideratio, perspici nequit. Id certè constat nihil horum ad

ana-

analogiam necessario pertinere vel accedere. Cum e.g. dico duo quanta suis æquemultiplis proportionari, quænam isthic rogo causæ cujusvis facientis æqualia temporibus æqualibus incidat mentio, nisi perquam impertinenter & importune? Cum sphæram & cylindrum ei circumscriptam proportionales enuncio bessi vel assi, quam oro fuerit in promptu causa comminisci, quæ temporibus iisdem æqualia patrans facinora rationes istas determinet corporum, & ponderum, vel numerorum? Imo cum ostendere cupio duo tempora duobus spatiis proportionalia fore, quænam causa temporibus æqualibus æqualia conficiens has unquam determinabit rationes? num propositorum temporum ratio determinabitur ab ipsis hisce vel ab aliis temporibus? Sed andabata sum, & in obscuro specu dimico. Quod ad definitionis applicationem spectat, nec in ea quicquam extra meras tenebras, confusiones, discrepantias, comperio. Prima super hac base fundata propositio sic habet:



Sint à puncto A moto uniformiter descriptæ duæ lineæ AD, AG; earum partes omnes contemporaneæ erunt binæ binis proportionales: hoc est, si AB, AF, & AC, AE, describantur iisdem temporibus, erunt AB, AC ipsis AE, AF proportionales. Id quod ex hac definitione (succinctiùs

ctiùs & clariùs ejus ratiocinium exhibendo) sic infert: Quoniam velocitas in AD, ob uniformitatem motûs, est semper eadem, ratio τῶ AB ad AC determinatur ex sola temporum differentia. Nec non ex pari causa ipsorum AE, AF ratio determinatur ex differentia temporum. Eadem verò tempora sunt hinc inde, & eadem proinde temporum differentia. Ergo eadem causa determinans has rationes assignatur (hactenus aliquid assequor; at porrò subjicit) causa verò quæ rationem utriusque sic determinat, æqualia efficit temporibus æqualibus; [illegible] enim motus uniformis (hîc incipio cæcutire, & cespitare, priùs pro causa determinante temporum assignabatur differentia; jam verò, quoniam absonum videbatur differentiam temporum æqualia facere temporibus æqualibus) alia causa substituitur motûs uniformis; quamvis nec hîc unicus, at duo saltem motus uniformes habentur. Num hæc consentiunt sibi? num aliquid liquidò conficiunt? num suam ipse definitionem assequitur, aut applicare novit? Sed utcunque concludit; itaque per definitionem proximè præcedentem AB ad AC, & AE ad AF, sunt proportionales). Ex hoc particulari, talitérque demonstrato theoremate, generalia de proportionalibus theoremata; generales complectentia proportionalium affectiones, pleraque cum illis eadem, quæ in quinto habentur elemento, ceu corollaria videri vult deducere: quis hoc ferat, ex uno exemplo generalem adstrui doctrinam; quæ de duabus lineis, duobúsque temporibus utcunque possent ostendi, ea statim ad omnes extendi ma-

materias? Quasi verò proportionalitas omnis in solis temporibus, & uniformi motu peractis spatiis versaretur & consisteret? Ut alia conticescam hujus methodi parum firma vel sana. [Nempe videtur huic accidisse viro, quod illis consuevit evenire, qui cùm diutiùs in rem aliquam vivido colore tinctam oculorum intenderint aciem, omnia videntur isto colore diluta conspicari: ita videtur hic Philosophus iis quæ de motu æquabili Galilæus conscripsit intentior, aut alias Physicorum in motuum contemplatione defixus, ad præconceptas quasdam de motu species, quæ magnitudinem & quantitatem spectant omnia retulisse. Sed in omni re, prout vulgò fertur, Qui pauca respicit malè judicat.] Hæc cum ita se habeant, non est quòd novellam hanc methodum ullatenus moremur. Enimverò fiet injuria doctrinæ Euclideæ, si cum hac conferatur tam imbecilla tam inepta? Succedit proximè breviter attingenda, quam in opere proponit Geometrico vir eruditissimus. Assumit is definitionis loco, rationes æquales esse, cùm antecedentibus per consequentia divisis quoti sibimet æquantur. Quæ sanè definitio minimè differt ab illa, quam Euclides adhibet in Elem. VII. pro speciali numerorum doctrina. Sed ne proba sit & accurata proportionalitatis universim sumptæ definitio, videntur hæc obstare. Primò, quòd constituta nondum proportionalitatis doctrinâ, vel antecedenter ad ipsam difficile conceptu sit quid sit illa divisio quantorum, aut quomodo peragatur; quid nempe sit lineam dividi per lineam, aut corpus per corpus;

pus; quomodo pondus à pondere, tempus a tempore dividatur. Sunt quidem linearum & aliorum quantorum divisio quædam & multiplicatio, Arithmeticis istis (à quibus nomen accipiunt) operationibus affines; ast quæ definiuntur & peraguntur ex proportionalium inventione, proportionalitatem adeò prænotam supponentes. Quinimo communiter apud Arithmeticos ipsa divisio per analogiam definitur, illam scilicet quæ divisorem inter ac dividendum, unitatem & quotum versatur. Non igitur tam idonea videtur divisio, vel ex ea resultans quotorum æqualitas proportionalitati generatim explicandæ Dices fortè, satis facile concipi quid sit lineam in linea toties contineri, quoties pondus in pondere, vel tempus in tempore; nec aliud hîc intelligi. Rectè fateor; sed ad hoc requiritur, ut rationum inter se collatarum termini numeris repræsententur; id quod alterum fundat adversus hanc methodum argumentum; nempe secundò, quòd proportionalitatem solis numeris alligare videatur; & quantorum rationes haud aliter inter se comparabiles statuit, nisi quatenus ipsa quanta numeris denominantur. Quoties enim unum in altero continetur dispicere, nil aliud est quàm ipsorum in numeris proportionem exhibere, vel ea numeris denominare. Verùm etsi quanta nullis repræsententur, aut exprimantur numeris (nec fortè repræsentari possint vel exprimi) tamen ipsorum rationes exhiberi, proportionalitates innotescere possunt, Euclideâ vel consimili methodo. Cùmque quantis immediatè conveniat ut talibus, & non ut ea

nu-

numeris accidit significari, rationes ad se mutuas habere, rationibúsque consequenter inter se comparari, rei naturæ convenientius videtur, ut hæc generali modo determinentur, à numeris potiùs abstracta quam iis subjecta. Porrò tertio, quando rationum comparatarum termini sunt asymmetri, consequentes in antecedentibus non continentur aliquoties, adeoque peragi nequeunt accuratæ divisiones, nec ulli distinctè comprehensibiles quoti exhiberi. Quoti verò sub confusione quadam imaginarii, quando vel quomodo sibimet æquentur, haud ita fuerit in promptu discernere, vel ἀποδεικτικῶς ostendere. Quare vix poterit hæc definitio speciales ad usus accommodari, quæ definitionis est imperfectio ferè potissima. Breviter, quæ contra Tacqueti methodum disputata sunt, adversùs hanc æque militant, ab ea vix aut ne vix reipsâ discrepantem. Sed enim aliam præclarus idem vir definitionem innuit; *Si quis* (inquit) *tamen mallet affectionis alicujus opem in auxilium advocare, quo demonstrationes commodiùs procedant, ego nullam potiorem novi hâc; si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto à mediis, & contrà.* De quo nihil ampliùs dicam, quàm propositam istam affectionem non esse generalem, & proportionalibus (juxta nomen receptum) adæquatum. Ductus enim & multiplicatio numeris in se, vel in alia quanta propriè solis convenit; proximè per similitudinem quandam lineis in se, vel in superficies per motum parallelum. Sed lineas in corpora, pondera in tempora duci seu multiplicari, quis conceperit?

rit? Sint duo pondera A,B duobus temporibus Y,Z proportionalia, dic mihi quid proveniat ex pondere A ducto in tempus Z, nil prorſus imaginabile. Non ergo ſtrictè quadrat hæc affectio proportionalitati generatim definiendæ; numerorum ſaltem & linearum, proportionalitati qualitercunque determinandæ poſſit inſervire. Sed jam ultimò reſtat, ut de Borelli methodo feramus ſententiam; & nè tanti viri meritis detrahere videamur, agnoſcimus ultrò primùm doctrinam ejus, quantùm percipimus, admodum eſſe firmam, & bene fundatam. Fatemur ab eo proportionalium affectiones præcipuas è ſuis ipſius definitionibus ac principiis ritè deductas eſſe, probéque demonſtratas. Non abnuimus ejus methodum in ſe ſpectatam ſatis eſſe pulchram & elegantem, nec non à candidis ingeniis, ſi nulla daretur alia, haberi poſſe pro ſufficiente, & ſatìs abſoluta. Veruntamen eam cum Euclidea comparando quoſdam in illo fas ſit egregio inſperſos deprendere corpore nævos; cúmque pleraque non diſpliceant, hæc utcunque minùs arrident. Primò, quòd cùm æqualitas omnigenis quantorum rationibus (ῥητοῖς καὶ ἀῤῥήτοις) æque conveniat, eique congruant univerſalia quædam ſymptomata, non tamen hîc ea ſimul omnis univerſim, ſed ritu τῷ πρὸς ἕν (quæ vocat Philoſophus) particulatim & per ſpecies ſucceſſivè definitur. Nam primò rationum effabilium æqualitas ex ſuo quodam attributo ſpeciali definitur, tum ex ea major & minor rationes effabiles; tum ex his tandem rationum ἀῤῥήτων æqualitas. Quorſum hæ generalis ſubjecti diſtractiones,

&

& per inferiora circuitus, si dari poteſt, & quidem exhibetur ab Euclide rationum æqualium omnigenarum (ut & inæqualium) proprietas aliqua generalis, ex qua poſſunt univerſaliter definiri? Si deprehendi poterit animalitatis in genere quæpiam eſſentialis proprietas, an non ex illa præſtat (rei naturæ, ſcientiæ genio, bonæ Logicæ regulis exactiùs quadrat) animalitatem unâ vice ſimul integram, quàm animalitatem hominis, & animalitatem bruti ſeorſim, unam ex alia definire? mihi certè videtur. Secundò, minùs placet quòd ineffabilium rationum æqualitas negativè definitur, ac ita quidem ut præmiſſas ſupponat & præcognitas inæqualium rationum definitiones. Nam univerſim definitionibus negativis præpollere cenſentur poſitivæ, ſeu perfectiorem, nobiliorem, & clariorem rerum notitiam progignentes. Tum præpoſterum videtur ex inæqualitate de æqualitate ſtatuere; quum hæc illâ prior, ſimplicior, ſtabilior videatur, & in ſe penitùs indiviſibilis ſit. Unde veteres; Nicomachus, Ἡ ἰσότης ἄσχιστος καθ' ἑαυτὴν καὶ ἀδιαίρετος. Damaſcius, Στάσει τινὶ ἡ ἰσότης ἀναλογεῖ. Theon Smyrnæus, Ὁ τῆς ἰσότητος λόγος ἀρχηγὸς, καὶ πρῶτός ἐστι καὶ στοιχεῖον πάντων τῶν εἰρημένων λόγων, καὶ τῶν καθ' αὐτοὺς ἀναλογιῶν. Itaque rationum æqualitas inæqualitati poſtponi videtur immeritò, pérque illam ſtatui dijudicanda. Annon rectiùs Euclides æqualitatem primò per affectionem quandam poſitivam, & inæqualitatem reſponenter ex alia contraria proprietate definivit? Tertiò adverto, prolixitatem hujuſce doctrinæ, quæ per longiuſcularum de-

Nicom. l. 2.
Vide Bull. notis in Theon. p. 273.
Theon. c. 51

definitionum ambages vix illud assequitur (ut rationum scilicet æqualitatem ab ipsarum inæqualitate distermi net) quod duabus tantùm (iisque si rem bene perpendamus multò brevioribus & simplicioribus) exequitur Euclides. Idem observari potest in toto doctrinarum processu, ubique multò paucioribus syllogismis rem conficit Euclides. Porrò quartò, adnoto Borellianas propositiones ac demonstrationes inspicienti compertum iri, quòd in illa sua methodo præcipua proportionalitatum symptomata, non nisi per discursus eliciuntur obliquos & apogogicos. Id quod nimis arguit principia non optimè constituta. Certè docet philosophus, & omnes fatentur ejusmodi ratiociniis haud ita perspicuam animoque blandientem comparari scientiam. Neque mirum è definitionum negativarum fontibus anfractuosas promanare demonstrationes. Annon præhabendus Euclides eadem è definitionibus positivis immediato directóque colligens ratiocinio? Quintò, mihi potissimùm displicet & vitio vertitur harum definitionum ad speciales materias accommodatio; vel potiùs quòd ad eas commode nequeunt applicari. Nec enim definitionum ope statim innotescit, aut ex iis prompte deducitur rerum proportionalitas, sed ex intermediis propositionibus, iisque non adeò comprehensu facilibus, & per indirectam argumentationem comprobatis demonstratur. Inspicite sultis demonstrationes primi postremíque theorematis Elementi sexti, quæ apud Borellum sunt prima quarti & secunda quinti, rem ita comperietis habere; neque non fortaſſe mecum judicabitis haud rectè à Borello doctrinæ ſuæ præ Euclidea evidentiam jactitari. Etenim evidentia doctrinæ præcipuè comparet, & conſiſtit in uſu, facilique definitionum primarum ad ſingulas aut ſpeciales materias adaptabilitate; nec ulla major eſt harum virtus, quàm ut immediatè conſtare poſſit, eas rebus ſubjectis convenire. De ſuis hoc clariſſimè monſtravit Euclides, non ita de ſuis Borellus. Quidni pronunciemus igitur ab illo præſtita hujus conatibus, utlibet egregiis, anteſtare. Hæc breviter animadverti non ut laudi quicquam derogarem præclari viri, ſed ut Euclideæ doctrinæ præſtantiam illuſtrarem, unáque Geometras veteres illam amplexos, illi acquieſcentes defenderem, auguſtiſſimum imprimis Mathematicorum principem Archimedem illi ſuum calculum apponentem, illum quoties uſus poſtulat uſurpantem. Quin addo, & cum hoc elogio præfixam hanc diſputationem claudo, nihil extare (me judice) in toto Elementorum opere proportionalitatum doctrinam ſubtiliùs inventum, ſolidiùs ſtabilitum, accuratiùs pertractatum. Id quod mihi cùm hanc ingrederer de rationibus & analogiis σκέψιν ac θεωρίαν præcipuè fuit in animo declarare. Quà jam operà non indiligenter perfecto ſecedendum eſt; ut tamen doleat mihi præter ſpem ac propoſitum accidiſſe, quod neque totam hanc proportionalis materiam exhaurire potuerim; neque quæ de magnitudinum determinatione, ſimilitudine, genera-

tione

tione succurrebant dictu forsan haud inutilia, nec injucunda proponere. Reservanda proinde vel supprimenda pro capiendo postmodum consilio. Vos interim auditores optimi à bono Deo valete.

FINIS.

ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis.

Incerti temporis hæ sunt ultimæ Lectiones, neque aliquem ad annum affixæ.

LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells* in Cœmeterio D. *Pauli*. 1684.

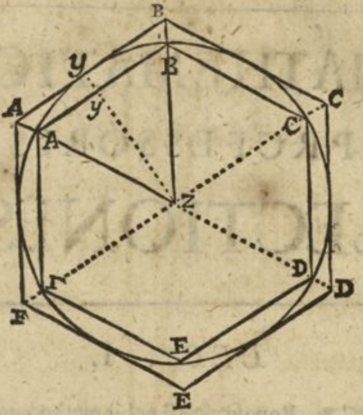
MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

PRopositum est nobis methodum exponere, quâ Archimedes præclara sua theoremata, libris qui extant comprehensa, adinvenit; subtilissimæ mentis istius utcunq; vestigia persequendo. Conabimur autem id efficere singulas materias ad problemata revocando, qualia nimirum ille sibi solvenda proponebat, & è quorum solutione cùm theoremata sua, tum ipsorum demonstrationes, deducebat. (Unde patebit qualem analysin, & quàm nostræ modernæ similem exercuerit.)

PROBL. I.
De Circuli Dimensione.

Ordinatæ figuræ (ABCDEF) circulo inscriptæ vel circumscriptæ, par triangulum (aut parallelogrammum) rectangulum invenire.



Ab Z circuli centro ducatur ZY perpendicularis ad unum quodvis figuræ latus AB. & connectantur rectæ ZA, ZB. * Evidens est triangulum AZB æquari rectangulo ab ZY & $\frac{1}{2}$AB. Similitérque resolvendo totam figuram in ejusmodi triangula (ipsi scilicet AZB & sibi mutuò æquilatera) singula æquabuntur rectangulo ex dimidia sua base, & altitudine æquali τῇ ZY. Unde simul omnia æquabuntur rectangulo ex dimidia perimetro figuræ, & ZY. Vel triangulo, cujus basis est tota perimeter, altitudo ZY. Quod est

* 41. 1 Elem.

THEOR. I.

Figura regularis circulo inscripta vel circumscripta, æquatur dimidio rectangulo ex pe-

perimetro & perpendiculari, à centro ad unum latus; vel triangulo, cujus basis æquatur perimetro figuræ, altitudo dictæ perpendiculari.

Nota] In figura circumscripta perpendicularis est radius circuli.

PROBL. II.

Invenire rectangulum (vel triangulum) æquale circulo.

Ponatur circulum esse figuram regularem, habentem latera indefinitè multa, & parva; & consequenter perimetrum circumferentiæ perpendicularem, è centro ad hæc latera, radio coincidere; hinc igitur, juxta præcedens,

THEOR. II.

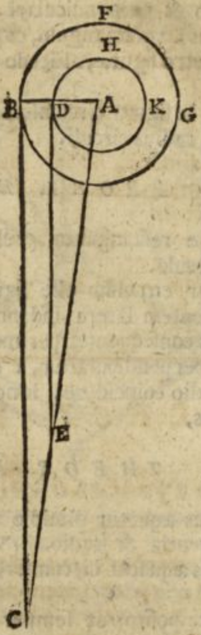
Circulus æquatur dimidio rectangulo ex circumferentia & radio. (Vel triangulo, cujus basis æquatur circumferentiæ, altitudo radio.)

Hoc est, posito (ut semper posthac) circumferentiam vocari π, & radium R (vel r) & diametrum δ (vel D) $\odot = \frac{r\pi}{2} = \frac{\delta\pi}{4}$.

Corollaria circulorum circumferentiæ se habent ut radii. Nam hoc similium figurarum, circulis inscriptarum aut circumscriptarum, competere perimetris, in * Elementis demonstratur. *Cor. 1.12

Secundùm indivisibilium hypothesin hoc theorema facilè sic ostenditur:

Super



Super AB, circuli BFG radium, erigatur perpendicularis BC æqualis circumferentiæ circuli BFG, & connectatur AC. Tum in AB sumendo quodvis pro lubitu punctum D, centro A per D describatur circulus DHK; & ducatur DE ad BC parallela. Estque circumferentia BFG ad DHK [a], ut radius AB ad AD, hoc est [b], ut BC ad ED. Ergò quum circumferentia [c] BFG=BC, [d] erit circumferentia DHK=DE. Et simili ratione circumferentiæ omnes concentricæ constituentes

[a] *Cor. prac.*
[b] 4.6.
[c] *Hyp.*
[d] 14.5.

tes circulum BFG æquantur parallelis rectis, quibus constat triangulum ABC. Unde circulus BFG triangulo ABC æquatur.

COROLL.

Simili discursu, sector quilibet circuli æquatur dimidio rectangulo ex arcu sectoris & radio circuli.

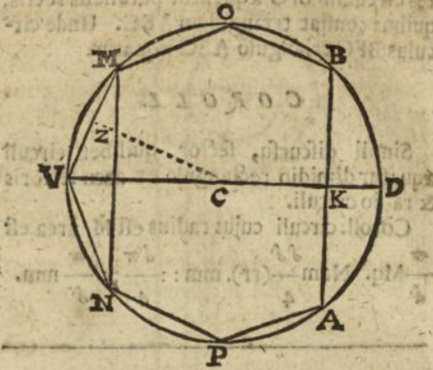
Coroll: circuli cujus radius est M, area est $\frac{\pi}{\delta}$Mq. Nam $\frac{\delta\delta}{4}$(rr). mm : : $\frac{\delta\pi}{4}$: : $\frac{\pi}{\delta}$ mm. *Cor.2.12.*

LECT. II.

De Sphæra & Cylindro.

Quæ de sphæra investigavit Archimedes, vel ad superficiem sphæricam pertinent, vel ad soliditatem. De superficie primò dispiciemus.

Sit



Sit circuli portio BVA, cujus axis VK transiens per circuli centrum C, & basim BA bisecans in K. Portioni autem inscribatur figura parilatera & æquilatera VMN PBA. Consideravit Archimedes, quòd si circa axem VD circumrotetur portio cum inscripta figura, descriptura sit circuli portio sphæricam portionem; figura verò solida constans cono MVN, & frustis conicis (vel cylindricis) OMPN, BOPA per circulos parallelos MN, OP, BA comprehensis; adeòque superficiem corporis inscripti è superficiebus constare conicis vel cylindricis MVN, OMNP, BOPA. Dein advertit, quò magis laterum figuræ multitudo augetur, eò magis figuram planam ad circulum, & solidam ad sphæram, & solidi superficiem ad superficiem sphæricam accedere; adeò quidem ut latera multiplicando perveniri tandem possit ad figuram, cujus superficies minori differat à sphæ-

ſphæricæ portionis ſuperficie quàm aſſignato quolibet utlibet minimo defectu; adeóque ſphæræ ſuperficiem quodammodo haberi poſſe pro ejuſmodi figura indefinitam habente laterum multitudine; & cujus diſtantiam (CZ) à centro ſphæræ minimè differat à radio ſphæræ, vel in eum deſinat. Tandem igitur ſecum animo reputavit, ſi poſſet hujuſmodi figuræ ſuperficiem ad planam aliquam figuram, puta circulum, ſub generali qualibet ratione referre, inde ſibi conſtiturum quam ad planam talem figuram obtineret relationem ſphærica ſuperficies. Hoc perſcrutari aggreſſus eſt feliciter, hæc quæ ſequuntur problemata reſolvendo.

PROBL. I.

Invenire rectangulum æquale * laterali priſmatis erecti ſuperficiei. * *Hoc eſt, baſibus exceptis.*

Manifeſtum eſt ſingulum parallelogrammum, eorum quibus conſtat lateralis priſmatis ſuperficies eſſe rectangulum ex latere priſmatis, & uno latere baſis; & proinde omnium iſtorum parallelogrammorum aggregatum: hoc eſt,

Lateralis erecti priſmatis ſuperficies, æquatur rectangulo ex latere priſmatis, & baſis perimetro. *Theor. I.*

PROBL. II.

Invenire rectangulum æquale * curvæ recti cylindri ſuperficiei. * *Hoc eſt, demptis baſibus.*

Supponatur cylindrum eſſe priſma quoddam ſuper polygonam baſem, latera habentem

tem indefinitè parva & multa (hoc eſt, ſuper circulum) & ex præcedentibus liquet, quòd

Theor. II. Curva recti cylindri ſuperficies æquatur rectangulo ex latere ejus, & circumf. baſis.

Coroll. 1. hinc. Curva cylindri ſuperficies ſe habet ad baſim ejuſdem, ut latus cylindri ad dimidium radii, vel ut duplum lateris ad radium,

Sit enim L = lateri. Eſtque (ex hoc) $L\pi$ = ſuperficiei, ac baſis eſt $\frac{r\pi}{2}$. Atqui $L\pi$.

* 1.6. $\frac{r\pi}{2} :: {}^{*}l.\frac{r}{2} :: 2l.r.$

Coroll. 2 etiam hinc. Superficies cylindrorum ſuper baſibus iiſdem (vel æqualibus) ſeſe habent ut latera: & habentium eadem vel æqualia latera, ſuperficies ſunt ut circumferentiæ baſium, vel ut diametri, vel ut radii baſium.

PROBL. III.

Invenire circulum æqualem datæ curvæ cylindri recti ſuperficiei.

[e] 1 *Cor.* 2. *hujus.* Sit A radius quæſiti circuli. [e] Eſtque ⊙ rad. A. ⊙ rad. R. :: 2L. R. [f] Hoc eſt, Aq.

[f] *Cor.* 2. 12 Rq. :: 2L. R :: [g] 2LR. Rq. Quare Aq [h] =

[g] 1. 5. 2LR. [i] Unde { 2L. A :: A. R.

[h] 9. 5. vel { L. A :: A. 2R.

[i] 17. 6. Hinc,

Theor. III. Radius (A) circuli æqualis ſuperficiei cy-

Archi. 13. *l.* lindri eſt media proportionalis inter latus

[k] 17. 6. cylindri (L) & baſis diametrum (2R).

[l] 1. 6. Nam (retrogradè) quia L. A :: A. 2R erit

[m] 7. 5. [k] 2LR = Aq. Sed 2L. R [l] :: 2LR. Rq. [m] Er-

[n] *Cor.* 2. 12 gò 2L. R :: Aq. Rq [n] :: ⊙ rad. A. ⊙ rad. R.

Unde

Unde per Coroll. 1. præcedentis erit ⊙ rad. A æqualis superficiei cylindri. Q.E.D.

PROBL. IV.

Invenire rectangulum æquale laterali pyramidis æquilateræ, super regulari base constitutæ, superficiei.

Liquidò patet, singulum pyramidis superficiem componens triangulum, æquari ipsius altitudini ductæ in dimidiam basin. Unde triangulorum omnium aggregatum, hoc est,

Lateralis æquilateræ pyramidis superficies æquatur communi triangulorum eam componentium altitudini ductæ in dimidiam basis perimetrum. *Theor. IV.*

PROBL. V.

Invenire rectangulum æquale curvæ recti coni superficiei.

Conus supponatur æquilatera pyramis super regulari base indefinitè multilatera (hoc est, circulari) & consequenter habens altitudinem triangulorum assurgentium æqualem lateri coni. Hinc ex præc.

Recti coni curva superficies æquatur rectangulo ex latere coni, & dimidia circumferentia basis. *Theor. V. Archim. 15. I.*

Coroll. 1. Curva coni superficies se habet ad basin ejusdem, ut latus coni ad radium basis.

Nam coni superficies est $\frac{L\pi}{2}$; & basis est $\frac{R\pi}{2}$. * Verùm $\frac{L\pi}{2} . \frac{R\pi}{2} :: L . R.$ *Co-* * 1.6.

Coroll. 2. Superficies conorum super eadem basi (vel æqualibus) se habent, ut latera. Et superficies conorum habentium æqualia latera, se habent ut radii basium.

PROBL. VI.

Circulum invenire parem datæ coni curvæ superficiei.

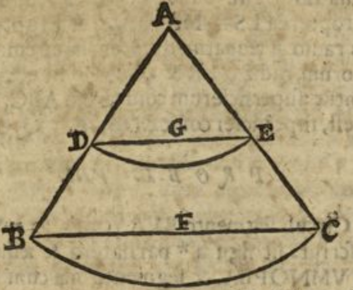
Sit radius circuli quæsiti A. Quum igitur (ex Coroll. 1. ultimi) sit ⊙ rad. A. ⊙
[o] *Cor* 2.12 rad. R : : L. R. [o] Et id o Aq. Rq : : L. R. [p]
[p] 1.6. : : LR. Rq. [q] Erit Aq = LR. [r] Quare L. A.
[q] 9.5. : : A R.
[r] 17 6. Hinc,
Theor. VI. Circulus habens radium (A) proportione
Archim. medium inter coni latus (L) & basis radium
14. *l.* (R) æquatur curvæ coni superficiei.
[s] *Hyp.* Nam quia L. A : : [s] A. R, erit LR = Aq.
[t] 1.6. Verùm L. R : : [t] LR. Rq. [u] Ergò L. R : : Aq.
[u] 7.5. Rq : : [x] ⊙ rad. A. ⊙ rad. R. Ergò (ex Co-
[x] *Cor.* 2.12. roll. 1. præc.) est ⊙ rad. A. æqualis superficiei coni. Q.E.D.

PROBL. VII.

In cono recto (ABC) invenire circulum æqualem superficiei conicæ (DBCE) interceptæ planis parallelis (BC, DE).

Nota] Supponitur ABC triangulum per axem; & BC, DE communes hujus sectiones cum planis parallelis. Unde BC, DE sunt parallelæ per 16.11.

Po-



Ponatur L = AB, & R = BF, & M = AD, & R = DG; & quæsiti circuli radius sit A. Et ob AB. BF :: [y] AD. DG, hoc est, L. R :: M. S. Erit LS = [z] MR; & [a] proinde LS − MR = o. [y] 4.6. [z] 16.6. [a] 3.ax.1.

Jam (per ultimum) superficies ABC æquatur circulo, cui radius $\sqrt{LR}$. Et superficies ADE circulo, cui radius $\sqrt{MS}$. Et [b] consequenter superficies DBCE, vel [c] ⊙ rad. A = ⊙ rad. $\sqrt{LR}$ — ⊙ rad. $\sqrt{MS}$. Unde Aq = LR — MS [d] = LR — MS + LS — MR [e] = L — M × : R + S [f] [b] Cor.2.12 [c] Hyp. [d] Prius. [e] Sch. 1.2. [f] 16.6.

quare L — M. A :: A. R + S. Unde hoc est, DB. A :: A. BF + DG.

Circulus, habens radium (A) proportione medium inter interceptam parallelis planis (BC, DE) lateris partem (DB vel L — M), & summam radiorum (BF + DG, vel R + S) circulorum qui in parllelis planis, æquatur conicæ superficiei (DBCE) parallelis planis interceptæ. Theor. VII. Archim. 16.1.

Nam (analysis vestigiis insistendo) quia L — M. A [g] :: A. R + S. [h] Erit Aq = LR — MS + LS — MR. Hoc est, Aq = LR — MS [g] Hyp. [h] 16.6.

Z (quia

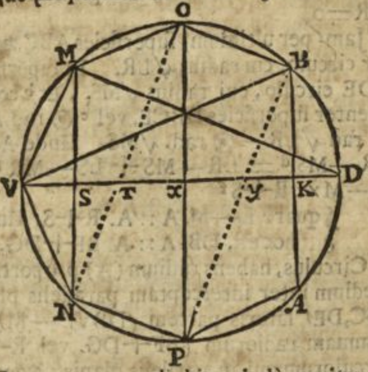
[i] 6.6. [k] 16.6. [l] 3.ax.1. [m] cor.2.12 [n] 6. hujus.

(quia ob L.M [i] :: R.S. [k] est LS=MR, & [l] propterea LS—MR=o). [m] Ergò circulus radio A æquatur differentiæ circulorum, quorum radii $\surd$LR & $\surd$MS [n]; id est, differentiæ superficierum conicarum ABC, ADE, id est, superficiei conicæ DBCE. Q.E.D.

PROBL. VIII.

* *Exceptâ base.* *Archim.* 32.1. 23.

Circuli segmento BVA (cujus axis VKD) inscripta sit figura * parilatera & æquilatera VMNOPBA, & segmento unà cum inscripta figura circa axem VK rotato; invenire circulum æqualem superficiei corporis ab inscripti figuræ revolutione procreati, sphæræque proportioni BVA inscripti.



[o] 27.1.

Jungantur anguli hinc indè pariter distantes à vertice V rectis MN, OP, BA; & connectantur NO, PB, ac DM: liquet autem angulos VDM, VMN, MNO, NOP, OPB, PBA, æqualibus insistentes arcubus æquari; & inde [o] parallelas esse rectas MN, MN, OP, BA; ac trigona DMV, MSV, NST, OKT, PXY, BKY, similia fore. [p] Quare DM. MV :: MS. VS :: NS. ST :: OX. TX :: PX. XY :: BK. YK. [q] Unde ut DM ad MV, ita summa antecedentium MN + OP + BK ad summam consequentium respectivam VK. Ergò DM × VK = MV × : MN + OP + [r] BK. Jam superficies coni MVN [s] æquatur circulo, cujus radius $\sqrt{VM \times MS}$. Et superficies OMNP [t] æquatur circulo, cujus radius est $\sqrt{\left\{ \begin{matrix} MO \times : MS + OX. \\ VM \end{matrix} \right.}$ [u] Itémque superficies BOPA circulò, cujus radius est $\sqrt{\left\{ \begin{matrix} OB \times OX + BK. \\ VM \end{matrix} \right.}$ [x] Ergò tota superficies VMOBAPN æquatur circulo, cujus radius est $\sqrt{VM \times : 2MS + 2OX + KK}$. Hoc est, $\sqrt{VM \times : MN + OP + \frac{BA}{2}}$ hoc est, $\sqrt{DM \times VK}$. Unde,

[p] 4. 6.
[q] 12. 5.
[r] $\frac{BA}{2}$
[s] 6 *hujus.*
[t] 7 *hujus.*
[u] 12.
[x] *Cor.* 2. 12

Theor. VIII

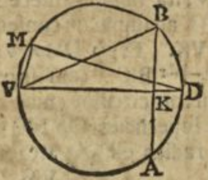
Superficies solidi (VMOBAPN) sphæræ portioni (BVR) inscripti, productíque è revolutione figuræ parilateræ & æquilateræ (VMOBAPN) circuli portioni (BVA) inscriptæ, æquatur circulo, cujus radius est $\sqrt{DM \times VK}$ (existente DM rectâ, quæ ducitur ab extremo diametri VD, axem VK continentis, ad terminum lateris VM, vertici V contermini)

Coroll. Ducendo VB; quoniam DV × VK = VBq. Et DM ⊐ DV, liquet esse DM × VK ⊐ VBq. Et proinde circulum cujus radius est $\sqrt{DM \times VK}$, minorem esse circulo cujus radius VB; id est, superficiem solidi cujusvis modo præmonstrato descripti in sphæra, minorem esse circulo cujus radius VB.

Cor. 8. & 17. 6.

PROBL. IX.

Circulum invenire parem superficiei portionis sphæricæ (BVA).



Si circuli segmento BVA, è cujus circa axem VK revolutione producta fuit sphæræ portio, inscribatur figura parilatera & æquilatera, cujus VM sit unum latus, & ex istius figuræ rotatu producatur figura; superficiem habens constantem è superficiebus conicis, aut ex parte cylindricis (sicut in præcedenti;) manifestum est ex ultimo Corollario, quòd hujus figuræ superficies minor est circulo cujus radius VB; prout autem VM magnitudine minuitur, & consequenter DM crescit eò ad æqualitatem magis appropinquat; posito igitur VM esse infinitè (vel indefinitè) parvam, figura plana segmento BUA coincidet, & solida figura cum sphæræ portione BVA, & DM cum DV; & proinde superficies inscripti solidi, hoc est, sphæricæ portionis superficies, æquabitur circulo cujus radius VB. Hoc est,

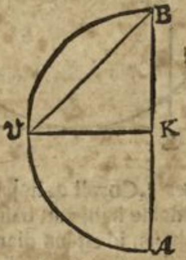
Theor. IX. Archim. 36. & 37. l. Superficies sphæricæ portionis (BVA) æquatur circulo; cujus radius est recta (VB) ducta à portionis vertice (V) ad circumferentiam basis (BA). (Vel cujus radius est

chorda

chorda ſubtendens dimidium arcum ſegmenti circularis, cujus revolutione ſphæræ portio procreatur).

COROLLARIA.

1. Superficies hemiſphærii (BVA) baſis ſuæ dupla eſt.



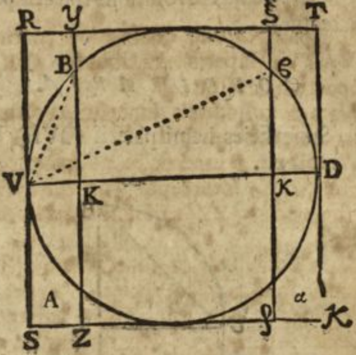
Nam per proximè præcedens ſuperficies hemiſphærii æquatur circulo cujus radius VB, hoc eſt, duplo circulo ad radium VK; quia $VBq = VKq + BKq = 2VKq$. Unde conſectatur immediatè, quòd

2. Superficies totius ſphæræ quadrupla eſt maximi in ea ſphæra circuli; (vel æqualis circulo, cujus radius æquatur diametro ſphæræ.

Quod nobiliſſimum theorema demonſtrat Archimedes ſeparatim; quod non opus erat ut faceret adeò ſtatim deducitur è generali hoc theoremate. *Archim.* 30.*I.*

3. Sphæræ ſuperficies æquatur curvæ ſuperficiei cylindri circa ipſam deſcripti, hoc

eſt, cujus latus & baſis diameter æquantur ſingula diametro ſphæræ.



Nam (per 1. Coroll. 2. hujus) curva ſuperficies cylindri ſe habet ad baſin, ut latus ejus ad $\frac{1}{2}$ radii baſis, id eſt, ut diameter a $\frac{1}{4}$ diametri; id eſt ut ſuperficies ſphæræ ad maximum in ſphæra circulum, vel ad baſin cylindri. Ergò cylindri curva ſuperficies æquatur ſuperficiei ſphæræ, imò generatim

4. Cujuſvis portionis ſuperficies (BVA) æquatur curvæ ſuperficiei cylindri (RSYZ) habentis eandem altitudinem, vel axem (VK) & diametrum (YZ) æqualem ſphæræ diametro (VD).

* 3. *hujus*, *Cor*. 8. 6. Nam ſuperficies cylindrica RSZY * æquatur circulo cujus radius eſt $\sqrt{RY \times YZ}$, id eſt, $\sqrt{VK \times VD}$, id eſt, $\sqrt{VBq}$ (nam DV. VB :: VB. VK) id eſt, ſuperficiei portionis ſphæricæ BVA.

5. Superficies portionum BVA, BDA ſe habent ut axes ſui BV, BD.

Nam

Nam cylindricæ ſuperficies RSZY, TXZY, quibus hæ ſphæricæ æquantur, taliter ſe habent. Imò, *2 Cor. 2. hujus.*

6. Sphæricarum quarumvis portionum (BVA, $\beta V\alpha$) ſuperficies axibus ſuis (VK, ·K) proportionales ſunt.

Nam & cylindricis ſuperficiebus, quibus æquantur, hoc convenit. *2 Cor. 2. hujus.*

7. Sphærica ſuperficies $\beta BA\alpha$ parallelis planis $\beta\alpha$, BA intercepta æquatur cylindricæ ſuperficiei $\xi YZ\zeta$ iiſdem planis interceptæ.

Nam ſi à cylindrica ſuperficie ξ Sζ, cui æquatur ſphærica ſuperficies $\beta V\alpha$, detrahatur cylindrica ſuperficies YRSZ, cui æquatur ſphærica ſuperficies BVA, remanebit cylindrica ſuperficies $\xi YZ\zeta$ æqualis ſphæricæ ſuperficiei $\beta BA\alpha$. Unde quoque,

8. Zonæ, ſeu ſuperficies ſphæricæ parallelis circulis interceptæ, ſe habent ut axes ſui.

Quin ex hoc fœcundiſſimo theoremate, nobiliſſimo & utiliſſimo inter authoris noſtri inventa, complura deducantur conſectaria. Nobis hæc in præſens ſufficiant, declarandæ methodo, cui author inſiſtebat, in eo reperiendo. Proximâ Lectione, quâ ſoliditates portionum ſphæricarum ad conos & cylindros retulit, viâ dabimus operam enucleare.

LECT. III.

Methodum postremâ vice conati sumus exponere quâ Archimedes superficies conicas, cylindricas, & præsertim sphæricas cum superficiebus planis comparavit, iis æquales circulos assignando. Nunc eadem brevitate modum expiscabimur, quo soliditates sphærarum & sphæricarum portionum atque sectorum cum conis & cylindris contulit; assumentes imprimis ea quæ in Elementis demonstrata sunt, nempe

Conos & cylindros æqualibus insistentibus basibus se habere ut altitudines; & si altitudines æquales sunt, se habere ut bases.

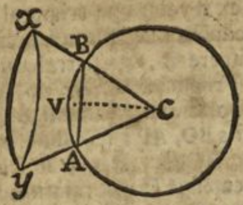
Et si coni vel cylindri pares sunt, bases & altitudines proportione reciprocari: & inversè, si proportione reciprocantur, ipsos æquari.

Et similes conos ac cylindros in triplicata esse ratione laterum, vel radiorum, vel diametrorum basis.

Et cylindros conorum æquè altorum & super æquali base constitutorum triplos esse, Præmittimus & definitionem unam ac alteram.

1. Solidus sector (vel sector sphæricus) est figura comprehensa superficie coni, verticem habentis in centro sphæræ, & sphæricâ superficie intra conum.

Ut

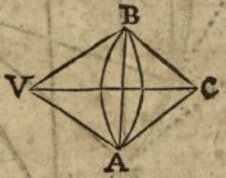


Ut figura BCAV comprehensa sub superficie conica BCA, parte superficiei coni XCY, & superficie sphærica BVA.

Vel est figura composita è cono CBA (verticem habente in centro sphæræ C) & portione sphærica BVA, super eadem base BA.

Vel si sector circularis VCB circa radium CV revolvatur, procreabitur sector sphæricus BCA.

2. Solidus rhombus est figura constans duobus conis rectis inversis, super eadem base constitutis, & vertices habentibus in eodem communi axe,



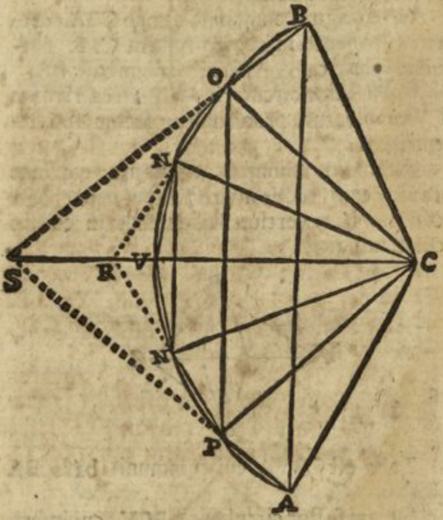
Talis est CBVA, cui communis basis BA & axis VC.

Sit jam sector circularis * BCV, cui inscribitur figura æquilatera BOMV, & sector cum figura circa radium CV revolvatur, & a sectore circulari producetur sector sphæricus; figura autem corpus solidum constans primum rhombo MCNV; tum eo quod producitur

* *Minor vel non major quadrante.*

Confer hæc cum præmissis in Lectione prima.

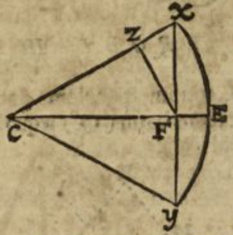
ducitur ex revolutione trianguli OCM, hoc est, (productis OM, PN ad occursum R) ei quod supererit, si detrahatur rhombus MCNR è rhombo OCPR; eo denique quod fit è revolutione trianguli BCO, hoc est, (productis BO, AP ad S) differentiæ rhombi BCAS & OCPS. Itaque si sciri possit hujusmodi cujusvis figuræ relatio ad conum aliquem, eo forte ratio dignoscetur sectoris sphærici ad conum. Huc collimant sequentia problemata.



Probl.

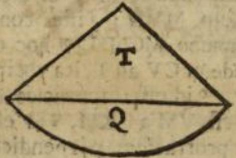
PROBL. I.

Invenire conum æqualem dato cono (CXY) cujus basis (Q) æqualis sit curvæ superficiei dati coni (CXY).



Analysis. Sit T altitudo coni quæsiti, & quia coni XCY, TQ ponuntur æquales, [y] erit ut altitudo CF coni XCY ad T, altitudinem coni TQ, ita reciproce basis Q ad basin XEY; [z] hoc est, superficies XCY ad basin XEY, [a] hoc est ut latus CX ad radium FX. Ita ut sit CF. T : : CX. FX. Atqui ducendo FZ ad perpendicularem, [b] est CX FX : : CF. FZ (ob similitudinem triangulorum CXF, CFZ). [c] Ergo FZ = T. Hinc, y 15.12. z Hyp. & 7.5. a Cor. 5. 1 Lect. b 4.6. c 9 5.

Conus (TQ) cujus basis (Q) æquatur superficiei coni (XCY), & altitudo (T) rectæ (FZ) quæ ducitur à basis centro (F) ad latus (CX) perpendicularis, æquatur cono (CXY). *Theor. I. Archim. 7.I*

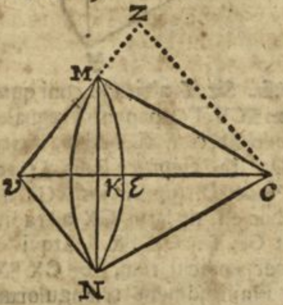


Nam

d *Hyp.* Nam quia T = [d] FZ, [e] erit CF. T :: CF.
e 7.5. FZ :: [f] CX. FX :: [g] superficies XCY, basis
f 4.6. XEY :: [h] Q. basis XEY. Ergò altitudo CF
g *Cor.* 5. ad altitudinem T, ita est reciprocè basis Q
1 *Lect.* ad basin XEY. [i] Quare coni XCY & TQ
h *Hyp.* & æquantur. Q.E.D.
7.5.
i 15.12.

PROBL. II.

Invenire conum æqualem dato rhombo (MCNV) habens basin (Q) æqualem superficiei coni (MVN).



Analysis. Altitudo coni quæsiti sit T, &
k 14.12. quia conus MCN. conus MVN :: [k] CK. KV.
& componendo rhombus MCNV conus
l 8.5. MVN :: CV. KV; hoc est, ut conus cujus
m *Hyp.* basis æquatur basi MEN, & altitudo ipsi
n 15.12. CV ad conum MVN; [l] iste conus igitur
o *Hyp.* & æquatur rhombo MCNV, [m] hoc est, cono
7.5. TQ. [n] Unde ut CV ad T, ita reciprocè erit
p *Cor.* 5. Q ad MEN, [o] id est, superficies MVN ad
1 *Lect.* MEN, [p] id est, VM ad KM, [q] id est, (ductâ
q 4.6. CZ ad VM protractam perpendiculari) ut
r 9.5. CV ad CZ. [r] Quare T = CZ. Hinc,

Conus

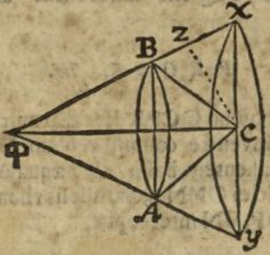
Conus (TZ) cujus basis (Q) æquatur superficiei coni (MVN), & altitudo (T) rectæ (CZ) quæ ducitur à vertice (C) coni (MCN) perpendicularis ad latus (VM) coni (MVN) æquatur rhombo (MCNV). *Theor.II. Archim.* 18.*I.*

Nam ob T=CZ, [s] erit CV.T : : CV. CZ : : [t] VM. VK : : [u] superficies MVN, basis MEN : : [x] Q MEN. [y] Unde conus, cujus altitudo æquatur ipsi CV, & basis circulo MEN, æquatur cono TQ (ob reciprocam basium & altitudinum proportionem). Ejusmodi verò conus æqualis [z] ostensus est rhombo MCNV. [a] Ergò conus TQ æquatur rhombo MCNV. Q.E.D.

[s] 7.5.
[t] 4.6.
[u] *Cor.*5. 1. *Lect.*
[x] *Hyp.* & 7.5.
[y] 15.12.
[z] *In analysi.*
[a] 1.*ax.*1.

PROBL. III.

Si rhombus BCAφ detrahatur è cono χφY, invenire conum residuo æqualem, habentem basin (Q) æqualem superficiei χBAY, planis parallelis χY, BA interceptæ.



Coni quæsiti altitudo sit T, & (Primo hujus) liquet conum, cujus altitudo est CZ (perpendicularis è centro basis ad coni χφY latus φχ) & basis par superficiei χφY æquari

cono

cono $X\phi Y$. Item (e secundo hujus) conum, cujus altitudo est CZ, & basis par superficiei $B\phi A$, æquari rhombo $BCA\phi$. Unde si detrahatur rhombus $BCA\phi$ à cono $X\phi Y$, residuum æquabitur cono, cujus itidem altitudo est CZ basis par residuæ superficiei conicæ χBAY, vel circulo Q. Adeóque $CZ = T$. Hinc,

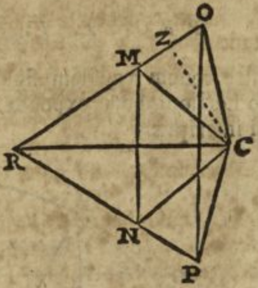
Theor. III. Archim. 19.1. Conus (TQ) cujus basis (Q) æquatur superficiei conicæ (χBAY) parallelis planis χY, BA interceptæ, & altitudo (T) perpendiculari (CZ) ductæ à centro (C) basis coni ($\chi\phi Y$) ad ejus latus ($\phi\chi$), æqualis est differentiæ coni ($\chi\phi Y$) & rhombi ($BCA\phi$).

Nam conus, cujus altitudo est CZ, & basis æqualis superficiei conicæ χBAY æquatur differentiæ duorum conorum, habentium communem altitudinem CZ, & bases æquales superficiebus conicis $\chi\phi Y$, $B\phi A$; * id est, differentiæ coni $\chi\phi Y$ & rhombi $BCA\phi$. Unde conus TQ isti differentiæ æquatur. Q.E.D.

** Per duo postrema theoremata.*

PROBL. IV.

Si à rhombo OCPR detrahatur rhombus MCNR, invenire conum residuo MOCNP parem, habentem basin (Q) æqualem conicæ superficiei OMNP, parallelis rhomborum basibus OP, MN interceptæ.



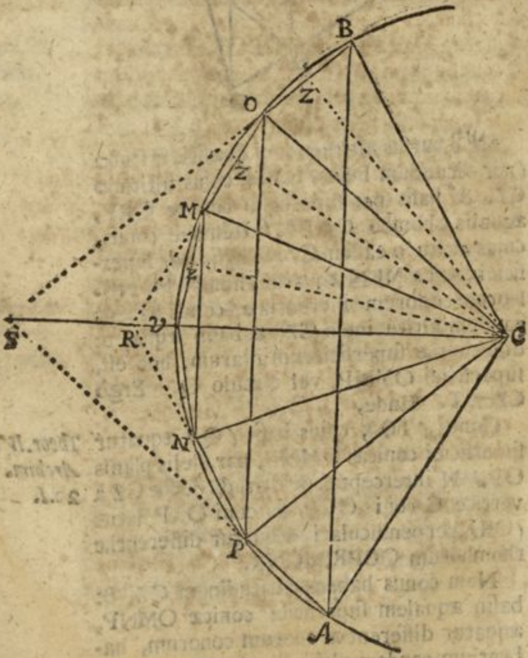
Sit T rursus altitudo coni quæsiti, eritque (per secundum hujus) conus, cujus altitudo CZ, & basis par superficiei conicæ ORP, æqualis rhombo OCPR. Itémque conus, cujus altitudo eadem CZ, & basis par superficiei conicæ MRN æquatur rhombo MCNR. Horum conorum differentia est conus habens eandem altitudinem CZ, & basin æqualem differentiæ superficierum istarum, hoc est, superficiei OMNP, vel circulo Q. Ergò CZ = T. Unde,

Conus (TQ), cujus basis (Q) æquatur superficiei conicæ OMNP, parallelis planis OP, MN interceptæ, & altitudo ductæ CZ à vertice C coni OCP ad coni ORP latus (OR) perpendiculari æquatur differentiæ rhomborum OCPR, MCNR. *Theor. IV. Archim. 20. l.*

Nam conus habens altitudinem CZ, & basin æqualem superficiei conicæ OMNP, æquatur differentiæ duorum conorum, habentium eandem altitudinem CZ, & bases æquales superficiebus conicis ORP, MRN; * h.e. differentiæ rhombor. OCPR, MCNR. Unde conus TQ isti differentiæ exæquatur. Q.E.D. ** Per 2. hujus Probl.*

PROBL. V.

Invenire conum æqualem figuræ (qualis eſt initio Lectionis hujus expoſitæ) ſphæricæ portioni inſcriptæ.



A centro C ad latera demittantur perpendiculares CZ; & quia rhombus MCNV

* 2. hujus. * æquatur cono, cujus altitudo æqualis

eſt

eſt τῇ CZ, & baſis ſuperficiei coni MVN; & corpus MOCPN, reſiduum nempe ſubducto rhombo MCNR è rhombo OCPR æquatur cono, cujus etiam altitudo par eſt eidem CZ, & baſis ſuperficiei conicæ MOPN; item ſolidum OBCPA, quod reſtat ſubducto rhombo OCPS è rhombo BCAS, *æquatur cono, cujus itidem altitudo CZ, & baſis æquatur ſuperficiei conicæ OBAP; liquet totam figuram inſcriptam æquari cono, cujus altitudo æquatur perpendiculari CZ, & baſis toti ſuperficiei figuræ inſcriptæ. * 4 *hujus.*

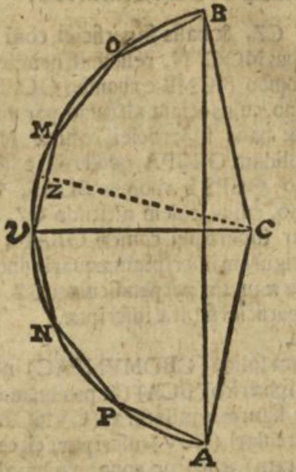
Hinc,

Figura ſolida (CBOMVNPAC) inſcripta ſectori ſphærico (BCA) (& producta è revolutione figuræ æquilateræ (CVMOBC) ſectori circulari (BCV) inſcriptæ, circa axem CV rotatu) æquatur cono, cujus altitudo æqualis eſt perpendiculari (CZ), è centro ſectoris ad unum inſcriptæ figuræ latus ductæ, & baſis ſuperficiei (VMOBAPNV) figuræ ſolidæ inſcriptæ. (Excluſâ ſcilicet ſuperficie coni BCA). *Theor. V. Archim.* 34. 1.

Nota] Procedit hoc de ſectore ſphærico, qui non major eſt hemiſphærio.

PROBL. VI.

Conum invenire parem ſectori ſphærico (BCAV).



Si sectori sphærico inscribatur figura VMOBCAPNV, qualem mox descripsimus, cujus lateri perpendicularis sit è centro ducta CZ; liquidò constat è dictis hanc figuram æquari cono cujus altitudo CZ, basis æqualis ipsius superficiei VM BAPNV. Quia verò latus VM minus assumi possit quavis assignabili lineâ, vel indefinitè parvum; adeò ut consequenter CZ minimè differat à radio sphæræ, & superficies inscriptæ figuræ designat in superficiem sphæricam BVA; & fiura ipsa quasi transeat in sectorem sphæricum, satìs manifestum est, quod

Theor. VI. Archim. 38. l. Sector sphæricus æquatur cono, cujus altitudo æquatur radio sphæræ; basis autem perficiei sphæricæ portionis, cui sector insistit,

Pro-

Procedit de ſectore, qui non eſt hemiſphærio major. At conſectatur etiam de majore. Vide Coroll. 5.

COROLL.

1. Hemiſphærium æquatur cono, cujus baſis æquatur ſuperficiei hemiſphærii (hoc eſt, duplæ hemiſphærii baſi) & altitudo radio ſphæræ. Et, *Archim. 26.1.*

2. Hemiſphærium duplum eſt coni ſuper eadem baſe, & ſibi æquè alti. Et proinde,

3. Hemiſphærium eſt $\frac{2}{3}$ cylindri ſuper eandem baſin, & æque alti. Et conſequenter,

4. Tota ſphæra ſubſeſquialtera eſt cylindri ſibi circumſcripti.

Separatim hoc nobile theorema demonſtravit auctor, quidni melius peperciſſet operæ, cùm in iſto generali contineatur, aut ab ea immediatè reſultet?

5. Etiam * ſector ſphæræ major hemiſphærio æquatur cono. Cujus altitudo radius ſphæræ, & baſis æqualis ſuperficiei ſuæ ſphæricæ. * Καʈαχρηςικῶς dictus.

Nam ſi è cono, cujus altitudo radius ſphæræ, & baſis ſuperficies totius ſphæræ, auferatur conus cui altitudo etiam radius ſphæræ, & baſis ſuperficies minoris portionis, remanebit conus itidem altitudinem habens radium ſphæræ, & baſin æqualem ſuperficiei ſphæricæ reſiduæ; qui proinde par eſt ſectori majori reſiduo.

6. Sphærica portio hemiſphærio minor æquatur cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis æqualis ſuperficiei ſuæ ſphæricæ; minùs cono ſuper eadem baſe verticem habente in centro ſphæræ.

7. Sphærica portio hemisphærio major simili quoque cono æquatur, sed addendo conum super eadem base verticem habente in centro sphæræ.

Complura deducantur hinc corollaria, circa conos & cylindros sphæræ inscriptos; sed non id agimus, at verò tantùm ut authoris nostri methodum elucidemus. Et cùm nihil in primo libro notabile reliquerimus intactum, transibimus ad secundum.

LECT. IV.

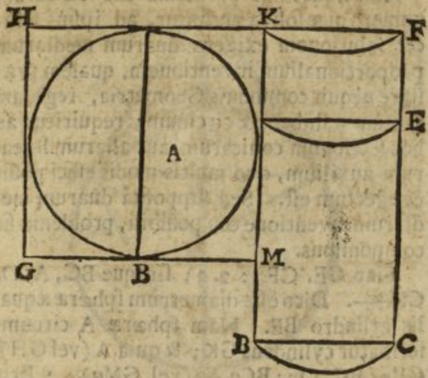
HActenus conati sumus modum exponere, quo Archimedes præcipua sua circa sphæram theoremata investigavit. Et possemus hanc principalem assequuti scopum jam conquiescere. Verum operæ forsan pretium fuerit analyticam problematum, quæ in secundo libro habentur, solutionem tradere, quo planiùs appareat, qualem ille subtilissimus vir analysin usurpàrit, & quàm hodiernæ nostræ parum dissimilem.

LIB. II.

PROBL. I.

Archim. I. Invenire sphæram æqualem dato cylindro BE.

Sit



Sit D=BC diametro basis, & L=CE lateri cylindri dati; & A diameter sphæræ quæsitæ. Jam sphæræ circumscriptus concipiatur cylindrus GHKM (habens nempe latus GH, & diametrum basis GM, utrumque æquale ipsi A). Et liquet è prædictis esse cylindrum GHKM [b] $= \frac{3}{2}$ sphæræ A. Unde si fiat CF$= \frac{3}{2}$CE, erit cylindrus BF [c] ($\frac{3}{2}$ cylindri BE) æqualis cylindro GHKM. Unde ut BCq ad GMq [d], ita reciprocè erit GH ad CF; hoc est, Dq.Aq :: A. $\frac{3}{2}$L. Unde $\frac{Acub}{Dq} = \frac{3}{2}$L. Atqui D, A, $\frac{Aq}{D}$, $\frac{Acub}{Dq}$ sunt $\div\!\div$. Ergò D, A, $\frac{Aq}{D}$ $\frac{3}{2}$ L sunt $\div\!\div$ & proinde A est prima è duabus inter D & $\frac{3}{2}$L mediis proportionalibus.

[b] *Cor.* 6. 2 *Lect.*
[c] 14.12.
[d] 15.12.

Hinc liquet hoc problema esse ex eorum numero quæ solida vocantur, ad ipsius scilicet solutionem exigens duarum mediarum proportionalium inventionem, qualem præstare nequit communis Geometria, regulam tantùm adhibens & circinum; requiritur ad hoc sectionum conicarum, aut aliarum linearum auxilium, quo multis modis effici possit & effectum est. Sed supposita duarum mediarum inventione ceu possibili, problema sic componimus.

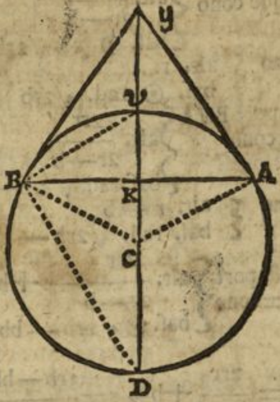
Fiat CE. CF :: 2.3; sintque BC, A, O, CF $\div\div$. Dico esse diametrum sphæræ æqualis cylindro BE. Nam sphæræ A circumscribatur cylindrus GK; & quia A (vel GH).
[e] 15.12. CF :: BC. O :: BCq.Aq (vel GMq). [e] Erit
[f] *Cor.* 6. cylindrus GK æqualis cylindro BF. Verùm
2 *Lect.* sphæra A [f] = $\frac{2}{3}$ cylindri GK; & cylindrus
[g] *Const.* & BE [g] = $\frac{2}{3}$ BF. Ergò A æquatur cylindro
14.12. BE. Q.E.F. Hinc emergit,

Theor I. Diameter (A) sphæræ cylindro (BE) æqualis est prima duarum inter diametrum (BC) basis cylindri, & rectam lateris (CE) sesquialteram mediarum proportionalium.

PROBL. II.

Invenire conum æqualem portioni (BVA) sphæræ (BVAD) habentem eandem cum portione basin (BA).

Ana-



Analysis. Conus quæsitus sit BYA, cujus altitudo $KY = a$. Et sit radius CV, vel $CD = r$. Et axis $KV = b$, unde $CK = r - b$. Et $DF = 2r - b$. Et $VBq = 2rb$ (quia $DV \times VB = VBq$) unde $KBq = 2rb - bb$ (ob angulum rectum VKB). Jam quia portio BVA * æquatur cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis æqualis superficiei portionis, id est, circulo cujus radius VB, subducto tamen hinc cono BCA. Hoc est, portio *6.2 *Lect.*

$$BVA = \text{cono} \begin{cases} \text{alt. } r = CV \\ \text{baſ.} \odot \text{ rad. } \sqrt{2rb} = \odot \text{ rad. } VB \end{cases}$$

$$- \text{cono} \begin{cases} \text{alt. } r - b = CK \\ \text{baſ.} \odot \sqrt{2rb - bb} = \odot KB \end{cases}$$

$$\text{Fac reciprocè} \begin{cases} 2rb - bb \,.\, 2rb :: r \,.\, \dfrac{2rr}{2r - b} \\ KBq \qquad AEq :: CV \end{cases}$$

* 15.12. * Erítque cono $\left\{\begin{array}{l}\text{alt. } \dfrac{2rr}{2r - b} \\ \text{baſ. } \odot \text{ rad. } \sqrt{2rb - bb}\end{array}\right.$

$= \text{cono} \left\{\begin{array}{l}\text{alt. } r. \\ \text{baſ. } \odot \text{ rad. } \sqrt{2rb}\end{array}\right.$

Itaque port BVA $= \text{cono} \left\{\begin{array}{l}\text{alt. } \dfrac{2rr}{2r - b} \\ \text{baſ. rad. } \sqrt{2rb - bb}\end{array}\right.$

$- \text{cono} \left\{\begin{array}{l}\text{alt. } r - b \\ \text{baſ. rad. } \sqrt{2rb - bb}\end{array}\right.$

* 14.12. * Hoc eſt port BVA $= \text{cono} \left\{\begin{array}{l}\text{alt. } \dfrac{2rr}{2r - b} . - r + b. \\ \text{baſ. } \odot \sqrt{2rb - bb} = \odot \text{ rad. } KB\end{array}\right.$

Unde $a = \dfrac{2rr}{2r - b} + b - r = \dfrac{3rb - bb}{2r - b}$

Vel hanc æquationem ad analogiſmum reducendo, $a . b :: 3r - b . 2r - b$. Hoc eſt,

$KY . KV :: DK + CV . DK$.

Quod eſt authoris noſtri ipſiſſimum theorema. Nempe,

Theor. II. Conus (BYA) communem habens baſin cum portione ſphærica (BVA), & cujus altitudo (KY) ita ſe habet ad portionis axim (KV) ut compoſita è ſphæræ radio (CV) & reſiduæ portionis axe (DK) ad reſiduæ portionis axem (DK), æquatur portioni (BYA).

Syntheſis. ** Conſt.* Nam quia KY.KV* :: DK + CV.DK. Erit dividendo VY. KV :: CV. DK. Et permutando VY. CV :: KV. DK. Et componendo CY. CV (hoc eſt, cono $\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. } \odot \text{ rad. } KB: \\ \text{alt. } CY,\end{array}\right.$

cono

cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. CV.}\end{matrix}\right\}$ :: DV. DK :: DVq. DBq. (ob DV, DB, DK ∺) :: VEq. KBq :: cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ.} \odot \text{ rad. VB.}\\ \text{alt. CV.}\end{matrix}\right.$ cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. CV.}\end{matrix}\right.$

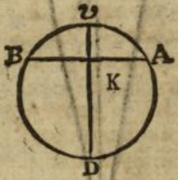
Unde erit conus $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. CY.}\end{matrix}\right.$

= cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. EV.}\\ \text{alt CV.}\end{matrix}\right.$ = port. BVA + cono BCA. Ergo conus $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. KY.}\end{matrix}\right.$

= port. BVA. Hoc eſt, conus BYA = port. BVA. Q.E.F.

PROBL. III.

Sphæram (BVAD) plano ſecare, ſic ut portionum effectarum ſuperficies (BVA, BDA) proportionem habeant datam (X ad Y).

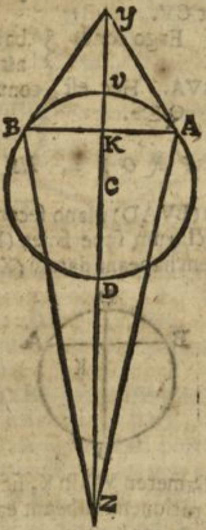


Secetur diameter VD in K, ſic ut ſegmenta KV, KD rationem habeant eandem cum data X ad Y, & per K tranſeat planum BA; quódque ſuperficies BVA, BDA ſe habent ut axes KV, KD, hoc eſt, ut X, Y patet è ſupradictis. Quid ergò plura? *Cor. 9. 1 Lect.*

Probl.

PROBL. IV.

Analysis. Datam sphæram (BVAD) secare, sic ut portiones (BVA, BDA) rationem habeant datam (X ad Y).



Factum sit à plano BA perpendiculari ad diametrum VD, & sint $\begin{cases} VD = d. \\ CV = r. \\ DK = a. \end{cases}$

Unde $KV = 2r - a$.

Jam si DK. DK + CV :: KV. KY.

Hoc est, a. a + r :: 2r — a. KY = 2rr

$\frac{2rr+ra-aa}{a}$. [h] Erit conus BYA æqualis portioni BVA. Item si VK. VK+CV :: KD. KZ. Hoc est, $2r-a.\ 3r-a ::$ a. $KZ = \frac{3ra-aa}{2r-a}$. Erit conus BZA æqualis portioni BDA. [i] Ergò K. Y :: cono BYA. cono BZA [k] :: KY. KZ :: $\frac{2rr+ra-aa}{a}$. $\frac{3ra-aa}{3r-a}$. Quare (ducendo in se extrema & media) erit $\frac{3xra-xaa}{2r-a} = \frac{2yrr+yra-yaa}{a}$.

[h] 2 *hujus.*

[i] *Hyp.* & 7.5.

[k] 14.12.

Et (utrumque latus æquationis multiplicando per $2r-a$ & a) erit $3xraa-xa^3 = 4ry^3 - 3yraa + ya^3$. Et (per transpositionem) $3xraa + 3yraa - xa^3 - ya^3 = 4yr^3$. Et (dividendo utrinque per $x+y$) $3raa - a^3 = \frac{4yr^3}{x+y} = \frac{yrdd}{x+y}$ (substituendo dd pro 4rr).

Et faciendo $x+y.\ y :: r.\ p = \frac{yr}{x+y}$. Erit $3raa - a^3 = pdd$. Vel reducendo hanc æquationem ad analogismum erit $3r-a.\ p ::$ dd. aa. Id est, $CV+KV.\ \frac{Y\times CV}{Y+X} ::$ VDq. DKq.

Qui ipsissimus est analogismus iste, ad quem rem deduxit Archimedes; quod ipsam satis prodit ac arguit, qualem is analysin usurpárit. Nam huc eum devenisse varias

rias istas proportionum compositiones, divisiones, permutationes, ac inversiones, quales in discursu suo ostentat adhibendo, pene supra fidem est. Quod si fecisset, casui potiùs imputandum esset quàm rationi vel arti, quòd in genuinas inciderit quæstionum solutiones; & ut hoc adeò constanter obtingeret, nullo pacto fieri potest aut concipi.

Quod ad ipsum problema spectat, liquet ipsum esse solidum, nec ex isto genere facillimum effectu. Integram pollicetur author ejus resolutionem & compositionem, sed non apparet an præstiterit. Cui supplendo defectui nonnullas exhibet Eutocius laboriosas & prolixas constructiones, per conicarum nempe sectionum intersectiones, quas nos omittimus. Concinnam & expeditam tradit excellentissimus Hugenius, in libello de constructione problematum illustrium: vide sîs. Vel adhibeas ipse generalem Cartesii methodum, quam pro construendis hujusmodi problematis edocet.

Nihilominus ut eò progrediamur quò processit author, suppositâ possibili hujus analogismi effectione, problema sic componimus:

Fiat X+Y. Y :: CV. P, & secetur DV in K, ita ut sit CV+KV. P :: VDq. KDq; & per K transeat planum ipsi VD rectum. Dico factum. Nam fac CV+DK. DK :: KY. KV, & CD+VK. VK :: KZ. KD. Eritque dividendo CV. DK :: VY. KV, & CD. VK :: DZ. KD, & permutando CV. VY :: (DK. KV ::) DZ. CD. Et inversè componendo CY. CV (CD) :: CZ. DZ. Et componendo tam antecedentes quàm consequentes,

YZ.

YZ. CZ : : CZ. DZ; unde YZ. DZ : : CZq. DZq : : DVq. DKq (quia priùs erat CD. DZ : : KV. DK, & componendo CZ. DZ : : DV. DK). Atqui erat primò DVq. KDq : : DV ✝KV. P. Ergò YZ. DZ : : CV✝KV. P. Quinetiam fuit CV✝VK. VK : : KZ. KD; & proinde per conversionem rationis CV✝VK. CV : : KZ. DZ; vel inversè CV. CV✝VK : : DZ. KZ. Ergò ex æquo perturbatè, CV P : : YZ. KZ; id est, X✝Y. Y : : YZ. KZ. Et divisim X. Y : : YZ. KZ : : con. BYA. con. BZA (h.e.) : : port. BVA, port. BDA. Q.E.F.

Coroll. 20.6.

Const.

14.12.

LEMMA.

· Ponatur coni GOI, DMF æquales similibus sphæricis portionibus, super iisdem basibus constitutis GHI, DEF; dico conos hos assimilari.

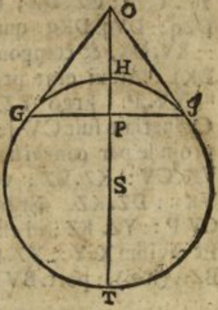
Producantur axes MNR, OPT, & sint Q, S centra sphærarum; & quia EN. ND : : HP. PG (ob similitudinem portionum) & ND. NR : : PG. PT; & ex æquo EN. NR : : HP. PT; erit componendo ER. NR : : HT. PT. Et antecedentes dimidiando QR. NR : : ST. PT. Et componendo QR✝NR : : NR : : ST✝PT. PT. Hoc est, MN. EN OP. HP. At priùs erat EN. ND : : HP. PG. Ergò ex æquali MN. ND : : OP. PG. Unde coni DMF, GOI sunt similes.

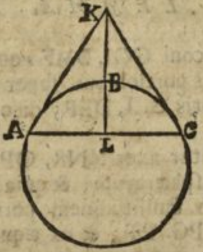
2 *hujus.*

PROBL. V.

Efficere portionem sphæricam æqualem datæ portioni (ABC) & similem alteri datæ (DEF).

Ana-





Analysis. Sit GHI portio quæsita, fiántque coni AKC, DMF, GOI æquales portionibus ABC, DEF, GHI, singuli singulis ordine. Quare conus GOI [l] = cono AKC; & idcirco [m] ACq. GIq :: PO. LK. Unde $\frac{ACq \times LK}{GIq} = PO$. Item ob [n] similitudinem conorum GOI, DMF est DF. NM :: GI. PO :: GI $\frac{ACq \times LK}{GIq}$ :: GI cub. ACq × LK. Qua-

[l] 1. *Ax.*
[m] 15.12.
[n] *Lem. Pract.*

pro-

propter $\frac{DF \times ACq \times LK}{NM} = GI\,cub.$ Et (dividendo utrinque per ACq) $\frac{DF \times LX}{NM} = \frac{GI\,cub.}{ACq}$. Atqui AC, GI, $\frac{GIq}{AC}$, $\frac{GI\,cub.}{ACq}$ sunt $\div\!\!\div$. Ergò GI est prima duarum inter AC, & $\frac{DF \times LK}{NM}$ mediarum proportionalium.

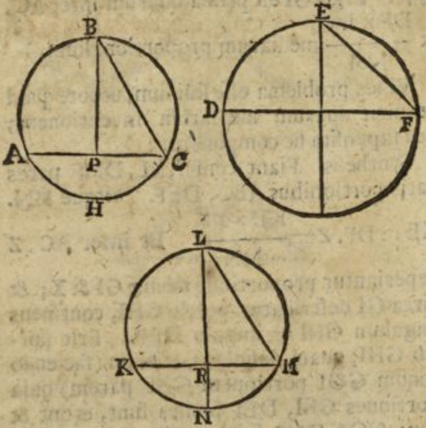
Vides problema esse solidum, utpote quod requirit duarum mediarum inventionem; quâ supposita sic componetur:

Synthesis. Fiant coni AKL, DMF pares datis portionibus ABC, DEF. Sítque MN. KL :: DF. $Z = \frac{KL \times DF}{MN}$. Et inter AC, Z reperiantur proportione mediæ GI & X; & circa GI describatur portio GHI, continens angulum GHI = angulo DEF. Erit portio GHI, quam desideras. Nam (faciendo conum GOI portionem GHI parem) quia portiones GHI, DEF similes sunt, erunt & coni GOI, DMF similes. Unde PO. GI :: MN. DF :: KL. Z. Et permutando PO. KL :: GI. Z :: AC. X :: ACq. GIq (quia AC, GI, X, Z sunt $\div\!\!\div$). Quare reciprocam habentes basium & altitudinum proportionem, coni GOI, AKC æquantur, & proinde portiones GHI, ABC æquantur. Q.E.F.

Probl.

PROBL. VI.

Datis duabus portionibus ſphæricis (ABC, DEF) invenire ſphæricam portionem ſimilem earum uni (ABC), & ſuperficiem habentem alterius (DEF) ſuperficiei parem.



Analyſis. Sit portio KLM qualis exponitur. Unde ob ſuperficierum KLM, DEF æqualitatem, circulus radio LM æquatur circulo ad radium EF, adeóque LM = EF. Item ob portionum KLM, ABC ſimilitudinem, eſt BC. BH : : LM. (EF). LN. Hinc componetur ſic; Fac BC. BH : : EF. LN. Et ſit LN diameter ſphæræ, ſecetur LN in R, ita ut ſit BP. PH : : LR. RN. Et per R tranſeat planum KM ad LN perpendiculare. Liquet portionem KLM ipſi ABC ſimilem eſſe, &

& esse LM. LN :: BC. BH :: EF. LN. Unde LM = EF. Adeóque circulus radio LM exæquat circulum radio EF; h. e. sphærica superficies KLM superficiem ABC. Q.E.D.

PROBL. VII.

A data sphæra (ABCD) portionem plano abscindere, ita ut portio ad conum super eadem basi, & æquè altum habeat assignatam rationem (Y ad X).

Portio quæsita sit ABC, & conus etiam ABC, quibus communis altitudo BE; in qua protracta sit sphæræ centrum F. Ponatúrque conus AGC par portioni ABC. Unde FD + ED. ED :: EG. EB :: cono AGC. cono ABC :: Y. X. Et dividendo FD. ED :: Y — X. X. Componitur autem sic; Fac Y — X. X :: FD. ED (& consequenter Y. X :: FD + ED. ED) & per E secetur sphæra plano AC ad BD recto; & faciendo conum AGC = port. ABC, erit GE. BE (id est, con. AGC, ABC) :: FD + ED. ED :: Y. X. Unde port. ABC. con. ABC :: Y. X Q.E.F.

PROBL. VIII.

Sphærâ ABCD per planum AC divisâ, superficierum & soliditatum ABC, ADC proportiones inter se comparare.

Si fiat conus AHC = port. ABC, & conus
° 14.12. AGC = port. ADC; ° evidens est portionum ABC, ADC rationem eandem esse cum
p 5 Cor. 9. ratione HF ad GF; p & proportionem super-
1 Lect. ficierum ABC, ADC eandem esse cum ratione axium BF. FD; hæ igitur rationes compa-
q 2 hujus. randæ sunt. Et quia HF. BF q :: R -|- DF.
r 1 Lem. DF. Et divisim HB. BF :: R. DF r ⊏ BF. R.
infra. (quia Rq * ⊏ BF × DF = FAq) Unde HB × r
* 5.2. R ⊏ BFq. † & HB ⊏ BF. Est autem R -|- BF.
† 14.5. BF q :: FG. FD. Et permutando R -|- BF.
f Supra & FG :: BF. DF f :: HB. R r ⊏ HF (HB -|- BF)
permutando R -|-

R-|-BF. [t] Quare Qu. R-|-BF ⊏ HF × FG. [t] *Lem. infra.*
* Unde Qu. R-|-BF. FGq ⊏ HF × FG. FGq;
† hoc est, BFq. DFq ⊏ HF. FG. Id est, *8.5.

Concl. 1. Portiones ABC, ADC minorem habent rationem duplicata ratione superficierum. † *Supra &* 1.6.

Porrò, faciendo Xq = HB × R * ⊏ BFq. * *Priùs.*
Quia HB. X [u] :: X. R. Et componendo [u] 17.6.
HB-|-X. X-|-R :: X. R; [x] erit Qu. HB-|-X. Qu. X-|-R :: Xq. Rq. [y] :: HB. R. Sed [x] 22.6. [y] 20.6.
HF (HB-|-BF) R-|-BF. * ⊏ HB-|-X. R-|-X *3 *Lem.*
(quia X [z] ⊏ BF). Quare HFq. Qu. R-|-BF ⊏ HB. R. [z] :: R-|-BF. FG. [z] *Supra.*
Pone Z, R-|-BF, Y, FG esse ÷÷. Unde Zq. Qu. R-|-BF [y] :: Z. Y :: R-|-BF. FG ⊐ [a] HFq. Qu. R-|-BF. [b] Ergò Z ⊐ HF. Verùm ratio Z ad FG est sesquialtera rationis R-|-BF ad FG. [c] Ergo proportio HF ad FG major est sesquialtera rationis R-|-BF ad FG, vel rationis BF ad DF. Id est, [a] *Priùs.* [b] 10.5. [c] 8.5.

Concl. 2. ABC, ADC habent rationem majorem sesquialtera rationis, quam habent ipsarum superficies ABC, ADC.

Lemmata. Assumptum est, 1. Si HB. BF ⊏ BF. R. esse HB × R ⊏ BFq. Id quod sic ostenditur: Sit A. B ⊏ C. D, dico esse AD ⊏ BC. Nam puta A. B :: C. E. * Ergò E ⊐ D, ergò AD ⊏ AE = BC. 10.5.

Simili discursu, si A. B ⊐ C. D. erit AD ⊐ BC.

Et inversè si AD ⊏ BC, erit A.B ⊏ C.D.
⊐ ⊐

2. Si HB ⊏ R, assumendo quamvis BF, erit HB. R ⊏ HB-|-BF. R-|-BF. Sit inquam A ⊏ B, & quævis C, dico esse A. B ⊏ A-|-C. B-|-C. Nam ob A ⊏ B erit C. B ⊏ CA; 8.5.

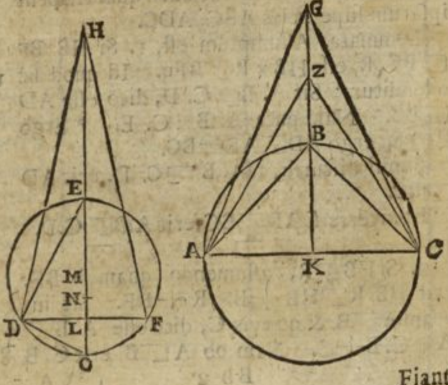
$\sqsubset CA$; & componendo $C+B, B \sqsubset C+A. A.$ & permutando $C+B. C+A \sqsubset B. A.$ Et retrogradè $A.B \sqsubset C+A. C+B.$

3. $HB+BF. R+BF \sqsubset HB+X. R+X, X \sqsubset BF.$ Nam ob HB * $\sqsubset R$, est $HB \times X - BF \sqsubset R \times X - BF$: hoc est, $HB \times X - HB \times BF \sqsubset RX - R \times BF$. Quare transponendo $HB \times X + R \times BF \sqsubset RX + HB \times BF$. Ergò addendo utrinque $HB \times R + BF \times X$, erit $HB \times X + R \times BF + X \times BF \sqsubset RX + R \times HB + HB \times BF + X \times BF$. Hoc est, $HB + BE \times R + X \sqsubset R + BF \times HB + X$. Ergò per 1. Lemma.

* *Priùs.*

PROBL. IX.

Superficie hemisphærii (ABC) positâ æquali superficiei portionis (DEF), ipsarum portionum soliditates comparare, (vel utrum sit majus indagare hemisphærium ABC, an portio DEF).



Fiant

Fiant coni ABC, DHF æquales portionibus ABC, DEF. [d] Quare [e] KG $=$ 2KA, [f] & EM $+$ LO. LO :: LH. LF. Ponatur EM $=$ t, & KA $=$ s. Quare BA (vel ED, quia superficies supponuntur æquales) & $\sqrt{2ss}$, & ob OE, ED, EL, hoc est, 2t, $\sqrt{2ss}$, $\frac{ss}{t}$ $\div\!\div$) EL $= \frac{ss}{t}$. Atqui t, s, $\frac{ss}{t}$ sunt $\div\!\div$. Ergò faciendo EN $=$ AK $=$ s, erit punctum N inter M & L. Et EN × NO [g] EL × LO, hoc est, $s \times : 2t - s\ (2ts - ss) \sqsubset \frac{ss}{t} \times 2t - \frac{ss}{t}\ (2ss - \frac{s4}{tt})$. Et (addendo ss utrinque) $2ts \sqsubset 3ss - \frac{s4}{tt} = 3t - \frac{ss}{t} \times : \frac{ss}{t} =$ EM $+$ LO × LE $=$ LO × LH $= 2t - \frac{ss}{t} \times$ LH. Hinc cùm $2s \times t \sqsubset 2t - \frac{ss}{t} \times$ LH, erit 2s. LH $\sqsubset$ $2t - \frac{ss}{t}.\ t :: 2ss - \frac{s4}{tt}.\ ss$. Id est, KG. LH $\sqsubset$ LDq (EL × LO) KAq. Unde posito KZ. LH :: LDq. KAq, [h] erit KG $\sqsubset$ KZ. Verùm (ob reciprocam proportionem) [i] est conus AZC æqualis cono DHF. Ergò conus AGC, hoc est, portio ABC, major est cono DHF, hoc est, portione DEF. Unde

Omnium sphæricarum superficierum sub æqualibus superficiebus comprehensarum maximum est hemisphærium. Nam

[d] *M centrum sphæræ DEFO.*
[e] *Cor. 6. 2 Lect. & 14.12.*
[f] *2. hujus.*
[g] 5.2.
[h] 10.5.
[i] 15.12.
Theor. Ult. Archim. II.

Nam quia 2ENq [k] = 2KAq [l] = BAq [m] = EDq [n] = EO × EL [k] 2EM × EL, erit ENq = EM × EL. Quare EN ⊏ EM, ⊐ EL. Ergò EN × NO [p] ⊏ EL × LO. Additis igitur æqualibus ENq & EM × EL; [q] est EN × EO [r] (EN × NO + ENq) ⊏ EL × LO + EL × EM [f] = LH × LO [t] (quia EM + LO. LO :: LH. LE). Quare EN. LH [u] ⊏ LO. EO :: ODq. EOq [x] :: DLq. EDq [y] :: DLq. 2KAq. Et antecedentes duplicando 2EN (KG). LH ⊏ 2DLq. 2KAq :: DLq. KAq. Fiat KZ. LH :: DLq. KAq; [z] eritque KZ ⊐ KG. [a] Et consequenter conus AZC minor est cono AGC; hoc est, conus DHF minor cono AGC, [b] vel portio DEF minor portione ABC. Q.E.D.

[k] *Const.*
[l] 47.1.
[m] *Const.* & 9. 1. *Lect.* & *Cor.* 2. 12.
[n] *Cor.* 8. & 17.6.
[o] 5 2.
[p] 2. *ax.*
[q] 3.2.
[r] 16.6.
[f] 2 *hujus.*
[t] 1 *Lemma præc.*
[u] *Cor.* 8. & 20.6.
[x] *Cor.* 8. & 22.6.
[y] 7.5. & *supra.*
[z] 10.5.
[a] 14.12. & 14.5.
[b] *Const.*

Hoc secundi libri postremum est theorema; itaque proposito defunctus sum, & manum sumo de tabula.

FINIS.

6

-yss-

l