

Université Claude Bernard Lyon 1, 21 janvier 2010

**Thermodynamique et transferts thermiques L1**

*Durée de l'épreuve: 2h*

*Les documents et téléphones portables sont interdits  
Seules les calculatrices non programmables sont autorisées  
Les trois exercices sont indépendants*

---

**EXERCICE 1**

1. On considère un glaçon d'eau de masse  $m_g$ , de capacité thermique massique (ou chaleur massique)  $c_g$  dans les conditions de l'expérience qui se déroule à pression atmosphérique constante. On notera  $L_f$  la chaleur latente de fusion massique de l'eau sous ces mêmes conditions.
  - (a) Quelle quantité de chaleur  $Q_0$  faut-il fournir au glaçon pour l'amener d'une température  $T_g$  à  $T_0 = 0$  °C?
  - (b) Quelle quantité de chaleur  $Q_1$  faut-il fournir pour transformer le glaçon à la température  $T_0 = 0$  °C en eau liquide à la même température?
  - (c) Calculer les valeurs numériques de  $Q_0$  et  $Q_1$  en prenant :  $m_g = 20$  g,  $T_g = -30$  °C,  $c_g = 2,06$  kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et  $L_f = 335$  kJ.kg<sup>-1</sup>.
  
2. On met maintenant en contact le glaçon, initialement à la température  $T_g$ , avec une masse  $m_e$  d'eau liquide, de température  $T_e$  et de capacité thermique massique  $c_e$ . On considérera le système {glaçon+eau} comme isolé et à pression atmosphérique constante.
  - (a) L'ensemble {glaçon+eau}, supposé isolé, évolue jusqu'à la température  $T_f$ . Quelle condition doit vérifier la quantité de chaleur  $Q_2$  perdue par l'eau pour que le glaçon fonde entièrement? On pourra exprimer le résultat sous forme d'une inégalité et on pourra simplifier l'écriture en faisant intervenir les quantités de chaleur  $Q_0$  et  $Q_1$  déterminées précédemment.
  - (b) On suppose que la température finale  $T_f$  du mélange glaçon+eau est supérieure à  $T_0 = 0$  °C de telle sorte que le glaçon a totalement fondu. Quelle est la différence d'enthalpie du système {eau+glaçon} entre l'état initial et l'état final?
  - (c) Toujours en supposant  $T_f > T_0 = 0$  °C, exprimer la température finale  $T_f$  en fonction des données du problème (toujours simplifier l'écriture en utilisant les quantités de chaleur  $Q_0$  et  $Q_1$ ).
  - (d) Calculer numériquement  $T_f$  en prenant :  $m_g = 20$  g,  $T_g = -30$  °C,  $c_g = 2,06$  kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>,  $m_e = 200$  g,  $T_e = 20$  °C,  $c_e = 4,18$  kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

- (e) Quelle devrait être la température initiale du glaçon pour qu'une fois fondu l'eau soit à la température  $T_0 = 0$  °C. Donner l'expression littérale et faire l'application numérique. Commenter.

---

## EXERCICE 2

Une mole d'un gaz parfait diatomique ( $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$ ) se trouve dans des conditions initiales: pression  $P_1$ , volume  $V_1$  et température  $T_1 = 300$  K.

1. On le comprime adiabatiquement et réversiblement jusqu'à ce que son volume soit  $V_2 = V_1/12$ .
  - (a) Soit  $P_2$  la pression finale. Calculer le rapport  $P_2/P_1$ . En déduire la température finale  $T_2$ . On pourra éventuellement utiliser  $12^{0.4} = 2.7$  et  $12^{1.4} = 32.4$ .
  - (b) Calculer le travail  $W_{12}$  reçu par le gaz lors de la transformation. On prendra  $R = 8.32$  J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.
2. La pression  $P_2$  est maintenue constante et on refroidit le gaz réversiblement jusqu'à la température  $T_3 = T_1$ . Le volume est alors  $V_3$ .
  - (a) Exprimer  $V_3/V_2$  en fonction de  $V_1/V_2$  et calculer-le. En déduire  $V_3/V_1$
  - (b) Montrer que la chaleur reçue est:

$$Q_{23} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_1 \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right).$$

- (c) Exprimer la variation d'entropie  $\Delta S_{23}$  en fonction de  $\ln(V_1/V_2)$ .
3. Le gaz subit ensuite une détente isotherme réversible le ramenant au volume initial  $V_1$ .
    - (a) Quelle est la pression finale?
    - (b) Exprimer le travail  $W_{31}$  et la chaleur  $Q_{31}$  mis en jeu lors de cette transformation en fonction de  $T_1$  et  $\ln(V_1/V_2)$ .
  4. Représenter le cycle dans le diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ). Quelle est la variation d'entropie lors de la détente isotherme réversible?
  5. Le gaz est de nouveau dans l'état d'équilibre initial  $V_1, T_1$  et enfermé dans une enceinte adiabatique. On impose soudainement la pression  $P_{ext} = 3RT_1/V_1$  et le gaz effectue une transformation adiabatique irréversible à pression extérieure imposée  $P_{ext}$  tout le long de la transformation jusqu'à un certain état d'équilibre thermique et mécanique final.

- (a) Exprimer indépendamment le travail effectué par le gaz et la variation d'énergie interne au cours de la transformation irréversible
- (b) En déduire l'état d'équilibre final ( $P_f, T_f, V_f$ ) et calculer  $T_f$  et  $V_f$ . On introduira le coefficient  $a = (C_v + 3R)/(C_v + R)$ .
- (c) *A priori* quel devrait être le signe de  $\Delta S$ ? Exprimer puis calculer la variation d'entropie  $\Delta S$  au cours de cette transformation irréversible.

---

### EXERCICE 3

Les questions 2. et 3. sont indépendantes de la question 1.

1. On suppose que la neige, ayant une conductivité thermique  $\lambda_{neige} = 0,1 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ , est une succession de couches de glace ( $\lambda_{glace} = 2,5 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ ) et d'air ( $\lambda_{air} = 0,025 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ ). Quel est le pourcentage de volume d'air dans la neige ?
2. En Antarctique, un sol gelé à  $T_0 = -20^\circ\text{C}$  est couvert d'une épaisseur de 10 cm de neige ( $\lambda_{neige} = 0,1 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ ). La surface de la neige est chauffée en absorbant une fraction  $f$  du rayonnement solaire (on prendra comme densité de flux thermique  $q_{soleil} = 100 \text{ W.m}^{-2}$ ).
  - (a) En début d'hiver la neige est propre et  $f=0,02$ . Quelle est la température de la surface de la neige  $T_1$  ? On suppose que le sol reste à température constante  $-20^\circ\text{C}$  tout l'hiver
  - (b) En fin d'hiver la neige sale absorbe plus la lumière et  $f=0,2$ . Quelle est dans ce cas la température de la surface de la neige  $T_1$  ?
3. On tient maintenant compte de l'effet de l'air ambiant. La surface de la neige est chauffée par le soleil mais la perte de chaleur se répartit de deux manières:
  - par échange conductif avec le sol comme précédemment
  - par échange convectif avec l'air

La température de l'air est  $T_2 = T_0 = -20^\circ\text{C}$  et le coefficient d'échange convectif de l'air est  $\alpha_{air} = 20 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ .

- (a) Ecrire la loi donnant la densité de flux thermique  $q_{air}$  pour l'échange convectif entre la surface de la neige à la température  $T_0$  et l'air ambiant à température  $T_2 = -20^\circ\text{C}$ .
- (b) Ecrire la loi donnant la densité de flux thermique  $q_{neige}$  pour l'échange conductif entre la surface de la neige et le sol à la température  $T_0 = -20^\circ\text{C}$ .
- (c) Etablir le bilan des flux de chaleur et en déduire la température à la surface de la neige à la fin de l'hiver (lorsque  $f=0,2$ ). Quelles sont vos conclusions?

### Contrôle écrit final

#### Exercice I

On utilise un compresseur alternatif à piston pour produire un flux d'air à une pression de  $P_s = 8 \cdot 10^5$  Pa à partir de l'air ambiant à  $P_e = 10^5$  Pa et  $T_e = 293$  K (cf. figure 1).

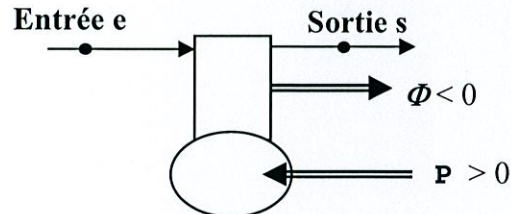


Figure 1

Il s'agit d'un système ouvert en régime permanent. On lui fournit une puissance mécanique  $P = +700$  kW et simultanément, on en extrait le flux de chaleur  $\Phi = -200$  kW (les signes de ces quantités sont ceux correspondant à la convention de signe habituelle de la Thermodynamique qu'on utilisera ici). L'air est considéré comme un gaz parfait de capacité calorifique à pression constante  $c_p = 1000$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> soit  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$ . Le débit massique à l'entrée du système est  $q_{me} = +2$  kg.s<sup>-1</sup>.

- 1) Quel est le débit massique d'air en sortie  $q_{ms}$  ?
- 2) On notera respectivement  $h_e$  et  $h_s$  les enthalpies massiques de l'air en entrée et en sortie. Compte tenu des hypothèses choisies, exprimer  $h_e - h_s$  en fonction de  $T_e - T_s$ .
- 3) Exprimer le bilan d'énergie du système.
- 4) Dédire des réponses aux questions 2) et 3) l'expression de  $T_e - T_s$ .
- 5) Calculer la valeur numérique de  $T_s$ .
- 6) Si l'air avait subi une transformation adiabatique et réversible (c'est-à-dire isentropique) entre l'entrée e et la sortie s, quelle aurait été la valeur de sa température de sortie  $T_s^{is}$  ?
- 7) A l'aide du bilan d'énergie exprimé à la question 3), en déduire la puissance mécanique  $P^{is}$  qui aurait été fournie dans ce cas.

#### Exercice II

On considère une mole de gaz parfait subissant une série de transformations réversibles dans un système fermé, schématisées figure 2 :

- 1 → 2 : transformation à température constante le long de l'isotherme  $T_b$  ;
- 2 → 3 : transformation à pression constante ;
- 3 → 1 : transformation à volume constant.

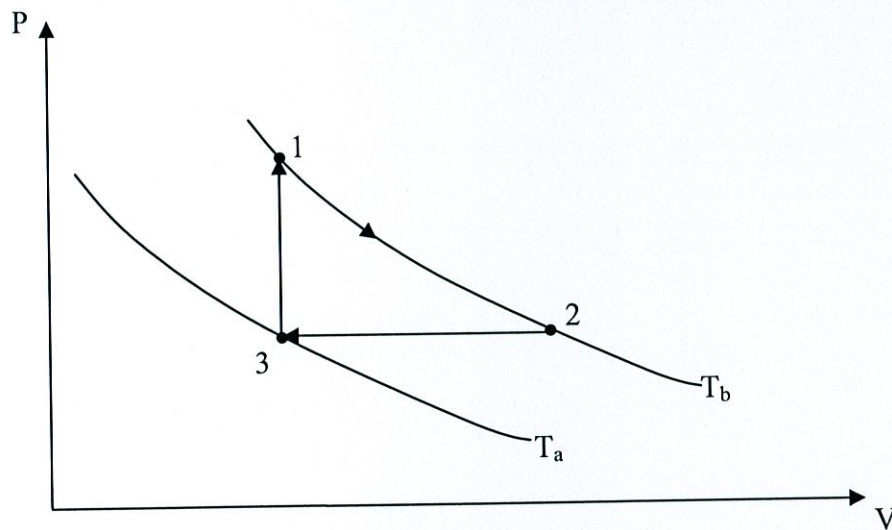


Figure 2

Pour cet exercice, on adoptera aussi la convention de signe habituelle de la Thermodynamique.

- 1) Donner l'expression des travaux échangés au cours des trois transformations, respectivement  $W_{12}$ ,  $W_{23}$  et  $W_{31}$ .
- 2) Montrer que le travail total échangé  $W_e = W_{12} + W_{23} + W_{31}$  ne dépend que des températures  $T_a$  et  $T_b$  et non pas des positions des points 1, 2 et 3 sur les isothermes  $T_a$  et  $T_b$ .
- 3) Exprimer le bilan d'énergie relatif à la transformation cyclique  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .
- 4) En déduire l'expression de la quantité de chaleur totale échangée  $Q_e = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$ .
- 5) Application numérique : calculer  $W_e$  et  $Q_e$  pour  $T_a = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_b = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ . On rappelle la valeur de la constante universelle des gaz parfait  $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

### Exercice III

Le principe du manomètre à cloche est schématisé sur la figure 3 ci-dessous : ce manomètre sert à la mesure de la pression dans les gaz. On place une cloche de masse  $M$  dans un réservoir contenant un liquide de masse volumique  $\rho$ . Les sections intérieures et extérieures de la cloche sont notées respectivement  $A_i$  et  $A_e$ . La surface du liquide extérieur à la cloche est au contact de l'atmosphère dont la pression est  $P_a$ . Le gaz dont on veut mesurer la pression  $P_g$  est mis en contact avec l'intérieur de la cloche au moyen d'un tube. Le gaz remplit l'espace sous la cloche jusqu'à ce qu'un équilibre s'établisse. Cet équilibre est caractérisé par les hauteurs de liquide  $h_1$  et  $h_2$ . On va montrer qu'en mesurant la hauteur  $h_2$ , on peut avoir accès à la pression  $P_g$  : il suffit alors de graduer la face externe de la cloche.

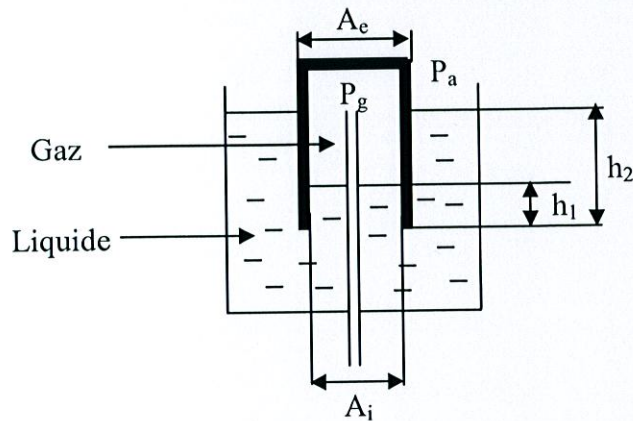


Figure 3

- 1) Lorsque l'équilibre est atteint, exprimer la différence  $P_g - P_a$  en fonction de  $h_2 - h_1$ .
- 2) Que se passe-t-il si  $P_g - P_a = 0$  ? Exprimer le volume de liquide déplacé par la cloche dans ce cas.
- 3) Dans cette hypothèse, en supposant que les seules forces qui s'exercent sur la cloche sont son poids et la force d'Archimède développée par le liquide, exprimer la hauteur  $h_2$  en fonction du poids de la cloche, de ses caractéristiques géométriques et de la masse volumique du liquide.
- 4) Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où  $P_g > P_a$  : la cloche se soulève et la hauteur  $h_2$  diminue. Exprimer le volume de liquide déplacé dans ce cas.
- 5) En supposant toujours que les seules forces qui s'exercent sur la cloche sont son poids et la force d'Archimède développée par le liquide, exprimer la relation entre les hauteurs  $h_1$ ,  $h_2$ , le poids de la cloche, ses caractéristiques géométriques et la masse volumique du liquide.
- 6) En déduire la relation entre  $h_2$  et  $P_g - P_a$  compte tenu du résultat de la question 1.

**Contrôle**  
**L1 - Sciences de l'Univers - Examen Final -**  
**durée 2H**  
**documents non autorisés**

QCM à une ou plusieurs bonnes réponses possibles, zéro point à une question non répondue ou fausse. Pour qu'une question soit juste il faut avoir donné toutes les bonnes réponses possibles.

Constantes : gravitation universelle  $G=6,67 \cdot 10^{-11}$  SI ; Boltzmann  $k_b=1,38 \cdot 10^{-23}$  JK<sup>-1</sup> ; Stefan-Boltzmann  $\sigma =5,67 \cdot 10^{-8}$  Js<sup>-1</sup>m<sup>-2</sup>K<sup>-4</sup> , charge élémentaire= $1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; unité de masse atomique= $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg .

1. Sachant que Neptune a une masse de  $1,02 \cdot 10^{26}$  kg et un rayon de 24 961 km; l'accélération de la pesanteur à la surface de Neptune est de:

- a. 6,28 ms<sup>-2</sup>
- b. 7,26 ms<sup>-2</sup>
- c. 9,81 ms<sup>-2</sup>
- d. 10,9 ms<sup>-2</sup>

2. La température de Neptune est de -220°C. La vitesse moyenne d'un gaz de H<sub>2</sub> à sa surface est de:

- a. 11,2 kms<sup>-1</sup>
- b. 0,32 kms<sup>-1</sup>
- c. 812 ms<sup>-1</sup>
- d. 44 ms<sup>-1</sup>

3. Triton et Néréide sont deux satellites de Neptune. Sachant que le demi grand axe de l'orbite de Triton est de  $354,8 \cdot 10^3$  km, sa période de révolution 5,88 jours et le demi grand axe de l'orbite de Néréide est de  $5513 \cdot 10^3$  km, la période de révolution de Néréide est de:

- a. 360 j
- b. 4,73 j
- c. 3,06 j
- d. 1,89 j

4. Quelle est la puissance dégagée par Neptune sachant que sa température moyenne est de -220°C et son rayon de 24 962 km :

- a.  $3,85 \cdot 10^{26}$  W
- b.  $3,54 \cdot 10^{15}$  W
- c.  $2,11 \cdot 10^7$  W
- d. 1550 W

5. Le mouvement de précession de l'axe de rotation de la Terre induit des cycles climatiques de :

- a. 1 ma
- b. 100 000 ans
- c. 41 000 ans
- d. 23 000 ans

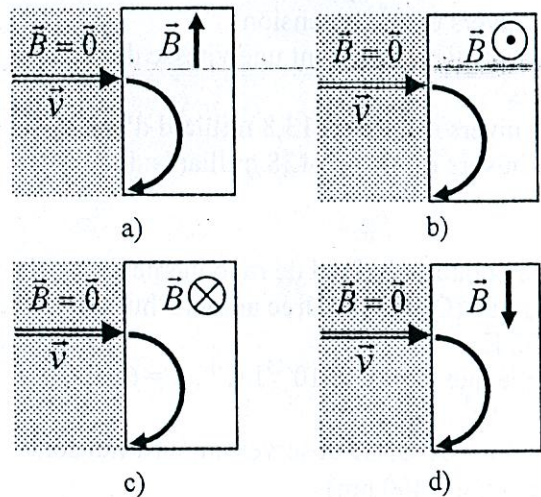
6. Précisez ce que Mars possède :

- a. un champ magnétique dipolaire
- b. un champ magnétique rémanent
- c. une magnétopause
- d. une ionopause

7. Les météorites « achondrites » ont une composition très proche de

- a. Des planètes telluriques globales
- b. Du manteau des planètes telluriques
- c. Du noyau des planètes telluriques
- d. De l'interface noyau-manteau des planètes telluriques

8. Une particule chargée négativement arrive dans la magnétosphère de champs B avec la vitesse v, quelle est schématiquement sa trajectoire :



9. En supposant les orbites des planètes sont identiques à leur valeur actuelle, si le Soleil était 10 fois plus massif, les planètes tourneraient autour du Soleil :

- a. 3,16 fois plus vite
- b. 3,16 fois moins vite
- c. 2,45 fois moins vite
- d. 2,45 fois plus vite

10. Par quel type de désintégration le Sm ( $Z=62$ ) se transforme-t'il en Nd ( $Z=60$ ) :

- a.  $\beta^+$
- b. capture d'électron
- c.  $\beta^-$
- d.  $\alpha$

11. la classification de Hubble permet :

- a. une classification morphologique des galaxies.
- b. une estimation de l'âge des galaxies.
- c. une mesure de l'âge de l'Univers.
- d. de connaître la séquence d'évolution des galaxies.

12. la courbe de rotation d'une galaxie donne :

- a. la période de rotation de la galaxie sur elle-même.
- b. des indications sur l'existence de matière « noire »
- c. la vitesse des étoiles à une distance R du centre galactique.
- d. la masse contenue dans un rayon R.

13. L'expérience WMAP a mesuré le fond de rayonnement cosmologique avec grande précision permettant, en outre, une mesure de la constante de Hubble  $H_0$  à 71 km/s/Mpc. On en déduit :

- a. que l'Univers est en expansion
- b. que les galaxies jeunes ont une vitesse de rotation de 71 km/s
- c. que l'Univers est âgé de 13,8 milliard d'années
- d. que l'Univers est âgé de 138 milliards d'années

14. La température du fond de rayonnement cosmologique (CMB) mesurée aujourd'hui est  $T_0=2.7372$  K.

On rappelle que  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  ;  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$  ;  $c = 3. \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

- a. Les photons du CMB observés aujourd'hui sont dans le bleu ( $\lambda \sim 400 \text{ nm}$ )
- b. Les photons du CMB observés aujourd'hui sont dans le rouge ( $\lambda \sim 800 \text{ nm}$ )
- c. Les photons du CMB observés aujourd'hui sont millimétriques ( $\lambda \sim 3.5 \text{ mm}$ )
- d. Les photons du CMB observés aujourd'hui sont centimétriques ( $\lambda \sim 21 \text{ cm}$ )

15. Le décalage spectral des photons du fond de rayonnement cosmologique (CMB) de l'Univers jeune ( $\sim 300\,000$  ans) est  $z \sim 1100$ . On appelle facteur d'échelle ' $a(t)$ ' une distance caractéristique (entre deux objets lointains) qui dépend du temps t.

- a. la température de l'Univers jeune était  $T \sim 3 \text{ K}$
- b. la température de l'Univers jeune était  $T \sim 3000 \text{ K}$
- c. la dimension caractéristique  $a(t)$  était mille fois plus grande qu'aujourd'hui.
- d. la dimension caractéristique  $a(t)$  était mille fois plus petite qu'aujourd'hui.

16. Le nuage de Oort est :

- a. une galaxie satellite de la Voie Lactée.
- b. un ensemble de petits corps de roche et de glace.
- c. un lieu de formation stellaire.
- d. un réservoir de comètes.

17. La comète 2P/Encke passe au périhélie à 0,336152 UA du Soleil. Son orbite a une excentricité de 0,848265. Quelle est sa période de révolution ?

- a. 3,30 ans
- b. 65,64 mois
- c. 172,06 semaines
- d. 285,42 semaines

18. Une étoile peut finir sa vie sous forme de naine blanche si elle a une masse de :

- a.  $8 M_{\odot}$
- b.  $3 M_{\odot}$
- c.  $0,5 M_{\odot}$
- d. 1 milliard de kilogrammes

19. Un système double est formé de deux étoiles de même magnitude apparente. La magnitude apparente du système est 5.

- a. La magnitude apparente de chaque étoile vaut 2,5.
- b. La magnitude apparente de chaque étoile vaut 5,75.
- c. Le rapport des luminosités des deux étoiles vaut 1.
- d. La magnitude absolue de chaque étoile vaut 3,5.

20. Une étoile explose et, à ce moment, on voit son flux lumineux multiplié par 1 milliard.

- a. Sa magnitude est multipliée par 2,5.
- b. Sa magnitude diminue de 22,5.
- c. Sa magnitude est divisée par 9.
- d. Sa magnitude augmente par 6.



# UCBL – Sciences de l'Univers PHY1002L

Date :

Numéro de la feuille d'examen à reporter ci-contre : N°

	a	b	c	d
Question 1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 15	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 16	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 17	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Question 20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Pour remplir ce document : utiliser un stylo bille uniquement.**

**Important : noircir TOTALEMENT la case sinon la réponse ne sera pas comptabilisée.**

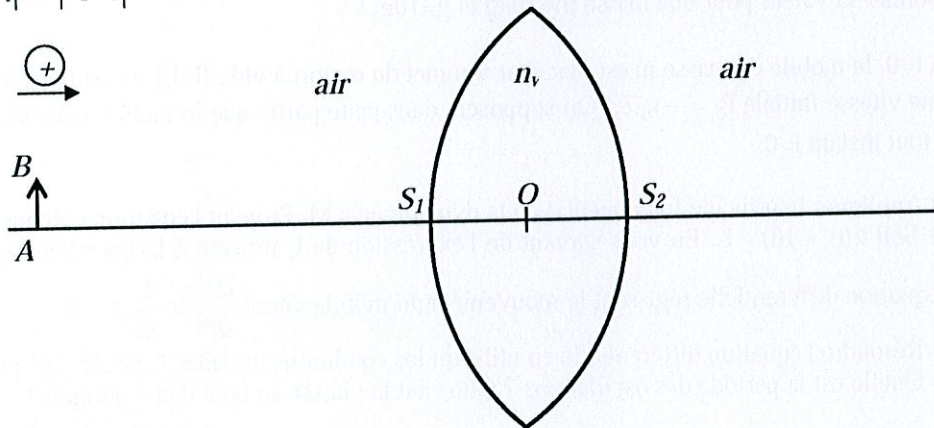
Janvier?

Les documents et les téléphones portables sont interdits, les calculatrices non programmables sont autorisées. Toute réponse devra être justifiée.

I – Optique géométrique :

Une lentille L, équiconvexe en verre d'indice  $n_v$ , est composée de deux dioptries sphériques notés  $D_1$  et  $D_2$ , de rayons de courbure respectifs  $\overline{S_1C_1}$  et  $\overline{S_2C_2}$ . Un objet réel AB, de hauteur  $100\text{ m}$ , est situé  $500\text{ m}$  devant le centre, O, de la lentille.

Données :  $|\overline{S_1C_1}| = |\overline{S_2C_2}| = 24.3\text{ cm}$  ;  $n_v = 1.5$  ;  $n_{air} = 1$  ;  $\overline{S_1S_2} = 2\text{ cm}$  ;  $|\overline{S_1O}| = |\overline{S_2O}|$



Partie I – Lentille Mince L

On assimile dans un premier temps cette lentille, L, à une lentille mince de centre O et de distance focale image  $f' = 25\text{ cm}$ .

- 1. Donner la relation de conjugaison pour L entre les points conjugués A et A'.
2. En déduire la position de l'image finale A', à travers la lentille L.
3. Donner l'expression du grandissement de la lentille L.
4. En déduire la taille de l'image A'B'.

Partie II – Dioptre D1

- 5. Donner la relation de conjugaison pour le dioptre D1 entre les points conjugués A et A1 situés sur l'axe optique. (A1 étant l'image de A donnée par D1) On notera les deux indices de réfraction nair et nv.
6. En déduire S1A1.
7. Donner l'expression du grandissement pour le dioptre D1.
8. En déduire la taille de l'image intermédiaire A1B1.

Partie III – Dioptre D2

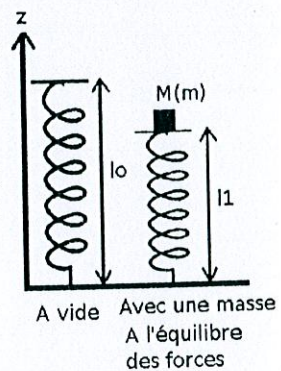
- 9. Donner la relation de conjugaison pour le dioptre D2 entre les points conjugués A1 et A' situés sur l'axe optique. (A' étant l'image de A1 donnée par D2) On notera les deux indices de réfraction nair et nv.
10. En déduire S2A'.
11. Donner l'expression du grandissement pour le dioptre D2.
12. En déduire la taille de l'image finale A'B'.

Partie IV – Association des deux dioptries

- 13. Calculer le grandissement total des deux dioptries, gamma\_total = gamma1\*gamma2 et comparer avec le résultat de la partie I.
14. Calculer la distance OA' obtenue pour l'association de dioptries à partir de la valeur de S2A' et comparer avec le résultat de la partie I.

## II - Mécanique du point :

Le but du problème est de modéliser de façon simple le saut d'un gymnaste sur un trampoline. Le trampoline est constitué d'un ressort disposé suivant l'axe Oz et fixé au sol en  $z=0$ , doté d'une masse nulle, de longueur à vide  $l_0=0,5\text{m}$  et de raideur  $k=3000\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Dans toute la suite on négligera l'amortissement.



1. a) On positionne un mobile de masse  $m$  au sommet du ressort. Quelles sont les forces qui s'appliquent sur le mobile ? Donner leur expression en fonction des constantes du problème et de la longueur du ressort  $l(t)$ .  
 b) Faire un bilan des forces à l'équilibre.  
 c) Calculer la longueur  $l_1$  du ressort lorsque le système est à l'équilibre. Donner sa valeur pour une masse  $m=70\text{kg}$  et  $g=10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .
  
2. A  $t=0$ , le mobile de masse  $m$  est placé au sommet du ressort à vide ( $l=l_0$ ), et est lancé vers le bas avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = -v_0 \cdot \vec{e}_z$ . On supposera dans cette partie que le mobile reste attaché au ressort à tout instant  $t>0$ .  
 a) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à  $M$ . Projeter l'équation obtenue sur l'axe Oz.  
 b) Soit  $z(t) = l(t) - l_1$ . En vous servant de l'expression de  $l_1$  trouvée à la question 1.c), montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement du mobile s'écrit  $\frac{dz^2}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot z = 0$   
 c) Résoudre l'équation différentielle en utilisant les conditions initiales. Calculer  $z(t)$  puis  $dz/dt$ .  
 d) Quelle est la période des oscillations ? Que vaut la vitesse au bout d'une période ?
  
3. Le mobile peut en réalité décoller du trampoline lorsque la tension exercée par le ressort sur  $M$  s'annule : il n'y a alors plus de contact.  
 a) Quelle est la valeur de  $l(t)$  lorsque le mobile décolle du trampoline ?  
 b) Par le théorème de l'énergie mécanique, montrer que la vitesse de décollement  $v_d$  est égale en module à la vitesse initiale  $v_0$ . Comment expliquer que  $v_d$  ne dépende pas de la raideur du ressort ?  
 c) Quelle va être la hauteur maximale atteinte par le mobile ?  
 d) De quelle altitude le gymnaste doit-il sauter initialement pour atteindre cette hauteur après rebond sur le trampoline ?

Durée totale 2 heures

Documents interdits. Seules les calculatrices non programmables sont autorisées

## Mécanique du Point Matériel

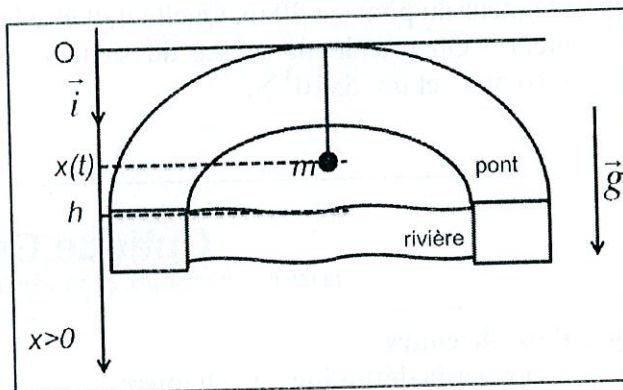
(à rendre sur une copie à part ; indiquer vos N° de séquence et de groupe)

### Questions de cours :

- 1 Enoncer le théorème du moment cinétique.
- 2 Enoncer la loi des aires.

### Problème de mécanique

On considère un sauteur à l'élastique de masse  $m$  perché sur le parapet d'un pont de hauteur  $h$  par rapport au niveau de la rivière passant sous le pont. Son élastique de masse négligeable est de longueur au repos  $l_0$  est fixé à sa taille. Par simplicité, on négligera la hauteur du sauteur dans tout le problème. On choisit l'origine de l'axe  $Ox$  au niveau de la hauteur du parapet du pont et l'axe  $Ox$  est orienté vers le bas, voir Figure ci-contre.



Pour ce problème, on sera amené à traiter deux cas A et B, correspondant aux deux domaines distincts des valeurs prises par  $x(t)$  sur son domaine de validité.

Le cas A lorsque  $x(t) < l_0$ , la force de rappel de l'élastique est nulle.

Le cas B lorsque  $x(t) > l_0$ , l'élastique étiré à la longueur  $x$  subit une force de rappel telle

que:  $\vec{F} = -a \frac{(x-l_0)}{l_0} \vec{i}$  où  $\vec{i}$  est le vecteur directeur de l'axe  $Ox$ . L'élongation maximale de

l'élastique avant rupture est appelée  $l_{max}$ . L'accélération terrestre  $g$  est orientée verticalement vers le bas.

- 1 Quel est le domaine des valeurs possibles pour  $x(t)$ , position du sauteur sur l'axe  $Ox$  ?
- 2 Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique dans le cas A puis le cas B.
- 3 **Dans le cas A**, le sauteur se lance du pont sans vitesse initiale. Etablir l'équation du mouvement pour  $x(t)$ . Quel est le type de mouvement obtenu ?
- 4 Quelle est la vitesse  $v_0$  du sauteur lorsque l'élastique est totalement déplié mais encore sans traction, c'est-à-dire lorsque  $x(t) = l_0$  ?
- 5 **Dans le cas B**, traitons le cas de l'équilibre statique du sauteur après son saut, pendu au bout de l'élastique sans mouvement. A partir du Principe Fondamental de la Dynamique, établir la relation liant la longueur d'équilibre  $l_{eq}$  de l'élastique,  $l_{eq} > l_0$ , et les constantes  $l_0, m, g$  et  $a$ .
- 6 Etablir l'équation différentielle du mouvement pour une position quelconque  $x(t)$  du sauteur. On ne considérera ici que le cas B  $x(t) > l_0$ .
- 7 En posant le changement de variable  $u(t) = x(t) - l_{eq}$ , où  $u(t)$  est l'écart par rapport à la longueur d'équilibre  $l_{eq}$  de l'élastique, montrer que l'équation différentielle obtenue peut se ramener à la forme usuelle de l'oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation  $\omega$ .
- 8 A  $t=0$  du cas B, à la position  $l_0$ , le sauteur possède la vitesse initiale  $v_0$ , dont l'expression a été obtenue en question 4). En déduire la trajectoire  $x(t)$  de la masse  $m$ .
- 9 Quel type de mouvement observe-t-on sur ce domaine ?
- 10 Donner l'expression de l'énergie potentielle de la masse  $m$  en fonction des paramètres  $m, g, l_0, h, a$  et  $x(t)$ . On ne considérera que le domaine  $x(t) > l_0$ . On considérera que l'énergie potentielle

gravitationnelle est nulle au niveau de la rivière (càd  $x=h$ ) et que l'énergie potentielle de l'élastique est nulle pour  $x=l_0$ .

- 11 En déduire l'énergie mécanique du système dans le domaine  $x(t) > l_0$ .
- 12 Montrer que la position  $l_1$  extrême atteinte par le sauteur est solution d'une équation du second degré dont les paramètres dépendent des constantes  $l_0, a, m$  et  $g$ . Quelle est la vitesse en ce point ?
- 13 Le sauteur, pour épater le public, choisit de régler son élastique de sorte qu'en position  $l_1$  extrême de son saut, il puisse toucher l'eau. Etablir l'équation du second degré en  $l_0$  qu'il doit résoudre.
- 14 Résoudre l'équation en  $l_0$  et donner l'expression de la longueur de l'élastique en fonction de la hauteur de pont  $h$ , de sa masse  $m$ , et les paramètres  $g$  et  $a$  ? Pourquoi seule l'une des solutions de l'équation est-elle possible ?
- 15 La hauteur du pont est 20 m. Quelle doit être la longueur de l'élastique au repos que doit choisir le sauteur ? On prendra la masse du sauteur égale à  $m = 100$  kg et pour les autres paramètres  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $a = 5 \times 10^3 \text{ N}$ .

## Optique Géométrique

*(à rendre sur une copie à part; indiquer vos N° de séquence et de groupe)*

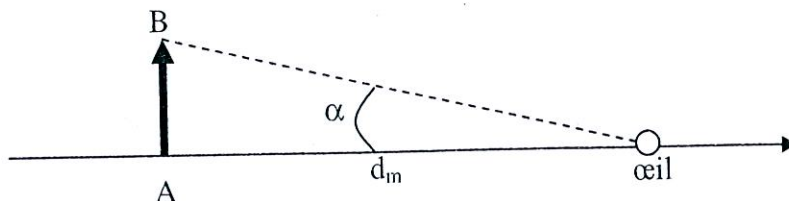
### Questions de cours

- 1 Donner la définition de la lumière.
- 2 Qu'appelle-t-on un système optique afocal ? Donner un exemple.

### Problème d'optique :

Un microscope est muni d'un objectif et d'un oculaire dont les distances focales sont respectivement  $f'_1 = 1 \text{ cm}$  et  $f'_2 = 5 \text{ cm}$ . La distance entre les centres optiques de l'oculaire et de l'objectif est notée  $D = \overline{O_1 O_2}$  et vaut 15 cm. L'oculaire est réglé pour une vision sans accommodation pour un observateur à la vue normale (image définitive à l'infini). Les conditions de Gauss seront supposées vérifiées.

- 1 En l'absence de microscope, quelle est l'expression de l'angle  $\alpha$  sous lequel est vu un objet AB à l'œil nu à la distance minimale de vision distincte  $d_m = 25 \text{ cm}$  ? (figure plus bas)
- 2 Où doit se trouver l'image intermédiaire  $A_1 B_1$  pour que l'image définitive soit à l'infini ?
- 3 En déduire la position  $\overline{A O_1}$  de l'objet par rapport à l'objectif dans cette configuration.
- 4 Représenter le trajet de deux rayons lumineux issus de l'objet à travers le microscope.
- 5 Donner l'expression de l'angle  $\alpha'$  sous lequel est vue l'image définitive, en fonction des paramètres  $D, f'_1, f'_2$  et la hauteur  $\overline{AB}$  de l'objet.
- 6 Calculer le grossissement commercial  $G_c$  du microscope, défini comme le rapport  $G_c = \alpha'/\alpha$  des angles précédemment obtenus.
- 7 Calculer l'angle  $\alpha'$  sous lequel on voit à travers cet instrument un objet dont le diamètre est de 20  $\mu\text{m}$ .
- 8 Calculer la puissance P de ce microscope
- 9 Calculer le diamètre d'un objet qui serait vu, à l'œil nu, sous ce même angle à la distance de 25 cm.

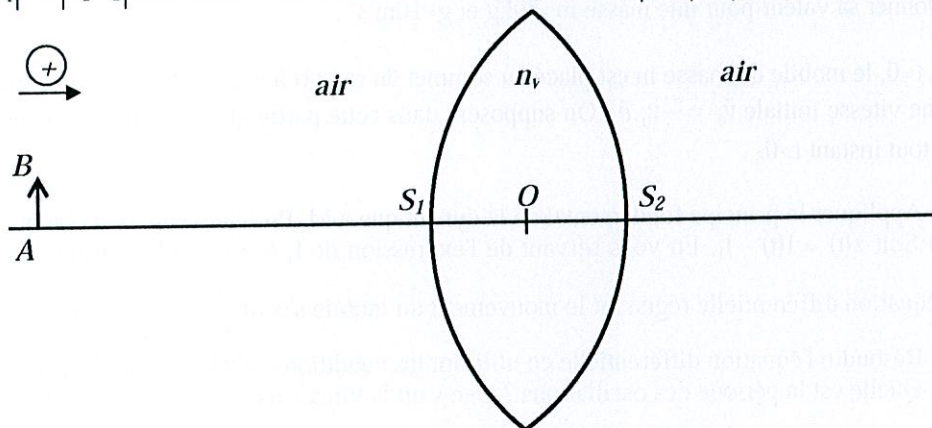


Les documents et les téléphones portables sont interdits, les calculatrices non programmables sont autorisées. Toute réponse devra être justifiée.

**I – Optique géométrique :**

Une lentille L, équiconvexe en verre d'indice  $n_v$ , est composée de deux dioptrés sphériques notés  $D_1$  et  $D_2$ , de rayons de courbure respectifs  $\overline{S_1C_1}$  et  $\overline{S_2C_2}$ . Un objet réel AB, de hauteur  $100\text{ m}$ , est situé  $500\text{ m}$  devant le centre, O, de la lentille.

Données :  $|\overline{S_1C_1}| = |\overline{S_2C_2}| = 24.3\text{ cm}$  ;  $n_v = 1.5$  ;  $n_{air} = 1$  ;  $\overline{S_1S_2} = 2\text{ cm}$  ;  $|\overline{S_1O}| = |\overline{S_2O}|$



**Partie I – Lentille Mince L**

On assimile dans un premier temps cette lentille, L, à une lentille mince de centre O et de distance focale image  $f' = 25\text{ cm}$ .

1. Donner la relation de conjugaison pour L entre les points conjugués A et A'.
2. En déduire la position de l'image finale A', à travers la lentille L.
3. Donner l'expression du grandissement de la lentille L.
4. En déduire la taille de l'image A'B'.

**Partie II – Dioptré D1**

5. Donner la relation de conjugaison pour le dioptré  $D_1$  entre les points conjugués A et  $A_1$  situés sur l'axe optique. ( $A_1$  étant l'image de A donnée par  $D_1$ ) On notera les deux indices de réfraction  $n_{air}$  et  $n_v$ .
6. En déduire  $\overline{S_1A_1}$ .
7. Donner l'expression du grandissement pour le dioptré  $D_1$ .
8. En déduire la taille de l'image intermédiaire  $A_1B_1$ .

**Partie III – Dioptré D2**

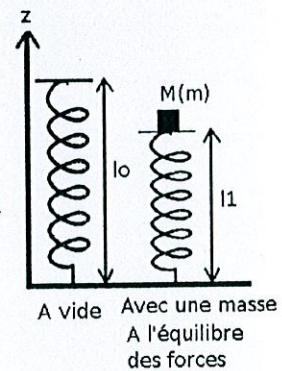
9. Donner la relation de conjugaison pour le dioptré  $D_2$  entre les points conjugués  $A_1$  et A' situés sur l'axe optique. (A' étant l'image de  $A_1$  donnée par  $D_2$ ) On notera les deux indices de réfraction  $n_{air}$  et  $n_v$ .
10. En déduire  $\overline{S_2A'}$ .
11. Donner l'expression du grandissement pour le dioptré  $D_2$ .
12. En déduire la taille de l'image finale A'B'.

**Partie IV – Association des deux dioptrés**

13. Calculer le grandissement total des deux dioptrés,  $\gamma_{total} = \gamma_1\gamma_2$  et comparer avec le résultat de la partie I.
14. Calculer la distance  $\overline{OA'}$  obtenue pour l'association de dioptrés à partir de la valeur de  $\overline{S_2A'}$  et comparer avec le résultat de la partie I.

## II - Mécanique du point :

Le but du problème est de modéliser de façon simple le saut d'un gymnaste sur un trampoline. Le trampoline est constitué d'un ressort disposé suivant l'axe Oz et fixé au sol en  $z=0$ , doté d'une masse nulle, de longueur à vide  $l_0=0,5\text{m}$  et de raideur  $k=3000\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Dans toute la suite on négligera l'amortissement.



1. a) On positionne un mobile de masse  $m$  au sommet du ressort. Quelles sont les forces qui s'appliquent sur le mobile ? Donner leur expression en fonction des constantes du problème et de la longueur du ressort  $l(t)$ .  
 b) Faire un bilan des forces à l'équilibre.  
 c) Calculer la longueur  $l_1$  du ressort lorsque le système est à l'équilibre. Donner sa valeur pour une masse  $m=70\text{kg}$  et  $g=10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .
  
2. A  $t=0$ , le mobile de masse  $m$  est placé au sommet du ressort à vide ( $l=l_0$ ), et est lancé vers le bas avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = -v_0 \cdot \vec{e}_z$ . On supposera dans cette partie que le mobile reste attaché au ressort à tout instant  $t>0$ .  
 a) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à  $M$ . Projeter l'équation obtenue sur l'axe Oz.  
 b) Soit  $z(t) = l(t) - l_1$ . En vous servant de l'expression de  $l_1$  trouvée à la question 1.c), montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement du mobile s'écrit  $\frac{dz^2}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot z = 0$   
 c) Résoudre l'équation différentielle en utilisant les conditions initiales. Calculer  $z(t)$  puis  $dz/dt$ .  
 d) Quelle est la période des oscillations ? Que vaut la vitesse au bout d'une période ?
  
3. Le mobile peut en réalité décoller du trampoline lorsque la tension exercée par le ressort sur  $M$  s'annule : il n'y a alors plus de contact.  
 a) Quelle est la valeur de  $l(t)$  lorsque le mobile décolle du trampoline ?  
 b) Par le théorème de l'énergie mécanique, montrer que la vitesse de décollement  $v_d$  est égale en module à la vitesse initiale  $v_0$ . Comment expliquer que  $v_d$  ne dépende pas de la raideur du ressort ?  
 c) Quelle va être la hauteur maximale atteinte par le mobile ?  
 d) De quelle altitude le gymnaste doit-il sauter initialement pour atteindre cette hauteur après rebond sur le trampoline ?

**Exercice : Corde fixée à ses deux extrémités**  
(Barème indicatif : 7 points)

On considère une corde de longueur  $L$  et de masse linéique  $\mu$ . La corde est fixée en ses extrémités (les points  $x=0$  et  $x=L$  de l'axe  $x$ ) et tendue avec une tension  $T_0$ . La vitesse des ondes transverses de la corde est  $c$ .

1) Donner **sans démonstration** l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier le mouvement  $y(x,t)$  d'un point de la corde d'abscisse au repos  $x$  (équation d'onde).

2) On considère l'onde stationnaire suivante:

$$y_1(x,t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega_1 t)$$

a) Montrer que l'expression précédente est solution de l'équation d'onde donnée dans la question 1) pour une valeur de  $\omega_1$  que l'on déterminera en fonction de  $L$  et  $c$ .

b) Dessinez l'aspect de la corde vibrante.

c) Expliquer le qualificatif **stationnaire** donné à cette onde.

3) On considère maintenant l'onde stationnaire suivante:

$$y_2(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin(\omega_2 t)$$

Montrer que cette expression est également solution de l'équation d'onde pour une valeur de  $\omega_2$  que l'on déterminera.

4) On considère l'onde suivante :

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

a) Quel principe permet d'affirmer que cette expression est également solution de l'équation d'onde ?

b) Cette onde est-elle stationnaire ? Quelle est la période temporelle de cette onde ?

c) On pose

$$f(x) = y(x, t=0) \text{ et } g(x) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t=0)$$

Représenter graphiquement  $f(x)$  et  $g(x)$  en fonction de  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ )

d) Expliquer comment un expérimentateur peut créer l'onde  $y(x,t)$  en préparant la corde à l'instant  $t$  ?



## Problème : fibre optique — approche électromagnétique (Barème indicatif : 13 points)

On considère un modèle simple de fibre optique (**guide plan**) qui consiste en une couche infinie (selon  $z$ ) de diélectrique d'indice  $n_1$  entre deux couches d'indice  $n_2$  (géométrie planaire), l'interface étant dans les plans  $x = a$  et  $x = -a$  (voir figure ci-dessous). On cherche à caractériser la forme de l'onde électromagnétique correspondant à un champ  $\vec{E}$  se propageant dans la fibre (milieu sans charge, ni courant).

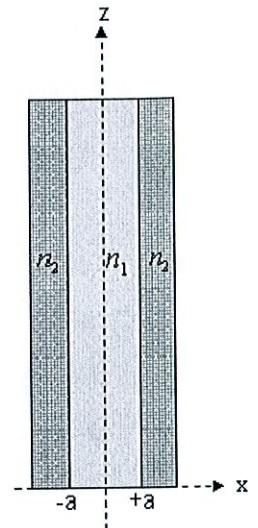
### 1) Question préliminaire :

Rappeler l'équation générale de propagation (équation de d'Alembert) satisfaite par les champs électrique et magnétique d'une onde plane se propageant dans le vide (on notera  $c$  la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide).

2) On rappelle que la vitesse d'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu d'indice  $n$  est égale à  $\frac{c}{n}$ . Soit  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  les champs électriques

se propageant respectivement dans les deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$ .

Ecrire les équations de propagation satisfaites par les deux champs électriques dans les deux milieux en fonction de  $c$  et des indices  $n_1$  et  $n_2$ , respectivement dans chacun des milieux.



3) On suppose que le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est identique dans les deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$ .

On peut écrire le champ électromagnétique total dans les deux milieux sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_0 f_1(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{E}_2 = E_0 f_2(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \end{cases} \quad \text{où } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont deux fonctions dépendant uniquement de } x.$$

Indiquer le sens de propagation de l'onde électromagnétique et sa direction de polarisation. Ce champ est dit « transversal électrique ». Pourquoi ?

4) Montrer à partir de l'équation générale de propagation (de la question 2) du champ électrique que les équations différentielles satisfaites par les fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ , respectivement dans chaque milieu d'indice  $n_1$  et  $n_2$ , s'écrivent :

$$\begin{cases} f_1''(x) + \beta_1^2 f_1(x) = 0 \\ f_2''(x) - \beta_2^2 f_2(x) = 0 \end{cases}$$

On utilisera les variables  $\beta_1$  et  $\beta_2$  définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_1^2 = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} - k^2 \\ \beta_2^2 = k^2 - \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} \end{cases}$$

5) On suppose que les indices optiques et la fréquence radiale  $\omega$  sont tels que  $\beta_1^2 > 0$  et  $\beta_2^2 > 0$ . Donner dans ces conditions la forme générale des fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ .

6) Montrer à partir des expressions de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  que la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$  est comprise

entre  $\frac{c}{n_1}$  et  $\frac{c}{n_2}$ .

7) Pour des raisons de symétrie, les fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  doivent être paires ou impaires. On s'intéresse pour la suite aux **solutions paires**. (NB : une fonction  $f$  est telle que  $f(-x) = f(x)$ )

Par ailleurs la conservation de l'énergie impose :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = 0$

Montrer que le champ électrique  $\vec{E}$  peut être décrit dans l'ensemble du guide grâce aux fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sous la forme :

$$\begin{cases} f_2(x) = A_2 e^{\beta_2 x} \text{ pour } x < -a \\ f_1(x) = A_1 \cos(\beta_1 x) \text{ pour } -a < x < a \\ f_2(x) = A_2 e^{-\beta_2 x} \text{ pour } x > a \end{cases} \quad \text{Où } A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont des constantes.}$$

8) Quelle est la forme du champ électrique dans chaque milieu. Exprimer la partie réelle du champ électrique  $\Re(\vec{E}_1)$  dans le milieu d'indice  $n_1$ .

9) Dans le plan xy, dessiner l'allure de l'amplitude du champ électrique dans l'ensemble de la fibre à une altitude z donnée.

10) En déduire à partir de l'équation de Maxwell-Faraday l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_1$  à l'intérieur de la fibre dans le milieu d'indice  $n_1$ . Exprimer sa valeur réelle  $\Re(\vec{B}_1)$ . Le champ magnétique est-il transversal ? Argumenter votre réponse. Caractériser son état de polarisation.

### Questions Facultatives :

11) Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{R}_1 = \frac{1}{\mu_0} \Re(\vec{E}_1) \wedge \Re(\vec{B}_1)$  dans le milieu d'indice  $n_1$ .

Montrer que sa moyenne temporelle s'écrit :

$$\langle \vec{R}_1 \rangle_t = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 A_1^2 k}{\mu_0 \omega} \cos^2(\beta_1 x) \vec{e}_z$$

En déduire la puissance moyenne transportée par unité de surface perpendiculaire à l'axe z. Dans quelle direction l'énergie moyenne se propage-t-elle dans le milieu d'indice  $n_1$  ?

12) On peut montrer que les conditions de continuité aux interfaces en  $x = a$  et  $x = -a$  impliquent la continuité de la fonction  $f(x)$  et de sa dérivée, soit :

$$\begin{cases} f_1|_{x=\pm a} = f_2|_{x=\pm a} \\ f_1'|_{x=\pm a} = f_2'|_{x=\pm a} \end{cases}$$

Montrer que l'on a alors la condition  $\tan(\beta_1 a) = \frac{\beta_2}{\beta_1}$

Une résolution graphique de cette équation conjuguée à la relation  $\beta_1^2 + \beta_2^2$  permettrait de mettre en évidence l'existence de modes de propagation dans la fibre que l'on n'étudiera pas.

### Rappels :

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z$$

$$\text{et } \Delta E_i = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} \text{ (avec } i = x, y \text{ ou } z)$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

**I) Ondes mécaniques [~4 points]**

1) Ecrire l'équation de propagation d'un ébranlement mécanique  $u(x, t)$  le long d'une corde de masse linéique  $\mu$  tendue avec une force  $T$ . Donner, sans démonstration, et commenter l'expression de sa solution générale.

2) On considère deux types de solutions de l'équation de propagation :

$$\begin{aligned} \cdot u_1(x, t) &= A \sin(\omega t - kx) \\ \cdot u_2(x, t) &= A \cos(\omega t) \sin(kx) \end{aligned}$$

Caractériser ces deux solutions et préciser dans quel cas peut-on rencontrer l'une ou l'autre des deux solutions.

**II) Propagation d'ondes électromagnétiques dans un conducteur [~16 points]**

Le but de ce problème est l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur et son application à l'absorption de la lumière par les milieux métalliques.

Une onde plane électromagnétique de pulsation  $\omega$ , polarisée rectilignement suivant Oz, se propage vers les x croissants à l'intérieur d'un milieu conducteur homogène isotrope, caractérisé par les constantes macroscopiques  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  du vide et par sa conductivité  $\gamma$ . On admettra que la loi d'Ohm rend compte des phénomènes de conduction dans ce milieu ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ) et que la densité volumique de charges apparentes  $\rho$  est nulle. Dans ce problème l'espace est représenté par un système cartésien Oxyz de vecteurs unitaires :  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$ .

**II-A) Détermination de l'équation de propagation**

1. Ecrire les quatre équations de Maxwell dans le cas de ce conducteur.

2. A l'aide des équations de Maxwell montrer que :  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On donne :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{D})) = \vec{\text{grad}} \text{div}(\vec{D}) - \Delta \vec{D}$  où  $\vec{D}$  est un vecteur quelconque.

3. Montrer que la solution sinusoïdale  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_z$  convient si

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - i \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0} \right]. \text{ C'est l'équation de dispersion.}$$

4. Montrer que négliger  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  devant  $\vec{j}$  revient à négliger 1 devant  $\frac{\gamma}{\omega \epsilon_0}$ . Nous utiliserons cette approximation dans la suite.

5. a) Montrer que  $k = \frac{1}{\delta}(1-i)$  et que l'on obtient finalement pour  $\vec{\tilde{E}}$  l'expression suivante :

$$\vec{\tilde{E}} = E_0 \vec{e}_z \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

Expliciter  $\delta$  et donner sa dimension.

b) Donner  $\vec{E}$  la partie réelle de  $\vec{\tilde{E}}$ . Commenter l'expression de  $\vec{E}$  et donner son allure en fonction de  $x$ .

c) Déterminer l'expression de la vitesse de phase en fonction de  $\omega$  et  $\delta$ .

6. a) Déterminer l'expression du vecteur induction magnétique  $\vec{\tilde{B}}$  en fonction de  $x$ ,  $t$ ,  $\omega$ ,  $\delta$  et  $E_0$ .

b) Donner  $\vec{B}$  la partie réelle de  $\vec{\tilde{B}}$ . Déterminer le déphasage  $\phi$  entre l'induction  $\vec{B}$  et le champ  $\vec{E}$ .

On donne :  $1+i = \sqrt{2} \exp(i\frac{\pi}{4})$  ;  $1-i = \sqrt{2} \exp(-i\frac{\pi}{4})$  ;  $i-1 = \sqrt{2} \exp(i\frac{3\pi}{4})$

## II-B) Application : Absorption de la lumière par un métal

Une onde lumineuse tombe normalement sur une feuille de cuivre et donne naissance d'une part à une onde réfléchie, d'autre part à une onde transmise dans le métal (conducteur), mais qui s'absorbe très rapidement. On utilise une lumière monochromatique incidente de pulsation  $\omega = \pi 10^{15} \text{ s}^{-1}$ .

1. Calculer la valeur de  $\delta$  dans le cuivre pour la pulsation donnée ci-dessus.

2. Si la feuille de cuivre est très mince, l'onde bien que très affaiblie, parvient à sortir sur l'autre face.

Donner l'épaisseur  $\Delta x$  quand l'amplitude de  $\vec{E}$  est divisée par  $e = \exp(1)$ .

On donne : La permittivité du vide :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F m}^{-1}$

La vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$

La conductivité du cuivre :  $\gamma = 6 \cdot 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$

$$\frac{1}{\pi \sqrt{120}} \approx 0,03$$

**Les notes de cours personnelles (manuscrites, sorties imprimante), TD et TP sont autorisées.**

**Les autres documents (dont livres) et calculatrices sont interdits.**

**Les téléphones portables sont interdits.**

**Objectif :** Ecrire un programme qui permet de simuler la mécanique céleste. On se bornera ici à la mécanique du point, c'est-à-dire que l'on ne tiendra pas compte de la rotation des objets sur eux-mêmes. L'idée est très simple : on se donne N corps (astres) et on résout numériquement les équations du mouvement.

Dans un repère orthonormé OXYZ, à l'instant t, et pour l'astre i, on appellera  $\vec{R}_i$  le vecteur qui représente la position,  $\vec{V}_i$  le vecteur vitesse,  $\vec{a}_i$  le vecteur accélération et  $\vec{F}_i$  la force qui agit cet astre.

La force  $\vec{F}_i$  peut se calculer à partir des positions des N astres par la formule :

$$\vec{F}_i = \sum_{j=0(j \neq i)}^{N-1} G m_i m_j \frac{(\vec{R}_j - \vec{R}_i)}{|\vec{R}_j - \vec{R}_i|^3} \quad \text{où } m_i \text{ est la masse de l'astre } i \text{ et } G \text{ est la constante universelle de}$$

gravitation qui vaut  $6.67428 \times 10^{-11}$  SI ( $\text{m}^3 \text{Kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ )

L'accélération peut se calculer facilement :  $\vec{a}_i = \vec{F}_i / m_i$

Le programme comportera 5 fichiers : **Astre.h**, **Astre.cpp**, **SystemeSolaire.h**, **SystemeSolaire.cpp** et **Main.cpp**. Pour chaque fonction à écrire, une indication du niveau de difficulté est fournie entre [].

### **Fichier : Astre.h**

On déclare une classe nommée **Astre** qui a :

- 5 attributs privés : *masse* (double), *nom*(string), *R* (tableau de 3 réels), *V*(tableau de 3 réels) et *F* (un tableau de 3 réels) qui représentent respectivement la masse, le nom, le vecteur position, le vecteur vitesse et la force de qui agit sur l'astre.
- Un constructeur sans paramètre
- Un constructeur avec 4 paramètres : *n* (de type string) , *m*(de type double), *r*(tableau de 3 réels) et *v*(tableau de 3 réels).
- Une méthode publique *initForce* sans paramètre. La méthode ne renvoie rien.
- Une méthode publique *ajoutForce* avec un paramètre *d* de type **Astre**. Cette méthode modifiera le paramètre. La méthode ne renvoie rien.
- Une méthode publique nommée *deplacer* avec un paramètre *dt* de type double. La méthode ne renvoie rien.

On fera le nécessaire pour déclarer les opérateurs d'entrée-sortie de la classe **Astre**

### Fichier : Astre.cpp

On définit les méthodes de la classe **Astre** ainsi que les opérateurs d'entrée-sortie pour cette classe.

- Le constructeur sans paramètre [*Facile*] : on initialise la masse à 1.0, le nom à « Inconnu ». Les éléments des tableaux **R**, **V** et **F** sont initialisés à 0.
- Le constructeur avec 4 paramètres [*Facile*] : *n* (de type string), *m* (de type double), *r* (tableau de 3 réels) et *v* (tableau de 3 réels). on initialise la masse, le nom et les éléments des tableaux **R** et **V** en utilisant les paramètres *m*, *n*, *r* et *v*. Les éléments du tableau **F** sont initialisés à 0.
- La méthode **initForce** [*Facile*] : On initialise à 0 les éléments du tableau **F**.
- La méthode **ajoutForce** [*Moyen*] avec le paramètre *d* de type **Astre**. On calcule les 3 composantes du vecteur **A** :

$$\vec{A} = G m m_d \frac{(\vec{R}_d - \vec{R})}{|\vec{R}_d - \vec{R}|^3} \quad m \text{ et } \vec{R} \text{ étant la masse et le vecteur position de l'astre sur lequel la méthode}$$

agit.  $m_d$  et  $\vec{R}_d$  sont la masse et le vecteur position de l'astre *d* (le paramètre de la méthode).

On ajoute **A** à **F** et **-A** à l'attribut **F** de *d* (Attention **A** et **F** sont 2 vecteurs de 3 éléments chacun).

- La méthode publique **deplacer** [*Moyen*] avec un paramètre *dt* (de type double). En utilisant la force  $\vec{F}$  et la masse, on calcule l'accélération  $\vec{a}$ . On jouera ensuite  $\vec{V} dt + \vec{a} dt^2 / 2$  à  $\vec{R}$  et  $\vec{a} dt$  à  $\vec{V}$ .
- On définit l'opérateur de sortie [*Facile*] de la classe **Astre** : on sort le nom, la masse, les coordonnées et les 3 composantes de la vitesse sur une seule ligne.
- On définit l'opérateur d'entrée [*Facile*] de la classe **Astre** : on rentre dans l'ordre le nom, la masse, les 3 coordonnées et les 3 composantes de la vitesse. On supposera que ces valeurs sont séparées par des espaces.

### Fichier : SystemeSolaire.h

On déclare une classe nommée **SystemeSolaire** qui a :

- 2 attributs privés : *nAstres* de type int et *astres* qui est un pointeur vers un tableau de **Astre**
  - Un constructeur sans paramètre.
  - Le constructeur par copie.
  - L'opérateur d'affectation.
  - L'opérateur += qui permettra d'ajouter un astre *p* au système solaire.
  - Une méthode publique nommée **calculForces**, sans paramètre, qui ne renvoie rien.
  - Une méthode publique nommée **evoluer** avec un paramètre *dt* de type double et qui ne renvoie rien.
- On fera le nécessaire pour déclarer l'opérateur de sortie pour la classe **SystemeSolaire**

### Fichier : SystemeSolaire.cpp

On définit les méthodes de la classe **SystemeSolaire** ainsi que l'opérateur de sortie pour cette classe.

- Le constructeur sans paramètre [*Moyen*] : on initialise *nAstres* à 1. On crée un tableau dynamique de 1

Astre. Son adresse mémoire est copiée dans l'attribut *astres*. On déclare une variable *S* de type *Astre* qui représente le soleil de masse  $1.9891E30$  que l'on place à l'origine avec une vitesse nulle. On affecte *S* à l'élément 0 du tableau *astres*.

– Le constructeur par copie [*Moyen*].

– L'opérateur d'affectation [*Moyen*].

– L'opérateur += [*Difficile*] de paramètre *p* de type *Astre*. On crée un tableau *A* de  $n = nAstres + 1$ . On copie les *nAstres* astres de l'objet sur lequel la méthode agit dans les *nAstres* premiers éléments de *A*. On affecte *p* à l'élément *n-1*. On détruit le tableau *astres*. On copie le pointeur *A* dans le pointeur *astres*. On incrémente *nAstres*.

– La méthode *calculeForces* [*Moyen*]. On calcule les forces qui agissent sur les astres du système solaire connaissant les positions de ces astres.

– La méthode *evoluer* [*facile*] de paramètre *dt* (type double). On calcule les forces. On déplace les astres du système solaire.

– L'opérateur de sortie [*facile*] du système solaire : on sort les *nAstres* sur une seule ligne.

### **Fichier : Main.cpp** [*Moyen*]

On définit la fonction principale du programme.

On déclare une variable de type *SystemeSolaire*. On demande à l'utilisateur le nombre d'astres à ajouter au système (en plus du soleil déjà ajouté dans le constructeur). Ensuite on saisit les astres que l'on ajoute au système en utilisant l'opérateur +=. On demande à l'utilisateur *dt* (le pas du temps) et *tmax* le temps maximal. Pour *t* allant de 0 à *tmax* avec un pas *dt*, on applique la méthode *evoluer* et on affiche le système.

**Université Claude Bernard Lyon 1**  
**Licence 2ème année -- semestre de printemps 2010**  
**UE Programmation C/C++**  
**Durée 2h00**

**Les notes de cours personnelles (manuscrites, sorties d'imprimante), TD et TP sont autorisées. Le sujet comporte 3 pages.**

Dans ce problème, vous allez écrire des classes permettant de réaliser un menu avec des propositions. Le programme final comprendra les fichiers : *MenuStandard.h*, *MenuStandard.cpp*, *MenuLettre.h*, *MenuLettre.cpp* et *main.cpp* dont vous devrez rédiger le contenu sur votre copie. Un indicateur de difficulté est indiqué entre [].

### **D) MenuStandard**

La classe **MenuStandard** permet de réaliser un menu avec une liste de propositions et une procédure de choix. Sa déclaration se fera dans le fichier *MenuStandard.h* et la définition de ses méthodes se fera dans le fichier *MenuStandard.cpp*.

La classe **MenuStandard** contient 2 attributs protégés :

- **nprop** de type entier
- **props** de type pointeur vers string

La classe **MenuStandard** contient les constructeurs et destructeurs publics suivants :

- **[facile]** Un constructeur sans paramètre. Ce constructeur initialise **nprop** à 0 et **props** à NULL
- **[facile]** Un constructeur à 2 paramètres : **n** de type entier et **propose** de type pointeur vers string. Ce constructeur initialise **nprop** à **n** et recopie le tableau **propose** de **n** éléments dans un tableau dynamique pointé par **props**.
- **[moyen]** Un constructeur par copie
- **[facile]** Un destructeur virtuel dans lequel le tableau pointé par **props** est détruit si nécessaire.

La classe **MenuStandard** contient les surcharges publiques d'opérateurs



suivantes :

- **[moyen]** surcharge de l'opérateur d'affectation =
- **[difficile]** surcharge de l'opérateur += prenant comme paramètre **uneProp** de type string. Cet opérateur ajoutera la proposition **uneProp** au tableau **props** et augmentera de 1 la valeur de **nprop**.

La classe **MenuStandard** contient les méthodes publiques suivantes :

- **[facile]demande**, sans paramètre, renvoyant un entier, virtuelle. Cette méthode demandera à l'utilisateur son choix et renverra ce choix. La demande devra être refaite tant que le choix n'est pas compris entre 0 et **nprop-1**.
- **[facile]affichePropositions**, sans paramètre, ne renvoyant rien, virtuelle. Cette méthode affiche pour chaque proposition, son numéro (son indice dans le tableau **props**) et le texte de la proposition. L'affichage comprendra une proposition par ligne.
- **[facile] nPropositions**, sans paramètre, renvoyant un entier. Cette méthode renvoie la valeur de **nprop**.
- **[facile] proposition**, avec un paramètre **i** de type entier, renvoyant un string. Cette méthode renvoie le texte de la proposition d'indice **i** du tableau **props**.
- **[facile] choix**, sans paramètre, renvoyant un entier. Cette méthode appelle la méthode **affichePropositions** puis renvoie le résultat de la méthode **demande**.

## **II) MenuLettre**

La classe **MenuLettre** hérite de la classe **MenuStandard**. Elle permet de réaliser un menu dont les options de choix sont des lettres au lieu de nombres. Sa déclaration se fera dans le fichier *MenuLettre.h* et définition dans le fichier *MenuLettre.cpp*.

La classe **MenuLettre** dérive publiquement de **MenuStandard** et contient les méthodes publiques suivantes :

- **[facile]** Un constructeur sans paramètre. Ce constructeur appelle le constructeur correspondant de **MenuStandard**.
- **[facile]** Un constructeur à 2 paramètres : **n** de type entier et **propose** de type pointeur vers string. Ce constructeur appelle le constructeur correspondant de **MenuStandard**.

- **[facile]** Un constructeur à 1 paramètre de type référence vers un objet de type **MenuStandard**. Ce constructeur appelle le constructeur par copie de **MenuStandard**.
- **[difficile]** Une méthode **demande**, sans paramètre, renvoyant un entier. Cette méthode demande à l'utilisateur de rentrer une lettre correspondant à la liste des choix possibles. On redemande tant que la lettre entrée ne correspond pas à un choix.
- **[moyen]** Une méthode **affichePropositions**, sans paramètre, ne renvoyant rien. Dans cette méthode, on affiche une proposition par ligne. Chaque proposition affichée devra être précédée de la lettre correspondant à cette proposition : a pour la première, b pour la deuxième, c pour la troisième, etc...

Pour l'écriture des méthodes **demande** et **affichePropositions**, on pourra utiliser le fait que

'b' = 'a' + 1, 'c' = 'b' + 1 = 'a' + 2, etc... et que  
 $\text{int}('b') - \text{int}('a') = 1$ , etc...

### III) main.cpp

**[moyen]** Dans ce fichier, on écrit la fonction **main**. Dans cette fonction, on crée **choixMenu**, un tableau statique de string à 2 éléments. Les éléments de ce tableau sont initialisés à "menu avec entiers" (1<sup>er</sup> élément) et "menu avec lettres" (2<sup>ème</sup> élément). Puis on crée un objet **init** de type **MenuStandard** en utilisant le constructeur à 2 paramètres et le tableau **choixMenu**. On déclare **choixInit** une variable de type entier et on lui affecte le résultat de l'appel de la méthode **choix** de l'objet **init**.

Puis, on crée un objet **lesChoix** de type **MenuStandard** en utilisant le constructeur sans paramètre. On ajoute à **lesChoix**, les 3 propositions suivantes : "lire fichier", "sauvegarder fichier" et "effacer fichier". Puis on crée un objet **lesChoixLettre** de type **MenuLettre** en utilisant le constructeur à 1 paramètre de **MenuLettre**.

On déclare la variable **choix** de type entier. Selon la valeur de **choixInit**, on affecte à **choix** le résultat de l'appel de la méthode **choix** de l'objet de type **MenuStandard** adéquat.

Enfin, on affiche la valeur de **choix**.

Université CLAUDE BERNARD- LYON 1 Portail SVT CC Terminal	21 Janvier 2010 UE phySVT S1
	(Durée 1h 30 mn) Calculatrices non programmables autorisées

### Optique (10 points)

#### Exercice 1 (8 points) Analyse de la vision très particulière d'un caméléon.

Tiré d'un article de Matthias Ott paru dans la recherche N°277 juin 1995, vol 26. Dossier présenté sur le site « L'oeil et la vision des vertébrés » par Claire König.

« Ses yeux bougent indépendamment l'un de l'autre, ce qui lui permet l'immobilité pour ne pas se faire repérer. Pour capturer ses proies il a la faculté d'accommoder très rapidement.

Le jet de sa langue pour attraper les proies est très rapide et doit être très précis. Le déploiement de sa langue peut se faire sur des distances très importantes de 2 à 3 fois sa propre taille.

L'oeil du caméléon a un punctum proximum de 8 cm et son amplitude dioptrique d'accommodation est de 33 dioptries. »

On donne l'expression de l'amplitude dioptrique d'accommodation  $A = \frac{1}{SR} - \frac{1}{SP}$

- 1- En déduire le punctum remotum du caméléon.
- 2- A quel défaut de l'œil humain cela correspond-il? Justifier.

On sait d'autre part que son œil est composé d'une cornée et d'un cristallin ayant des rayons de courbure respectifs  $S_1C_1$  et  $S_2C_2$ . Nous les assimilons à 2 dioptries sphériques convexes. La cornée sépare l'air d'un milieu aqueux d'indice  $n_1$  et le cristallin sépare le milieu d'indice  $n_1$  d'un milieu d'indice  $n_2$  avec  $n_2 < n_1$ .

- 3- Quels sont les signes de  $\overline{S_1C_1}$  et  $\overline{S_2C_2}$  ?
- 4- Compléter le schéma donné dans la feuille annexe : préciser schématiquement la forme des 2 dioptries et placer  $C_1$  et  $C_2$ . Placer les indices ( $1, n_1, n_2$ ) dans chaque milieu (respecter les valeurs numériques données ci-dessous).
- 5- Donner la formule de conjugaison de chaque dioptrie sphérique (A objet,  $A_1$  image de A à travers la cornée et  $A'$  image de  $A_1$  à travers le cristallin).
- 6- Rappeler la définition du foyer image d'un dioptrie sphérique.
- 7- Déterminer l'expression des distances focales  $\overline{S_1F'_1}$  et  $\overline{S_2F'_2}$ .
- 8- Donnez-en les valeurs numériques pour  $n_1 = 1,33$  et  $n_2 = 1,10$ .
- 9- En déduire la nature (dioptrie convergent ou divergent) de la cornée et du cristallin.
- 10- Placer les foyers image ( $F'_1$  et  $F'_2$ ) puis objet ( $F_1$  et  $F_2$ ) de chaque dioptrie sur votre schéma.

Conclusion : la réponse à la question 8 constitue la particularité de la vision du caméléon. L'association de ces 2 dioptries donne une fonction similaire à celle d'un téléobjectif !

Données :

$$\overline{S_1C_1} = 2mm \quad \overline{S_2C_2} = 1mm$$

$$\overline{S_1S_2} = 6mm$$

$$\overline{S_1E} = 11,1mm \quad E = \text{retine}$$

#### Exercice 2 (2points)

Nous allons considérer le cas d'une personne myope dont le punctum remotum est à 50 cm de son œil. A quelle distance maximale du miroir doit-elle se placer pour se coiffer ? Justifier votre résultat.

## Electricité (10points)

### Exercice 1 : Défibrillateur externe : un condensateur pour sauver une vie.

Un défibrillateur externe est l'appareil utilisé pour appliquer des chocs électriques à un patient dont le cœur est en fibrillation (contractions désordonnées des fibres musculaires). Le circuit destiné à produire un choc est constitué d'un condensateur de stockage d'énergie, d'un contacteur (K), et du patient.

Dans cet exercice on considère un appareil pour lequel la tension de charge est  $U = 1,81 \text{ kV}$ . On appelle  $C_1$  la capacité du condensateur. On assimilera la cage thoracique du patient adulte à un conducteur ohmique de résistance  $R = 50,0 \Omega$ . Le contacteur est un interrupteur permettant de contrôler l'administration du choc. On veut générer un choc dit à « haute énergie » de  $360 \text{ J}$ , qui est l'énergie emmagasinée dans le condensateur

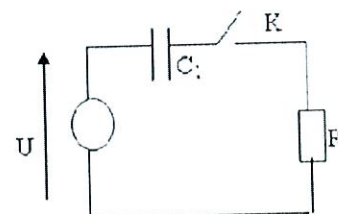
1- Quelle est la capacité  $C_1$  du condensateur permettant de stocker une énergie  $W$  de  $360 \text{ J}$  lorsqu'il est soumis à la tension de charge  $1,81 \text{ kV}$  ?

2- Un quart de cette énergie est transférée au patient pendant  $2 \text{ ms}$ . Quelle est la puissance  $P$  fournie par le condensateur ?

3- On change de procédé et l'on choisit un traitement dit « basse énergie » de  $90 \text{ joules}$ . On modifie alors la valeur de la capacité.

a- Quelle doit être la nouvelle valeur de capacité  $C$  ?

b- Pour l'obtenir on rajoute dans ce circuit une autre capacité  $C_2$ .  
Donner l'expression de la capacité  $C$  équivalente à  $C_1$  et  $C_2$  en série.  
Donner l'expression de la capacité  $C'$  équivalente à  $C_1$  et  $C_2$  en parallèle.  
Comment va-t-on alors placer le nouveau condensateur  $C_2$  pour obtenir l'énergie souhaitée de  $90 \text{ J}$  ?



c- Quelle est la valeur de la capacité  $C_2$  ?

4- Dans le cas où la résistance du condensateur est pratiquement nulle, quel est le courant  $I$  qui traverse le patient, l'interrupteur  $K$  étant fermé ?

### Exercice 2 : Le noyau d'uranium

Un noyau d'uranium possède une charge électrique  $Q = + 92e$ .

a- Quels seront la direction, le sens et la grandeur du champ électrique  $\vec{E}$  dû à ce noyau en un point  $M$  situé à une distance  $r = 10^{-10} \text{ m}$  de celui-ci ? Faire un schéma explicatif.

b- Quel sera le potentiel électrique  $V$  en ce même point  $M$  ?

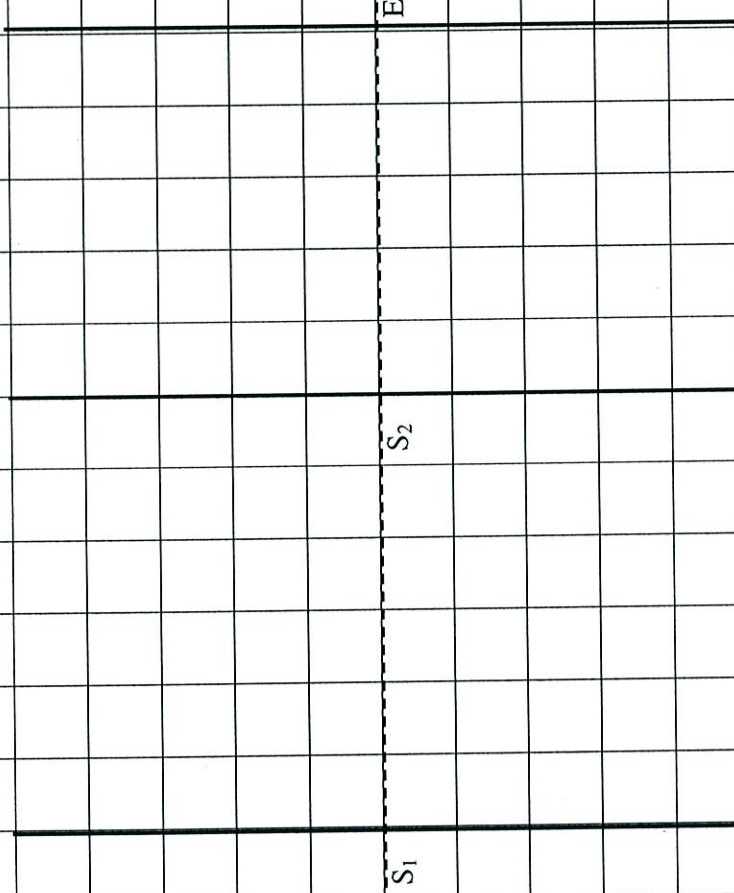
c- Quelle sera la force  $\vec{F}$  appliquée sur un électron placé en  $M$  ? Représenter  $\vec{F}$  sur votre schéma.

Données : charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et  $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$

N° Anonymat :

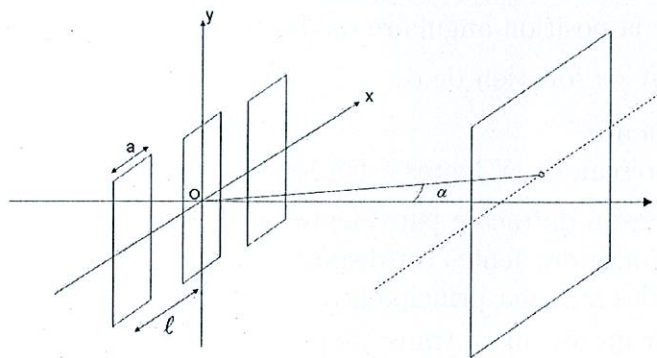
**A RENDRE AVEC LA COPIE**

1 carreau = 1mm



**Contrôle Terminal "Optique Physique et Spectroscopie I"**  
 (2H - sans documents - Calculatrice non programmable autorisée)

On considère un système diffractant constitué de 3 fentes fines, parallèles et équidistantes de  $\ell$  et chacune de largeur  $a$ . Le système est éclairé en transmission par une onde plane monochromatique de pulsation  $\omega$ , sous incidence normale. On observe l'intensité diffractée sur un écran placé à la distance  $D$  du plan contenant les fentes. La position des fentes est repérée par un repère  $Oxy$  tel qu'indiqué sur la figure.



**I. Diffraction par une fente**

D'après le principe de Huygens, le champ électrique diffracté par une seule fente  $F_i$  dans une direction repérée par un angle  $\alpha$  petit, (cf figure) s'écrit sous la forme :

$$E_i(\alpha) = E_0 e^{i\omega t} \int_{fente} e^{ik\alpha x} dx \quad (1)$$

où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le vecteur d'onde de l'onde incidente et  $\int_{fente}$  désigne une somme continue sur toutes les sources secondaires réparties dans la fente  $F_i$ .

1. Expliquez (en 2 phrases maximum), la raison physique pour laquelle l'expression (1) ne fait pas état de la variable  $y$ .
2. A partir de l'équation (1), donner l'expression du champ électrique diffracté dans la direction  $\alpha$  par la fente centrale  $F_2$  telle que  $-a/2 \leq x \leq a/2$ . En déduire l'intensité diffractée par la fente centrale  $I_2(\alpha)$  en fonction de  $a$ ,  $E_0$  et  $\alpha$ .
3. Représentez schématiquement l'intensité diffractée par une fente unique en précisant la position des minima d'intensité.

**II. Intensité diffractée par 3 fentes**

Le champ électrique produit par l'ensemble des 3 fentes est la somme discrète des champs électriques diffractés par chacune des 3 fentes :

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^3 E_i(\alpha) \quad (2)$$

1. (a) Donner les intervalles d'abscisse  $x$  sur lesquels les fentes  $F_1$  et  $F_3$  situées de part et d'autre de la fente centrale  $F_2$  sont définies.
- (b) Ecrire l'expression du champ électrique total diffracté par les 3 fentes dans la direction  $\alpha$ .
- (c) En déduire que l'intensité diffractée par les 3 fentes s'écrit sous la forme

$$I(\phi) = I_2(\alpha) \cdot (1 + 2\cos\phi)^2 \quad (3)$$

où  $I_2$  est l'intensité diffractée par une fente, déterminée dans la partie I. Que représente  $(1 + 2\cos\phi)^2 = K(\phi)$ ? Exprimer  $\phi$  en fonction de  $\alpha$ .

2. Afin de tracer le profil de l'intensité diffractée par les 3 fentes, on détermine dans un premier temps la position des extrema (minimum ou maximum) de la fonction  $K(\phi)$ .
  - (a) Donner l'expression de  $\frac{d}{d\phi}[K(\phi)]$ .
  - (b) Parmi les conditions sur  $\phi$  telles que  $\frac{d}{d\phi}[K(\phi)] = 0$ , l'une correspond à des maxima d'intensité (un maximum principal et un maximum secondaire) alors que l'autre correspond à un minimum. Identifier chacune de ces 2 conditions. En déduire l'intensité d'un maximum principal et celle d'un maximum secondaire, ainsi que leur position angulaire respective  $\alpha_M$  et  $\alpha_m$ . Donner la position angulaire  $\alpha_0$  des minima d'intensité.
  - (c) Tracer l'allure de  $K$  en fonction de  $\alpha$ .

### III. Diffraction par un réseau

On considère maintenant un réseau de  $N$  fentes éclairées, distantes de  $\ell$  et de largeur  $a$ .

1. A partir du profil d'intensité diffractée par 3 fentes, expliquer comment évolue ce profil au fur et à mesure que l'on ajoute des fentes au dispositif diffractant (stipuler ce qu'il advient des maxima secondaires et des maxima principaux).

L'intensité diffractée par un réseau en transmission éclairée sous incidence normale s'écrit sous la forme :

$$I(\alpha) = \frac{I(0)}{N^2} \cdot \frac{\sin^2(N\pi\alpha\ell/\lambda)}{\sin^2(\pi\alpha\ell/\lambda)} \cdot \frac{\sin^2(\pi\alpha a/\lambda)}{(\pi\alpha a/\lambda)^2} \quad (4)$$

2. Identifier dans l'expression (4) les fonctions de diffraction et d'interférences par  $N$  fentes (justifier votre réponse).
3. On rappelle que le pouvoir de résolution  $PR$  d'un réseau est donné par  $PR = pN$  où  $p$  est l'ordre d'interférence.  $PR$  caractérise l'aptitude d'un réseau à séparer 2 raies proches d'une longueur d'onde moyenne  $\lambda$  et spectralement distantes de  $\Delta\lambda$  :  $PR = \lambda/\Delta\lambda$ .
  - (a) A partir de l'expression (4), donner la position angulaire  $\alpha_{max}$  des maxima d'interférences d'ordre  $p$ . En déduire l'expression du pouvoir de résolution  $P.R.$  en fonction de  $N$ ,  $\alpha$ ,  $\ell$  et  $\lambda$ .
  - (b) Pour un réseau comportant 25000 traits et  $\ell = 10\mu\text{m}$ , quelle(s) longueur(s) d'onde appartenant au domaine du visible ( $390 \leq \lambda \leq 790$  nm) émerge(nt) sous l'angle  $\alpha = 0.1$  radian.
  - (c) Calculer  $PR$ . Quel est le plus petit écart en longueur d'onde que peut résoudre le réseau autour de 500 nm ?
  - (d) La largeur angulaire à mi-hauteur d'une radiation transmise par un réseau à  $N$  fentes est donnée par  $\delta\alpha_R = \lambda/(N\ell)$ . En déduire la largeur spectrale  $\delta\lambda_R$  (en nm) d'une raie de longueur d'onde  $\lambda = 500$  nm diffractée par le réseau.

**MECANIQUE ET CAPTEURS POUR SCIENCES PHYSIQUES**

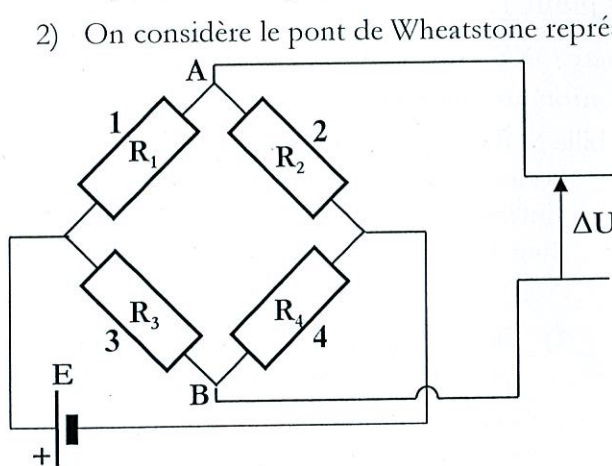
Durée totale : 2h

calculatrice non programmable autorisée

**A) Etude d'une déformation avec des jauges de contrainte (10 points)**

Dans ce problème on utilisera une ou plusieurs jauges de contrainte identiques. Le montage de conditionnement sera du type pont de Wheatstone.

- 1) Décrire brièvement comment est constituée une jauge de contrainte. Quelle grandeur physique permet-elle de mesurer ? Quelle grandeur électrique fournit-elle ? Est-ce un capteur actif ou passif ?



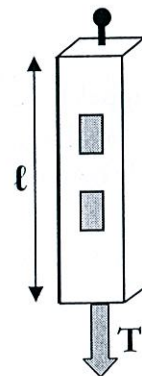
- 2) On considère le pont de Wheatstone représenté sur la figure. On numérote 1, 2, 3, 4 les quatre branches du pont et on appelle  $R_i$  la résistance de la branche numéro  $i$ . La tension d'alimentation est  $E$ . Calculer la tension de sortie  $\Delta U = U_A - U_B$  en fonction de  $E$  et des résistances  $R_i$ .
- 3) A quelle condition le pont est-il en équilibre ( $\Delta U = 0$ ) ? Vérifier que si toutes les résistances sont égales on est bien dans cette situation.

4) On se place dans une situation où les résistances  $R_i$  sont toutes voisines d'une valeur commune  $R_0$ .  $R_i = R_0 + \Delta R_i$  avec  $|\Delta R_i| \ll R_0$ . Montrer que la tension  $\Delta U$  peut s'écrire de façon approchée :

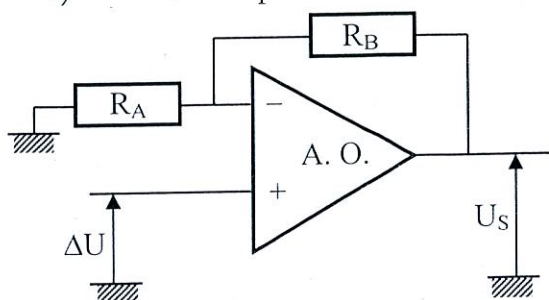
$$\Delta U = \frac{E}{4R_0} (\Delta R_2 + \Delta R_3 - \Delta R_1 - \Delta R_4).$$

- 5) On veut mesurer l'élongation  $\Delta \ell$  d'une tige métallique de longueur  $\ell = 20$  cm et de section  $1 \text{ cm}^2$ , soumise à une traction  $T$ . On dispose de deux jauges de contrainte collées sur la tige dont la résistance  $R_c$  varie suivant la loi :  $R_c = R_0 \left( 1 + K \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)$ . Les deux

autres résistances du pont sont deux résistances fixes de valeur  $R_0$ . Dans quelles branches du pont doit on placer les deux jauges de contrainte pour avoir un signal  $\Delta U$  proportionnel à  $\Delta \ell$  et de même signe ? Cette configuration étant réalisée, quelle est la relation entre  $\Delta U$  et  $\Delta \ell$  ? On donne :  $E = 5$  V,  $R_0 = 120 \Omega$ ,  $K = 2$ ,  $\ell = 20$  cm, calculer  $\Delta U$  pour  $\Delta \ell = 1 \mu\text{m}$ .



- 6) En sortie du pont de Wheatstone on réalise le montage électronique ci-dessous.



Comment doit-on choisir  $R_A$  et  $R_B$  pour avoir une tension de sortie  $U_S$  permettant une lecture directe avec une sensibilité  $S$  de  $1 \text{ mV}/\mu\text{m}$  ?

- 7) Des erreurs de mesure peuvent apparaître car la résistance  $R_c$  d'une jauge dépend non seulement de l'élongation relative  $\Delta \ell / \ell$ , mais aussi de la température  $\theta$  ( $^\circ\text{C}$ ) suivant la

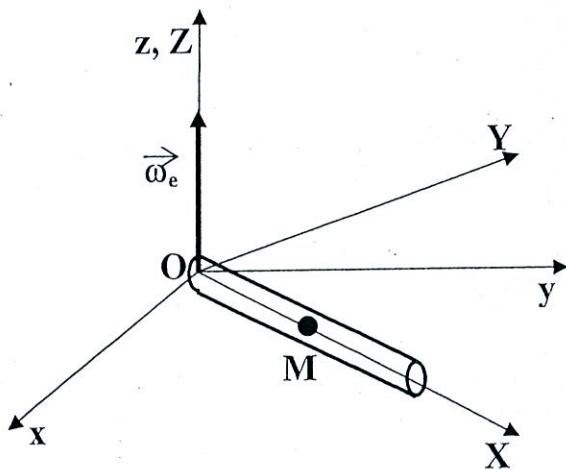


loi :  $R_c = R_0 \left( 1 + K \frac{\Delta \ell}{\ell} + a(\theta - \theta_0) \right)$  où  $a$  est une constante numérique et  $\theta_0$  une

température de référence correspondant à une température ambiante moyenne. On dispose de deux jauges de contrainte. L'une, appelée jauge active, est collée rigidement sur la tige. L'autre, dite jauge passive, est placée en contact thermique avec la tige mais sans être collée, de sorte que les variations de longueur de la tige ne lui sont pas transmises (contact thermique obtenu avec une pâte souple et élastique). Montrer que si l'on place les deux jauges dans des branches convenables du pont de Wheatstone, que l'on précisera, on peut mesurer l'élongation  $\Delta \ell$  sans être sensible à la température  $\theta$  de la tige ni à ses variations.

### B.) Dynamique dans un repère tournant (10 points)

On considère un repère  $Oxyz$  galiléen et un repère  $OXYZ$  qui tourne à vitesse angulaire  $\omega_e$  constante autour de l'axe  $Oz$  ( $Oz$  et  $OZ$  sont confondus,  $\vec{\omega}_e = \omega_e \vec{e}_z$ ). Un tube creux d'axe  $OX$  tourne avec le repère  $OXYZ$  (voir figure). Une bille  $M$  de masse  $m$ , que l'on considèrera comme



ponctuelle, peut se déplacer sans frottement à l'intérieur de ce tube. Son mouvement sera donc limité à la seule direction  $OX$ . On notera  $X(t)$  sa position et  $V_x(t)$  sa vitesse à l'instant  $t$ .

- 1) Dans le repère tournant  $OXYZ$  montrer que la force d'inertie d'entraînement qui s'exerce sur  $M$  s'écrit :  $\vec{f}_{ie} = m\omega_e^2 X \vec{e}_x$ . Comment s'écrit la force d'inertie de Coriolis  $\vec{f}_{ic}$  qui s'exerce sur la bille  $M$ ? Contribue-t-elle au mouvement suivant  $OX$ ?

- 2) Le point  $M$  est relié à l'origine  $O$  par un ressort de raideur  $k$  (non représenté sur la figure) qui exerce sur  $M$  une force de

rappel  $\vec{F} = -k(X - X_0) \vec{e}_x$ . La position  $X_0$  correspond à la longueur du ressort au repos.

Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique pour  $M$  dans le repère  $OXYZ$  (on se limitera à la composante suivant  $OX$  de cette équation).

- 3) Dans la suite du problème on se placera dans la situation  $\omega_e < \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

a) Déterminer la position d'équilibre  $X_1$  de  $M$  sur l'axe  $OX$ .

b) Cet équilibre est-il stable ou instable?

- 4) Les conditions initiales, à  $t = 0$ , sont  $X(0) = X_0$  et  $V_x(0) = 0$ .

a) Montrer que le mouvement de  $M$  pour  $t > 0$  est un mouvement harmonique oscillant dont on déterminera la pulsation  $\Omega$ .

b)  $X(t)$  s'écrit :  $X(t) = X_1 + \Delta X \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$ . Que vaut l'amplitude d'oscillation  $\Delta X$  (en valeur absolue)?

- 5) Que faudrait-il ajouter pour que la bille se stabilise à  $t$  grand en  $X = X_1$ ?

- 6) Que se passe-t-il quand  $\omega_e$  augmente jusqu'à atteindre la valeur  $\Omega_0$  ou même la dépasser?

**Licence de physique**  
**UE PHY3005L : « Thermodynamique Classique 2 »**  
**Epreuve écrite de thermodynamique - 1<sup>ère</sup> session**

**Durée 2h00**

*Les documents sont interdits*  
*Les calculatrices sont interdites*

On se propose d'étudier l'évolution de la vitesse du son dans un gaz parfait paramagnétique soumis à une induction magnétique  $\vec{B}$ .

**A-** Dans cette première partie on étudiera les chaleurs molaires et la vitesse du son en l'absence d'induction magnétique. On considère une mole d'un fluide. Les capacités calorifiques à pression et à volume constants  $C_p$  et  $C_v$  sont donc les chaleurs molaires. La vitesse du son dans ce fluide de viscosité négligeable est  $\omega$  tel que  $\omega^2 \cdot \rho \cdot \chi_s = 1$ , où  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $\chi_s$  le coefficient de compressibilité isentropique.

- 1) Donner les expressions de  $dS$  en utilisant les variables indépendantes  $T$  et  $p$ , puis les variables indépendantes  $T$  et  $V$ .
- 2) En déduire  $C_p$ ,  $C_v$  et  $\gamma$  en fonction de  $T$  et des dérivées partielles de  $S$ .
- 3) a) Exprimer  $dF$ , la différentielle de la fonction d'Helmholtz  $F$ , en utilisant les variables  $V$  et  $T$ .  
 b) Trouver une relation entre  $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T$  et  $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$ .  
 c) En déduire que pour un gaz parfait  $C_v$  ne dépend que de  $T$ .
- 4) a) De la même manière, exprimer  $dG$ , la différentielle de la fonction de Gibbs, en fonction des variables  $V$  et  $T$ .  
 b) Trouver une relation entre  $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_p$  et  $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p$ .  
 c) En déduire que pour un gaz parfait  $C_p$  ne dépend que de  $T$ .
- 5) a) On rappelle la relation de Reech pour un fluide :  $\frac{C_p}{C_v} = \gamma = \frac{\chi_T}{\chi_s}$ . En déduire l'expression de  $\chi_s$  pour un gaz parfait.  
 b) Donner l'expression de la vitesse du son  $\omega$ , en fonction de  $\gamma$ ,  $R$ ,  $T$  et  $\mathcal{M}$ , où  $\mathcal{M}$  est la masse molaire du gaz.

T.S.V.P

B- On étudie maintenant ce gaz paramagnétique, que l'on considère comme parfait, lorsqu'il est soumis à une induction magnétique  $B$  non nulle. Les chaleurs molaires  $C_p(T,B)$  et  $C_v(T,B)$  sont maintenant des fonctions de  $T$  et de  $B$ . Pour  $B=0$ , on notera ces chaleurs molaires  $C_{p0}$  et  $C_{v0}$  et leur rapport sera noté  $\gamma_0$ , de plus on considérera ces quantités comme indépendantes de  $T$ .

En présence de  $B$ , le gaz présente une aimantation  $M$  tels que  $M = \frac{aB}{T}$ , où  $a$  est une constante positive. Lors d'une transformation élémentaire réversible, ( $dV$ ,  $dM$ ), le gaz reçoit le travail élémentaire  $\delta W = -p.dV + B.dM$ .

- 1) On utilise comme potentiel thermodynamique la fonction de Helmholtz généralisée  $F' = U - TS - BM$ .
  - a) Ecrire la différentielle  $dF'$  de  $F'$  en fonction des variables  $T$ ,  $V$ ,  $B$ .
  - b) Donner l'expression de  $\left(\frac{\partial F'}{\partial B}\right)_{V,T}$ .
  - c) En déduire l'expression de  $F'$  sous la forme d'une fonction de  $B$  et de  $T$ , que l'on explicitera, et d'une fonction de  $T$  et de  $V$  que l'on n'explicitera pas.
  - d) En déduire l'entropie  $S(B,T,V)$  du gaz. On notera  $S_0(T,V)$  l'entropie du gaz pour  $B=0$ .
  - e) Donner la nouvelle formule de  $C_v(T,B)$  en fonction de  $a$ ,  $B$ ,  $T$  et  $C_{v0}$ .
- 2) On utilise maintenant la fonction de Gibbs généralisée  $G' = U + pV - TS - BM$ .
  - a) Ecrire la différentielle  $dG'$  de  $G'$  en fonction des variables  $T$ ,  $p$ ,  $B$ .
  - b) En déduire l'expression de  $G'$  sous la forme d'une fonction de  $B$  et de  $T$ , que l'on explicitera, et d'une fonction de  $T$  et de  $p$  que l'on n'explicitera pas.
  - c) En déduire l'entropie  $S(B,T,p)$  du gaz. On notera  $S_1(T,p)$  l'entropie du gaz pour  $B=0$ .
  - d) Donner la nouvelle formule de  $C_p(T,B)$  en fonction de  $a$ ,  $B$ ,  $T$  et  $C_{p0}$ .
- 3) Donner l'expression de  $\gamma(T,B)$  en fonction de  $a$ ,  $B$ ,  $T$ ,  $C_{p0}$  et  $C_{v0}$ .
- 4) On cherche maintenant à évaluer la quantité  $\Delta\omega/\omega$  où  $\Delta\omega$  est la variation de la vitesse du son due à l'application du champ  $B \neq 0$ . On s'intéressera en particulier au signe de  $\Delta\omega/\omega$ .
  - a) Exprimer  $\Delta\omega/\omega$  en fonction de  $\Delta\gamma/\gamma$ .
  - b) Exprimer  $\Delta\gamma/\gamma$  en fonction de  $a$ ,  $B$ ,  $T$ ,  $C_{p0}$  et  $C_{v0}$ .
  - c) Déterminer le signe de  $\Delta\omega/\omega$ .
  - d) Que pouvez-vous dire de l'évolution de la vitesse du son dans un gaz paramagnétique lorsqu'il est soumis ou non à une induction magnétique  $B$  ?

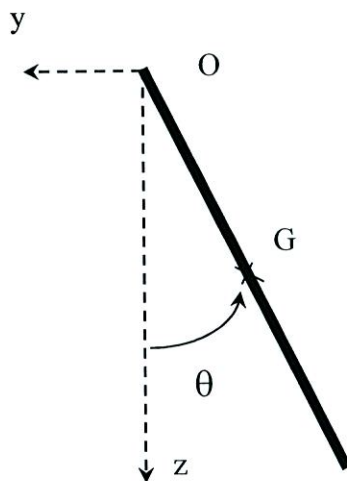
*Correction d'erreur dans l'énoncé :*

*"variables  $T, p, B$ " et non pas  $T, V, B$*

1.5 heures (sans document)  
Calculatrices simples autorisées.

### Pendule pesant

On considère une barre de masse  $m$  et de longueur  $L$  pouvant osciller librement autour d'une de ses extrémités fixe  $O$ . On note  $G$  son centre de masse et  $\theta$  l'écart à sa position d'équilibre. On note  $g$  l'accélération de la pesanteur.



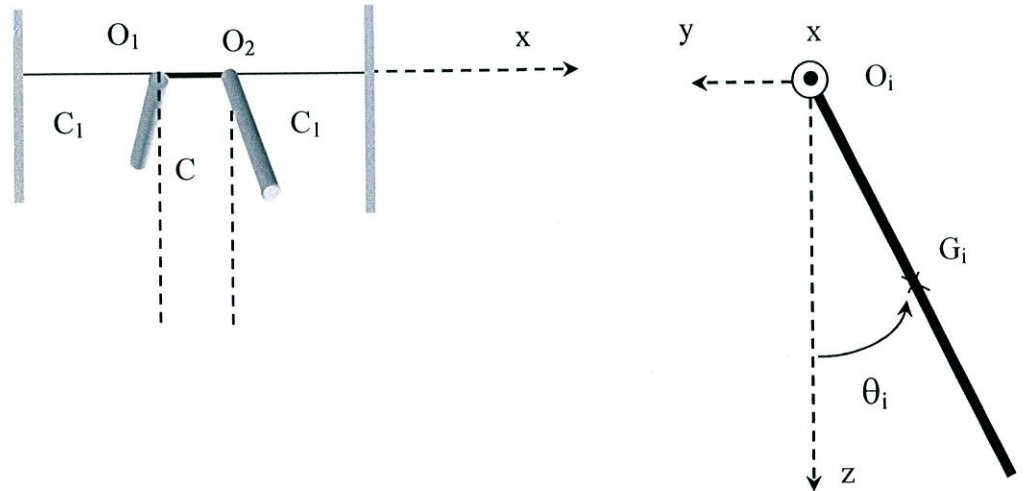
- 1- Donnez  $I$  le moment d'inertie de la barre par rapport à  $O$  en fonction de  $m$  et  $L$ .
- 2- Ecrire  $E_c$  l'énergie cinétique de la barre en fonction de  $m$ ,  $L$  et  $\frac{d\theta}{dt}$ .
- 3- Ecrire  $E_p$  l'énergie potentielle de pesanteur de la barre en fonction de  $m$ ,  $L$ ,  $g$  et  $\theta$ .
- 4- Ecrire l'équation de Lagrange pour le degré de liberté  $\theta$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement.
- 5- On se place dans l'hypothèse des petits mouvements, réécrire cette équation et donner la pulsation propre  $\Omega_0$  de cet oscillateur. Ecrire la solution  $\theta(t)$ .

### Pendules pesants couplés

Deux pendules pesants identiques (masse  $m$  et longueur  $L$ ) sont attachés sur un fil en  $O_1$  et  $O_2$ . Le fil a ses extrémités fixes. Le fil est de constante de torsion  $C$  entre les deux pendules et  $C_1$  dans la partie qui le relie aux bords. A l'instant initial les deux pendules sont verticaux.

La figure représente les pendules le long du fil pris pour axe  $x$  et le  $i^{\text{ème}}$  pendule oscillant autour de  $O_i$  et de centre de masse  $G_i$ . L'écart à l'équilibre est noté  $\theta_i$ . ( $i=1,2$ ).

- 1- Ecrire l'énergie cinétique totale du système.
- 2- Ecrire l'énergie potentielle totale du système et former le Lagrangien.
- 3- Ecrire le système d'équations de Lagrange vérifié par les degrés de liberté  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



On introduit la forme des solutions  $\theta_i = \Theta_i \exp j(\omega t + \varphi)$  et on se place dans l'hypothèse des petits mouvements.

4- Montrer qu'en utilisant cette forme de solutions on arrive au système d'équations

$$\begin{cases} (\Omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)\Theta_1 - \mu^2\Theta_2 = 0 \\ -\mu^2\Theta_1 + (\Omega_0^2 + \lambda^2 - \omega^2)\Theta_2 = 0 \end{cases}$$

Donner les valeurs de  $\lambda$  en fonction de  $C$ ,  $C_1$ ,  $m$  et  $L$ , et de  $\mu$  en fonction de  $C$ ,  $m$  et  $L$ . ( $\Omega_0$  est la pulsation propre trouvée dans la première partie du problème).

- 5- Extraire de ces équations les pulsations propres du système mécanique à deux pendules que l'on notera  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\omega_1 > \omega_2$ )
- 6- Décrire ces deux modes propres : lequel est une vibration en phase ? en opposition de phase ?

# Université Claude Bernard Lyon 1

## UE PHY3008L, Optique et électromagnétisme 2

Lundi 11 Janvier 2010, Durée 2 heures

Calculatrices autorisées, tout document interdit. On rappelle les équations de Maxwell reliant les 4 vecteurs composant une onde électromagnétique  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  et les densités volumique de charges libres  $\rho$  et surfacique de courants libres  $j$  :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{div}(\vec{D}) = \rho; \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \text{div}(\vec{B}) = 0;$$

### 1 Interféromètre de Fabry Péro, 5pts

On considère un interféromètre de Fabry-Pérot constitué de deux miroirs identiques séparés par une lame d'air ( $n=1$ ). Il est éclairé avec une source de lumière étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Les coefficients de réflexion en intensité des miroirs sont notés  $R$ .

1. Faire le schéma de l'interféromètre de Fabry-Pérot.
2. Pour un rayon faisant un angle d'incidence  $i$  avec la normale au miroir d'entrée, calculer la différence de marche  $\delta$  entre deux rayons transmis successifs en fonction de  $i$  et de la distance entre les 2 miroirs  $e$  et en déduire le déphasage  $\phi$ .
3. Etablir la formule donnant l'intensité transmise en fonction du déphasage  $I(\phi)$ . On notera  $E_0$  l'amplitude du premier rayon transmis,  $r$  le coefficient de réflexion en amplitude et  $R$  le coefficient de réflexion en intensité.
4. Calculer la largeur à mi-hauteur d'un pic d'interférence  $\Delta\phi$  en fonction de  $R$ .

### 2 Vecteur de Poynting, 5 pts

On considère une onde électromagnétique plane sinusoïdale de pulsation  $\omega$  se propageant dans le vide.

1. Rappeler l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{S}$  en fonction de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sans se placer en notation complexe (i.e.  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont des grandeurs réelles), et donner son sens physique.
2. Etablir l'expression de la valeur instantanée (en fonction du temps  $t$ ) de  $\vec{S}$  en fonction de  $c$  (célérité de la lumière dans le vide),  $\epsilon_0$ ,  $E(t)$  (module de  $\vec{E}$ ) et  $\vec{k}$  (vecteur d'onde). En déduire  $\langle \vec{S} \rangle$ , la valeur moyenne de  $\vec{S}$  par rapport au temps en fonction de  $c$ ,  $\epsilon_0$ ,  $E_0$  (amplitude de  $E(t)$ ) et  $\vec{k}$ .
3. On considère un faisceau laser (considéré comme une onde plane) d'une puissance de 20GW et d'un diamètre de 2mm. Calculer  $E_0$  et  $B_0$ .
4. Calculer  $E_0$  et  $B_0$ , si le même faisceau laser se propage dans un verre d'indice de réfraction 1,6 qui ne possède pas de propriétés magnétiques.

### 3 Réflexion totale, 7 points

On envoie sur la surface de séparation de deux milieux diélectriques une onde électromagnétique sinusoïdale (longueur d'onde  $\lambda$ ), plane et uniforme dont la direction de propagation fait un angle  $\theta$  avec la normale à la surface de séparation des deux milieux ( $z = 0$ ) (figure ci dessous). Les deux milieux sont tels que  $n_1 > n_2$ . On rappelle les relations de Fresnel :

$$r_{//} = \frac{n_2 \cos(\theta) - n_1 \cos(\phi)}{n_2 \cos(\theta) + n_1 \cos(\phi)} \text{ et } r_{\perp} = \frac{n_1 \cos(\theta) - n_2 \cos(\phi)}{n_1 \cos(\theta) + n_2 \cos(\phi)}$$

où  $\phi$  est l'angle de réfraction dans le milieu 2.

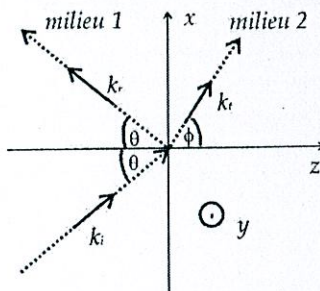
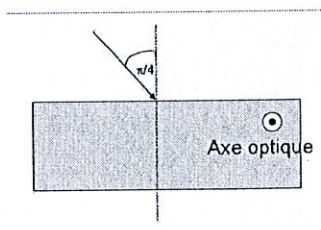


Figure 1

1. Peut-on obtenir dans ce cas le phénomène de réflexion totale et si oui, donner l'angle limite  $\theta_l$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  au delà duquel, on obtient ce phénomène.
2. Ecrire les coordonnées des vecteurs d'onde  $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t$  en fonction uniquement de  $\theta, n_1, n_2, \lambda$  et  $k_0$  (vecteur d'onde qu'aurait cette même onde dans le vide).
3. Qu'advient-il des coordonnées de  $\vec{k}_t$  lorsque  $\theta > \theta_l$ . Discuter dans ce cas de la structure de l'onde transmise.
4. Calculer dans ce cas  $\|r_{//}\|$  et  $\|r_{\perp}\|$  et commenter le résultat.

#### 4 Optique anisotrope, 3 points

Une lumière non polarisée se propageant dans le vide est incidente sur une lame à faces parallèles de calcite (matériau anisotrope tel que  $n_e = 1,49$  et  $n_o = 1,66$ ). L'axe optique est parallèle aux faces de la lame et perpendiculaire au plan d'incidence (figure ci-dessous). L'angle d'incidence est proche de  $\pi/4$



1. Représenter qualitativement, en expliquant votre raisonnement, la direction des rayons lumineux dans la lame et à la sortie de la lame, en précisant leur direction de polarisation
2. Calculer les angles de réfraction des rayons ordinaires et extraordinaires dans la lame.

## Examen d' ELECTRONIQUE

(2h avec documents et calculatrices)

### Exercice I (4 pts) :

Une résistance  $R = 5 \Omega$  est alimentée par une tension  $v(t)$  de période  $T$  et telle que :  
 $v(t) = U_1 = 10$  Volts , pour  $0 < t < T/3$  et :  $v(t) = U_2 = 3$  Volts, pour  $T/3 < t < T$

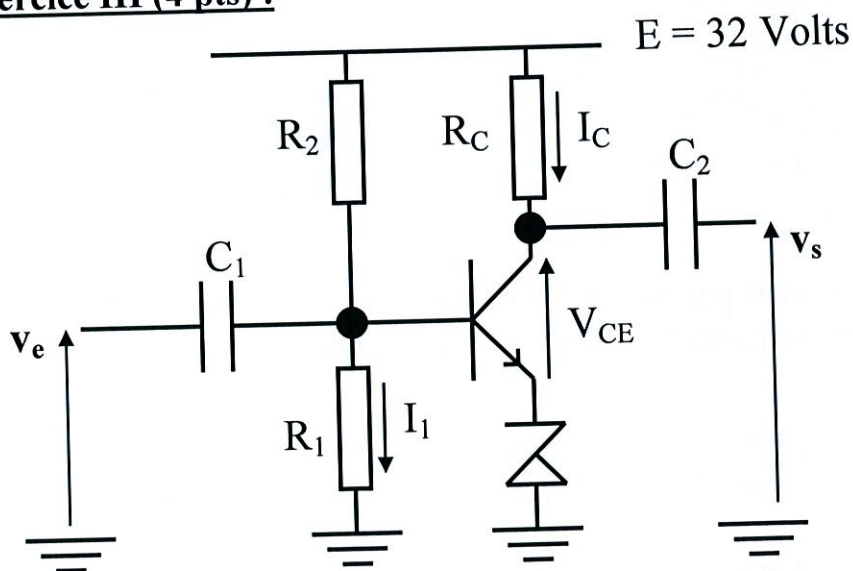
- 1) Calculer la puissance moyenne  $P$  dissipée dans  $R$
- 2) Que devient  $P$  si on place en série avec  $R$  une inductance pure  $L$  telle que  $L \gg RT$  ?

### Exercice II (4 pts) :

Un filtre a pour fonction de transfert :  $\underline{T} = \frac{1 + j \cdot \left( \frac{F}{F_1} \right)}{1 + j \cdot \left( \frac{F}{F_2} \right)}$  , avec:  $F_1 = 1$  kHz et  $F_2 = 9$  kHz

- 1) Tracer les courbes de Bode asymptotiques (module et phase) de ce filtre.
- 2) Pour quelle fréquence  $F^*$  le déphasage  $\Phi$  entre  $\underline{V}_e$  et  $\underline{V}_s$  est-il maximal ?  
 Quelle est la valeur de  $\Phi$  pour  $F = F^*$  ?

### Exercice III (4 pts) :



#### Transistor :

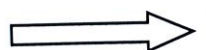
$\beta = 120$  ;  $V_0 = 0,7$  Volt  
 $h_{12}$  et  $h_{22}$  négligeables  
 $h_{11} = h = \frac{1}{30 \cdot I_B}$

#### Diode Zener :

$V_Z = 7,5$  Volts  
 Résist. dynamique :  $r = 10 \Omega$

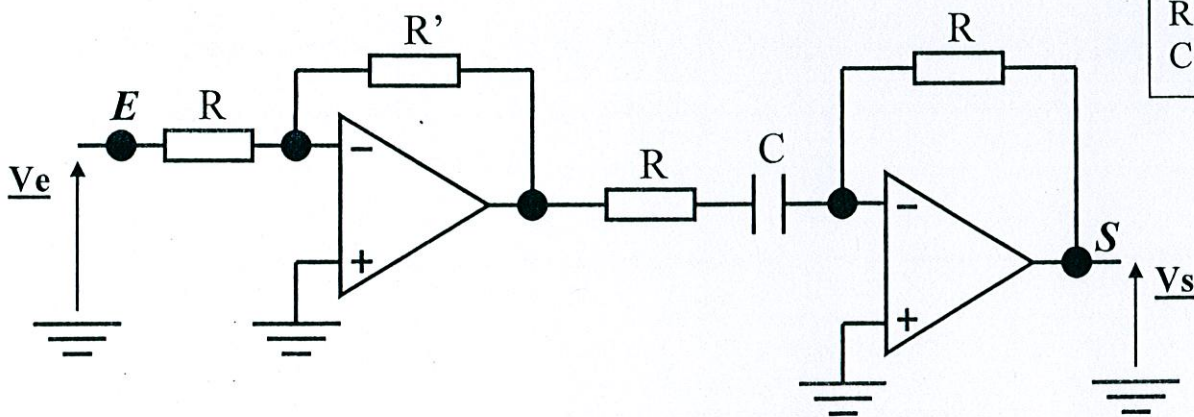
- 1) On veut obtenir en régime continu :  $I_C = 10$  mA ,  $I_1 = 1$  mA et  $V_{CE} = 12,5$  Volts.  
 Montrer que l'on doit avoir :  $R_C = 1,2$  k $\Omega$  ,  $R_1 = 8,2$  k $\Omega$  et  $R_2 = 22$  k $\Omega$ .

- 2) Etablir le schéma équivalent dynamique du montage. En déduire le gain en tension à vide de cet amplificateur (on néglige les impédances de  $C_1$  et de  $C_2$ ).





**Exercice IV (4 pts) :**



- 1) Les deux amplificateurs opérationnels sont supposés parfaits.  
Montrer que la fonction de transfert du montage a pour expression :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = T_0 \cdot \frac{j \cdot \left( \frac{F}{F_c} \right)}{1 + j \cdot \left( \frac{F}{F_c} \right)}, \text{ avec: } T_0 = 10 \text{ et: } F_c = 106 \text{ kHz}$$

- 2) On débranche la source de tension  $\underline{V}_e$  et on connecte entre les points  $E$  et  $S$  une inductance pure  $L = 13,5 \text{ mH}$ . Montrer que le montage constitue un oscillateur sinusoïdal dont on calculera la fréquence.

**Questions diverses (4 pts) :**

- 1) Que se passe-t-il si on intervertit par erreur les connexions + et - d'un amplificateur opérationnel fonctionnant dans un montage de type « amplificateur inverseur » ?
- 2) Vous devez mesurer la résistance de sortie d'un amplificateur à transistor de type « collecteur commun ». Indiquez la méthode de mesure et les précautions à prendre.
- 3) Un montage stabilisateur de tension présente un taux de stabilisation aval ( $R_s$ ) très faible. Quelle méthode utiliseriez-vous pour mesurer précisément ce paramètre ?
- 4) On vous demande de mesurer la fréquence d'un oscillateur sinusoïdal par la méthode dite des « courbes de Lissajous ». Principe et intérêt de cette méthode ?

## Eléments de Mécanique Quantique

(Aucun document autorisé, calculatrices interdites)

Durée 2h

### Question de Cours : Moment cinétique et addition de deux moments cinétiques

(sur 6 points)

- 1) Quelles sont les relations de commutation qui caractérisent les trois composantes  $J_x, J_y, J_z$  d'un opérateur moment cinétique  $\mathbf{J}$  ?
- 2) Dans le cas particulier du moment cinétique orbital  $\mathbf{L}$  d'une particule, démontrer une de ces relations de commutation, par exemple  $[L_x, L_y] = ?$
- 3) Démontrer que l'on peut trouver une base propre commune à  $J^2$  et  $J_z$ .

### Problème : Molécule d'ammoniac

(sur 14 points)

Dans un modèle à une dimension la molécule d'ammoniac  $\text{NH}_3$  peut être modélisée par un double puits de potentiel symétrique (voir fig. 1). La variable  $x$  représente la position du plan contenant les trois atomes d'hydrogène, l'origine étant occupée par l'atome d'azote. Dans ce modèle on trouve, comme états de plus basse énergie, un état  $|\Psi_S\rangle$  correspondant à une fonction d'onde symétrique, d'énergie  $E_S = \hbar(\omega_0 - \delta)$ , et un état  $|\Psi_A\rangle$  correspondant à une fonction d'onde antisymétrique, d'énergie voisine mais un peu supérieure  $E_A = \hbar(\omega_0 + \delta)$ .

La figure 2 présente l'allure des fonctions d'onde  $\Psi_S(x)$  et  $\Psi_A(x)$ . Dans le puits de droite ( $x > 0$ ) les deux fonctions sont très voisines :  $\Psi_S(x) \approx \Psi_A(x)$ . Dans le puits de gauche ( $x < 0$ ) elles sont voisines en module et de signes opposés :  $\Psi_S(x) \approx -\Psi_A(x)$ .

Tous les autres états du système sont à des énergies bien supérieures. Dans tout le problème on se placera donc dans l'espace des états à deux dimensions  $E$  engendré par  $|\Psi_S\rangle$  et  $|\Psi_A\rangle$ . On appellera base B la base  $\{|\Psi_S\rangle, |\Psi_A\rangle\}$

- 1) Ecrire la matrice de l'Hamiltonien  $H$  dans la base B
- 2) On s'intéresse aux deux états  $|\Psi_D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_S\rangle + |\Psi_A\rangle)$  et  $|\Psi_G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_S\rangle - |\Psi_A\rangle)$ 
  - a. A quelles configurations de la molécule d'ammoniac correspondent les états  $|\Psi_D\rangle$  et  $|\Psi_G\rangle$  ?
  - b. A  $t = 0$  le système est dans l'état  $|\Psi_G\rangle$ . Ecrire l'état du système  $|\Psi(t)\rangle$  à l'instant  $t$ .
  - c. Quelle est la probabilité  $\mathcal{P}(t)$  que le système soit dans l'état  $|\Psi_D\rangle$  à l'instant  $t$  ? On pourra écrire  $|\Psi(t)\rangle$  en fonction des kets  $|\Psi_D\rangle$  et  $|\Psi_G\rangle$ . Tracer la courbe  $\mathcal{P}(t)$  en fonction de  $t$  et commenter la signification physique de ce résultat.

- 3) La molécule  $\text{NH}_3$  présente un excès de charge positif  $q$  au niveau du plan des hydrogènes et un excès de charge négatif  $-q$  sur l'atome d'azote. Avec les notations de l'énoncé son moment dipolaire électrique s'écrit  $D = qX$  où  $X$  désigne l'opérateur position (voir fig. 3).
- Ecrire la matrice représentant l'opérateur dipôle électrique  $D$  dans la base  $B$ . On posera  $x_0 = \langle \Psi_A | X | \Psi_S \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_A(x) \cdot x \cdot \Psi_S(x) dx$  et  $d_0 = qx_0$ .
  - Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $D$  ?
- 4) La molécule d'ammoniac est maintenant placée dans un champ électrique  $\vec{E} = E\vec{e}_x$  homogène, uniforme, parallèle à  $Ox$ . L'énergie d'interaction du dipôle électrique  $D$  avec le champ  $E$  est  $W = -D E = -qX E$ .
- Montrer que, dans la base  $B$ , la matrice représentant l'Hamiltonien de la molécule de  $\text{NH}_3$  en présence de  $E$  s'écrit :  $H = \hbar \begin{pmatrix} \omega_0 - \delta & -\eta \\ -\eta & \omega_0 + \delta \end{pmatrix}$  avec  $\eta = qx_0 E / \hbar$ .
  - Calculer les énergies propres du système, que l'on notera  $E_+$  et  $E_-$  (on appellera  $E_+$  la plus petite des deux). Représenter le diagramme des énergies propres  $E_+$  et  $E_-$  en fonction de  $E$ .
  - Chercher le vecteur propre  $|\Psi_+\rangle$  associé à  $E_+$ . Pour conduire ce calcul on posera :  $\frac{\eta}{\delta} = \tan \theta$ . Les composantes de  $|\Psi_+\rangle$  dans la base  $B$  s'exprimeront simplement à partir des fonctions trigonométriques de  $\theta/2$ .
  - Sans refaire un calcul complet, donner l'expression du second vecteur propre  $|\Psi_-\rangle$ . Vers quels kets tendent  $|\Psi_+\rangle$  et  $|\Psi_-\rangle$  quand  $E \rightarrow 0$  ? quand  $E \rightarrow +\infty$  ?
  - Calculer, pour les états  $|\Psi_+\rangle$  et  $|\Psi_-\rangle$ , la valeur du dipôle électrique  $\langle D \rangle_{\pm}$ . Quelle est l'expression approchée du dipôle électrique de la molécule dans un champ électrique faible ( $\eta \ll \delta$ ) ? Même question dans un champ fort ( $\eta \gg \delta$ ) ? Commentez la signification physique de ces deux résultats.

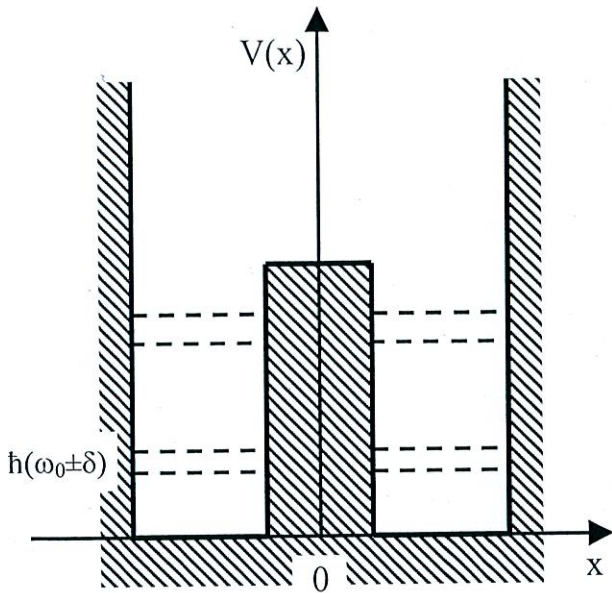
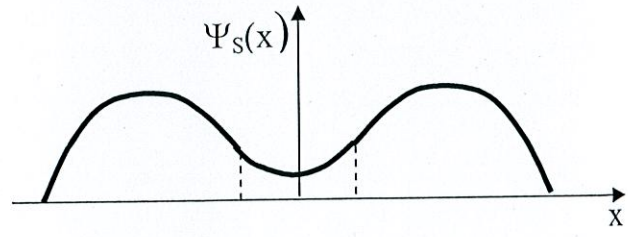


Figure 1 : allure du potentiel  $V(x)$   
 $x$  : position du plan des atomes  
 d'hydrogène par rapport à l'atome  
 d'azote.

Niveau  $E_S \Rightarrow$  Etat  $|\Psi_S\rangle$  pair



Niveau  $E_A \Rightarrow$  Etat  $|\Psi_A\rangle$  impair

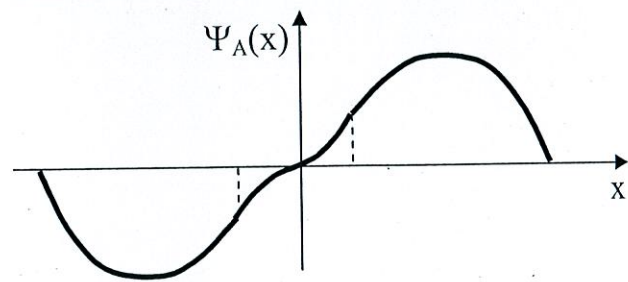


Figure 2 : les deux états propres  
 de plus basse énergie  
 $\Psi_S(x)$  : fonction d'onde paire  
 $\Psi_A(x)$  : fonction d'onde impaire

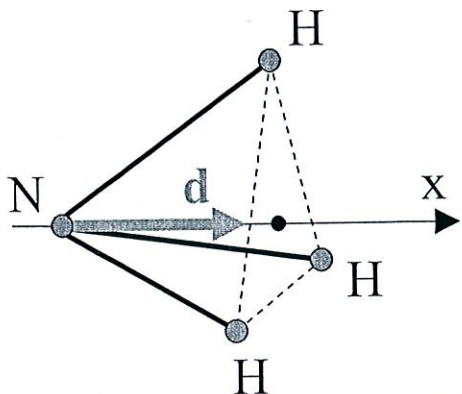


Figure 3 :  
 La molécule d'ammoniac et son  
 dipôle électrique

Université Claude Bernard Lyon1 juin 2010  
Département de Physique

**LICENCE DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE**  
**Mention Physique: Parcours Physique**  
**U.E. Propriétés de la matière II: Fluides et applications**  
Durée 2h. Documents non autorisés. Calculatrice simple autorisée.

---

**Exercice 1**

Un glaçon contenant un morceau de bois ( $\rho_{eau} > \rho_{bois}$ ) flotte dans un verre rempli d'eau. On repère le niveau initial. Après la fonte de la glace, quel est le niveau final ? (on négligera les forces de tension superficielle).

**Exercice 2**

Pourquoi un ballon gonflé à l'hélium, qui monte dans l'air, s'arrêtera-t-il à une altitude bien définie alors qu'un sous-marin qui commence à couler s'enfoncera jusqu'au fond de l'océan ? (l'eau sera supposée incompressible).

**Exercice 3**

Un réservoir vertical cylindrique de grandes dimensions, ouvert à l'air libre, de hauteur  $H = 2,5\text{m}$ , contient initialement de l'eau jusqu'à une hauteur  $h_0 = 1,8\text{m}$ . On perce la surface latérale du réservoir d'un petit orifice circulaire de très faible section, à la distance  $y = 0,4\text{m}$  du fond du réservoir. On prendra pour l'accélération du champ de gravité terrestre,  $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

- 1) Calculer la vitesse initiale  $v$  de sortie de l'eau par l'orifice.  
Ce même réservoir percé est maintenant fermé, l'eau étant initialement à la même hauteur que précédemment, et surmonté d'air à la pression initiale  $1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .
- 2) Calculer la vitesse initiale  $v_0$  de sortie de l'eau par l'orifice.
- 3) Pendant l'écoulement de l'eau, l'air au-dessus de l'eau se détend. Calculer

la vitesse  $v_1$  de sortie de l'eau lorsque la surpression de l'air par rapport à  $p_0$ , pression atmosphérique normale, est réduite de moitié.

4) Expliquer qualitativement pourquoi l'écoulement de l'eau va s'arrêter à une hauteur  $h$  donnée puis calculer cette hauteur (On résoudra pour cela l'équation du deuxième degré qui vérifie la hauteur d'eau,  $h$ , pour laquelle l'écoulement s'arrête).

On supposera l'air régi par la loi des gaz parfaits, le système restant à une température  $T$  constante pendant l'écoulement.

#### Exercice 4

On étudie l'écoulement permanent irrotationnel bidimensionnel dans le plan  $xOy$  d'un fluide parfait incompressible, de masse volumique  $\rho$ , autour d'un cylindre fixe, de rayon  $R$ , d'axe vertical  $Oz$  de hauteur infinie, normale au plan  $xOy$ .

Loin du cylindre, la pression du fluide est  $p_0$ , pression atmosphérique normale, et la vitesse du fluide est uniforme:  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ , si  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire dans la direction  $Ox$ . En tout point  $M(x, y)$  du fluide, le champ des vitesses est  $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$  ( $\vec{u}_y$  est le vecteur unitaire dans la direction  $Oy$ ).

1) a) Ecrire deux relations entre les dérivées partielles de  $v_x$  et  $v_y$  par rapport aux coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$  du fluide (en justifiant les équations utilisées).

b) Montrer que le potentiel  $\varphi(x, y)$  des vitesses de cet écoulement satisfait à l'équation de Laplace.

2) On repère maintenant le point  $M$  du fluide par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Sachant que le potentiel  $\varphi(x, y)$  des vitesses est de la forme:

$$\varphi(x, y) = \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \cos \theta,$$

justifier qualitativement la forme de ce potentiel et déterminer à l'aide des conditions limites les constantes  $A$  et  $B$ .

3) A quelle distance minimale  $r_0$  (exprimée en fonction de  $R$ ) à partir de l'origine  $O$  peut-on considérer la vitesse du fluide suivant l'axe  $Ox$  pratiquement uniforme (égale à  $v_0$ ) à 0,1% près ?

4) Etablir l'équation des lignes de courant autour du cylindre et donner l'allure de ces lignes de courant.

#### Exercice 5

Un récipient cylindrique d'axe vertical, de diamètre  $D$ , laisse écouler le liquide visqueux incompressible qu'il contient dans un tube horizontal de diamètre  $d$  et de longueur  $L$  (voir figure ci-dessous). On utilisera sans la démontrer la relation de Poiseuille donnant le débit dans une conduite cylindrique avec les notations usuelles du cours.

$$q_v = \frac{\pi \Delta P d^4}{128 L \rho \nu}$$

$\nu$  étant le coefficient de viscosité cinématique du liquide.

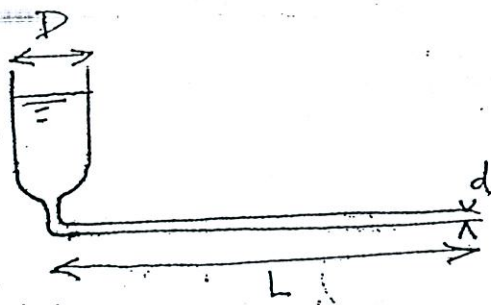
On admettra les hypothèses suivantes: L'écoulement étant très lent, on supposera le mouvement permanent à chaque instant. De plus on négligera les effets de capillarité.

1) Sachant qu'il a fallu le temps  $t$  pour que la hauteur dans le récipient diminue de moitié, déterminer le coefficient de viscosité cinématique ( $\nu$ ) du liquide.

2) Calculer la valeur numérique de  $\nu$ .

On donne:

$D = 5 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ ,  $L = 40 \text{ cm}$  et  $t = 75 \text{ minutes}$ .

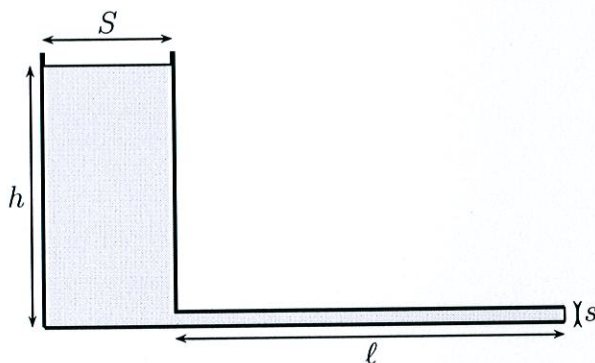


Université Claude Bernard, Département de physique,

Juin 2010

Licence de Sciences et Technologies  
Mention Physique : parcours physique  
U.E. PM2 : fluides et applications  
Durée 1h30, ni document, ni calculatrice

## Problème 1.



Un récipient cylindrique de section  $S$  contient de l'eau jusqu'à une hauteur  $h$ . La masse volumique de l'eau, constante, est  $\mu$  et l'accélération de la pesanteur, également constante,  $g$ . Du fond du récipient part un tuyau horizontal de grande longueur  $\ell$ , de petite section  $s$  ( $s \ll S$ ), qui contient de l'eau qui est retenue à l'extrémité par un bouchon.

- 1.) On enlève le bouchon à l'instant  $t = 0$ . Décrire qualitativement le comportement en fonction du temps  $t$  de la vitesse  $v(t)$  d'écoulement de l'eau.
- 2.) Quelle sera la vitesse immédiatement après la phase transitoire? Quelle sera cette vitesse lorsque la hauteur d'eau dans le récipient ne sera plus que  $z$  ( $0 \leq z \leq h$ )?
- 3.) En déduire une équation différentielle pour l'évolution de  $z$  comme fonction du temps  $t$ . Résoudre cette équation avec la condition initiale  $z(0) = h$ . En déduire le temps qu'il faudra pour que le récipient se vide.
- 4.) On revient aux tout premiers instants, immédiatement après que le bouchon ait été ôté. Écrire un bilan d'énergie pour la masse  $\mu v(t) s \delta t$  qui s'écoule pendant le temps  $\delta t$  et considérée comme prélevée à la surface, à la hauteur  $h$ , en tenant compte de l'énergie gravitationnelle, de l'énergie cinétique évacuée et de la variation d'énergie cinétique dans le tuyau.
- 5.) Montrer, en supposant que le niveau d'eau reste égal à  $h$  pendant cette phase, que l'équation admet une solution du type

$$v(t) = v_{\infty} \tanh(\beta t),$$

et indiquer les expressions de  $v_{\infty}$  et de  $\beta$ .

- 6.) Retrouver l'équation différentielle d'évolution de  $v(t)$  en intégrant l'équation d'Euler

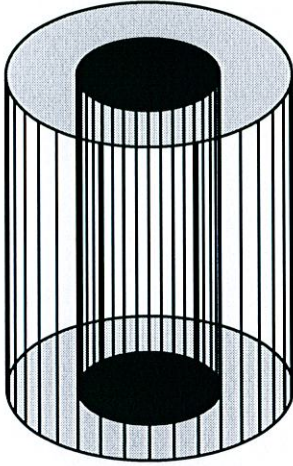
$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_r - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \nabla v^2 = \mathbf{g} - \frac{1}{\mu} \nabla p.$$

le long d'une ligne de courant bien choisie.

- 7.) Indiquer brièvement quelques conséquences pratiques du fait que  $\beta$  soit fini.



## Problème 2.



Un fluide incompressible et visqueux s'écoule régulièrement entre deux cylindres coaxiaux, de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , avec  $R_1 < R_2$ . La vitesse est parallèle aux génératrices, c'est-à-dire verticale sur la figure ci-contre, mais on se place *en absence de pesanteur*. La masse volumique est  $\mu$  et la viscosité  $\eta$ . On notera  $v(r)$  la vitesse du fluide (verticale ascendante) à une distance  $r$  de l'axe, avec  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Soit  $p_1$  la pression en bas, et  $p_2$  en haut, à l'altitude  $h$ , avec  $p_1 > p_2$ .

- 1.) En régime permanent, établir un bilan de forces pour un anneau de hauteur  $h$  compris entre les rayons  $r$  et  $r + \delta r$ .
- 2.) En déduire une équation différentielle pour  $v(r)$ . Trouver la solution pour les conditions limites de ce problème.
- 3.) Montrer que si  $R_1 \rightarrow 0$ , on retrouve la distribution de vitesse dans la loi de Poiseuille

$$v(r) = \frac{R_2^2 - r^2}{4\eta} \frac{p_1 - p_2}{h} .$$

- 4.) *Sans faire de calcul détaillé*, indiquez si la réduction de débit sera supérieure ou inférieure à 50% quand on passe, toutes choses égales par ailleurs, de  $R_1 = 0$  à  $R_1 = R_2/\sqrt{2}$ , soit une diminution de 50% de la section offerte à l'écoulement. Comparer au cas d'un courant électrique en régime ohmique, quand on diminue de 50% la section d'un conducteur cylindrique, la différence de potentiel entre les extrémités étant maintenue constante.

Université Claude Bernard (Lyon 1)  
 Licence Sciences et Technologies, Parcours Physique, Semestre 5  
 UE Méthodes Mathématiques pour la Physique

2009-2010

## Examen de seconde session de Méthodes Mathématiques

29 janvier 2010

16 fiches personnelles autorisées. Les calculatrices sont interdites.

Le barème donné est indicatif.

Durée : 1 h 30

### Exercice I [5 points]

On considère la distribution régulière  $X$  associée à la fonction  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$x(t) = \theta(t) (\sin 3t + \cos 3t)$$

où  $\theta$  est la fonction de Heaviside.

1. Calculer les dérivées  $X'$  et  $X''$  de  $X$ .
2. En déduire que  $X$  est solution de l'équation différentielle

$$X'' + 9X = A$$

où  $A$  est une distribution que l'on déterminera.

### Exercice II [4 points]

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{18 + \cos^2 \theta}.$$

1. Montrer que  $I$  peut se ramener à une intégrale du type  $I = \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$ , où  $f$  est une fonction que l'on déterminera.
2. Calculer la valeur de  $I$ .

### Exercice III [2 points]

On considère les trois opérateurs

$$J_+ = -z^2 \frac{d}{dz} + 2jz, \quad J_- = \frac{d}{dz} \quad \text{et} \quad J_0 = z \frac{d}{dz} - j$$

où  $z$  est une variable complexe et  $j$  un paramètre. Exprimer le commutateur  $[J_+, J_-]$  en fonction de  $J_0$ .

### Exercice IV [4 points]

Soit la fonction  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  et sa transformée de Fourier :  $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$ .

1. Montrer, en calculant  $\frac{df(x)}{dx}$  et  $\frac{d\hat{f}(\nu)}{d\nu}$ , que la transformée de Fourier  $\hat{f}$  satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\hat{f}(\nu)}{d\nu} + 2\pi\nu \hat{f}(\nu) = 0.$$

2. Montrer que cette équation admet une solution de la forme

$$\hat{f}(\nu) = K e^{-\pi\nu^2}$$

où  $K$  est une constante. Montrer que cette constante est réelle et positive.

3. Utiliser le théorème de Parseval-Plancherel pour calculer  $K$ .

4. Montrer que la transformée de Fourier  $\hat{f}(\nu)$  permet alors de calculer facilement l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

### Exercice V [5 points]

On considère l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1-x^2}{x} y' + 6y = 0 \quad (1)$$

où  $y : x \mapsto y(x)$  est une fonction réelle de la variable réelle  $x$ .

1. Quels sont les points singuliers de cette équation ? Quelle est leur nature ?
2. Chercher à construire une solution  $y(x)$  en appliquant la méthode de Fuchs. Conclusion ?
3. On cherche une solution particulière de l'équation (1) sous la forme d'un développement en série entière

$$y(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n. \quad (2)$$

Établir la relation de récurrence entre les coefficients  $a_n$ .

4. Déterminer la valeur du coefficient  $a_1$  en identifiant les termes proportionnels à  $\frac{1}{x}$  dans l'expression obtenue en reportant (2) dans (1). Que peut-on en conclure quant à la parité de la solution particulière recherchée ?
5. Montrer que la solution particulière cherchée sous la forme (2) est un polynôme dont on précisera le degré. Déterminer ce polynôme en ajoutant la condition  $y(0) = 1$ .

## Examen final du 14 janvier 2010

*Durée 2h. Fiches personnelles autorisées. Calculatrices interdites.*

### Exercice 1

Sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2, du dv)$  on considère les opérateurs

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad S_2 = \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{et} \quad R = u \frac{\partial}{\partial v} - v \frac{\partial}{\partial u}$$

définis sur le sous-espace des fonctions deux fois continûment différentiables dans les variables réelles  $u$  et  $v$ .

1. Exprimer les commutateurs  $[R, S_1]$ ,  $[R, S_2]$  et  $[S_1, S_2]$  à l'aide des opérateurs  $S_1$  et  $S_2$ .
2. On considère l'opérateur  $S = -(S_1)^2 - (S_2)^2$ . L'opérateur  $S$  est-il hermitien ? Qu'en est-il de  $S_1$  et de  $S_2$  ?
3. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto f(u, v) := \exp [i(\alpha u + \beta v)].$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes réelles. Vérifier que  $f$  est une fonction propre de  $S$  et donner la valeur propre associée.

4. Montrer que la fonction  $f$  n'appartient pas à  $L^2(\mathbb{R}^2, du dv)$ . Appartient-elle à  $L^2(\mathbb{R}^2, d\mu)$  avec  $d\mu = [(1 + u^2)(1 + v^2)]^{-1} du dv$  ?
5. On considère la fonction  $\Phi$  définie sur le pavé  $[0, a] \times [0, b]$  par

$$\Phi(u, v) = \sin \alpha u \sin \beta v, \quad 0 \leq u \leq a \quad \text{et} \quad 0 \leq v \leq b.$$

Vérifier que  $\Phi$  est une fonction propre de l'opérateur  $S$  et donner la valeur propre qui lui est associée.

6. On impose à  $\Phi$  de satisfaire les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Phi(a, v) &= 0, & 0 \leq v \leq b, \\ \Phi(u, b) &= 0, & 0 \leq u \leq a. \end{aligned}$$

Montrer que les valeurs propres correspondantes de l'opérateur  $S$  sont alors du type

$$\left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \pi^2, \quad \text{avec } (k, l) \text{ appartenant à } \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*.$$

## Exercice 2

1. Discuter de la convergence de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

2. On considère la fonction

$$\Phi : z \mapsto \Phi(z) := \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \frac{\sin 2z}{z}$$

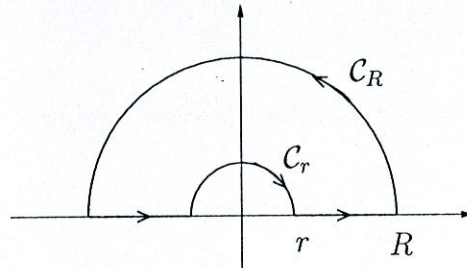
de la variable complexe  $z$ . Calculer les résidus de la fonction  $\Phi$  aux points  $z = 0, \pm i$ .

3. Discuter de l'existence des limites

$$\alpha = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |\Phi(z)| \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{|z| \rightarrow 0^+} |\Phi(z)|$$

où, dans le cas de  $\alpha$ ,  $|z| \rightarrow \infty$  dans le demi-plan complexe caractérisé par  $0 < \arg z < \pi$ .

4. On considère  $\Gamma(R, r)$  le contour fermé, parcouru une fois dans le sens direct, constitué de deux demi-cercles  $\mathcal{C}_r$  (de rayon  $r$ ) et  $\mathcal{C}_R$  (de rayon  $R$ ) (avec  $0 < r < 1 < R$ ) situés dans le demi-plan complexe supérieur et des deux segments  $[-R, -r]$  et  $[r, R]$  sur l'axe réel.



Déterminer la valeur de l'intégrale

$$X(R, r) := \int_{\Gamma(R, r)} \Phi(z) dz.$$

5. Calculer la limite

$$B := \lim_{r \rightarrow 0^+} i \int_{\pi}^0 \frac{r^2 \exp(2i\theta) - 1}{r^2 \exp(2i\theta) + 1} \sin [2r(\cos \theta + i \sin \theta)] d\theta$$

6. En décomposant l'intégrale  $X$  en intégrales sur les différents éléments constitutifs du contour  $\Gamma(R, r)$ , obtenir la valeur de l'intégrale  $I$  de la question 1.

### Exercice 3

1. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

sous la forme de  $y(x) = x^\lambda$ .

2. Trouver, à l'aide des théorèmes de wronskien, une autre solution particulière de l'équation précédente. En déduire la solution générale.

### Exercice 4

Soit  $X$  la distribution régulière associée à la fonction

$$\begin{aligned} x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) = \theta(t) e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

où  $\theta(t)$  est la fonction de Heaviside et  $\lambda$  et  $\omega$  sont deux réels strictement positifs.

1. Calculer les dérivées  $X'$  et  $X''$  de  $X$ .

2. En déduire que

$$X'' + 2\lambda X' + (\lambda^2 + \omega^2) X = A$$

où  $A$  est une distribution que l'on déterminera.