





4#100

~~rare~~
~~20~~

ITARD 035

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE;

Par M. CLAIRAUT,

*Des Académies des Sciences de France,
d'Angleterre, de Prusse, de Russie,
de Bologne & d'Upsal.*

QUATRIÈME ÉDITION.



SCD Lyon 1
Mathématiques

A PARIS,

Chez { La Veuve SAVOYE, rue S. Jacques.
SAILLANT, rue S. Jean-de-Beauvais,
DESPILLY, rue S. Jacques.
DESAINT, rue du Foin.
DURAND, rue S. Jacques.
PANCKOUCKE, rue de la Comédie Française,
DELALAIN, rue S. Jacques.

M. DCC. LXVIII.

Avec Approbation & Privilège du Roi,

ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE

Par M. CLAIRAUT,

Académie des Sciences de France,
d'Angleterre, de Prusse, de Russie,
de Bologne & d'Uffel.

QUATRIÈME ÉDITION.



A PARIS

Le Livre se vend chez M. Jacob, rue de la Harpe, au Palais National, au Salon de la Chimie.
Chez M. la Harpe, au Palais National, au Salon de la Chimie.
Chez M. la Harpe, au Palais National, au Salon de la Chimie.
Chez M. la Harpe, au Palais National, au Salon de la Chimie.
Chez M. la Harpe, au Palais National, au Salon de la Chimie.

M. DCC. LXXVII



P R É F A C E.

JE me suis proposé de suivre dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes *Elémens de Géométrie*: j'ai tâché d'y donner les règles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Théorèmes. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problèmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Des Problèmes utiles au commerce, comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes à raison de leurs mises ou de

a ij

quelques conventions faites entr'elles ; des règles d'alliage , &c. sont les Problèmes que je suppose avoir occupé les premiers Algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces Problèmes , telle qu'on la peut trouver , sans avoir aucune teinture de l'Algebre. Il est aisé de reconnoître dans cette solution , que si la mémoire suffit à retenir tous les raisonnemens par lesquels il faut passer pour y arriver , c'est que la suite de ces raisonnemens n'est pas bien longue ; & l'on voit en même-temps que , lorsqu'on s'éleve à des Problèmes qui en demandent une plus grande , il faut chercher à les écrire d'une maniere fort abrégée , il faut imaginer quelques signes , à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette maniere d'écrire les questions , est l'Algebre que je fais , pour ainsi dire , inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus simple au plus composé , je ne propose d'a-

P R E F A C E.

bord que des questions numériques ; parce que ce sont celles qui fixent le plus l'esprit des Commencans. Après en avoir résolu plusieurs qui ne diffèrent les unes des autres que par les nombres donnés dans l'enoncé, on s'aperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, & qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois : je fais cette occasion d'expliquer la maniere de résoudre généralement les Problèmes, en employant, au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : & j'enseigne ensuite à tirer des solutions générales les solutions particulières, au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problèmes où j'emploie des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assez compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les règles d'addition, soustraction multiplication & division : je montre alors comment on doit faire

a iij

ces opérations. Je n'ai pas cru devoir les donner plutôt, parce que les Commençans les suivent avec peine & avec dégoût, lorsqu'on les leur enseigne dans un temps où ils n'ont aucune idée des quantités sur lesquelles ils opèrent.

La multiplication est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençans, & dont l'explication embarrasse le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs termes positifs & négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative, comme existant seule. Cette multipli-

P R E F A C E. vij

cation étant expliquée , je passe à celle où le multiplicateur est aussi-bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs , & je fais voir facilement que cette opération n'est autre chose que la première répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur , & que , suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs , les produits qu'ils donnent , doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen , je familiarise les Commençans avec la multiplication , sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires , que *moins* par *plus* donne *moins* , *moins* par *moins* donne *plus* , &c. qui , en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots , laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté , & je n'aurois fait réellement que l'éluder , si je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négati-

a iv

ves, par d'autres quantités aussi entièrement négatives, opération dans laquelle on ne sçauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication, après en avoir montré la nécessité au Lecteur, en le conduisant à un Problème où l'on est obligé de considérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu, dans ce Problème, au point où il s'agit de multiplier ou de diviser des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont sans doute pris les premiers Analystes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu suivre une route entièrement sûre, je cherche une solution au Problème par laquelle je puisse éviter toute espèce de multiplication ou de division de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au résultat, sans employer d'autres raisonnemens, que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute; & je vois ce que doivent être ces

P R E F A C E. ix

produits ou quotiens des quantités négatives que m'avoit donnés la première solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que *moins par moins donne plus*; &c.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le Lecteur parvient en même-temps à connoître la nature des solutions négatives des Problèmes; il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du Problème.

La première Partie de cet Ouvrage traite uniquement des équations du premier degré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, & de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est, par exemple, la règle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur, laquelle

naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette règle est expliquée d'une manière nouvelle, & j'y ai ajouté plusieurs réflexions qui la rendent applicable à des cas où la manière ordinaire de la traiter, pourroit rebuter pour la longueur des calculs, & ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la seconde Partie, je parle des équations du second degré; un Problème où il s'agit d'intérêts d'intérêts m'amène à une de ces équations; je l'ai choisie de nature à donner pour ses deux solutions deux nombres positifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens résolvent le même Problème. J'en ai usé ainsi, dans la crainte que les Commençaans, qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables solutions, ne crussent que le Problème n'avoit réellement qu'une solution.

Cependant, afin de les accoutumer aux racines négatives, je donne ensuite un Problème dans lequel il y a une de ces racines, & telle cepen-

P R E F A C E. xj

dant qu'aucun Commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle satisfait autant au Problème que la positive.

La résolution des équations que demandent ces Problèmes & ceux de même espèce qu'on peut se proposer, engagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algebre, telles que les extractions des racines quarrées; la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, &c. opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algebre, mais que mon plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations, je passe à un Problème dans lequel on doit employer plusieurs équations du second degré qui contiennent chacune plusieurs inconnues, & je donne les moyens de réduire toutes ces équations à une seule qui ne renferme qu'une inconnue. Je fais voir en même-temps que cette méthode n'est pas seulement propre aux équations où les inconnues ne montent qu'au second degré, mais qu'elle s'étend à tous les degrés.

La troisiéme Partie a pour objet les équations de tous les degrés prises en général. Je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coëfficiens du second, du troisiéme, &c. terme, ont d'être, ou la somme des racines, ou celle des produits de ces racines, &c. Je tire de ces propriétés la fameuse règle de Descartes, pour trouver toutes les racines commensurables qui sont dans une équation; & comme cette méthode engage dans des calculs excessifs à cause du grand nombre de divisions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Newton, qui s'étend non-seulement aux racines commensurables ou diviseurs d'une dimension, mais aux diviseurs de tant de dimensions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonstration de cette méthode que Newton avoit supprimée, mais je fais voir par quelle route il a pu la découvrir. C'est un avantage que je ne crois pas qu'on puisse trouver dans la démonstration que M. s'Gravesande en a donnée (dans son *Specimen commentarii in*

arithmetica universalis, inféré à la fin de ses Elémens d'Algebre) & qui est la seule que je sçache avoir été donnée, malgré le grand nombre de Traités d'Algebre qui ont paru depuis Newton. J'ai appris cependant que le R. P. Jacquier, connu pour avoir commenté les recherches les plus élevées de Newton, avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais ce qu'il a fait sur cette matiere, n'est pas venu à ma connoissance.

Au reste, dans cette Partie & dans celles qui suivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les Problèmes qui pourroient avoir conduit aux équations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des Lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir par les premiers Problèmes, de quelle importance il étoit de sçavoir résoudre toutes sortes d'équations.

Je traite dans la quatrième Partie des équations de tous les degrés, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou

l'orsqu'en ayant trois, elles se réduisent à la méthode des équations du second degré par une simple transformation. J'enseigne, par ce moyen, aux Commençans, un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espèce, & je leur donne une connoissance entière, tant de l'élevation des puissances, que de l'extraction des racines.

Une règle qui est absolument nécessaire pour la résolution complète de ces équations, & qui a toujours été omise dans tous les Ouvrages Élémentaires, (celui de M. s'Gravesande excepté) c'est l'extraction des racines des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables: Newton, à qui on doit cette règle, l'ayant donnée à son ordinaire sans démonstration, je l'ai traitée ici comme un Problème; par ce moyen la découverte & la démonstration marchent toujours de concert.

La méthode de Newton s'étend aux quantités numériques quel que soit l'exposant de la racine, mais elle ne

s'applique pas aux quantités littérales, lorsque cet exposant passe le second degré; je supplée ce qui manque à cette méthode, en donnant le procédé qu'il faut suivre pour les quantités littérales. De plus, je fais voir que la méthode de Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occasions; c'est lorsque la racine d'une quantité contient des fractions, & que cette quantité elle-même n'en renferme pas. Je montre ce qu'il faut faire alors pour remédier à cet inconvénient.

M. s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Newton, où se trouve cette méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, & il n'a point donné la manière de l'appliquer aux quantités littérales de tous les degrés.

Toutes ces opérations, lorsqu'on veut les appliquer à une puissance quelconque, supposant qu'on connoisse la formule du binôme, je saisis l'occasion qu'elles me fournissent d'amener l'in-

vention de cette fameuse formule. Je la démontre d'une maniere nouvelle, & je fais voir les différens usages qu'elle a fournis, tels que le moyen de trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, &c. ce qui peut préparer les Commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquième Partie traite des équations du troisième & du quatrième degré qui ont tous leurs termes, c'est-à-dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des équations du troisième degré, & je fais voir ensuite les équations particulieres, où cette solution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces équations, au défaut des racines exactes, j'enseigne à en trouver par approximation; je donne, pour y parvenir, une méthode nouvelle beaucoup plus simple que celles qui ont paru jusqu'à présent. Par cette méthode, dès la première opération, j'ai la valeur de la
racine

racine cherchée à un millieme près ;
à la seconde à un millionieme , & ainsi
de suite.

Je passe de là aux équations du qua-
trieme degré , & , après avoir donné leur
résolution générale , je fais voir que
cette résolution , ainsi que celle des
équations du second degré , a cet avan-
tage sur la résolution des équations du
troisieme , qu'une seule & même for-
mule peut , à l'aide des signes *plus* &
moins , exprimer toutes les racines de
l'équation. Je démontre aussi , ce que
les Auteurs Elémentaires n'ont fait que
supposer , que les quatre racines d'une
équation du quatrieme degré , sont tou-
jours ou toutes quatre réelles , ou tou-
tes quatre imaginaires , ou deux réel-
les & deux imaginaires ; c'est-à-dire ,
que je prouve que les racines imagi-
naires des équations du quatrieme de-
gré , peuvent , ainsi que celles du se-
cond , être regardées comme compo-
sées d'une partie réelle , & d'une partie
qui est la racine quarrée d'une quantité
négative.

La résolution des équations du qua-

trieme degré, étant fondée sur celle des équations du troisieme, elle a de même que ces équations, cet inconvénient, que dans un cas on ne sçauroit avoir les racines que par approximation. Je donne une maniere bien simple de trouver cette approximation, en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les équations du troisieme degré.

Quant aux équations qui passent le quatrieme degré, je ne donne rien pour leur résolution en général, parce que jusqu'à présent on n'a pû y parvenir, quelques efforts qu'ayent fait les Analystes. L'on est réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plûpart, dans la troisieme & quatrieme Partie, à de simples approximations qui sont beaucoup plus faciles, lorsqu'on est aidé de la Géométrie: c'est pourquoi je remets à traiter de ces équations, au tems où j'enseigneraï la théorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre, après ce que j'avois dit en annonçant mes Elémens d'Algebre, à y trouver des applications

de cette Science à la Géométrie , j'ai crû cependant devoir les réserver pour un autre Ouvrage. Il m'a paru qu'en donnant un Traité entier de pure Algebre , c'étoit offrir aux Commençans les moyens de s'y fortifier davantage, & qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géométrie , que lorsque les opérations Analytiques ne leur coûteroient plus. J'espere que les principes qu'ils trouveront dans cet Ouvrage , les mettront en état de surmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géométrie.

Au reste , je ne suppose pour l'intelligence de ce Traité , que les opérations principales de l'Arithmétique , parmi lesquelles je compte la regle de trois ; ceux qui auront lû mes Elémens de Géométrie , posséderont la théorie des proportions , autant qu'il est nécessaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même livre , tant les Elémens d'Arithmétique , que ceux d'Algebre , & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai

fait dans mes Elémens de Géométrie ; mais l'ordre que j'ai suivi m'a paru demander de traiter séparément ces deux Sciences. En effet , voulant me rapprocher autant qu'il est possible du chemin des Inventeurs, j'ai dû supposer l'Arithmétique familiere à ceux qui vouloient pénétrer dans l'Algebre.





ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problèmes par des Equations, & de la résolution des Equations du premier degré.



PARMI les différens Problèmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algébristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algèbre ou Analyse.

A

Exemple
d'un Pro-
blème fem-
blable à
ceux que
les pre-
miers Al-
gébriſtes
ont pû ſe
propofer.

*Partager une ſomme , par exemple , 890 lb
à trois perſonnes , en ſorte que la première ait
180 lb de plus que la ſeconde , & la ſeconde ,
115 lb de plus que la troiſième.*

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura
raisonné un homme , qui , ſans aucune tein-
ture de l'Algèbre , ſera parvenu à réſoudre
ce Problème.

Solution de
ce Problème , telle
qu'on la
pourroit
trouver
ſans Algè-
bre.

Il eſt évident que ſi on connoiſſoit une des
trois parts , on connoîtroit auffi-tôt les deux
autres. Suppoſons , par exemple , qu'on con-
noiſſe la troiſième qui eſt la plus petite , il fau-
dra y ajouter 115 lb , & l'on aura la valeur de
la ſeconde ; enſuite pour avoir la première , il
faudra ajouter 180 lb à cette ſeconde , ce qui
revient au même que ſi on ajoutoit 180 lb ,
plus 115 lb ou 295 lb à la troiſième.

Quelle que ſoit la troiſième part , nous ſça-
vons donc que cette part , plus elle-même avec
115 lb , plus encore elle-même avec 295 lb
doit faire une ſomme égale à 890 lb.

De-là , il ſuit que le triple de la plus petite
part , plus 115 lb , plus 295 lb ou en une fois
plus 410 lb , eſt égal à 890 lb.

Or ſi le triple de la part qu'on cherche plus
410 lb eſt égal à 890 lb , il faut donc que ce
triple de la part qu'on cherche ſoit plus petit
que 890 lb de 410 lb. Donc ce triple de la
plus petite part eſt égal à 480 lb. Donc la plus
petite part eſt égale à 160 lb.

La ſeconde ſera par conſéquent de 275 lb ,
& la première ou la plus grande de 430 lb.

C'est vraisemblablement ainsi que les premiers Algébristes ont raisonné quand ils se sont proposés de pareilles questions, sans doute qu'à mesure qu'ils avançaient vers la solution d'une question, ils chargeoient leur mémoire de tous les raisonnemens qui les avoient conduits au point où ils étoient; & lorsque les questions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi se rebuter; mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une manière plus courte de s'exprimer, qu'ils eussent quelques signes simples, avec lesquels, quelque avancés qu'ils fussent dans la solution d'un Problème, ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avoient fait & ce qu'il leur restoit à faire. Or l'espece de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'Algèbre.

II.

Pour mieux donner les principes de cette Science, nous allons reprendre la même question, nous écrirons en langage ordinaire les raisonnemens que l'Algébriste fait pour résoudre son Problème, & en caracteres Algébriques ce qui lui suffit d'écrire pour aider sa mémoire.

Méthode Algébrique d'exprimer le Problème précédent.

La plus petite ou la troisième part, quelle qu'elle soit, je l'exprime par une seule lettre qui sera, par exemple, x

La seconde sera par conséquent la première plus 115, ce que j'écris ainsi $x + 115$, choisissant le signe + qu'on prononce *plus* pour désigner l'Addition des deux quantités entre lesquelles on le place.

Le signe + indique l'addition.

A ij

Quant à la premiere part ou la plus grande ;
comme elle surpasse la seconde de 180, elle sera
exprimée par $x + 115 + 180$.

Ajoutant ces trois parts, on aura
. $3x + 115 + 115 + 180$,
ou en réduisant $3x + 410$.

Mais cette somme des trois parts doit éгалer
890 lb, ce qui s'exprime ainsi $3x + 410 = 890$,
employant le caractere = qui se prononce
égal pour exprimer l'égalité des deux quantités
entre lesquelles on le place.

Le signe =
marque l'é-
galité.

Une équation est l'égalité de deux quantités.

On résout une équation, lorsqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.

Résolution de l'équation qui exprime le Problème précédent.

Le caractere — indique la Soustraction.

La question, par ce calcul, est donc changée en une autre, où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410, fasse 890. Trouver la résolution de semblables questions, c'est ce qu'on appelle résoudre une équation, l'équation dans ce cas-ci est $3x + 410 = 890$: on l'appelle ainsi, parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités; résoudre cette équation, c'est trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que son triple plus 410 fasse 890.

III

Pour résoudre cette équation, voici comment l'Algébriste raisonne, & comment il écrit ses raisonnemens. L'équation à résoudre . . .
. $3x + 410 = 890$,
m'apprend qu'il faut ajouter 410 à $3x$ pour faire la somme de 890; donc $3x$ sont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainsi $3x = 890 - 410$. Prenant le caractere — qui se prononce moins pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précède doit être retranchée de celle qu'il suit.

De cette nouvelle équation $3x = 890 - 410$, l'on tire, en retranchant en effet 410 de 890, cette autre équation $3x = 480$.

Mais si trois x valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160, ce que j'écris ainsi, $x = \frac{480}{3} = 160$, & la question est résolue, puisqu'il suffit de connoître une des parts pour connoître les autres.

I V.

Si on avoit voulu résoudre la question en commençant par chercher la plus grande part, on l'auroit pû de même.

Autre solution du Problème précédent.

Voici comment on s'y feroit pris.

Soit cette premiere part y

La seconde ayant 180 de moins, sera $y - 180$.

Et la troisieme ayant 115 de moins que la seconde sera $y - 180 - 115$

Or la somme de ces trois quantités est $3y - 180 - 180 - 115$
c'est-à-dire $3y - 475$.

Mais cette somme doit égaler 890.

On a donc l'équation $3y - 475 = 890$ qui apprend que $3y$ surpassent 890 de 475, puisqu'il faut retrancher 475 de $3y$ pour avoir 890. Donc $3y = 890 + 475$ ou $3y = 1365$.

Donc y ou la plus grande part = 455 comme ci-dessus.

V.

Si dans le Problème il avoit fallu partager une somme plus ou moins grande que celle qu'on a employée, & que les différences eussent été d'autres nombres que ceux dont on s'est servi, il est évident qu'on l'auroit résolu

de la même maniere. Supposons, par exemple; que le Problème eût été énoncé ainsi.

Autre
exemple du
Problème
précédent.

Partager 9600 à quatre personnes, en sorte que la première ait 300 de plus que la seconde, & la seconde 250 de plus que la troisième, & la troisième 200 de plus que la quatrième.

On auroit raisonné de la maniere suivante :

En nommant la quatrième

part x .

La troisième sera $x + 200$.

La seconde . . . $x + 200 + 250$.

La première . . . $x + 200 + 250 + 300$

Or, la somme de toutes ces parts doit être égale à 9600. On a donc l'équation

$$4x + 1400 = 9600.$$

Pour résoudre cette équation, je remarque, comme dans la précédente, que si $4x$ ne sont égaux à 9600 que lorsqu'on leur a ajouté 1400, il faut qu'ils soient égaux à ce qui reste de 9600 lorsqu'on en a retranché 1400, ce que l'on écrit ainsi $4x = 9600 - 1400$,

$$\text{ou } 4x = 8200.$$

Mais si quatre x sont égaux à 8200, un x vaut donc le quart de 8200, c'est-à-dire que $x = \frac{8200}{4} = 2050$: la plus petite part x étant connue, les autres se trouvent tout de suite, la troisième = 2250, la seconde = 2500, & la première = 2800.

V I.

Le Problème pourroit être encore plus varié, & dépendre toujours des mêmes principes; supposons, par exemple, qu'il fût énoncé ainsi.

Troisième

Partager 5500 en deux parties, de maniere

que la première ait un tiers de plus que la seconde, plus encore 180.

exemple du Problème précédent.

Voici comment on le résoudroit.

Soit la seconde part x .

On aura pour la première $x + \frac{1}{3}x + 180$.

Or comme leur somme doit éгалer 5500, on a donc l'équation $2x + \frac{1}{3}x + 180 = 5500$. Pour résoudre cette équation, je commencerai par ajouter $2x$ avec $\frac{1}{3}x$, ce qui me donne $\frac{7}{3}x$ parce que deux entiers valent six tiers, & que par conséquent ces deux entiers avec un tiers font sept tiers. Donc l'équation précédente se réduit à

$$\frac{7x}{3} + 180 = 5500,$$

qui deviendra par le même raisonnement que dans les exemples précédens $\frac{7x}{3} = 5500 - 180$

$$\text{ou } \frac{7x}{3} = 5320.$$

Or si le tiers de $7x$ vaut 5320, les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi $7x = 5320 \times 3$. Employant le signe \times qui se prononce multiplié par, pour désigner la multiplication des deux quantités qu'il sépare.

Le signe \times indique la multiplication.

Ensuite, au lieu de $7x = 5320 \times 3$, il suffit d'écrire $7x = 15960$ que l'on a en multipliant en effet 5320 par 3.

Et par le moyen de cette nouvelle équation on a $x = \frac{15960}{7} = 2280$, valeur de la seconde part.

La première part sera aisée à trouver ensuite, puisqu'il ne faudra qu'ajouter à cette quantité

2280, son tiers 760, & de plus 180, ainsi qu'on l'avoit proposé, & l'on aura 3220 pour la premiere part.

Les Commençaans pourront s'exercer à varier encore davantage l'énoncé du Problème précédent, & à le résoudre dans les différens cas qu'ils imagineront, ils seront récompensés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre Problème qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

V I I.

Nouveau
Problème
de même
nature que
le précé-
dent.

Trois Marchands font une société, le premier fournit 17000 lb, le second 13000 lb, le troisieme 10000; comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que 10000 lb se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres 3 pour 100 de tout le gain qui se fera: il arrive que ce gain monte à 100000 lb: on demande ce qu'il faut qu'ils en aient chacun.

Soit la part du premier x

Le second ayant mis moins dans la raison de 13 à 17, doit avoir une somme moindre dans cette même raison, c'est-à-dire, seulement $\frac{13}{17}x$

Le troisieme en supposant qu'il n'eût qu'à raison de sa mise, auroit les dix 17^{emes} du premier; mais devant avoir de plus 3 pour 100 sur le tout, c'est-à-dire 3000 lb, sa part fera . . $\frac{10}{17}x + 3000$.

Et comme la somme de ces trois parts doit être 100000 lb, on aura . . . $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x + 3000 = 100000$
 ou $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x = 97000$.

Pour dégager l'inconnue de cette équation, soit considéré que $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ou $\frac{17}{17}x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ne signifie autre chose que $\frac{40}{17}x$; on a donc $\frac{40}{17}x = 97000$ ou $40x = 97000 \times 17$ ou $40x = 1649000$ ou $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

La part du premier étant trouvée, celle du second exprimée par $\frac{13}{17}x$, sera $\frac{13}{17} \times 41225$, c'est-à-dire 31525; celle du troisieme, exprimée par $\frac{10}{17}x + 3000$, sera $\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250$.

VIII.

Par ces deux Problèmes les Lecteurs entendoient ce que c'est que l'Algèbre, & ils apprennent qu'en général la solution d'un Problème est composée de deux parties; dans la première, on nomme par une lettre comme x ou y , &c. la quantité inconnue qu'on cherche, ou une de celles qui étant connue, détermineroit les autres; on tâche ensuite d'arriver à une équation où l'inconnue se trouve, ce qui se fait en exprimant de deux manières différentes une même quantité.

Dans la seconde partie il s'agit de dégager l'inconnue dans l'équation.

La première de ces deux parties est difficile à réduire en préceptes clairs pour les Commencans, ce ne peut être que par des exemples qu'on la fasse bien sentir.

La solution analytique d'un Problème à deux parties.

Dans la première on exprime ce Problème par une équation.

Dans la seconde on résout cette équation.

Quant à la seconde, on la peut beaucoup plus aisément expliquer d'une manière générale.

I X.

Les équations du premier degré sont celles où l'inconnue n'est multipliée ou divisée que par des quantités connues.

Dans les questions que nous venons de résoudre, on est arrivé à des équations dans lesquelles l'inconnue ne se trouvoit pas autrement engagée que par la multiplication ou la division de nombres connus; on appelle ces sortes d'équations, équations du premier degré, telles sont $2x - 10 = 56$, $\frac{2}{3}x + 15 = x - \frac{1}{2}x + 30$, &c. Et les Problèmes qui conduisent à ces équations sont nommés des Problèmes du premier degré.

On les appelle ainsi pour les distinguer de ceux dans lesquels l'inconnue seroit ou quarrée, ou * cubée, &c. qu'on dit être aussi-bien que leurs équations; du second degré si l'inconnue est quarrée; du troisieme, si l'inconnue est cubée, &c.

Qu'on demande, par exemple, un nombre dont le triple étant ajouté avec le quarré, donnât 65, le Problème qu'il faudroit résoudre alors seroit du second degré. Et l'équation $3x + xx = 65$ (dans laquelle xx désigne le quarré de x) qui exprimeroit les conditions de ce Problème, seroit une équation du second degré.

* On doit avoir vu en Arithmétique qu'un nombre est quarré ou cubé, suivant qu'il est multiplié une ou deux fois par lui-même. On quarre 7, par exemple, lorsque, en le multipliant par lui-même, on en forme 49, de même on le cube lorsque le multipliant deux fois par lui-même on en forme 343.

On n'a pû parvenir à la résolution de ces équations qu'après s'être exercé long-tems aux équations du premier degré. Nous allons donc chercher toutes les regles que demandent celles-ci.

X.

Pour les trouver, reprenons d'abord l'équation $4x + 1400 = 9600$, traitée art. V laquelle est composée des trois termes $4x$, 1400 , 9600 , (on appelle ainsi toutes les parties d'une équation, séparées les unes des autres par les signes $+$ ou $-$) & remarquons que par le même raisonnement, par lequel nous en avons tiré que $4x = 9600 - 1400$, nous pourrons dans toutes sortes d'équations prendre quelque terme que ce soit, précédé du signe $+$, & le passer de l'autre côté du signe $=$ en lui donnant le signe $-$. Qu'on ait, par exemple, $50 + \frac{10}{3}x = 5x + 30$, il sera permis de passer le terme $\frac{10}{3}x$ en $-$ de l'autre côté, & écrire ainsi l'équation $50 = 5x + 30 - \frac{10}{3}x$; car on peut dire, comme dans l'art. V, que puisqu'il faut ajouter $\frac{10}{3}x$ à 50 pour être égal à la quantité $5x + 30$, il faut donc que 50 soit plus petit que $5x + 30$ de la quantité $\frac{10}{3}x$, c'est-à-dire, qu'il soit égal à $5x + 30 - \frac{10}{3}x$.

De la même maniere qu'on a vû, art. III, que l'équation $3y - 475 = 890$ se changeoit en $3y = 890 + 475$, on verra qu'en général les termes qui sont en $-$ d'un côté du signe d'égalité peuvent être passés en $+$ de l'autre. Qu'on ait, par exemple, $32 - 6x = 9x + 119$, on en tirera $32 = 6x + 9x + 119$. Car si 32 doit être diminué du $6x$ pour égaler $9x + 119$

Les termes d'une équation sont séparés par les signes $+$ ou $-$.

il faut qu'il soit plus grand que $6x$ de cette quantité, c'est-à-dire qu'il soit égal à $6x + 9x + 119$.

X I.

Tout terme peut être passé d'un côté de l'Équation à l'autre, en changeant de signe.

Voilà donc un principe général pour toutes les équations, c'est que les termes que l'on voudra pourront être passés d'un côté de l'équation à l'autre, en observant de changer leurs signes. Or, ce principe est d'une utilité infinie en ce qu'il épargne beaucoup de raisonnemens.

X I I.

Par son moyen on peut toujours changer une équation en une autre, où l'on ait d'un côté du signe $=$, c'est-à-dire, dans l'un des membres de l'équation les termes affectés de x & de l'autre côté du signe $=$, c'est à-dire, dans l'autre membre de l'équation tout ce qui est entièrement connu.

On appelle membres d'une équation, les deux parties séparées par le signe $=$.

Que l'on ait, par exemple, l'équation $8x + 30 = \frac{5}{3}x + 250$; j'en tire $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$: que l'on ait $60 - \frac{5}{4}x = 250 - \frac{7}{3}x$, on en tire $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$, & ainsi des autres.

X I I I.

Lorsqu'après les transpositions nécessaires, on aura fait passer tous les termes affectés de x d'un côté, & les termes connus de l'autre; ce qui se présente le plus naturellement, c'est de réduire chacun des deux membres de l'équation à sa plus simple expression. Qu'on ait, par exemple $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$, on en tire aussi-tôt $\frac{19}{3}x = 220$, en retranchant en effet 30 de 250, & en retranchant aussi $\frac{5}{3}x$ de $8x$ ou de $\frac{24}{3}x$ qui lui est égal.

Qu'on ait l'équation $\frac{7}{3}x - \frac{1}{4}x = 250 - 60$,
 on la change en $\frac{13}{12}x = 190$, à cause qu'en
 réduisant $\frac{7}{3}x$ & $\frac{1}{4}x$ au même dénominateur, on
 a $\frac{28}{12}x$ & $\frac{3}{12}x$ dont la différence est $\frac{13}{12}x$, &
 qu'en retranchant 60 de 250, il en reste 190.

XIV.

Par de semblables réductions qui sont tou-
 jours faciles à ceux qui sçavent l'Arithmétique,
 on changera toutes les équations du premier
 degré, quelques composées qu'elles soient, en
 d'autres qui n'auront que deux termes, dont
 l'un sera composé d'un certain nombre d' x en-
 tier ou rompu, & l'autre un terme entièrement
 connu, telles que sont les équations $4x =$
 8200 , $\frac{7}{3}x = 5320$, & résolues dans les art.
 V & VI.

Rappelons-nous maintenant ce que nous
 avons dit sur ces équations, & nous en tirerons
 des principes généraux pour toutes les autres.

De l'équation $4x = 8200$ nous avons tiré
 $x = \frac{8200}{4}$, parce qu'il s'ensuivoit de ce que $4x$
 valoit 8200, qu'un x ne pouvoit valoir que
 le quart de cette somme; de ce raisonnement
 & de ceux que l'on formeroit pareillement pour
 les autres nombres d' x , on tire ce principe gé-
 néral, qu'on peut ôter le multiplicateur qui affecte
 l'inconnue dans un des membres de l'équation,
 en le faisant servir de diviseur à l'autre membre.

XIII.

De l'équation $\frac{7}{3}x = 5320$, nous avons tiré
 $7x = 3 \times 5320$, en remarquant que si le tiers
 de $7x$ vaut 5320, $7x$ entiers doivent valoir
 trois fois davantage. De-là on forme ce prin-

Maniere de
 faire éva-
 nouir le
 multiplica-
 teur qui af-
 fecte l'in-
 connue.

Maniere de faire disparaître le diviseur qui affecte l'inconnue.

cipe général, que pour faire disparaître le diviseur qui affecte l'inconnue dans un membre de l'équation, on n'a qu'à le faire servir de multiplicateur à l'autre membre.

X V I.

Avec ces regles on est en état de résoudre toutes sortes d'équations du premier degré. Pour exercer les Commençans, voici quelques exemples.

Exemples d'équations du premier degré, résolues par les principes précédens.

$\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ se change par la transposition en $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$, ou en réduisant $\frac{6x}{5} - \frac{2}{3}x = 8$, ou $\frac{18}{15}x - \frac{10}{15}x = 8$, ou $\frac{8}{15}x = 8$, ou $8x = 8 \times 15$, ou en dernier lieu $x = 15$.

De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ devient en transposant $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$, ou $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19$, ou $\frac{7}{21}x - \frac{6}{21}x = 19$, ou $x = 399$.

Enfin $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ donne en transposant $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, qui, en réduisant d'abord $\frac{2}{9}$ & $\frac{1}{4}$ au même dénominateur, devient $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$, & qui, en réduisant $\frac{7}{5}$ & $\frac{1}{36}$ au même dénominateur, devient ensuite $\frac{2547}{180}x = 100$, ou $x = \frac{18000}{2547}$.

X V I I.

Au lieu de réduire toutes les fractions au même dénominateur, on peut faire disparaître l'un après l'autre tous les diviseurs de l'équation donnée, au moyen de la méthode suivante, qui a dû être bientôt imaginée par ceux qui, les premiers, ont manié ces sortes d'équations.

Maniere de faire évanouir les

Soit repris l'exemple précédent $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, il est clair que si on multiplie

les deux membres de cette équation par 9, les deux produits seront les mêmes; car des quantités égales, multipliées par le même nombre, doivent donner le même produit; on aura par cette multiplication $\frac{18}{9}x - \frac{2}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ qui, à cause que $\frac{18}{9}x = 2x$, se réduit à $2x - \frac{2}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$, dans laquelle le diviseur 9 a disparu, & l'on voit bien que cela devoit arriver nécessairement; car $\frac{2}{9}$ de quelque quantité que ce soit, multipliés par 9, doivent donner 2 entiers de cette même quantité. Pour faire disparaître de même 4, il faudra multiplier tous les termes de l'équation par 4, en observant seulement pour le terme $\frac{2}{4}x$ que la multiplication par 4 se fera en ôtant le 4 qui est dessous. Ainsi l'on aura $8x - 9x + \frac{252}{5}x = 3600$, ou $\frac{252}{5}x - x = 3600$, qui, multipliant les deux membres par 5, deviendra $252x - 5x = 28000$, ou $247x = 18000$, ou $x = \frac{18000}{247}$.

Le principe général qu'on tire de-là, c'est que pour faire disparaître un diviseur d'un terme, il faut multiplier tous les autres termes par le diviseur, & l'ôter du terme où il est.

X V I I I.

On peut trouver une maniere de faire disparaître tous les diviseurs à la fois, en remarquant que si on multiplie tous les termes par un même nombre qui puisse se diviser par chacun de ces diviseurs, chaque terme se réduira. Multiplions, par exemple, l'équation $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$ par 180 qui peut se diviser par 9, par 4 & par 5, on aura $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{5}x = 18000$, ou $40x - 45x + 252x = 18000$, ou $247x = 18000$.

fractions
d'une équation.

Autre méthode par laquelle on les fait tous évanouir à la fois.

Or pour trouver ce nombre qui puisse se diviser par tous les diviseurs, il ne faut que multiplier successivement ces diviseurs les uns par les autres. Qu'on ait, par exemple, $\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$ dont on veuille faire évanouir les diviseurs, je multiplie d'abord 3 par 5, & je multiplie ensuite leur produit 15 par 7, ce qui me donne 105 pour le nombre qui est divisible par 3, 5, 7: ce nombre trouvé, je m'en fers pour multiplier toute l'équation, ce qui me donne $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$, ou $245x + 21x = 16800 - 30x$.

Pour abrégér encore cette opération, au lieu de former le produit 105 des trois diviseurs, on se contentera d'écrire ainsi ce produit $3 \times 5 \times 7$,

la multiplication donne alors $\frac{7 \times 3 \times 5 \times 7}{3}x$

+ $\frac{7 \times 3 \times 5}{5}x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2}{7}x$

dans laquelle on voit tout de suite que le nombre 3 doit s'en aller du numérateur de la 1ere. fraction, puisque la division par 3 doit être détruite en faisant la multiplication par 3; il en est de même du 5 & du 7, qui sont à la fois aux numérateurs & aux diviseurs des autres fractions.

Par ce moyen on arrive à l'équation $7 \times 5 \times 7x + 7 \times 3x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 \times 5x$ qui, en faisant les multiplications indiquées par les signes \times , donne $245x + 21x = 16800 - 30x$ délivrée des fractions.

X I X.

Pour suivre le plus vraisemblablement qu'il est possible l'ordre des inventeurs, nous ne nous arrêterons

arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la manière de mettre les Problèmes en équations. La résolution des équations a pû, indépendamment des Problèmes auxquels elles ont rapport, occuper les Algébristes lorsque cette Science a été avancée à un certain point; mais il est à présumer que ceux qui en ont jetté les fondemens, n'ont examiné les équations qu'à l'occasion des Problèmes dont elles étoient, pour ainsi dire, le dénouement. D'ailleurs il se trouve quelquefois dans les équations des complications dont on ne se seroit pas douté, si la nature des Problèmes qu'on cherchoit ne les avoit amenées.

Nous ne pouvons rien dire ici de plus clair, sur la manière générale de mettre les Problèmes en équations, que ce que nous avons dit, art. VIII; mais nous allons donner plusieurs exemples qui accoutumeront les Commençaans à cette recherche.

Pour payer un certain nombre d'Ouvriers sur le pied de 3 lb chacun, il manque 8 lb à un homme qui les fait travailler; mais en ne leur donnant à chacun que 2 lb, il lui reste 3 lb: on demande combien cet homme a d'argent.

Troisième
Problème.

Soit x le nombre de livres que possède cet homme, donc $x - 8$ est la somme qui peut satisfaire tous les Ouvriers sur le pied de 3 lb; & comme le nombre des Ouvriers doit être trois fois plus petit que celui qui exprime cette som-

On emploie
une barre
en Algèbre
comme en
Arithmétique
pour
indiquer la
division.

B

me, il sera exprimé par le tiers de $x + 8$, ce qu'on écrira ainsi $\frac{x + 8}{3}$; car en Algebre comme en Arithmétique une barre horifontale indique toujours la division de la quantité supérieure par l'inférieure.

De plus, puisqu'il reste 3 lb quand on ne donne que 2 lb à chaque Ouvrier, $x - 3$ est donc la somme suffisante pour payer tous ces Ouvriers à raison de 2 lb chacun. Donc $\frac{x - 3}{2}$

peut exprimer le nombre d'Ouvriers, mais puisque nous avons deux valeurs du même nombre, il faut qu'elles soient égales; le Problème est donc réduit à la résolution de l'équation $\frac{x - 3}{2} = \frac{x + 8}{3}$

Pour la résoudre nous commencerons par faire disparaître le diviseur 2 du membre $\frac{x - 3}{2}$ de cette équation, en multipliant l'autre membre par ce même nombre 2, ce qui changera l'équation en $x - 3 = \frac{2x + 16}{3}$; car il est évident que le double de $\frac{x - 3}{2}$ est $x - 3$, & que le double de $\frac{x + 8}{3}$ fera $\frac{2x + 16}{3}$ par la même raison que $2x + 16$ est le double de $x + 8$. On fera ensuite évanouir le diviseur 3 de l'équation $\frac{2x + 16}{3} = x - 3$, en multipliant le second membre par 3 & en l'ôtant

du premier, ce qui donnera $2x + 16 = 3x - 9$, ou $x = 25$.

Si on veut sçavoir à présent combien il y a d'Ouvriers, il faut prendre une des deux expressions $\frac{x-3}{2}$ ou $\frac{x+8}{3}$ qu'on a trou-

vées pour ce nombre $\frac{x-3}{2}$ par exemple.

Puisqu'on sçait maintenant que $x = 25$, $x-3$ sera donc 22, & partant $\frac{x-3}{2}$ fera $\frac{22}{2} = 11$ nombre d'Ouvriers demandé.

XX.

Il est bon de remarquer à propos de l'équation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, qu'il ne seroit

pas permis pour y appliquer la regle de l'art. XI. de changer de côté & de signe les quantités -3 & $+8$, & d'écrire ainsi l'équation

$\frac{x-8}{2} = \frac{x+3}{3}$, parce que le nombre

-3 n'est pas proprement un terme du premier membre, mais seulement un terme de son dividende $x-3$; la quantité $\frac{x-3}{2}$ n'étant

réellement qu'un seul terme de l'équation, ainsi

que $\frac{x+8}{3}$. Pour appliquer donc la regle de

l'art. XI, il faudroit commencer par prendre, ainsi qu'il est indiqué par le nombre 2 qui est sous la premiere barre, la moitié de $x-3$ ce qui donneroit $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; ensuite il faudroit prendre, à cause du 3 qui est sous l'autre barre,

le tiers de $x + 8$ qui feroit $\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$: égalant alors ces deux quantités on auroit l'équation $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ dans laquelle on pourroit faire les transpositions qu'on voudroit.

X X I.

Le Problème précédent pourroit encore être résolu de la maniere suivante.

Autre solution du même Problème.

Que y exprime le nombre d'Ouvriers, $3y$ fera l'argent qu'il faudroit leur donner sur le pied de 3 lb chacun. Mais il manque 8 lb pour les satisfaire à ce prix : donc $3y - 8$ est l'argent que possède celui qui les doit payer.

D'un autre côté $2y$ seroit ce qu'il faudroit pour payer ces Ouvriers à raison de 2 lb, & il resteroit en ce cas 3 lb. Donc $2y + 3$ est une autre expression de l'argent que possède celui qui les doit payer.

Il faut donc égaler les deux quantités $2y + 3$ & $3y - 8$, ou ce qui revient au même, il faut résoudre l'équation $2y + 3 = 3y - 8$ pour avoir la valeur de y . Cette équation étant résolue par les principes précédens, ce qui est fort facile, on aura 11 pour y , c'est-à-dire pour le nombre d'Ouvriers demandé.

X X I I.

Quatrieme Problème.

Un Courier est parti d'un lieu, il y a 9 heures & fait 5 lieues en 2 heures, on envoie un autre Courier après lui, dont la vitesse est telle qu'il fait 11 lieues en 3 heures; il s'agit de savoir où le second Courier attrapera le premier.

Soit x le chemin que le second Courier fera avant d'avoir attrapé le premier, il est évident que ce chemin doit être égal à celui que le pre-

mier Courrier avoit fait pendant ses 9 heures d'avance, plus au chemin que le même premier Courrier fait pendant le tems que marche le second Courrier. Pour trouver d'abord le chemin que le premier Courrier avoit fait pendant 9 heures, il faut faire cette proportion * ou regle de trois.

Comme 2 heures sont à 5 lieues, ainsi 9 heures sont à un quatrieme terme, qui, suivant les regles connues en Arithmétique, se trouvera en multipliant le second terme 5 de la proportion par le troisieme 9, & en divisant leur produit par le premier 2; & qui sera par conséquent $\frac{45}{2}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant les 9 heures.

Mais comme en Algebre on veut toujours écrire ses opérations le plus courtement qu'il est possible; voici comment on dénote cette proportion :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{heures} & & \text{lieues} & & \text{heures} & & \text{lieues} \\ 2 & : & 5 & = & 9 & : & \frac{45}{2} \end{array}$$

Les signes: servant, l'un à comparer 2 à 5, & l'autre 9 à $\frac{45}{2}$ & le signe = servant à marquer l'égalité qui doit être entre le rapport de 2 à 5 & celui de 9 à $\frac{45}{2}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le même Courrier fera pendant le temps que le second Courrier fera le chemin x , on cherchera, premierement, le temps qu'il faut au second Cour-

Maniere
dont on ex-
prime les
propor-
tions en
Algebre.

* Je suppose ici, ou qu'on ait lû dans mes Elémens de Géométrie les articles IX. X, &c. de la seconde Partie, dans lesquels on traite des proportions, ou qu'au moins on possède bien la regle de trois expliquée dans les Livres d'Arithmétique.

rier pour faire le chemin x , ce qui se trouvera par cette proportion ;

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{lieues} & \text{heures} & \text{lieues} & & \text{heures} & \\ & \text{II} & : 3 & = x & : & \frac{3x}{\text{II}} & \end{array}$$

par laquelle, sans s'embarasser du nombre de lieues contenues dans x , on apprend qu'il suffit de multiplier ce nombre par 3 & de le diviser par II, pour avoir le nombre d'heures qu'il faut au second Courrier pour le parcourir.

Sans faire attention maintenant si le nombre d'heures exprimé par $\frac{3}{\text{II}} x$ est connu, ou s'il est inconnu, on fera cette proportion ;

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{heures} & \text{lieues} & \text{heures} & & \text{lieues} & \\ & 2 & : 5 & = \frac{3}{\text{II}} x & : & \frac{5}{2} x & \end{array}$$

dont le quatrième terme $\frac{5}{2} x$ exprime le chemin du premier Courrier, pendant le tems $\frac{3}{\text{II}} x$, c'est-à-dire, avant d'être attrapé.

Par ce moyen on a la même quantité exprimée de deux façons différentes ; car le chemin du second Courrier a premièrement pour expression x , en second lieu il est la somme des $\frac{45}{2}$ lieues d'avance qu'avoit le premier Courrier sur lui, & des $\frac{15}{22} x$ que ce même premier Courrier devoit avoir fait, jusqu'à ce qu'il fût attrapé. Egalant donc ces deux expressions, on aura l'équation $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22} x$ qui donne par les regles précédentes $x = 70 + \frac{1}{7}$.

XXIII.

Si le premier Courrier, outre l'avantage qu'il a d'être parti plutôt, avoit encore celui d'être parti d'un lieu plus avancé, la question, quoique plus compliquée, seroit aisément réduite aux mêmes principes.

Que le premier Courrier, par exemple, allant en Espagne, soit parti d'Orléans le lundi à 8 heures du soir en faisant 7 lieues en 3 heures, & que le second Courrier allant après le premier soit parti le mardi matin à 10 heures de Paris, supposé à 34 lieues d'Orléans, en faisant 13 lieues en 4 heures, on demande le lieu de leur rencontre.

Pour résoudre cette question, il faut prendre la différence de 8 heures du soir, à 10 heures du matin, ce qui donne 14 heures; & comme le premier fait 7 lieues en 3 heures, on aura par cette proportion.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{heures} & & \text{lieues} & & \text{heures} & & \text{lieues} \\ 3 & : & 7 & = & 14 & : & \frac{98}{3} \end{array}$$

Lesquelles étant ajoutées avec les 34 lieues d'avance donneront $34 + \frac{98}{3}$ ou $\frac{200}{3}$ lieues pour la distance de Paris où étoit le premier Courrier, lorsque le second est parti. Ensuite on fera comme ci-dessus, cette proportion;

$$\begin{array}{ccccccc} \text{lieues} & & \text{heures} & & \text{lieues} & & \text{heures} \\ 13 & : & 4 & = & x & : & \frac{4}{13}x \end{array}$$

nombres d'heures nécessaires au second Courrier pour faire le chemin x .

Mais pendant ce même nombre d'heures, le premier Courrier aura fait un chemin qu'on trouvera ainsi.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{heures} & & \text{lieues} & & \text{heures} & & \text{lieues} \\ 3 & : & 7 & = & \frac{4}{13}x & : & \frac{28}{39}x \end{array}$$

L'on aura donc l'équation $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$ d'où l'on tire, par les règles expliquées ci-dessus, $x = 236 + \frac{4}{11}$, chemin du second Courrier, lorsqu'il aura attrapé le premier.

B iv

Lorsque les premiers Algébristes ont eu trouvé la solution de quelque question qui les intéressoit, ils n'ont gueres manqué d'en faire différentes applications en variant les nombres donnés dans ces questions. Par exemple, ils auront répété plusieurs fois la question précédente, en changeant les rapports des vitesses des Courriers, & la distance entre leurs départs. Dans ces différentes applications, ils ont senti qu'il y avoit une partie de l'opération qu'on répétoit à chaque exemple particulier du même Problème, & qui pouvoit se faire une fois pour toutes en cherchant quelque solution où l'on ne se retraignît point à tel ou tel nombre particulier, mais qui fût générale pour tout nombre donné. Pour faire voir ce qu'ils ont imaginé à ce sujet, nous allons reprendre le Problème précédent, & le traiter le plus généralement qu'il nous sera possible.

Solution
du Problème
précédent pris
généralement.

Soit exprimée la distance qui est entre les deux Courriers pour la lettre *a*
on fera de cet *a* le nombre de lieues qu'on voudra, lorsque la question sera poussée jusqu'à la fin.

Soit exprimé ensuite le nombre d'heures dont le départ du premier Courrier a précédé celui du second par la lettre *b*

Que la vitesse du premier Courrier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues *c*
pendant le nombre d'heures *d*

Que la vitesse du second Courrier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues *e*
dans le nombre d'heures *f*

Soit enfin comme dans la solution particulière le chemin que le second Courier doit faire pour joindre le premier x

C'est une attention qu'on a communément dans l'Algebre de prendre les premieres lettres *a, b, c,* &c. de l'Alphabet, pour exprimer les quantités connues & les dernieres *s, t, u, x,* &c. pour celles qu'on cherche.

Pour trouver présentement, à l'exemple de la méthode qu'on a suivie dans l'exemple précédent, le chemin que fait le premier Courier pendant le nombre d'heures *b,* il faudra chercher le quatrieme terme d'une proportion, dont le premier terme soit le nombre d'heures *d,* le second le nombre de lieues *c,* le troisieme le nombre d'heures *b,* & il est clair que cette opération se fera, comme dans toutes les autres regles de trois, en multipliant le second & le troisieme terme, l'un par l'autre, & en divisant leur produit par le premier terme.

Quant à la maniere d'exprimer le produit de ces termes qui ne sont plus comme ci-dessus des chiffres, mais des lettres propres à exprimer des nombres quelconques, ce qu'on a trouvé de plus simple, c'est de placer à côté l'une de l'autre, les lettres qu'on veut multiplier; à l'égard de la division, nous avons déjà vû qu'en Algebre, comme en Arithmétique, on mettoit une barre horifontale entre les quantités qu'on veut diviser.

Par ce moyen la proportion précédente s'écrit ainsi $d : c = b : \frac{b \cdot c}{d}$.

On emploie les premieres lettres de l'Alphabet, pour exprimer ce que l'on connoît, & les dernieres pour ce qu'on ne connoît pas.

Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles, sont censées se multiplier.

Ayant donc $\frac{b}{d} \frac{c}{d}$ pour exprimer le chemin que le premier Courrier a fait avant que le second soit parti, si on ajoute à ce chemin la distance a qui étoit entr'eux, on aura pour le chemin d'avance du premier au moment du départ du second $a + \frac{b}{d} \frac{c}{d}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le premier Courrier fait pendant que l'autre court après lui & qu'il parcourt x ; commençons, ainsi que ci-dessus, par trouver le tems que le second Courrier met à parcourir l'espace x , ce qui se fera par le moyen d'une proportion

$e : f = x : \frac{f}{e} x$ dont le premier terme sera le nombre de lieues e ; le second, le nombre d'heures f ; le troisieme, le nombre de lieues x , & le quatrieme $\frac{f}{e} x$ le tems cherché.

Or, quel que soit le nombre d'heures $\frac{f}{e} x$ qu'ait couru le second Courrier pour attraper le premier, on sçait que si on fait une proportion dont les trois premiers termes soient, 1°. le nombre d'heures d ; 2°. le nombre de lieues c ; 3°. le nombre précédent $\frac{f}{e} x$, le quatrieme terme sera le chemin que le premier Courrier a fait dans le même tems que le second a parcouru x .

Cette proportion s'écrira ainsi $d : c = \frac{f}{e} x :$

$c \times \frac{f x}{\frac{c}{d}}$ nombre de lieues faites par le premier

Courrier, pendant que le second parcourt x .

Mais le chemin du premier Courrier ajouté avec le chemin $a + \frac{b c}{d}$ qu'il avoit d'avance, doit éгалer le chemin du second.

On a donc l'équation $x = a + \frac{b c}{d} +$

$$c \times \frac{f x}{\frac{c}{d}}.$$

Si on se ressouvient des opérations des fractions, on doit sçavoir que pour multiplier une fraction comme $\frac{6}{3}$ par 4, il faut multiplier le numérateur * & écrire $\frac{6 \times 4}{3}$ ou $\frac{24}{3}$. De mê-

* On doit avoir vû dans l'Arithmétique, que le numérateur d'une fraction est le nombre placé au-dessus de la barre, & qui sert de dividende; de même qu'on appelle dominateur, le nomhre qui est au-dessous de la barre, & qui sert de diviseur. Les opérations d'Arithmétique, que je suppose ici, & dans beaucoup d'autres endroits de cet ouvrage, sont expliquées assez clairement dans plusieurs Livres. Pour éviter cependant aux Lecteurs la peine d'y recourir, je vais en peu de mots rappeler ces opérations & les raisons sur lesquelles elles sont fondées.

Pour multiplier une fraction telle que $\frac{5}{7}$ par 8 on multiplie le numérateur 5 par 8, & l'on écrit le même diviseur sous leur produit 40, ce qui donne $\frac{40}{7}$ la raison en est claire; car 8 fois 5 septiemes doivent faire 40 septiemes, comme 8 fois 5 grandeurs quelconques font 40 de ces mêmes grandeurs.

Pour diviser $\frac{3}{5}$ par 4, il faut écrire sous le numéra-

me pour multiplier $\frac{f x}{e}$ par c , il faut multiplier c par $f x$ & laisser le diviseur e , ce qui donne $\frac{c f x}{e}$ pour $c \times \frac{f x}{e}$. On sçait de plus que quand on divise une fraction comme $\frac{5}{3}$ par un nombre quelconque comme 6, il faut multiplier le dénominateur 3 par ce nombre 6, ce qui donne $\frac{5}{3 \times 6}$ ou $\frac{5}{18}$. De même pour diviser la fraction $\frac{c f x}{e}$ par d , il faut écrire $\frac{c f x}{d e}$.

Ayant ainsi changé l'expression précédente $c \times \frac{f x}{e}$ en $\frac{c f x}{d e}$ l'équation qu'on doit résoudre

est $\frac{c f x}{d e} = \frac{20}{5}$ le produit 20 de 4 par le dénominateur 5, ce qui donne $\frac{3}{20}$. La raison en est que 1 cinquième devenant 1 vingtième, lorsqu'on le divise par 4, 3 cinquièmes doivent devenir 3 vingtièmes par la même division.

Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{8}{3}$ on multiplie les numérateurs 5 & 8, & on divise leur produit 40 par le produit 21 des dénominateurs 3 & 7 ce qui donne $\frac{40}{21}$. Cette opération est fondée sur ce que le produit de $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit être 3 fois plus petit que celui de 8 par $\frac{5}{7}$, mais 8 par $\frac{5}{7}$ a donné $\frac{40}{7}$ donc $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit donner le tiers de $\frac{40}{7}$, c'est-à-dire $\frac{40}{21}$.

Enfin, pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{11}$ il faut multiplier le numérateur 3 de la première fraction par le dénominateur 11 de la seconde, & diviser leur produit 33 par le produit 20 du dénominateur 5 de la première fraction & du numérateur 4 de la seconde, ce qui donne $\frac{33}{20}$. Opération dont on voit la raison en remarquant que $\frac{3}{5}$ divisés par 4 donneroient $\frac{3}{20}$, & que $\frac{3}{5}$ divisés par $\frac{4}{11}$ qui sont 11 fois plus petits que 4 doivent donner un quotient 11 fois plus grand, c'est-à-dire $\frac{33}{20}$.

foudre est $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$. Opération qui demande qu'on commence, ainsi qu'on l'a enseigné art. XVIII. par multiplier tous les termes, excepté le dernier, par le diviseur de afin de l'ôter de ce terme.

Nous aurons par cette opération $dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$ ou $dex = ade + bce + cfx$ à cause que $\frac{bcde}{d}$ est la même chose que bce , puisque la quantité bce reste la même lorsqu'on la multiplie & qu'on la divise par d .

Passant le terme cfx dans le premier membre, on aura $dex - cfx = ade + bce$.

Afin de trouver x dans cette équation, nous remarquerons que si nous connoissons les nombres de , & cf qui expriment ce que contiennent d' x les termes dex , & cfx , nous retrancherions le second du premier, & que le reste qui exprimeroit la quantité d' x contenue dans le premier membre de l'équation, serviroit de diviseur au second membre, pour avoir la valeur de x . Or, sans connoître les nombres de & cf , il est clair que $de - cf$ exprime leur différence, & par conséquent la quantité d' x que contient le premier membre de l'équation $dex - cfx = ade + bce$. Donc x a pour valeur ce qui vient en divisant le second membre par ce nombre $de - cf$. Donc $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$ & c'est-là la solution générale du Problème pré-

cèdent ; car qu'on sçache à présent ce que c'est que a, b, c, d, e, f , on n'aura plus qu'à en faire l'usage indiqué par cette valeur générale de x , c'est-à-dire, multiplier successivement a, d, e , l'un par l'autre : ajouter à ce produit celui que l'on a en multipliant successivement b, c, e , & diviser la somme de ces deux produits, par le nombre qui est la différence du produit de c par f au produit de d par e , & l'on aura par cette opération, telle solution particulière qu'on voudra.

X X V.

Applica-
tion de la
solution
précédente
à des nom-
bres.

Supposons, par exemple, comme dans l'art. XXIII. que la distance entre les deux Courriers soit de 34 lieues, que le premier Courrier soit parti 14 heures plutôt que le second, qu'il fasse 7 lieues en 3 heures, & que le second fasse 13 lieues en 4 heures, on aura.

$$a = 34, b = 14, c = 7$$

$$d = 3, e = 13, f = 4$$

qui donneront

$$ade = 34 \times 3 \times 13, \text{ c'est-à-dire} \\ = 102 \times 13 = 1326,$$

$$bce = 14 \times 7 \times 13 = 1274$$

& par conséquent $ade + bce = 2600$

$de = 39, cf = 28$ & partant $de - cf = 11$
d'où l'on tirera

$$x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$$

ainsi qu'on l'a trouvé dans l'art. XXIII.

Autre ap-
plication.

Si on veut ensuite tirer de la solution générale le premier cas calculé dans l'art. XXII. où les deux Courriers étoient supposés partir du

même lieu, le premier ayant 9 heures d'avance, & une vitesse capable de lui faire faire 5 lieues en 2 heures, tandis que le second en fait 11 en 3. On aura dans ce cas.....

$$a = 0, b = 9, c = 5,$$

$$d = 2, e = 11, f = 3,$$

& substituant ces valeurs dans la formule générale ou valeur de x , on aura $x = \frac{9 \times 5 \times 11}{2 \times 11 - 5 \times 3}$

$= \frac{495}{7} = 70 + \frac{5}{7}$ ainsi qu'on l'a trouvé dans l'art. XXII. On fera de même tant d'autres applications qu'on voudra.

XXVI.

On n'a pas eu plutôt trouvé la manière de généraliser un Problème en se servant de lettres au lieu de nombres, qu'on a presque toujours pris les Problèmes dans leur plus grande généralité; il faut donc accoutumer les Commencans à les traiter ainsi. Dans cette vue nous allons résoudre le Problème suivant.

Un Ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a dans un tems exprimé par b; un second fait l'ouvrage c dans le tems d, un troisieme l'ouvrage e dans le tems f, on demande quel tems il faudra à ces trois Ouvriers travaillant ensemble pour faire l'ouvrage g. Cinquieme Problème.

Soit x le tems cherché on aura l'ouvrage fait par le premier dans ce tems, en faisant la proportion suivante :

$$b : a = x : \frac{a x}{b}$$

On aura l'ouvrage fait dans le même tems par le second Ouvrier en faisant la proportion.

$$d : c = x : \frac{c x}{d}$$

Enfin on aura l'ouvrage fait dans le même tems par le troisieme Ouvrier par le moyen de cette proportion.

$$f : e = x : \frac{e x}{f}$$

Donc $\frac{e x}{f} + \frac{c x}{d} + \frac{a x}{b}$ est l'ouvrage des trois Ouvriers lorsqu'ils travaillent ensemble pendant le tems cherché, mais cet ouvrage doit éгалer g , on a donc l'équation

$$\frac{e x}{f} + \frac{c x}{d} + \frac{a x}{b} = g.$$

Pour la résoudre, on multipliera, suivant les principes de l'article XVIII. toute l'équation par le produit $fb d$ des diviseurs, & l'on aura

$$\frac{e d b f x}{f} + \frac{c d b f x}{d} + \frac{a x f d b}{b} = b d f g$$

qui se réduit à $e d b x + f c b x + a d f x = b d f g$, dans laquelle remarquant que $e d b + f c b + a d f$ doit exprimer le nombre d' x contenus dans le second membre, on aura

$$x = \frac{b d f g}{b d e + b c f + a d f}.$$

X X V I I.

Exemple en
nombres.

Pour faire quelque application de ce Problème, supposons qu'un Mâçon ait pû faire 7 pieds courans d'une muraille en 5 jours, qu'un second Mâçon en ait pû faire 10 pieds en 3 jours,

&

& un troisieme 11 en 4 jours, on demande le tems dans lequel ces trois Maçons travaillant ensemble, feront 150 pieds courans de la même muraille.

On aura par ces suppositions

$$a = 7; b = 5; c = 10; d = 3; e = 11; f = 4, g = 150,$$

& partant $bdfg = 5 \times 3 \times 4 \times 150 = 9000$
 $bde = 5 \times 3 \times 11 = 165; bcf = 5 \times 10 \times 4 = 200; adf = 7 \times 3 \times 4 = 84$, ce qui donnera pour la valeur de x , $\frac{200}{449}$, ou $20 + \frac{20}{449}$ nombre de jours dans lequel l'ouvrage proposé fera fait.

XXVIII.

Autre exemple.

Supposons maintenant qu'on demande en quel temps un réservoir de 200 pieds cubes sera rempli par trois tuyaux, dont le premier pourroit remplir 9 pieds cubes en $2\frac{1}{2}$ jours, le second 15 pieds cubes en $3\frac{1}{3}$ jours, & le troisieme 19 pieds cubes en $5\frac{1}{4}$ jours; on aura $a = 9; b = 2\frac{1}{2}$, ou $\frac{5}{2}; c = 15; d = 3\frac{1}{3}$, ou $\frac{10}{3}; e = 19; f = 5\frac{1}{4}$, ou $g = 200$.

Par les substitutions on aura,

$$x = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times 100}{\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 19 + \frac{5}{2} \times 15 \times \frac{21}{4} + 9 \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4}}$$

qui devient
$$\frac{21000}{\frac{2 \times 3 \times 4}{950 + 1575 + 1890}}$$

$$\frac{21000}{3 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 4}$$

Pour réduire cette quantité, je multiplie le numérateur & le dénominateur de la pre-

C

miere fraction du diviseur par 4; le numérateur & le dénominateur de la seconde par 3; & le numérateur & le dénominateur de la troisieme par 2, ce qui change la quantité

$$\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}$$

en

$$\frac{3800}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4725}{2 \times 3 \times 4} + \frac{3780}{2 \times 3 \times 4}$$

$$\text{ou } \frac{210000}{12305} \text{, ou } \frac{210000}{12305} \text{, ou } 17 + \frac{163}{2461}$$

nombre cherché des jours qu'il faudroit pour remplir le réservoir donné, en laissant couler les trois tuyaux à la fois.

X X I X.

Les regles des art. X. & suiv. suffisent pour les équations littérales.

L'application de ces regles a donné naissance à plusieurs opérations de l'Algebre.

On voit par les deux Problèmes précédens, que les régles qu'on a données (art. X. & suiv.) pour résoudre les équations numériques du premier degré, peuvent également s'appliquer aux équations littérales; mais on voit en même-temps que ces régles sont trop succintes pour que les Commençaans n'ayent pas besoin qu'on les conduise encore dans la maniere de les employer, nous nous croyons d'autant plus obligés à les aider par un grand nombre de ces applications, que c'est probablement à un pareil travail qu'on doit plusieurs opérations d'Algebres très-utiles, que nous allons pour ainsi dire, découvrir chemin faisant.

Soit proposé de résoudre l'équation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$,

Je commence par passer les termes $3ac$ & $-5ab$ dans l'autre membre de l'équation en les changeant de signe, ce qui me donne $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$. Je passe de même le terme $-ax$ de l'autre côté, en observant aussi de changer son signe, ce qui me donne $2ac + ab - 3ac + 5ab, = 2ax - dx + ax$. Je réduis ensuite cette équation, 1°. En ajoutant ab avec $5ab$, ce qui me donne $6ab$; 2°. En mettant $-ac$ au lieu des termes $2ac$ & $3ac$; 3°. En mettant $3ax$ au lieu de $2ax + ax$; ainsi l'équation proposée devient $6ab - ac = 3ax - dx$ qui donne $x = \frac{6ab - ac}{3a - d}$.

Premier exemple de résolution d'équations littérales.

XXX.

Soit $5ab + 2ax - 3bd = 2ab - 5ax + 7bd - ac - dx$; les termes $5ab - 3bd$ deviendront $-5ab + 3bd$ en passant dans le second membre & les termes $-5ax - dx$ deviendront $+5ax + dx$ en passant dans le premier; on aura donc $2ax + 5ax + dx = 2ab + 7bd - ac - 5ab + 3bd$ qui se réduit à $7ax + dx = 10bd - 3ab - ac$ en mettant $7ax$ à la place de $2ax + 5ax$, $10bd$ à la place de $7bd + 3bd$, & $-3ab$ à la place de $2ab - 5ab$.

Deuxieme exemple de résolution d'équations littérales.

Dégageant présentement x de cette équation

on aura $x = \frac{10bd - ac - 3ab}{7a + d}$.

XXXI.

Dans la résolution des deux équations précédentes on a eu besoin de réduire à une plus simple expression différens termes de même es-

Réduction des quantités à leur plus simple expression,

pece, tels que $2ac$ & $-3ac$; $5ab$ & ab ; &c. comme cette opération est presque toujours nécessaire dans les équations à résoudre & dans les autres parties de l'Algèbre, les Commencans doivent chercher à la pratiquer facilement. Pour leur en donner le moyen; voici quelques exemples.

On appelle termes positifs ceux qui sont précédés de $+$ négatifs, ceux qui sont précédés de $-$.

Soit $15abc - 13bcd - 7abc + 29bcd - 5abf + 9abc + chi$ à réduire.

On prendra d'abord les termes $15abc$, $-7abc$ & $9abc$ qui sont de même espèce, & on ajoutera les deux termes $15abc$ & $9abc$, qui sont l'un & l'autre positifs, c'est-à-dire, affectés du signe $+$; on retranchera ensuite de leur somme laquelle est $24abc$, le terme $7abc$ à cause qu'il est négatif ou précédé du signe $-$, par ce moyen $17abc$ sera ce que deviennent les trois termes $15abc - 7abc + 9abc$. De la même manière, au lieu de $29bcd - 13bcd$, on mettra $16bcd$. Quant aux termes $-5abf$ & $6chi$ qui sont seuls de leurs espèces, on les écrira tels qu'ils sont, ainsi la quantité réduite sera $17abc + 16bcd - 5abf + 6chi$.

Soit $\frac{1}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{1}{7}ax$, on aura en réduisant $\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad$.

La quantité $2acd - 5ach - 3acd + 3ach - 6bfi$ deviendra en réduisant $-acd - 2ach - 6bfi$, qui étant entièrement négative, montre que la quantité qu'on vouloit réduire renfermoit plus de négatif que de positif.

XXXII.

Il est à propos d'avertir ici que la réduction qu'on vient d'apprendre dans les exemples précédens, est absolument la même règle que celle qu'on appelle l'addition; car lorsqu'on se propose d'ajouter deux quantités quelconques, il suffit de les écrire de suite & de les réduire après à leur plus simple expression: qu'on ait besoin, par exemple, d'ajouter la quantité $6ab - 2ac = 3ad$ avec $3ab + ac - 2ad + bf$, il n'y a autre chose à faire que de réduire la quantité $6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf$, ce qui donnera donc $9ab - ac - 5ad + bf$ pour la somme des deux proposées.

L'Addition Algébrique est la même opération que la précédente.

Si on veut ajouter les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$, il ne s'agira que de réduire la quantité $2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af$. La réduction faite, il viendra $-3ac - 2ad - af$. On s'étonnera peut-être d'abord qu'une Addition puisse mener à une quantité négative; mais l'on trouvera bientôt le dénouement de cette difficulté en remarquant qu'il faut nécessairement, ou que les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$ soient toutes deux négatives, ou qu'au moins l'une des deux soit négative & plus grande que l'autre.

C'est ce qu'on reconnoîtra plus facilement en faisant quelques exemples en nombres. Supposons d'abord que $a = 2$, $c = 3$, $d = 4$; $f = 5$, dans ce cas, au lieu de $2ac - 3ad + af$ nous aurons $11 - 24 + 10$ ou simple-

ment $= 2$, & au lieu de $ad - 5ac - 2af$ il viendra $8 - 30 - 20 = -42$. Ainsi leur somme sera -42 , & on ne sera pas étonné que la somme de deux quantités négatives soit négative.

Supposons ensuite que $a = 6$; $c = 5$; $d = 3$; $f = 2$, on aura $2ac + 3ad + af = 18$ & $ad - 5ac - 2af = -156$. Or, comme la seconde quantité est négative, & plus grande que la première, la somme doit être négative.

XXXIII.

Comment on peut dire que l'on a ajouté une quantité négative.

On demandera peut-être si on peut ajouter le négatif avec le positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute une quantité négative. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux hommes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai qu'ils ajoutent leurs biens; que l'un ait des dettes & des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possédera qu'un bien négatif, & la jonction de sa fortune à celle du premier, diminuera le bien de celui-ci, en sorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédoit le premier, ou même entièrement négative.

XXXIV.

On tire encore de l'opération précédente la soustraction algébrique.

La réduction enseignée dans les articles précédens, donne encore naissance à une autre règle d'Algèbre, la Soustraction; car, par exemple, lorsque dans l'équation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$ (art. XXIX.) on a passé les termes $3ac - 5ab$ de l'autre

côté, en les changeant de signe, & qu'on est arrivé à l'équation $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$, ou $-ac + 6ab - ax = 2ax - dx$, je dis qu'on a retranché la quantité $3ac - 5ab$ de la quantité $2ac + ab - ax$ & que le reste est $-ac + 6ab - ax$. Car, en faisant disparaître $3ac - 5ab$ du second membre de l'équation, c'est une Soustraction qu'on a faite de cette quantité: or, pour que l'égalité soit conservée, il faut qu'on ait fait une pareille Soustraction de l'autre côté; donc $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$, ou $-ac + 6ab - ax$ est ce qui reste de la quantité $2ac + ab - ax$ lorsqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Ainsi lorsqu'on a deux quantités dont l'une doit être soustraite, il faut changer les signes de celle qu'on veut soustraire, l'écrire à la suite de l'autre, puis faire la réduction des quantités de même espece, ce qui, indépendamment de ce qu'on vient de dire, pourroit se démontrer de la maniere suivante.

Procédé de la Soustraction.

Soit la quantité $2ac + ab - ax$ dont on se propose de retrancher la quantité $3ac - 5ab$. Il est évident que si on vouloit retrancher de la premiere quantité simplement $3ac$, il faudroit écrire $2ac + ab - ax - 3ac$, mais en retranchant la quantité $3ac$ au lieu de $3ac - 5ab$ on retranche une quantité trop grande de $5ab$: donc il faut ajouter les $5ab$ qu'on a ôté de trop en ôtant $3ac$. Donc il faut écrire $2ac + ab$

Civ

$-ax - 3ac + 5ab$ pour le reste de $2ac + ab - ax$ lorsqu'on a ôté $3ac - 5ab$.

Afin de s'exercer dans cette règle qu'on sent bien devoir être employée souvent, j'ajouterai les exemples suivans.

De $5ab + 10fg - 3ac + 2de$ si on retranche $2ab - 5fg + 6ac + de$, il restera $5ab + 10fg - 3ac + 2de - 2ab + 5fg - 6ac - de$, ou $3ab + 15fg - 9ac + de$.

De là quantité $6aeb + 3agh - 10bcd$ si on retranche $abc - 10aeb - 8agh$, on aura $16aeb - abc - 10bcd + 11agh$.

De la quantité $3ac + ab + be$ si on retranche la quantité $-ac - 3ab$, il viendra $4ac + 4ab + be$.

XXXV.

On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait une quantité négative.

Si on s'étonne que dans cette Soustraction le reste $4ac + 4ab + be$ soit plus grand que la quantité $3ac + ba + be$ dont on se proposoit de soustraire $-ac - 3ab$, ce ne pourra être qu'en confondant, soustraire & diminuer; car si on reconnoît, au contraire, que soustraire une quantité quelconque, a , par exemple, d'une autre b , c'est sçavoir de combien b surpasse a , on trouvera très-possible qu'une quantité augmente par une soustraction. Qu'on demande, par exemple, de combien un homme est plus riche qu'un autre, si ce dernier n'a que des dettes, on verra bientôt que l'excès de richesse du premier sera ce qu'il possède plus une somme égale aux dettes de l'autre.

XXXVI.

Soit proposé de résoudre présentement l'é-

$$\text{quation } \frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$$

pour faire disparoître d'abord le diviseur $2a$, on le fera servir, suivant l'art XV. de multiplicateur à tous les termes de l'équation, &

$$\text{l'on aura } cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2ax -$$

$$\frac{4ad \times 2a}{3c}, \text{ mais au lieu de } ac \times 2a$$

il est clair qu'on peut mettre $2aac$, puisque le produit de $2a$ par ac doit être double de celui de a par ac , & que le produit de a par ac doit être aac . De même $2ax$ sera $2ax$ & $4ad \times 2a$ fera $8aad$; car le produit de ad par a est aad & celui de $4ad$ par $2a$ doit être octuple de celui de ad par a .

$$\text{L'équation est donc changée en } cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}, \text{ ou } cx - \frac{aac}{b}$$

$$= 2ax - \frac{8aad}{3c} \text{ à cause que } \frac{2aac}{2b}$$

ou $\frac{aac}{b}$ font la même chose; multipliant

alors tous les termes de cette équation par b , elle deviendra $b \times cx - aac = 2ax \times b$

$$- \frac{8aad}{3c} \times b \text{ ou } bcx - aac = 2abx$$

$$- \frac{8aabd}{3c} \text{ qui se changera encore en } cbx$$

$$\times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabd,$$

$$\text{ou } 3bccx - 3aac = 6abcx - 8aabd,$$

Troisième
exemple de
résolution
d'équations
littérales.

car les produits de c par cbx , aac & $2abx$ feroient $bccx$, $aacc$, $2abcx$, & par conséquent ceux de $3c$ par les mêmes quantités, doivent être triples, c'est-à-dire, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$; transposant présentement, on aura $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabd$ qui donne enfin $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abd}$.

XXXVII.

Dans l'exemple précédent, la multiplication de quelques quantités qui contenoient les mêmes lettres, a donné la répétition de ces lettres dans les produits: or, comme les Algébristes cherchent toujours à s'exprimer de la maniere la plus courte, ils ont imaginé au lieu de répéter une lettre plusieurs fois de suite, de ne l'écrire qu'une seule fois, en plaçant au-dessus de cette lettre & à sa droite un chiffre, qui désigne le nombre de fois que cette lettre devoit être répétée. Par-là, au lieu de l'expression précédente $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$

Un chiffre placé au-dessus & à droite d'une lettre, désigne ce qu'elle auroit été répétée de fois par la multiplication.

Et dans ce cas la lettre est dite élevée à la puissance exprimée par ce chiffre qu'on appelle exposant.

on écrira $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$.

Lorsque dans une opération on aura besoin de aaa , c'est-à-dire, du produit de aa par a , ou de a multiplié par lui-même deux fois de suite, on mettra simplement a^3 . De même au lieu de $cccc$, c^4 . Lorsqu'une lettre est ainsi répétée ou plutôt censée répétée à l'aide d'un chiffre, on dit qu'elle est élevée à la puissance exprimée par ce chiffre, & que ce chif-

fre est son exposant. Ainsi c^4 ou $cccc$ qui est le produit de c trois fois par lui-même est dit c élevé à la quatrième puissance, & 4 est son exposant. Il faut bien prendre garde de confondre les chiffres qui servent d'exposant avec ceux qui sont à la gauche des lettres & sur la même ligne, ceux-ci sont nommés coefficients; dans $4a^2c$, par exemple, 4 est le coefficient du terme, 2 est l'exposant de a .

Les chiffres qui sont à gauche & sur la même ligne sont nommés coefficients.

XXXVIII.

Soit l'équation $\frac{2ac^2x}{3c^2d} + \frac{5ac^2}{b^2}$
 $= \frac{6cd^2}{a^2} - 3x$, en multipliant tous les termes par le diviseur $3c^2d$, on aura $2ab^2x + \frac{5ac^2 \times 3c^2d}{b^2} = \frac{6cd^2 \times 3c^2d}{a^2} - 3x \times 3c^2d$.

Quatrième exemple de résolution d'équations littérales.

Pour faire ensuite les multiplications indiquées par les signes \times ; nous remarquerons d'abord que ac^2 multiplié par c^2d doit donner pour produit ac^4d ; car si au lieu de ac^2 & de c^2d on écrivoit acc & ccd , ainsi qu'on le pourroit, on verroit tout de suite que le produit de acc par ccd seroit $accccd$; c'est-à-dire, suivant l'article précédent ac^4d . Ayant donc ac^4d pour le produit de ac^2 par c^2d , il est clair que $15ac^4d$ sera celui de $5ac^2$ par $3c^2d$.

De la même manière, on trouvera $18c^3d^3$ pour le produit de $6cd^2$ par $3c^2d$ & $9c^2dx$ pour celui de $3x$ par $3c^2d$. Donc l'équation

$$\begin{aligned} & \text{précédente se changera en } 2 a b^2 x + \frac{15 a c^4 d}{b^2} \\ & = \frac{18 c^3 d^3}{a^2} - 9 c^2 d x. \end{aligned}$$

Multipliant ensuite cette nouvelle équation par b^2 elle devient $2 a b^4 x + 15 a c^4 d = \frac{18 b^2 c^3 d^3}{a^2} - 9 b^2 c^2 d x$, & multipliant de même celle-ci par a^2 , on a $2 a^3 b^4 x + 15 a^3 c^4 d = 18 b^2 c^3 d^3 - 9 b^2 a^2 c^2 d x$ qui donne en transposant $2 a^3 b^4 x + 9 b^2 a^2 c^2 d x = 18 b^2 c^3 d^3 - 15 a^3 c^4 d$ d'où l'on tire enfin $x = \frac{18 b^2 c^3 d^3 - 15 a^3 c^4 d}{2 a^3 b^4 + 9 a^2 b^2 c^2 d}$.

XXXIX.

Les quantités complexes sont celles qui n'ont qu'un terme.

Multiplication des quantités complexes, tirée des deux exemples précédens.

Dans les deux exemples précédens, on a eu besoin de sçavoir multiplier des quantités exprimées par un simple terme telle que $4 a d$, $9 c^2 d$, &c. qu'on appelle communément quantités complexes ou monomes, & l'on a trouvé en même-temps ce qu'il falloit pour faire cette opération. La méthode générale qui résulte des raisonnemens qu'on a employés dans ces exemples particuliers, c'est de commencer par multiplier les coefficients; d'ajouter ensuite les exposans des mêmes lettres, & d'écrire de suite celles qui sont différentes. Ainsi, suivant cette regle, $3 a^5 b^3 d \times 7 a^2 b d^2 = 21 a^7 b^4 d^3$; $\frac{2}{3} a^2 c d \times \frac{2}{5} a c^3 b d = \frac{4}{15} a^3 c^4 b d^2 = \frac{6}{5} a^3 c^4 b d^2$; $\frac{2}{3} a c^2 d e \times 9 a^4 f g = 6 a^5 c^2 d e f g$.

X L.

Soit l'équation $\frac{a^2 c}{2 b} + \frac{4 c x}{3 a} = \frac{5 a b}{c}$ Cinquieme
 - $3 a$, en multipliant tous les termes par $8 b^2 c x$ résolution
 2 b^2 j'aurai $a^2 c + \frac{4 c x}{3 a} = \frac{10 a b^3}{c}$ d'équations
 - $6 a b^2$, multipliant ensuite tous les termes par $30 a^2 b^3$ littérales.
 3 a , j'aurai $3 a^3 c + 8 b^2 c x = \frac{30 a^2 b^3}{c}$
 - $18 a^2 b^2$, & faisant encore la même opération pour chasser le diviseur c , il vient $3 a^3 c^2$
 + $8 b^2 c^2 x = 30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c$, d'où l'on
 tire $x = \frac{30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$

qu'on peut encore écrire ainsi $x = \frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c^2}$

- $\frac{18 a^2 b^2 c^2}{8 b^2 c^2} - \frac{3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$; puisque
 $8 b^2 c^2$ divisant toute la quantité $30 a^2 b^3$
 - $18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2$ divise chacune de ses
 parties.

Or, la valeur d' x , ainsi écrite, peut avoir
 une plus simple expression en réduisant chaque
 terme. Car, 1°. au lieu de $\frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c^2}$ on

peut mettre $\frac{15 a^2 b}{4 c^2}$, parce qu'on peut regarder le numérateur, comme le produit $2 b$ par $15 a^2 b$, & le dénominateur comme celui de la même quantité $2 b^2$ par $4 c^2$; divisant donc l'un & l'autre par la même quantité $2 b^2$,

il vient $\frac{15 a^2 b}{4 c^2}$; 2°. au lieu de $\frac{18 a^2 b^2 c}{8 b^2 c^2}$

on peut mettre $\frac{9 a^2}{4 c}$; car le numérateur est

le produit de $2 b^2 c$ par $9 a^2$, & le dénominateur est le produit de la même quantité

$2 b^2 c$ par $4 c$. Au lieu de $\frac{3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$ on peut

mettre $\frac{3 a^3}{8 b^2}$. Donc la valeur d' x réduite est

$$\frac{15 a^2 b}{4 c^2} - \frac{9 a^2}{4 c} - \frac{3 a^3}{8 b^2}.$$

X L I.

Division
des quanti-
tés incom-
plexes, ti-
rée de cet
exemple.

La méthode qu'il faudra suivre générale-
ment dans toutes les opérations de même nature
que les précédentes, c'est-à-dire, dans les divi-
sions des quantités complexes, est aisée à tirer
de ce qu'on vient de dire, surtout après avoir
vu la multiplication des quantités complexes.
On peut énoncer ainsi cette méthode.

Diviser d'abord les coefficients si la division
est possible, ôter les lettres qui ont les mêmes
exposans aux numérateurs & aux dénomina-
teurs, diviser ensuite les lettres qui auront des
exposans différens dans le dénominateur & dans
le numérateur, en retranchant les plus petits
exposans des plus grands, & en laissant les ex-
posans résidus du côté où étoient les exposans
les plus grands. Quant aux lettres différentes,
il n'y a autre chose à faire qu'à les copier.

Comme cette opération est très-souvent né-
cessaire, il est bon de joindre ici quelques exem-
ples pour en faciliter l'usage aux Comménçans.

$$\frac{9a^1 d^2 b^2}{3a^4 c^2 d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}, \frac{18a^4 bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3 cd}{7b}$$

$$\frac{27a^3 b^2 c^5}{3a^2 bc^2} = 9abc^3, \frac{5a^2 b^4 c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}$$

XLII.

Soit l'équation $\frac{a^2 x}{b-c} + dc = bx - ac$.

Sixieme
exemple de
résolution
d'équations
littérales.

Pour faire évanouir le diviseur $b-c$, il faudra ainsi que ci-dessus, multiplier tous les termes par ce diviseur, ce qui donnera $aax + b-c$

$\times dc = bx - ac \times b - c$, où j'ai observé, 1°. de mettre une barre au-dessus de $b-c$ dans le premier membre, parce què sans cela on pourroit croire qu'il n'y auroit que c qui dût multiplier dc ; 2°. de mettre des barres au-dessus de $bx - ac$ & de $b-c$ dans le second membre, afin qu'on vöye que ce sont ces deux quantités entieres qui doivent se multiplier.

C'est une attention qu'il faut avoir toutes les fois qu'on veut désigner des produits ou des puissances de quantités complexes; au lieu d'une barre, on se fert quelquefois de parentheses.

Usage des
barres au-
dessus des
quantités,
le même
que celui
des paren-
theses.

Ainsi $a^4 (a+b)$; ou $a^4 \times a+b$ signifient également le produit de a^4 par $a+b$; $(a+b) \times (b+d)$ ou $a+b \times b+d$ le produit de $a+b$ par $a+d$; $(ff+gg)^3$, ou $ff+gg$ la quantité $ff+gg$ élevée à la puissance dont l'exposant est 3, c'est-à-dire (art. XXXVII.) multipliée deux fois par elle-même.

Il s'agit maintenant de faire les multiplications indiquées par les signes \times . Soit proposé d'abord de multiplier dc par $b-c$, il est clair qu'il faudra multiplier dc par b & en retrancher le produit de dc par c ; car $b-c$ étant plus petit que b de c , son produit par dc doit être plus petit que celui de b par cd , de la quantité $c \times dc$. Donc le produit de $b-c$ par dc est $bdc - ccd$.

Venons présentement au produit de $bx - ac$ par $b - c$; pour le trouver, je commence par remarquer qu'en prenant les deux termes $bx - ac$ pour une seule quantité, son produit par $b - c$ doit être, suivant ce qu'on vient de voir, la quantité dont le produit de $bx - ac$ par b surpasse le produit de $bx - ac$ par c . La question est donc réduite à deux multiplications de la nature de celles qu'on vient de faire & à une soustraction.

La première de ces deux multiplications, celle de $bx - ac$ par b , donnera $bbx - abc$; la seconde celle de $bx - ac$ par c , donnera $bxc - acc$; reste donc à retrancher cette dernière quantité de la première, ce qui donnera, suivant l'art. XXXIV. $bbx - abc - bxc + ac^2$, & c'est-là le produit de $bx - ac$ par $b - c$.

De sorte que l'équation $\frac{a^2 x}{b-c} + cd$
 $= bx - ac$, ou $\frac{a^2 x}{b-c} + cd$
 $= bx - ac \times b - c$ est devenue $a^2 x$
 $4bcd - c^2 d = b^2 x - abc - bxc + ac^2$,
 qui,

qui, par les transpositions ordinaires, donnera
 $b c d - c^2 d + a b c - a c^2 = b^2 x$
 $- b c x - a^2 x$, ou enfin.....
 $x = \frac{b c d - c c d + a b c - a c^2}{b^2 - b c - a^2}$.

XLIII.

Dans cet exemple, nous avons eu besoin de former une règle d'Algebre, dont nous ne nous étions pas encore servis, & qui pouvant être souvent utile, mérite que nous nous y arrêtions. On appelle cette règle multiplication des polynomes. Polynome ou quantité composée de plusieurs termes. Si on veut spécifier le nombre de termes d'une quantité, on l'appelle binome, lorsqu'elle en a deux; trinome, lorsqu'elle en a trois, &c.

Multipli-
cation des
quantités
complexes
ou Polyno-
mes, tirée
de l'article
précédent.

Afin de s'exercer à la multiplication de ces fortes de quantités, il sera bon de prendre quelques exemples: soit premièrement $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ & $3 a b^2 - 4 b c d$ dont on demande le produit.

Exemple
de multipli-
cation des
Polynomes

En raisonnant comme dans l'article précédent, on verra que, puisque la quantité $3 a b^2 - 4 b c d$ est plus petite que $3 a b^2$ de $4 b c d$, son produit par $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ doit être plus petit que celui de $3 a b^2$ par $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ du produit de $4 b c d$ par $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$.

En conséquence, j'écris d'abord ainsi le produit demandé $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$
D

$$\begin{array}{l} \times 3 a b^2 - 2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5 \\ \times 4 b c d. \end{array}$$

Faisant présentement les deux multiplications indiquées par les signes \times , de la même manière que celles des quantités incomplexes, on aura $6 a^4 b^2 c^2 - 15 a^5 b^3 + 18 a^6 b^2$ pour la va-

leur du premier produit $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$
 $\times 3 a b^2$. On aura de même $8 a^3 b c^3 d - 20 a^4 b^2 c d + 24 a^5 b c d$ pour la valeur

du second produit $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$
 $\times 4 b c d$. Retranchant alors le second du premier, ainsi qu'il est indiqué dans l'expression précédente, on aura $6 a^4 b^2 c^2 - 15 a^5 b^3 + 18 a^6 b^2 - 8 a^3 b c^3 d + 20 a^4 b^2 c d - 24 a^5 b c d$ pour le produit des deux quantités proposées.

X L I V.

Si le multiplicateur de la quantité précédente, outre les deux termes $3 a b^2 - 4 b c d$, avoit encore contenu un autre terme, $- 5 a b c$, par exemple, il est évident que pour avoir le produit total, il auroit fallu retrancher de la quantité précédente, le produit de $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ par $5 a b c$. Car on auroit dit, de même, que le multiplicateur $3 a b^2 - 4 b c d - 5 a b c$ étant plus petit de $5 a b c$ que le multiplicateur $3 a b^2 - 4 b c d$, son produit par $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ doit être plus petit de $5 a b c \times 2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$ que le produit de $3 a b^2 - 4 b c d$ par $2 a^3 c^2 - 5 a^4 b + 6 a^5$. Par la même raison, s'il

<p>Case 1</p>	<p>1845-1846 1846-1847 1847-1848 1848-1849 1849-1850</p>
<p>Case 2</p>	<p>1850-1851 1851-1852 1852-1853 1853-1854 1854-1855</p>
<p>Case 3</p>	<p>1855-1856 1856-1857 1857-1858 1858-1859 1859-1860</p>
<p>Case 4</p>	<p>1860-1861 1861-1862 1862-1863 1863-1864 1864-1865</p>

$$\begin{array}{r} 2ab - 4ac + ad \\ 3ab - 5ac + 2ad \end{array}$$

Case 1.

$$\begin{array}{r} 6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd \\ - 10a^2bc + 20a^2c^2 - 5a^2cd \\ + 4a^2bd - 8a^2cd + 2a^2d^2 \end{array}$$

$$6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20a^2c^2 - 13a^2cd + 2a^2d^2$$

$$\begin{array}{r} 5a^3b - 2ab^3 + 4a^2c^2 \\ 2a^3b - ab^3 + 3a^2c^2 \end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{r} 10a^5b^2 - 4a^4b^4 + 8a^5bc^2 \\ - 5a^4b^4 + 2a^2b^5 - 4a^3b^3c^2 \\ + 15a^5bc^2 - 6a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \end{array}$$

$$10a^5b^2 - 9a^4b^4 + 23a^5bc^2 + 2a^2b^5 - 10a^3b^3c^2 + 12a^4c^4$$

$$\begin{array}{r} 2a^4x^2 - 3b^4y^2 \\ 2a^4x^2 + 3b^4y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4a^8x^3 - 6a^4b^4x^2y^2 \\ + 6a^4b^4x^2y^2 - 9b^8y^4 \end{array}$$

$$4a^8x^4 - 9b^8y^4$$

$$\begin{array}{r} 5ab + 3ac - cc \\ - 5ab + 3ac - cc \end{array}$$

Case 4.

$$\begin{array}{r} - 25a^2b^2 - 15a^2bc + 5abcc \\ + 15a^2bc + 9a^2c^2 - 3ac^3 \\ - 5abc^2 - 3a^2c^3 + c^4 \\ - 25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2abx - bxy + aax + 3aay \\ 2ax - 3ay \end{array}$$

Case 5.

$$\begin{array}{r} 4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy \\ - 6a^2bxy + 3abxy^2 - 3a^3xy - 9a^3y^2 \end{array}$$

$$4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy - 6a^2bxy + 3abxy + 3a^3xy - 9a^3y^2$$

y avoit eu un autre terme, $3acc$, par exemple, au multiplicateur avec le signe $+$, il auroit fallu ajouter le produit $3accx$

$2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ aux produits précédens.

En général, on voit qu'un multiplicande quelconque, c'est-à-dire, une quantité quelconque à multiplier, étant donné avec la quantité qui doit lui servir de multiplicateur, il faudra former tous les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, & ajouter ou retrancher ces produits, suivant que les termes qui les auront donnés, auront le signe $+$ ou le signe $-$.

Principe
fondamen-
tal des mul-
tiplications

Pour exécuter cette opération avec autant d'ordre qu'il est nécessaire, voici le procédé qu'on suit.

X L V.

On commence par écrire le multiplicateur sous le multiplicande, & l'on tire une barre sous le multiplicateur. Pour former ensuite la première ligne du produit que l'on doit écrire sous cette barre, on multiplie le premier terme du multiplicateur par chacun des termes du multiplicande, en observant de laisser à chacun de ces produits, le signe du terme du multiplicande, si le premier terme du multiplicateur n'a aucun signe, & est par conséquent censé avoir le signe $+$.

Méthode
qu'il faut
suivre dans
la multipli-
cation.

Pour former ensuite la seconde ligne qui doit être écrite sous la première, on multiplie le second terme du multiplicateur par tous les ter-

mes du multiplicande, & si ce second terme du multiplicateur a encore le signe $+$, c'est absolument la même opération que pour la première ligne; mais s'il a le signe $-$, à chacun des produits dont cette ligne est composée, on met un signe contraire à celui du terme du multiplicande auquel il a rapport. Toutes les autres lignes du produit étant formées de la même manière, par le moyen des autres termes du multiplicateur multipliés par tous ceux du multiplicande, on tire une barre, & l'on fait l'addition ou réduction de tous ces produits particuliers; la quantité qui vient alors est le produit demandé.

Nous venons de supposer que le premier terme du multiplicateur avoit le signe $+$, si cependant il avoit le signe $-$: on voit bien qu'à l'égard de ce terme, comme à l'égard des autres qui auroient aussi le signe $-$, il faudroit observer de prendre les signes contraires à ceux des termes du multiplicande, en écrivant le produit de ces termes.

X L V I.

Applica-
tion de la
méthode
précédente
à un exem-
ple.

Afin d'éclaircir cette méthode, appliquons-la à un exemple. Soit proposé de multiplier les deux quantités $2ab - 4ac + ad$ & $3ab - 5ac + 2ad$. La première étant prise pour le multiplicande, & la seconde pour le multiplicateur, on écrit cette dernière sous l'autre, & on tire ensuite une barre sous ces deux quantités; voyez la première case de la table ci-jointe.

Cela fait, on remarque que le premier terme

du multiplicateur est censé positif, & que par conséquent tous les signes des termes de la première bande du produit doivent être les mêmes que ceux du multiplicande. On écrit donc, suivant cette remarque, à la première ligne sous la barre, le premier terme $6 a^2 b^2$ que donne le produit de $3 a b$ par $2 a b$, sans l'affecter d'aucun signe, ce qui est la même chose que si on lui donnoit le signe $+$.

On met ensuite $-$ pour le signe du second terme de la même bande, parce que c'est le signe du second terme du multiplicande, & on fait suivre ce $-$ de $12 a^2 b c$ produit de $4 a c$ & de $3 a b$. On conserve de même le signe $+$ du troisième terme du multiplicande pour le troisième terme de la première bande du produit, & l'on écrit pour le terme $3 a^2 b d$ produit de $a d$ & de $3 a b$. La première bande du produit étant ainsi achevée, on remarque que le second terme du multiplicateur a le signe $-$, & que par conséquent il faut changer tous les signes du multiplicande pour former les termes de la seconde bande du produit. Ainsi le premier terme de cette seconde bande doit avoir $-$ qu'on écrit donc devant le produit $10 a^2 b c$ des deux termes $2 a b$, $5 a c$.

Le second terme de la même bande devant avoir $+$, puisque le second terme du multiplicande a le signe $-$, on écrit ce signe $+$ devant le produit $20 a^2 c^2$ des deux termes $4 a c$, $5 a c$.

Le troisième terme $a d$ du multiplicande étant précédé du signe $+$, le troisième terme de la

seconde bande fera donc affecté du signe $-$ qu'on écrit devant le produit $5 a^2 c d$ des deux termes $a d$, $5 a c$.

Quant à la troisieme bande du produit cherché, comme le troisieme terme du multiplicateur a le signe $+$, il faudra garder tous les signes du multiplicande, & par conséquent le premier terme, c'est-à-dire le produit de $2 a b$ & de $2 a d$, sera $4 a^2 b d$ précédé du signe $+$; le second, c'est-à-dire, le produit de $4 a c$ & de $2 a d$, sera $8 a^2 c d$ précédé du signe $-$; & le troisieme, c'est-à-dire, le produit de $2 a d$ par $a d$, sera $2 a^2 d^2$ précédé du signe $+$.

Afin que les Commençans puissent se fortifier dans la pratique de cette regle, j'ai joint dans la Table quelques autres exemples.

X L V I I.

Sixieme
exemple de
résolution
d'équations
littérales.

Soit l'équation $\frac{a b^2 + a b d - a b x}{d - c}$

$= a x - a c$, on fera d'abord évanouir le diviseur $d - c$ en multipliant $a x - a c$ par $d - c$; & l'on aura $a b^2 + a b d - a b x$

$= a x - a c \times d - c$, ou $a b^2 + a b d - a b x = a d x - a c d - a c x + a c c$, qui, en passant tous les termes affectés d' x d'un côté, & les termes connus de l'autre, deviendra $a b^2 + a b d + a c d - a c c = a b x + a d x - a c x$, d'où l'on tire $x =$

$$\frac{a b^2 + a b d + a c d - a c^2}{a b + a d - a c}$$

Dans cette expression, une certaine relation qu'on apperçoit entre les termes du dividende & ceux du diviseur, peut faire soupçonner que la division se feroit exactement, & invite par conséquent à tenter cette opération, qui doit paroître assez aisée à faire, après avoir vu celle de la multiplication dont elle est l'inverse.

Pour reconnoître donc si en effet $ab + ad - ac$ peut diviser exactement $ab^2 + abd + acd - ac^2$. Soit d'abord divisé un des termes de cette dernière quantité par un de ceux de la première, soit divisé ab^2 par ab , par exemple, & soit écrit à part le quotient b . Soit ensuite multiplié ce quotient b , ou plutôt cette première partie du quotient cherché, par le diviseur total $ab + ad - ac$, & soit retranché le produit $ab^2 + abd - abc$ du dividende, le reste $acd - ac^2 + abc$, ou $acd - ac^2 + abc$, fera encore à diviser par le même diviseur, & son quotient devra être ajouté au précédent b pour former le quotient total cherché.

Maniere de faire la division indiquée dans cet exem- ple.

Pour faire cette division je prends encore un des termes de la quantité $acd - acc + abc$ qui reste à diviser, & je le divise par un de ceux du diviseur. Je choisis acd , par exemple, pour le diviser par ad . Or, cette division me donne c ; je multiplie donc encore ce nouveau quotient par le diviseur total $ab + ad - ac$, & je retranche le produit $abc + acd - ac^2$ du dividende restant $acd - ac^2 + abc$; & comme les deux quantités sont les mêmes,

Div

& qu'il ne reste par conséquent rien à diviser ; je vois par-là que $b + c$ est exactement le quotient de la division de $ab^2 + abd + acd - ac^2$ par $ab + ad - ac$ & partant la valeur d' x .

XLVIII.

Méthode
générale
pour les di-
viseurs des
quantités
complexes.

Après avoir fait la division précédente , on voit à peu près comment on doit se conduire dans les autres exemples. Pour opérer dans la division avec un certain ordre , on écrit ordinairement le diviseur à droite du dividende en les séparant d'une barre verticale, ainsi que dans la division arithmétique. Ayant choisi dans le dividende un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur , on écrit le quotient de ces deux termes sous le diviseur , & on lui donne $+$ pour signe , si les deux termes qu'on a divisé l'un par l'autre ont le même signe , on lui donne , au contraire , le signe $-$, si ces deux termes sont de signes différens. Cela fait , on multiplie ce quotient par tous les termes du diviseur , & on écrit le produit qui en vient sous le dividende. Mais comme l'usage de ce produit doit être de le retrancher du dividende , on observe , en l'écrivant sous ce dividende , de mettre à chaque terme le signe contraire de celui que donneroit la multiplication.

Ce produit étant ainsi écrit , on tire une barre , & l'on fait la réduction avec le dividende , & la quantité qui reste , est à diviser de nouveau par le même diviseur. On y choisit de même un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur , & on écrit le terme qui en

vient pour quotient à côté du premier, en observant de lui donner le signe $+$, ou le signe $-$, suivant que les deux termes qu'on aura divisés, seront de mêmes ou de différens signes. On multiplie ensuite ce terme par tous ceux du diviseur, & on écrit le produit sous la quantité à diviser, en observant de même que la première fois, de changer les signes que la multiplication donne. Tirant alors une barre & réduisant, si tous les termes ne se réduisent pas, on écrit le reste sous cette barre, & on pousse l'opération de la même manière, jusqu'à ce que tous les termes du dividende soient évanouis.

Dans cette opération, on pourroit quelquefois être embarrassé à choisir parmi les termes du dividende & du diviseur, ceux qui doivent servir à former les termes du quotient. Afin d'éviter tout tâtonnement dans ce choix, voici ce qu'on a imaginé.

Maniere
d'éviter
tout tâton-
nement
dans la di-
vision.

On choisit d'abord à volonté une lettre qui se trouve dans le dividende & dans le diviseur, & l'on dispose les termes de ces deux quantités de manière que les premiers soient ceux où cette lettre a le plus grand exposant, que le second soit celui où la même lettre a le plus grand exposant après le premier, & ainsi des autres termes. Ayant donc ordonné les deux quantités proposées par rapport à la même lettre (c'est ainsi qu'on appelle cette opération) on n'a plus aucun tâtonnement à faire pour choisir les termes qui doivent se diviser, c'est toujours les premiers termes du dividende & du diviseur qu'il faut prendre.

Ce que c'est
qu'ordon-
ner une
quantité
par rapport
à une lettre.

Lorsqu'on aura formé par ces deux premiers termes du diviseur & du dividende, le premier terme du quotient, & qu'on aura écrit avec des signes différens, le produit sous le dividende, s'il arrive que cette opération ait introduit des termes qui n'ayent point de semblables dans le dividende; il faudra, en écrivant la quantité qui vient après la réduction, avoir l'attention de les placer de maniere que la quantité qui reste à diviser, reste toujours ordonnée par rapport à la même lettre que le diviseur.

X L I X.

Applica-
tion de la
méthode
précédente
à un exem-
ple.

Afin de faciliter aux Commençans l'usage de cette méthode, prenons quelques exemples. Supposons d'abord qu'il s'agisse de diviser la quantité $31 a a b b + 2 a^4 + 24 b^4 - 38 a b^3 - 13 a^3 b$ par la quantité $- 3 a b + 2 a a + 4 b b$.

Ayant écrit ces deux quantités, comme on le voit dans la Table ci-jointe (case premiere) où elles sont ordonnées par rapport à la lettre a , je divise le premier terme $2 a^4$ du dividende par le premier $2 a a$ du diviseur, & j'écris le quotient $a a$ sous le diviseur, sans lui donner aucun signe, c'est-à-dire que je le fais positif à cause que les termes $2 a^4$ & $2 a a$ sont précédés des mêmes signes. Le quotient $a a$ étant écrit, je le multiplie par tous les termes du diviseur, & comme cette multiplication doit me donner pour premier terme $2 a^4$ produit de $a a$ par $2 a a$ avec le signe $+$, je porte ce terme sous le dividende avec le signe $-$ à cause qu'il doit être retranché.

De même le second terme $3ba^3$ produit de aa par $3ba$ devant avoir le signe $-$ par la multiplication, j'écris sous le dividende $+3ba^3$ par la raison qu'il doit être soustrait. Enfin, parce que le troisième terme $4b^2a^2$ produit de aa par $4bb$ devrait avoir par la multiplication le signe $+$, je lui donne le signe $-$, en l'écrivant sous le dividende.

Cela fait, je tire une barre & je réduis, la quantité qui reste alors est $-10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4$ qu'il faut diviser par le même diviseur $2a^2 - 3ba + 4bb$. Pour faire cette division, je prends le premier terme $10ba^3$ de cette quantité à diviser, & je le divise par le premier terme $2a^2$ du diviseur, il vient $5ba$ pour quotient auquel je donne le signe $-$, à cause que les termes $10ba^3$ & $2a^2$ ne sont pas précédés des mêmes signes. Ayant écrit $-5ba$ à côté de a^2 , il s'agit de multiplier ce nouveau terme du quotient par tous ceux du diviseur, & d'en changer les signes en les écrivant sous la quantité à diviser.

Je multiplie donc d'abord $5ba$ par $2a^2$, & comme le produit devrait être négatif à cause que le signe $-$ de $5ba$ doit changer, suivant les règles de la multiplication, les signes du multiplicande $2a^3 - 3ba + 4b^2$, & que, suivant ce que nous venons de dire, les produits doivent être changés de signe lorsqu'on les écrit sous la quantité à diviser, j'écris $+10ba^3$ sous cette quantité. De même au lieu de donner à $15bbaa$, produit de $3ba$ par $5ba$, le signe $+$ que l'on auroit par la multiplica-

tion, je l'écris avec le signe $-$ sous la quantité à diviser. Enfin, au lieu de donner à $20 b^3 a$ produit de $3 b a$ par $4 b b$ le signe $-$ que demanderoit la multiplication, je l'écris avec le signe $+$ sous la quantité à diviser. Je tire alors une barre & je réduis, ce qui me donne $12 b^2 a^2 - 18 b^3 a + 24 b^4$, quantité qu'il faut encore diviser par $2 a^2 - 3 b a + 4 b b$.

Pour faire cette nouvelle division, je divise le terme $12 b^2 a^2$ par $2 a^2$, & j'ai, pour troisieme terme du quotient, $6 b b$, que j'écris à côté des deux premiers en lui donnant le signe $+$, à cause que $12 b^2 a^2$ & $2 a a$ ont le même signe.

Multipliant présentement $6 b^2$ par $2 a^2$, j'ai $12 b^2 a^2$ auquel je donne le signe $-$ en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe $+$. De même multipliant $6 b^2$ par $3 b a$, j'ai $18 b^3 a$ auquel je donne le signe $+$ en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe $-$. Enfin, multipliant $6 b b$ par $4 b^2$, j'ai $24 b^4$ auquel je donne le signe $-$ contraire à celui que donneroit la multiplication Réduisant alors, je vois que tous les termes se détruisent. Donc la division est exacte. Donc le quotient cherché est $a a - 5 b a + 6 b b$.

L.

Autre
exemple.

Qu'on se propose maintenant de diviser $6 b^3 c - b^4 - 9 c c b b + 4 c^4$ par $- 3 c b + b b + 2 c c$. J'écris ces deux quantités sous la forme qu'on voit dans la seconde case de la Ta-

ble suivante, en les ordonnant par rapport à la lettre c .

Divisant alors les deux premiers termes, j'ai $2cc$ pour le premier terme du quotient, lequel étant multiplié par le diviseur, donne, en changeant les signes, la quantité $-4c^4 + 6bc^3 - 2bbcc$, qui étant placée sous le dividende, donne pour reste $6bc^3 - 11bbcc + 6b^3c - b^4$, dans laquelle j'ai observé que le terme $6bc^3$ affecté de c^3 introduit par la multiplication, fut placé le premier, afin que la quantité restât ordonnée par rapport à c . Divisant alors ce premier terme $6bc^3$ par $2cc$, j'ai $3bc$ pour quotient avec le signe $+$. Je multiplie de même ce nouveau terme du quotient par le diviseur, & je porte les termes qui en viennent sous le dividende, en changeant leurs signes. Faisant la réduction ensuite, je n'ai plus que $-2bbcc + 3b^3c - b^4$ à diviser. Le premier terme de cette quantité étant divisé par celui du diviseur, donne pour troisième terme du quotient b^2 affecté du signe $-$, à cause que les termes $2b^2c^2$ & $2c^2$ sont de différens signes; & comme le produit de ce troisième terme par le diviseur détruit tous ceux de la quantité à diviser, je conclus que la division est exacte, & que $2cc + 3bc - b^2$ est le quotient demandé.

L I.

Lorsqu'on veut ordonner le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre, si on trouvoit plusieurs termes où cette lettre fût élevée à la même puissance, on tomberoit

Attention qu'il faut avoir en ordonnant, lorsqu'il y a plusieurs lettres.

encore dans l'inconvénient du tâtonnement ; à moins qu'on n'ordonnât encore ces termes par rapport à une autre lettre commune aux deux quantités.

Supposons , par exemple , que le dividende étant ordonné par rapport à la lettre d , on eût de suite $3 a c c d^3 - c^3 d^3 - 3 a a c d^3 + a^3 d^3$ pour les premiers termes du dividende , & que dans le diviseur on eût de même $a a d^2 + c c d^2 - 2 a c d^2$ pour les premiers termes , en arrangeant ainsi ces deux quantités $a^3 d^3 - 3 c a a d^3 + 3 c c a d^3 - c^3 d^3 ; a^2 d^2 - 2 c a d^2 + c c d^2$, c'est-à-dire , en les ordonnant par rapport à la lettre a , il n'y auroit aucun tâtonnement à craindre en faisant la division , pourvu qu'on observât , à chaque fois qu'on voudroit trouver un terme du quotient , que la quantité à diviser fût toujours ordonnée de la même manière. Pour exercer les Commençans à ces attentions dans la division , j'ai joint encore quelques exemples dans la Table suivante.

L I I.

Dans la solution des Problèmes précédens , nous n'avons eu besoin que d'une seule inconnue , parce qu'il n'y avoit , à proprement parler , dans ces Problèmes qu'une quantité à trouver. Mais , comme en avançant dans la science de l'Algèbre , on trouve des Problèmes où l'on est obligé d'employer plusieurs inconnues , nous allons voir comment on les traite.

Problème *Etant données les pesanteurs spécifiques de*

1848
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1855
1856
1857
1858
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1865
1866
1867
1868
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

$ \begin{array}{r} 2a^4 - 13ba^3 + 31b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4 \\ - 2a^4 + 3ba^3 - 4b^2a^2 \\ \hline - 10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4 \\ + 10ba^3 - 15b^2a^2 + 20b^3a \\ \hline + 12b^2a^2 - 18b^3a + 24b^4 \\ - 12b^2a^2 + 18b^3a - 24b^4 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2a^2 - 3ba + 4b^2 \\ a^2 - 5ba + 6b^2 \end{array} $ <p style="text-align: right;">Case 1.</p>
$ \begin{array}{r} 4c^4 - 9bbcc + 6b^3c - b^4 \\ - 4c^4 + 6bcc - 2bbcc \\ \hline 6bc^3 - 11b^2c^2 + 6b^3c - b^4 \\ - 6bc^3 + 9b^2c^2 - 3b^3c \\ \hline - 2b^2c^2 + 3b^3c - b^4 \\ + 2b^2c^2 - 3b^3c + b^4 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2cc - 3bc + bb \\ 2cc + 3bc - bb \end{array} $ <p style="text-align: right;">Case 2.</p>
$ \begin{array}{r} a^3d^3 - 3ca^2d^3 + 3c^2ad^3 - c^3d^3 + c^2a^2d^2 - c^3ad^2 \\ - a^3d^3 + 2ca^2d^3 - c^2ad^3 \qquad \qquad - c^2a^2d^2 \\ \hline - ca^2d^3 + 2c^2ad^3 - c^3d^3 - c^3ad^2 \\ + ca^2d^3 - 2c^2ad^3 + c^3d^3 + c^3ad^2 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} a^2d^2 - 2cad^2 + c^2d^2 + a^2c^2d \\ ad - cd \end{array} $ <p style="text-align: right;">Case 3.</p>
$ \begin{array}{r} a^2b^4 - c^2b^4 - ca^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + 2c^3abb - c^4ab + c^6 \\ - a^2b^4 + cab^4 - 2c^2ab^3 \qquad \qquad \qquad - c^3abb \\ \hline cab^4 - c^2b^4 - 3ca^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + c^3abb - c^4ab + c^6 \\ - cab^4 + c^2b^4 \qquad \qquad - 2c^2ab^3 \qquad \qquad - c^4bb \\ \hline - 3ca^2b^3 + 3c^2ab^3 - 6c^2a^2b^2 + c^3ab^2 - c^4bb - c^4ab + c^6 \\ + 3ca^2b^3 - 3c^2ab^3 + 6c^2a^2b^2 \qquad \qquad \qquad + 3c^4ab \\ \hline c^3ab^2 - c^4bb + 2c^4ab + c^6 \\ - c^3ab^2 + c^4bb - 2c^4ab - c^6 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} ab^2 - cb^2 + 2cab + c^3 \\ ab^2 + cb^2 - 3cab + c^3 \end{array} $ <p style="text-align: right;">Case 4.</p>
$ \begin{array}{r} 6b^2a^2 - dba^2 - 7a^2 + cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2 \\ - 6b^2a^2 + 3dba^2 \qquad \qquad - 9cb^2a \\ \hline 2dba^2 - d^2a^2 - 8cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2 \\ - 2dba^2 + d^2a^2 \qquad \qquad - 3dcba \\ \hline - 8cb^2a + 4dcba - 12c^2b^2 \\ + 8cb^2a - 4dcba + 12c^2b^2 \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2ba - da + 3cb \\ 3ba + da - 4cb \end{array} $ <p style="text-align: right;">Case 5.</p>

CD Lyon

Méthém. 214. 1. 5

deux matieres qui entrent dans un mixte , le dans lequel
 volume & le poids total du mixte , trouver ce on emploie
 qu'il entre de chacune de ces deux matieres dans deux incon-
 le mixte. nues.

Que le nombre de pouces cubes contenus dans ce mixte , ou , en général , son volume de quelque maniere qu'il soit mesuré , soit exprimé par a .

Que son poids total soit exprimé par . . b .

Que la quantité de la premiere matiere contenue dans le mixte , par exemple , ce qu'il a de pouces cubes de cette matiere , soit exprimé par x .

Que le poids d'un pouce cube de cette matiere , ou , en général , sa pesanteur spécifique soit c .

La quantité de la seconde matiere . . y .

Sa pesanteur spécifique d .

On aura pour le poids de la quantité de la premiere matiere qui entre dans le mixte cx .

Car , si x exprime le nombre de pouces cubes de cette matiere , & c le poids de chaque pouce cube , leur poids total fera le produit de ces deux nombres. On aura de même pour le poids de la quantité de la seconde matiere dy .

Or , comme ces deux poids doivent , étant ajoutés , faire le poids total du mixte , on a donc l'équation

$$cx + dy = b$$

mais cette équation ne sauroit suffire pour résoudre le Problème ; car si on veut en dégager l'une des inconnues , x , par exemple , on trouve

$$b = \frac{b - dy}{c}$$

qui ne peut apprendre à connoître x qu'en supposant qu'on connoisse y . Il y a donc quelque autre opération à faire pour connoître y . Pour y parvenir, il faut voir si on a fait attention à tout ce qu'on demandoit dans l'énoncé de la question, ou, pour parler comme les Algébristes, si on a rempli toutes les conditions du Problème; pour peu qu'on y réfléchisse, on verra qu'on n'a exprimé qu'une des deux conditions, celle que le poids total du mixte soit b , & qu'on n'a pas employé celle qui nous apprend que la quantité de la première matiere ajoutée avec la quantité de la seconde doit faire le volume total. On aura donc, par cette seconde condition, l'équation

$$x + y = a$$

qui, ainsi que la première, ne nous apprend la valeur de x , qu'au moyen de celle de y , en nous donnant

$$x = a - y.$$

Mais si on ne peut pas, par aucune de ces deux équations prises séparément, trouver x indépendamment de y , on trouve bientôt, en se servant à la fois de l'une & de l'autre, le moyen d'avoir y entièrement connu. Car, puisque chacune de ces deux équations donne une valeur de x , on peut équaler ces deux valeurs, ce qui donne l'équation

$$\frac{b - d y}{c} = a - y$$

de laquelle on tire, par les méthodes précédentes, $b - d y = a c - c y$, ou $a c - b = c y$

$$= cy - dy, \text{ ou enfin } y = \frac{ac - b}{c - d}.$$

y étant connu, on voit bien que x , qui est également $a - y$, ou $\frac{b - dy}{c}$, est aussi connu.

On n'a donc qu'à mettre dans celle qu'on voudra de ces deux quantités, dans la première $a - y$, par exemple, à la place de y ,

$$\frac{ac - b}{c - d}, \text{ \& l'on aura } a - \frac{ac - b}{c - d}$$

pour la valeur de x .

En examinant la valeur précédente $a -$

$$\frac{ac - b}{c - d}, \text{ on découvre bientôt qu'on peut}$$

la réduire; car si on veut mettre a au même

dénominateur que la fraction $\frac{ac - b}{c - d}$, il

faut le multiplier par $c - d$, ce qui donne

$$\frac{ac - ad}{c - d} \text{ au lieu de } a; \text{ ainsi il ne s'agit}$$

plus que de retrancher de cette fraction la se-

conde $\frac{ac - b}{c - d}$. Retranchant pour cela leurs

numérateurs, & divisant le reste par le dénomi-

nateur commun, on aura $\frac{ac - ad - ac + b}{c - d}$

ou $\frac{b - ad}{c - d}$ pour la valeur réduite de x .

Les quantités demandées, tant de la première, que de la seconde matière qui entrent dans le

mixte, sont donc exprimées, l'une par $\frac{ac - b}{c - d}$

E

& l'autre par $\frac{b - ad}{c - d}$, ainsi le Problème est résolu.

L I I I.

Si au lieu de substituer la valeur $\frac{ac - b}{c - d}$ de y dans $a - y$, on l'avoit substituée dans $\frac{b - dy}{c}$ qui est également la valeur de x ,

$$b - d \times \frac{ac - b}{c - d}$$

on auroit eu $\frac{b - d \times \frac{ac - b}{c - d}}{c}$ qui

d'abord ne paroît guères être la même valeur que $\frac{b - ad}{c - d}$. Mais comme on fait que

les valeurs $a - y$ & $\frac{b - dy}{c}$ de x sont éga-

les, & que ce n'est même que parce qu'elles le sont qu'on a déterminé la valeur de y , on doit être sûr qu'en examinant ces deux dernières valeurs de x exprimées en quantités connues, on trouvera leur identité. Voici comment on peut parvenir à réduire l'une à l'autre.

On donnera d'abord le dénominateur $c - d$ à la lettre b , ce qui se fera en le multipliant par $c - d$, c'est-à-dire, en mettant $\frac{bc - db}{c - d}$

au lieu de b , & alors la quantité précéden-

te $\frac{b - d \times \frac{ac - b}{c - d}}{c}$ se changera

$$\frac{bc - bd - d \times ac - b}{c - d}$$

 en $\frac{\quad}{c}$, ou

$$\frac{bc - bd - d \times ac - b}{cc - dc}$$
; mais au

lieu de $d \times ac - b$, on peut écrire $acd - bd$, & comme cette quantité doit être retranchée de $bc - bd$, la quantité précédente

$$\frac{bc - bd - d \times ac - b}{cc - dc}$$
 deviendra

donc en réduisant $\frac{bc - dca}{c^2 - dc}$, qui, en

divisant le numérateur & le dénominateur par

la même quantité c , devient enfin $\frac{b - da}{c - d}$

même valeur que ci-dessus.

L I V.

Pour faire présentement une application de la solution générale qu'on vient de trouver, supposons que le mixte soit composé d'or & d'argent, * que son poids total soit de 30 onces, son volume de 3 pouces cubes, le poids du pouce cube d'or de $12\frac{2}{3}$ onces, celui du pouce cube d'argent de $6\frac{2}{9}$ onces.

Applica-
tion de la
solution
précédente
à un exem-
ple.

* Le Problème qu'Archimede eut à résoudre, lorsqu'on lui proposa de déterminer la quantité d'argent qui étoit allié avec l'or dans la Couronne du Roi Hiéron, ne pouvoit pas être autre chose que celui qu'on vient de voir aussi-tôt qu'il eut déterminé la pesanteur spécifique du métal de cette Couronne, ce qu'il fit en examinant combien elle perdoit de son poids en la pesant dans l'eau.

E ij

on aura $a = 5$, $b = 30$, $c = 12\frac{2}{3}$, $d = 6\frac{8}{9}$;
 substituant donc ces valeurs dans les deux for-

mules générales $x = \frac{b - da}{c - d}$ & $y = \frac{ac - b}{c - d}$
 elles deviendront $x = \frac{21}{13}$ & $y = \frac{18}{13}$, c'est-à-
 dire, que le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes
 d'or & $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

L V.

On découvre aisément, par ce qu'on a vu
 dans le Problème précédent, que toutes les fois
 qu'on aura employé deux inconnues dans une
 question, il faudra deux équations pour les dé-
 gager ; & que lorsqu'on demande deux quanti-
 tés dans un Problème, il faut aussi qu'on donne
 deux conditions pour les déterminer, afin qu'on
 puisse tirer de ces deux conditions les deux
 équations nécessaires. Pour montrer la maniere
 d'employer ces conditions, nous donnerons
 encore le Problème suivant.

L V I.

Autre Pro-
 blème, où
 l'on em-
 ploie deux
 inconnues.

*Deux sources qui coulent chacune uniformé-
 ment, ont rempli ensemble un réservoir a, l'une
 en coulant pendant un temps b, l'autre pendant
 un temps c ; les deux mêmes sources ont rempli
 un autre réservoir d ; la première coulant pen-
 dant le temps e, la seconde pendant le temps
 f : on demande la dépense de chacune de ces
 sources.*

Soient x & y ces dépenses, c'est-à-dire, par
 exemple, ce que chacune de ces deux sources
 fourniroit de muids d'eau par jour, en suppo-
 sant que les réservoirs a & d fussent mesurés en

muids, pendant que les temps b, c, e, f seroient comptés en jours.

On aura bx pour la quantité d'eau fournie par la première source pendant le temps b ; & de même cy pour la quantité d'eau fournie par la seconde source dans le temps c . Mais ces deux quantités d'eau par la première condition du Problème doivent être égales au réservoir a , on a donc l'équation

$$bx + cy = a.$$

On aura de même ex, fy pour les quantités d'eau fournies par les mêmes sources pendant les temps e, f , & par conséquent la seconde condition donnera

$$ex + fy = d.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de ces deux équations les valeurs de x & de y , ce qui se fera, ainsi que dans le problème précédent, en tirant une valeur de x en y de chacune de ces deux équations & en les égalant ensuite.

La première sera $\frac{a-cy}{b}$, la seconde $\frac{d-fy}{e}$

égalant donc ces deux valeurs, on aura $\frac{a-cy}{b}$

$$= \frac{d-fy}{e}, \text{ ou } ae - cey = bd - bfy.$$

ou $ae - bd = cey - bfy$, ou enfin

$$y = \frac{ae - bd}{ce - bf}.$$

Substituant cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de x , dans $\frac{a-cy}{b}$ par

$$a - c \times \frac{ae - bd}{ce - bf}$$

exemple, il viendra $x = \frac{\quad}{b}$

$$\text{ou } x = \frac{a \times ce - bf - c \times ae - bd}{b \times ce - bf}$$

en mettant le premier terme a au même dénominateur que le second, & en multipliant les deux dénominateurs l'un par l'autre.

Faisant ensuite les multiplications indiquées dans cette valeur & réduisant, on aura

$$x = \frac{cd - af}{ce - bf}$$

Il n'est donc plus question maintenant que d'avoir les valeurs particulières de a, b, c, d, e, f , pour les substituer dans ces deux valeurs générales de x & de y , afin d'en tirer telle solution particulière qu'on voudra.

Au lieu de commencer par dégager x dans les deux équations précédentes, & d'égaliser les deux valeurs qu'elles donnent, afin d'avoir y , il est clair qu'on pouvoit également commencer par dégager y , en égalant ensuite les deux différentes valeurs pour en tirer x , & que par cette opération on seroit parvenu nécessairement au même résultat.

L V I I.

Exemple
du Problème
précédent en
nombres.

Pour faire présentement quelque application de ce Problème, supposons que la première source ayant coulé deux jours, & la seconde trois, elles aient rempli un réservoir de 195 muids. Ensuite la première source ayant coulé

cinq jours, & la seconde quatre, elles ayent rempli un réservoir de 330 muids.

On aura donc $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$,
 $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$, & par consé-
 quent $dc - af = 210$, $ce - bf = 7$,
 $ae - db = 315$, d'où $x = \frac{dc - af}{ce - bf}$
 $= \frac{210}{7} = 30$

$$\& y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{315}{7} = 45;$$

ainsi la premiere source, dans cet exemple, fournit 30 muids par jour, & la seconde 45.

LVIII.

Supposons présentement que la premiere source ayant coulé pendant 4 jours, & la seconde pendant 6 jours, elles ayent rempli un réservoir de 120 muids. Ensuite que la premiere ayant coulé 3 jours, & la seconde 7, elles ayent rempli un réservoir de 190 muids.

On aura, dans ce cas, $a = 120$, $b = 4$,
 $c = 6$, $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$, & par
 conséquent $dc - af = 300$, $ce - bf = -10$,
 $ae - bd = -400$, ce qui donnera

$$x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{300}{-10}$$

$$\& y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{-400}{-10}$$

La premiere fois qu'on aura trouvé de semblables valeurs, c'est-à-dire, des quantités négatives divisées par des quantités négatives, & des positives, divisées par des positives; on aura dû être embarrassé à savoir ce qu'elles

Autre
exemple.

Singularité
des expres-
sions où
l'on arrive
dans cet
exemple.

devoient signifier, & ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens métaphysiques, auront cherché à reprendre la question un peu plus haut, afin d'éviter ces sortes de divisions: voici, par exemple, ce qu'on aura pû faire pour cela dans cette question-ci.

Maniere
de recon-
noître ce
qu'elles
peuvent si-
gnifier.

On aura repris les deux équations générales $bx + cy = a$, & $ex + fy = d$, & substituant, dans ces équations pour a, b, c, d, e, f , les valeurs que ces lettres ont dans cet exemple, on aura eu $4x + 6y = 120$, & $3x + 7y = 190$. Tirant, de ces équations,

$$x = 30 - \frac{3y}{2}, \text{ \& } x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y, \text{ on}$$

aura égalé ces deux valeurs, ce qui aura donné

$$30 - \frac{3y}{2} = \frac{190}{3} - \frac{7y}{3}, \text{ ou } \frac{7}{3}y - \frac{3}{2}y = \frac{190}{3} - 30, \text{ ou } y = 40.$$

Substituant ensuite cette valeur de y dans $30 - \frac{3}{2}y$ valeur de x , on aura eu $x = 30 - 60$, c'est-à-dire, $x = -30$. Par cette voie, on aura vu, sans en pouvoir douter, que le quotient de -400 par 10 est $+40$, & que celui de $+300$ par -10 est -30 .

L I X.

Théorèmes
généraux
concernant
les signes
des quo-
tiens ou des
produits.

On aura bientôt après regardé comme des principes généraux que

le $+$ divisé par le $+$ donnoit le $+$,

le $+$ divisé par le $-$ donnoit le $-$,

le $-$ divisé par le $+$ donnoit le $-$,

le $-$ divisé par le $-$ donnoit le $+$,

& de même pour la multiplication.

Ces principes auront été d'autant plus faciles

à imaginer qu'on y étoit comme conduit, par les réflexions qu'on avoit dû faire sur les signes qu'on trouvoit aux termes des produits & des quotiens, en pratiquant les préceptes donnés pour la multiplication & pour la division des quantités complexes.

Mais s'il est facile qu'on se doute, pour ainsi dire, de ces principes, on sent bien aussi qu'on ne sauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de réflexions, & il y a apparence que les premiers Analistes n'en auront été sûrs qu'après les avoir vérifiés dans beaucoup d'exemples.

L X.

Pour nous assurer que la multiplication de $-$ par $-$ doit toujours donner $+$ au produit, voyons quelle lumière nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée, art. XLV. Suivant cette méthode, on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a - b$ par une autre $c - d$, doit être $a c - b c - a d + b d$; & on voit par conséquent en même-temps que le terme $b d$ qui est venu par la multiplication de b & de d a le signe $+$, tandis que ses produifans b & d ont le signe $-$. Il ne reste donc plus qu'à savoir si lorsque deux quantités négatives telles que $- b$ & $- d$ ne seront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+ b d$. Or, c'est ce dont il est facile de reconnoître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a - b$ par $c - d$ étoit $a c - b c - a d$

On démontre que $- b$ par $- d$ est $+ b d$, quoique ces quantités ne soient précédées de rien.

$+ b d$, ne spécifiant aucune grandeur particulière ni à a ni à c , doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zéro : or, en ce cas, le produit $a c - b c - a d + b d$ se réduit à $+ b d$, donc $- b \times - d = + b d$.

L X I.

Les autres cas se démontrent de même.

Quant aux autres cas, c'est-à-dire, à la multiplication & à la division de $+$ par $-$, on les justifieroit de la même maniere.

L X I I.

Comment la valeur négative qu'on a trouvée résout le Problème.

Pour revenir présentement à notre dernière application du Problème précédent, remarquons qu'après avoir trouvé que $x = - 30$ & $y = + 40$, on a dû avoir encore une autre espèce d'embarras, c'étoit de savoir ce que signifioit cette valeur de x : pour le découvrir sûrement, le chemin qu'il est vraisemblable qu'on aura tenu, c'est de remonter aux conditions du Problème, ou, ce qui revient au même, aux équations $4 x + 6 y = 120$ & $3 x + 7 y = 190$ qui les expriment alors, & de voir comment les valeurs $- 30$ & $+ 40$ de x & de y conviennent à ces équations. On trouve, premièrement, que $4 x$ doit être, en ce cas, $- 120$ & que $6 y$ est 240 , d'où par conséquent $4 x + 6 y$ est $- 120 + 240$, qui est en effet égal à 120 . On trouve de même que $3 x + 7 y$ est $- 90 + 280$ qui se réduit à 190 .

Voyant donc comment les valeurs $- 30$ & $+ 40$ de x & de y , satisfont aux équations $4 x + 6 y = 120$ & $3 x + 7 y = 190$, on découvre en même-temps comment elles satisf-

font aux conditions du Problème; car puisque l'usage que l'on fait des quantités $4x$ & $3x$, qui expriment alors les quantités d'eau dépensées par la première source, dans la première & dans la seconde opération, est de les retrancher de $6y$ & de $7y$, qui expriment les quantités d'eau fournies dans les mêmes opérations par la seconde source, il faut que dans ce cas, on regarde la première source comme dérobant de l'eau aux réservoirs, au lieu d'en fournir, comme elle faisoit dans l'autre exemple, & comme on l'avoit supposé en exprimant les conditions du Problème.

L'on voit, en cette occasion, un exemple de la généralité de l'analyse, qui fait trouver dans une question des cas que l'on n'avoit pas prévu d'abord pouvoir y être renfermés.

LXIII.

Dans presque toutes les questions résolues généralement, on a trouvé des cas de même nature que le précédent; & l'on en a toujours conclu, que lorsque la valeur de l'inconnue devenoit négative, la quantité qu'elle exprimoit devoit être prise dans un sens contraire à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du Problème.

Ce qu'on vient de dire des inconnues, se doit dire aussi des connues, c'est à-dire, que dans les applications qu'on fera d'une solution générale, si on fait négatives quelques-unes des quantités données a , b , &c. dans les Problèmes, cela signifiera que dans l'application particulière, ces quantités doivent être prises

Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du Problème.

Il en est de même des connues.

dans un sens contraire à celui suivant lequel on les prenoit dans un sens contraire.

L X I V.

Exemple
de l'usage
des quanti-
tés connues
faites négati-
ves.

Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être, dans le Problème précédent, les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant six jours, tandis que la seconde en dérobe pendant trois jours, un réservoir de 180 muids soit rempli; & que la première source ensuite fournissant de l'eau pendant 3 jours, & la seconde pendant 4 jours, un réservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, & par conséquent $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, qui donnent $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = 40$ & $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = 50$, par

lesquelles on apprend que la dépense de la première source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la première opération, soit pour fournir, ainsi qu'il arrive dans la seconde; & que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit si naturel d'imaginer que b devoit être négatif dans cette application, & si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de

cette lettre, en exprimant les conditions du Problème, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir.

L X V.

Pour faciliter aux Commençans la maniere d'étendre les solutions des Problèmes aux cas où les quantités données sont prises dans un sens contraire à celui où elles avoient été prises d'abord, nous prendrons encore un exemple dans un autre Problème que le précédent, nous reviendrons au Problème de l'art. XXIV. où il s'agit de trouver la rencontre de deux Courriers, & nous chercherons à tirer de la solution générale celle du cas suivant.

Deux Courriers sont à la distance de 50 lieues, l'un étant, par exemple, à Lille, l'autre à Paris. Le premier part de Lille à 8 heures du soir pour aller à Paris en faisant 4 lieues par heure. Le second part le même jour de Paris à 11 heures du matin pour aller à Lille, & fait 3 lieues par heure; on demande à quelle distance de Paris ils se rencontreront.

En comparant cet énoncé avec celui du Problème général, on voit d'abord que la lettre *c*, qui exprimoit la marche du premier Courrier dans un temps donné, doit être négative, puisque dans la solution générale on supposoit que le premier Courrier s'éloignoit, & qu'il vient, dans ce cas-ci, au devant du second. On voit ensuite que la lettre *b*, qui exprimoit le nombre d'heures d'avance du premier Courrier, doit être aussi négative, puisqu'il est parti plus tard.

Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives.

Ainsi on n'aura qu'à faire dans la formule générale $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$, = 50, $b = -9$

$c = -4$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$, & l'on aura $x = \frac{50 \times 1 \times 3 - 9 \times -4 \times 3}{1 \times 3 + 4 \times 1}$

= $\frac{150 + 108}{3 + 4} = \frac{258}{7} = 36 \frac{6}{7}$ qui ap-

prend que lorsque le Courier de Paris aura fait $36 \frac{6}{7}$ lieues, il aura joint celui de Lille.

L X V I.

Un des usages des plus étendus de l'Algèbre & qui montre le mieux l'avantage qu'on a de prendre à volonté, ainsi qu'on vient de faire, les signes des quantités données en général dans les Problèmes, c'est de rapporter à la solution des équations qu'on a prises généralement, toutes celles dans lesquelles les inconnues sont disposées de la même manière, mais avec des signes & des coefficients quelconques. Par exemple, avec les deux équations $bx + cy = a$ & $ex + fy = d$ qu'on a résolues dans l'article LVI. on résoudra toujours deux équations du premier degré quelles qu'elles soient, pourvu qu'elles ne renferment que deux inconnues.

Deux équations du premier degré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes.

Exemple.

Qu'on ait, par exemple, à résoudre les deux équations $mnx = ppy - hhg$ & $mny = p^3 - nnx$. Pour les comparer aux premières, on commencera par les écrire ainsi

$mnx - p^2y = -hhg$ & $nnx + nmy = p^3$, les comparant alors terme à terme avec les deux équations

$bx + cy = a$ & $ex + fy = d$.

La premiere avec la premiere, & la seconde avec la seconde, on aura

$$b = mn, c = -p^2, a = -hhg, e = n^2$$

$$f = mn, d = p^3.$$

Ce qui donnera

$$cd = -p^5, af = -mnhhg, ce = -p^2n^2,$$

$$bf = m m n n, ae = -h^2 n^2 g, bd = m n p^3,$$

& par conséquent $cd - af = -p^5 + mnhhg,$
 $ce - bf = -m^2 n^2 - p^2 n^2, ae - bd = -h^2 n^2 g - m n p^3.$

Or, substituant ces valeurs dans les formules

générales $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$ & $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$,

on aura enfin $x = \frac{p^5 - m n h^2 g}{m^2 n^2 + p^2 n^2}$

& $y = \frac{h^2 g n^2 + m n p^3}{m^2 n^2 + p^2 n^2}.$

LXVII.

Supposons présentement qu'on ait les équations

$$\frac{3 m p x}{p - q} = \frac{p p y}{p + q} - \frac{2 n q}{p - q} \quad \&$$

Autre exemple.

$$m x + \frac{p + q}{p - q} \times y = \frac{n q}{p - q}$$

en mettant la premiere sous cette forme.....

$$\frac{3 m p x}{p - q} - \frac{p p}{p + q} y = - \frac{2 n q}{p - q}$$

on aura, en la comparant à l'équation générale,

$$b x + c y = a, \quad b = \frac{3 m p}{p - q}, \quad c = - \frac{p p}{p + q}$$

$$a = - \frac{2 n q}{p - q}, \quad \& \text{ en comparant la se-}$$

conde à l'équation $ex + fy = d$, on aura

$$e = m, f = p + q, d = \frac{nq}{p - q},$$

& ces valeurs étant substituées dans la formule

$$x = \frac{cd - af}{ce - bf}, \text{ donneront.}$$

$$x = \frac{-\frac{pp}{p+q} \times \frac{qn}{p-q} + \frac{2nq}{p-q} \times p+q}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times p+q}.$$

Pour réduire cette quantité, je commence par multiplier le numérateur & le dénominateur de la fraction

$$\frac{2nq \times p+q}{p-q} \text{ par } p+q,$$

ce qui la change en $\frac{2nq \times p+q}{p-q \times p+q}$, par

ce moyen le numérateur entier de la valeur de

$$x \text{ devient } \frac{-pp \times qn + 2nq \times p+q}{p-q \times p+q},$$

$$\text{ou } \frac{qn \times 2 \times p+q - pp}{p-q \times p+q}, \text{ ou}$$

$$qn \times \frac{p-q \times p+q}{pp + 4pq + 2qq}.$$

Je travaille ensuite sur le dénominateur de la valeur de x , en mettant ses deux parties

ties

ties au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{-p^2 \times p - q \times m - 3mp \times p + q^2}{p+q \times p - q}$$

ou $\frac{-mp \times p - pq + 3 \times p + q^2}{p+q \times p - q}$, ou

enfin $\frac{mp \times 4pp + 5pq + 3qq}{p+q \times p - q}$.

Ces deux opérations changent la valeur précé-

$$qn \times \frac{pp + 4pq + 2qq}{p+q \times p - q}$$

dente de x en $\frac{-mp \times 4pp + 5pq + 3qq}{p+q \times p - q}$;

mais comme le numérateur & le dénomina-

teur de cette fraction sont chacun divisés par

$$\frac{qn \times pp + 4pq + 2qq}{-mp \times 4pp + 5pq + 3qq}, \text{ ou}$$

$$\frac{qn \times pp + 4pp + 2qq}{mp \times 4pp + 5pq + 3qq}, \text{ ou}$$

$$\frac{qn}{mp} \times \frac{pp + 4pq + 2qq}{4pp + 5pq + 3qq}, \text{ ou enfin}$$

F.

$$x = \frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpqq}$$

substituant maintenant les mêmes valeurs de $a, b, c,$ &c. dans la formule générale

$$y = \frac{ae - bd}{ce - bf}, \text{ on aura.....}$$

$$y = \frac{-\frac{2nq}{p-q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \frac{nq}{p-q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mq}{p-q} \times p+q}$$

au numérateur de laquelle je donne cette forme

$$\frac{-2mnq \times (p-q) - 3mpqn}{p-q},$$

en multipliant le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2nqm}{p-q}$ par $p-q$.

Je réduis ensuite cette nouvelle forme, & elle

$$\text{devient } \frac{mnq \times -5p + 2q}{p-q}.$$

Quant au dénominateur de la valeur de y , comme il est le même que celui de la valeur de x , il se réduira de même, & l'on aura partant

$$y = \frac{\frac{2q - 5p}{p-q}}{-mp \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{p+q \times p-q}}$$

ou en effaçant les diviseurs communs $p - q$,
& en réduisant,

$$y = \frac{qn \times \frac{5p - 2q}{p - q}}{p \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{p + q}} \text{ qui,}$$

en faisant passer le diviseur $p + q$ en haut,
& le diviseur $p - q$ en bas, suivant les re-
gles des divisions des fractions, devient enfin

$$y = \frac{qn \times p + q \times 5p - 2q}{p \times p - q \times 4p^2 + 5pq + 3qq}, \text{ ou}$$

$$y = \frac{-2q^3n + 5p^2qn + 3pq^2n}{-2p^2q^2 + 4p^4 + p^3q - 3pq^3}.$$

LXVIII.

Si pour résoudre les équations proposées dans
cet exemple, on avoit commencé par délivrer
des fractions ces équations, le calcul qu'on au-
roit fait de la maniere suivante, auroit donné
moins d'embaras de la part des diviseurs.

Autre ma-
nere de ré-
soudre le
même
exemple.

Soient multipliés d'abord les deux membres

de l'équation $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2qn}{p-q}$,

ou $\frac{3mpx}{p-q} - \frac{ppy}{p+q} = -\frac{2nq}{p-q}$

par $pp - qq$ produit des deux diviseurs $p - q$,

$p + q$, & l'on aura l'équation $3mp^2 + 3mpq$
F ij

$$x x + p p q - p^3 \times y = - 2 n p q - 2 n q q.$$

Soient multipliés de même les deux membres de l'équation $m x + p + q \times y = \frac{n q}{p - q}$

par $p - q$, & l'on aura $m p - m q \times x + p p - q q \times y = q n$.

Comparant présentement ces deux nouvelles équations avec les deux formules générales, on a $b = 3 m p p + 3 m p q$, $c = p p q - p^3$, $a = - 2 n p q - 2 n q^2$, $e = m p - m q$, $f = p^2 - q^2$, $d = q n$.

D'où l'on tire $c d = p^2 q^2 n - p^3 q n$, $a f = - 2 n p^3 q - 2 n p^2 q^2 + 2 p q^3 n + 2 n q^4$, $a e = 2 n m q^3 - 2 n m p^2 q$, $b d = 3 m n p^2 q + 3 m n p q^2$; $c e = 2 p^3 q m - m p^4 - m p^2 q^2$; $b f = 3 m p^3 q + 3 m p^4 - 3 m p q^3 - 3 m p^2 q^2$

& partant.....
 $c d - a f = q n p^3 + 3 p^2 q^2 n - 2 n p q^3 - 2 n q^4$
 $c e - b f = 2 m p^2 q^2 - 4 m p^4 - m p^2 q + 3 m p q^3$
 $a e - b d = 2 n m q^3 - 5 m n p^2 q - 3 m n p q$
 qui donnent.....

$$x = \frac{q n p^3 + 3 p p q q n - 2 n p q^3 - 2 n q^4}{2 m p^2 q^2 - 4 m p^4 - m p^3 q + 3 m p q^3} \&$$

$$y = \frac{2 n m q^3 - 5 m n p^2 q - 3 m n p q q}{2 m p p q q - 4 m p^4 - m p^3 q + 3 m p q^3}$$

L X I X.

Comparai-
 son de deux
 solutions
 précédentes.

Si on compare présentement ces deux valeurs de x & de y avec celles qu'on avoit trouvées précédemment, on voit d'abord sans au-

cune difficulté l'identité des deux valeurs de y .
 Quant aux valeurs de x , pour favoir comment
 la premiere peut être la même chose que la se-
 conde, il faut remarquer que l'égalité qui doit
 être entre ces deux expressions, suppose neces-
 sairement que le numérateur $q n p^3 + 3 n p p q q$
 $- 2 n p q^3 - 2 n q^4$ de la seconde contienne
 le numérateur $- q n p p - 4 p q^2 n - 2 q^3 n$
 de la premiere, de la même maniere que le dé-
 nominateur $2 m p^2 q^2 - 4 m p^4 - m p^3 q$
 $+ 3 m p q^3$ de la seconde contient le déno-
 minateur $4 p^3 m + 5 p^2 q m + 3 m p q^2$ de
 la premiere. Or, prenant la peine de diviser
 le second numérateur par le premier, on trou-
 ve en effet le même quotient $p - q$ qu'en
 divisant le second dénominateur par le pre-
 mier. C'est-à-dire, que l'expression.....

$$\frac{q n p^3 + 3 p p q q n - 2 n p q^3 - 2 n q^4}{2 m p^2 q^2 - 4 m p^4 - m p^3 q + 3 m p q^3}$$

se change en.....

$$\frac{p - q \times - n q p p - 4 p q q n - 2 n q^3}{p - q \times 4 m p^3 q + 5 m p^2 q + 3 m p q^2}$$

ou en $\frac{- n q p p - 4 p q q n - 2 n q^3}{4 m p^3 + 5 m p^2 q + 3 m p q^2}$

en ôtant les diviseurs communs $p - q$.

L X X.

La maniere dont on vient de réduire la plus
 composée des deux valeurs de x à la plus simple,
 étoit aisée à imaginer, lorsqu'on savoit l'une &
 l'autre de ces deux expressions ; mais si on

n'eût connu que la plus composée & qu'on eût voulu la simplifier, on auroit été beaucoup plus embarrassé, puisqu'on n'auroit pas su par quelle quantité il falloit diviser le numérateur & le dénominateur de la fraction. Or comme ce seroit un vice dans la solution d'un Problème qu'une quantité réductible & non réduite, il faut chercher une méthode pour réduire toute fraction qui peut se simplifier, ou, ce qui revient au même, il faut chercher une méthode pour trouver quel est le plus grand diviseur commun que puissent avoir deux quantités données.

Supposons d'abord, pour aller du plus simple au plus composé, que ces deux quantités ne soient que des nombres; que l'on ait, par exemple, à chercher le plus grand diviseur commun des nombres 637 & 143, ou, ce qui revient au même, que l'on se propose de réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à sa simple expression.

Divisant d'abord 637 par 143, il vient 4 pour quotient, & 65 pour reste, c'est-à-dire, que la fraction $\frac{637}{143}$ se change en $4 + \frac{65}{143}$, d'où la question est réduite à abaisser la fraction $\frac{65}{143}$, ou, ce qui revient au même, à chercher le nombre qui est le plus grand commun diviseur des nombres 143 & 65. Car lorsque ce nombre sera trouvé, il est évident qu'il sera aussi le plus grand commun diviseur des nombres 637 & 143, puisqu'on ne sauroit réduire la fraction $\frac{65}{143}$ à sa plus simple expression, qu'on ne réduise en même-temps $4 + \frac{65}{143}$, ou $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Les deux nombres 143 & 65, sur lesquels il s'agit d'opérer présentement, étant plus simples que les deux premiers 637 & 143, je vois que la difficulté est diminuée, & qu'en s'y prenant de la même manière, on la diminuera encore. Au lieu de la fraction $\frac{65}{143}$ à réduire, j'écris $\frac{143}{65}$, non que je prétende que ces fractions soient les mêmes; mais parce qu'on ne sauroit réduire l'une, que l'autre ne se réduise de la même manière. Ensuite, pour réduire $\frac{143}{65}$, je divise 143 par 65, ce qui me donne 2 pour quotient, & 13 pour le reste. Il ne faut donc plus, par le même principe, que chercher le plus grand commun diviseur de 13 & de 65. Car on voit que le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, sera aussi celui de 143 & de 65, à cause que la fraction $\frac{143}{65}$ se change en $2 + \frac{13}{65}$.

Présentement le plus grand commun diviseur de 13 & de 65 est 13 lui-même, puisqu'il divise exactement 65. Donc 13 est aussi le plus grand commun diviseur de 143 & de 65, donc il est aussi celui des nombres proposés 637, 143. En effet, 637 est 49×13 & 143, 11×13 , d'où l'on tire $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$, fraction irréductible.

L X X I.

On peut s'assurer facilement que la méthode qu'on vient de suivre dans l'exemple précédent, peut s'appliquer à quelques nombres que ce soit. Qu'on ait, en général, deux nombres A & B , & que le quotient de la division du premier par le second soit a , & le reste C , la

Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

F iv

question sera réduite à trouver le plus grand commun diviseur de B & de C ; b étant supposé alors le quotient de B par C , & D le reste, il ne s'agira plus que de trouver le plus grand commun diviseur de C & de D , c'est-à-dire, de diviser C par D , & de se servir du reste pour diviser D . Allant ainsi de division en division jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres, dont le plus petit soit contenu exactement dans le plus grand; ce nombre contenu exactement, sera le plus grand diviseur commun des deux premiers nombres A & B .

Cette regle dans toute sa généralité, comme dans l'exemple précédent, est fondée sur ce que la fraction $\frac{A}{B}$ devenant $a + \frac{C}{B}$ ne sauroit s'abaisser que lorsque $\frac{C}{B}$ s'abaisse, que $\frac{C}{B}$ ne sauroit se réduire que de la même manière que $\frac{B}{C}$, & que $\frac{B}{C}$ étant $b + \frac{D}{C}$ ne sauroit se réduire sans que $\frac{D}{C}$ se réduise, & ainsi de suite.

L X X I I.

Voyons présentement quels sont les changemens qu'il faut faire à cette méthode pour l'appliquer aux quantités Algébriques; & pour plus de clarté, prenons d'abord un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le plus

grand commun diviseur des quantités $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.
 il faudroit, suivant la méthode précédente, diviser la premiere de ces deux quantités par la seconde; mais comme la division ne sauroit se faire à cause que le premier terme $3a^3$ du dividende ne contient pas exactement le premier terme du diviseur, je multiplie toute la premiere quantité par 4, & je remarque que 4 n'étant point un des diviseurs de la seconde quantité $4aa - 5ba + bb$, il ne peut pas y avoir d'autre plus grand commun diviseur entre $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & $4aa - 5ba + bb$ qu'entre $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

Je divise alors, suivant les regles précédentes, $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ par $4aa - 5ba + bb$; j'ai pour quotient $3a$, & pour reste $3baa + bba - 4b^3$, ce qui, suivant les mêmes regles, demanderoit qu'on divisât $4aa - 5ba + bb$ par $3baa + bba - 4b^3$; mais comme la division de ces quantités ne sauroit se faire sans les préparer auparavant, je remarque d'abord que b étant commun à tous les termes de la dernière quantité, & ne l'étant pas à ceux de la seconde, il ne sauroit être partie du plus grand commun diviseur de ces quantités, ainsi je l'ôte de tous les termes de cette seconde quantité, & je prends à la place $3aa + ba - 4b^2$. Je remarque ensuite qu'en multipliant la premiere quantité $4aa - 5ba + bb$

par 3, qui n'est point un diviseur de $3aa + ba - 4bb^2$, la division sera possible; je fais donc cette division de $12aa - 15ab + 3bb$ par $3aa + ba - 4bb$, ce qui me donne 4 pour quotient, & pour reste $-19ab + 19bb$.

Il n'est donc plus question présentement que de trouver le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$, & de $-19ab + 19bb$. Comme il faudroit, pour cette opération, diviser la première de ces deux quantités par la seconde, & que pour pouvoir diviser les deux premiers termes de ces quantités, il faudroit multiplier la première par $19b$, qui est un diviseur exact de la seconde, j'ôte ce diviseur de la seconde, ce qui la réduit à $-a + b$.

Mais le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-a + b$, est $-a + b$ lui-même, puisque la division de ces deux quantités se fait exactement. Donc $-a + b$ est le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-19ab + 19bb$; donc il est aussi le plus grand commun diviseur de $12aa - 15ab + 3bb$ & de $3aa + ba - 4bb$, donc il l'est encore de $4aa - 5ba + bb$, & de $3baa + bba - 4bb^3$ aussi-bien que de $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^2$ & de $4aa - 5ba + bb$. Donc il est enfin le plus grand diviseur commun des quantités proposées $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

Il n'est pas difficile maintenant de voir qu'on réussiroit à peu près de la même manière, quelles que fussent les quantités dont on voulût trouver les plus grands communs diviseurs. Le seul principe qu'on soit obligé d'ajouter dans cette recherche, à la méthode de l'art. LXXI, c'est que deux quantités quelconques A & B conserveront leur plus grand commun diviseur, si on multiplie ou divise l'une de ces deux quantités, A , par exemple, par une quantité qui n'ait aucun diviseur commun avec B .

On peut énoncer ainsi le procédé de la méthode générale de déterminer les plus grands communs diviseurs. Soient A & B les deux quantités proposées, on commentera par ordonner ces deux quantités par rapport à une des lettres quelconques qu'elles ont de commun. On verra ensuite par quelle quantité m il faudroit multiplier A pour que les termes affectés de la plus haute puissance de la lettre suivant laquelle on l'a ordonnée, puissent se diviser par les termes de B affectés de la plus haute puissance de la même lettre; si ce multiplicateur m n'a aucun commun diviseur avec B , on s'en servira pour multiplier A ; mais s'il a un commun diviseur n , on ôtera ce commun diviseur tant de m que de B , & on ne multipliera A que par $\frac{m}{n}$, ce qui formera une nouvelle quantité C que l'on prendra à la place de A . On prendra de même à la place de B

Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviseur des quantités Algébriques.

la quantité D qui en vient lorsqu'on l'a divisé par le diviseur n qu'il a de commun avec m .

Cela fait, on divisera C par D , & la division faite, si elle est exacte, D sera le plus grand commun diviseur cherché de A & de B ; mais s'il y a un reste E , on fera, à l'égard de D & de E la même opération qu'à l'égard de A & de B , & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à deux quantités qui se divisent exactement. Lorsqu'on y sera parvenu, celle de ces deux quantités qui sera contenue exactement dans l'autre, sera le plus grand commun diviseur cherché.

Il est bon de faire remarquer que si, avant d'entreprendre l'opération dont on vient de voir la méthode, on aperçoit dans l'une des quantités proposées A ou B quelque quantité qui en soit un diviseur exact, & qui ne le soit point de l'autre, il faudra commencer par ôter ce diviseur pour que ce calcul soit plus simple.

Afin que les Commençans puissent acquérir quelque facilité dans l'application de cette méthode, j'ai joint les exemples suivans.

L X X I V.

Premier
exemple.

Soient les quantités $q n p^3 + 3 n p^2 q^2 - 2 n p q^3 - 2 n q^4$ & $2 m p^2 q^2 - 4 m p^4 - m p^3 q + 3 m p q^3$, dans lesquelles nous n'avons trouvé (art. LXIX.) le diviseur commun $p - q$, que parce que nous savions d'avance que la première de ces deux quantités, divisée par la seconde, devoit donner le même quotient que la quantité $- n q p^2 - 4 p q^2$.

$n - 2 n q^3$ divisée par $4 m p^3 + 5 m p^2 q + 3 m p q^2$.

Pour réduire présentement ces deux quantités, sans employer autre chose que la méthode précédente, on commencera par ôter $q n$ qui est commun à tous les termes de la première de ces deux quantités, & qui n'est point contenu dans la seconde; on ôtera même $p m$ qui est commun à tous les termes de la seconde, sans être contenu dans la première; & par là l'opération sera réduite à trouver le plus grand diviseur commun des quantités (A) $- 4 p^3 - p^2 q + 2 p q^2 + 3 q^3$ & (B) $p^3 + 3 p p q - 2 p q^2 - 2 q^3$.

Divisant A par B, j'ai $- 4$ pour quotient, & pour reste (C) $11 p^2 q - 6 p q^2 - 5 q^3$, comme il faudroit alors multiplier B par $11 q$, pour que son premier terme pût être divisé par le premier terme de C, & que q est contenu dans tous les termes de C, je multiplie simplement B par 11 , & je divise C par q , d'où je n'ai plus à comparer que les deux quantités (D) $11 p^3 + 33 p^2 q - 22 p q^2 - 22 q^3$, & (E) $11 p^2 - 6 p q - 5 q^2$.

Je divise la première par la seconde, & j'ai pour quotient p & pour reste (F) $39 p^2 q - 17 p q^2 - 22 q^3$. Comme il faudroit alors multiplier (E) par $39 q$, afin que son premier terme fût divisible par celui de cette nouvelle quantité F, & que q est commun à tous les termes de F, je ne multiplie donc E que par 39 , & je divise son produit (G) $429 p^2 - 234$

$p q - 195 q^2$ par $[H] 39 p^2 - 17 p q - 22 q^2$. Le quotient est 11, & le reste $[I] - 47 p q + 47 q^2$.

Pour diviser alors H par I , il faudroit multiplier tous les termes par $47 q$; mais cette quantité est un diviseur de H , je l'ôte donc de H & il me reste $q - p$ pour servir de diviseur à $39 p^2 - 17 p q - 22 q^2$. Or, la division se fait exactement; donc $q - p$ est le plus grand diviseur commun cherché des quantités proposées.

L X X V.

Second
exemple.

Soient proposées présentement les deux quantités $a b + 2 a a - 3 b b - 4 b c - a c - c c$ & $9 a c + 2 a a - 5 a b + 4 c c + 8 b c - 12 b b$, ordonnant ces deux quantités par rapport à a , j'ai $2 a a + b a - c a - 3 b b - 4 b c - c c$ & $2 a a + 9 c a - 5 b a - 12 b b + 8 b c + 4 c c$, ou $[A]$

$$2 a a + \underline{b - c} \times a - 3 b b - 4 b c - c c$$

& $[B] 2 a a + 9 c - 5 b \times a - 12 b b + 8 b c + 4 c c$.

Divisant la première par la seconde, j'ai 1 pour quotient, & pour reste $(C) 6 b - 10 c \times a + 9 b b - 12 b c - 5 c c$. Pour diviser B par cette quantité, je vois qu'il faudroit auparavant la multiplier par $3 b - 5 c$. Mais avant d'en faire l'opération, je tente la division de C par $3 b - 5 c$, elle réussit, & donne pour quotient $(D) 2 a + 3 b + c$; je n'ai donc plus qu'à chercher le plus grand

commun diviseur de B & de D ; mais B est divisible exactement par D ; donc D , ou $2a + 3b + c$, est le plus grand commun diviseur cherché de $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ & de $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$. En effet, la première de ces deux quantités est le produit de $2a + 3b + c$ par $a - b - c$, la seconde le produit de $2a + 3b + c$ par $a - 4b + 4c$, & ces deux quantités $a - b - c$ & $a - 4b + 4c$ n'ont plus aucun commun diviseur.

LXXVI.

Soient les deux quantités $(A) \overline{dd - cc}$ Troisième
 $\times a^2 + c^4 - d d c c$ & $(B) \overline{4 d a^2}$ exemple.

$\overline{2 c c + 4 c d} \times a + 2 c^3$ ordonnées par rapport à a . Je change d'abord B en $(C) \overline{2 d$

$\overline{a^2 - c c + 2 c d} \times a + c^3$, en ôtant de tous les termes le diviseur qui n'est pas commun avec A . Je multiplie ensuite A par $2 d$, afin de rendre la division possible, ce qui me donne pour quotient $\overline{d d - c c}$ & pour reste

$(D) \overline{d d - c c} \times c c + 2 c d \times a -$

$\overline{d d - c c} \times c^3 + 2 d c^4 - 2 d^3 c c$, si on vouloit alors que cette quantité servît de diviseur à C , il faudroit multiplier auparavant

C par $\overline{d d - c c} \times c c + 2 c d$, afin que son premier terme permît la division.

Mais avant de faire cette multiplication, il

faut savoir si $dd - cc \times cc + 2cd$ ne seroit point ou un diviseur, ou un multiple de quelque diviseur de D . Pour le savoir, je cherche le plus grand commun diviseur de $dd - cc \times cc + 2cd$ & de $dd - cc \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, c'est-à-dire, de $ddcc - c^4 + 2cd^3 - 2c^3d$ & de $-ddc^3 + c^5 + 2dc^4 - 2d^3cc$; mais je vois tout de suite que la seconde de ces quantités n'est autre chose que le produit de la première par $-c$, & partant que la quantité D se réduit au produit de $dd - cc \times cc + 2cd$ par $a - c$; donc au lieu de multiplier C par $dd - cc \times cc + 2cd$, je divise D par cette quantité, & il vient (E) $a - c$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec C ; or, $a - c$ divise exactement C , donc $a - c$ est le plus grand diviseur cherché.

L X X V I I.

Au reste, avec un peu d'habitude dans le calcul, on découvre souvent le plus grand commun diviseur de deux quantités plus facilement que par la méthode générale qu'on vient d'expliquer. Par exemple, les deux quantités

Autre manière de résoudre le même exemple.

précédentes $dd - cc \times aa + c^4 - ddcc$ & $4daa - 2cc + 4cd \times a + 2c^3$ étant ordonnées par rapport à d , & par conséquent étant

étant sous cette forme $aa - cc \times dd + c^4$
 $- aacc$ & $4aa - 4ac \times d + 2c^3$
 $- 2c^2a$, il est aisé de découvrir que
 $aa - cc$ est un diviseur de la première,
 & $c - a$ un diviseur de la seconde. Mais
 $aa - cc$ est divisible par $c - a$, donc
 $c - a$ est un diviseur des deux quantités pro-
 posées; je les divise donc l'une & l'autre par
 $c - a$, & j'ai pour leurs quotiens $cc - dd$
 $\times c + a$; & $4ad + 2cc$ qu'on voit assez
 facilement n'avoir plus de commun diviseur,
 donc $c - a$, ou $a - c$ étoit le plus grand
 commun diviseur des quantités proposées.

LXXVIII.

Qu'on se propose maintenant de chercher le plus grand commun diviseur des deux quantités $6a^3 + 15a^2b - 4a^3cc - 10aabc$ & $9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3$, je commence par ôter aa de tous les termes de la première; & $3b$ de tous ceux de la seconde. J'ai alors $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$ & $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$; mais comme la seconde de ces deux quantités ne contient aucun b , je conclus que si elle a un commun diviseur avec la première, il faut qu'elle l'ait séparément avec ses deux parties $6a^3 - 4acc$ & $5ab - 10bcc$, & que ces deux parties doivent aussi avoir en-elles le même commun diviseur. Or, on

Autres quantités donc on trouve le plus grand commun diviseur sans la méthode précédente.

G

voit tout de suite que $3 a a - 2 c c$ est le diviseur commun de ces deux parties, donc il est le plus grand commun diviseur des quantités proposées, si elles en ont un. Le prenant donc pour diviser ces deux quantités, on voit qu'en effet il les divise, & qu'il est par conséquent leur plus grand commun diviseur.

L X X I X.

Lorsqu'il y a trois inconnues dans un Problème, il faut trois équations pour le résoudre. On a vû suffisamment, par ce qui précède, que pour trouver les deux inconnues que renferme un Problème, il faut avoir deux équations. Il n'est pas difficile d'imaginer en partant de-là, que lorsqu'il y aura trois inconnues dans un Problème, il faudra trois équations, & ainsi de suite. Quant à la maniere de dégager les inconnues de ces équations, elle ne sera pas difficile non plus à imaginer, après ce qu'on a vû pour celles qui ne renferment que deux inconnues. Car qu'on ait trois équations contenant chacune les trois inconnues x, y, z ; si on tire la valeur de x de chacune de ces équations exprimée par le moyen des connues & des deux autres inconnues y, z , de ces équations, il est évident qu'en égalant les unes aux autres ces différentes valeurs de x , on aura deux nouvelles équations qui ne contiendront plus que les deux inconnues y & z , & qui seront par conséquent dans le cas de celles dont nous venons de parler. Il en seroit de même des équations à quatre, cinq, &c. inconnues.

Comme la méthode générale qu'on vient d'expliquer, peut offrir des difficultés lorsque

l'on en fait usage, nous allons en montrer l'application dans le Problème suivant, qui renfermera la plus grande complication que peuvent avoir les équations du premier degré à trois inconnues.

L X X X.

On sçait que ces trois magasins, contenant chacun trois sortes de denrées, ont coûté les uns & les autres séparément; on sçait de plus le nombre de mesures que chaque magasin contient de ces trois différentes denrées; on demande à combien revient une mesure de chaque denrée.

Problème dans lequel on emploie trois inconnues.

Soient a, b, c , les nombre de mesures de chaque denrée contenue dans le premier magasin, soit d le prix de ce magasin.

Soient de plus e, f, g , les mesures des mêmes denrées contenues dans le second magasin dont le prix est supposé h .

Soient encore i, k, l , les mesures des mêmes denrées contenues dans le troisième magasin, dont le prix est supposé m .

Soient enfin x, y, z , ce que coûte une mesure de chaque denrée.

Il est évident que la quantité de la première denrée contenue dans le magasin d coûtera ax , puisque a est le nombre des mesures de cette denrée, & x le prix de la mesure de cette denrée. De même la quantité de la seconde denrée contenue dans le même magasin coûtera by , & la quantité de la troisième denrée contenue

dans le même magasin coûtera $c z$. Ajoutant donc ces trois sommes pour les égaler au prix d de ce magasin, on aura l'équation

$$a x + b y + c z = d,$$

on formera de même les équations

$$e x + f y + g z = h, \quad i x + k y + l z = m.$$

en exprimant les conditions mentionnées pour les deux autres magasins.

Il est question maintenant de tirer de ces équations les valeurs de x , y , z . Dans cette vue on tirera d'abord la valeur de x de la première équation, qui sera $\frac{d - b y - c z}{a}$, &

égalant cette valeur de x à celle qu'on tire de la seconde équation, on aura l'équation

$$\frac{d - b y - c z}{a} = \frac{h - f y - g z}{e}.$$

Égalant ensuite la même valeur $\frac{d - b y - c z}{a}$

à celle qu'on tire de la troisième équation, on aura l'équation

$$\frac{d - b y - c z}{a} = \frac{m - k y - l z}{i}.$$

De la première de ces deux équations entre y & z , on tirera $d e - b e y - c e z = a h - a f y - a g z$,

$$\text{ou } z = \frac{d e - a h + a f y - b e y}{c e - a}.$$

De la seconde on tirera $di - biy - icz$
 $= am - aky - alz,$

ou $z = \frac{di - am + aky - biy}{ci - al}.$

En égalant ces deux valeurs de z , il est clair qu'on auroit une équation où il n'entreroit plus d'autre inconnue que y , & qu'en résolvant cette équation on connoîtroit y . Comme les calculs que l'on auroit par cette opération seroient assez considérables, je vais faire voir la manière de les éviter en employant quelques abréviations, que les premiers Analystes, qui ont eu de grands calculs à faire, ont aisément imaginées.

L X X X I.

Ces abréviations consistent à mettre de nouvelles lettres à la place de plusieurs termes composés de connues.

Au lieu de . . .	$de - ah$	je mettrai . . .	α	Manière d'abrèger les calculs par des dé- nomina- tions par- ticulières.
de . . .	$af - be$	β	
de . . .	$ce - ag$	γ	
de . . .	$di - am$	δ	
de . . .	$ak - bi$	ϵ	
de . . .	$ci - al$	φ	

Par ces nouvelles dénominations les équations précédentes deviendront $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$

& $z = \frac{\delta + \epsilon y}{\phi}$ lesquelles donneront

$a\phi + \beta\phi y = \delta\gamma + \gamma\epsilon y$ d'où l'on tire

$y = \frac{a\phi - \delta\gamma}{\gamma\epsilon - \beta\phi}$ substituant ensuite

cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de z , dans la première, par exemple, on aura

$$z = \frac{a + \frac{\beta a \phi - \beta \gamma \delta}{\gamma \epsilon - \beta \phi}}{\gamma}$$

qui se réduit à $z = \frac{a\epsilon - \beta\delta}{\gamma\epsilon - \beta\phi}$.

Cela fait, on mettra ces valeurs de y & de z dans l'une des valeurs précédentes de x ,

dans $\frac{d - \epsilon z - b y}{a}$ par exemple,

& l'on aura $x = \frac{d}{a} - \frac{\epsilon}{a} \times \frac{a\epsilon - \beta\delta}{\gamma\epsilon - \beta\phi}$

$- \frac{b}{a} \times \frac{a\phi - \delta\gamma}{\gamma\epsilon - \beta\phi}$, ou

$x = \frac{d \times \gamma\epsilon - \beta\phi - c \times a\epsilon - \beta\delta - b \times a\phi - \delta\gamma}{a \times \gamma\epsilon - \beta\phi}$



LXXXII.

Pour montrer présentement l'application de cette méthode, supposons que le premier magasin contienne 30 mesures de seigle, 20 d'orge & 10 de froment, & qu'il ait coûté 230 lb. Exemple du Problème précédent en nombres.

Que le second magasin contienne 15 mesures de seigle, 6 d'orge & 12 de froment, & qu'il ait coûté 138 lb.

Que le troisieme magasin contienne 10 mesures de seigle, 5 d'orge, 4 de froment, & qu'il ait coûté 75 lb. Pour sçavoir à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge & celle de froment, il faudra faire

$$\begin{aligned} a &= 30, b = 20, c = 10, d = 230, \\ e &= 15, f = 6, g = 12, h = 138, \\ i &= 10, k = 5, l = 4, m = 75, \text{ ce qui} \\ &\text{donnera } de - ah = \alpha = -690, af - be \\ &= \beta = -120, ce - ag = \gamma = -210, \\ di - am = \delta = 50, ak - bi = \varepsilon = -50, \\ ci - al = \varphi = -20, \end{aligned}$$

substituant ensuite ces valeurs dans les qualités $\alpha \varphi - \gamma \delta$, $\gamma \varepsilon - \beta \varphi$, $\alpha \varepsilon - \beta \delta$, on aura 24300, 8100, 40500 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{24300}{8100} = 3, \zeta = \frac{40500}{8100} = 5, \& \\ x &= \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4 \end{aligned}$$

Ainsi le prix de la mesure de seigle est de 4 lb.

G iv

Celui de la mesure d'orge de 3 lb.

Et celui de la mesure de froment de . . 5 lb.

L X X X I I I .

Tous les Problèmes du premier degré à trois inconnues, peuvent, étant mis en équations, être compris dans le Problème précédent.

Comme les équations du Problème précédent sont les plus générales du premier degré à trois inconnues puisque chacune contient les trois inconnues combinées avec des connues quelconques, il s'en suit que tout Problème du premier degré à trois inconnues, sera renfermé, dans le précédent, aussi-tôt qu'il sera exprimé analytiquement. Pour en donner un exemple, soit proposé le Problème suivant.

On a trois lingots composés de différens métaux fondus ensemble.

La livre du premier contient

	onces		onces		onces
. 7	d'arg.	3	de cuiv.	6	d'étain,
celle du 2 ^d 12		3		1,	
celle du 3 ^{eme} 4		7		5.	

On demande ce qu'il faut prendre de chacun de ces lingots pour en former un quatrieme qui contienne

onces		onces	gros		onces	gros	
8	d'arg.	3	6	de cuiv.	4	2	étain.

Soient x , y , z les nombres d'onces qu'il faut prendre de chacun de ces métaux.

Il est évident que $\frac{7}{16} x$ fera ce qu'il y aura d'argent dans ce qu'on tirera du premier lingot que $\frac{12}{16} y$ fera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du second lingot, & que $\frac{4}{16} z$ fera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du troisieme.

Ajoutant donc ces trois quantités, leur somme devra être 8 onces d'argent; donc on a l'équation $\frac{7}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{4}{16}z = 8$, ou $7x + 12y + 4z = 128$.

On aura de même pour ce qu'on tirera de cuivre des trois métaux, $\frac{3}{16}x$, $\frac{3}{16}y$ & $\frac{7}{16}z$ dont la somme doit faire 3 $\frac{6}{16}$ ou $\frac{15}{4}$ ce qui donnera $\frac{3}{16}x + \frac{3}{16}y + \frac{7}{16}z = \frac{15}{4}$, ou $3x + 3y + 7z = 60$.

Ce qu'on tirera d'étain des trois métaux fera pareillement $\frac{6}{16}x$, $\frac{1}{16}y$, $\frac{1}{16}z$ dont la somme doit faire 4 $\frac{2}{16}$ ou $4\frac{1}{4}$ donc

$$\frac{6}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{1}{16}z = 4 + \frac{1}{4}$$

$$\text{ou } 6x + y + 5z = 68.$$

Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces trois équations, c'est ce que l'on tirera facilement de la solution précédente, en faisant

$$a = 7 \quad b = 12 \quad c = 4 \quad d = 128,$$

$$e = 3 \quad f = 3 \quad g = 7 \quad h = 60,$$

$$i = 6 \quad k = 1 \quad l = 5 \quad m = 68,$$

par lesquelles on trouvera

$$de - ha = \alpha = -36; \quad af - be = \beta$$

$$= -15; \quad ce - ag = \gamma = +37$$

$$di - am = \delta = 292, \quad ak - bi = \epsilon = -65;$$

$$ci - al = \varphi = -11,$$

substituant ensuite ces valeurs dans les quantités

$$\alpha \varphi - \gamma \delta, \quad \gamma \epsilon - \beta \varphi, \quad \alpha \epsilon - \beta \delta,$$

on aura 11200, 2240, 6720 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$$y = \frac{11200}{2240} = 5, \quad z = \frac{6720}{2240} = 3, \quad \&$$

$$x = \frac{128 \times 2240 - 4 \times 6720 - 12 \times 11200}{7 \times 2240} = 8,$$

c'est-à-dire , qu'il faut prendre 5 onces du premier lingot , 3 onces du second , & 8 du troisieme pour former le lingot demandé.





ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

SECONDE PARTIE.

*De la résolution des Équations
du second degré.*



O U S avons présentement assez traité des Problèmes du premier degré pour passer à ceux des autres degrés, & particulièrement aux Problèmes du second degré, que nous allons examiner dans cette seconde Partie. Quant à la manière d'exprimer analytiquement leurs conditions, elle est la même que dans les Problèmes du premier degré, ce n'est que pour résoudre les équations auxquelles on arrive en exprimant les Problèmes, qu'il faut employer des méthodes différentes, suivant les degrés de

ces équations. On en peut voir un exemple dans le Problème suivant, qui dans sa généralité renferme des Problèmes de tous les degrés, & n'est pas plus difficile à exprimer analytiquement pour le degré le plus composé, que pour le plus simple.

I.

Problème qui contient dans sa généralité des Problèmes de tous les degrés. *Un homme ayant placé une somme a dans un commerce où il perd, veut se retirer dès la première année; mais en ayant manqué l'occasion, & ne l'ayant pu retrouver qu'à la deuxième ou à la troisième, ou, en général, à la n^{ème} année, il trouve que la somme est diminuée de la quantité b de ce qu'elle étoit après la première année. On demande à combien pour cent montoit sa perte par an.*

Soit x le nombre cherché, c'est-à-dire, ce que chaque cent livres perd après la première année. En faisant cette proportion $100 : 100$

$— x = a : a \times \frac{100 - x}{100}$, le quatrième ter-

me $a \times \frac{100 - x}{100}$, ou $a \times 1 - \frac{x}{100}$ ex-

primera ce que devient la somme a après la première année.

Si on continue ensuite cette proportion en disant

$100 : 100 - x = \frac{a \times \frac{100 - x}{100}}{100} :$

$\frac{a \times 100 - x^2}{10000}$: le quatrième terme

$\frac{a \times 100 - x^2}{10000}$, ou $a \times 1 - \frac{x^2}{100}$ fera ce que devient la même somme a après la seconde année.

On exprimera de même ce que cette somme devient après la troisième année par

$a \times 1 - \frac{x^2}{100}$, & en général, ce qu'elle devient après la $n^{\text{ème}}$ année sera

$a \times 1 - \frac{x^2}{100}$, c'est-à-dire a multiplié par la quantité $1 - \frac{x}{100}$ élevée à la puissance n .

I I.

Présentement si on veut sçavoir quelle sera l'équation à résoudre, en supposant que le Négociant se soit retiré à la seconde année, il

faudra évaluer la quantité $a \times 1 - \frac{x^2}{100}$ Équation du Problème précédent pour le cas du second degré.

à la quantité $a \times 1 - \frac{x^2}{100}$ diminuée de la quantité b , ce qui donnera

$$a \times 1 - \frac{x^2}{100} = a \times 1 - \frac{x^2}{100} - b,$$

ou en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ par lui-

même, ainsi que l'indique l'exposant 2,

$$a \times 1 - \frac{2x}{100} + \frac{x^2}{10000} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$$

qui se réduit à $x^2 - 100x = -10000 \frac{b}{a}$,
équation du second degré à laquelle les métho-
des précédentes ne sçauroient atteindre.

I I I.

Si on suppose que ce ne soit qu'à la troi-
sième année, l'équation à résoudre sera

$$a \times 1 - \frac{x^3}{100} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b, \text{ qui}$$

en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ deux fois par lui-
même, ainsi que l'indique l'exposant 3, devient

Pour le
troisième
degré.

$$a \times 1 - \frac{3x}{100} + \frac{3x^2}{10000} - \frac{x^3}{1000000} \\ = a \times 1 - \frac{x}{100} - b, \text{ ou enfin}$$

$$x^3 - 300x^2 + 30000x = 1000000 \frac{b}{a},$$

équation qui doit naturellement promettre plus
de difficulté que la précédente.

I V.

Quant aux autres cas, on voit aisément com-
ment on parviendroit successivement à former
les équations qu'ils donneroient, & l'induction
montre que l'équation seroit toujours du degré
exprimé par le nombre n . Si on veut avoir
cette équation, en général, sans spécifier le
nombre n , on n'aura qu'à employer l'expres-

fon générale $a \times 1 - \frac{x}{100}$ de la quantité que devient a après la n^{me} année,

& l'équation sera $a \times 1 - \frac{x}{100} = a$

$$\times 1 - \frac{x}{100} = b, \text{ ou } 1 - \frac{x}{100} = 1$$

$$- \frac{x}{100} = \frac{b}{a}.$$

V.

Contentons-nous présentement de résoudre le Problème dans le cas où son équation est du second degré, c'est-à-dire, lorsqu'elle est

$$x^2 - 100x = -10000 \frac{b}{a}, \text{ ou plutôt}$$

cherchons une méthode pour résoudre généralement toutes les équations du second degré.

Ceux qui voudront résoudre des cas plus élevés du même Problème, y parviendront facilement aussi-tôt qu'ils auront vû dans la suite, les méthodes générales qui conviennent aux degrés que ces équations donnent.

Ce qui se présente plus naturellement en cherchant une méthode pour résoudre généralement les équations du second degré, c'est de voir la liaison qu'il peut y avoir entre ces équations & celles du premier : or, il est clair que toute équation du premier degré deviendra du second, si on quarre les deux membres, par exemple, $x + a = b$ donne étant quarre $x^2 + 2ax + a^2 = b^2$; reste donc

Manière
d'arriver
à la solution
générale des
équations
du second
degré.

à ſçavoir ſi, par une opération contraire, on pourroit rappeler toute équation du ſecond degré à une du premier. Prenons, par exemple, l'équation $x^2 + p x = q$ qui exprimera toute équation du ſecond degré ſelon les valeurs qu'auront p & q ; ces lettres pouvant désigner toutes ſortes de quantités positives ou négatives. Suivant ce que nous venons de dire, il n'y a qu'à voir ſi $x^2 + p x$ ne ſeroit pas le carré de quelque quantité dont la première partie ſeroit x , & dont la ſeconde ſeroit une connue, afin de trouver, par ce moyen, l'équation du premier degré, qui, étant carrée, ſeroit devenue $x^2 + p x = q$. Or, on voit facilement que $x^2 + p x$ n'eſt pas un carré, mais on voit en même temps qu'il peut le devenir par quelque addition, & l'on a, comme on ſçait, la liberté de faire cette addition, pourvu qu'on ajoute la même quantité de l'autre côté de l'équation.

Afin de trouver ce qui manque à $x^2 + p x$ pour en faire un carré, il n'y a autre choſe à faire qu'à comparer cette quantité avec le carré $x x + 2 a x + a a$; le terme $p x$ répondant à $2 a x$; p répondra à $2 a$ & partant a à $\frac{1}{2} p$: or, comme a^2 eſt ce qui manque à $x^2 + 2 a x$ pour en faire un carré, le carré de $\frac{1}{2} p$, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{4} p^2$ fera ce qui manque à $x x + p x$ pour en faire un carré, c'eſt-à-dire, que $x x + p x + \frac{1}{4} p^2$ ſera un carré; il eſt en effet, & c'eſt celui de $x + \frac{1}{2} p$. Ayant donc ajouté $\frac{1}{4} p p$ au premier membre de l'équation, il faut en ajouter autant de l'autre côté, & l'équation ſera $x x + p x + \frac{1}{4} p p = q + \frac{1}{4} p p$.

$+ \frac{1}{4} p p$. Or, la quantité $x + \frac{1}{2} p$ multipliée par elle-même donne $x x + p x + \frac{1}{4} p p$; il faut donc que cette quantité soit aussi égale au nombre qui, multiplié par lui-même donnera $q + \frac{1}{4} p p$. Pour exprimer ce nombre, ou plutôt cette quantité en général, on écrit $\sqrt{q + \frac{1}{4} p p}$. Employant le signe $\sqrt{\quad}$, qu'on appelle signe radical, pour faire * ressouvenir qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité qui le suit, laquelle doit être toujours, pour éviter la confusion, surmontée d'une barre, ou renfermée entre des parenthèses.

Le signe $\sqrt{\quad}$ indique la racine quarrée.

On a donc, en employant cette dénomination $x + \frac{1}{2} p = \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2} p + \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$, valeur de x dans l'équation proposée $x x + p x = q$, & cette valeur servira pour toute équation donnée aussitôt qu'en comparant cette équation avec $x x + p x = q$, on aura déduit les valeurs particulières de p & de q .

V I.

Si on se souvient présentement que l'on a trouvé (I. Part. art. LX.) qu'en multipliant une quantité négative par une quantité négative, il en résulte une quantité positive; de même que si on avoit multiplié deux quantités positives l'une par l'autre, on verra que la racine d'une quantité positive pourra toujours être

La racine quarrée d'une quantité

* Le nombre qui, multiplié par lui-même, en a formé un autre est dit sa racine quarrée, ou simplement sa racine; cette définition connue en arithmétique est aussi admise en Algèbre pour toutes sortes de quantités.

est aussi affectée du signe que l'on voudra; ainsi au lieu bien négative que positive. de l'équation $x + \frac{1}{2}p = + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, on peut écrire $x + \frac{1}{2}p = - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, ce qui donneroit alors $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$;

Une équation d'où l'on tire ce principe général qu'une équation quelconque du second degré, a toujours deux racines. On entend alors par racine d'une à deux racines, c'est-à-dire, deux valeurs d' x . équation la valeur de l'inconnue dans cette équation, il faut bien prendre garde de confondre cette expression avec celle de la racine quarrée.

V I I.

Formule Pour renfermer dans une seule & même expression les deux racines, ou valeurs de x dans contenant ces deux racines. l'équation précédente $xx + px = q$, on se fert du signe \pm , & l'on écrit ainsi ces deux valeurs $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

V I I I.

Applica- Appliquons maintenant cette solution générale à l'équation $xx - 100x = 10000 \frac{b}{a}$ tion de la formule précédente à l'équation de l'article II. à laquelle nous étions arrivés dans le Problème précédent. En comparant cette équation avec $x^2 + px = q$, nous aurons $p = -100$; $q = -10000 \frac{b}{a}$, & faisant les substitutions de ces valeurs à la place de p & de q dans la formule générale $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, il viendra $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$.

I X.

On peut donner une forme un peu plus simple à la partie radicale $\sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$ de cette valeur de x en partant de ce principe que la racine quarrée du produit de deux, ou de plusieurs quantités, est le produit des racines quarrées de ces quantités; car, décomposant alors $2500 - 10000 \frac{b}{a}$ en ses deux produifans 2500 & $1 - \frac{4b}{a}$, & prenant les racines de ces deux quantités, on aura 50 & $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, dont le produit 50 $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, fera la valeur de $\sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, que la valeur de x sera $50 \pm 50 \sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

Réduction de la valeur d' x en formant la racine du produit par celle des produifans.

Quant à la démonstration de ce principe que la racine d'un produit quelconque, se trouve en multipliant les racines de ses produifans, elle est bien facile à imaginer, lorsqu'on se rappelle l'inverse de ce principe, c'est-à-dire, que pour quarrer un produit, comme $a b$, on multiplie l'un par l'autre, les quarrés $a a$ & $b b$ de ses produifans a & b .

X.

Pour faire usage de cette valeur de x , il n'est plus besoin que de sçavoir quel est le rapport

Exemple de ce Pro- blème.

H ij

qu'on veut qu'il y ait entre b & a . Supposons, par exemple, que b soit la partie $\frac{6}{25}$ de a , c'est-à-dire, que le Négociant ait trouvé à la seconde année la somme diminuée de ce qu'elle étoit après la première d'une quantité égale au $\frac{6}{25}$ du total, on aura par cette supposition $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$

& $1 - \frac{4b}{25} = \frac{1}{25}$, d'où la racine

$\sqrt{1 - \frac{4b}{25}}$ fera $\frac{1}{5}$ & donnera par conséquent $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$ qui exprime à la fois 60 & 40.

Or ces deux valeurs de x résolvent en effet également l'équation $xx - 100x = -2400$ dans laquelle l'équation générale $xx - 100x = -10000 \frac{b}{a}$ se change par la supposition de $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$: car, $xx - 100x$ devient

également -2400 , soit qu'on fasse $x = 60$; ou que l'on prenne $x = 40$.

On peut encore, d'une manière plus convaincante, reconnoître la nécessité des deux solutions 60 & 40. Car, qu'on suppose d'abord $x = 60$, c'est-à-dire, que la somme de 100000 th , par exemple, perde 60 pour cent par an, il est évident qu'après la première année elle sera réduite à 40000 th .

A la seconde année elle fera de 16000 th en perdant encore 60 pour cent; or 16000 th sont plus petits que 40000 th de 24000 th qui sont les $\frac{6}{25}$ de 100000.

Qu'on suppose à présent que la même somme de 100000 lb perde 40 pour cent par an, après la première année elle sera réduite à 60000 lb, & après la seconde à 36000 lb: or 36000 lb sont encore plus petits que la somme 60000 lb de la quantité de 24000 lb, ou des $\frac{6}{25}$ de 100000 lb.

X I.

Si on veut que b soit les $\frac{4}{25}$ de a , on aura
 $x = 50 \pm 50 \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50 \sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30$, c'est-à-dire, ou 80, ou 20 qu'on trouvera encore résoudre également le Problème.

Autre exemple.

X I I.

Mais si l'on suppose $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, on trouvera $x = 50 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}}$, ou $50 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}$. Or, comme on ne sauroit trouver aucune quantité qui, étant multipliée par elle-même, donne $-$, il s'ensuit que la quantité $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ne sauroit être réelle, ou, ce qui revient au même, que le Problème est impossible dans ce cas.

Troisième exemple, qui demandant la racine d'une quantité négative, est impossible.

Ainsi on peut être assuré qu'il n'y a aucune valeur possible à substituer pour x dans l'équation $x x - 100 x = -\frac{10000}{3}$ qui fasse que les deux membres en deviennent égaux; ou, ce qui revient au même, que la somme a ne sauroit être altérée chaque année, suivant aucune proportion donnée qui soit telle que de la seconde à la troisième année la diminution soit d'une quantité égale au tiers du total. Les

Géometres regardent cependant comme une espece de solution ou de racine de l'équation $x x - 100 x = -\frac{10000}{3}$, la valeur 50 ± 50

Ces racines sont dites imaginaires. $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ qu'ils trouvent alors, mais ils l'appellent une racine imaginaire, & cette racine imaginaire à cause du signe \pm est toujours censée une double solution.

X I I I.

Quelles sont les équations du second degré, dont les racines sont imaginaires. On voit, par la valeur générale $-\frac{1}{2} p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4} p p}$ de x , que toutes les fois que la quantité désignée par q , sera négative & plus grande que $\frac{1}{4} p p$, les deux racines de l'équation $x x + p x = q$, seront toutes deux imaginaires.

X I V.

Résolution des équations du second degré sans les comparer à la formule générale. Lorsqu'on a une équation quelconque du second degré, on peut la résoudre sans la comparer terme à terme avec l'équation générale $x x + p x = q$; car on peut, sans augmenter le calcul, répéter le même procédé qu'on a suivi en résolvant cette équation générale. Il ne faut pour cela qu'ajouter aux deux membres le carré de la moitié de ce qui multiplie x dans le second terme du premier membre, & prendre ensuite la racine carrée des deux membres. Qu'on ait, par exemple, à résoudre l'équation $x x + 8 x = 9$, en ajoutant des deux côtés 16, carré de la moitié de 8, on a $x x + 8 x + 16 = 9 + 16 = 25$. Et prenant ensuite la racine des deux côtés, on a $x + 4 = \pm 5$, c'est-à-dire, $x = -4$

± 5 , ou $x = -9$ & $x = 1$, & ces deux valeurs résolvent également l'équation $x x + 8 x = 9$.

X V.

Pour accoutumer les Commencans aux difficultés qu'on rencontre dans les Problèmes du second degré, nous leur proposerons encore le Problème suivant.

Trouver sur la ligne qui joint deux lumieres quelconques le point où ces deux lumieres éclairent également, en supposant ce principe de Physique, que l'effet d'une lumiere est quatre fois plus grand, lorsqu'elle est deux fois plus proche, neuf fois plus grand, lorsqu'elle est trois fois plus proche, ou pour s'exprimer comme les Géometres, que son effet est en raison renversée du quarré de la distance.

Autre
Problème
du second
degré.

Que a exprime la distance qui est entre les lumieres données, & que le rapport de m à n soit celui qui est entre l'effet de la plus petite lumiere à une certaine distance, & l'effet de la plus grande lumiere à la même distance.

De plus, que x exprime la distance de la plus petite des deux lumieres à un point pris à volonté sur la ligne qui joint les deux lumieres, est clair que $a - x$ sera la distance du même point à l'autre lumiere, que les quarrés de ces deux distances seront x^2 & $x^2 - 2 a x + a^2$, & par conséquent que les quantités qui seront en raison renversée de

ces quarrés feront entr'elles comme $\frac{1}{x x}$ * &

$$\frac{1}{x x - 2 a x + a a}$$

De-là il fuit que si les lumieres étoient égales, les effets qu'elles produiroient chacune dans ce même point, feroient entr'elles comme $\frac{1}{x x}$ à $\frac{1}{x x - 2 a x + a a}$; mais ces lumieres ayant des quantités abfolues qui font entr'elles dans la raifon de m à n , leurs effets doivent donc être entr'eux comme $\frac{m}{x x}$

$$\text{à } \frac{n}{x x - 2 a x + a a}$$

Préféntement pour que le point pris à volonté devienne le point demandé, il n'y a autre chofe à faire qu'à égaler ces deux quantités, ce qui donnera à l'équation $m a a - 2 a m x + m x x = n x x$, qu'on réfoudra ainfi.

On commencera par paffer les termes $m x x$ & $2 a m x$ dans l'autre membre, ce qui me donnera $n - m \times x x + 2 a m x = m a a$, ou

$$x x + \frac{2 a m}{n - m} x = \frac{a a m}{n - m}$$

* Ceci doit être facile à entendre à ceux qui auront vû dans l'Arithmétique ce que c'est que des raifons renverfées. Il n'y a pas plus de difficulté à voir que

$\frac{1}{x x}$ & $\frac{1}{x x - 2 a x + a a}$ font en raifon renverfée de $x x$ & de $x x - 2 a x + a a$, qu'à voir que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ font en raifon renverfée de 3 & 4.

On ajoutera ensuite aux deux membres de cette équation le carré de la moitié du coefficient du second terme, & l'on aura

$$x^2 + \frac{2 amx}{n-m} + \frac{a am m}{(n-m)^2} = \frac{a am}{n-m}$$

+ $\frac{a am m}{(n-m)^2}$ dont le second membre de-

vient $\frac{a am n}{(n-m)^2}$ en mettant les deux ter-

mes $\frac{a am}{n-m} + \frac{a am m}{(n-m)^2}$ au même

dénominateur & en réduisant.

Cela fait, on prendra la racine des deux membres de l'équation, & l'on aura

$$x + \frac{am}{n-m} = \pm \sqrt{\frac{a am n}{(n-m)^2}}, \text{ ou}$$

$$x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m} \sqrt{mn}, \text{ en}$$

prenant la racine de la partie $\frac{a a}{(n-m)^2}$

qui est un carré parfait, & laissant sous le signe radical son multiplicateur mn , qui n'est pas un carré, du moins dans toutes les valeurs de m & de n . Donc les deux valeurs d' x qui résolvent l'équation précédente, & par conséquent le Problème qui a conduit à

cette équation, sont exprimées par la formule

$$x = \frac{a m}{n - m} \pm \frac{a}{n - m} \sqrt{m n}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{a}{n - m} \times \frac{m \pm \sqrt{m n}}{m}$$

X V I.

Des deux valeurs précédentes l'une est nécessairement positive, l'autre négative.

On voit par cette expression que l'une des valeurs est nécessairement négative, & l'autre positive. Car, 1°. si on prend le signe — pour la quantité radicale $\sqrt{m n}$, il n'est pas douteux que la quantité totale ne soit négative. 2°. Si on fait $\sqrt{m n}$ positive, $-m + \sqrt{m n}$ qu'on a alors sera positive, parce qu'ayant fait par la supposition n plus grand que m , $\sqrt{m n}$ doit être plus grand que m .

X V I I.

Usage de la valeur négative.

Si on cherche présentement l'usage qu'on doit faire de la valeur négative, on trouvera, en se rappelant, ce qu'on a vû (I. Para. art. LXIII.) sur ces valeurs dans les équations du premier degré, qu'elle doit être prise dans un sens opposé à la première, c'est-à-dire, que le point qu'elle donne pour résoudre ce Problème, au lieu d'être placé entre les deux lumières, sera placé sur le prolongement de la ligne qui les joint du côté de la lumière la plus foible.

On n'aura aucune difficulté à admettre cette position de la valeur négative de x , lorsqu'on remarquera que cette même valeur n'a été trouvée négative, que parce qu'on a résolu le Pro-

blème, en regardant le point cherché comme placé entre les deux lumieres; car si on avoit fait attention à la possibilité de prendre ce point sur le prolongement de la ligne qui les joint, on auroit eu un autre calcul relatif à cette position, & l' x qui auroit été alors placé naturellement sur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres, auroit été positif.

XV III.

Pour nous faire mieux entendre, nous allons rechercher le Problème en entier, en supposant le point cherché sur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres. La distance de ce point à la plus petite lumiere étant toujours nommée x , sa distance à la plus grande lumiere sera alors $a + x$, les quarrés de ces distances $x x$ & $a a + 2 a x + x x$; les deux quantités de lumiere $\frac{m}{x x}$ &

$\frac{n}{a a + 2 a x + x x}$, lesquelles étant égales

par les conditions du Problème, donneront

$$\frac{m}{x x} = \frac{n}{a a + 2 a x + x x}, \text{ ou}$$

$$m a a + 2 a m x + m x x = n x x,$$

$$\text{ou } n - m \times x x - 2 a m x = m a a,$$

$$\text{ou } x x - \frac{2 a m x}{n - m} = \frac{m}{n - m} a a$$

qui étant résolue donnera

$x = \frac{a \times m \pm \sqrt{m n}}{n - m}$ dont la premiere

valeur $\frac{a \times m + \sqrt{m n}}{n - m}$ fera positive, &

la seule qui résoudra exactement le Problème dans le sens où il est proposé alors.

Quant à la seconde valeur $\frac{a \times m - \sqrt{m n}}{n - m}$

qui est négative, elle doit être alors prise dans un sens opposé à la premiere, c'est-à-dire, que le point qu'elle donne doit être placé, non comme on l'a supposé dans le calcul, sur le prolongement de la ligne qui joint les deux lumieres, mais sur cette ligne elle-même.

Ainsi dans cette nouvelle solution on a, par rapport aux signes, tout le contraire de ce qu'on avoit dans la premiere, & ces deux solutions confirment ce que nous avons déjà vu dans la premiere Partie, art. LXIII. que les inconnues qui deviennent négatives, doivent toujours être prises dans un sens opposé à celui qu'on leur a donné en exprimant le Problème.

X I X.

Nous ôterons, je crois, tout embarras aux Lecteurs, sur ce Problème, en prenant un exemple. Supposons que $n = 4 m$, c'est-à-dire, que la plus grande lumiere ait quatre fois plus de force que l'autre, en substituant cette

valeur de n dans la formule générale de l'art.

$$\text{XV. } x = \frac{a}{n - m} \times m \pm \sqrt{m n}; \text{ elle}$$

$$\text{deviendra } x = \frac{a}{3} \times \pm 2 - 1, \text{ c'est-à-}$$

dire, ou $+\frac{1}{3}a$, ou $-a$, qui fournissent deux points également propres à résoudre le Problème, l'un placé entre les deux lumières deux fois plus près de la foible que de la forte, & l'autre sur le prolongement de la ligne qui joint ces lumières, & à une distance de la foible égale à celle qui est entre les deux lumières. Or, il est très-facile de voir sans Algèbre que ces deux points résolvent également le Problème, puisqu'ils sont l'un & l'autre deux fois plus près de la lumière foible que de la forte, & que la forte est quadruple de la foible.

X X.

Les principes que nous venons de donner sont suffisans pour toutes les équations du second degré; mais comme les Commençaans ne peuvent gueres les posséder qu'en les pratiquant, nous allons les exercer à la résolution de plusieurs équations: il en résultera cet avantage, qu'outre qu'ils en sçauront mieux la méthode, ils apprendront en même-temps de nouvelles opérations d'Algèbre, qui sont sans doute dûes aux recherches que les premiers Analystes ont fait sur les équations du second degré.

Soient $b x x = 2 c^2 x + 2 c c a$, en or- Nouveaux

exemples
de résolu-
tions d'é-
quations
du second
degré.

donnant cette équation, c'est-à-dire, en pas-
sant les termes affectés de x du même côté,
& divisant tous les termes par le coefficient de

$$x x, \text{ on aura } x^2 - \frac{2 c c x}{b} = \frac{2 c c a}{b},$$

aux deux membres de laquelle ajoutant $\frac{c^4}{b b}$,

& prenant ensuite la racine quarrée, on aura

$$x - \frac{c c}{b} = \pm \sqrt{\frac{2 c c a b + c^4}{b b}}$$

$$= \pm \frac{c}{b} \sqrt{2 a b + c c}, \text{ c'est-à-dire,}$$

$$x = \frac{c c \pm c \sqrt{2 a b + c c}}{b}.$$

$$\text{Soit } f f \mp g g - 2 g x \mp x x \\ = \frac{m m x x}{n n} \text{ qui devient d'abord}$$

$$\frac{m n - n n}{n n} \times x x \mp 2 g x = f f$$

$$\mp g g, \text{ \& ensuite } x x \mp \frac{2 g n n}{m m - n n} x$$

$$= \frac{f f n n + g g n n}{m m - n n}, \text{ ou}$$

$$x x \mp \frac{2 g n n x}{m m - n n} \mp \frac{g g n^4}{m m - n n^2}$$

$$= \frac{f f n n + g g n n}{m m - n n} \mp \frac{g g n^4}{m m - n n^2}$$

$$= \frac{ffnnmm + ggnnmm - ffn^4}{mm - nn^2},$$

d'où l'on tire $x \pm \frac{gnn}{mm - nn}$

$$= \pm \frac{n\sqrt{ffmm + ggmm - ffn}}{mm - nn}, \text{ ou}$$

$$\dots\dots\dots x = \frac{n}{mm - nn}$$

$$x - gn \pm \sqrt{ffmm + ggmm - ffn}.$$

Soit $abc - aff + 2afz = azz - bz z$ qui étant d'abord ordonnée deviendra

$$zz - \frac{2af}{a-b} z = \frac{abc - aff}{a-b},$$

ensuite $zz - \frac{2af}{a-b} z \pm \frac{aaff}{(a-b)^2}$

$$= \frac{abc - aff}{a-b} \pm \frac{aaff}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{aabc - abbc + abff}{(a-b)^2} \text{ qui donne}$$

$$z = \frac{af \pm \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a-b}.$$

Soit à présent l'équation $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$, en l'ordonnant on aura $xx - ax = 2aa - 9ab + 9bb$, ou $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa$

$$- 9 a b + b b \text{ qui donne } x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{2}{4} a a - 9 b a + 9 b b}.$$

On réduira aisément cette quantité si on a vû, & on ne pouvoit guères manquer de le voir dans tout ce que nous venons de dire, que le carré d'une quantité composée de deux termes, doit être égal à la somme des carrés de chacun de ces deux termes, & au double produit de ces deux termes.

Car, trouvant dans la quantité $\frac{2}{4} a a - 9 b a + 9 b b$ les termes $\frac{2}{4} a a$ & $9 b b$ qui sont les carrés de $\frac{1}{2} a$ & de $3 b$, & le terme $9 a b$ qui est le double produit de $\frac{1}{2} a$ & de $3 b$, on voit aisément que cette quantité $\frac{2}{4} a a - 9 b a + 9 b b$ est le carré de $\frac{1}{2} a - 3 b$. Donc au lieu de l'expression $\sqrt{\frac{2}{4} a a - 9 b a + 9 b b}$, on peut écrire simplement $\frac{1}{2} a - 3 b$: donc la valeur de x est alors $\frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} a \mp 3 b$, c'est-à-dire, ou $2 a - 3 b$, ou $- a + 3 b$. En effet, l'on voit que ces valeurs résolvent également l'équation donnée.

X X I

Comme dans les différentes équations du second degré qu'on peut avoir à résoudre, il arrivera souvent des cas de même nature que celui qu'on vient de trouver; il faut avoir quelque méthode sûre & générale pour reconnoître les quantités qui sont des carrés, & pour trouver leurs racines; cette méthode est aisée à tirer des principes que nous venons d'employer dans l'exemple précédent; en voici le procédé sur un autre exemple. — x x Soit

Soit la quantité $30ab + 9bb + 25a^2$ Procédé de
dont on demande la racine carrée. l'extraction

J'ordonne d'abord cette quantité par rapport de la racine
à une des lettres qu'elle contient, par rapport carrée ex-
à a , par exemple, & j'écris par conséquent cette pliquée sur
quantité; ainsi qu'on la voit dans la Table ci- un exem-
jointe, case 1. ple.

Je prends ensuite la racine du premier terme $25a^2$, laquelle est $5a$, que je prends pour premier terme de la racine cherchée, & que j'écris à côté de la quantité proposée $25a^2 + 30ba + 9bb$, ayant tiré auparavant une barre pour éviter la confusion. Je place alors sous la proposée le carré $25a^2$ de $5a$, en lui donnant le signe —, je tire une barre & je réduis, j'ai, par ce moyen, la quantité $30ba + 9bb$ que j'écris sous la barre; cela fait, je double $5a$, ce qui me donne $10a$ que j'écris au-dessus de $5a$, & je divise ensuite le premier terme $30ba$ de la quantité $30ba + 9bb$ par $10a$, & j'écris le quotient $3b$, qui est le second terme de la racine cherchée à côté de $5a$, je l'écris en même-temps à côté de $10a$, & je multiplie ce nouveau terme $3b$ de la racine par la quantité supérieure $10a + 3b$, en observant, comme dans la division, de changer les signes en écrivant le produit sous la quantité $30ab + 9bb$; faisant alors la réduction, & voyant que tout se détruit, je conclus que $5a + 3b$ est la racine cherchée.

XXII.

Pour fortifier les-Commençans dans la méthode d'extraire les racines carrées, il ne sera

pas inutile de leur faire parcourir les deux exemples suivans.

Autres
exemples
d'extraction
de racine
quarrée.

Soit d'abord proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4a^2 - 4ba + 4ca + bb - 2cb + cc$ ordonnée par rapport à a .

Je commence par prendre la racine de $4a^2$ laquelle est $2a$ que j'écris à côté de la proposée, (Voyez la seconde case de la Table ci-jointe) je retranche ensuite le carré $4aa$, & j'écris le reste $-4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc$, je double $2a$; & j'écris le double $4a$ au-dessus, je divise le terme $-4ba$ par $4a$, & j'écris le quotient $-b$, tant à côté de la racine que du diviseur $4a$. Multipliant alors $-b$ par $4a - b$, j'ai, en changeant les signes, $+4ba - bb$ que je place encore sous le dividende, & j'ai, après la réduction, $+4ca - 2cb + cc$ qui doit servir encore de dividende; je double alors la racine $2a - b$, & j'écris le double $4a - 2b$ au-dessus, je divise $+4ca$ par $4a$, & j'écris le quotient $+c$ à côté de la racine $2a - b$, & à côté du diviseur. Faisant ensuite la multiplication de $+c$ par $4a - 2b + c$, & écrivant avec des signes différens le produit sous le dividende, tout se détruit, d'où je conclus que la racine est possible, & qu'elle est $2a - b + c$.

Soit ensuite proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$ ordonnée par rapport à x , en suivant les opérations qui sont écrites dans la Table ci-jointe, case 3, on verra facilement que la racine quarrée de cette quantité est $2xx + 2ax + 4bb$.

$\begin{array}{r} 25a^2 + 30ba + 9b^2 \\ - 25a^2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 10a + 3b \\ 5a + 3b \end{array}$	Case 1.
$\begin{array}{r} 30ba + 9b^2 \\ - 30ba - 9b^2 \\ \hline 0 \end{array}$		
$\begin{array}{r} 4a^2 - 4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc \\ - 4a^2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2a - b + c \\ 4a - b + c \\ 4a - 2b \end{array}$	Case 2.
$\begin{array}{r} -4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc \\ + 4ba \quad - b^2 \\ \hline 4ca \quad - 2cb + cc \\ - 4ca \quad + 2cb - cc \\ \hline 0 \end{array}$		
$\begin{array}{r} 4x^4 + 8ax^3 + a^2x^2 + 16b^2x^2 + 15b^2ax + 16b^4 \\ - 4x^4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2x^2 + 2ax + 4b^2 \\ 4x^2 + 2ax \\ 4x^2 + 4ax + 4b^2 \end{array}$	Case 3.
$\begin{array}{r} 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + b^2ax + 16b^4 \\ - 8ax^3 - 4a^2x^2 \\ \hline 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4 \\ - 16b^2x^2 - 16b^2ax - 16b^4 \\ \hline 0 \end{array}$		

SCD Lyon 1

Mathématiques

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$
$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42}$
$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{17}{72}$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} = \frac{21}{110}$
$\frac{1}{12} + \frac{1}{13} = \frac{25}{156}$
$\frac{1}{14} + \frac{1}{15} = \frac{29}{210}$
$\frac{1}{16} + \frac{1}{17} = \frac{33}{272}$
$\frac{1}{18} + \frac{1}{19} = \frac{37}{342}$
$\frac{1}{20} + \frac{1}{21} = \frac{41}{420}$
$\frac{1}{22} + \frac{1}{23} = \frac{45}{506}$
$\frac{1}{24} + \frac{1}{25} = \frac{49}{600}$
$\frac{1}{26} + \frac{1}{27} = \frac{53}{702}$
$\frac{1}{28} + \frac{1}{29} = \frac{57}{812}$
$\frac{1}{30} + \frac{1}{31} = \frac{61}{930}$
$\frac{1}{32} + \frac{1}{33} = \frac{65}{1056}$
$\frac{1}{34} + \frac{1}{35} = \frac{69}{1190}$
$\frac{1}{36} + \frac{1}{37} = \frac{73}{1332}$
$\frac{1}{38} + \frac{1}{39} = \frac{77}{1482}$
$\frac{1}{40} + \frac{1}{41} = \frac{81}{1640}$
$\frac{1}{42} + \frac{1}{43} = \frac{85}{1806}$
$\frac{1}{44} + \frac{1}{45} = \frac{89}{1980}$
$\frac{1}{46} + \frac{1}{47} = \frac{93}{2142}$
$\frac{1}{48} + \frac{1}{49} = \frac{97}{2352}$
$\frac{1}{50} + \frac{1}{51} = \frac{101}{2550}$
$\frac{1}{52} + \frac{1}{53} = \frac{105}{2744}$
$\frac{1}{54} + \frac{1}{55} = \frac{109}{2970}$
$\frac{1}{56} + \frac{1}{57} = \frac{113}{3192}$
$\frac{1}{58} + \frac{1}{59} = \frac{117}{3438}$
$\frac{1}{60} + \frac{1}{61} = \frac{121}{3690}$
$\frac{1}{62} + \frac{1}{63} = \frac{125}{3954}$
$\frac{1}{64} + \frac{1}{65} = \frac{129}{4224}$
$\frac{1}{66} + \frac{1}{67} = \frac{133}{4494}$
$\frac{1}{68} + \frac{1}{69} = \frac{137}{4770}$
$\frac{1}{70} + \frac{1}{71} = \frac{141}{5050}$
$\frac{1}{72} + \frac{1}{73} = \frac{145}{5334}$
$\frac{1}{74} + \frac{1}{75} = \frac{149}{5620}$
$\frac{1}{76} + \frac{1}{77} = \frac{153}{5910}$
$\frac{1}{78} + \frac{1}{79} = \frac{157}{6204}$
$\frac{1}{80} + \frac{1}{81} = \frac{161}{6500}$
$\frac{1}{82} + \frac{1}{83} = \frac{165}{6800}$
$\frac{1}{84} + \frac{1}{85} = \frac{169}{7104}$
$\frac{1}{86} + \frac{1}{87} = \frac{173}{7410}$
$\frac{1}{88} + \frac{1}{89} = \frac{177}{7720}$
$\frac{1}{90} + \frac{1}{91} = \frac{181}{8034}$
$\frac{1}{92} + \frac{1}{93} = \frac{185}{8350}$
$\frac{1}{94} + \frac{1}{95} = \frac{189}{8670}$
$\frac{1}{96} + \frac{1}{97} = \frac{193}{8994}$
$\frac{1}{98} + \frac{1}{99} = \frac{197}{9320}$
$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} = \frac{201}{9650}$

XXIII.

Dans les différens exemples que nous avons donné sur les résolutions des équations du second degré, les Commençaans n'ont guéres pû trouver de difficulté que lorsqu'il étoit question de réduire les quantités radicales en ôtant de dessous le signe, les quantités quarées qui étoient des produifans de la quantité radicale : en effet cette opération est la plus délicate de celles qui peuvent entrer dans la résolution des équations du second degré, il est donc important que les Commençaans s'appliquent à la pratiquer facilement. Pour les aider à y parvenir, nous joindrons ici les exemples suivans.

$$\sqrt{48 a a b c} = 4 a \sqrt{3 b c}$$

$$\sqrt{\frac{a^3 b + 4 a a b b + 4 a b^3}{c c}} = \frac{a + 2 b}{c} \sqrt{a b}$$

Exemples de réduction de quantités radicales.

$$\sqrt{\frac{a a h h m m}{p p z z} + \frac{4 a a m^3}{p z z}} = \frac{a m}{p z} \sqrt{h h + 4 m p}$$

$$6 \sqrt{\frac{71}{98} a b b} = \frac{30 b}{7} \sqrt{\frac{3 a}{2}}$$

XXIV.

Presqu'aussi-tôt que les équations du second I ij Les quantités qu'on

point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationnelles.

degré ont fait connoître les quantités irrationnelles ou incommensurables (on appelle ainsi les quantités qui n'ont point de racines exactes), on a été obligé de faire sur ces quantités les mêmes opérations que sur les quantités rationnelles ou commensurables, c'est-à-dire, qu'on a eu à ajouter, à soustraire, à multiplier, à diviser des quantités, ou toutes incommensurables, ou en partie incommensurables, & en partie commensurables.

L'addition & la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction.

Quant à l'addition & à la soustraction des quantités radicales, elles ne renferment aucune difficulté que celles de la réduction de ces mêmes quantités à leurs plus simples expressions.

Par exemple, s'il faut ajouter $\sqrt{48abb}$ avec $b\sqrt{75a}$, je change la première de ces quantités en $4b\sqrt{3a}$, & la seconde en $5b\sqrt{3a}$, dont la somme est $9b\sqrt{3a}$.

De la même manière $\sqrt{48c^3} - \sqrt{\frac{16}{27}c^3}$

$$= \frac{32}{9}c\sqrt{3c}$$

$$\sqrt{\frac{ab^3}{cc} + \frac{1}{2c}\sqrt{a^2b - 4aabb + 4ab^3}}$$

$$= \frac{a}{2c}\sqrt{ab}$$

$$a\sqrt{\frac{a^3b}{3aa + 6ac + 3cc} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a+c}}$$

$$= \frac{aa}{\sqrt{3}} - bc \times \frac{\sqrt{ab}}{a+c}$$

X X V.

A l'égard de la multiplication, si les quantités qu'on veut multiplier sont toutes deux incommensurables, il est clair qu'il n'y aura autre chose à faire qu'à multiplier les quantités qui sont sous le signe radical, & mettre le même signe radical à la tête du produit; s'il se trouve alors des réductions à faire, on les fera comme ci-dessus.

Multiplication des incommensurables.

Qu'on ait à multiplier, par exemple, \sqrt{ab} \times \sqrt{ac} , on écrira \sqrt{aabc} , ou $a\sqrt{bc}$.

De même $\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgccd} = 2c\sqrt{3fgd}$.

Lorsque les quantités radicales qu'on aura à multiplier seront égales, il faudra simplement ôter le signe radical. Pour multiplier, par exemple, $\sqrt{a^2cd}$, par $\sqrt{a^2cd}$, on écrit simplement la quantité a^2cd sans signe radical.

Si la quantité qui multiplie un radical est rationnelle, il faut se contenter de l'écrire devant le signe avec une barre au-dessus lorsqu'elle a plusieurs termes; si on vouloit la faire entrer sous le signe radical, il faudroit la quar-
rer auparavant.

Par exemple, le produit de $a + b$ par

$$\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}} \text{ est } a + b \quad \sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$$

$$\text{ou } \sqrt{\frac{ffg \times aa + 2ab + bb}{aa-bb}}, \text{ ou}$$

I iij

$$\sqrt{\frac{ffg \times a+b}{d-b}}, \text{ ou } \frac{f \sqrt{ag+bg}}{\sqrt{a-b}}$$

$$2 a \sqrt{\frac{aa+bb}{c}} \times 3 a \sqrt{\frac{aa+bb}{d}}$$

$$= \frac{6aa \times aa+bb}{\sqrt{cd}} = \frac{6a^4+6aabb}{\sqrt{cd}}$$

$$\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b} = \sqrt{aa-bb}$$

S'il est question de multiplier des quantités composées de plusieurs autres, ou toutes radicales, ou en partie radicales & en partie incommensurables, l'opération ne fera pas plus difficile que les précédentes, pourvû qu'on se rappelle les regles ordinaires des multiplications des quantités complexes.

Par exemple, $(3a\sqrt{bc} - 2b\sqrt{ac}) \times 2c$

$$\sqrt{ab} = 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$$

$$a + \sqrt{aa-bb} \times a + \sqrt{aa-bb}$$

$$= 2aa - bb + 2a\sqrt{aa-bb}$$

$$a + \sqrt{aa-xx} \times a - \sqrt{aa-xx} = xx$$

X X V I.

Division
des incom-
mensura-
bles.

Lorsqu'il s'agira de diviser deux quantités irrationnelles l'une par l'autre, on divisera les quantités qui sont sous le signe, & l'on mettra le signe devant le quotient.

S'il faut diviser une quantité irrationnelle par une rationnelle, on mettra simplement la ra-

tionelle sous l'autre, avec une barre assez longue, pour qu'on puisse connoître que le signe ne porte pas dessus; si on veut, au contraire, que le signe radical y porte, il faudra quarrer le diviseur.

S'il y a des quantités commensurables devant les radicaux, on les divisera à l'ordinaire, & on écrira leur quotient à côté du quotient radical. Toutes ces choses s'entendent sans aucune peine, par les exemples.

$$\frac{\sqrt{a b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}; \frac{a c \sqrt{b c}}{a \sqrt{b}} = c \sqrt{c};$$

$$\frac{12 a c \sqrt{6 b c}}{4 c \sqrt{2 b}} = 3 a \sqrt{3 c};$$

$$\frac{\sqrt{a a - x x}}{\sqrt{a + x}} = \sqrt{a - x};$$

$$\frac{\sqrt{a a b b - b b x x}}{a - x} = b \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$$

X X V I I.

Ce qu'on vient de dire sur les équations du second degré, suffit lorsque ces équations ne renferment qu'une inconnue; mais comme on rencontre souvent des Problèmes dans lesquels il est nécessaire d'en employer plusieurs, il faut voir comment l'on traite ces Problèmes, nous prendrons dans cette vûe l'exemple suivant.

¶ iv

Problème
du second
degré qui
demande
plusieurs
inconnues.

Trouver trois quantités en progression * géométrique, dont la somme soit donnée, ainsi que la somme de leurs quarrés.

Soient les trois quantités cherchées x, y, z , on aura par la nature des progressions $x : y = y : z$, c'est-à-dire, $yy = xz$; de plus, parce que leur somme est donnée, en nommant cette somme a , on aura $x + y + z = a$; enfin en nommant la somme de leurs quarrés bb , on aura, par la dernière condition du Problème, $xx + yy + zz = bb$.

Pour faire usage de ces trois équations, on commencera par chasser z au moyen de sa valeur $a - x - y$ tirée de l'équation $x + y + z = a$; substituant donc cette valeur de z dans les deux autres équations, elles se changeront en $2yy + 2xx + 2xy + a^2 - 2ax - 2ay = bb$, & $yy = ax - xx - xy$. Pour chasser ensuite celle qu'on voudra des deux inconnues que renferment ces deux équations, on trouvera la valeur que cette inconnue a dans chacune de ces équations, & on égalera les deux valeurs que l'on aura par ce moyen, opérations faciles par les principes précédens. Que x soit cette inconnue à chasser, la première équation donnera

* Trois quantités dont la première est à la seconde, comme la seconde à la troisième, telles que 8, 12, 18, par exemple, sont dites en progression géométrique, ou en proportion continue. On ne scauroit entendre la théorie des proportions, qu'on ne sçache en même temps celle des progressions.

$$\dots\dots\dots x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$$

$$\pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

& pour la seconde

$$\dots\dots\dots x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$$

$\pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Il n'y a donc plus qu'à égaler ces deux valeurs, ce qui donnera l'équation

$$\dots\dots\dots -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$$

$$\pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$$= -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$$

qu'il ne s'agit plus que de résoudre. On remarquera premièrement, que les termes $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$ sont communs des deux côtés, & que par conséquent l'équation se réduit à

$$\pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$= \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Or, en quarrant les deux membres de cette équation, les deux radicaux disparaissent tout de suite, & l'équation devient en réduisant $ay = \frac{1}{2}aa$

$-\frac{1}{2}bb$ qui donne $y = \frac{aa - bb}{2a}$, sub-

stituant ensuite cette valeur de y dans l'une des précédentes de x , on aura $x = \frac{1}{4}a + \frac{bb}{4a}$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{3}{16}aa + \frac{3}{8}bb - \frac{3}{16}a^2}$$

$$\text{ou } x = \frac{bb + aa + \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

& en substituant la valeur de x & celle de y dans $z = a - x - y$, on aura enfin

$$z = \frac{aa + bb \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

X X V I I I.

Comme on est arrivé, dans cette solution, à une valeur extrêmement simple pour y , après avoir eu des radicaux assez composés, on doit soupçonner qu'on pouvoit y arriver par une voie plus courte: en effet, avec un peu de réflexion, on trouve facilement la méthode suivante.

Autre maniere de résoudre les équations précédentes.

Soient reprises les deux équations $x^2 - ax + yx = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} - y^2 + ay$ &

$x^2 + xy - ax = -yy$; en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$0 = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} + ay, \text{ d'où l'on}$$

tire $y = \frac{aa - bb}{2a}$, qui, étant substitué dans l'une ou l'autre de ces deux équations, donne $x^2 + \frac{aax - bbx}{2a} - ax$

$$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}, \text{ ou } x^2 = \frac{bb + aa \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{2a}$$

$\frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$ d'où l'on tire
la même valeur de x que ci-dessus.

XXIX.

Dans ce Problème, on a eu des quantités qui se font détruites par une espee de hazard, ce qui a extrêmement simplifié les calculs; mais comme les équations du second degré, à plusieurs inconnues, n'offrent pas toujours de pareilles facilités, il faut sçavoir ce qu'on doit faire dans des cas moins simples. Pour cela soit pris, par exemple, les deux équations

$$x^2 + ax - 2xy = aa + 2yy;$$

$$xx - 2ax + xy = 2aa - yy.$$

La première de ces équations donne

$$x = -\frac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy},$$

l'autre donne

$$x = a - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$$

égalant ensuite ces deux valeurs & réduisant, on a

$$-\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}y \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy}$$

$$= \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}.$$

Pour faire ensuite évanouir les radicaux de cette équation, je commence par quarrer les deux membres, ce qui me donne

$$\frac{9}{4}yy - \frac{9}{2}ay + \frac{9}{4}aa \pm 3y - 3a$$

Exemple
d'équation
du second
degré à
deux in-
connues,
plus com-
pliqué que
le précé-
dent.

$$\sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy} + \frac{1}{4}aa - ay + 3yy = 3aa - ay - \frac{3}{4}yy$$

qui contient encore un radical. Afin de le faire disparoître, j'écris ainsi cette équation

$$\dots\dots\dots - \frac{1}{2}aa + \frac{9}{2}ay - 6yy$$

$$= \pm 3y - 3a \sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy},$$

en la réduisant & laissant la quantité radicale

$$\pm 3y - 3a \sqrt{\frac{1}{4}aa - ay + 3yy}$$

seule d'un côté de l'équation; cela fait, je quarre les deux membres, & j'ai

$$\frac{1}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^3y + \frac{105}{4}a^2yy - 54ay^3 + 36y^4$$

$$= 9yy - 18ay + 9aa \times \frac{1}{4}aa - ay + 3yy$$

ou en réduisant

Équation finale à laquelle conduisent ces équations. $9y^4 + 9ay^3 - 30a^2yy + 27a^3y = 11a^4$
 c'est-là l'équation qui résulte des deux précédentes, & celle qu'il faudroit résoudre pour avoir la solution du Problème qui auroit donné ces deux équations; on voit par-là qu'il n'en est pas des équations du second degré à plusieurs inconnues, comme de celles du premier, qui ne donnent jamais une équation finale d'un autre degré qu'elles.

X X X.

Autre manière de traiter le même exemple.

On peut, sans avoir la peine de résoudre les équations du second degré, & de chasser ensuite leurs radicaux, parvenir également à l'équation finale.

Soit repris, pour le faire voir, les deux équations

tions précédentes, & soit tirée la valeur de $x x$ de chacune d'elles, la première fournira $x^2 = a a + 2 y y - a x + 2 x y$, la seconde $x^2 = 2 a a - y y + 2 a x - x y$. Egalant ces deux valeurs, on a $a a + 2 y y + 2 x y - a x = 2 a a - y y - x y + 2 a x$, d'où

l'on tire $x = \frac{3 y y - a a}{3 a - 3 y}$, dont la

substitution dans l'une ou l'autre des deux équations données, dans $x x - 2 a x + x y = 2 a a - y y$, par exemple, donne

$$\frac{9 y^4 - 6 a a y y + a^4}{3 a - 3 y} + \frac{y - 2 a}{3 a - 3 y} \times \frac{3 y y - a a}{3 a - 3 y} = 2 a a - y y$$

qui étant réduite, produit la même équation

$$9 y^4 + 9 a y^3 - 30 a a y y + 27 a^3 y = 11 a^4$$

X X X I.

Pour habituer les Commençaans à l'usage de cette méthode qui est d'un grand usage dans l'analyse; nous allons l'appliquer aux deux équations.

$$x^2 + a x y + b x = c y^2 + d y + e$$

$$x^2 + f x y + g x = h y^2 + i y + k.$$

qui contiennent chacune la plus grande complication que puissent avoir les équations du second degré à deux inconnues.

Tirant une valeur de $x x$ de chacune de ces équations & les égalant, on aura

$$\frac{a-f}{x} \times xy + \frac{b-g}{x} \times x = \frac{c-h}{x} \times y^2 + \frac{d-i}{y} \times y + e-k$$

laquelle, en faisant pour abrégier les calculs, $a-f=l$; $b-g=m$; $c-h=n$; $d-i=p$; $e-k=q$

se change en $lxy + mx = ny^2 + py + q$,
d'où je tire $x = \frac{ny^2 + py + q}{ly + m}$. Or

substituant celle-ci dans l'une ou dans l'autre des deux équations données, dans la première,

par exemple, j'ai $\frac{ny^2 + py + q}{ly + m}^2$

$$+ \frac{ay + b}{ly + m} \times \frac{ny^2 + py + q}{ly + m} = cy^2 + dy + e$$

$$\text{ou } \frac{ny^2 + py + q + ay + b}{ly + m} \times \frac{ny^2 + py + q}{ly + m} = cy^2 + dy + e \times ly + m.$$

Si on fait alors les opérations indiquées, que l'on réduise & que l'on ordonne, il vient enfin

$$y^4 + \frac{bln + amn + alp + 2np - 2mlc - l^2d}{aln + nn - l^2c} y^3$$

$$+ \frac{bmn + qal + pbl + pam + p_2 + 2nq - m^2c - 2mld - el^2}{aln + nn - l^2c} y^2$$

$$+ \frac{blq + amq + bmp + 2pq - m^2d - 2mel}{aln + nn - l^2c} y$$

$$= \frac{m^2e - q^2 - bmq}{aln + n^2 - l^2c}, \text{ équation du qua-}$$

rieme degré qui résulte des deux équations du second degré les plus générales.

XXXI.

Si on avoit des équations telles que $xx y + axy = abb$ & $xxyy + ccyx = a^4$, ces équations ne seroient pas comptées parmi celles du second degré à cause que le produit inconnu de x^2 par y est de trois dimensions, & que celui de x^2 par y^2 est de quatre dimensions; mais la méthode précédente serviroit avec la même facilité à chasser les x de ces deux équations. Pour le faire voir, supposons que a représente toutes les quantités composées d' y & de connues, à quelque degré qu'elles montent, qui peuvent multiplier x^2 dans l'une des équations données; β toutes celles qui multiplient x dans les mêmes équations; γ les quantités entièrement connues qui sont de l'autre côté de la même équation, c'est-à-dire, que cette première équation sera $ax^2 + \beta x = \gamma$. Que la seconde soit de même $\delta x^2 + \epsilon x = \varphi$.

On tirera de la première $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{a}$,

& de la seconde $x^2 = \frac{\varphi - \epsilon x}{\delta}$ lesquelles étant égalées, donnent $\gamma \delta - \beta \delta x = \varphi a - \epsilon a x$ d'où l'on tire

$$x = \frac{\varphi a - \gamma \delta}{\epsilon a - \beta \delta}, \text{ qui, étant substitué dans l'équation } ax^2 + \beta x = \gamma, \text{ donne}$$

$$a \times \frac{\varphi a - \gamma \delta + \beta \times a \epsilon - \beta \delta}{\epsilon a - \beta \delta} = \gamma \times \frac{\epsilon a - \beta \delta}{\epsilon a - \beta \delta}$$

dans laquelle mettant pour α , β , γ , δ , ϵ , ϕ leurs valeurs composées de y , & de connues, l'on aura l'équation cherchée.

X X X I I I.

Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'équation finale, seroit au troisième degré.

Si les x , ainsi que les y , montoient chacune à des degrés plus hauts que le second, on pourroit encore, dans ce cas, employer la méthode précédente ; supposons, par exemple, qu'on ait les deux équations

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta, \quad \& \quad \epsilon x^3 + \phi x^2 + \chi x = \eta$$

dans lesquelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi, \chi, \eta$ représentent toutes sortes de quantités composées d' y & de connues, on commencera par prendre x^3 dans chacune de ces équations, & on égalera ses deux valeurs, ce qui donnera

$$\delta - \beta x^2 - \gamma x = \frac{\eta - \phi x^2 - \chi x}{\epsilon}$$

$$\text{ou } \delta \epsilon - \epsilon \beta x^2 - \gamma \epsilon x = \eta \alpha - \phi \alpha x^2 - \chi \alpha x, \quad \text{ou } \phi \alpha - \epsilon \beta$$

$\times x^2 = \gamma \epsilon - \chi \alpha \times x + \eta \alpha - \delta \epsilon$
dans laquelle x n'est qu'au second degré. Multipliant ensuite cette équation par αx , ainsi que l'équation $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$ par $\phi \alpha - \epsilon \beta$, j'ai les deux équations

$$\phi \alpha^2 - \alpha \epsilon \beta \times x^3 = \gamma \epsilon \alpha - \chi \alpha^2$$

$$\times x^2 + \eta \epsilon \alpha - \delta \epsilon \alpha \times x \quad \& \quad \phi \alpha^2 - \alpha \epsilon \beta$$

$$\times x^3 + \beta \phi \alpha - \beta^2 \epsilon \times x^2 + \gamma \phi \alpha - \gamma \epsilon \beta$$

$$\times x = \delta \times \phi \alpha - \epsilon \beta.$$

desquelles

desquelles je chasse x^3 comme des deux premières équations, ce qui me donne

$$\alpha \times \gamma \varepsilon - \chi \alpha + \beta \times \varphi \alpha - \beta \varepsilon \times x^2$$

$$+ \alpha \times \eta \varepsilon - \delta \varepsilon + \gamma \times \varphi \alpha - \varepsilon \beta \times x$$

$= \delta \times \varphi \alpha - \varepsilon \beta$: dans laquelle x ne monte non plus qu'au second degré. Voilà donc le Problème réduit présentement au cas qu'on a résolu dans l'article précédent, c'est-à-dire, à celui où l'on a deux équations dans lesquelles l'inconnue x ne monte qu'au second degré. Il est inutile d'en achever ici le calcul, puisqu'il n'auroit de difficulté que celle de sa longueur

XXXIV.

Si l'inconnue, qu'on veut chasser des deux équations proposées, s'y trouvoit élevée à un degré plus haut que le troisieme, on voit bien que par une opération semblable à la précédente, on les changeroit d'abord en deux autres équations d'un degré moindre, & que par ce moyen on parviendroit toujours à chasser entièrement l'inconnue.

Ce seroit la même chose si x montoit à des degrés plus élevés.

XXXV.

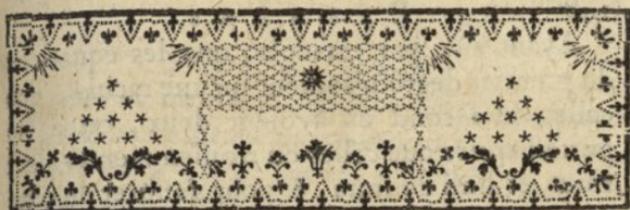
Si au lieu de deux inconnues on en avoit trois élevées chacune à un degré quelconque, il est clair que pourvû qu'on eût trois équations, on parviendroit par la même méthode à une équation finale, qui ne contiendroit que celle que l'on voudroit de ces trois inconnues, car, oubliant d'abord une de ces trois inconnues, Et s'il y avoit plus de deux inconnues, on parviendroit de même à l'équation finale.

K

nues , deux des trois équations suffiroient pour arriver à une seule , qui ne renfermeroit que l'inconnue oubliée , & que celle que l'on voudroit des deux autres inconnues. Faisant ensuite la même opération avec l'une des deux équations employée dans la première opération & la troisième équation , on parviendroit à une autre équation , entre les deux mêmes inconnues , c'est-à-dire , que le Problème seroit réduit à celui où l'on a deux équations à deux inconnues , d'où l'on parviendroit enfin à une seule inconnue renfermée dans une équation.

Si on avoit quatre équations & quatre inconnues , on réduiroit de même la question à trois équations & trois inconnues , puis à deux équations & deux inconnues , puis enfin à une seule équation & à une inconnue ; il en seroit de même pour un plus grand nombre d'équations & d'inconnues.





ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

TROISIÈME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les équations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces équations celles du premier & du second degré qu'elles peuvent renfermer.

S I les équations plus élevées que le second degré ont présenté de grandes difficultés, lorsqu'on a entrepris de les résoudre dans tous les cas, il a été du moins assez facile de faire sur ces équations de réflexions générales qui pouvoient en faire connoître la nature, & servir à les résoudre dans beaucoup de cas particuliers.

K ij

Ayant vû, par exemple, que les équations du premier degré n'avoient qu'une racine, que celles du second en avoient deux, on a été porté à croire que celles du troisieme en avoient trois, & ainsi de fuire, & pour s'assurer de cette vérité, ou plutôt pour comprendre comment une équation pouvoit avoir autant de racines qu'elle a de degrés, on a cherché l'inverse du Problème qu'on s'étoit proposé d'abord, c'est-à-dire, qu'au lieu de chercher les racines d'une équation, on a cherché quelle seroit l'équation qui auroit pour ses racines des quantités données, Problème infiniment plus facile que le premier.

I.

Maniere
de former
une équation
par le
moyen de
ses racines.

Qu'on demande, par exemple, quelle est l'équation dans laquelle x pourra avoir également pour valeur ou 2, ou 3, ou 5; on n'a qu'à former ces trois équations simples.

$x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$,
multipliant ensuite les deux premières l'une par l'autre, & leur produit par la troisieme, on a
 $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, dans laquelle on peut supposer également $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$. On voit aisément que chacune de ces valeurs étant substituée à la place de x dans l'équation $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, doit la résoudre, ou, ce qui revient au même, en doit faire évanouir tous les termes; car cette équation pouvant s'écrire ainsi $x - 2 \times x - 3 \times x - 5 = 0$, chacune de ses parties étant égalée à zéro,

doit, à cause qu'elle multiplie toutes les autres, les faire évanouir en même-temps : or, la supposition de $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$ rend toujours zéro l'une des trois parties $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$.

I I.

Par cette méthode on voit comment une équation peut avoir autant de racines que de degrés. Pour traiter la question plus en général ; soient a, b, c, d, e , les racines d'une équation, & partant $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, $x - e = 0$, les équations simples qui composent l'équation dont les racines sont ces quantités. En multipliant toutes ces équations les unes par les autres, on aura

$$\begin{aligned}
 x^5 - ax^4 + abx^3 - abcx^2 + abcdx - abcde &= 0 \\
 -b + ac - abd + abce & \\
 -c + ad - abe + abde & \\
 -d + ae - acd + acde & \\
 -e + bc - ace + bcde & \\
 +bd - ade & \\
 +be - bcd & \\
 +cd - bce & \\
 +ce - bde & \\
 +de - cde &
 \end{aligned}$$

pour l'équation dans laquelle x peut avoir à la fois les valeurs données a, b, c, d, e .

I I I.

Il est aisé de tirer de cette équation, ces marques générales sur les équations de tous les degrés.

Propriété des équations de tous les degrés.

1°. Que le premier terme n'est autre chose que l'inconnue élevée à la puissance exprimée par le nombre des racines sans coefficient.

Que le second terme contient l'inconnue élevée à une puissance de moins avec un coefficient égal à la somme des racines.

Que dans le troisieme, l'inconnue se trouve élevée à deux puissances de moins, & a pour coefficient la somme de tous les produits deux à deux qu'on peut faire de toutes les racines.

Que dans le quatrieme on aura de même l'inconnue élevée à trois puissances de moins avec un coefficient qui exprime la somme des produits de toutes les racines prises trois à trois.

Il sera ainsi des autres termes jusqu'au dernier, qui n'aura aucune puissance de x , mais qui sera le produit de toutes les racines les unes par les autres. Ces remarques ont servi de base en beaucoup de rencontres, soit pour trouver les racines des équations proposées, soit du moins pour connoître plusieurs de leurs propriétés.

I V.

Dans une équation sans second terme, la somme des racines positives est égale à celle des négatives.

On a tiré, par exemple, de ces remarques qu'une équation, comme $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$ manquant de second terme, doit avoir nécessairement des racines positives & des négatives; de plus, que la somme des unes doit être égale à la somme des autres; car, sans cette condition elles ne se seroient pas détruites pour faire évanouir le second terme. Ainsi, dans une équation du troisieme degré, où le second terme manquera, il y aura

toujours ou une racine négative égale aux deux positives, ou une racine positive égale aux deux négatives.

V.

On a tiré encore des mêmes remarques que lorsqu'une équation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une racine égale à zéro; ce qu'on auroit pu reconnoître aussi, en faisant attention qu'une équation telle que $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$ qui manque de terme connu peut toujours se diviser par $x = 0$.

Une équation qui n'a point de terme connu, a au moins une racine égale à zéro.

VI.

Lorsqu'on voudra retrouver dans une équation les propriétés qu'on vient d'énoncer, on voit bien qu'il faudra que tous les termes de cette équation soient du même côté, qu'ils soient ordonnés par rapport à l'inconnue, & que cette inconnue n'ait d'autre coefficient que l'unité au premier terme. De plus, que si quelque une des puissances de x manque dans l'équation, il faudra toujours prendre pour quantité des autres termes ceux qu'ils auroient, si ces puissances ne manquoient pas; par exemple, dans l'équation $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$, le terme $3x^3$ n'est que le troisième, parce que le second manque; & le terme $4x$ est le cinquième, parce que le quatrième manque. Si on vouloit donc appliquer les remarques précédentes à une telle équation, on diroit que la somme de ces cinq racines est nulle, c'est-à-dire, qu'elle a nécessairement des racines négatives & des racines positives, & que

Conditions qu'il faut observer dans une équation pour y trouver les propriétés précédentes.

la somme des premières est égale à la somme des autres. On diroit encore que la somme des produits de toutes les racines deux à deux est égale à -3 ; que la somme de tous les produits trois à trois est 0 , que la somme de tous les produits quatre à quatre est $+4$, qu'enfin le produit de toutes les racines est -5 .

V I I.

Méthode pour avoir les racines communes de toutes les racines d'une équation. De la propriété qu'a le dernier terme d'une équation d'être égal au produit de toutes les racines, on peut tirer une méthode d'avoir toutes les racines qui sont commensurables dans une équation: car elles doivent toutes se trouver en tentant la division de l'équation par x plus ou moins chacun des diviseurs du dernier terme.

Par exemple, qu'on ait l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, les diviseurs du terme -3 , ne pouvant être que -1 , -3 , $+1$, $+3$; je tente la division par $x - 1$, $x - 3$, $x + 1$, $x + 3$; elle réussit par $x - 1$ & par $x - 3$, & je vois que l'équation auroit pû s'écrire ainsi $\underline{x - 1} \times \underline{x - 2} \times \underline{x - 3} = 0$, qui m'apprend que l'équation proposée a trois racines, dont l'une est $+3$, & les autres, toutes deux égales, sont chacune $+1$.

Lorsqu'une équation ne pourra pas se diviser par aucune équation simple, composée de $x +$ ou $-$ quelqu'un des diviseurs du dernier terme, on sera sûr que cette équation n'aura aucune racine commensurable.

V I I I.

Il se présente contre cette méthode de trouver les racines commensurables, une difficulté qui, au premier coup d'œil, paroît assez considérable; c'est que si quelque racine de cette équation étoit une fraction, on ne sçauroit pas comment la trouver parmi les diviseurs du dernier terme: parce qu'en admettant des diviseurs fractionnaires dans un nombre, on en peut trouver à l'infini. Mais il est aisé de répondre à cette difficulté, en faisant remarquer que tous les coëfficiens d'une équation étant des nombres entiers, il est impossible que l'inconnue ait pour valeur une fraction. Je crois que ceux qui possèdent un peu d'Arithmétique des fractions reconnoîtroient sans secours la vérité de cette proposition; mais pour leur faciliter les moyens de s'en assurer, prenons pour exemple une équation comme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dans laquelle a, b, c , sont supposés des nombres entiers. Il est évident que x étant une fraction, x^3, x^2 , en seront aussi, & que jamais la fraction qui exprime x^3 ne pourra se réduire à une qui ait le même dominateur que x^2 ou son multiple ax^2 . A plus forte raison la même fraction ne pourra pas non plus se réduire au même dénominateur que x , ou son multiple bx . Dont $x^3 + ax^2 + bx$ ne pourra jamais faire une fraction plus simple que x^3 qui est irréductible. Dont x ne peut jamais être une fraction dans de telles équations.

Dans une équation dont tous les coëfficiens sont des entiers, l'inconnue ne sçauroit être une fraction.

I X.

Lorsqu'on aura une équation dont les coëf-

ficiens feront des fractions, on ne pourra pas, en la laissant avec ses fractions, trouver par la méthode précédente les racines commensurables qu'elle pourroit avoir; mais on pourra toujours, par une transformation assez simple, changer le Problème en un autre, où l'équation à résoudre n'aura plus de fractions, sans donner de coefficient au premier terme.

Transformation par laquelle on fait évannouir les fractions d'une équation quelconque.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + \frac{e}{f} = 0$$

(on voit qu'une équation d'un degré plus élevé n'auroit pas plus de difficulté) en faisant l'inconnue x égale à un autre inconnue y divisée par quelque nombre indéterminé m , je change l'équation en une nouvelle

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{a y^2}{b m^2} + \frac{c y}{d m} + \frac{e}{f} = 0, \text{ ou}$$

$$y^3 + \frac{a m}{b} y^2 + \frac{c m^2}{d} y + \frac{e m^3}{f} = 0,$$

dans laquelle je vois que si m est divisible à la fois par b , par d & par f ; $\frac{a m}{b}$, $\frac{c m^2}{d}$

& $\frac{e m^3}{f}$ seront des nombres entiers. Or, le

Problème est réduit par-là à quelque chose de bien aisé; car on est au moins sûr de réussir en prenant pour m le produit des nombres b , d , f , & si ces nombres ne sont pas premiers * en-

* On appelle en Arithmétique nombres premiers, ceux qui n'ont point de diviseurs, tels que 5, 11, 31, &c. &c.

tr'eux, on trouvera aisément un nombre plus petit que leur produit qui sera divisible par tous les trois.

X.

L'équation étant changée en une autre, sans fraction, on cherchera les racines commensurables de cette dernière par la méthode précédente; & si elle n'en a pas, on sera sûr que la première n'en avoit pas non plus, puisque x , supposé commensurable, ne pourra jamais donner une quantité incommensurable en le divisant par le nombre m , qui est commensurable aussi.

Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux équations fractionnaires.

X I.

La méthode précédente a cet inconvénient considérable, que lorsqu'il arrive que le dernier terme a beaucoup de diviseurs, les calculs qu'il faut faire pour tenter toutes les divisions que cette méthode prescrit sont si longs, qu'on l'abandonneroit malgré l'avantage infini de s'étendre généralement aux équations de tous les degrés, dont une ou plusieurs racines sont commensurables. C'est ce qui a engagé les plus habiles Analystes à perfectionner cette méthode, en trouvant des moyens plus faciles que la division pour reconnoître les diviseurs qui ne doivent pas réussir. Voici comment on s'y est pris.

Inconvénient de la méthode précédente.

on dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun commun diviseur, tels sont 21 & 16, 18 & 35.

X I I.

Réflexions
qui ont ser-
vi à perfec-
tionner cer-
tains méthode.

On a d'abord remarqué que si on faisoit dans la racine $x + a$ d'une équation quelconque, ou, ce qui revient au même, dans le diviseur $x + a$ d'une quantité quelconque, x égal à un nombre donné, le nombre dans lequel se changeoit alors la racine devoit être un diviseur de la quantité proposée, dans laquelle on auroit fait x égal au même nombre : c'est-à-dire, par exemple, que si on a la quantité $x^3 - 2x - 21$ dont on sçait que $x - 3$ est un diviseur, il arrivera qu'en faisant $x = 5$ le nombre 94 que devient $x^3 - 2x - 21$ par cette supposition, est nécessairement divisible par le nombre 2 que devient $x - 3$ par la même supposition.

En partant de-là on a supposé dans la quantité dont on cherchoit un diviseur, x successivement égal à plusieurs nombres, tels, par exemple, que $+1$, 0 , -1 ; suppositions qui devoient être faites les premières, parce qu'elles donnent les substitutions les plus faciles. Ensuite on a cherché tous les diviseurs des nombres dans lesquels la quantité proposée se change par ces substitutions; & on a fait ces remarques qui se présentoient naturellement après la première.

1°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = +1$ dans la quantité, on devoit trouver le nombre $1 + a$, puisque $x + a$ étoit le diviseur cherché.

2°. Que parmi tous les diviseurs venus par la supposition de $x = 0$, qui ne sont autre

chose que les diviseurs du dernier terme de la quantité proposée, doit être le nombre a .

3°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = -1$, doit être le nombre $-1 + a$.

X I I I.

Or, comme le nombre $1 + a$, a , $-1 + a$ sont nécessairement tels que le premier surpasse le second d'une unité, & que le second surpasse le troisième d'une unité aussi; il étoit aisé de tirer de-là ce principe, que de tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 0$, aucun ne pouvoit être le nombre demandé a , s'il ne se trouvoit en même temps surpassé de l'unité par quelqu'un des diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 1$, & s'il ne surpassoit en même temps d'une unité quelqu'un des diviseurs du nombre qu'a donné la supposition de $x = -1$. On voit bien qu'un tel principe doit faire éviter beaucoup de divisions inutiles dans la recherche des racines commensurables.

Principe
fondamen-
tal pour
trouver les
racines
commen-
surables.

Si on trouve plusieurs nombres, parmi les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 0$, qui ayent les conditions qu'on vient de remarquer, on fera ensuite $x = 2$, & on verra si parmi les diviseurs des nombres qui viennent alors, on trouve des nombres qui surpassent d'une unité ceux qu'a donné la supposition de $x = 1$, & ainsi de suite.

Au reste, on voit bien que l'examen qu'on fait de tous ces diviseurs doit être double, c'est-à-dire, que chacun d'eux doit être pris aussi bien en $-$ qu'en $+$.

Pour éclaircir cette méthode & pour en faciliter l'usage, nous allons en donner quelques exemples en faisant voir l'ordre qu'il faut garder dans le calcul pour ne s'y point tromper, & pour abrégér, autant qu'il est possible, la peine du Calculateur.

Applica-
tion de la
méthode
précédente
à un
exemple.

Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$, dont il s'agit de trouver les racines commensurables, ou, ce qui revient au même, soit la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, dont on demande les diviseurs d'une dimension.

Je commence par écrire (Voyez la Table ci-jointe, Case 1) l'une sous l'autre les suppositions 1, 0, - 1 que je veux faire pour x ; j'écris ensuite à côté de chacun de ces nombres les nombres - 8, + 6, + 16, ou simplement 8, 6, 16 (à cause que les signes sont indifférens pour les diviseurs) dans lesquels se change successivement la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par ces suppositions, & je les sépare des premiers nombres par une barre verticale. J'écris dans une troisième colonne les nombres 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16, qui sont les diviseurs des nombres précédens; les quatre premiers à côté de 8 dont ils sont les diviseurs, les quatre second à côté de 6, & les cinq derniers à côté de 16.

Cela posé, pour trouver parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, celui qu'il faut ajouter ou retrancher à x pour avoir le diviseur cherché,

ou plutôt pour exclure de tous ces diviseurs ceux qui n'ont pas les conditions requises ; je commence par remarquer que 1 qui est le premier de ces diviseurs, ne sçauroit être admis, soit qu'on le prenne en +, soit qu'on le prenne en — ; car si on le prend en +, c'est-à-dire, si on regarde $x + 1$ comme le diviseur cherché, 2 seroit ce que deviendroit ce diviseur par la supposition de $x = + 1$, & 0, ce qu'il deviendroit par la supposition de $x = - 1$, & par conséquent il faudroit trouver à la fois 2 dans les nombres de la première bande, & 0 dans ceux de la troisième : or, la seconde de ces conditions n'est pas remplie. Quant à ce que — 1 ne convient pas non plus, c'est-à-dire, que $x - 1$ n'est pas le diviseur cherché, cela se tire de ce que ce diviseur devenant 0 par la supposition de $x = + 1$, & — 2 par la supposition de $x = - 1$, il faudroit par conséquent trouver 0 dans les nombres de la première bande, & le nombre 2 dans ceux de la seconde. Or, il n'y a que la seconde de ces deux conditions qui ait lieu. Je vois ensuite que le diviseur 2 est aussi dans le cas d'être rejeté, parce que si on le prend en +, c'est-à-dire, si on regarde $x + 2$ comme le diviseur cherché, on auroit + 3 par supposition de $x = 1$, & + 1 par la supposition de $x = - 1$, ce qui demanderoit qu'on trouvât les nombres 3 dans la première bande, & 1 dans la troisième : or, la première de ces deux conditions ne se trouve pas remplie. Et si l'on prenoit 2 en —, c'est-à-dire, qu'on voulût que $x - 2$

fût le diviseur, on aura alors -1 & -3 pour les suppositions de $x = +1$ & de $x = -1$, ce qui demanderoit de trouver à la fois 1 dans la premiere bande, & dans la troisieme, conditions dont il n'y a que la premiere qui ait lieu.

Ayant exclu 1 & 2 , je prends le diviseur 3 , & je vois qu'en le prenant en $+$, c'est-à-dire, en regardant $x + 3$ comme le diviseur cherché, il faudra trouver $+4$ par la supposition de $x = +1$, & $+2$ par la supposition de $x = -1$. Or, je trouve effectivement 4 dans la premiere bande, & 2 dans la troisieme. Donc $+3$ a les conditions requises, je l'écris alors à la seconde bande, c'est-à-dire, vis-à-vis le nombre dont il est diviseur, & j'écris en même temps les nombres $+4$ & $+2$ dans les bandes supérieures & inférieures; non que ces nombres soient à joindre x pour servir de diviseurs à la quantité proposée; mais parce que n'ayant pas encore achevé l'examen des diviseurs, il se pourroit trouver encore d'autres nombres que $+3$ qui auroient les conditions requises; & qu'il faudroit alors faire de nouvelles suppositions pour reconnoître entre ces nombres ceux qu'il faudroit encore exclure. J'examine maintenant si 3 pris en $-$ ne pourroit pas réussir aussi-bien qu'en $+$, c'est-à-dire, si $x - 3$ ne pourroit pas avoir les mêmes conditions pour être diviseur de la proposée, il faudroit pour cela trouver -2 & -4 par les suppositions de $x = +1$ & de $x = -1$: or, c'est ce qui arrive en effet; donc jusqu'à présent

présent $x - 3$ a aussi-bien les conditions nécessaires pour être diviseur que $x + 3$; j'écris par conséquent dans une cinquième colonne verticale $- 2, - 3, - 4$.

Je passe enfin à l'examen de 6, & je vois que si je le prends en $+$, il faudroit trouver $+ 7$ & $+ 5$ dans les bandes supérieures & inférieures, ce qui n'arrive pas, & que si je le prends en $-$ je devrois avoir $- 5$ & $- 7$ dans les mêmes bandes, ce qui ne se trouve pas non plus. Je conclus donc qu'il n'y a que $x - 3$ & $x + 3$ qui puissent être des diviseurs commensurables & d'une dimension de la proposée.

Pour sçavoir si l'on est autant fondé à tenter la division par $x - 3$, que par $x + 3$; je remarque que si on faisoit une quatrième bande en supposant $x = - 2$, on devroit trouver $- 5$ pour le quatrième terme de la colonne $- 2, - 3, - 4$; & $+ 1$ pour le quatrième terme de la colonne $+ 4, + 3, + 2$; car il est clair que le diviseur $x - 3$ deviendrait $- 5$ par la supposition de $x = - 2$, & que le diviseur $x + 3$ deviendrait $+ 1$ par la même supposition. Mais en faisant $x = - 2$ dans la proposée $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, elle devient 16 qui n'est pas divisible par 5 & qui l'est par 1. Donc $x - 3$ ne sçauroit être un diviseur de cette quantité, donc s'il y en a un, il ne peut être que $x + 3$, ou, ce qui revient au même; si $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ a une racine commensurable, elle ne peut être que $- 3$. Pour sçavoir si elle l'a effectivement, je divise $x^3 - 2x^2$

L

— $13x + 6$ par $x + 3$, ce qui réussit & donne pour quotient exact $xx - 5x + 2$.

X V.

Pour que l'uniformité servît à la clarté dans cet exemple, j'ai examiné parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$ le nombre 1 comme les autres, mais on peut toujours se dispenser de faire aucun examen pour ce nombre, parce que s'il avoit à réussir, soit en $+$, soit en $-$, on l'auroit appris déjà en substituant $+1$ & -1 à la place de x dans l'équation donnée.

Dans des nombres aussi simples que 8, 6, 16, il étoit aisé de ne pas oublier aucun de leurs diviseurs, parce que ces nombres en ont peu. Mais lorsque l'on a des nombres qui ont beaucoup de diviseurs, il faut les chercher avec un certain ordre pour les avoir tous. Un seul exemple suffira pour faire voir comment cette opération doit se faire.

X V I.

Maniere
d'avoir tous
les divi-
seurs d'un
nombre.

Soit proposé de chercher tous les diviseurs du nombre 120. Je commence par tracer une barre verticale (Voyez la Case 2, Table suivante) à gauche de ce nombre, puis je mets à gauche de cette barre à la hauteur de 120, l'unité comme étant son premier diviseur. J'essaye ensuite de diviser 120 par 2, comme la division réussit, j'écris 2, & je le mets à gauche de la barre à la même hauteur de 60 quotient de la division que je mets à la droite de la même barre.

J'essaye encore la division par 2, qui réussit,

& donne 30 pour quotient, je mets alors le nouveau diviseur 2 sous le premier; & 30 sous 60. Je multiplie en même temps le nouveau diviseur 2 par celui d'en-haut 2, & je mets le produit 4 à gauche du second 2, comme étant un nouveau diviseur du nombre proposé 120. La raison de cette multiplication est que si 120 est divisible par 2, & sa moitié par 2, il doit l'être nécessairement par 4.

Comme 30 peut se diviser par 2 j'écris encore 2 à gauche de la barre & à la quatrième ligne, & le quotient 15 à droite sur la même ligne. Je multiplie en même temps le nouveau diviseur 2 par 4, ce qui me donne 8 pour un nouveau diviseur du nombre proposé. Je ne multiplie pas ce nouveau 2 par les premiers, parce qu'il en viendrait 4 qui est déjà écrit.

15 ne pouvant se diviser par 2, j'essaye de le diviser par 3, ce qui me réussit & me donne 5 pour quotient que j'écris à droite dans la cinquième ligne aussi-bien que le diviseur 3 que j'écris à gauche; je multiplie ensuite 3 par 2, par 4 & par 8 que je trouve dans les bandes supérieures, & j'écris à gauche du 3 les produits 6, 12, 24, qui sont, comme il est évident, des nouveaux diviseurs du nombre proposé.

5 n'ayant plus d'autre diviseur que lui-même, je l'écris à gauche de la barre dans la cinquième ligne, & je mets en même temps le produit de ce nombre par tous les diviseurs précédens 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, & j'ai 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120

que j'écris dans la même ligne à gauche de $\bar{5}$:

Cela fait, tous les nombres qui sont à gauche de la barre, à compter depuis 1 jusqu'à 120 sont les diviseurs de 120. Il en seroit ainsi des autres nombres dont on chercheroit tous les diviseurs.

X V I I.

Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables. Soit proposé présentement de chercher les racines commensurables de l'équation $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120 = 0$.

Ayant écrit dans une première colonne verticale 1, 0, - 1 (Table suivante, Case 3) pour les valeurs à donner successivement à x ; & dans une autre colonne verticale les nombres 165, 120, 221 qu'on trouve par la substitution de ces valeurs dans la quantité $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$, je place dans une troisième colonne les diviseurs de ces trois nombres, ce qui me donne les trois bandes

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120,
1, 13, 17, 221

que je place chacune vis-à-vis du nombre qui l'a produite. Cela fait parmi les diviseurs de 120; j'examine en premier lieu, si le nombre 2 a les conditions requises, & je vois qu'en le prenant en + il s'accorde avec les nombres 3 & 1 pris en haut & en bas. J'écris donc dans la quatrième colonne verticale + 3, + 2, + 1.

Je vois ensuite que le même nombre pris en - ne réussit pas, parce qu'il faudroit alors - 3 en bas, ce qui ne se trouve pas.

Parcourant ensuite de la même manière tous les autres diviseurs de 120, je trouve encore le nombre 12 qui étant pris en — a les conditions requises, pourvu qu'on prenne en — les nombres 11 & 13 qui sont au-dessus & au-dessous. J'écris donc dans une cinquième colonne verticale les trois nombres — 11, — 12, — 13.

Pour sçavoir présentement à laquelle des deux dernières colonnes je dois m'arrêter, ou plutôt, par laquelle des deux quantités $x + 2$ ou $x - 12$ je dois tenter la division; je remarque que si c'étoit la première, il faudroit trouver zéro en substituant — 2 pour x dans l'équation, ce qui n'arrive pas: donc il n'y a que la division par $x - 12$ à tenter, je la tente, & elle réussit, en me donnant pour quotient $x^4 + 5x^2 - x + 10$. Ainsi $+ 12$ est une des valeurs de x dans l'équation donnée & la seule commensurable.

X V I I I.

Soit enfin $x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$. Troisième. Ayant écrit (Case applica-
4, Table suivante) dans une première colonne tion de la méthode de trouver les racines commensurables. dans une seconde les valeurs 1, 0, — 1 à donner à x ; dans une troisième les nombres 30, 36, 40, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions, & dans une quatrième tous les diviseurs 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 du nombre 30; les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 du nombre 36; les diviseurs 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 du nombre 40; je trouve parmi tous ces diviseurs quatre colonnes qui renferment les conditions requi-

ses, la premiere, $+ 3$, $+ 2$, $+ 1$, la seconde, $- 2$, $- 3$, $- 5$, la troisieme, $- 3$, $- 4$, $- 5$, la quatrieme, $+ 10$, $+ 9$, $+ 8$.

Pour décider alors entre ces quatre colonnes, je commence par faire $x = 2$, & j'écris 2 au-dessus de 1 dans la premiere colonne, j'écris ensuite dans la seconde colonne 74, nombre dans lequel la quantité proposée se change par la supposition de $x = 2$. Cela fait, je vois, sans me donner la peine de chercher les diviseurs de ce nombre, que les deux colonnes $+ 3$, $+ 2$, $+ 1$, & $+ 10$, $+ 9$, $+ 8$, sont à rejeter; car si la premiere avoit lieu, il faudroit trouver $+ 4$ parmi les diviseurs de 74, ce qui n'arrive pas, & si c'étoit la seconde, il faudroit trouver $+ 11$ parmi les mêmes diviseurs, ce qui n'arrive pas non plus.

Je vois, au contraire, que les nombres $- 1$ & $- 2$ que demandent les colonnes $- 2$, $- 3$, $- 4$, & $- 3$, $- 4$, $- 5$ sont des diviseurs de 74, j'écris donc les nombres $- 1$ & $- 2$ au-dessous de $- 2$ & de $- 3$ dans la seconde & la troisieme colonne, & je cherche ensuite à exclure encore une de ces deux colonnes $- 1$, $- 2$, $- 3$, $- 4$; & $- 2$, $- 3$, $- 4$, $- 5$, ce qui devient bien facile, puisque si la premiere étoit à conserver, il faudroit trouver 0 par la supposition de $x = 3$, ce qui n'arrive pas; au lieu que $- 1$ qui, par la colonne $- 2$, $- 3$, $- 4$, $- 5$ doit être un diviseur du nombre donné dans la supposition de $x = 3$, ne peut pas manquer de l'être. Donc il n'y a de colonne à essayer que $- 1$, $- 2$, $- 3$,

— 4, — 5, c'est-à-dire, qu'il n'y a de diviseur à tenter que $x - 4$. J'essaye en effet la division de la quantité proposée par $x - 4$, ce qui réussit & donne pour quotient $x^5 + 3x^3 - 5x - 9$. Ainsi $+ 4$ est une des valeurs de x dans l'équation proposée & la seule commensurable.

X I X.

Après avoir vû comment on pouvoit tirer des équations d'un degré quelconque, les équations commensurables du premier qui en étoient les racines, il étoit naturel de chercher aussi à en tirer les équations du second degré qu'elles pouvoient renfermer : on devoit s'en promettre une aussi grande utilité, la solution des équations du second degré étant aussi complète que celle du premier.

Voici la méthode qu'on a imaginée pour y parvenir. Que $xx + bx + c = 0$ représente l'équation du second degré qui peut être un des produifans d'une équation donnée, ou, ce qui revient au même, que $xx + bx + c$, soit le diviseur cherché d'une quantité donnée, en faisant $x = 0$ dans ce diviseur, il est clair qu'il se réduira au nombre c , & que ce nombre sera un des diviseurs du dernier terme de la quantité donnée.

Méthode pour trouver les équations du second degré commensurables dans une équation donnée.

Si on fait ensuite $x = + 1$ dans le diviseur $x^2 + bx + c$, il se changera en $1 + b + c$ qui sera un des diviseurs du nombre que l'on a en faisant de même dans la proposée $x = 1$. Donc si on cherche tous les diviseurs de ce nombre, & qu'après les avoir pris tant en $+$

qu'en $-$, on en retranche l'unité, ce fera parmi tous les nombres, tant positifs que négatifs, que l'on aura par cette opération que devra se trouver le nombre égal à $b + c$.

Si on fait ensuite $x = -1$ tant dans la quantité proposée, que dans le diviseur $x^2 + bx + c$, qui devient alors $1 - b + c$, on voit qu'en cherchant tous les diviseurs du nombre que devient cette quantité par cette supposition, & retranchant l'unité de tous ces diviseurs, pris tant en $-$ qu'en $+$, on aura parmi tous les nombres que ce calcul donnera, celui qui exprime $-b + c$.

Or, comme c est moyen arithmétique entre $b + c$ & $-b + c$, il s'ensuit que parmi les trois suites des nombres qu'on aura pour représenter $b + c$, c , $-b + c$, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux qui seront en progression arithmétique. Lorsqu'on aura trouvé trois nombres en progression arithmétique, il est clair que celui qui répondra à la supposition de $x = 0$, sera celui qu'il faudra prendre pour c ; & comme celui qui répondra à la supposition de $x = 1$ représentera $b + c$, il est clair qu'en retranchant le premier du second, on aura b . Substituant ensuite ces deux nombres à la place de b & de c dans $x^2 + bx + c$, on aura un diviseur à tenter pour la quantité donnée, & le seul à essayer si on n'a trouvé qu'une progression arithmétique parmi toutes les suites des nombres qu'ont donné les diviseurs de la quantité où l'on a fait successivement $x = 1, 0, -1$. Si on a trouvé plusieurs progressions arithmétiques, on se dé-

terminera entre ces progressions à peu près comme dans le cas des diviseurs simples, en faisant de nouvelles suppositions pour x , comme -2 , -3 , ou $+2$, $+3$, &c.

Car qu'on suppose, par exemple, $x = -2$, $x = -3$, &c. dans la quantité proposée, il est clair que tous les diviseurs, tant positifs que négatifs du nombre que l'on aura alors, représenteront la quantité $4 - 2b + c$, ou $9 - 3b + c$, &c. que devient $x^2 + bx + c$, lorsque $x = -2$, ou $x = -3$, &c. & que par conséquent tous ces mêmes diviseurs dont on aura retranché 4 , 9 , &c. représenteront $-2b + c$, $-3b + c$, &c. Or, $-2b + c$, $-3b + c$, &c. étant d'autres termes de la progression arithmétique $b + c$, c , $-b + c$, on n'aura donc plus qu'à chercher parmi les progressions arithmétiques trouvées précédemment, celle qui se conserve par ces nouvelles valeurs de x , & s'en servir, comme on vient de l'expliquer, pour déterminer les nombres b & c .

X X.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$, dont on cherche un diviseur de deux dimensions.

Applica-
tion de la
méthode
précédente.

Je commence par écrire dans une colonne verticale (Table suivante, Case 5) les valeurs 1 , 0 , -1 que je veux donner à x . J'écris ensuite, dans une seconde colonne verticale, les nombres 1 , 21 , 65 , dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions.

J'écris de même dans une troisième colonne,

à côté du premier nombre, son unique diviseur 1; à côté de 21, ses diviseurs 1, 3, 7, 21; & à côté de 65 ses diviseurs 1, 5, 13, 65.

Cela fait, j'écris dans une quatrième colonne les nombres 1, 0, 1 quarrés de 1, 0, — 1 écrits dans la première colonne & valeurs de x , par conséquent, dans les mêmes suppositions de 1, 0, — 1. Enfin, je forme une cinquième colonne par ces conditions;

1°. Que la première bande — 2, 0 se forme en retranchant 1 de 1 pris en — & de 1 pris en +.

2°. Que la seconde bande soit composée des nombres — 21, — 7, — 3, — 1, + 1, + 7, + 21, les mêmes que les diviseurs qui sont à côté, mais écrits deux fois, l'une pour le signe —, l'autre pour le signe +.

3°. Que les nombres de la troisième bande soient — 66, — 14, — 6, — 2, 0, + 4, + 12, + 64, dont les premiers — 66, — 14, — 6, — 2 soient trouvés en retranchant 1 des nombres 65, 13, 5, 1 pris en —, & les autres 0, + 4, + 12, + 64. en retranchant 1 des mêmes nombres 1, 5, 13, 65 pris en +.

Pour déterminer ensuite les progressions arithmétiques qui sont dans ces trois suites de nombres, je commence par prendre dans la première bande le nombre — 2 pour le premier terme d'une progression, & je prends successivement pour seconds tous ceux de la seconde bande; je cherche en même temps les troisièmes

termes que ces premiers donneroient, & j'examine quels sont ceux de ces troisiemes qui se trouvent dans la troisieme bande: or, -2 & -11 doivent donner pour troisieme terme -40 qui n'est point dans la troisieme bande, je rejette donc 21 ; je prends alors -7 pour second terme, & comme il devoit donner -12 pour troisieme terme, & que -12 n'est pas dans la troisieme bande, je rejette encore -7 , & de même -3 , parce que ce dernier devoit donner -4 qui ne se trouve pas non plus.

A l'égard de -1 , comme il donne 0 pour troisieme, & que 0 se trouve dans la troisieme bande, j'écris dans la sixieme colonne la progression $-2, -1, 0$. De même $+1$ pris pour second, donnant $+4$ qui se trouve encore, j'écris la seconde progression $-2, +1, +4$. Et comme $+7$ & $+21$ devoient donner chacun un troisieme terme qui n'est pas dans la troisieme bande, je les rejette. Les progressions qui peuvent commencer par 2 , étant déterminées, je passe à celles dont le premier terme seroit 0 , & pour les trouver, je prends, ainsi que j'ai fait pour 2 , tous les nombres de la seconde bande l'un après l'autre.

Je vois d'abord que -21 devoit donner pour troisieme terme -42 , qui n'est pas dans la troisieme bande; je vois ensuite que -7 donne -14 qui se trouve: ainsi j'écris encore la progression $0, -7, -14$. De même -3 & -1 donnant -6 & -2 qui se trouvent aussi; j'écris les progressions $0, -3,$

— 6, & 0, — 1, — 2. A l'égard des nombres $+ 1$, $+ 7$, $+ 21$, ils ne donnent aucun troisieme terme qui se trouve, ainsi je les rejette.

pour voir présentement lesquelles de ces progressions il faut encore rejeter, je fais $x = - 2$, & j'écris — 2 dans la premiere colonne; en observant de mettre en même temps, 1°. dans la seconde colonne, 125 que donne la quantité proposée par cette valeur de x . 2°. Dans la troisieme les nombres 1, 5, 25, 125 diviseurs de 125. 3°. Dans la quatrieme colonne le nombre 4 quarré de — 2 & valeur de $x x$ dans cette supposition. 4°. Dans la cinquieme colonne les nombres — 129, — 29, — 9, — 5 que l'on a en retranchant 4 des nombres 125, 25, 5, 1 pris en —, & les nombres — 3, $+ 1$, $+ 21$, $+ 121$ que l'on a en retranchant 4 des mêmes nombres 1, 5, 25, 125 pris en $+$.

Par ce moyen, je vois que les deux progressions — 2, $+ 1$, $+ 4$, & 0, — 7, — 14 sont à rejeter, parce qu'elles devoient donner pour quatrieme terme $+ 7$ & — 21 qui ne se trouvent pas dans la quatrieme bande.

Mais les trois progressions — 2, — 1, 0; 0, — 3, — 6; 0, — 1, — 2, devant donner pour quatriemes termes $+ 1$, — 9, — 3 qui se trouvent dans cette quatrieme bande, j'ai besoin d'une nouvelle supposition pour exclure au moins une des trois progressions.

Je fais donc $x = - 3$, ce qui me donne 147 pour le nombre dans lequel se change la

Cafe 1.				1	120	Cafe 2.					
$x^3 - 2x^2 - 13x + 6$				2	60						
1	8	1.2.4.8	+4	-2	4.2	30					
0	6	1.2.3.6	+3	-3	8.4.2	15					
-1	16	1.2.4.8.16	+2	-4	24.12.6.3	5					
-2	16		+1		120.60.40.30.20.15.10.5	1					
$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$										Cafe 3.	
1	165	1.3.5.11.15.33.55.165	+3	-11							
0	120	1.2.3.4.5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.60.20	+2	-12							
-1	221	1.13.27.221	+1	-13							
$x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$										Cafe 4.	
2	74				-1	-2					
1	30	1.2.3.5.10.15.30	+3	-2	-3	+10					
0	36	1.2.3.4.6.9.12.18.36	+2	-3	-4	+9					
-1	40	1.2.4.5.8.10.20.40	+1	-4	-5	+8					
$x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$										Cafe 5.	
1	1	1	1	-2,0	-2	-2	0	0	0		
0	12	1.3.7.21	0	-21,-7,-3,-1,+1,+3,+7,+21	-1	+1	-7	-3	-1		
-1	65	1.5.13.65	1	-66,-14,-6,-2,0,+4,+12,+64	0	+4	-14	-6	-2		
-2	125	1.5.25.125	4	-129,-29,-9,-5,-3,+1,+21,+121	+1			-9	-3		
-3	147	1.3.7.21.49.147	9	-156,-58,-30,-16,-12,-10,-8,-6,-2+12,+40,+138	1			-12			

SCD Lyon 1

senior courses
4th division

Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
1	81.2.48	1	81.2.48	1	81.2.48	1	81.2.48
2	81.2.48	2	81.2.48	2	81.2.48	2	81.2.48
3	81.2.48	3	81.2.48	3	81.2.48	3	81.2.48
4	81.2.48	4	81.2.48	4	81.2.48	4	81.2.48
5	81.2.48	5	81.2.48	5	81.2.48	5	81.2.48
6	81.2.48	6	81.2.48	6	81.2.48	6	81.2.48
7	81.2.48	7	81.2.48	7	81.2.48	7	81.2.48
8	81.2.48	8	81.2.48	8	81.2.48	8	81.2.48
9	81.2.48	9	81.2.48	9	81.2.48	9	81.2.48
10	81.2.48	10	81.2.48	10	81.2.48	10	81.2.48

quantité proposée par cette supposition. J'écris donc 147 dans la seconde colonne, & à côté, dans la troisième, ses diviseurs 1, 3, 7, 21, 49, 147; je mets de même dans la quatrième colonne 9 carré de -3 , ou valeur de xx dans la nouvelle supposition; enfin j'écris dans la cinquième colonne les nombres -156 , -58 , -30 , -16 , -12 , -10 , -8 , -6 , -2 , $+12$, $+40$, $+138$, que l'on a en retranchant 9 des nombres 1, 3, 7, 21, 49, 147 pris en $-$ & en $+$.

Par-là je trouve que les progressions -2 , $-1, 0, +1$ & $0, -1, -2, -3$, doivent être rejetées, & qu'au contraire il faut conserver la progression $0, -3, -6, -9$; car les deux cinquièmes termes des premières progressions doivent être $+2$ & -4 qui ne se trouvent pas dans la cinquième bande, au lieu que le cinquième terme de la progression $0, -3, -6, -9$ est -12 qui s'y trouve.

Après avoir réduit toutes les progressions à la seule $0, -3, -6$, &c. je prends dans cette progression le nombre -3 qui, dans la sixième colonne, répond à la supposition de $x = 0$, pour exprimer le terme c du diviseur cherché $xx + bx + c$. Je prends ensuite, toujours dans la sixième colonne, 0 qui répond à la supposition de $x = 1$, & qui, suivant les principes précédens, doit être $b + c$; ainsi retranchant c ou -3 de 0 , ou $b + c$, j'ai $+3$ pour b , & partant le diviseur cherché $x^2 + bx + c$ est $xx + 3x - 3$, s'il y en a un de deux dimensions.

Pour sçavoir ce qui en est, je divise la quantité proposée $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$ par $xx + 3x - 3$, & je trouve qu'en effet la division est exacte, & donne pour quotient $x^3 + 5x - 7$.

X X I.

Autre application de la méthode précédente.

Soit présentement la quantité $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$, je commence par écrire (Table ci-jointe, Case 1) dans une premiere colonne verticale les valeurs 2, 1, 0, -1, -2 que je veux donner à x . J'écris ensuite dans la seconde colonne verticale les nombres 133, 33, 5, 1, 3 dans lesquels la quantité se change par ces suppositions.

Dans la troisieme, j'écris vis-à-vis de ces nombres tous leurs diviseurs. Dans la quatrieme les valeurs 4, 1, 0, 1, 4 de xx dans les suppositions faites pour x à la premiere colonne.

Enfin dans la cinquieme colonne j'écris, pour la premiere bande, les nombres -137, -23, -11, -5, -3, +3, +15, +129 trouvée en retranchant 4 des nombres 133, 19, 7, 1 pris d'abord en - & ensuite en +. De même dans la seconde bande, les nombres -34, -12, -4, -2, 0, +2, +10, +32, produits en retranchant 1 des nombres 33, 11, 3, 1 pris d'abord en -, puis en +, & ainsi des autres bandes. Tous ces nombres écrits, je commence par prendre dans la cinquieme bande de la cinquieme colonne, le premier nombre -7 pour servir de premier terme d'une progression, & prenant en même temps -2

dans la quatrième bande pour servir de second, je vois que le troisième devrait être $+ 3$, & qu'il ne se trouve pas dans la troisième bande; ainsi je passe à 0 qui, en prenant toujours $- 7$ pour premier terme, donneroit $+ 7$ pour troisième terme, & comme $+ 7$ n'est pas non plus dans la troisième, je conclus qu'il n'y a point dans les nombres de la cinquième colonne, de progression qui puisse commencer par $- 7$.

Je prends donc $- 5$ pour premier terme, & je vois qu'en lui donnant $- 2$ pour second, le troisième seroit $+ 1$ qui se trouve bien dans la troisième bande, mais qui donne pour quatrième terme $+ 4$, qui n'est pas dans la seconde bande; ainsi je laisse $- 2$, & prends 0 pour second terme, ce qui me donne alors $+ 5$, $+ 10$, $+ 15$, pour troisième, quatrième & cinquième termes, & comme tous ces nombres se trouvent dans la troisième, seconde & première bandes, j'écris dans la sixième colonne les nombres 15, 10, 5, 0, $- 5$.

Prenant ensuite $- 3$ pour premier terme, je vois que ni $- 2$, ni 0 ne peuvent lui servir de seconds termes, parce que le premier donneroit la progression $- 3$, $- 2$, $- 1$, 0, $+ 1$ dont le dernier terme n'est point dans la première bande; & que le second donneroit la progression $- 3$, 0, $+ 3$, &c. qui manque dès le troisième terme $+ 3$ qui ne se trouve point dans la troisième bande.

Il ne me reste plus qu'à prendre $- 1$ pour

premier terme , je lui donne d'abord — 2 pour second qui ne réussit pas , mais lui donnant ensuite 0 , j'ai pour troisieme , quatrieme , cinquieme termes , les nombres + 1 , + 2 , + 3 qui sont dans la troisieme , seconde & premiere bande ; j'écris donc dans la sixieme colonne les nombres + 3 , + 2 , + 1 , 0 , — 1 .

Cela fait , je ne cherche point à donner de nouvelles valeurs à x pour exclure une de ces deux progressions , parce que la quantité donnée étant de quatre dimensions , doit ou n'avoir aucun diviseur de deux dimensions , ou en avoir deux à la fois , ce qui se tire de ce qu'aussi-tôt qu'on aura trouvé un diviseur de deux dimensions à une quantité qui a quatre dimensions , le quotient qui est toujours un diviseur en même temps , aura aussi deux dimensions.

Suivant cette réflexion , je prends indifféremment l'une ou l'autre des deux progressions précédentes ; la premiere , par exemple , dans laquelle 5 étant ce qui répond à la supposition de $x = 0$, & 10 ce qui répond à la supposition de $x = 1$; j'ai $c = 5$ & $b + c = 10$, c'est-à-dire , $b = 5$. D'où le diviseur que donne cette progression est $xx + 5x + 5$. Je divise donc la quantité proposée par $xx + 5x + 5$, & je vois que la division réussit & donne pour quotient $xx + x + 1$ qui est le diviseur qu'on trouveroit par l'autre progression.

X X I I.

Lorsqu'il sera question de trouver les divi- Méthode
 feurs d'une équation telle que $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20 = 0$, dont le pre- pour trou-
 mier terme aura un coefficient qui n'aura pas ver les di-
 disparu ; en divisant toute l'équation par ce viseurs d'u-
 coefficient ; on pourra se servir des principes ne demen-
 précédens sans être obligé de changer cette sion, lors-
 équation en une autre qui n'ait point de coëf- que l' x doit
 ficient au premier terme, comme on le pour- avoir un
 roit faire par la méthode de l'art. IX. coëfficient.

Pour le faire voir, examinons d'abord ce qui regarde les diviseurs d'une dimension. Que $mx + a$ représente celui qui doit diviser une quantité quelconque donnée. Il est clair que si on fait x successivement égal à 2, 1, 0, -1, -2, &c. ce diviseur deviendra, dans tous ces cas, $2m + a$, $m + a$, a , $-m + a$, $-2m + a$, &c. qui sont des quantités en progression arithmétique, dans lesquelles il est aisé de remarquer.

1°. Que la différence m de tous les termes est le coefficient de x dans le diviseur.

2°. Que cette même différence m est un diviseur du coefficient du premier terme de la quantité proposée.

3°. Que le terme a répondant à la supposition de $x = 0$, est la partie délivrée d' x du diviseur.

4°. Que les mêmes quantités en progression arithmétique seront les diviseurs de la quantité donnée, dans laquelle on aura fait successivement x égal à 2 ; 1 ; 0 ; -1 ; -2, &c.

M

Cela posé, lorsqu'il faudra chercher les diviseurs d'une dimension d'une quantité quelconque donnée, on suivra d'abord le même procédé que ci-dessus pour les trois premières colonnes; on cherchera ensuite, parmi tous ces nombres, quelque progression dont la différence soit un diviseur du coefficient du premier terme de la quantité proposée. Enfin, pour employer cette progression, on substituera dans $m x + a$, à la place de a le terme de la progression qui répondra à la supposition de $x = 0$, & à la place de m le nombre, que l'on aura en retranchant un terme quelconque de la progression, de celui qui est au-dessus.

X X I I I.

Applica-
tion de cet-
te méthode
à un exem-
ple.

Supposons, par exemple, que l'on cherche les diviseurs de la quantité $6 x^4 - x^3 - 21 x^2 + 3 x + 20$.

Je range à l'ordinaire dans la première colonne les suppositions $2, 1, 0, -1, -2$, à faire pour x . Dans la seconde, les nombres $30, 7, 20, 3, 34$, que devient successivement la quantité donnée par ces suppositions, & enfin dans la troisième tous les diviseurs de ces nombres.

Cela fait, afin de découvrir parmi tous les nombres de la troisième colonne, quelque progression qui serve à reconnoître le diviseur cherché; je commence par examiner le premier nombre 1 de la première bande, & je vois d'abord que si on lui donne pour second le premier nombre 1 de la seconde bande, la progression $1, 1, 1$, &c. qui en vient ne

peut pas être admise, puisqu'elle ne sçauroit représenter le diviseur cherché $m x + a$ qui doit varier nécessairement par les différentes valeurs de x . Je vois de même que 7 ne sçauroit être pris pour second; car le troisieme terme que produiroit cette supposition seroit 13 qui ne se trouve pas dans la troisieme bande.

Prenant ensuite 1 en —, je vois que 1 de la seconde ne lui sçauroit servir de second terme, parce que le troisieme seroit 3, qui n'est pas dans la troisieme bande. A l'égard de 7, il est inutile de chercher si le troisieme terme qu'il donneroit se trouve dans la troisieme bande; puisque la différence de — 1 à 7 est 8, qui n'est pas un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée. Donc 1, soit qu'on le prenne en +, ou qu'on le prenne en —, est à rejeter.

Parcourant de la même maniere tous les autres nombres de la premiere bande, je ne trouve que 10 qui puisse avoir les conditions convenables. Lui donnant 7 pour second terme, il donne la progression 10, 7, 4, 1, — 2 dont la différence est 3, diviseur du coëfficient de $6x^2$.

Ayant donc écrit cette progression dans la quatrieme colonne, je prends le terme + 4 qui répond à la supposition de $x = 0$ pour exprimer la partie a du diviseur cherché, & retranchant le même terme + 4 du terme supérieur + 7 qui représente $m + a$, j'ai + 3 pour exprimer m , c'est-à-dire, que le diviseur cherché, s'il doit y en avoir un, ne peut

être que $3x + 4$. Je tente donc la division par cette quantité, elle réussit, & me donne pour quotient $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

X X I V.

Méthode pour trouver les diviseurs de deux dimensions, lorsque l' x doit avoir un coefficient.

Examinons présentement les cas où les diviseurs doivent avoir deux dimensions. Soit pris $m x^2 + b x + c$ pour représenter le diviseur cherché d'une quantité donnée, il est clair, comme ci-dessus, que le dernier terme c sera un diviseur du dernier terme de la quantité donnée, & que m sera un diviseur du coefficient de la plus haute puissance de x dans la quantité donnée.

Choisissant donc d'abord pour représenter m un des diviseurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée, & faisant la même opération que dans l'art. XIX. à cela près, qu'au lieu de retrancher le carrés 16, 9, 4, &c. on retranche le produit de ces mêmes carrés par le nombre qu'on aura choisi pour m , on trouvera de même b & c .

Si le diviseur que l'on a ainsi, en mettant dans $m x^2 + b x + c$, pour m le nombre choisi, & pour b , c ceux qui auront été déterminés d'après ce choix, ne réussit pas, on prendra un autre des diviseurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée pour représenter m , & l'on achevera le calcul de la même manière. Si après avoir essayé tous les diviseurs du coefficient du premier terme, il arrivoit qu'on ne trouvât pas de diviseur par cette méthode, on seroit sûr que la quantité proposée n'en devoit point avoir.

X X V.

Soit pris, pour faire une application de cette méthode, la quantité $4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$ dont on demande un diviseur de deux dimensions. Ayant d'abord placé à l'ordinaire (Table suivante, Case 3) dans la premiere colonne les nombres 2, 1, 0, -1, -2, &c. auxquels on égale successivement x ; dans la seconde, les nombres 117, 5, 77, 153, 437 que devient successivement la quantité proposée par ces valeurs de x ; dans la troisieme, tous les diviseurs des nombres de la seconde : je commence par chercher, suivant les regles de l'art. XIX, s'il y a quelque diviseur de deux dimensions, dont le premier terme ait l'unité pour coefficient; mais n'en trouvant point, je suppose que m , c'est-à-dire, le coefficient du premier terme du diviseur, soit 2 qui est un des diviseurs du coefficient 4 du premier terme de la quantité donnée.

Application de cette méthode à un exemple.

Je place alors dans la quatrieme colonne, au lieu des quarrés des nombres de la premiere, le produit de ces mêmes quarrés par 2 valeur supposée de m , c'est-à-dire, que j'écris dans la quatrieme colonne les nombres 8, 2, 0, 2, 8. Je retranche ensuite ces nombres de tous ceux de la troisieme colonne pris en - & en +, ce qui me donne pour la premiere bande de la cinquieme colonne - 125, - 47, - 21, - 17, - 11, - 9, - 7, - 5, + 1, + 5, + 31, + 109; pour la seconde bande - 7, - 3, &c.

M iij

Tous ces nombres écrits, je cherche toujours, comme ci-devant, des progressions arithmétiques parmi tous ces termes, & je ne trouve que la progression $+5, -3, =11, -19, -27$ que j'écris dans la sixième colonne: cela fait, je prends -11 répondant à zéro pour exprimer le nombre c , & retranchant ce nombre de -3 qui est au-dessus, j'ai le reste $+8$ pour exprimer b . Le diviseur qui résulte donc de la supposition de $m = 2$ est $2x^2 + 8x - 11$; j'essaye alors la division qui réussit en donnant pour quotient $2x^3 - 7$, & sans prendre la peine de faire le calcul que demanderoit la supposition de $m = 4$, je vois qu'il ne doit pas réussir, parce qu'il faudroit pour cela que le quotient $2x^3 - 7$ pût se décomposer, ce qui est impossible. Ainsi la quantité proposée n'a pas d'autre diviseur de deux dimensions, que $2x^2 + 8x - 11$.

Toute quantité donnée de moins de six dimensions, & qui a des diviseurs, en doit avoir d'au-dessous de trois dimensions.

X X V I.

Lorsqu'on cherchera les diviseurs d'une quantité qui ne passera pas le cinquième degré, on pourra toujours les trouver par les méthodes précédentes; car aussi-tôt qu'on se sera assuré par ces méthodes que cette quantité n'aura point de diviseur, ni d'une, ni de deux dimensions, on sera sûr aussi qu'elle n'en aura pas de trois.

X X V I I.

Si la quantité a six ou plus de dimensions, elle pourroit n'être décomposable qu'en des quantités de plus de deux dimensions. La méthode qu'il faudroit suivre pour trouver

Case 1.

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$$

2	133	1.7.19.133	4	-137, -23, -11, -5, -3, +3, +15, +129	+15	+3
1	33	1.3.11.33	1	-34, -12, -4, -2, 0, +2, +10, +32	+10	+2
0	5	1.5	0	-5, -1, +1, +5	+5	+1
-1	1	1	1	-2, 0	0	0
-2	3	1.3	4	-7, -5, -3, -1	-5	-1

Case 2.

$$6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$$

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	10
1	7	1.7	7
0	20	1.2.4.5.10.20	4
-1	3	1.3	1
-2	34	1.2.17.34	-2

Case 3.

$$4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$$

2	117	1.3.9.13.39.117	8	-125, -47, -21, -17, -11, -9, -7, -5, +1, +5, +31, +109	+5
1	5	1.5	2	-7, -3, -1, -3	-3
0	77	1.7.11.77	0	-77, -11, -7, -1, +7, +1, +11, +77	-11
-1	153	1.3.9.17.51.153	1	-155, -53, -19, -11, -5, -3, -1, +1, +7, +15, +49, +151	-19
-2	437	1.19.23.437	8	-445, -31, -27, -9, -7, +11, +15, +429	-27

Lucy 153

Mathematics

ces diviseurs, est fondée à peu près sur les mêmes principes que les précédens, je ne m'arrête point à l'expliquer à cause de la longueur des calculs.

roit n'avoir de diviseurs que de trois ou de plus de dimensions.

XXVIII.

Tout ce que nous venons de dire sur les diviseurs commensurables, ne regarde que les équations numériques; cependant les équations littérales pouvant aussi avoir des diviseurs commensurables, il faut voir ce que l'on doit faire pour les trouver.

Supposons d'abord que l'équation ne renferme qu'une lettre connue avec x , & que cette équation, soit ce qu'on appelle homogène; c'est-à-dire, que tous ses termes montent à la même dimension, telle que l'équation $x^3 - a x^2 - 10 a x + 6 a^3$, par exemple. On n'aura qu'à substituer l'unité à la place de la lettre connue a de cette équation, & chercher ses diviseurs de la même manière que ci-dessus. Ces diviseurs étant trouvés, s'ils sont d'une dimension, on remettra la lettre a à côté du nombre qui sert de second terme. Si le diviseur a deux dimensions, on placera a après le coefficient du second terme, & $a a$ après le nombre qui sert de troisième terme.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 4 a x^2 - 17 a^2 x - 12 a^3$; après avoir fait $a = 1$, & trouvé que la quantité $x^3 + 4 x^2 - 17 x - 12$, qui vient par cette opération, a pour diviseur $x - 3$, je conclus que $x - 3 a$ est un diviseur de la quantité proposée.

Qu'on ait ensuite $2 x^3 + 5 a x^4 - 3 a^2 x^3$

M iv

— $8 a^3 x^2 - 20 a^4 x + 12 a^5$. En supposant $a = 1$, on aura $2 x^5 + 5 x^4 - 3 x^3 - 8 x^2 - 20 x + 12$ qui donne pour diviseur de deux dimensions $2 x^2 + 5 x - 3$. Mettant alors dans ce diviseur a à côté de 5 , & $a a$ à côté de 3 , il vient $2 x^2 + 5 a x - 3 a a$ pour le diviseur de deux dimensions de $2 x^5 + 5 a x^4 - 3 a^2 x^3 - 8 a^3 x^2 - 20 a^4 x + 12 a^5$.

X X I X.

Dans une équation homogene & qui est affectée de trois lettres, on pourroit, en suivant les méthodes précédentes, parvenir encore à trouver ses diviseurs, tant simples, que composés de deux dimensions; mais à l'aide de quelques observations de calcul qui se présentent assez naturellement, on peut réussir d'une façon un peu plus commode.

Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois.

Supposons d'abord que la quantité donnée qui renferme trois lettres, a , b , x dût avoir pour diviseur une quantité qui n'en renfermât que deux, que les lettres x , & a , par exemple. Puisque ce diviseur, quel qu'il soit, pourra, sans contenir de b , diviser la quantité donnée où b entre, il faut que la valeur de b soit indifférente à la division, & que cette division puisse se faire de même lorsque b sera zéro. Donc si on fait $b = 0$ dans la quantité donnée, il faudra que la quantité donnée par cette supposition ait pour commun diviseur avec la quantité entière, le diviseur cherché. La question est donc, en ce cas, renfermée dans une autre, traitée dans la première Partie, art. LXXIII. où

l'on a enseigné à trouver le plus grand commun diviseur de deux quantité données : de sorte que par ce qu'on a enseigné dans cet article, on trouvera le diviseur cherché de quelque dimension qu'il soit, pourvû qu'il n'ait que deux lettres.

X X X.

Pour montrer l'application de cette méthode, soit pris d'abord la quantité $x^4 + a x^3 + 2 a^2 x^2 + 3 a^3 x + a b b x + a^4 + a a b b$, dont on cherche un diviseur où les seules lettres a, x entrent. Exemple.

En faisant $b = 0$ il vient $x^4 + a x^3 + 2 a^2 x^2 + 3 a^3 x + a^4$ dont le plus grand commun diviseur avec la quantité entiere, ou, ce qui revient au même, avec le reste $a b b x + a a b b$, est $x + a$, qui est donc nécessairement un diviseur de la quantité donnée, & le plus grand qu'elle puisse avoir qui ne contienne pas de b .

X X X I.

Soit $x^5 - 4 a x^4 + 6 a a x^3 - a b x^3 + a b b x^2 + 2 a a b x^2 - 4 a^3 x^2 - 2 a a b b x - 2 a^3 b x + 2 a^3 b b$; en faisant $b = 0$ dans cette quantité, on a $x^5 - 4 a x^4 + 6 a a x^3 - 4 a^3 x^2$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec la quantité proposée, ou, ce qui revient au même, avec le reste $- a b x^3 + a b b x^2 + 2 a a b x^2 - 2 a a b b x - 2 a^3 b x + 2 a^3 b b$, c'est-à-dire, le plus grand commun diviseur des quantités $x^3 - 4 a x^2 + 6 a a x - 4 a^3$ & $- x^3 + b x^2 + 2 a x^2 - 2 a b x - 2 a a x + 2 a a b$. Autre exemple.

Or, s'il y a un diviseur commun entre ces deux quantités qui ne contienne pas de b , il fera aussi commun aux deux parties $x^3 + 2ax^2 - 2a^2x$ & $bx^2 - 2abx + 2a^2b$ de la dernière de ces deux quantités; mais le diviseur commun de ces deux parties ne peut être que $xx - 2ax + 2a^2$, j'examine donc s'il divise aussi $x^3 - 4ax^2 + 6a^2x - 4a^3$, & comme il le divise en effet, je conclus qu'il est le diviseur cherché de la quantité proposée.

X X X I I.

Méthode pour trouver les diviseurs de trois lettres & d'une dimension.

Supposons présentement que la quantité proposée, composée de trois lettres dont on cherche le diviseur, n'en ait aucun composé seulement de deux lettres, ou bien que si elle en renferme, on ait commencé par les trouver, & les mette à part. Pour trouver alors les diviseurs de trois lettres & d'une dimension qu'elle peut avoir, je commence par représenter ce diviseur par $mx + na + pb$; m, n, p étant supposées désigner des nombres. Je remarque ensuite que si on fait successivement, a, x, b égaux à zéro dans ce diviseur, on a les trois quantités $mx + pb, na + pb, mx + na$ telles que les deux termes que chacune d'elles renferme, se trouvent répétés dans les deux autres quantités. $mx + pb$, par exemple, donné par la supposition de $a = 0$, est composé de mx qui se trouve dans $mx + na$ donné par la supposition de $b = 0$, & de pb qui se trouve dans $na + pb$ donné par la supposition de $x = 0$. Je vois en même temps que

la somme de ces trois quantités $m x + n a$, $m x + p b$, $n a + p b$, est le double du diviseur entier $m x + n a + p b$.

Or, comme ces trois quantités sont nécessairement des diviseurs de celles que l'on auroit en faisant les mêmes suppositions de a , x , b égaux à zéro, dans la quantité proposée; on tire de-là, que pour trouver les diviseurs de cette quantité qui ne montent qu'à une dimension, & contiennent trois lettres, il faut commencer par écrire séparément les trois quantités, dans lesquelles la proposée se change par la supposition de a , x , b égaux à zéro; écrire ensuite à côté de chacune de ces nouvelles quantités tous ses diviseurs d'une dimension, & à deux lettres. Cela fait, il faut choisir trois diviseurs parmi ces trois classes de diviseurs à deux lettres, en observant les conditions dont nous venons de parler, que les deux termes dont chacun de ces diviseurs sera composé, se trouvent dans les deux autres diviseurs. Ces trois diviseurs étant ainsi trouvés, la moitié de leur somme sera le diviseur de la quantité proposée, si elle en a un.

Si pour trouver dans un de ces trois diviseurs de deux lettres, les deux termes qui doivent être la répétition de ceux qui sont dans les deux autres, il falloit en changer les deux signes à la fois; on voit bien que ce changement seroit permis, puisqu'en général, une quantité qui en divise une autre, la divisera encore, si on en change tous les signes.

X X X I I I.

Pour montrer l'application de cette méthode, Application

de la méthode précédente à un exemple.

Soit proposée la quantité $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10abb - 6b^3$.
 Ayant d'abord écrit (Voyez la Table ci-jointe, Case 1) dans une colonne verticale les trois quantités $10ab^2 - 6b^3$; $2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$; $2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x, a, b égaux à zéro; je place dans une seconde colonne verticale vis-à-vis de chacune de ces trois quantités, leurs diviseurs à deux lettres & d'une seule dimension. La première fournit $5a - 3b$ & $10a - 6b$; la seconde seulement $2x - 3b$, & la troisième $2x + 5a$. Cela fait, je vois tout de suite que si des deux diviseurs, $5a - 3b$, $10a - 6b$, on prend le premier $5a - 3b$; il aura avec les deux diviseurs $2x - 3b$, $2x + 5a$, la propriété requise. Car ce premier diviseur $5a - 3b$ contient $5a$ qui est répété dans le diviseur $2x + 5a$, & $-3b$ qui est répété dans $2x - 3b$; de même $2x - 3b$ contient $2x$ qui est répété dans $2x + 5a$, & $-3b$ qui est répété dans $5a - 3b$; enfin, $2x + 5a$ est composé de $2x$ & de $+5a$, qui sont répétés dans les deux autres $5a - 3b$, $2x - 3b$.

J'ajoute donc, suivant la règle précédente, ces trois diviseurs, & j'ai $4x - 6b + 10a$, dont la moitié $2x - 3b + 5a$ est le diviseur cherché. En effet, si on tente la division, on trouve pour quotient $x^2 + ax + 2bb$.

X X X I V.

Autre exemple.

Soit proposé maintenant de trouver les diviseurs d'une dimension, & à trois lettres de la

quantité $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2$
 $- 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3.$

Ayant fait successivement x, a, b égaux à zéro dans cette quantité, j'ai les trois quantités $9a^2b^2 + 15ab^3, 8x^4 - 10bx^3, 8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$ que j'écris (Voyez la Case seconde de la Table ci-jointe) l'une sous l'autre dans une colonne verticale. J'écris dans une autre colonne verticale à côté de chacune de ces quantités, leurs diviseurs d'une dimension, & à deux lettres; ceux de la première sont $3a + 5b$ & $9a + 15b$; ceux de la seconde $4x - 5b, 8x - 10b$; & ceux de la troisième $4x - 3a$ & $2x + a.$

Il n'est pas difficile ensuite de trouver que les trois diviseurs $3a + 5b, 4x - 5b, & 4x - 3a$ ont les propriétés requises, pourvu qu'on prenne le premier $3a + 5b$ en changeant ses signes, c'est-à-dire, en l'écrivant ainsi $-3a - 5b$; je mets donc à part ces trois diviseurs dans la quatrième colonne, je les ajoute, & je prends la moitié de la somme, ce qui me donne $4x - 3a - 5b$ pour le seul diviseur cherché, supposé qu'il y en ait un. Je tente la division, & je trouve pour quotient exact $2x^3 + ax^2 - 3ab^2.$

X X X V.

Dans ces deux exemples nous n'avons point écrit les diviseurs d'une lettre que donnoient chacune des trois quantités de la première colonne, parce que ces diviseurs n'auroient jamais pu être les quantités dans lesquelles le diviseur à trois lettres se change par la supposition de x, a, b égaux à zéro, & que nous avons supposé

qu'on s'étoit assuré par la méthode de l'article XXIX. que la quantité proposée n'avoit pas de diviseurs à deux lettres. Mais si on avoit des quantités qui eussent de ces sortes de diviseurs, & qu'on ne voulût pas se servir de la méthode de l'art. XXIX. on pourroit les trouver en même temps que ceux à trois lettres, par la même méthode que nous venons d'expliquer, pourvû que ces diviseurs n'eussent non plus qu'une dimension.

Troisième exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même temps que ceux à trois.

Soit, par exemple, la quantité $16x^3 + 16bx^2 - 48axx + 35aax - 16abx - 6a^3 + 3a^2b$. Ayant écrit dans une première colonne (Voyez la Case 3 de la Table ci-jointe) les trois quantités $-6a^3 + 3a^2b$, $16x^3 + 16bx^2$, $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x , a , b égaux à zéro; j'écris dans la seconde colonne, & à la première bande, a , $3a$, $-2a + b$, $-6a + 3b$ diviseurs d'une dimension & à une ou deux lettres de la quantité $-6a^3 + 3a^2b$. De même, dans la seconde bande, j'écris les diviseurs x , $2x$, $4x$, $8x$, $16x$; $x + b$, $2x + 2b$, $4x + 4b$, $8x + 8b$, $16x + 16b$, de la seconde quantité $16x^3 + 16bx^2$: & dans la troisième bande, $a - 4x$, $3a - 4x$, $x - 2a$ diviseurs de la troisième quantité $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$.

Cela fait, à cause du grand nombre de ces diviseurs, il faut plus d'attention que dans les exemples précédens, pour n'en laisser aucun qui puisse avoir les conditions requises. Quant

à l'ordre qu'on doit suivre, il est à peu près le même que celui qu'on a suivi dans les diviseurs numériques. Il faut donc comparer le premier de la première bande avec tous ceux des autres bandes, & faire ensuite la même opération pour chacun des autres diviseurs de la première bande. Je vois d'abord que si a fait partie d'un diviseur de la quantité, ce ne peut être que d'un diviseur qui ne contienne que a & x , parce que, s'il y avoit un terme qui contint b , ce diviseur ne se seroit pas réduit à a par la supposition de $x = 0$. Ainsi je n'ai à choisir, dans ce cas, que parmi les cinq premiers diviseurs x , $2x$, $4x$, $8x$, $16x$. Or, comme de tous ces diviseur, il n'y a que $4x$ qui soit répété dans la troisième, (pourvu que ce diviseur $4x$ soit affecté du signe —), & qu'en même temps de tous les diviseurs de la troisième bande, il n'y a que le premier $a - 4x$ qui renferme le même terme a de la première bande; je conclus que si a fait partie d'un diviseur, il faut que ce diviseur soit $a - 4x$ je l'écris donc à part. Je passe alors à $3a$, & comme je le trouve répété dans le diviseur $3a - 4x$ de la troisième bande, & que l'autre terme $4x$ du même diviseur se trouve être un des diviseurs de la seconde bande, en changeant le signe de ce diviseur; je conclus que $3a - 4x$ peut être encore un diviseur de la quantité proposée, & je le mets à part afin de l'essayer.

Quant à $-2a + b$, on voit d'abord qu'il ne peut pas seul être un diviseur de la quantité proposée, parce qu'il faudroit pour cela que parmi

les diviseurs de $16x^3 + 16bx^2$, on eût le terme b que deviendrait $-2a + b$ par la supposition de $a = 0$. Reste donc à sçavoir s'il ne feroit pas partie d'un diviseur où x entreroit. Pour m'en assurer, je commence par remarquer que de tous les diviseurs de la seconde bande, il n'y a que $x + b$ avec lequel on puisse le comparer, parce que c'est le seul diviseur qui ait le terme $+b$ de commun avec lui. Je vois aussi qu'il n'y a que $x - 2a$ de la troisième bande avec lequel je puisse comparer le même diviseur $-2a + b$, parce qu'il est le seul qui contienne le terme $-2a$. Je remarque enfin que de même que les deux termes du diviseur $-2a + b$ sont répétés dans les deux autres diviseurs $x + b$, $x - 2a$, le diviseur $x + b$ a aussi ses deux termes répétés dans les deux autres $-2a + b$, $x - 2a$, & réciproquement que les deux termes du diviseur $x - 2a$ sont répétés dans les deux autres $x + b$, $-2a + b$. De-là, je conclus que les trois diviseurs $-2a + b$, $x + b$, $x - 2a$ ont les conditions nécessaires pour former un diviseur. Je les ajoute donc, & je mets à part la moitié $x - 2a + b$ de leur somme pour un diviseur à tenter. Mais avant d'en faire le calcul, j'examine ce que peut me donner le diviseur $-6a + 3b$, je vois tout de suite qu'il n'y a aucun de ses deux termes qui soit répété parmi les diviseurs des autres bandes, & qu'ainsi il faut le rejeter.

Par cet examen, on trouve donc les trois diviseurs $a - 4x$, $3a - 4x$, $x - 2a + b$ à essayer

Case 1.

$$\begin{array}{l}
 2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10ab^2 - 6b^3 \\
 10ab^2 - 6b^3 \\
 2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3 \\
 2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 5a - 3b, 10a - 6b \\
 2x - 3b \\
 2x + 5a
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 5a - 3b \\
 2x - 3b \\
 2x + 5a \\
 \hline
 5a + 2x - 3b
 \end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{l}
 8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3 \\
 9a^2b^2 + 15ab^3 \\
 8x^4 - 10bx^3 \\
 8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3a + 5b, 9a + 15b \\
 4x - 5b, 8x - 10b \\
 4x - 3a, 2x + a
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 -3a - 5b \\
 4x - 5b \\
 4x - 5b \\
 \hline
 4x - 3a - 5b
 \end{array}$$

Case 3.

$$\begin{array}{l}
 26x^3 + 16bx^2 - 48ax^2 + 35a^2x - 16abx - 6a^3 + 3a^2b \\
 -6a^3 + a^2b \\
 16a^3 + 16bxx \\
 16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 a, 3a, -2a + b, -6a + 3b \\
 x, 2x, 4x, 8x, 16x, x + b, 2x + 2b, 4x + 4b, 8x + 8b, 16x + 16b \\
 a - 4x, 3a - 4x, x - 2a
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 a \\
 3a \\
 -4x \\
 -4x \\
 3a - 4x \\
 3a - 4x \\
 \hline
 -2a + b \\
 x + b \\
 x - 2a \\
 x - 2a + b
 \end{array}$$

SCD Lyon 1

essayer, je tente la division par le dernier, elle réussit, & me donne pour quotient $3a - 16ax + 16xx$, que je divise ensuite par $3a - 4x$. La division réussit encore, & me donne pour quotient le premier diviseur $a - 4x$. Ainsi la quantité proposée étoit le produit de ces trois diviseurs.

XXXVI.

Si la quantité proposée n'a point de diviseur d'une dimension, & qu'on veuille examiner elle n'en a point de deux, on y parviendra facilement à l'aide de quelques observations analogues à celles sur lesquelles la méthode précédente est fondée. Soit pris $mxx + nax + pbx + qa^2 + rab + sbb$ pour représenter le diviseur cherché à deux dimensions; faisant successivement $x = 0, a = 0, b = 0$, dans ce diviseur, j'ai les trois quantités

Méthode pour trouver les diviseurs de deux dimensions & à trois lettres.

$$\begin{aligned} q a^2 + r a b + s b b \\ m x^2 + p b x + s b b \\ m x^2 + n a x + q a^2 \end{aligned}$$

qui sont toutes trois des diviseurs de celle que devient la proposée, lorsqu'on y fait successivement les mêmes suppositions de x, a, b égaux à zéro. De plus, chacun de ces diviseurs est toujours tel, que les termes affectés de lettres quarrées sont toujours répétés dans les deux autres diviseurs, tandis que les termes, qui contiennent un produit de deux lettres, sont toujours les seuls de leur espece. Voilà donc des conditions pour examiner les trois classes de diviseurs de deux lettres & de deux dimensions

qu'on tirera d'une quantité proposée ; ainsi , quand on en aura trouvé trois qui rempliront ces conditions , on n'aura qu'à les ajouter , prendre ensuite la moitié de tous les termes affectés de quarrés , & laisser en entier ceux qui ne seront que des rectangles.

XXXVII.

Applica-
tion de cer-
te méthode
à un exem-
ple.

Pour montrer l'application de cette méthode , soit la quantité $x^5 - 4 a x^4 - 5 a^2 x^3 + 4 b^2 x^3 - a^2 x^2 - 14 a b^2 x^2 + 3 b^4 x - a^4 x - 3 a^3 b^2$, laquelle n'a aucun diviseur d'une seule dimension , & dont on cherche quelque diviseur qui en ait deux.

On reprendra d'abord (Voyez la premiere Case de la Table ci-jointe) les trois quantités $- 3 a^3 b^2$, $x^5 + 4 b^2 x^3 + 3 b^4 x$; $x^5 - 4 a x^4 - 5 a^2 x^3 - a^3 x^2 - a^4 x$ qu'on n'aura pas manqué de tirer de cette quantité , en faisant successivement x , a , b égaux à zéro , lorsqu'on aura voulu s'assurer qu'elle n'avoit point de diviseurs d'une dimension. On mettra ensuite à côté de ces quantités leurs diviseurs de deux dimensions ; la premiere fournissant a^2 , $a b$, b^2 , $3 a^2$, $3 a b$, $3 b b$; la seconde $x^2 + 3 b^2$, $x^2 + b^2$; la troisieme seulement $x^2 + a x$. Dans cette méthode on ne scauroit rejeter les diviseurs qui n'ont qu'un terme , quand même on se feroit assuré que la quantité proposée n'a aucun diviseur à deux lettres , parce qu'un diviseur à trois termes & de deux dimensions , peut se réduire à un seul terme par la supposition de l'une des lettres égale à zéro.

Il s'agit présentement d'examiner tous les diviseurs de la première bande ; je vois d'abord que le premier a^2 est à rejeter , parce que ce carré ne se trouve point répété dans les autres bandes. Je passe ensuite à ab , & de ce que ce diviseur ne contient aucun terme affecté de aa & de bb , je conclus que le diviseur , dont il pourroit faire partie , ne peut avoir , outre ce terme , que des xx , des ax & des bx ; & comme cette raison exclut la comparaison qu'on pourroit faire de ab avec les diviseurs $x^2 + 3b^2$, $x^2 + b^2$, il s'ensuit que si ab doit faire partie d'un diviseur de la proposée , ce diviseur ne peut être que $xx + ax + ba$: mais je vois en même temps que $xx + ax + ba$ ne sauroit être un diviseur de la proposée , puisqu'il deviendroit seulement xx par la supposition de $a = 0$, & que xx n'est point un des diviseurs de la seconde bande. Donc le diviseur ab est encore à rejeter.

Quant au diviseur bb , je le trouve répété dans le diviseur $x^2 + b^2$ de la seconde bande , & trouvant que le même diviseur $x^2 + b^2$, a x^2 de commun avec le diviseur de la troisième bande ; je conclus que $x^2 + b^2 + ax$ a les conditions requises pour tenter la division. Mais avant de l'entreprendre , je passe aux autres diviseurs de la première bande , & je vois d'abord que $3aa$, & $3ab$ sont à rejeter par la même raison que a^2 & ab ; je vois ensuite que $3bb$ étant répété dans le diviseur $x^2 + 3b^2$ & x^2 dans $xx + ax$, il s'ensuit que $xx + 3bb + ax$ a aussi les conditions requises pour tenter

N ij

la division. J'essaye alors ces deux divisions, & je trouve que la seconde seule réussit. Le quotient qu'elle donne, est $x^3 - 5ax^2 + b^2x - a^3$.

Au lieu de parcourir tous les diviseurs de la premiere bande, on auroit pû examiner le seul que la derniere bande contient, & trouver bien plutô que $x^2 + ax + b^2$ & $x^2 + ax + 3b^2$ étoient les seuls diviseurs à tenter. Car, remarquant alors que le diviseur $x^2 + ax$ contient x^2 qui est répété dans $x^2 + 3b^2$ & $x^2 + b^2$, & que ces deux derniers contiennent l'un $3b^2$ & l'autre b^2 qui sont chacun dans les diviseurs de la premiere bande, il étoit facile d'en conclure que $x^2 + ax + b^2$ & $x^2 + ax + 3b^2$ ont les conditions requises, & qu'ils sont les seuls; puisque, s'il y en avoit d'autres, ou bien ils auroient donné d'autres quantités que $xx + ax$ par la supposition de $b = 0$, ou bien d'autres quantités que $x^2 + 3b^2$ & $x^2 + b^2$ par la supposition de $a = 0$.

XX XVIII.

Autre exemple. Qu'on ait présentement à chercher les diviseurs de la quantité $2x^5 + 3ax^4 + b^2x^3 - a^2x^3 + 4ab^2x^2 + 6a^2b^2x + 2ab^4 - 2a^3b^2$, soit d'une dimension, soit de deux, soit à deux lettres, soit à trois.

$2ab^4 - 2a^3b^2$, $2x^5 + b^2x^3$, & $2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$ étant les quantités que donne, dans la proposée, la supposition de x , a , b , égaux à zéro, il faut d'abord ranger vis-à-vis de chacune de ces quantités tous les diviseurs qu'elles peuvent avoir, tant d'une dimension, que de deux. Comme la premiere de ces

trois quantités en a un assez grand nombre, on doit, dans la crainte d'en omettre quelqu'un, les chercher tous avec le même ordre que nous avons suivi pour les diviseurs numériques.

Ayant écrit (Voyez la seconde Case de la Table ci-jointe) cette première quantité $2 a b^4$ — $2 a^3 b b$ à part avec une barre à sa gauche & à gauche de cette barre l'unité, comme premier diviseur de la quantité, je pose 2 au-dessous de 1, parce que c'est après 1 le plus sensible que puisse avoir cette quantité, & j'écris à droite de la même barre $a b^4$ — $a^3 b b$. Je divise ensuite cette quantité par a , & j'écris a à gauche de la barre, en mettant en même temps à droite le quotient b^4 — $a^2 b^2$; je multiplie alors a par 2, ce qui me donne 2 a que j'écris à gauche de a comme un nouveau diviseur de la quantité; puis je divise b^4 — $a^2 b^2$, par b , & j'écris le diviseur b à gauche, & le quotient b^3 — $a^2 b$ à droite. Enfin je multiplie b par 2, par a , par 2 a ; & je mets à gauche de b , les produits 2 b , $a b$, 2 $a b$, comme de nouveaux diviseurs de la quantité.

La quantité étant réduite à b^3 — $a^2 b$, je la divise encore par b que j'écris toujours à gauche, ainsi que le quotient $b b$ — $a a$ à droite; je ne multiplie point ensuite b par 2, ni par a , ni par 2 a , parce que cela donneroit des diviseurs que j'ai déjà eu; mais je le multiplie par b & par 2 b , ce qui me donne les nouveaux diviseurs de deux dimensions $b b$ & 2 $b b$; si j'en voulois admettre de trois dimensions, ainsi que cela peut être nécessaire dans d'autres occa-

N iij

sions, je multiplierois, outre cela, b par $a b$ & $2 a b$.

Après avoir réduit la quantité à $bb - aa$, je vois qu'elle est divisible par $b - a$, & que le quotient est $b + a$, j'écris donc l'un à gauche & l'autre à droite, & je multiplie $b - a$ par 2, par a , par b , par $2 a$, & par $2 b$, ce qui me donne pour nouveaux diviseurs d'une & de deux dimensions, $2 b - 2 a$, $ba - aa$, $bb - ab$, $2 ba - 2 aa$, $2 bb - 2 ab$. Si j'en avois voulu de trois & de quatre dimensions, j'aurois, outre cela, multiplié $b - a$ par ab , $2 ab$, abb , $2 abb$. La quantité restante $b + a$ n'ayant plus ensuite d'autre diviseur qu'elle-même, je l'écris à gauche, & je la multiplie par 2, par a , par b , par $2 b$, $2 a$, $b - a$, $2 b - 2 a$; ce qui me donne les nouveaux diviseurs d'une & de deux dimensions, $2 b + 2 a$, $ba + aa$, $2 ba + 2 aa$, $bb + ab$, $2 bb + 2 ab$, $bb - aa$, $2 bb - 2 aa$. Si j'en avois voulu admettre de trois, quatre & cinq dimensions, c'est-à-dire, tous les diviseurs que la quantité proposée pouvoit avoir, j'aurois multiplié, outre cela, $b + a$ par ab , $2 ab$, bb , $2 bb$, abb , $2 abb$, $ba - aa$, $2 ba - 2 aa$, $bb - ab$, $2 bb - 2 ab$, $abb - aab$, $2 abb - 2 a^2 b$, $b^3 - ab^2$, $2 b^3 - 2 a b^2$, $a b^3 - a^2 b^2$, $2 a b^3 - 2 a^2 b^2$.

Cela fait, j'écris (Voyez la troisieme Case de la Table ci-jointe) tous les diviseurs d'une & de deux dimensions a , $2 a$, b , $2 b$, $b - a$, $2 b - 2 a$, $b + a$, $2 b + 2 a$, ab , $2 ab$,

$ab - aa, 2ba - 2aa, bb - ab, 2bb - 2ab, ba + aa, 2ba + 2aa, bb + ba, 2bb + 2ab$ à côté de la quantité $2ab^4$, $- 2a^3b^2$ qui les a donnés. J'écris ensuite à côté de la quantité $2x^5 + b^2x^3$, les diviseurs d'une & de deux dimensions $x, 2x, xx + bb$, & à côté de la quantité $2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$ ses diviseurs d'une & de deux dimensions $x, x^2, 2xx + 3ax - aa$.

Parcourant après tous ces diviseurs pour sçavoir ceux qui peuvent être admis, je remarque bientôt qu'il n'y en a aucun d'une seule dimension. Car ne trouvant que x dans la seconde & la troisieme bande qui soit d'une dimension, je conclus qu'il doit être le seul diviseur d'une dimension, s'il y en peut avoir; puisque si le diviseur d'une dimension renfermoit, ou un terme affecté de a , ou un affecté de b , celui qui auroit été affecté de a , seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $b = 0$, & que celui qui auroit été affecté de b seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $a = 0$. Mais x n'est point un diviseur de la quantité proposée; donc il n'y en a point d'une dimension. Je viens ensuite aux diviseurs de deux dimensions, & je commence par x^2 que je prends dans la troisieme bande; trouvant qu'il est aussi dans la seconde bande, je conclus que, s'il fait partie d'un diviseur, il ne peut lui manquer qu'un terme affecté du rectangle ab . En effet, s'il y en avoit eu qui fussent affectés de aa , de bb , de ax , ou de bx , ceux qui auroient été affectés de bb , ou de bx , n'auroient pas disparu

N iv

SCD Lyon

Mathématiques

par la supposition de $a = 0$, & ceux qui auroient été affectés de aa , ou de ax , ne se feroient pas évanouis par la supposition de $b = 0$. Mais je trouve dans la premiere bande ab & $2ab$; donc $xx + ab$, $xx + 2ab$, $xx - ab$, $xx - 2ab$, sont des diviseurs à tenter.

Je passe ensuite au diviseur $2x^2 + 3ax - aa$, & je trouve le terme $2x^2$ répété dans le diviseur supérieur $2xx + bb$, je trouve en même temps le terme $-aa$ répété dans plusieurs diviseurs qui sont au-dessus : mais de tous les diviseurs où il est répété, il n'y a que $bb - aa$ qui ait en même temps le terme bb que contient le diviseur $2xx + bb$. Ainsi ce n'est qu'avec $2xx + bb$ & $bb - aa$ que $2x^2 + 3ax - aa$ peut concourir à former un diviseur qui ait les conditions requises, & ce diviseur qui est $2x^2 + 3ax - aa + bb$, & par conséquent à tenter. Je vois qu'il n'y en a plus d'autre à chercher, parce que s'il pouvoit y en avoir un qui n'eût pas été découvert dans l'examen qu'on vient de faire des diviseurs de la troisième bande, il faudroit que ce fût un seul terme affecté de ab : or, on voit tout de suite que la quantité n'a point de diviseur de cette nature.

Je tente alors la division par $2xx + 3ax - aa + bb$, elle réussit, & me donne pour quotient $x^3 + 2abb$ qui m'apprend qu'aucune des quantités $xx + ab$, $xx - ab$, $xx + 2ab$, $xx - 2ab$, ne peut diviser la proposée.

X X X I X.

Si la quantité proposée avoit plus de cinq dimensions, & qu'après s'être assuré qu'elle n'a

Calc. 1		Calc. 2	
1	2	1	2
3	4	3	4
5	6	5	6
7	8	7	8
9	10	9	10
11	12	11	12
13	14	13	14
15	16	15	16
17	18	17	18
19	20	19	20
21	22	21	22
23	24	23	24
25	26	25	26
27	28	27	28
29	30	29	30
31	32	31	32
33	34	33	34
35	36	35	36
37	38	37	38
39	40	39	40
41	42	41	42
43	44	43	44
45	46	45	46
47	48	47	48
49	50	49	50
51	52	51	52
53	54	53	54
55	56	55	56
57	58	57	58
59	60	59	60
61	62	61	62
63	64	63	64
65	66	65	66
67	68	67	68
69	70	69	70
71	72	71	72
73	74	73	74
75	76	75	76
77	78	77	78
79	80	79	80
81	82	81	82
83	84	83	84
85	86	85	86
87	88	87	88
89	90	89	90
91	92	91	92
93	94	93	94
95	96	95	96
97	98	97	98
99	100	99	100

aucun diviseur, ni d'une, ni de deux dimensions, on voulût chercher ceux du troisieme, quatrieme, &c. degré qu'elle pourroit avoir, on suivroit pour cela une méthode analogue à celles qu'on vient d'expliquer, & qu'il est assez facile d'imaginer.

Si la quantité dont on cherche les diviseurs, renfermoit plus de trois lettres, la méthode qu'il faudroit suivre pour les trouver, seroit, à très-peu de chose près, la même que lorsqu'il n'y en a que trois; ainsi nous laisserons les Commençans s'y exercer.

X L.

Lorsqu'on aura une quantité dont tous les termes ne seront pas homogenes, c'est-à-dire, élevés à la même dimension, on n'aura qu'à commencer par mettre tous ses termes à la même dimension à l'aide d'une nouvelle lettre, & chercher les diviseurs de cette nouvelle quantité par les regles précédentes. Ces diviseurs trouvés, on en chassera la nouvelle lettre introduite en la supposant égale à l'unité, & l'on aura par ce moyen les diviseurs cherchés. Que j'aie, par exemple, la quantité $x^6 + b x^5 - b x^4 + x^2 + b x - b$; je multiplie le terme $b x^4$ par a , afin de le rendre de six dimensions. Par la même raison, je multiplie x^2 par a^2 , $b x$ par a^4 , & b par a^5 ; ce qui me donne la quantité $x^6 + b x^5 - a b x^4 + a^2 x x + a^4 b x - a^5 b$, laquelle, au moyen des méthodes précédentes, se trouve être le produit de $x x - a b + b x$ par $x^4 + a^4$. Je suppose $a = 1$ dans ces deux produisans, ce qui me donne $x x - b$

Ce qu'il faut faire pour trouver des diviseurs des quantités qui ne sont pas homogenes.

$+ b x$, & $x^4 + 1$ pour les deux produisans de la quantité proposée $x^6 + b x^5 - b x^4 + x^2 + b x - b$.

X L I.

Il y a des cas où les diviseurs se trouvent plus facilement, qu'en suivant les méthodes précédentes, lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul. Voici un de ces cas sur lequel il est bon de prévenir les Commencans.

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

Lorsque quelqu'une des lettres de la quantité proposée ne montera qu'à une dimension, il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir qu'un des diviseurs de cette quantité qui contienne cette lettre. Donc il y aura au moins un diviseur qui ne la contiendra pas, & alors, suivant la méthode de l'article XXIX, pour trouver ce diviseur, il faudra chercher le plus grand commun diviseur des termes où cette lettre se trouve, & des autres termes dans lesquels cette lettre ne se trouve pas.

Soit, par exemple, la quantité $x^4 - 3 a x^3 - 8 a^2 x^2 + 18 a^3 x + c^2 x^3 - a c x x - 8 a^2 c x + b a^2 c - 8 a^4$; je cherche le plus grand commun diviseur des deux parties $c x^3 - a c x x - 8 a a c x + b a^2 c$ & $x^4 - 3 a x^3 - 8 a^2 x^2 + 18 a^3 x - 8 a^4$ de cette quantité, l'une contenant la lettre c , l'autre n'en contenant point, je trouve pour ce plus grand diviseur commun $x x + 2 a x - 2 a a$; c'est en effet le diviseur cherché de la quantité proposée.



ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

QUATRIÈME PARTIE.

Résolution des équations des degrés quelconques lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des équations du second degré : avec différentes opérations relatives à ces équations, comme l'élevation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, &c.

A PRÈS avoir vû comment on tiroit d'une équation qui passoit le second degré, celles du premier & du second degré qu'elle pouvoit renfermer ; il faut voir ce qu'on a fait pour résoudre les équations qui échappent à cette méthode,

I.

Des équations du troisième degré à deux termes. Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les équations qui ne contiennent que deux termes; supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisième degré, comme $a x^3 = b$.

Pour résoudre ces équations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord x^3 de son coefficient, & de prendre la racine cube des deux membres. Le caractère qu'on employe pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée; mais l'on met 3 au-dessus pour le distinguer.

Ainsi, pour exprimer la valeur de x qu'on tire de l'équation $a x^3 = b$, ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on

écrit $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si, par exemple, $b = 1000$

& $a = 2$ on a $x = \sqrt[3]{500}$.

I I.

Les radicaux cubes dans les racines quarrées, la liberté de mettre + ou - devant le signe radical; mais qu'au contraire la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même: à cause que le cube d'une quantité positive est positif, & que celui d'une quantité négative est négatif.

III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réflexion qui paroît contredire celles qu'on a faites précédemment sur les nombres des racines des équations. Car un cube n'ayant qu'une racine, & cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une équation telle que $ax^3 = b$ donne plus d'une valeur de x , cependant, suivant ce qu'on a vû ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une équation du 3^{eme} degré, de même que de deux dans une du second.

Que conclure de cette réflexion ? Abandonnera-t-on ce principe si satisfaisant par sa généralité, & qui suit naturellement de la formation des équations, exposée dans la III^{eme} Partie, article II ? Voici le dénouement de cette difficulté tiré de la formation même.

Qu'on mette l'équation $ax^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi la racine

$x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$,

qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une équation du second degré qui contiendra les deux autres racines.

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait

$\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc, au lieu des équations

précédentes, $x^3 - c^3 = 0$, & $x - c = 0$;

divisant la premiere par la seconde, il vient au quotient $x x + c x + c c = 0$, dont les deux racines sont exprimées par $x = -\frac{1}{2} c \pm \sqrt{-\frac{3}{4} c c}$, & deviendront la seconde & la troisieme valeur cherchée de x dans l'équation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussi-tôt qu'on aura remis à

la place de c sa valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

I V.

La substitution faite, les deux valeurs de x se trouveront exprimées par $a - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm$

$\sqrt{-\frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{b b}{a a}}}$. Car on voit que le quarré

de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{b b}{a a}}$; & qu'en géné-

ral la multiplication des racines cubiques, comme celle des racines quarrées, se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, & en mettant ensuite ce signe devant leur produit.

V.

Racines de l'équation du troisieme degré à deux termes.

Les trois racines de l'équation proposée $a x^3 = b$, font donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{b b}{a a}}}$, $x = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

$-\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{b}{a}}}$; la première réelle, & les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles, qu'on peut dire qu'elles résolvent l'équation proposée.

V I.

Supposons maintenant qu'on ait une équation à deux termes d'un degré quelconque, on la résoudra de la même manière, en employant un radical dont l'exposant soit celui que l'inconnue a dans cette équation. Soit, par exemple, l'équation $ax^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Si m est un nombre impair; cette quantité ne pourra être que négative, lorsque $\frac{b}{a}$ sera négatif, & elle ne pourra être que positive, lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Si m est un nombre pair, la racine aura, comme dans le second degré, le signe \pm , & elle ne sera réelle que lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ sera négatif (m toujours pair) les deux racines exprimées par $\pm\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ seront alors toutes les deux imaginaires. Ainsi toutes les équations exprimées généralement par $x^m = \frac{b}{a}$ Ces équations ne sçauraient jamais

avoir plus ne pourront, au plus, avoir que deux racines de deux racines réelles, les autres racines étant nécessairement imaginaires.

Qu'on ait, par exemple, $x^4 = 256$, les deux racines réelles sont $+4$ & -4 , les deux imaginaires sont $+\sqrt{-16}$ & $-\sqrt{-16}$. Dans l'équation $x^5 = 243$ la seule racine réelle est $+3$, & les autres, celles qu'on doit trouver en résolvant l'équation $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$ qui vient par la division de l'équation $x^5 - 243 = 0$ par l'équation $x - 3 = 0$. Sans résoudre cette équation, on doit être assuré que ses racines sont toutes imaginaires, puisque s'il y en avoit quelqu'une de réelle, elle résoudroit aussi $x^5 = 243$, & par conséquent il y auroit d'autre nombre réel que 3 qui, élevé à la cinquième puissance, donneroit 243 .

V I I.

Il ne manque présentement à ce que nous venons de dire sur les équations à deux termes, que d'abrèger ou simplifier les expressions radicales qu'elles donnent, lorsqu'il y aura une partie de la quantité dont on pourra prendre exactement la racine, ou même d'éviter entièrement le signe radical, lorsque la quantité entière sera une puissance complète.

Réflexions sur l'élevation des puissances. Pour reconnoître ces cas, il faut commencer par faire quelques réflexions sur l'inverse de l'opération qu'on se propose alors, c'est-à-dire, sur celle par laquelle des quantités proposées s'élèvent à des puissances quelconques.

Qu'on

Qu'on ait, par exemple, une quantité telle que $a b c d$ à élever à la puissance m , on voit bien qu'il viendra par cette opération $a^m b^m c^m d^m$.

Qu'il s'agisse d'élever à une puissance quelconque, une quantité comme $\frac{a b c}{d e}$ qui a

un diviseur; il est clair qu'il faudra élever le diviseur, ainsi que le numérateur à cette puissance quelconque, & que s'il y avoit des coefficients, il faudroit qu'ils fussent aussi élevés à la même puissance. De plus, si les facteurs ou produisans de la quantité donnée se trouvoient déjà élevés à quelques puissances, ils deviendroient alors élevés à une nouvelle puissance, dont l'exposant seroit le produit de l'exposant qu'ils avoient d'abord par celui de la puissance à laquelle on les voudroit élever. Ainsi

$\frac{2 a^2 b^3}{3 c^4}$ élevé à la puissance 3, donnera

$\frac{8 a^6 b^9}{27 c^{12}}$; $\frac{a^m b^r}{c^n}$ à la puissance q , de-

viendra $\frac{a^{mq} b^{rq}}{c^{nq}}$. Tout cela est fort simple,

& suit entièrement de ce principe, qu'une quantité élevée à une puissance quelconque, n'est autre chose que ce qui résulte de la multiplication de cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'exposant de la puissance contient d'unités.

V I I I.

On voit bien présentement que l'inverse de Application



des réflexions précédentes à l'extraction des racines.

cette opération, c'est-à-dire, l'extraction des racines ne demandera autre chose que de diviser les exposans des parties ou facteurs de cette quantité par l'exposant de la racine; soit que ces parties ou facteurs soient dans le numérateur, soit qu'ils soient aussi dans le dénominateur. Qu'il soit question, par exemple, de prendre la racine cube de $\frac{a^3 b^6}{c^9}$, on divisera par 3 les exposans 3, 6, 9, & on prendra leurs quotiens 1, 2, 3, pour les nouveaux exposans des mêmes lettres. Par ce moyen $\frac{a b^2}{c^3}$ sera la racine cube cherchée.

Si la quantité avoit eu un coefficient, on en auroit pris la racine cube; $\frac{8 a^3 b^6}{c^9}$, par exemple, auroit donné $\frac{2 a b^2}{c^3}$ pour sa racine cube.

De la même manière, si on cherche la racine quarrée quarrée, ou quatrieme de $\frac{16 a^4 b^8}{d^4 c^{12}}$, on trouvera $\frac{2 a b^2}{d c^3}$.

I X.

De l'extraction des racines, lorsque les puissances sont incomplètes.

Lorsqu'il n'y aura qu'une partie de la quantité qui se pourra extraire, on l'extraira, & on laissera le reste sous le signe radical affecté de l'exposant qui lui convient. Soit proposé, par exemple, de prendre la racine cinquieme de

$\frac{32 a^{10} b^8}{486 c^7}$ qui est composé du produit de $\frac{32 a^{10} b^5}{243 c^5}$ par $\frac{b^3}{2 c^2}$, dont la première est exactement la cinquième puissance de $\frac{2 a^2 b}{3 c}$, & dont la seconde n'a pas de cinquième racine ; il faudra écrire alors $\frac{2 a^2 b}{3 c} \sqrt[5]{\frac{b^3}{2 c^2}}$ pour la racine cherchée.

De même la racine cube de $\frac{8 a^3 b + 16 a^3 c}{54 d}$ sera $\frac{2}{3} a \sqrt[3]{\frac{b + 2 c}{2 d}}$, parce que la quantité $\frac{8 a^3 b + 16 a^3 c}{54 d}$ est le produit de $\frac{8 a^3}{27}$ par $\frac{b + 2 c}{2 d}$, que la première de ces deux quantités est un cube parfait, celui de $\frac{2}{3} a$, & que la seconde n'a point de racine cube. De

même
$$\sqrt[5]{\frac{32 a^9 + 128 a^6 b^3 - 160 a^5 b^4}{3 b^6}}$$

$$= \frac{2 a}{b} \sqrt[5]{\frac{a^4 + 4 a b^3 - 5 b^4}{3 b}}$$

X.

Lorsque la quantité, dont il faudra extraire la racine, sera composée, ainsi que les précédentes, de plusieurs termes, & qu'après

O ij

avoir séparé de tous ses termes les quantités communes qui sont des puissances complètes, on soupçonnera que le reste pourroit être la puissance complète de quelque quantité commensurable composée de plusieurs termes, l'opération qu'il faudra faire pour s'en assurer, sera plus difficile. Afin de trouver la méthode qu'il faut suivre dans cette opération, nous commencerons par faire quelques réflexions sur le Problème inverse, c'est-à-dire, sur l'élévation des quantités complexes à des exposans donnés, & nous en tirerons ensuite les principes qu'il faut suivre pour extraire les racines de ces sortes de quantités.

Cherchons d'abord comment la méthode d'élever au cube peut donner celle d'extraire la racine cube; on verra ensuite que les autres puissances n'augmentent la difficulté que par la longueur des calculs.

X I.

Soit prise la quantité complexe la plus simple $u + z$, & soit élevée cette quantité au cube. L'on aura premièrement, pour son carré $uu + 2uz + zz$, qui, multiplié par la simple puissance, donne pour le cube demandé, u^3

En quoi consiste le cube d'un binome. $+ 3uu z + 3u z z + z^3$. On voit donc qu'une quantité quelconque composée de deux parties, lorsqu'on l'éleve au cube, donne 1°. le cube de la première partie; 2°. le triple du carré de cette première partie multiplié par la seconde partie; 3°. le triple de la première partie multiplié par le carré de la seconde; 4°. le cube de la seconde.

XII.

Qu'on ait donc une quantité dont on veuille extraire la racine cube, on commencera par y chercher un terme qui soit un cube, & ce cube représentant u^3 , l'on écrira à côté sa racine qui représentera u . On triplera ensuite le carré de cette racine, & on le fera servir de diviseur à ce qui reste de la quantité donnée, lorsqu'elle aura été diminuée du cube de la racine premièrement posée. Le quotient de cette division sera la seconde partie de la racine, & représentera z ; l'ayant écrit à côté du premier terme, on multipliera ensuite ce dernier terme par la quantité qui représente $3uu + 3uz + zz$, c'est-à-dire, par le triple du carré de la première partie, plus le triple du produit de la première quantité par la seconde, plus le carré de la seconde. La multiplication faite, on retranchera le produit qu'elle donnera de la quantité proposée, dont le premier cube, qui représente u^3 , a déjà été ôté. S'il ne reste rien, on sera sûr que la quantité étoit exactement le cube du binôme répondant à $u + z$. S'il reste encore plusieurs termes, & qu'on veuille sçavoir si elle ne seroit point le cube d'un trinôme; pour trouver le troisième terme, on fera des deux termes déjà écrits, le même usage qu'on a fait du premier terme, lorsqu'on a cherché le second.

Méthode
qu'il faut
suivre pour
prendre la
racine cube
des quanti-
tés comple-
xes.

XIII.

Quelques exemples éclairciront cette méthode. Soit la quantité $8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$; je commence par

Premier
exemple.

O iij

prendre la racine cube du premier terme $8 y^6$, & j'écris cette racine (Voyez la Table ci-jointe, Case 1) $2 y^2$ à côté de la quantité proposée; je recris ensuite le cube de $2 y^2$ sous la quantité proposée, en observant d'en changer le signe, c'est-à-dire, en lui donnant le signe —. La soustraction ou réduction faite, j'écris le reste $60 y^4 b^2 + 150 b^4 y^2 + 125 b^6$, & je mets au-dessus de $2 y^2$ le triple de son carré, c'est-à-dire, $12 y^4$. Je divise alors le premier terme $60 y^4 b^2$, par ce triple $12 y^4$, & j'écris le quotient $5 b^2$, qui vient de cette division, à côté de $2 y^2$. J'ajoute ensuite à $12 y^4$ le produit $30 b^2 y^2$ du triple de $2 y^2$ par la quantité $5 b^2$, que je viens d'écrire, & j'ajoute à ces deux premiers termes $25 b^4$ carré de $5 b^2$.

Cela fait, je multiplie $5 b^2$ par ces trois termes, & j'écris leurs produits avec des signes différens, sous la quantité $60 y^4 b^2 + 150 b^4 y^2 + 125 b^6$: voyant qu'après la réduction il ne reste rien, je conclus que la quantité proposée étoit un cube parfait, & que sa racine étoit $2 y^2 + 5 b^2$.

X I V.

Que j'aie à présent la quantité $x^6 + 6 b x^5 + 21 b^2 x^4 + 44 b^3 x^3 + 63 b^4 x^2 + 54 b^5 x + 27 b^6$ qu'on voit bien au premier coup d'œil devoir donner plus de deux termes pour sa racine cube. Opérant d'abord comme dans l'exemple précédent, je trouve avec facilité (Voyez la Table ci-jointe, Case 2) les deux premiers termes $x^2 + 2 b x$. Mais comme, au lieu de

Second
excmple.

ne rien rester, ainsi qu'il est arrivé dans cet exemple, il vient pour reste $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$, je divise le premier terme $9b^2x^4$ de ce qui reste par $3x^4$ triple du carré de x^2 , parce que ce terme $3x^4$ est le premier de ceux que l'on a en triplant le carré de la quantité $xx + 2bx$, laquelle représente actuellement la première partie (nommée u , art. XI.) de la racine cube cherchée. Ayant fait cette division de $9b^2x^4$ par $3x^4$, j'écris le quotient $3b^2$ à côté de $xx + 2bx$. Je forme ensuite la quantité $3x^4 + 12bx^3 + 21b^2x^2 + 18b^3x + 9b^4$, en ajoutant le triple du carré de $xx + 2bx$, avec le triple du produit de $xx + 2bx$ par $3b^2$, & le carré de $3b^2$. Cela fait, je multiplie cette quantité par $3b^2$, & j'écris tous les termes du produit, en changeant leurs signes, sous la quantité $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$, & comme il ne reste rien après la réduction, je conclus que $x^2 + 2bx + b^2$ est exactement la racine cube de la quantité proposée.

X V.

Nous avons vû (II^{eme} Part. art. XXIV, XXV & XXVI), comme on faisoit, sur les quantités radicales du second degré, les opérations d'addition, soustraction, multiplication & division. Ces opérations étant également nécessaires pour les quantités radicales des degrés plus élevés, nous allons examiner ce que demandent ces nouveaux radicaux.

O iv

Additions
& soustractions
des
quantités
radicales
de toute
espece,

Quant à l'addition & à la soustraction, elles ne demandent rien de plus que ce qu'on a dit pour les mêmes opérations, en parlant des radicaux du second degré. Il suffit toujours de réduire chaque radical à sa plus simple expression, & de les ajouter ou de les retrancher comme les quantités commensurables.

Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{b^4 + 2ab^2}$ à ôter de $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4}$, on change la première quantité en $b\sqrt[3]{b + 2a}$, & la seconde en $2a\sqrt[3]{b + 2a}$: or, la soustraction est alors toute simple, & donne $2a - b\sqrt[3]{b + 2a}$.

De même, si on ajoute $3a\sqrt[4]{16b^8 + 32b^4a^4}$ avec $4b\sqrt[4]{a^4b^4 + 2a^8}$, on aura
 $10ab\sqrt[4]{b^4 + 2a^4}$.

X V I.

Multipli-
cation &
division
des quan-
tités radi-
cales qui
ont mé-
mes ex-
posans.

A l'égard de la multiplication & de la division, si les quantités radicales sont de même exposant, c'est encore la même méthode que dans les radicaux du second degré; il suffit de faire l'opération sur les quantités précédées du signe radical, & de mettre le même signe devant le produit, ou devant le quotient, suivant qu'il fera question d'une multiplication ou d'une division.

Exemples. C'est ainsi que $\sqrt[3]{5ayyz} \times \sqrt[3]{7ayz}$
 $= \sqrt[3]{35aay^3z}$, ou $y\sqrt[3]{35a^2z}$.

Que $\sqrt[3]{\frac{9 a^2 b^3}{4}} \times \sqrt[3]{27 a^3 b^6} = \sqrt[3]{\frac{243 a^5 b^9}{4}}$
 $= 3 a b \sqrt[3]{\frac{b^4}{4}}$.

Que $\sqrt[3]{a^2 b^2 + b^4}$ divisé par $\sqrt[3]{\frac{a^2 - b^2}{8 b}}$
 donne pour quotient $\sqrt[3]{\frac{8 a^2 b^3 + 8 b^5}{a^2 - b^2}}$
 $= 2 b \sqrt[3]{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$.

que $\frac{\sqrt[3]{a^2 x^3 - x^5}}{\sqrt[3]{a b^4 + b^4 x}} = \frac{x}{b} \sqrt[3]{\frac{a - x}{b}}$.

XVII.

Mais si l'on veut faire ces mêmes opérations sur les quantités radicales de différens signes, & qu'on ne veuille pas se contenter de la simple marque de multiplication, il faut changer ces quantités radicales en d'autres d'un radical plus composé qui soit le même pour chacune des deux quantités à multiplier ou à diviser.

Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.

Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{a b}$ & $\sqrt[3]{a b b}$ à réduire à un même signe, j'éleve $a b$ à la puissance 5, & j'écris $\sqrt[5]{}$, au lieu de $\sqrt[3]{}$, & j'ai la quantité $\sqrt[5]{a^5 b^5}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{a b}$. J'éleve de même $a b^2$ à la troisieme puissance, & je mets $\sqrt[5]{}$ au lieu de $\sqrt[3]{}$; ce qui change la quantité $\sqrt[3]{a b^2}$ en $\sqrt[5]{a^3 b^6}$. Ainsi,

Méthode pour cette réduction.

s'il avoit fallu multiplier $\sqrt[3]{a b}$ par $\sqrt[3]{a b b}$, il seroit venu pour produit $\sqrt[3]{a^3 b^4}$; & si j'avois en à diviser la premiere par la seconde, j'aurois trouvé pour quotient

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 b^3}{a^3 b^6}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$$

De même le produit de $\sqrt[3]{a^2 b^4}$ par $\sqrt[3]{a^4 b^5}$ auroit été $\sqrt[3]{a^{16} b^{23}} = a^2 b^3 \sqrt[3]{a^4 b^5}$.

En général, pour réduire deux quantités radicales $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ à un même signe, on changera la premiere en $\sqrt[mn]{a^{pn} b^{qn}}$, & la seconde en $\sqrt[mn]{a^{rm} b^{sm}}$. S'il est question alors de les multiplier, leur produit sera $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{qn+sm}}$; & si on vouloit diviser la premiere par la seconde, le quotient seroit $\sqrt[mn]{a^{p n - r m} b^{q n - s m}}$.

Lorsque les deux quantités radicales auront pour exposans des nombres qui auront un commun diviseur, on voit qu'il ne sera pas nécessaire de changer chaque radical en un autre, dont l'exposant soit le produit des deux premiers exposans. Que l'on ait, par exemple $\sqrt{a b}$ & $\sqrt[3]{a b^3}$, on changera le premier en $\sqrt[6]{a^2 b^2}$. Qu'on ait de même $\sqrt[4]{a^3 b}$ & $\sqrt[6]{a^5 b}$, on changera la premiere en $\sqrt[12]{a^9 b^3}$, & la seconde en $\sqrt[12]{a^{10} b^2}$.

XVIII.

On peut trouver une autre méthode pour faire les opérations précédentes, en employant une réflexion sur la nature des quantités radicales, qui suit assez naturellement de ce qu'on a dit, art. VIII, pour extraire toutes fortes de racines. C'est que les quantités radicales peuvent être regardées comme des puissances, dont les exposans sont fractionnaires.

Autre manière de faire les opérations précédentes.

Pour faire voir, non-seulement comment on est arrivé à cette réflexion, mais la manière dont on en a fait usage; cherchons, par le moyen de ce que nous avons vu précédemment, à trouver ce que peuvent être les quantités $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ employée dans l'exemple précédent.

Suivant ce qu'on a dit, art. VIII, si on avoit les nombres qu'expriment les exposans p & q , on les diviserait par le nombre que m désigne, & prenant leur quotient pour servir d'exposans à a & à b , on auroit la première quantité exprimée par $\sqrt[m]{a^p b^q}$. Mais sans savoir les valeurs particulières de p , q , m , il est évident qu'on peut, en cette occasion, comme en toutes les autres, écrire générale-

ment $\frac{p}{m}$ & $\frac{q}{m}$ pour les quotiens de la di-

vision de p & de q par m , c'est-à-dire, pour les exposans de a & de b dans la racine m

de $a^p b^q$. Donc $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ est cette racine. De

même $\sqrt[n]{a^r b^s}$ fera $\frac{r}{a^n} \frac{s}{b^n}$. Pour multiplier

présentement les deux quantités $\frac{r}{a^n} \frac{s}{b^n}$

& $\frac{p}{a^m} \frac{q}{b^m}$, dans lesquelles sont changées

les quantités qu'on avoit à multiplier, art. XVII, il faut, comme dans toutes les multiplications de quantités incomplexes, ajouter les exposans des mêmes lettres, c'est-à-dire,

$\frac{p}{m}$ & $\frac{s}{n}$ avec $\frac{r}{r}$ & $\frac{q}{m}$, ce qui donnera

$$\frac{p}{m} + \frac{r}{n} \frac{s}{b^n} + \frac{q}{m} \quad \frac{p n + r m}{m n}$$

, ou a

$\frac{s m + q n}{m n}$, en mettant les fractions $\frac{p}{m}$ &

$\frac{r}{n}$ au même dénominateur aussi-bien que

$$\frac{s}{n} \text{ \& } \frac{q}{m}.$$

Ainsi $a^{\frac{p n + r m}{m n}} b^{\frac{s m + q n}{m n}}$, c'est-à-

dire, le produit de a élevé à la puissance

$\frac{p n + r m}{m n}$ par b élevé à la puissance. . . .

$\frac{s m + q n}{m n}$ est le produit des quantités proposées.

Il est aisé de voir présentement l'identité

de cette expression $a^{\frac{p n + r m}{m n}} b^{\frac{s m + q n}{m n}}$,

& de l'expression $\sqrt[mn]{a^{p n + r m} b^{s m + q n}}$ qu'on avoit trouvé dans l'art. XVII. Car, par la même raison qu'on vient de voir que

$\sqrt[m]{a^p} \& a^{\frac{p}{m}}$, ne désignoient que la même quantité, on doit voir que $a^{\frac{p n + r m}{m n}}$

& $\sqrt[mn]{a^{p n + r m}}$ sont la même chose, ainsi

que $\sqrt[mn]{a^{s m + q n}} \& b^{\frac{s m + q n}{m n}}$.

Si on avoit voulu, au contraire, diviser la première quantité $\sqrt[m]{a^p} b^q$ par la seconde

$\sqrt[n]{a^r b^s}$, on auroit retranché l'exposant $\frac{r}{n}$

de $\frac{p}{m}$ & l'exposant $\frac{q}{m}$ de $\frac{s}{n}$, & l'on

auroit eu $a^{\frac{p}{m} - \frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n} - \frac{q}{m}}$, ou

$$\frac{p n - r m}{a^{m n}} \div \frac{s m - q n}{b^{m n}} \text{ pour le quotient.}$$

Afin qu'on se familiarise avec cette transformation de quantités radicales en puissances fractionnaires, il sera bon d'en faire encore quelque application. Soit proposé, par exemple, de diviser $\sqrt[p]{a^m b^{3n} c^2}$ par $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$. On chan-

gera d'abord la première quantité en $a^{\frac{m}{2p}} b^{\frac{3n}{2p}} c^{\frac{2}{2p}}$, & la seconde en $a^{\frac{2m}{p}} b^{\frac{n}{p}} c^{\frac{1}{p}}$, ensuite on retranchera les exposans $\frac{2m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les lettres a, b, c dans la seconde, des exposans $\frac{m}{2p}$, $\frac{3n}{2p}$, $\frac{2}{p}$, qu'ont les mêmes lettres dans la première, & les restes $\frac{3m}{2p}$, $\frac{n}{2p}$, 0 , seront les exposans à donner aux mêmes lettres dans le quotient, c'est-à-dire, que $a^{\frac{3m}{2p}} b^{\frac{n}{2p}} c^0$ est ce quotient.

Lorsqu'on trouve une pareille quantité, il est naturel qu'on soit un peu embarrassé à sçavoir ce qu'elle signifie ; car n'ayant point encore rencontré d'exposant qui soit un zéro, ou négatif, on ne sçait ce que deviennent les quantités dont elles sont les exposans.

Pour le découvrir, soit reprise la question dans l'endroit où commence à paroître la difficulté, c'est-à-dire, lorsqu'on retran-

che les exposans $\frac{2m}{p}$ de $\frac{p}{2m}$ & $\frac{1}{p}$

de $\frac{1}{p}$ afin de diviser a^{2p} par $a^{\frac{2m}{p}}$ &

$\frac{1}{c^p}$ par $\frac{1}{c^p}$. C'est donc à la place de

$\frac{1}{c^p}$ qu'on met c^0 ; & à la place de

$\frac{m}{a^{2p}}$ qu'on met $a^{\frac{3m}{2p}}$; mais au

lieu de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{\frac{2m}{a^p}}$ on peut mettre $\frac{1}{\frac{3m}{a^{2p}}}$

à cause que a^p est le produit de a^{2p}

par a^p ; & au lieu de $\frac{1}{\frac{c^p}{1}}$ on peut

mettre 1. Donc les deux quantités à exami-

ner $a^{\frac{3m}{2p}}$ & c^0 expriment , l'une

$\frac{1}{\frac{3m}{a^{2p}}}$, & l'autre 1. Et partant le quo-

tient cherché de $\sqrt[p]{a^m b^{2n} c^2}$ divisé par

$\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$ est $\frac{1}{\frac{3m}{a^{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$, ou

$$\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{\frac{3m}{a^{2p}}}$$

XIX.

La nouveauté des expressions qu'on vient d'employer dans l'article précédent, & la généralité qu'elles apportent dans l'analyse, méritent qu'on en fasse une courte récapitulation, en les réduisant en principes généraux.

1°. A une quantité quelconque, dont l'exposant sera une fraction, l'on pourra toujours substituer la racine d'une quantité dont l'exposant sera un entier; pourvu que le dénominateur de cette fraction serve d'exposant au signe radical, & que son numérateur soit l'exposant de la quantité qui est sous le signe, c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'en général

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

2°. Lorsqu'une quantité a un exposant négatif, on la peut changer en une fraction, dont le numérateur est l'unité, & dont le dénominateur est la même quantité avec un exposant égal au proposé, mais avec le signe +, c'est-à-dire, qu'en général

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

3°. Toute quantité, dont l'exposant est zéro, se réduit à l'unité, c'est-à-dire, que

$$a^0 = 1.$$

La démonstration de ces trois propositions prises dans leur plus grande généralité, ne demande point d'autres argumens que ceux qu'on a employés dans l'article précédent.

P.

Cependant, pour se ressouvenir plus aisément de ces propositions, & pour s'en servir avec plus de confiance, il est à propos de les considérer à part; ce qui se fera facilement de la manière suivante.

1°. On démontrera que $a^{\frac{n}{m}}$ est la racine

m de a^n , si on fait voir qu'en élevant $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m , il vient a^n . Or, pour élever

$a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m , il est évident qu'il faut multiplier son exposant par m ; ce qui donnera

$$\frac{n}{m} \times m, \text{ ou } a^n.$$

2°. a^{-m} fera nécessairement égal à $\frac{1}{a^m}$

si, en multipliant ces deux quantités par une même puissance de a , il vient le même produit. Or, qu'on les multiplie l'une & l'autre par une puissance de a plus élevée que m , telle que

a^{2m} , par exemple, on aura $a^{2m} \times a^{-m}$, ou a^{2m-m} , ou a^m pour le produit de a^{2m}

par a^{-m} ; & de même $\frac{a^{2m} \times 1}{a^m}$, ou a^m

pour le produit de a^{2m} par $\frac{1}{a^m}$. Donc a^{-m}

& $\frac{1}{a^m}$ sont égaux.

1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	1781	1782	1783	1784	1785	1786	1787	1788	1789	1790
1791	1792	1793	1794	1795	1796	1797	1798	1799	1800	1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807	1808	1809	1810	1811
1812	1813	1814	1815	1816	1817	1818	1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	1829	1830	1831	1832
1833	1834	1835	1836	1837	1838	1839	1840	1841	1842	1843	1844	1845	1846	1847	1848	1849	1850	1851	1852	1853
1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874
1875	1876	1877	1878	1879	1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895
1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916
1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000

$$\begin{array}{r} 8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6 \\ - 8y^6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6 \\ - 60y^4b^2 - 140b^4y^2 - 125b^6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12y^4 + 30y^2b^2 + 25b^4 \\ 2y^2 + 5b^2 \end{array}$$

Case 1.

$$\begin{array}{r} x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 \\ - x^6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 \\ - 6bx^5 - 12b^2x^4 - 8b^3x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 \\ - 9b^2x^4 - 36b^3x^3 - 63b^4x^2 - 54b^5x - 27b^6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 12bx^3 + 21b^2x^2 + 18b^3x + 9b^4 \\ 3x^4 + 6bx^3 + 4b^2x^2 \\ x^2 + 2bx + 3b^2 \end{array}$$

$$\frac{a^2b^{-3}}{ca^{-1}} = a^3b^{-3}c^{-1} = \frac{a^3}{b^3c}$$

$$\sqrt{\frac{a^{-2}b^2}{ab^{-1}}} = \sqrt{a^{-3}b^3} = \sqrt{\frac{b^3}{a^3}} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Case 3.

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b^{-3}}}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{b\sqrt{b}\sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} \times \sqrt[3]{ac^3}}{\sqrt{\frac{abb}{c}}} = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}-1}c^{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}} = a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{4}{3}}c^{\frac{15}{4}}$$

$$= \frac{a^{\frac{5}{6}}c^{\frac{15}{4}}}{b^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt[12]{a^5c^{15}}}{\sqrt[3]{b^4}} = \frac{c^{\frac{15}{4}}\sqrt[12]{a^5c^{11}}}{b\sqrt[3]{b}}$$

3°. Par la même raison a^0 & 1 font égaux, puisqu'en multipliant a^0 par a , il vient $a^{0+1} = a^1 = a$, aussi-bien qu'en multipliant 1 par a .

Comme ces trois seules propositions suffisent pour toutes les réductions, & les transformations de même espece que les précédentes, & pour une infinité d'autres opérations, les Commençans ne sçauroient trop s'exercer à en faire des applications. Afin de leur en faciliter les moyens, j'ai joint plusieurs exemples dans la troisième Case de la Table ci-jointe.

X X.

Après avoir résolu toutes les difficultés qu'on pouvoit rencontrer dans les équations à deux termes, il est naturel qu'on ait cherché aussi à résoudre généralement toutes celles qui n'ont que trois termes; mais on est bien loin encore d'avoir trouvé une méthode générale pour toutes les équations de cette nature; on s'est contenté de les résoudre dans quelques cas particuliers. Par exemple, on a trouvé une Classe d'équations assez étendue, qui pouvoit se réduire facilement aux deux cas que nous avons déjà vus, celui des équations du second degré, & celui des équations à deux termes d'un degré quelconque.

Ces équations sont toutes celles qu'on peut mettre sous cette forme générale $x^{2m} + ax^m = b$. Pour les résoudre on ajoutera, ainsi que dans les équations du second degré, ce qui peut faire un carré du premier membre. On aura donc $x^{2m} + ax^m + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$ dont la ra-

Des équations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré.

cine est $x^m + \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a a}$,
 & par conséquent $x^m = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a a}$
 équation qui n'a que deux termes, & de laquelle
 on tire $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2} a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a a}}$.

Par cette formule on résoudra toutes les équations à trois termes, dont le premier sera affecté d'une puissance d' x double de celle qui affecte le second terme, & dont le troisième sera une quantité connue. Il est clair, par cette expression, & par ce qu'on sçait déjà sur les racines des équations, que toutes les équations renfermées dans la formule générale $x^{2m} + a x^m = b$ ne peuvent pas avoir plus de quatre racines réelles, & qu'elles n'en auront que deux lorsque m sera un nombre impair.

X X I.

Exemple de la méthode précédente. Pour faire quelque application de cette méthode, supposons d'abord qu'on ait l'équation $x^4 - b b x x = b b c c$. En ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4} b^4$ carré de la moitié du coefficient de $x x$, on aura $x^4 - b b x x + \frac{1}{4} b^4 = \frac{1}{4} b^4 + b b c c$ dont la racine carrée est $x x - \frac{1}{2} b b = \pm b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}$, d'où l'on tire $x x = \frac{1}{2} b b \pm b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}$, & partant $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} b b \pm b \sqrt{\frac{1}{4} b b + c c}}$, susceptible de deux valeurs réelles & de deux

imaginaires. Les deux premières sont

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}, \text{ les deux}$$

autres $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}bb - b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$,
nécessairement imaginaires à cause que

$b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ est plus grand que $\frac{1}{2}bb$.

X X I I.

Soit ensuite l'équation $x^6 - 2 a^2 b x^3 = a^6$, Autre exemple.
ajoutant des deux côtés $a^4 b b$,

il vient $x^6 - 2 a a b x^3 + a^4 b b = a^4 b b + a^6$ dont la racine quarrée est
 $x^3 - a a b = a^2 \sqrt{a a + b b}$, ou
 $x^3 = a a b \pm a^2 \sqrt{a a + b b}$ qui donne enfin

$x = \sqrt[3]{a a b \pm a^2 \sqrt{a a + b b}}$ susceptible
de deux valeurs réelles ; l'une positive, l'autre
négative. Les quatre autres racines de la
même équation, qu'on trouveroit facilement
en opérant comme dans l'article III, seroient
imaginaires.

X X I I I.

Soit à présent $x^4 - a a + b b \times x x$ Troisième exemple.
 $= - a a b b$ en ajoutant des deux côtés

$\frac{1}{4} a^4 + \frac{1}{2} a a b b + \frac{1}{4} b^4$, on aura $x^4 - a a + b b$
 $\times x x + \frac{1}{4} a^4 + \frac{1}{2} a a b b + \frac{1}{4} b^4 = \frac{1}{4} a^4$
 $- \frac{1}{2} a a b b + \frac{1}{4} b^4$, dont le second membre
est aussi-bien un quarré que le premier. Prenant
donc la racine quarrée de part & d'au-

tre, on aura $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = \pm \frac{1}{2}aa$
 $\pm \frac{1}{2}bb$ qui donne $xx = aa$ & $xx = bb$,
 c'est-à-dire, $x = \pm a$ & $x = \pm b$ qui sont
 les quatre racines de l'équation $x^4 - aa + bb$
 $\times xx = -aabb$. On auroit trouvé également
 ces racines par les méthodes de la troisieme Par-
 tie, en cherchant les diviseurs commensurables.

X X I V.

Quatrieme
 exemple.

Soit encore l'équation $x^4 - 2gh + 4ff$
 $\times xx = -gg hh$, on aura, en ajoutant le
 carré de la moitié du coefficient du second
 terme, & en prenant ensuite la racine quarrée,
 $x^2 - gh - 2ff = \pm 2f\sqrt{gh + ff}$ qui don-

ne $x = \pm \sqrt{gh + 2ff} \pm 2f\sqrt{gh + ff}$.

Or, en réfléchissant un peu sur cette quantité,
 il n'est pas difficile de reconnoître que ce qui est
 sous le signe radical est un carré, celui de
 $f \pm \sqrt{ff + gh}$. Car le terme $2f\sqrt{gh + ff}$
 est le double du produit de f & de $\sqrt{gh + ff}$,
 & la quantité $gh + 2ff$ contient le carré de
 f & le carré $ff + gh$ de la partie radicale.

Ainsi la valeur précédente de x se réduit,
 en supposant qu'on eût choisi le signe $+$ pour le
 premier radical, à $f \pm \sqrt{ff + gh}$. En suppo-
 sant au contraire qu'on eût pris le second signe
 — du même premier radical, elle se feroit ré-
 duite à $-f \pm \sqrt{ff + gh}$; ce sont-là les
 quatre racines de l'équation $x^4 - 2ghxx$
 $- 4ffxx = -gg hh$.

Dans cet exemple, l'habitude du calcul pouvoit faire facilement soupçonner que la quantité $gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh + ff}$ avoit une racine quarrée ; mais il pourroit y avoir beaucoup de cas où les quantités trouvées de la même maniere, feroient également des quarrées, sans qu'on s'en doutât : il est donc à propos de chercher une méthode générale pour reconnoître ces fortes de quantités, & pour trouver leurs racines.

XXV.

Pour y parvenir, je commence par remarquer que la racine d'une quantité composée de deux parties, dont l'une est commensurable, & dont l'autre est un radical du second degré, doit être elle-même composée de deux parties, & qu'au moins l'une des deux doit être un radical.

Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commensurables, & en partie radicales.

Cela posé, je prends $A + B$ pour exprimer, en général, la quantité proposée, A désignant la partie rationnelle, & B un radical quelconque du second degré; je prends ensuite $p + q$ pour exprimer la racine cherchée.

Je remarque maintenant que soit que p désigne la quantité radicale, soit qu'on l'ait exprimée par q , ou que p & q soient l'un & l'autre des radicaux, le quarré $p^2 + 2pq + q^2$ ne pourra avoir que le terme $2pq$ de radical. Comparant donc ce quarré avec la quantité donnée, $2pq$ représentera B & $p^2 + q^2$, A , c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'on aura

pour déterminer p & q les deux équations
 $p^2 + q^2 = A$, & $2pq = B$.

On tire de la seconde $p = \frac{B}{2q}$ qui,
 étant substituée dans la première, donne
 $\frac{B^2}{4q^2} + q^2 = A$, ou $q^4 - Aq^2 = -\frac{B^2}{4}$

ou $q^2 - \frac{1}{2}A = \pm \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}$, & par-
 tant $q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$,
 Substituant ensuite cette valeur de q dans l'é-
 quation $p^2 + q^2 = A$, ou $p = \pm \sqrt{A - q^2}$,

on a $p = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$,
 Donc la racine cherchée de la quantité $A + B$

est $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$
 $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$, ou sim-
 plement $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$
 $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$.

Car il est évident que cette expression re-
 vient absolument au même, que l'expression

$\pm \sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$
 $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$
 qu'on auroit en prenant en $-$ le signe de
 $\sqrt{A^2 - B^2}$.

Quant aux signes que doivent avoir les deux

parties $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ &

$\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ de la racine
 cherchée de $A + B$, ils doivent être les
 mêmes, si le radical B est positif, & contrai-
 res, si B est négatif. Car il est aisé de voir
 qu'en général $p + q$, ou $-p - q$ étant la
 racine de $A + B = p p + q q + 2 p q$,
 $p - q$, ou $-p + q$ est celle de $A - B$
 $= p p + q q - 2 p q$.

XXVI,

La valeur qu'on vient de trouver pour la
 racine de la quantité $A + B$, pourroit faire
 craindre qu'il ne restât encore une difficulté
 pareille à celle qu'on avoit d'abord à résou-

dre. Car $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ &

$\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ semblent
 au premier coup d'œil désigner des racines
 de quantités en partie rationnelles, & en partie
 irrationnelles; & si cela étoit, la question ne
 seroit pas plus avancée qu'elle n'étoit. Il faut
 donc, pour que la méthode soit de quelque uti-
 lité, que la quantité $A^2 - B^2$ qui se trouve
 sous le signe radical, soit un carré commen-
 surable. Or, c'est ce qui ne sçauroit manquer
 d'arriver toutes les fois que $A + B$ sera dans le
 cas d'avoir une racine. Pour s'en assurer, il
 suffit de se ressouvenir (article XXV), que

$p - q$ est $\sqrt{A - B}$ en même temps que $p + q$ est $\sqrt{A + B}$; car on en tirera tout de suite que $\sqrt{A - B} \times \sqrt{A + B}$, ou $\sqrt{A A - B B}$ est $p - q \times p + q$, ou $p p - q q$, c'est-à-dire, une quantité commensurable.

X X V I I.

Applica-
tion de la
méthode
précédente
à un exem-
ple.

Pour montrer présentement l'application de la méthode précédente, soit pris, pour exemple, la quantité $a a + 2 c \sqrt{a a - c c}$. En la comparant avec $A + B$, on a $a^2 = A$ & $B = 2 c \sqrt{a a - c c}$, & par conséquent $\sqrt{A^2 - B^2} = a a - 2 c c$, d'où l'on tire $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ $= \sqrt{a a - c c}$, on trouve de même $\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}} = c$; c'est-à-dire, que la racine cherchée est $c + \sqrt{a a - c c}$, ou $-c - \sqrt{a a - c c}$.

X X V I I I.

Autre
exemple.

Si on avoit à prendre la racine quarrée de $16 + 6 \sqrt{7}$, en faisant $A = 16$ & $B = 6 \sqrt{7}$, on auroit $\sqrt{A A - B B} = 2$, & partant $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A A - B B}} = 3$ &

$\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A A - B B}} = \sqrt{7}$;
 d'où $3 + \sqrt{7}$, ou $-3 - \sqrt{7}$ feroit la
 racine cherchée.

XXIX.

Qu'on demande maintenant la racine de
 $a p - 2 a \sqrt{a p - a a}$. Faisant
 $A = a p$ & $B = -2 a \sqrt{a p - a a}$,
 on a $\sqrt{A A - B B} = a p - 2 a a$
 & $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A A - B B}}$
 $= \sqrt{a p - a a}$, & de même

$\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}} = a$,
 c'est-à-dire, que la racine cherchée fera
 $\sqrt{a p - a a} - a$, ou $a - \sqrt{a p - a a}$.

XXX.

Si la quantité proposée est $b^2 - a b$ Troisième
 exemple.
 $+ \frac{1}{4} a^2 + 2 \sqrt{a b^3 - 2 a^2 b^2 + \frac{1}{4} a^3 b}$,
 on aura $A = b^2 - a b + \frac{1}{4} a a$, $B =$
 $2 \sqrt{a b^3 - 2 a^2 b^2 + \frac{1}{4} a^3 b}$, & $\sqrt{A^2 - B^2}$
 $= \sqrt{b^4 - 6 a b^3 + \frac{19}{2} a^2 b^2 - \frac{3}{2} a^3 b + \frac{1}{16} a^4}$
 $= b b - 3 a b + \frac{1}{4} a a$, ce qui don-
 nera $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$
 $= \sqrt{b b - 2 a b + \frac{1}{4} a a}$, &
 $\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{a b}$

d'où la racine cherchée est $\sqrt{a b} + \sqrt{b b - 2 a b + \frac{1}{4} a a}$, ou $-\sqrt{a b} - \sqrt{b b - 2 a b + \frac{1}{4} a a}$. Cet exemple est plus propre que les précédens à faire voir la nécessité d'une méthode particulière, pour prendre la racine des quantités en partie rationnelles & en partie irrationnelles. Car, dans les cas précédens, la racine cherchée ne contenant qu'un radical, pouvoit être tirée d'une équation du second degré qui auroit été contenue dans l'équation, pour la résolution de laquelle on avoit cherché à prendre cette racine. Au lieu que dans ce dernier, la valeur de la racine cherchée contenant deux radicaux, il étoit impossible qu'elle vînt d'aucune équation du second degré. En effet, lorsque nous avons eu à prendre (article XXVII) la racine de $a a + 2 c \sqrt{a a - c c}$, la question étoit la même, si on avoit dû résoudre l'équation $x^4 - 2 a a x x - 4 a a c c + 4 c^4 + a^4 = 0$ de laquelle on pouvoit tirer par la III^{eme} Partie, article XXXVI, les équations $x x - 2 c x + 2 c c - a a = 0$, & $x x + 2 c x + c c - a a = 0$. Mais la racine quarrée de $b^2 - a b + \frac{1}{4} a a + \sqrt{a b^3 - 2 a^2 b^2 + \frac{1}{4} a^3 b}$ devoit servir à la résolution de $x^4 + 2 x a b - b b - \frac{1}{4} a a x x^2 + \frac{19}{2} a^2 b^2 - 6 a b^2 - \frac{3}{2} a^3 b + b^4 + \frac{1}{16} a^4 = 0$ qui n'est point décomposable en deux équations du second degré.

XXXI.

Après avoir appris à distinguer, parmi les quantités qui sont en partie rationnelles, & en partie irrationnelles, celles qui sont des quarrés, on a dû chercher à distinguer aussi celles qui sont des cubes ou d'autres puissances plus élevées, puisque cela étoit nécessaire pour avoir complètement tout ce qui regarde les équations comprises sous la forme $x^{2m} + ax^m = b$, ou

$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$. Voyons d'abord ce que l'on pouvoit faire pour le cas où $m = 3$, c'est-à-dire, pour trouver la racine cube d'une quantité quelconque $A + B$, dans laquelle A est rationnel, & B un radical du second degré.

Nous remarquerons d'abord que la racine cube d'une quantité de cette nature, ne peut pas renfermer plus d'un radical du second degré; car on voit bien que le cube d'une quantité, telle que $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, qui contiendrait deux de ces radicaux, ne pourroit pas manquer d'être affecté de ces mêmes radicaux.

Nous remarquerons ensuite que la même racine cube cherchée ne pourra pas contenir d'autre espèce de radicaux, à moins que ce ne soit un radical cube, & qu'il ne soit commun aux deux parties de la racine. Elle seroit, par exemple, la quantité $f\sqrt[3]{m} + \sqrt{g} \times \sqrt[3]{m}$ dont le cube $mf^3 + 3mffg + 3mff + mg\sqrt{g}$, ainsi que la quantité proposée $A + B$, a une par-

Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.

tie commensurable, & une partie radicale du second degré.

Cela posé, soit pris $p + q$ pour exprimer la racine cherchée, q étant la partie affectée du radical du second degré, soit qu'il se trouve d'ailleurs, ainsi que p , affecté d'un radical cube, soit qu'ils n'en contiennent ni l'un ni l'autre.

Il est évident que le cube $p^3 + 3 p^2 q + 3 p q^2 + q^3$ ne contiendra pas d'autre radical que le radical du second degré qui est dans q , & qu'il n'y aura que les termes $3 p p q$ & q^3 qui soient affectés de ce radical. On comparera donc ces deux termes à la quantité donnée B , & les deux autres à A ; ce qui donnera les équations $A = p^3 + 3 p q^2$ & $B = 3 p^2 q + q^3$.

Pour résoudre ces deux équations, il faut d'abord commencer par chasser l'une des deux inconnues p ou q , ce qui se peut faire aisément par les principes établis dans la seconde Partie, art. XXXIII. Mais on peut abrégier le calcul par le secours d'une remarque qui a dû se présenter facilement à des Algébristes un peu exercés, c'est que $A A - B B$ sera toujours le cube de $p p - q q$, lorsque $A + B$ sera le cube de $p + q$. Car il est clair premièrement que si $p + q$ est la racine cube de $p^3 + 3 p^2 q + 3 p q^2 + q^3$ dont la première partie $p^3 + 3 p q^2$ est A , & la seconde $3 p^2 q + q^3$ est B , il faut nécessairement que $p - q$ soit la racine cube de $A - B$ qui est alors $p^3 + 3 p q^2 - 3 p^2 q - q^3$. Or de-là il suit que $p p - q q$, ou

$p - q \times p + q$ est $\sqrt[3]{A + B} \times \sqrt[3]{A - B}$,
c'est-à-dire, $\sqrt[3]{AA - BB}$.

Cela posé, on a donc l'équation $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2$, ou $n = p^2 - q^2$, dans laquelle n est donnée, & ne peut être qu'une quantité commensurable, ou un simple radical cube. De l'équation $n = p^2 - q^2$, ou $q^2 = p^2 - n$, & de l'équation $A = p^3 + 3pq^2$, on tire tout de suite $4p^3 - 3pn - A = 0$, équation qu'il faut résoudre pour avoir la première partie p de la racine cube cherchée. Aussi-tôt qu'elle sera résolue, on aura la seconde partie de cette même racine cube cherchée en employant l'équation $q = \sqrt{p^2 - n}$.

Quant au signe radical il sera positif, si le radical de la proposée a le signe $+$; & de même négatif, si le radical de la proposée a le signe $-$. Car on voit aisément que la partie radicale du cube de $p + q$, laquelle est $3pp + qq \times q$ sera toujours du même signe que q .

Si la racine de la quantité proposée $A + B$ ne doit point avoir de radical cube qui affecte tous ses termes, n , ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ sera une quantité commensurable, & par conséquent l'équation $4p^3 - 3pn - A$ ne contiendra pas de radicaux; & comme p sera alors commensurable, on ne pourra pas manquer de le trouver en cherchant tous les diviseurs de

cette équation par la méthode donnée dans la III^{ème} Partie, art. XXXII.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux parties affectées d'un radical cube, ce qu'on aura reconnu, en ne trouvant point un cube parfait pour $A^2 - B^2$, on verra quelle est la quantité par laquelle il faudroit multiplier la quantité proposée pour en former une nouvelle dont les deux parties étant prises pour A & pour B , donneroient pour $AA - BB$ un cube parfait. Trouvant alors la racine cube de cette nouvelle quantité mise à la place à la proposée; il ne faudroit plus que la diviser par la racine cube du multiplicateur dont on se seroit servi, & l'on auroit la racine cherchée.

Quant à la détermination de ce multiplicateur, il est clair qu'il ne demande autre chose que de trouver la quantité quarrée, par laquelle il faudroit multiplier la quantité qu'on a trouvée d'abord pour $AA - BB$, si on vouloit la rendre un cube parfait. Car il est clair que la racine quarrée de ce multiplicateur de $AA - BB$, seroit le multiplicateur qu'on devoit donner aux quantités proposées A & B .

X X X I I.

Application de la méthode précédente à un exemple. Pour montrer l'application de cette méthode, supposons qu'on cherche la racine cube de la quantité $7a^3 - 3a^2b + 5aa - abx$

$$\sqrt{2aa - ab}$$

Par

Par la comparaison de cette quantité avec $A + B$, j'ai $7 a^3 - 3 a^2 b = A$;
 $5 a a - a b \sqrt{2 a a - a b} = B$, & partant
 $A^2 - B^2 = - a^6 + 3 a^5 b - 3 a^4 b^2$
 $+ a^3 b^3$, & n , ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = - a a$
 $+ a b$. Substituant cette valeur de n , ainsi
 que celle de A dans l'équation $4 p^3 - 3 p n$
 $- A = 0$, j'ai $4 p^3 + 3 p a a - 3 p a b$
 $- 7 a^3 + 3 a^2 b$ dont il est question de trou-
 ver un diviseur d'une dimension. On trou-
 vera facilement par la méthode enseignée dans
 la III^{ème} Partie, article XXXII, que ce di-
 viseur est $p - a$, c'est-à-dire, que la va-
 leur de p est a . Substituant cette valeur de
 p dans l'équation $q = \sqrt{p p - n}$, il vient
 $q = \sqrt{2 a a - a b}$. Donc la racine cherchée
 est $a + \sqrt{2 a a - a b}$.

XXXIII.

Soit présentement proposé de prendre la
 racine cube de $2 a a c - a b c - b b c$
 $- 2 a - b \sqrt{a a c c - b b c c}$, je com-
 mence par faire $2 a a c - a b c - b b c = A$
 & $B = - 2 a - b \sqrt{a a c c - b b c c}$,
 ce qui me donne $A^2 - B^2 = 2 b^4 c c$
 $- 2 a b^3 c c$ qui n'est point un cube. Pour
 sçavoir ce qui peut le rendre cube, je le
 décompose en ses produifans, & il devient
 $2 \times c c \times b - a \times b^3$; d'où je découvre
 aisément qu'en le multipliant par $4 \times b - a^2$
 qui est une quantité quarrée, j'aurai un cube

Autre
 exemple.

Q

parfait, celui de $2 \times b - a \times b$, ou de $2 b b - 2 a b$; & par conséquent que si on multiplie la quantité proposée par $\frac{2 b - 2 a}{c}$

racine du carré $\frac{4 \times b - a}{c c}$, on aura une

nouvelle quantité $\frac{2 a a - a b - b b}{2 b - 2 a - 2 a - b \times 2 b - 2 a}$

$\sqrt{a a - b b}$, dont la première partie représentant A , & la seconde B , donnera pour

$\sqrt[3]{A A - B B}$, c'est-à-dire, pour n , $2 b b - 2 a b$. Je suppose donc que l'on m'eût en effet donné ces quantités pour A & pour B , & que j'en eusse tiré cette valeur de n . Dans ce cas, l'équation $4 p^3 - 3 p n$

$- A = 0$ donneroit $4 p^3 - 3 p \times 2 b b - 2 a b$

$+ b b + a b - 2 a a \times 2 b - 2 a = 0$,

à laquelle on trouveroit, par la méthode donnée dans la III^{ème} Partie, article XXXII,

le diviseur $p + a - b$, c'est-à-dire, que la

valeur de p seroit alors $b - a$; la substituant

dans $q = \sqrt{p p - n}$, on auroit $q = \sqrt{a a - b b}$,

donc $b - a - \sqrt{a a - b b}$ seroit la racine

cube de la nouvelle quantité, ou, ce qui

revient au même, du produit de la quantité proposée par $\frac{2 b - 2 a}{c}$. Donc

$$\frac{b - a - \sqrt{a - b} \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{2b - 2a}}$$

est la racine

cube cherchée de la quantité proposée.

Dans cet exemple, & dans tous ceux où la racine cherchée se trouvera affectée de radicaux cubes, il est clair qu'on ne sçauroit, pour se dispenser d'employer la méthode précédente, avoir recours à la méthode de la III^{ème} Partie, article XXXVI, c'est-à-dire, qu'on ne pourra trouver aucun diviseur dans l'équation dont la solution auroit conduit à donner pour valeur d' x la racine cube cherchée. En effet, il est aisé de voir que l'équation

$$x^6 - 2x^3 \times 2aac - abc - bbc - 2b^4cc - 2ab^3cc$$

$$x = \sqrt[3]{2aac - abc - bbc - 2a - b} \sqrt{aacc - bbcc}$$

n'auroit point été décomposable.

Mais dans tous les cas où la racine cherchée doit être simplement composée d'un terme rationnel & d'un irrationnel du second degré, on parviendroit toujours à trouver cette racine en décomposant l'équation dont la solution auroit conduit à chercher la racine cube de la quantité proposée. Dans l'article XXXII, par exemple, où il étoit question de réduire l'expression

$$x = \sqrt[3]{7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab} \sqrt{2aa - ab}$$

$$6a^2b - 14a^3 \times x^3 - a^6 + 3a^1b$$

Q ij

— 3 $a^4 b^2 + a^3 b^3 = 0$, d'où seroit venue cette valeur de x , une équation du second degré $x x - 2 a x + a b - a a = 0$ qui auroit donné la même valeur de x .

X X X I V.

Si les termes de la quantité, dont on veut prendre la racine cube, ont des diviseurs, on commencera par les mettre tous au même dénominateur, & on divisera ensuite la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

X X X V.

Méthode pour trouver les racines cubes des quantités numériques en partie commensurables, &c.

Lorsque la quantité proposée en partie commensurable & en partie incommensurable sera seulement numérique, on pourra trouver sa racine cube plus aisément que par la méthode précédente.

Car, supposant d'abord que la racine cherchée ne doive point avoir de radical cube; mais qu'elle soit composée d'un nombre entier & d'une partie radicale simple & entière aussi, on tire de ce que $p - q$ est $\sqrt[3]{A - B}$ lorsque $p + q$ est $\sqrt[3]{A + B}$, ou, ce qui revient au même, de ce que

$$p = \frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}$$

une manière simple d'avoir la partie commensurable de la racine cherchée, il ne faut pour cela que calculer en nombres entiers les plus proches les quantités $\sqrt[3]{A - B}$ & $\sqrt[3]{A + B}$, & prendre ensuite la moitié de ces deux nombres

pour avoir la valeur exacte de p . Car, en prenant pour $\sqrt[3]{A - B}$ & pour $\sqrt[3]{A + B}$ les nombres entiers qui en approchent le plus, l'erreur qu'on peut commettre sur chacune de ces quantités ne sçauroit être de $\frac{1}{2}$, & par conséquent il ne peut pas arriver que le nombre entier qui en résulte pour

$$\frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}, \text{ c'est-à-dire,}$$

pour p , differe d'une unité de la vraie valeur de p ; & comme cette valeur de p doit être un nombre entier, elle sera donc exactement déterminée par ce moyen.

Ayant ainsi la valeur de p , & sçachant déjà celle de n , ou de $\sqrt[3]{A A - B B}$, on substituera, comme dans la méthode précédente, les valeurs de p & de n dans $q = \sqrt[3]{p p - n}$, & l'on aura la seconde partie de la racine cube cherchée.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux termes affectés d'un même radical cube, ce qu'on aura reconnu en remarquant que $A^2 - B^2$ n'étoit pas un cube parfait; il faudra, en suivant la même méthode que celle qu'on a employée dans les quantités littérales, chercher le nombre par lequel on devoit multiplier $A + B$ afin que $A A - B B$ fût un cube parfait: & ayant trouvé la racine de la nouvelle quantité que devient $A + B$ par cette multiplication, on n'aura qu'à la diviser par la racine cube du nombre dont on s'est servi pour

Q iij

multiplier $A + B$, & le quotient sera la racine cherchée.

X X X V I.

Applica-
tion de la
méthode
précédente
à un
exemple.

Supposons, pour montrer l'application de cette méthode, qu'on cherche la racine cube de $7 + 5\sqrt{2}$. Ayant fait $A=7$, $B=5\sqrt{2}$,

je trouve que n , ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -1$. Je remarque ensuite que la valeur de $\sqrt[3]{A + B}$, ou de $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ est plus proche de 2 que de 3; ainsi je prends 2 pour l'exprimer; remarquant de même que celle de $\sqrt[3]{A - B}$, ou de $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ est entre 0 & 1, mais plus proche de 0, je prends 0 pour cette quantité, & j'ai, par ce moyen, p , ou

$$\frac{\sqrt[3]{A + B} + \sqrt[3]{A - B}}{2} = 1. \text{ Je substi-}$$

tue alors cette valeur de p dans $q = \sqrt{pp - n}$, & j'ai $q = \sqrt{2}$, d'où je conclus que, si la quantité proposée $7 + 5\sqrt{2}$ a une racine cube, elle est $1 + \sqrt{2}$. En effet, cubant $1 + \sqrt{2}$ il vient $7 + 5\sqrt{2}$.

X X X V I I.

Autre
exemple.

Supposons présentement qu'on eût à prendre la racine cube de $5 + 3\sqrt{3}$; on trouveroit alors $AA - BB = -2$: or, 2 n'étant point cube, il faut chercher le nombre par lequel on auroit dû multiplier $5 + 3\sqrt{3}$ pour que $AA - BB$ eût été cube, ou, ce qui revient au même, il faut chercher le nombre le plus simple par le quarré duquel $AA - BB$,

c'est-à-dire 2, étant multiplié, on aura un cube. Or, on voit tout de suite que 2 est lui-même ce nombre. Supposons donc que l'on se fût proposé de trouver la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$. On auroit eu alors $n = -2$ &

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}, \text{ ou } \dots$$

$$\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}}{2} \text{ auroit}$$

été 1 en nombre entier le plus proche. Je substitue donc ces valeurs de p & de n dans $q = \sqrt{pp-n}$, & j'ai $q = \sqrt{3}$. J'examine maintenant si $p+q$, ou $1 + \sqrt{3}$ est la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$, & je trouve qu'elle l'est en effet. D'où je conclus que

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$5 + 3\sqrt{3}.$$

XXXVIII.

On simplifiera le calcul d'approximation par lequel on détermine p , en remarquant qu'au lieu de $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, on peut

Simplification de la méthode précédente.

$$\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}$$

écrire $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ à cause

$$\text{que } n, \text{ ou } \sqrt[3]{AA-BB} = \sqrt[3]{A-B}$$

Q iv

$\times \sqrt[3]{A + B}$. Or, cette expression est en effet plus simple que $\frac{\sqrt[3]{A + B} + \sqrt[3]{A - B}}{2}$ parce qu'il est plus aisé de diviser, par $\sqrt[3]{A + B}$, le nombre n qui est supposé déjà trouvé, que de calculer séparément $\sqrt[3]{A - B}$.

X X X I X.

Applica-
tion de la
nouvelle
méthode.

Pour montrer l'usage de cette nouvelle formule ; appliquons-la à l'exemple de l'article XXXVI, où A étoit $= 7$, & $B = 5 \sqrt{2}$; après avoir trouvé de même que dans cet article, que $n = -1$ & que $\sqrt[3]{A + B}$ en nombres entiers les plus proches étoit 2, au lieu de chercher, comme dans le même article, la racine cube approchée de $7 - 5 \sqrt{2}$, je divise n , ou -1 par la valeur 2 de $\sqrt[3]{A + B}$, ce qui me donne $-\frac{1}{2}$ que je substitue dans la formule précédente

$$\sqrt[3]{A + B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A + B}}$$

, & j'ai $\frac{2 - \frac{1}{2}}{2}$, ou 1 (prenant le nombre entier

le plus proche) pour la valeur de p , ainsi qu'on l'avoit trouvé dans cet article par la for-

$$\text{mule } \frac{\sqrt[3]{A + B} + \sqrt[3]{A - B}}{2}, \text{ le reste}$$

s'acheveroit de même.

X L.

Il est à remarquer cependant que cette nouvelle formule pourroit induire en erreur si A & B n'étoient pas de même signe ; car, dans le cas où ces quantités seroient de signes différens, la vraie valeur de $\sqrt[3]{A + B}$ pourroit être si petite auprès de n , que le nombre entier le plus proche qu'on prend à la place de cette valeur donneroit pour

Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où A & B sont de signes différens.

$$\frac{\sqrt[3]{A + B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A - B}}}{2} \text{ un nombre qui}$$

différoit du vrai d'une ou de plusieurs unités. Qu'on eût, par exemple, à prendre la racine cube de $45 - 29\sqrt{2}$ en faisant $A = 45$ & $B = -29\sqrt{2}$, on auroit 1 pour le nombre entier le plus proche de $\sqrt[3]{A + B}$, ou $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ & comme $\sqrt[3]{A - B}$ seroit alors 7, la valeur de p , ou de

$$\frac{\sqrt[3]{A + B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A + B}}}{2} \text{ se trouveroit en ce}$$

cas de 4, quoiqu'elle ne fût réellement que 3, ainsi qu'on peut voir par l'expression

$$\frac{\sqrt[3]{A + B} + \sqrt[3]{A - B}}{2} \text{ de la méthode précédente.}$$

Mais pourvû que cette nouvelle méthode d'avoir p , soit d'un usage sûr, toutes les fois

Ce qu'il faut faire en ce cas.

que A & B font de même signe, il importe peu qu'elle soit applicable, lorsque ces quantités sont de signes différens. Car on voit bien que dans ce cas, on n'a qu'à commencer par supposer A & B tous deux positifs, & en prendre la racine $p + q$. Ensuite faire p du même signe que A , & q du même signe que B .

Il ne s'agit donc plus que de s'assurer si toutes les fois que A & B font de même signe, ou, ce qui revient au même, si A & B étant tous deux positifs, on peut, sans craindre d'er-

reur, substituer dans $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$

à la place de $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Pour nous en convaincre, commençons par supposer, ce qui ne peut jamais aller si loin, qu'on se trompât de $\frac{1}{2}$ en prenant pour $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Dans ce cas, la quantité qu'on trouveroit au lieu de p , seroit

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2}}}{2}.$$

Pour faire voir que cette expression ne sçauroit donner un nombre qui diffère d'une unité de la vraie valeur de p , mettons dans cette quantité $p + q$ au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$, & $pp - qq$ au lieu de n , elle deviendra

$$\frac{p + q \pm \frac{1}{2} + \frac{pp - qq}{p + q \pm \frac{1}{2}}}{2} \text{ de laquelle re-}$$

tranchant p on tire en réduisant $\frac{\pm q + \frac{1}{4}}{2p + 2q \pm 1}$

pour l'erreur que peut apporter, dans la détermination de p , le choix qu'on a fait du nombre entier, au lieu de $\sqrt[3]{A + B}$. Or, il est clair que cette quantité ne sçauroit jamais égaler $\frac{1}{2}$; car dans la première expression

$\frac{q + \frac{1}{4}}{2p + 2q \pm 1}$ qu'elle renferme, le numérateur $q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q + 1$, est à plus forte raison plus petit que la moitié de $2p + 2q + 1$: & dans la seconde

expression $\frac{-q + \frac{1}{4}}{2p + 2q - 1}$ qu'elle renferme encore, le numérateur $-q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q$, est par conséquent plus petit aussi que la moitié de $2q + 2p - 1$.

Ainsi on ne sçauroit se tromper d'une unité en déterminant p par la méthode précédente, & par conséquent toutes les fois qu'une quantité comme $A + B$ (dans laquelle il n'entre que des nombres entiers, soit sous le signe radical, soit devant ce signe) devra avoir une racine cube $p + q$, qui ne contienne aucun nombre fractionnaire, on trouvera cette racine par la méthode précédente.

X L I.

Mais si la quantité $A + B$, quoique dégagée de toute fraction, tant sous le signe radical, que hors de ce signe, doit avoir une racine cube qui contint des nombres fractionnaires.

Cas où la méthode précédente pourroit induire en erreur.

tionnaires, telle que la quantité $2 + \sqrt{5}$, dont la racine cube est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, la méthode précédente, aussi-bien que celle de l'article XXXV, ne donneroit rien alors, & jetteroit dans l'erreur en faisant croire qu'il n'y auroit point de racine cube à espérer.

Moyen
des'en ga-
rantir.

Pour remédier à cet inconvénient, il faut commencer par chercher directement quelles sont toutes les especes de racines fractionnaires dont les cubes pourroient être des nombres entiers.

Pour les trouver, soient représentées toutes ces racines par $\frac{p}{m} + \frac{q}{n}$; p & m étant sup-

posés des nombres entiers qui n'ont aucun commun diviseur, q la racine d'un nombre entier, qui ne permet aucune réduction avec le nombre n . En élevant cette quantité au cu-

be, on aura $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3 p q^2}{m n^2}$ pour la par-

tie rationnelle; & $\frac{3 p^2}{n m^2} + \frac{q^2}{n^3} \times q$

pour la partie incommensurable. De plus, par les conditions du Problème que nous cherchons

à résoudre, tant la première quantité $\frac{p^3}{m^3}$

+ $\frac{3 p q^2}{m n^2}$, que le coefficient $\frac{3 p^2}{n m^2}$

+ $\frac{q^2}{n^3}$ de la seconde doivent être des nombres entiers.

Soit d'abord égalé $\frac{3 p^2}{m^2 n} + \frac{q^2}{n^3}$ à h ,
 que je suppose exprimer un nombre entier. On
 aura donc $q^2 = h n^3 - \frac{3 p^2 n^2}{m^2}$; mais
 cette quantité doit être un nombre entier par
 l'hypothese; donc $\frac{3 p^2 n^2}{m^2}$ doit être aussi
 un nombre entier; donc $\frac{3 n^2}{m^2}$ doit l'être en-
 core, & partant n doit être un multiple de m .

Cela posé, soit fait $n = m l$, on aura q^2
 $= h m^3 l^3 - 3 p^2 l^2$, mettant ces valeurs
 de n & de q^2 dans $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3 p q^2}{m n^2}$,

cette quantité deviendra après les réductions
 $\frac{8 p^3}{m^3} + 3 p h l$, qui doit être un nom-

bre entier. Or, p & m n'ayant aucun com-
 mun diviseur, cette quantité ne sçauroit être
 un nombre entier, que m ne soit, ou 1, ou 2.
 Voilà donc m fixé, quant à n , ou à $m l$, on

voit bientôt qu'il doit être égal à m , parce
 que l'équation $q^2 = h m^3 l^3 - 3 p^2 l^2$

donne $\frac{q}{l} = \sqrt{h m^3 l - 3 p^2}$ & partant

$\frac{q}{m l}$, ou $\frac{q}{n} = \frac{1}{m} \sqrt{h m^3 l - 3 p^2}$,
 qui apprend que la seconde partie de la racine
 ne peut pas avoir d'autre dénominateur que la
 première, & que ce dénominateur, par consé-

quent ne peut jamais être non plus que 2 ,
ou 1.

Ainsi, lorsqu'on n'aura pas réussi à trouver, par la méthode précédente, la racine d'une quantité $A + B$, dont la partie rationnelle, ou commensurable A , & l'irrationnelle B seront des nombres entiers, on n'aura qu'à multiplier cette quantité par 8, & chercher par la même méthode la racine cube de la nouvelle quantité qu'on aura par cette multiplication, & si on ne réussit pas, on sera sûr que la quantité proposée n'étoit pas cube; si on réussit, la moitié de la racine cube qu'on aura alors, sera celle qu'on cherchoit.

X L I I.

Lorsque le nombre A & le radical B seront fractionnaires, il est clair qu'il faudra, ainsi que dans l'article XXXIV, mettre A & B au même dénominateur, puis diviser la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

X L I I I.

Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux.

Si l'on avoit à prendre la racine cube d'une quantité composée de deux radicaux du second degré, soit que cette quantité soit numérique, ou qu'elle soit littérale, il n'y auroit qu'à la multiplier par le cube de l'un des radicaux que contiendrait cette quantité. Le produit étant alors dans le cas des quantités qu'on vient de traiter, on en prendroit la racine cube de la même manière, & on la diviseroit par le radical dont le cube auroit servi de multiplicateur à la proposée.

X L I V.

Lorsqu'on voudra prendre la racine quatrieme d'une quantité comme $A + B$, on n'aura d'abord qu'à en chercher la racine quarrée; car si on n'en trouve pas, à plus forte raison n'en trouvera-t-on pas de racine quatrieme, ou quarrée quarrée. Si on en trouve une, il ne sera plus question que de trouver la racine quarrée de la quantité que la premiere extraction aura donnée.

Comment on prend la racine quatrieme des quantités de même espece que les précédentes.

X L V.

Il en sera de même toutes les fois qu'on aura une racine à prendre, dont l'exposant sera pair, il faudra commencer par la racine quarrée, & le Problème sera réduit à prendre une racine d'un exposant sous-double du premier.

Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair.

X L V I.

Si on vouloit la racine cinquieme d'une quantité $A + B$ telle que les précédentes, il faudroit suivre une méthode semblable à celle qu'on a suivie pour la racine cube. Au lieu des deux théorèmes, par lesquels on apprenoit que

Pour les racines cinquiemes.

$$p = \frac{\sqrt[5]{A+B} + \sqrt[5]{A-B}}{2}, \text{ \& que}$$

$$\sqrt[5]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2, \text{ on auroit ceux-ci}$$

$$p = \frac{\sqrt[5]{A+B} + \sqrt[5]{A-B}}{2} \text{ \&}$$

$$\sqrt[5]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2, \text{ dont on feroit le même usage que des précédens.}$$

Il en feroit de même pour les racines plus élevées. Que m soit l'exposant de la racine qu'on se propose de prendre de $A + B$, on aura ces deux théorèmes

$$p = \frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2} \text{ \& \dots}$$

$\sqrt[m]{A^2 + B^2} = p^2 - q^2$ qu'on employera encore de la même manière que dans les racines cubes.

Pour démontrer ces théorèmes en général, il ne sera question que de faire voir que si $A + B$ est la puissance m de $p + q$, $A - B$ fera celle de $p - q$; car il suivra de-là nécessairement que $\sqrt[m]{A - B} \times \sqrt[m]{A + B}$ fera $p + q \times p - q$, ou $p^2 - q^2$, & que

$$\frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2} \text{ fera \dots}$$

$$\frac{p+q+p-q}{2}, \text{ ou } p.$$

Quant à la démonstration de ce que $A - B$ est la puissance m de $p - q$, lorsque $A + B$ & celle de $p + q$, elle seroit aisée à trouver si on vouloit y arriver par l'induction. Car, en donnant successivement différentes valeurs particulières à m , & reconnoissant la vérité de ce théorème dans chaque cas particulier, on ne douteroit pas qu'il ne fût généralement vrai. Mais on ne scauroit se contenter d'une pareille manière de démontrer, qu'au cas que l'on ne

ne pût pas trouver une expression générale pour la puissance m de $p + q$, & pour celle de $p = q$; il faut donc chercher cette expression générale, qui est bien propre d'ailleurs à exciter la curiosité de tous les Analystes.

XLVIII.

Pour parvenir à trouver la valeur générale de $p + q$, ou de $p + q$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité est contenue dans m , commençons par chercher dans ce que nous avons vû précédemment, ce qui peut avoir du rapport avec cette opération. Reprenons dans cette vûe ce que nous avons dit dans la III^{eme} Partie, article II, où nous avons formé une équation par le produit de ses racines $x + a$, $x + b$, $x + c$, &c. où nous avons trouvé la loi suivant laquelle devoient être composés tous les termes de ce produit. Il est aisé de voir que tous ce que nous avons dit alors pourra s'appliquer au cas présent, en supposant que toutes les racines sont égales. Or, les réflexions données dans la III^{eme} Partie, article II, sur l'équation dont les racines sont $x + a$, $x + b$, $x + c$, &c. consistoient en ceci.

De la manière d'élever un binôme à une puissance quelconque.

1°. Que le premier terme de cette équation n'est autre chose que x élevé à une puissance égale au nombre des racines.

2°. Que le second terme contenoit x élevé à une puissance moindre d'une unité, avec un coefficient égal à la somme des racines.

3°. Que le troisième terme étoit composé

R

de x élevé à une puissance moindre de deux unités, & avec un coefficient égal à la somme de tous les produits des racines prises deux à deux.

4°. Que le quatrième terme renfermoit x élevé à une puissance moindre des trois unités, avec un coefficient égal à la somme de tous les produits des racines prises trois à trois, & ainsi des autres termes.

Si on applique donc ces remarques dans le cas présent où toutes ces racines sont égales, & où leur nombre est exprimé généralement par m , on verra

Que le premier terme sera x^m ;

Que le second sera x^{m-1} multiplié par ma , puisque toutes les racines sont égales à a , & que leur nombre est m ;

Que le troisième terme sera x^{m-2} avec un coefficient égal à a^2 , pris autant de fois qu'il y aura de rectangles ab, ac, bc , &c. dans le coefficient du troisième terme de l'équation donnée par le produit des racines $x+a, x+b$, &c. dont le nombre est supposé m ; puisque tous les produits ab, ac, bc , &c. doivent tous être égaux chacun à a^2 , lorsque b, c , &c. sont égaux à a ;

Que le quatrième terme sera x^{m-3} avec un coefficient égal à a^3 , pris autant de fois qu'il y aura de produits abc, abd, acd, bcd , &c. dans le coefficient du quatrième terme de l'équation, dont le nombre des racines $x+a, x+b, x+c$, &c. est m , & ainsi des autres termes.

La question est donc réduite maintenant à sçavoir ce qu'un nombre m de lettres peut donner de produits $ab, ac, bc, \&c.$ prises deux à deux ; de produits $abc, abd, bcd, acd, \&c.$ prises trois à trois ; de produits $abcd, abde, abce, aedc, bcde, \&c.$ prises quatre à quatre, &c. Car, en supposant que ces nombres soient trouvés, & qu'on les exprime par $A, B, C, D, \&c.$ on aura $x^m + m a x^{m-1} + A a^2 x^{m-2} + B a^3 x^{m-3} + C a^4 x^{m-4} + D a^5 x^{m-5} + \&c.$ pour représenter la valeur cherchée de $x + a$.

Pour trouver, premièrement, ce qu'un nombre m de lettres $a, b, c, \&c.$ peut donner de produits de deux lettres $ab, ac, bc, \&c.$ en les combinant de toutes les manières possibles ; commençons par remarquer que lorsqu'on aura formé tous ces produits, on aura écrit deux fois plus de lettres que de termes.

Remarquons ensuite que chacune des lettres $a, b, c, \&c.$ doit être répétée le même nombre de fois, & que chacune ne pouvant être multipliée que par toutes les autres, & non par elle-même, ne sçauroit être répétée que $m - 1$ de fois : donc le nombre de lettres à écrire, en formant tous ces produits, doit être $m \times m - 1$; donc le nombre de tous ces produits doit être $\frac{m \times m - 1}{2}$; & c'est-là la valeur de A , ou du coefficient du troisième terme de la formule cherchée.

R ij

Quant au coefficient du quatrième terme ; c'est-à-dire, au nombre de produits à trois lettres abc , abd , acd , bcd , &c. que peuvent donner un nombre m de lettres, a , b , c , d , &c. prises de toutes les manières possibles trois à trois, pour le trouver, nous remarquerons d'abord que ce nombre doit être le tiers de celui des lettres qu'on écrit en formant tous ces produits.

Nous remarquerons ensuite que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, & que ce nombre doit être celui qui exprime combien de produits de deux lettres doivent donner toutes les autres lettres ; car il est évident que chaque lettre, a , par exemple, doit être jointe à tous les produits bc , bd , cd , &c. des autres lettres prises deux à deux.

Le nombre de fois que chacune des lettres a , b , c , d , &c. doit être répétée, est donc celui qu'un nombre $m - 1$ de lettres b , c , d , &c. donne de produits de deux lettres. Mais on vient de voir que, lorsque le nombre des lettres étoit m , le nombre de leurs produits deux à deux étoit la moitié du nombre m , multiplié par le nombre $m - 1$, qui est moindre d'une unité. Donc, lorsque le nombre des lettres est $m - 1$, il faut prendre la moitié

$\frac{m - 1}{2}$ de ce nombre, & la multiplier par $m - 2$, qui est moindre d'une unité que $m - 1$, c'est-à-dire, que $\frac{m - 1 \times m - 2}{2}$ est le

nombre de fois que chacune des lettres $a, b, c,$ &c. sera répétée dans tous les produits en question; & comme le nombre de ces lettres est $m,$

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2}$$

fera par conséquent le nombre de toutes les lettres écrites. Donc le nombre cherche des produits à trois lettres $abc,$

$abd,$ &c. sera $\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3};$ &

c'est-là la valeur de $B,$ ou du coefficient du quatrième terme.

A l'égard du coefficient C du cinquième; c'est-à-dire, du nombre de produits de quatre lettres que doit donner le nombre m de lettres, on trouvera de même qu'il doit être

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4};$$

parce que ce nombre doit être le quart de toutes les lettres écrites dans ces produits; que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, & combinée avec tous les produits de trois lettres que donne le nombre $m - 1$ de lettres; & qu'enfin ces produits de trois lettres donnés par le nombre $m - 1$ de lettres, doit être

$$\frac{m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3},$$

par la même raison que $\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3}$ est celui

des produits de trois lettres que fournit le nombre m de lettres.

Formant de même tous les autres coefficients ; & substituant ensuite dans la formule précédente à la place de $A, B, C, D, E, \&c.$ leurs valeurs ainsi trouvées , on aura enfin $x^m + a x^{m-1}$

$$+ m \times \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} a^3 x^{m-3} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{2 \times 3 \times 4} a^4 x^{m-4}$$

$$+ \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} a^5 x^{m-5} +, \&c. \text{ pour la puissance } m \text{ de } x + a.$$

Formule
générale
pour l'élé-
vation de
 $p + q$ à la
puissance m .

Par la même raison la valeur de $p + q$ dont on avoit besoin , article XLVII , sera

$$p^m + m q p^{m-1} + \frac{m \times m-1}{2} q^2 p^{m-2}$$

$$+ \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} +, \&c.$$

X L I X.

Quant à celle de $p - q$, il est évident que pour la trouver , il suffira de faire q négatif dans cette formule ; ce qui la changera en

$$p^m - m q p^{m-1} + \frac{m \times m-1}{2} q^2 p^{m-2}$$

$$- \frac{m \times m-1 \times m-2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} +, \&c.$$

L.

Si on veut présentement démontrer le théorème de l'article XLVII, on commencera par remarquer que A est la somme de tous les termes p^m , $\frac{m \times m - 1}{2} q^2 p^{m-2}$, $\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}$, &c. dans lesquels il n'entre aucune dimension impaire de q , & que B est la somme de tous les termes , $m q p^{m-1}$, $\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3}$, $\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q^5 p^{m-5}$, où q ne se trouve jamais qu'à une dimension impaire.

Démonstration du théorème de l'article XLVII.

$$p^m, \frac{m \times m - 1}{2} q^2 p^{m-2},$$

$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}$, &c. dans lesquels il n'entre aucune dimension impaire de q , & que B est la somme de tous les termes ,

$$m q p^{m-1}, \frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3},$$

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q^5 p^{m-5}$$

où q ne se trouve jamais qu'à une dimension impaire.

On verra ensuite que $A + B$ est la première formule, & $A - B$ la seconde; ce qui étoit le point où la difficulté étoit réduite, article XLVII.

L I.

Lorsqu'on voudra employer la formule précédente pour élever un binôme quelconque à une puissance donnée, rien ne sera plus facile; on n'aura qu'à substituer dans la valeur précédente

Application de la formule précédente à un exemple.

R iv

de $p + q$ à la place de p le premier terme du binome donné, à la place de q le second, & à la place de m l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome proposé. Qu'on propose, par exemple, d'élever $3ac - 2bd$ à la cinquième puissance, je fais

$$3ac = p$$

$$-2bd = q$$

$$5 = m$$

$$\& \text{ j'ai d'abord } p^m = 3ac = 243 a^5 c^5.$$

$$mq p^{m-1} = 5 \times -2bd \times 3ac^4 \\ = -810 a^4 b c^4 d.$$

$$\frac{m \times m - 1}{2} q^2 p^{m-2} = 10 \times 4 b b d d$$

$$\times 3ac^3 = 1080 a^3 b b c^3 d d.$$

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 10$$

$$\times -2bd^3 \times 3ac^2 = -720 a^2 b^3 c^2 d^3.$$

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}$$

$$= 5 \times -2bd^4 \times 3ac = 240 a b^4 c d^4.$$

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$q^5 p^{m-5} = 1 \times \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} a^5 c^5$$

$$= -32 b^5 d^5.$$

A l'égard des autres termes, leurs coefficients ayant tous pour un de leurs produits $m - 5$, qui est zéro par la supposition de $m = 5$, ils doivent tous être nuls;

ainsi $3 a c - 2 b c$ aura pour valeur $243 a^5 c^5$
 $- 810 a^4 b c^4 d + 1080 a^3 b^2 c^3 d^2$
 $- 720 a^2 b^3 c^2 d^3 + 240 a b^4 c d^4$
 $- 32 b^5 d^5.$

LII.

Lorsqu'on voudra élever à une puissance donnée une quantité composée de plus de deux termes, on le pourra encore facilement par la même méthode. Qu'il s'agisse, par exemple, d'un trinome, en nommant p le premier terme de ce trinome, q la somme des deux autres, la difficulté de l'élevation du trinome fera réduite à celle du binome, puisque

Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.

chacun des termes $m p^{m-1} q, \frac{m \times m - 1}{2}$

$p^{m-2} q^2, \&c.$ ne renfermera pas de quantité à élever plus composée que des binomes.

Et lorsqu'on aura un polynome plus composé, on réduira toujours la difficulté à l'élevation d'un polynome plus simple.

LIII.

Pour donner un exemple de la maniere dont Exemple.

on employe la formule précédente à l'élevation d'une quantité qui a plus de deux termes, soit proposé d'élever $a + 2b - c$ à la quatrième puissance. On fera $m = 4$, $p = a$, $q = 2b - c$; & substituant ces valeurs dans la formule, on aura $p^m = a^4 m q p^{m-1}$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \times \overline{2b - c} \times a^3 = 8a^3b - 4a^3c. \\
 &\frac{m \times m - 1}{2} q^2 p^{m-2} = 6 \times \overline{2b - c}^2 \\
 &\times a^2 = 24a^2b^2 - 24a^2bc + 6a^2c^2, \\
 &\frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 4 \\
 &\times \overline{2b - c}^3 \times a = 32ab^3 - 48abbc \\
 &+ 24abcc - 4ac^3, \\
 &\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4} \\
 &= \overline{2b - c}^4 = 16b^4 - 4 \times \overline{2b}^3 \times c \\
 &+ \frac{4 \times 3}{2} \times \overline{2b}^2 \times c^2 - \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 3} \\
 &\times 2b \times c^3 + \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} c^4 \\
 &= 16b^4 - 32b^3c + 24bbcc - 8bc^3 \\
 &+ c^4, \\
 &\& \text{ partant } \overline{a + 2b - c}^4 = a^4 + 8a^3b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4 a^2 c + 24 a^2 b^2 - 24 a^2 b c + 6 a^2 c^3 \\
 & + 32 a b^3 - 48 a b b c + 24 a b c c \\
 & - 4 a c^3 + 16 b^4 - 32 b^3 c + 24 b b c c \\
 & - 8 b c^3 + c^4.
 \end{aligned}$$

LIV.

Après avoir trouvé la formule précédente, on ne pouvoit guères tarder à soupçonner qu'elle devoit s'étendre à d'autres puissances que celles qui sont des nombres entiers & positifs. Il suffisoit d'avoir reconnu qu'il y avoit d'autres puissances que celles-là pour vouloir y appliquer cette formule. Ayant reconnu, par exemple, qu'au lieu de $\sqrt[n]{a}$, on pouvoit

$$\frac{1}{n}$$

écrire $a^{\frac{1}{n}}$; on aura imaginé aussi-tôt que lorsqu'il étoit question de prendre la racine n d'une quantité complexe quelconque représentée par $p + q$, on n'avoit qu'à faire $m = \frac{1}{n}$ dans la formule précédente; ou, ce

$$\frac{1}{n}$$

qui revient au même, on aura pensé que p

$$+ \frac{1}{n} p^{\frac{1}{n}} - 1 q + \frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} - 1}{2}$$

$$p^{\frac{1}{n} - 2} q^2 + \&c. \text{ doit exprimer}$$

$\frac{p+q}{n}$, ou la racine n de $p+q$

De même on aura soupçonné qu'au lieu de

$\frac{1}{n}$, ou de $\frac{p+q}{n}$, on n'avoit

qu'à faire $m = -n$ dans la même valeur de

$\frac{p+q}{m}$, ce qui donnoit

$\frac{p-np}{-n-2} - \frac{q-nq}{-n-1} = \frac{n \times \frac{p-n-1}{2}}$

$\frac{p}{q} -$, &c. En un mot, l'ordre & la généralité qu'on avoit toujours trouvé dans les opérations analytiques, devoit faire penser que, quoique la formule précédente n'eût été d'abord trouvée qu'en supposant m entier & positif, elle pouvoit aussi s'appliquer à toutes autres valeurs de m . Mais si la vraisemblance de cette généralité devoit frapper tous les Géomètres, elle ne pouvoit pas seule les contenter. L'effet principal qu'elle devoit produire sur leur esprit, étoit de les engager à chercher une démonstration rigoureuse. Voici une manière de trouver cette démonstration, qu'il n'étoit pas bien difficile d'imaginer.

Où l'on fait voir que la formule précédente a lieu encore, lorsque l'exposant est fractionnaire.

Soit proposé premièrement de faire voir que la formule en question peut s'appliquer toutes les fois que m est une fraction quelconque positive; ou, ce qui revient au même, soit proposé de prouver l'équation A (Voyez la Table 1 ci-jointe) laquelle devient l'é-

quation B, en divisant les deux membres par

$$\frac{r}{n} p \quad \& \text{ en faisant } \frac{q}{p} = z.$$

Mais pour prouver l'équation B, il suffit de faire voir qu'en élevant les deux membres à la même puissance n , il viendra des quantités égales, c'est-à-dire, en faisant

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1}{2} \times z^2 + \frac{\frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \times \frac{r}{n} - 2}{2 \times 3} \times z^3$$

+ , &c.) qu'il s'agit de prouver l'équation D.

Or, comme r & n sont deux nombres entiers, on peut faire les élévations indiquées dans cette équation, par le moyen de la valeur générale de $p + q$; ce qui donnera l'équation E.

Le Problème étant réduit à prouver l'équation E, il faut trouver par la valeur de s , celles de s^2 , s^3 , s^4 , &c. multiplier ensuite la valeur de s par n , celle de s^2 par

$$\frac{n \times n - 1}{2}, \text{ celle de } s^3 \text{ par } \dots \dots \dots$$

$$\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{2 \times 3}, \text{ celle de } s^4 \text{ par}$$

$$\frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{2 \times 3 \times 4}, \text{ \&c.}$$

afin d'avoir les valeurs de tous les termes du second membre de l'équation *E*. Ces valeurs trouvées & écrites les unes sous les autres, on formera l'équation *F*, laquelle en faisant les réductions que demande le second membre, devient l'équation *G*, qui est la même que l'équation *E*. Donc l'équation *A*, qui avoit donné cette équation, est prouvée. Donc il est vrai en général que la formule de l'article XLVIII s'applique aussi-bien aux puissances fractionnaires quelconques positives, qu'aux puissances entières positives.

L V.

La même
formule va
encore aux
puissances
négatives.

Pour faire voir présentement que la même formule s'applique également aux puissances négatives, soit entières, soit fractionnaires, il s'agit de prouver (Voyez la Table 2 ci-jointe) l'équation *A*, dont le second membre est celui que donne la formule de l'article

$$\text{XLVIII, en faisant } m = -\frac{r}{n}.$$

Il est évident qu'au lieu de prouver l'équation *A*, on peut se contenter de prouver l'équation *B*, qui revient au même que la pre-

miere en faisant $z = \frac{q}{p}$, & multipliant les

deux membres par $\frac{r}{n}$.

Il est évident, de plus, qu'au lieu de la

quantité $\frac{r}{n} \div \frac{r}{n}$, on peut écrire . . .

$\frac{x}{1 + \frac{r}{n}}$, & par conséquent l'équation B

devient l'équation C. Mais comme dans le premier membre de cette équation, on peut

substituer à $1 + \frac{r}{n}$ sa valeur tirée de la formule de l'article LIV, il est clair qu'il suffit de prouver l'équation D. Or, pour prouver cette équation, il suffit de multiplier le second membre par le dénominateur du premier, & de s'assurer que le produit qui en vient, est l'unité numérateur du premier membre. C'est ce qui arrive en effet; car faisant la multiplication, il vient pour produit la quantité E, dont le premier terme, qui est l'unité, est le seul qui reste après la réduction. Ainsi on est assuré présentement, par une démonstration, que la formule de l'article XLVIII a toute la généralité qu'on ne faisoit d'abord que lui soupçonner.

L V I.

Quelqu'assuré qu'on soit d'une vérité par une démonstration générale, on ne sçauroit guères se défendre de chercher à la voir confirmée dans quelque application particulière. Sçachant, par exemple, que la formule précédente donne l'élévation des quantités quelconques à des puissances fractionnaires, il est naturel qu'on veuille l'appliquer à quelque quantité qu'on sçache avoir exactement une racine ou puissance fractionnaire.

Exemple d'une racine quarrée prise par la formule de l'élévation des puissances. Soit, par exemple, la quantité $1 + 2b + b^2$, dont on cherche la puissance $\frac{1}{2}$; ou, ce qui revient au même, la racine quarrée. Ayant fait $p = 1$, $q = 2b + b^2$, & $m = \frac{1}{2}$ dans la formule précédente, on trouvera

$$\text{Le premier terme} \dots \dots \dots p^m = 1$$

$$\text{Le second} \dots \dots \dots m p^{m-1} q = b + \frac{1}{2} b^2$$

$$\text{Le 3}^{\text{eme}}, \frac{m \times m - 1}{2} p^{m-2} q^2 = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^3 + \frac{1}{8} b^4.$$

$$\text{Le 4}^{\text{eme}}, \frac{m \times m - 1 \times m - 2}{2 \times 3} p^{m-3} q^3 = \frac{1}{2} b^3 + \frac{3}{4} b^4 + \frac{3}{8} b^5 + \frac{1}{16} b^6.$$

$$\text{Le 5}^{\text{eme}}, \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4$$

$$A \overline{p+q} = p \overline{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n} p \overline{q} + \frac{r^2}{n^2} p \overline{q^2} + \frac{r^3}{n^3} p \overline{q^3} + \dots$$

$$B \overline{1+z} = 1 + \frac{r}{n} z + \frac{r^2}{n^2} z^2 + \frac{r^3}{n^3} z^3 + \dots$$

$$C \overline{1+z} = 1 + \frac{r}{n} z + \frac{r^2}{n^2} z^2 + \frac{r^3}{n^3} z^3 + \dots$$

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{r^2}{n^2} z^2 + \frac{r^3}{n^3} z^3 + \dots$$

$$D \overline{1+z} = 1 + s$$

$$E \overline{1+rz} + \frac{r^2}{n^2} z^2 + \frac{r^3}{n^3} z^3 + \dots = 1 + ns + \frac{n \times n - 1}{2} s^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{2 \times 3} s^3 + \dots$$

$$F \left\{ \begin{aligned} &+ ns \\ &+ \frac{n \times n - 1}{2} s^2 \\ &+ \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{2 \times 3} s^3 \\ &+ \frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{2 \times 3 \times 4} s^4 \\ &+ \dots \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} &+ n \times \frac{r}{n} z + n \times \frac{r^2}{n^2} z^2 + n \times \frac{r^3}{n^3} z^3 + n \times \frac{r^4}{n^4} z^4 + \dots \\ &+ \frac{n \times n - 1}{2} \times \frac{r^2}{n^2} z^2 + \frac{n \times n - 1}{2} \times \frac{r^3}{n^3} \times \frac{r}{n} z^3 + \frac{n \times n - 1}{2} \times \frac{r^4}{n^4} \times \frac{r}{n} z^4 + \dots \\ &+ \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{2 \times 3} \times \frac{r^3}{n^3} z^3 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{2 \times 3} \times \frac{r^4}{n^4} \times \frac{r}{n} z^4 + \dots \\ &+ \frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{2 \times 3 \times 4} \times \frac{r^4}{n^4} z^4 + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$G \overline{1+ns} + \frac{n \times n - 1}{2} s^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{2 \times 3} s^3 + \dots = 1 + rz + \frac{r^2}{n^2} z^2 + \frac{r^3}{n^3} z^3 + \dots$$

SCD LYON 1
bibliothé

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$\frac{1}{x^4} = x^{-4}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

$$\frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-5} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

$$\frac{1}{x^6} = x^{-6}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-6} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$$

$$\frac{1}{x^7} = x^{-7}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-7} = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$$

$$\frac{1}{x^8} = x^{-8}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-8} = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$$

$$\frac{1}{x^9} = x^{-9}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-9} = -9x^{-10} = -\frac{9}{x^{10}}$$

$$\frac{1}{x^{10}} = x^{-10}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-10} = -10x^{-11} = -\frac{10}{x^{11}}$$

$$\frac{1}{x^{11}} = x^{-11}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-11} = -11x^{-12} = -\frac{11}{x^{12}}$$

$$\frac{1}{x^{12}} = x^{-12}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-12} = -12x^{-13} = -\frac{12}{x^{13}}$$

$$\frac{1}{x^{13}} = x^{-13}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-13} = -13x^{-14} = -\frac{13}{x^{14}}$$

$$\frac{1}{x^{14}} = x^{-14}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-14} = -14x^{-15} = -\frac{14}{x^{15}}$$

$$\frac{1}{x^{15}} = x^{-15}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-15} = -15x^{-16} = -\frac{15}{x^{16}}$$

$$\frac{1}{x^{16}} = x^{-16}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-16} = -16x^{-17} = -\frac{16}{x^{17}}$$

$$\frac{1}{x^{17}} = x^{-17}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-17} = -17x^{-18} = -\frac{17}{x^{18}}$$

$$\frac{1}{x^{18}} = x^{-18}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-18} = -18x^{-19} = -\frac{18}{x^{19}}$$

$$\frac{1}{x^{19}} = x^{-19}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-19} = -19x^{-20} = -\frac{19}{x^{20}}$$

$$\frac{1}{x^{20}} = x^{-20}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-20} = -20x^{-21} = -\frac{20}{x^{21}}$$

$$\frac{1}{x^{21}} = x^{-21}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-21} = -21x^{-22} = -\frac{21}{x^{22}}$$

$$\frac{1}{x^{22}} = x^{-22}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-22} = -22x^{-23} = -\frac{22}{x^{23}}$$

$$\frac{1}{x^{23}} = x^{-23}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-23} = -23x^{-24} = -\frac{23}{x^{24}}$$

$$\frac{1}{x^{24}} = x^{-24}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-24} = -24x^{-25} = -\frac{24}{x^{25}}$$

$$\frac{1}{x^{25}} = x^{-25}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-25} = -25x^{-26} = -\frac{25}{x^{26}}$$

$$\frac{1}{x^{26}} = x^{-26}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-26} = -26x^{-27} = -\frac{26}{x^{27}}$$

$$\frac{1}{x^{27}} = x^{-27}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-27} = -27x^{-28} = -\frac{27}{x^{28}}$$

$$\frac{1}{x^{28}} = x^{-28}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-28} = -28x^{-29} = -\frac{28}{x^{29}}$$

$$\frac{1}{x^{29}} = x^{-29}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-29} = -29x^{-30} = -\frac{29}{x^{30}}$$

$$\frac{1}{x^{30}} = x^{-30}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-30} = -30x^{-31} = -\frac{30}{x^{31}}$$

$$\frac{1}{x^{31}} = x^{-31}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-31} = -31x^{-32} = -\frac{31}{x^{32}}$$

$$\frac{1}{x^{32}} = x^{-32}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-32} = -32x^{-33} = -\frac{32}{x^{33}}$$

$$\frac{1}{x^{33}} = x^{-33}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-33} = -33x^{-34} = -\frac{33}{x^{34}}$$

$$\frac{1}{x^{34}} = x^{-34}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-34} = -34x^{-35} = -\frac{34}{x^{35}}$$

$$\frac{1}{x^{35}} = x^{-35}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-35} = -35x^{-36} = -\frac{35}{x^{36}}$$

$$\frac{1}{x^{36}} = x^{-36}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-36} = -36x^{-37} = -\frac{36}{x^{37}}$$

$$\frac{1}{x^{37}} = x^{-37}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-37} = -37x^{-38} = -\frac{37}{x^{38}}$$

$$\frac{1}{x^{38}} = x^{-38}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-38} = -38x^{-39} = -\frac{38}{x^{39}}$$

$$\frac{1}{x^{39}} = x^{-39}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-39} = -39x^{-40} = -\frac{39}{x^{40}}$$

$$\frac{1}{x^{40}} = x^{-40}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-40} = -40x^{-41} = -\frac{40}{x^{41}}$$

$$\frac{1}{x^{41}} = x^{-41}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-41} = -41x^{-42} = -\frac{41}{x^{42}}$$

$$\frac{1}{x^{42}} = x^{-42}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-42} = -42x^{-43} = -\frac{42}{x^{43}}$$

$$\frac{1}{x^{43}} = x^{-43}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-43} = -43x^{-44} = -\frac{43}{x^{44}}$$

$$\frac{1}{x^{44}} = x^{-44}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-44} = -44x^{-45} = -\frac{44}{x^{45}}$$

$$\frac{1}{x^{45}} = x^{-45}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-45} = -45x^{-46} = -\frac{45}{x^{46}}$$

$$\frac{1}{x^{46}} = x^{-46}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-46} = -46x^{-47} = -\frac{46}{x^{47}}$$

$$\frac{1}{x^{47}} = x^{-47}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-47} = -47x^{-48} = -\frac{47}{x^{48}}$$

$$\frac{1}{x^{48}} = x^{-48}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-48} = -48x^{-49} = -\frac{48}{x^{49}}$$

$$\frac{1}{x^{49}} = x^{-49}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-49} = -49x^{-50} = -\frac{49}{x^{50}}$$

$$\frac{1}{x^{50}} = x^{-50}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-50} = -50x^{-51} = -\frac{50}{x^{51}}$$

$$\frac{1}{x^{51}} = x^{-51}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-51} = -51x^{-52} = -\frac{51}{x^{52}}$$

$$\frac{1}{x^{52}} = x^{-52}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-52} = -52x^{-53} = -\frac{52}{x^{53}}$$

$$\frac{1}{x^{53}} = x^{-53}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-53} = -53x^{-54} = -\frac{53}{x^{54}}$$

$$\frac{1}{x^{54}} = x^{-54}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-54} = -54x^{-55} = -\frac{54}{x^{55}}$$

$$\frac{1}{x^{55}} = x^{-55}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-55} = -55x^{-56} = -\frac{55}{x^{56}}$$

$$\frac{1}{x^{56}} = x^{-56}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-56} = -56x^{-57} = -\frac{56}{x^{57}}$$

$$\frac{1}{x^{57}} = x^{-57}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-57} = -57x^{-58} = -\frac{57}{x^{58}}$$

$$\frac{1}{x^{58}} = x^{-58}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-58} = -58x^{-59} = -\frac{58}{x^{59}}$$

$$\frac{1}{x^{59}} = x^{-59}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-59} = -59x^{-60} = -\frac{59}{x^{60}}$$

$$\frac{1}{x^{60}} = x^{-60}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-60} = -60x^{-61} = -\frac{60}{x^{61}}$$

$$\frac{1}{x^{61}} = x^{-61}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-61} = -61x^{-62} = -\frac{61}{x^{62}}$$

$$\frac{1}{x^{62}} = x^{-62}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-62} = -62x^{-63} = -\frac{62}{x^{63}}$$

$$\frac{1}{x^{63}} = x^{-63}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-63} = -63x^{-64} = -\frac{63}{x^{64}}$$

$$\frac{1}{x^{64}} = x^{-64}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-64} = -64x^{-65} = -\frac{64}{x^{65}}$$

$$\frac{1}{x^{65}} = x^{-65}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-65} = -65x^{-66} = -\frac{65}{x^{66}}$$

$$\frac{1}{x^{66}} = x^{-66}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-66} = -66x^{-67} = -\frac{66}{x^{67}}$$

$$\frac{1}{x^{67}} = x^{-67}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-67} = -67x^{-68} = -\frac{67}{x^{68}}$$

$$\frac{1}{x^{68}} = x^{-68}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-68} = -68x^{-69} = -\frac{68}{x^{69}}$$

$$\frac{1}{x^{69}} = x^{-69}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-69} = -69x^{-70} = -\frac{69}{x^{70}}$$

$$\frac{1}{x^{70}} = x^{-70}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-70} = -70x^{-71} = -\frac{70}{x^{71}}$$

$$\frac{1}{x^{71}} = x^{-71}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-71} = -71x^{-72} = -\frac{71}{x^{72}}$$

$$\frac{1}{x^{72}} = x^{-72}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-72} = -72x^{-73} = -\frac{72}{x^{73}}$$

$$\frac{1}{x^{73}} = x^{-73}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-73} = -73x^{-74} = -\frac{73}{x^{74}}$$

$$\frac{1}{x^{74}} = x^{-74}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-74} = -74x^{-75} = -\frac{74}{x^{75}}$$

$$\frac{1}{x^{75}} = x^{-75}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-75} = -75x^{-76} = -\frac{75}{x^{76}}$$

$$\frac{1}{x^{76}} = x^{-76}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-76} = -76x^{-77} = -\frac{76}{x^{77}}$$

$$\frac{1}{x^{77}} = x^{-77}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-77} = -77x^{-78} = -\frac{77}{x^{78}}$$

$$\frac{1}{x^{78}} = x^{-78}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-78} = -78x^{-79} = -\frac{78}{x^{79}}$$

$$\frac{1}{x^{79}} = x^{-79}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-79} = -79x^{-80} = -\frac{79}{x^{80}}$$

$$\frac{1}{x^{80}} = x^{-80}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-80} = -80x^{-81} = -\frac{80}{x^{81}}$$

$$\frac{1}{x^{81}} = x^{-81}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-81} = -81x^{-82} = -\frac{81}{x^{82}}$$

$$\frac{1}{x^{82}} = x^{-82}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-82} = -82x^{-83} = -\frac{82}{x^{83}}$$

$$\frac{1}{x^{83}} = x^{-83}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-83} = -83x^{-84} = -\frac{83}{x^{84}}$$

$$\frac{1}{x^{84}} = x^{-84}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-84} = -84x^{-85} = -\frac{84}{x^{85}}$$

$$\frac{1}{x^{85}} = x^{-85}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-85} = -85x^{-86} = -\frac{85}{x^{86}}$$

$$\frac{1}{x^{86}} = x^{-86}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-86} = -86x^{-87} = -\frac{86}{x^{87}}$$

$$\frac{1}{x^{87}} = x^{-87}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-87} = -87x^{-88} = -\frac{87}{x^{88}}$$

$$\frac{1}{x^{88}} = x^{-88}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-88} = -88x^{-89} = -\frac{88}{x^{89}}$$

$$\frac{1}{x^{89}} = x^{-89}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-89} = -89x^{-90} = -\frac{89}{x^{90}}$$

$$\frac{1}{x^{90}} = x^{-90}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-90} = -90x^{-91} = -\frac{90}{x^{91}}$$

$$\frac{1}{x^{91}} = x^{-91}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-91} = -91x^{-92} = -\frac{91}{x^{92}}$$

$$\frac{1}{x^{92}} = x^{-92}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-92} = -92x^{-93} = -\frac{92}{x^{93}}$$

$$\frac{1}{x^{93}} = x^{-93}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-93} = -93x^{-94} = -\frac{93}{x^{94}}$$

$$\frac{1}{x^{94}} = x^{-94}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-94} = -94x^{-95} = -\frac{94}{x^{95}}$$

$$\frac{1}{x^{95}} = x^{-95}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-95} = -95x^{-96} = -\frac{95}{x^{96}}$$

$$\frac{1}{x^{96}} = x^{-96}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-96} = -96x^{-97} = -\frac{96}{x^{97}}$$

$$\frac{1}{x^{97}} = x^{-97}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-97} = -97x^{-98} = -\frac{97}{x^{98}}$$

$$\frac{1}{x^{98}} = x^{-98}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-98} = -98x^{-99} = -\frac{98}{x^{99}}$$

$$\frac{1}{x^{99}} = x^{-99}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-99} = -99x^{-100} = -\frac{99}{x^{100}}$$

$$\frac{1}{x^{100}} = x^{-100}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-100} = -100x^{-101} = -\frac{100}{x^{101}}$$

$$A \frac{p+q}{p+q} = p \frac{p}{p} - \frac{r}{n} p \frac{p}{p} q + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \frac{p}{p} q^2 - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \frac{p}{p} q^3 + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \times \frac{r}{n} + 3 \frac{p}{p} q^4 - \&c.$$

$$B \frac{1+z}{1+z} = 1 - \frac{r}{n} z + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \frac{z^2}{2} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \frac{z^3}{2 \times 3} + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \times \frac{r}{n} + 3 \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} - \&c.$$

$$C \frac{1}{1+z} = 1 - \frac{r}{n} z + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \frac{z^2}{2} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \frac{z^3}{2 \times 3} + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \times \frac{r}{n} + 3 \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} - \&c.$$

$$I = 1 - \frac{r}{n} z + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \frac{z^2}{2} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \frac{z^3}{2 \times 3} + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \times \frac{r}{n} + 3 \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} - \&c.$$

$$D \frac{1}{1+z} = 1 - \frac{r}{n} z + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \frac{z^2}{2} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \times \frac{r}{n} - 2 \frac{z^3}{2 \times 3} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \times \frac{r}{n} - 2 \times \frac{r}{n} - 3 \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} - \&c.$$

$$E \frac{1}{1+z} = 1 - \frac{r}{n} z + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \frac{z^2}{2} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \frac{z^3}{2 \times 3} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 3 \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} - \&c.$$

$$+ \frac{r}{n} z - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} z^2 + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 2 \frac{z^3}{2} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} + 2 \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} - \&c.$$

$$+ \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \frac{z^2}{2} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \frac{z^3}{2} + \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} + 1 \times \frac{r}{n} - 1 \frac{z^4}{2 \times 3} - \&c.$$

$$+ \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \times \frac{r}{n} - 2 \frac{z^3}{2 \times 3} - \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \times \frac{r}{n} - 2 \frac{z^4}{2 \times 3} - \&c.$$

$$+ \frac{r}{n} \times \frac{r}{n} - 1 \times \frac{r}{n} - 2 \times \frac{r}{n} - 3 \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4} - \&c.$$

+ &c.

CD Lyon 1

$$A + B = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

$$B + C = \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{b+c}{n}$$

$$C + D = \frac{c}{n} + \frac{d}{n} = \frac{c+d}{n}$$

$$D + E = \frac{d}{n} + \frac{e}{n} = \frac{d+e}{n}$$

$$E + F = \frac{e}{n} + \frac{f}{n} = \frac{e+f}{n}$$

$$F + G = \frac{f}{n} + \frac{g}{n} = \frac{f+g}{n}$$

$$G + H = \frac{g}{n} + \frac{h}{n} = \frac{g+h}{n}$$

$$H + I = \frac{h}{n} + \frac{i}{n} = \frac{h+i}{n}$$

$$I + J = \frac{i}{n} + \frac{j}{n} = \frac{i+j}{n}$$

$$J + K = \frac{j}{n} + \frac{k}{n} = \frac{j+k}{n}$$

$$K + L = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = \frac{k+l}{n}$$

$$L + M = \frac{l}{n} + \frac{m}{n} = \frac{l+m}{n}$$

$$M + N = \frac{m}{n} + \frac{n}{n} = \frac{m+n}{n}$$

$$N + O = \frac{n}{n} + \frac{o}{n} = \frac{n+o}{n}$$

$$O + P = \frac{o}{n} + \frac{p}{n} = \frac{o+p}{n}$$

$$P + Q = \frac{p}{n} + \frac{q}{n} = \frac{p+q}{n}$$

$$Q + R = \frac{q}{n} + \frac{r}{n} = \frac{q+r}{n}$$

$$R + S = \frac{r}{n} + \frac{s}{n} = \frac{r+s}{n}$$

$$S + T = \frac{s}{n} + \frac{t}{n} = \frac{s+t}{n}$$

$$T + U = \frac{t}{n} + \frac{u}{n} = \frac{t+u}{n}$$

$$U + V = \frac{u}{n} + \frac{v}{n} = \frac{u+v}{n}$$

$$V + W = \frac{v}{n} + \frac{w}{n} = \frac{v+w}{n}$$

$$W + X = \frac{w}{n} + \frac{x}{n} = \frac{w+x}{n}$$

$$X + Y = \frac{x}{n} + \frac{y}{n} = \frac{x+y}{n}$$

$$Y + Z = \frac{y}{n} + \frac{z}{n} = \frac{y+z}{n}$$

$$Z + A = \frac{z}{n} + \frac{a}{n} = \frac{z+a}{n}$$

$$p^{m-4} q^4 = -\frac{5}{8} b^4 - \frac{5}{4} b^5 - \frac{15}{16} b^6 - \frac{1}{16} b^7 - \frac{5}{112} b^8.$$

Le 6^{eme}, &c. & c'est la somme de tous ces termes qui doit être la racine cherchée.

A l'inspection de cette quantité, on a de la peine à croire qu'elle puisse se réduire à $1 + b$ qu'on sçait être la racine cherchée. Mais la généralité de la démonstration précédente, & une certaine expérience du calcul, assurent bientôt de cette réduction.

En ajoutant tous ces termes, on remarque que le premier 1 reste tout entier; que le second $b + \frac{1}{2} b^2$ se réduit à b , parce que la partie $\frac{1}{2} b^2$ de ce second terme est détruite par la même quantité contenue négativement dans le troisième terme $-\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^3 - \frac{1}{8} b^4$; que ce qui reste du troisième terme $-\frac{1}{2} b^3 - \frac{1}{8} b^4$, après la destruction de $\frac{1}{2} b^2$ est entièrement détruit aussi par le quatrième $\frac{1}{2} b^3 + \frac{3}{4} b^4 + \frac{3}{8} b^5 + \frac{1}{16} b^6$ dont il ne reste plus alors que $\frac{3}{8} b^4 + \frac{3}{8} b^5 + \frac{1}{16} b^6$. Ce reste du quatrième terme se trouve détruit de même par le cinquième terme; & en poussant les réductions plus loin, on voit que tout s'évanouit dans la quantité précédente, excepté $1 + b$, ainsi que cela devoit arriver.

L VII.

Outre que cet exemple & tous ceux de même nature, qu'il est aisé de former, confirment, pour ainsi dire, par expérience, la proposition démontrée, article LI, ils montrent en même temps une utilité réelle de cette proposition;

Lorsque les quantités n'ont point

S

de racines exactes, on en trouve d'approchées par la méthode précédente. puisqu'il en résulte une méthode pour extraire les racines de toutes les quantités qui sont des puissances complètes. Mais ce n'est pas-là le seul avantage qu'on en puisse retirer. Lorsque la quantité proposée n'aura point de racine exacte, on en pourra trouver une approchée par la formule précédente.

Exemple. Qu'on cherche, par exemple, la racine 5^{eme} de la quantité $a + b$. En substituant la plus grande des deux parties de cette quantité qu'on suppose être a à la place de p , la plus petite b à la place de q , & $\frac{1}{5}$ à la place de m , on aura pour la racine cherchée.....

$$\begin{aligned}
 & a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} a^{-\frac{4}{5}} b - \frac{1 \times 4}{2 \times 25} a^{-\frac{9}{5}} b^2 \\
 & + \frac{1 \times 4 \times 9}{2 \times 3 \times 125} a^{-\frac{14}{5}} b^3 - \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14}{2 \times 3 \times 4 \times 625} \\
 & a^{-\frac{19}{5}} b^4 + \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14 \times 19}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3125} a^{-\frac{24}{5}} b^5 - \&c. \\
 \text{ou } & a^{\frac{1}{5}} \times 1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \frac{6b^3}{125a^3} - \frac{21b^4}{625a^4} \\
 & + \&c.
 \end{aligned}$$

Ce que c'est qu'une série ou suite infinie. Or, quoiqu'il fallût former de la même manière une infinité de termes, pour que la quantité précédente, qui est de celles qu'on appelle suite ou série infinie, exprimât exactement la racine cherchée, il est certain néanmoins qu'en se contentant de prendre un grand nombre de

ces termes, on approche extrêmement de la valeur de la racine cherchée. S'il arrive même que a soit considérablement plus grand que b , on n'a besoin que de peu de termes pour approcher sensiblement de la vraie racine.

Qu'on suppose, par exemple, $b = \frac{1}{10} a$, on aura pour les six premiers termes de la suite précédente

$$a \times 1 + \frac{1}{50} - \frac{2}{1250} + \frac{3}{62500} - \frac{21}{6250000} + \frac{399}{15625000000}$$

Or, si on fait attention à la considérable diminution successive de ces six termes, on voit que ceux qu'on pourroit y joindre, seroient si petits, qu'ils ne valent pas la peine d'être cherchés.

LVI II I.

L'utilité de la formule des puissances ne se borne pas encore à trouver par approximation toutes sortes de puissances fractionnaires ou négatives; elle est infiniment plus étendue en servant à réduire en séries toutes sortes de quantités où il entre tant de signes radicaux, diviseurs, &c. qu'on voudra. Qu'on ait, par exemple, la quantité

Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente.

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a+b}} + \sqrt[3]{\sqrt[4]{a-b}}}{\sqrt[5]{a+b} - \sqrt[5]{a-b}}, \text{ en réduisant d'abord les deux quantités } \sqrt[3]{\sqrt[4]{a+b}}$$

& $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a-b}}$ en séries, & les ajoutant, puis en élevant la série qui en est la somme à la puissance $\frac{1}{3}$, on formera une nouvelle série, qui étant multipliée ensuite par celle qu'on trouve-

Sij

roit de même pour $\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$,

ou $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$ donneroit enfin une seule série pour exprimer la quantité proposée. Or, indépendamment de l'avantage d'avoir par approximation toutes les quantités composées de radicaux & de diviseurs complexes, il y a une infinité de cas où il est très-utile pour des démonstrations, que les quantités à traiter, soient délivrées de radicaux & diviseurs complexes, ainsi qu'elles le sont par leurs transformations en séries. Mais il est tems de retourner à la résolution des équations.





ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

CINQUIÈME PARTIE.

Résolution des équations du troisième & du quatrième degré.

LORSQU'ON aura voulu passer des équations exprimées généralement par $ax^m = b$ & $ax^{2m} + bx^m = c$, à celles qui contenoient, outre ces termes, les intermédiaires, on a bientôt senti des difficultés qui ont fait abandonner l'espérance de résoudre ces équations en général. On n'a pû parvenir jusqu'à présent qu'à la solution de celles du troisième & du quatrième degré, encore la méthode qu'on a trouvée pour les résoudre, souffre-t-elle une exception considérable : voici le chemin qu'on a dû suivre en découvrant cette méthode.

S iij

I.

Equation
du troisié-
me degré la
plus com-
posée.

Soient représentées par l'équation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$, toutes celles du troisiéme degré. Si on pouvoit réduire cette équation à une autre qui n'eût que le premier & que le dernier terme, il est évident que ce seroit l'avoir résolue. Or le moyen le plus naturel de transformer une équation en une autre, dans laquelle on soit libre de faire quelque changement, c'est de substituer dans cette équation à la place de l'inconnue quelque quantité, dans laquelle on laisse une lettre indéterminée, afin de pouvoir s'en servir à volonté.

I I.

Transfor-
mation par
laquelle on
fait éva-
nour un
terme quel-
conque de
cette équation.

Soit donc substitué dans cette équation $x+r$ au lieu de y , il viendra $x^3 + 3rx^2 + 3r^2x + r^3 + dx^2 + 2drx + dr^2 + ex + er + f = 0$, que l'on écrit aussi de cette manière.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3rx^2 + 3r^2x + r^3 = 0 \\ + \quad d \quad + 2dr \quad + dr^2 \\ + \quad \quad \quad + \quad e \quad + er \\ + \quad \quad \quad \quad \quad + f \end{array}$$

Comme on est le maître de r dans cette équation, il est aisé de voir qu'on peut par son moyen faire évanouir celui des termes qu'on voudra, mais aussi on n'en sçauroit faire disparaître qu'un à-la-fois.

Qu'on fasse, par exemple, $3r + d = 0$;

ou $r = -\frac{1}{3}d$, le second terme s'évanouira, & l'équation deviendra

$$x^3 + ex + \frac{2}{27}d^3 = 0$$

$$-\frac{d^2}{3} - \frac{de}{3}$$

$$+ f$$

Si on fait au contraire $3rr + 2dr + e = 0$;

ou $r = -\frac{1}{3}d + \sqrt{-\frac{e}{3} + \frac{1}{9}dd}$, le

troisième terme s'évanouira; mais les deux autres resteront.

Si on vouloit faire évanouir le dernier terme, il faudroit faire $r^3 + dr^2 + er + f = 0$; & alors pour avoir r , il faudroit résoudre une équation pareille à la proposée.

Avec un peu de connoissance du calcul, on devoit bien s'attendre que la substitution de $x + r$ à la place de y ne pouvoit pas faire évanouir plusieurs termes à-la-fois, parce que l'introduction d'une inconnue ne peut servir qu'à résoudre une seule équation; ou, ce qui revient au même, à remplir une condition: or l'évanouissement de chaque terme fait une condition. Mais si par cette transformation on n'est pas parvenu entièrement au but que l'on avoit eu de réduire l'équation proposée à deux termes, on a du moins changé la question en une nouvelle qui paroît plus simple, puisqu'il ne s'agit plus que d'une équation à trois termes.

Des deux équations transformées qu'on peut avoir en faisant évanouir, ou le premier, ou le second terme; la première, c'est-à-dire,

S iv

$$x^3 + \frac{e}{d^2} x + \frac{\frac{2}{27} d^3}{de} = 0$$

$$- \frac{\quad}{3} \quad - \frac{\quad}{3}$$

$$+ f$$

est la plus simple ; aussi est-ce celle que nous allons chercher à résoudre, en tâchant de diminuer encore ses termes : mais nous suspendrons un moment cette recherche ; parce que la méthode qu'on vient d'employer pour transformer les équations du troisième degré, offre si naturellement de nouvelles vérités sur les équations de tous les autres degrés, qu'il est à propos de s'y arrêter un peu.

I I I.

On voit d'abord qu'à l'aide de la même transformation de y en $x+r$, on peut aussi faire évanouir le terme qu'on voudra d'une équation d'un degré quelconque.

Transformation précédente appliquée à une équation du quatrième degré.

Qu'on ait, par exemple, l'équation du quatrième degré la plus générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, en y substituant $x+r$ au lieu de y , on aura

$$x^4 + 4r x^3 + 6r^2 x^2 + 4r^3 x + r^4 = 0$$

$$+ a \quad + 3ar \quad + 3ar^2 \quad + ar^3$$

$$+ b \quad + 2br \quad + br^2$$

$$+ c \quad + cr$$

$$+ d$$

dans laquelle faisant $4r + a = 0$, ou $r + \frac{1}{4}a$, on aura une équation du quatrième degré qui n'aura point de second terme.

De même en déterminant r par l'équation du second degré $6r^2 + 3ar + b = 0$, on aura une équation du quatrième degré qui n'aura point de troisième terme. Et en faisant r tel qu'il conviendrait pour résoudre l'équation du 3^{ème} degré $4r^3 + 3ar^2 + 2br + c = 0$, on auroit une équation du 4^{ème} degré qui n'auroit point de quatrième terme. Le cinquième s'en iroit de même par le moyen d'une équation du 4^{ème} degré. Mais on ne s'arrête pas ordinairement à faire évanouir d'autres termes que le second, parce que l'évanouissement des autres termes amène presque toujours des calculs compliqués de radicaux & fort pénibles.

Ce n'est ordinairement que le second terme qu'on fait évanouir.

I V.

Dans une équation générale du cinquième degré $y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$, la transformée $y = x + r$ donne l'équation $x^5 + 5rx^4 +$, &c. dont le second terme

Evanouissement du second terme dans une équation du cinquième degré.

+ a s'évanouira par l'équation du premier degré $5r + a = 0$, ou $r = -\frac{1}{5}a$.

V.

Et en général dans une équation d'un degré quelconque m représentée par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} +$ &c. $= 0$, il sera aisé de trouver par la formule des puissances donnée dans la I V^{ème} Partie, article XLVIII, que le second terme s'évanouira en faisant l'inconnue

Dans une équation du degré quelconque m .

$$x = y - \frac{a}{m}.$$

V I.

Après cette petite digression, remettons- Résolution

de l'équation générale $x^3 + p x + q = 0$. nous à chercher la solution de l'équation du troisième degré.

$* q = 0$.

$$x^3 + \frac{e}{d^2} x + \frac{\frac{2}{27} d^3}{d e} = 0$$

$$- \frac{\quad}{3} - \frac{\quad}{3}$$

$$+ f$$

à laquelle l'équation générale $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$, s'étoit réduite par la supposition de $y = x - \frac{1}{3}d$; & pour abrégér les calculs, écrivons-la ainsi, $x^3 + px + q = 0$.

En suivant l'idée que nous avons déjà employée, faisons encore une transformée. Substituons, par exemple, $u + z$ à la place de x ; non dans la vûe de faire évanouir un terme de cette équation, ainsi qu'on se l'étoit proposé la première fois; car on verroit bientôt que le terme qui avoit disparu reviendroit, mais pour décomposer cette équation en d'autres qui soient plus simples. Sans voir distinctement qu'un tel moyen doit réussir, on sent bien que la transformation d'une équation en une autre, où l'on a une lettre à déterminer à volonté, ne peut guères manquer d'être utile.

La substitution de $x = u + z$ étant faite, il vient $u^3 + 3uu z + 3uz z + z^3 + pu + pz + q = 0$. Supposons maintenant que l'une des inconnues u ou z soit telle que $u^3 + z^3 + q = 0$, on aura, en ce cas, l'équation $3u^2 z + 3uz^2 + pu + pz = 0$, qui étant divisée par $u + z$, donne $3uz + p = 0$, ou $u = -\frac{p}{3z}$. Voilà donc une équation avec

laquelle on chassera facilement une des inconnues introduites; il ne s'agit plus que de sçavoir quelle sera l'équation qui déterminera l'autre inconnue. Pour cela, il faut remettre cette valeur de u dans la première équation $u^3 + z^3 + q = 0$; ce qui donnera $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 + q = 0$, ou $z^6 + qz^3 = \frac{p^3}{27}$. Or, cette équation, quoique d'un degré plus haut que la proposée, est cependant bien plus facile à résoudre; car elle est de la classe de celles que nous avons résolues dans la quatrième partie, article XX, & la valeur qu'elle donne pour z est

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}. \text{ Donc } u, \text{ ou } -\frac{p}{3z} \text{ fera } -\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}$$

qui se réduit facilement à.....

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$; car on peut voir assez facilement que le produit de $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ par.....,....., $+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ est $\frac{1}{27}p^3$ & partant que $\frac{1}{3}p$ est le produit des racines cubes de ces quantités. Ajoutons présentement ces valeurs de u & de z , & nous aurons $u + z$, ou

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}, \text{ ou sim.}$$

plement $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

$-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$; car en prenant le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ en $-$, on n'a pas une valeur de x différente de celle qu'on a en le prenant en $+$.

V I I.

La formule précédente ne donne qu'une des trois racines.

Maniere d'avoir les deux autres.

Par cette valeur de x , on voit qu'il n'en est pas des équations du troisième degré comme de celles du second, où la même expression d'une racine marquoit, à l'aide du signe \pm , les deux racines à-la-fois; ici on trouve une expression qui ne sçauroit désigner qu'une des trois valeurs de x .

Pour trouver les deux autres, il faut diviser l'équation $x^3 + px + q = 0$, par la racine que donne la valeur précédente de x , & l'équation du second degré qui en fera le quotient, donnera par sa résolution les deux autres racines cherchées.

Si on veut trouver la valeur générale de ces deux racines, il faut faire pour abrégier les calculs

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = m,$$

$$\& \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = n,$$

& faire attention qu'en ce cas $mn = \frac{1}{3}p$ & $m^3 - n^3 = q$. Cela posé, la division de l'équation $x^3 + px + q = 0$ par $x + m - n$, qui est alors la racine qu'on vient de

trouver, donnera pour quotient $x x + n x - m x + m m + n n + m n = 0$, dont les deux racines, c'est-à-dire celles qui nous restent à trouver dans l'équation $x^3 + p x + q = 0$,

sont $x = \frac{m - n}{2} \pm \frac{1}{2} \times m + n \sqrt{-3}$, ou

$$x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$$

qui sont nécessairement imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle. On auroit pû reconnoître dès l'article V de la quatrième Partie, où il n'étoit question que des équations à deux termes, l'espèce d'imperfection que donne à la solution des équations du troisième degré la différence de forme des trois racines, mais cette espèce d'imperfection est ici plus frappante, en se trouvant dans la solution générale.

VIII.

Ce désavantage de la solution précédente des équations du troisième degré n'en peut paroître un qu'à ceux qui considèrent, pour ainsi-dire, métaphysiquement l'Algebre; mais il y en a un autre bien plus frappant pour tout le monde, & qui a extrêmement exercé tous les Calculateurs. C'est que cette solution n'apprend rien du tout pour la valeur de x toutes les fois que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$, & qu'il est en même-temps négatif. Dans ce cas, qui est très-étendu, la valeur de la quantité $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$ est imaginaire, & par conséquent les deux quan-

Cas où la formule précédente ne sçauroit faire connoître x à cause des imaginaires qu'elle renferme.

tités $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ &

$-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ qui com-

posent la valeur de x font imaginaires aussi ; mais on n'en sçauroit conclure pour cela que la valeur de x soit imaginaire ; ce qui, bien loin d'être regardé comme un vice de la solution, la rendroit une solution complète ; & on ne sçauroit non plus, du moins par les méthodes connues jusqu'à présent, déterminer quelle est la quantité réelle qu'exprime cette valeur de x .

I X.

Non-seulement on ne sçauroit conclure de l'expression que x a dans ce cas, que la racine cherchée est imaginaire ; mais on s'est assuré par divers moyens que cette valeur étoit toujours réelle alors : voici de tous ces moyens celui * qui m'a paru le plus direct.

On démontre cependant que dans ce cas x est réel.

Soit repris la valeur

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$

$-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ de x , &

soit mis dans cette valeur à la place de $\frac{1}{2}q$, a , & à la place de $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ supposé imaginaire, $b\sqrt{-1}$, on aura

$x = \sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$.

* Je l'ai tiré d'un Mémoire de M. Nicole, Mém. de l'Acad. année 1733, p. 99 & 100.

Cherchons maintenant les valeurs de . . .

$\sqrt[3]{-a+ b\sqrt{-1}}$ & de $-\sqrt[3]{a+ b\sqrt{-1}}$
 par la formule donnée dans la quatrième Par-
 tie, article XLVIII, pour l'élevation du
 binome.

La première de ces deux quantités devien-

$$\begin{aligned} & \text{dra } -a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} b \sqrt{-1} - \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} \\ & b^2 - \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} b^3 \sqrt{-1} + \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} \\ & b^4 + \&c. \end{aligned}$$

Et la seconde,

$$\begin{aligned} & -a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} b \sqrt{-1} - \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} b^2 \\ & + \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} b^3 \sqrt{-1} + \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} b^4 \\ & - \&c. \text{ \& par conséquent la valeur de } x \text{ fera} \\ & \text{la suite infinie } -2 a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} a^{-\frac{5}{3}} b^2 + \\ & \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} b^4 - \frac{308}{6561} a^{-\frac{17}{3}} b^6 + \&c. \end{aligned}$$

ou

$$-2 a^{\frac{1}{3}} \times 1 + \frac{b^2}{9 a^2} - \frac{10 b^4}{243 a^4} + \frac{154 b^6}{6561 a^6} -$$

&c. qui ne contient aucune racine imaginaire.
 Donc dans le cas où $\frac{1}{27} p^3$ est négatif & plus
 grand que $\frac{1}{4} q q$ la valeur

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{27} p^3 + \frac{1}{4} q^2}}$$

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{27} p^3 + q^2}}$ de x , qui
 est alors sous une forme imaginaire, est cepen-

dant une quantité toujours réelle. Malheureusement on n'a pu jusqu'à présent lui trouver une forme réelle qu'en admettant, ainsi qu'on vient de faire, une infinité de termes dans son expression; ce qui ne peut servir qu'à prouver que cette valeur est réelle, mais non à la faire connoître exactement.

X.

Par la même méthode on trouvera une valeur approchée de x .

Si on veut se contenter d'une approximation, on pourra faire usage de la série précédente; car, en supposant a plus grand que b , les termes de cette série iront en diminuant, & par conséquent on pourra négliger les derniers, quand ils seront parvenus à n'être que de très-petites quantités. S'il arrive, au contraire, que a soit plus petit que b , il faudra en employant la formule du binome pour trou-

ver $\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, avoir l'attention de prendre $b\sqrt{-1}$ pour le premier terme du binome, & a pour le second; l'on aura alors pour la valeur de x ou de $\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$ la quantité $+\frac{2}{3}b^{-\frac{2}{3}}a - \frac{10}{81}b^{-\frac{8}{3}}a^3 + \frac{44}{729}b^{-\frac{14}{3}}a^5 - \frac{742}{19693}b^{-\frac{20}{3}}a^7 + \&c.$ ou

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}x - 1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6}$$

—, &c. qui est aussi réelle que l'autre expression, & dont tous les termes décroissent, quand a est plus petit que b .

XI.

X I.

Les deux autres valeurs d' x sont aussi réelles dans le même cas.

Nous avons vû, article VII, que des trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ celles qui sont exprimées par

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \pm \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$$

sont toutes deux imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ étoit une quantité réelle.

Nous allons voir présentement que ces deux racines sont toujours réelles toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ est imaginaire, c'est-à-dire, toutes les fois que p est négatif, & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Car, si on change à l'aide des dénominations qu'on vient d'employer l'expression de ces deux valeurs de x en

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} \times \sqrt{-3}$$

& qu'on réduise, ainsi qu'on vient de faire, les quantités $\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$ en séries, on aura pour ces deux valeurs de x ,

$$a^{\frac{1}{3}} \times 1 + \frac{bb}{9aa} - \frac{10b^4}{243a^4} + \frac{154b^6}{6561a^5} - \&c.$$

$$\pm \frac{b}{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}} \times 1 - \frac{5bb}{27aa} + \frac{22b^4}{243a^4} - \frac{374b^6}{6561a^5}$$

+ &c. expression entièrement réelle.

T

X I I.

Comment
des racines
de l'équa-
tion $y^3 + px$
 $+ q = 0$, on
tire celles
de l'équa-
tion $y^3 + dy^2$
 $+ ey + f = 0$.

Comme l'équation la plus générale du troi-
sième degré, représentée par $y^3 + dy^2 + ey$
 $+ f = 0$ s'est réduite à

$$x^3 + \frac{ex}{d^2} + \frac{\frac{2}{27}d^3}{de} = 0$$

$$\frac{\quad}{3} + \frac{\quad}{3}$$

ou simplement $x^3 + px + q = 0$, par la sup-
position de $y = x - \frac{1}{3}d$, il s'ensuit que les va-
leurs de y dans l'équation générale $y^3 + dy^2$
 $+ ey + f = 0$ sont celles qu'on a en résolvant
cette dernière équation $x^3 + px + q = 0$, &
en retranchant de ses trois racines $\frac{1}{3}d$.

X I I I.

Une équation du troi-
sième degré
a les trois
racines réelles, ou une
réelle avec
deux imagi-
naires.

De-là, il suit qu'une équation quelconque du
troisième degré, fera entièrement dans le même
cas par rapport aux racines réelles ou imaginai-
res, que l'équation qu'elle produit par l'éva-
nouissement du second terme.

Ainsi on voit, en se rappelant les articles
VII & IX, que toute équation du troisième
degré doit au moins avoir une racine réelle, &
que les deux autres sont toujours, ou toutes deux
réelles, ou toutes deux imaginaires.

X I V.

Comment
on distin-
gue ces cas.

Pour distinguer lequel de ces deux cas arrive
dans une équation du troisième degré donnée,
on commencera par en faire évanouir le second
terme, afin de la pouvoir comparer à l'équation
 $x^3 + px + q = 0$; & lorsque cette opération
sera faite, si p est positif, ou qu'étant négatif il

soit tel que $\frac{1}{27}p^3$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}qq$, il n'y aura qu'une racine réelle, laquelle sera déterminée exactement par la formule de l'art. VI.

Si, au contraire, p est négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ soit plus grand que $\frac{1}{4}qq$, les trois racines seront réelles; mais aucune d'elles ne pourra être déterminée par la formule de l'article VI, à moins qu'on ne se contente d'une approximation comme celle qu'on a en transformant cette formule en une suite infinie.

X V.

S'il arrivoit que $\frac{1}{27}p^3$ fût négatif & égal à $\frac{1}{4}qq$, on pourroit trouver de la difficulté à déterminer auquel des deux cas précédens l'équation se rapporteroit, c'est-à-dire, qu'on ne sçavoit s'il devoit y avoir seulement une racine réelle, ou si toutes les trois le seroient, à cause

Quelles sont les racines, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif & $\frac{1}{4}qq$.

que $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}$ qui est alors zéro, peut également se compter parmi les quantités positives, ou parmi les négatives; mais l'inspection des trois racines ou valeurs d' x trouvées précédemment, décide bientôt la question. Car la première valeur exprimée par

$$\sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

$-\sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ se réduit alors à $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, & les deux autres valeurs exprimées généralement par

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

$$\pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$$

T ij

se réduisent alors à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + 0$, c'est-à-dire, qu'elles sont toutes deux égales à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$. Ainsi les équations où $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ est zéro, sont comptées parmi celles dans lesquelles les trois racines sont réelles.

X V I.

Applica-
tion des
méthodes
précédentes à un
exemple.

Pour faire présentement quelques applications des règles précédentes, supposons d'abord qu'on ait l'équation $y^3 + 3yy - 3y + 25 = 0$ à résoudre; on commencera par faire évanouir le second terme de cette équation; ce qui se fera suivant l'art. II, en supposant $y = x - 1$ & l'équation délivrée du second terme que l'on aura par cette substitution, sera $x^3 - 6x + 30 = 0$ qui étant comparée à $x^3 + px + q = 0$ donne $p = -6$, & $q = 30$.

Ces valeurs étant substituées dans $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, cette quantité devient $\sqrt{217}$ qui est une quantité réelle, ainsi la formule de l'article VI doit donner, en ce cas, la valeur cherchée de x .

Si l'on fait donc dans cette formule

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$
les substitutions de 15 pour $\frac{1}{2}q$ & de $\sqrt{217}$ pour $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, cette valeur générale de x devient $\sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} - \sqrt[3]{15 + \sqrt{217}}$ qui est la seule racine réelle que contienne l'équation $x^3 - 6x + 30 = 0$, & qui ne sauroit être réduite à une plus simple expression. Substituant ensuite la valeur de x dans l'équation $y = x - 1$, on aura

$y = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} - \sqrt[3]{15 + \sqrt{217}} - 1$,
 pour la seule racine réelle de l'équation propo-
 sée $y^3 + 3yy - 3y + 25 = 0$.

XVII.

Si on avoit une équation du sixième degré, où l'inconnue ne se trouvât à aucune dimension impaire, il est évident qu'on la résoudroit par la même méthode que la précédente, puisque cette équation se réduiroit tout de suite au troisième degré par une transformation. Qu'on eût, par exemple, $z^6 + 9z^4 + 39zz + 55 = 0$; en regardant zz comme l'inconnue de cette équation, & supposant, suivant les principes précédens, zz égal à une nouvelle inconnue x moins un tiers du coefficient du second terme, c'est-à-dire $zz = x - 3$, on changera cette équation en $x^3 + 12x - 8 = 0$ qui n'est que du troisième degré, & qui n'a point de second terme.

Autre exemple contenant une équation du sixième degré qui se réduit au troisième.

Comparant alors cette équation avec $x^3 + px + q = 0$, on a $p = 12$, $q = -8$, & partant $\sqrt[3]{\frac{1}{12}p^3 + \frac{1}{4}qq} = \sqrt[3]{80}$; d'où x , ou $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$
 $= \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}$, & comme, par la supposition $zz = x - 3$, ou $z = \sqrt[3]{x - 3}$, on aura alors l'inconnue cherchée $x = \pm \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4} - 3$
 & les deux valeurs que cette expression donne

T iij

en prenant le radical en + & en - font les seules réelles des six que doit avoir l'équation proposée.

En général, qu'on ait une équation telle que $z^3 + az^{2m} + bz^m + c = 0$ on la réduira tout de suite à une du troisième degré & sans second terme, en faisant $z^m = x - \frac{1}{3}a$.

X V I I I.

Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi,

Supposons présentement qu'on ait l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$, à résoudre; cette équation n'ayant point de second terme, on peut tout de suite la comparer à $x^3 + px + q = 0$, & l'on a par cette comparaison $p = 3$ & $q = -4$, & comme p est positif, on voit, par l'article XIV, que la formule générale de l'article VI doit encore réussir dans ce cas. Substituant en effet ces valeurs de p & de q dans la formule générale $x =$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}}$

on a pour la seule valeur réelle de x , $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}}$. Si l'on applique présentement à cette expression la méthode de la quatrième Partie, article XXXV, XXXVIII & XLI, on verra qu'elle se peut aisément réduire, parce que $2 + \sqrt{5}$ est le cube de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, & que $-2 + \sqrt{5}$ est celui de $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. D'où cette valeur de x se réduit à 1.

On auroit pu parvenir à cette même valeur de x sans la formule précédente, en employant

la règle de la troisième Partie, articles XII & XIII; car on auroit trouvé que $x - 1$ étoit un diviseur exact de la quantité $x^3 + 3x - 4$.

XIX.

Soit maintenant proposé de résoudre l'équation $x^3 - 90x - 98 = 0$. En comparant cette équation à l'équation générale $x^3 + px + q = 0$, on a $p = -90$ & $q = -98$: or, p étant négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$ l'équation proposée est de celles qui ne peuvent pas se résoudre par la formule précédente. Je cherche alors par la méthode de la troisième Partie, articles XII & XIII, si elle n'aura pas quelque diviseur, & ayant reconnu qu'elle n'en a point, je me fers de la méthode enseignée, article X, pour trouver une valeur approchée.

Quatrième exemple, dans lequel la formule de l'article VI est insuffisante.

Pour cela, je commence par substituer pour p & q leurs valeurs -90 & -98 dans la formule générale

Application de la méthode de l'article X, pour approcher des racines.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}}$$

& j'ai

$$x = \sqrt[3]{49 + \sqrt{-24599}} - \sqrt[3]{-49 + \sqrt{-24599}}$$

qui étant comparé à l'expression

$\sqrt{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, laquelle étoit devenue (article X,) la suite infinie

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}x - 1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6}$$

— &c. donne $a = -49$, $bb = +24599$,
T iv

qu'il ne s'agit plus que de substituer dans cette suite infinie.

Pour faire cette substitution, je commence par prendre la racine cube de 24599, afin d'avoir $b^{\frac{2}{3}}$, l'opération faite, j'ai environ 29,08 pour cette racine cube, & partant

$$\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}, \text{ ou } \frac{98}{3\sqrt[3]{24599}} \text{ est environ } \frac{10000}{2902}.$$

Quarrant ensuite a & le divisant par bb ; j'ai pour $\frac{aa}{bb}$ environ 0,0976, dont le carré

0,00952 est la valeur de $\frac{a^4}{b^4}$; quant à la va-

leur de $\frac{a^6}{b^6}$, & des puissances plus élevées; elle est inutile dans cette suite dont la marche est assez prompte.

Faisant alors les substitutions des valeurs de

$\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ à la place de ces quantités, j'ai en-

viron $-1,104$ pour la valeur de x donnée par la formule de l'article VI; si on veut avoir les deux autres valeurs de x qui doivent aussi être réelles, suivant l'article XIV, il n'y a qu'à diviser l'équation $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1,104$ qui est à très-peu de chose près, suivant ce que l'on vient de voir, une de ses racines. La division faite; on a pour quotient $xx - 1,104x - 88,781$, & pour reste 0,0142 quantité assez petite pour être négligée; de sorte qu'on peut regarder l'équation $xx - 1,504x - 88,781 = 0$,

comme le quotient exact de la division de $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x - 1$, 104, & comme le produit des deux racines cherchées. Résolvant donc cette équation, on a pour les deux valeurs de x qu'elle donne $x = 0$, $552 \pm \sqrt{89}$, 0857, c'est-à-dire $+9,990$ & $-8,886$.

Ainsi les trois valeurs de x dans l'équation proposée $x^3 - 90x - 98 = 0$ sont à peu près -1 , 104; $+9,990$; $-8,886$. Quant aux valeurs exactes, aucunes des méthodes connues jusqu'à présent ne sauroient les faire trouver, & toute équation, qui ayant, comme la précédente, ses coefficients rationnels n'aura aucun diviseur rationnel, sera de même irrésoluble par ces méthodes lorsque $\frac{1}{27}p^3$ sera négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Cas irrésoluble du troisième degré.

X X.

La méthode que nous venons d'employer pour résoudre par approximation les équations du troisième degré dont les trois racines sont réelles, a cet inconvénient, que lorsque a diffère peu de b , les termes de la série qui exprime la valeur de x décroissent si lentement, qu'il en faut un très-grand nombre pour approcher un peu exactement de la vraie valeur de x , & que par conséquent les calculs deviennent extrêmement pénibles. Il est donc à propos de chercher quelque méthode plus généralement commode dans la pratique.

Inconvénient de l'approximation en série, article X.

X X I.

Autre méthode d'approximation générale & facile dans la pratique.

Dans cette vûe, je reprends l'équation $x^3 + px + q = 0$, ou plutôt $x^3 - px + q = 0$ (les cas qui échappent à la méthode de l'article VI ne se trouvant jamais que parmi ceux où p est négatif) & je me propose de lui donner cette forme $z^3 - z = r$ qui est plus simple à cause qu'elle ne renferme qu'un terme d'indéterminé.

Afin de faire cette transformation, je fais $x = mz$, ce qui change l'équation $x^3 - px + q = 0$ en $z^3 - \frac{p}{m}z = -\frac{q}{m^3}$ qui m'appréhend qu'en faisant $m = -\sqrt{p}$, si q est positif, & $m = \sqrt{p}$, si q est négatif, je donnerai toujours à l'équation $x^3 - px + q = 0$ la forme $z^3 - z = +r$.

Je remarque présentement que si cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sçauroit résoudre, il faudra nécessairement que r soit plus petit que $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$, ou $\sqrt[4]{\frac{4}{27}}$; & qu'en même-temps il y ait une des racines qui soit positive, & plus grande que l'unité, mais moindre que $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$. Car si z surpassoit $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$ on auroit pour r , c'est-à-dire, pour $z^3 - z$ un nombre plus grand que $\sqrt[4]{\frac{4}{27}}$, & par conséquent l'équation $z^3 - z = r$ seroit du nombre de celles où la formule de l'art. VI réussit.

Cela posé, je fais $z = 1 + s$, & substituant cette valeur dans l'équation $z^3 - z = r$,

elle donne $2d + 3d^2 + d^3 = r$, dans laquelle je remarque que d étant une quantité toujours plus petite que $\sqrt[4]{\frac{r}{3}} - 1$, c'est-à-dire, plus petite que 0,155, son cube est plus petit que 0,0037. Or, ce cube étant donc si petit, je vois qu'on ne peut pas commettre une grande erreur en négligeant le terme d^3 dans l'équation $2d + 3d^2 + d^3 = r$, c'est-à-dire, en se contentant de résoudre l'équation $2d + 3d^2 = r$. Je résous donc cette équation, & elle me donne

$$d = \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}r} - \frac{1}{3} = \pm \frac{\sqrt{1+3r} - 1}{3}$$

& par conséquent z , ou

$$1 + d = \frac{2 \pm \sqrt{1+3r}}{3}, \text{ ou simplement}$$

$z = \frac{2 + \sqrt{1+3r}}{3}$, puisque des valeurs de z , on ne cherche que celle qui surpasse l'unité & qui est positive.

Pour sçavoir à quoi peut monter l'erreur qu'on commet dans cette méthode, en négligeant le terme d^3 , prenons le cas où ce terme est le plus grand, supposons que z ou $1 + d$ soit $\sqrt[4]{\frac{r}{3}}$, ce qui ne peut jamais arriver, tant que l'équation proposée est de celles qui échappent à la méthode de l'article VI. Nous aurons alors $r = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{r}{3}}$, & notre méthode nous donnera pour valeur de z ,

$$\frac{2 + \sqrt{1 + \sqrt[4]{\frac{r}{3}}}}{3} \text{ au lieu de la vraie valeur}$$

$\sqrt[4]{\frac{r}{3}}$. Or, il est aisé de reconnoître que ces

Mame
 1795
 DCCCLXV
 LYON

deux quantités ne different entr'elles que d'environ un milliême, voilà donc la plus grande erreur qu'on puisse craindre, en prenant . .

$\frac{2 + \sqrt{1 + 3r}}{3}$ pour la racine positive de

La métho-
de qu'on
vient d'en-
seigner
donne d'a-
bord x à un
milliême
près.

l'équation $z^3 - z = r$, si cette équation est de celles où la formule de l'article VI ne peut s'appliquer.

Ayant calculé la valeur de z par l'expressïon

$\frac{2 + \sqrt{1 + 3r}}{3}$, il faudra la multiplier par

m pour avoir la valeur approchée de x .

XXII.

Si on ne trouve pas que cette résolution de l'équation proposée approche assez de la véritable, c'est-à-dire, qu'on regarde les erreurs qui pourroient aller aux environs d'un milliême comme trop considérables, rien ne sera plus aisé que de trouver une autre valeur de la racine beaucoup plus exacte, par une opération fondée sur les mêmes principes. Après avoir calculé cette première valeur de x , & l'avoir nommée pour abréger k , on imaginera que la correction qu'il faut lui faire soit ϵ , c'est-à-dire, qu'on supposera que le véritable x soit $k + \epsilon$. Substituant alors cette quantité pour x dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, l'on aura $k^3 + 3k^2\epsilon + 3k\epsilon^2 + \epsilon^3 - pk - p\epsilon + q = 0$, ou simplement $k^3 + 3k^2\epsilon + 3k\epsilon^2 - pk - p\epsilon + q = 0$ en négligeant le terme ϵ^3 qui est bien plus négligeable que

ne l'étoit le terme δ^3 à la première opération, puisqu'il est infiniment plus petit. Résolvant ensuite cette équation, la valeur de ϵ qu'elle donnera, fera la correction, qui, étant faite à la première valeur de x , en donnera une seconde infiniment plus exacte.

Si on n'étoit pas encore content de cette seconde, on en trouveroit une troisième en nommant la seconde valeur l , & substituant $l + \phi$ à la place de x dans l'équation proposée $x^3 - px + q = 0$, & ainsi de suite.

Mais bien loin qu'on ait communément besoin d'employer des corrections si rigoureuses, on pourra très-souvent se contenter de la valeur de x trouvée en premier lieu, ou tout au plus il suffira, après la substitution de $k + \epsilon$ pour x dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, de résoudre l'équation $k^3 + 3k^2\epsilon - pk - p\epsilon + q = 0$, c'est-à-dire, qu'on pourra non-seulement négliger le terme ϵ^3 , mais le terme $3k\epsilon^2$, parce que ce terme est déjà très-petit.

X X I I I.

Faisons présentement quelque application de cette méthode. Soit, par exemple, l'équation $z^3 - z = \frac{1}{3}$. En substituant $\frac{1}{3}$ pour r dans l'expression $\frac{2 + \sqrt{1 + 3r}}{3}$, elle deviendra $\frac{2 + \sqrt{2}}{3}$, c'est-à-dire, environ 1, 138 qui est un peu plus grande que la vraie valeur

Application de cette méthode à un exemple.

de z ; mais qui l'est de bien peu; puisque $1, 137$, comme on le peut voir aisément par le calcul, seroit trop petit.

Pour approcher plus exactement de la vraie valeur de z , on substituera $1, 138 + \epsilon$ à la place de z dans l'équation $z - z = \frac{1}{3}$, & l'on aura $0, 002426739 + 2, 885132 \epsilon = 0$ en négligeant les termes affectés de ϵ^2 & de ϵ^3 . Cette équation étant résolue, elle me donne $\epsilon = -0, 000841$. & partant pour la valeur de z corrigée, $1, 137159$. Si on avoit voulu faire cette correction plus exacte en ne négligeant que le terme affecté de ϵ^3 , on auroit résolu l'équation $0, 002426739 + 2, 885132 \epsilon + 3, 414 \epsilon^2 = 0$, ce qui auroit donné la correction $\epsilon = -0, 000841836$, c'est-à-dire, pour z corrigé $1, 137158164$.

X X I V.

Autre exemple. Supposons présentement qu'il s'agisse de résoudre de l'équation $x^3 - 13x + 5 = 0$, je fais $x = -z\sqrt{13}$, & elle se change en $z^3 - z = \frac{5}{13\sqrt{13}}$, égalant donc r à . .

$$\frac{\frac{5}{13\sqrt{13}}}{2 + \sqrt{1 + 3r}}$$

dans la première valeur approchée de z , cette valeur devient

$$\frac{2 + \sqrt[3]{1 + \frac{15}{13\sqrt{13}}}}{3}, \text{ \& elle donne}$$

par conséquent pour $x \dots \dots \dots$

$$\frac{-2\sqrt{13} - \sqrt{13 + \frac{15}{\sqrt{13}}}}{3}, \text{ c'est-à-dire,}$$

environ $-3, 784$. Si on veut avoir une valeur de x plus exacte, on supposera $x = -3, 784 + \epsilon$, & on substituera cette valeur dans l'équation $x^3 - 13x + 5 = 0$, & l'on aura en négligeant les termes affectés de ϵ^2 & de ϵ^3 l'équation $0, 010205696 + 29, 95597 \epsilon = 0$, qui donnera $\epsilon = -0, 000341$, & par conséquent $x = -0, 784341$ valeur plus exacte que la première.

X X V.

Après avoir montré la manière dont on parvient à la solution des équations du troisième degré, voyons maintenant les moyens qu'il faut employer pour résoudre celles du quatrième degré.

Résolution de l'équation générale du quatrième degré.

Prenant d'abord une équation générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ pour représenter toutes les équations du quatrième degré, on réduit bientôt la difficulté à ne résoudre qu'une équation représentée par $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ en faisant $y = z - \frac{1}{4}a$. Ensuite, pour résoudre cette équation, ce qui paroît le plus simple, c'est de la regarder comme le produit de deux équations du second degré, & de faire en sorte que la détermination des coefficients que doivent avoir les termes de ces équations du second

ne dépendent que d'équations plus aisées à résoudre que la proposée.

Soit pris d'abord $z z + x z + t = 0$ pour l'une de ces équations ; il est évident que l'autre devra avoir pour second terme $-x z$, puisque le produit de ces deux équations doit donner une équation dénuée du second terme ; soit donc pris pour cette seconde équation $z z - x z + s = 0$, en multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$$\begin{array}{r} z^4 + s z z + s x z + t s = 0 \\ - x^2 - t x \\ + t \end{array}$$

qui étant comparée avec la proposée, donne, pour déterminer s , t , x , les trois équations $s - x x + t = p$; $s x - t x = q$; $t s = r$.

Pour faire usage de ces trois équations, je multiplie la première par x , & je l'ajoute ensuite avec la seconde équation, j'ai alors $2 s x - x^3 = p x + q$, d'où je tire . . .

$$s = \frac{q + p x + x^3}{2 x} \text{ que je substitue dans}$$

l'équation $t s = r$, ce qui me donne . . .

$$t = \frac{2 r x}{x^3 + p x + q}.$$

Or ces deux valeurs de s & de t étant mises dans l'équation $s x - t x = q$, j'ai enfin

$$\frac{x^3 + p x + q}{2} - \frac{2 r x^2}{x^3 + p x + q} = q,$$

ou

ou $x^6 + 2 p x^4 + p p x^2 - q^2 = 0$
 $- 4 r$

La résolution d'une équation du quatrième degré dépend d'une équation du troisième.

équation du sixième degré, qui, par la méthode de l'article XVII, se change en une du troisième, d'où la difficulté des équations du quatrième degré est réduite à celle du troisième. Car cette dernière équation (qu'on appelle la réduite) étant résolue, on n'aura qu'à substituer la valeur de x qu'elle donne dans

Cette équation s'appelle la réduite.

les équations $z z - x z + s = 0$, $z z + x z + t = 0$, ou plutôt $z z - x z + \frac{1}{2} x x + \frac{1}{2} p + \frac{q}{2 x} = 0$ & $z z + x z$

$+ \frac{2 r}{x x + p + \frac{q}{x}} = 0$, & résoudre

ensuite ces équations; ou, ce qui revient au même, substituer la valeur de x dans les racines

$z = \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p - \frac{q}{2 x}}$ &

$z = -\frac{1}{2} x \pm \sqrt{\frac{2 r}{x x + p + \frac{q}{x}} + \frac{1}{2} x x}$

de ces deux équations, & l'on aura les quatre racines cherchées de l'équation $z^4 + p z^2 + q z + r = 0$, & partant celles de l'équation proposée $y^4 + a y^3 + b y^2 + c y + d = 0$ qui l'avoit produite.

X X V I.

Il paroît d'abord par l'expression de ces va
 V

leurs, que dans le quatrième degré, ainsi que dans le troisième, on ne sçauroit arriver à une seule expression pour toutes les racines de l'équation. Cependant si on remarque que la quantité x que renferment les deux expressions précédentes est nécessairement un radical carré, puisqu'elle est venue de la résolution d'une équation où x a toujours une dimension paire, on verra sans peine que chacune des expressions précédentes peut désigner quatre racines, la première s'écrivant alors ainsi

Dans le quatrième degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.

$$y = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$$

& la seconde

$$z = \mp \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\frac{1}{4} x x - \frac{2r}{xx + p} \pm \frac{q}{x}}$$

Ces deux équations paroissant d'abord différentes, on peut craindre de s'être trompé dans le raisonnement précédent, puisqu'il semble mener à une absurdité, qui seroit d'avoir huit racines pour une équation du quatrième degré; mais il est aisé de voir qu'elle n'est qu'apparente; car l'identité de ces deux expressions se réduit à celle de

$$\sqrt{\frac{1}{4} x x - \frac{2r}{xx + p} \mp \frac{q}{x}} \quad \& \text{ de . . .}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}, \text{ c'est-à-d.}$$

dire, de $-\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}$, & de

$$\frac{-2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}. \text{ Or l'identité de ces deux}$$

dernières quantités ne sçauroit manquer d'avoir lieu aussi-tôt que x a été déterminée par l'équation $x^4 + 2px^2 + p^2x^2 - q^2 = 0$,

puisqu'elle se tire évidemment de l'égalité de $-\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}$ & de

$$\frac{-2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}$$

XXVII.

Des deux expressions précédentes, la première

$$\xi = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

étant la plus aisée à employer, fera celle qu'il faudra choisir, & les quatre valeurs générales de ξ qu'elle exprime à-la-fois sont

$$\xi = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$\xi = \frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$\xi = -\frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$\xi = -\frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

Vij

On arrive
aux mêmes
racines d'u-
ne équation
du quatrié-
me degré
quelle que
soit celle
des racines
de la rédui-
te qu'on ait
prise.

Comme l'équation d'où l'on tire la valeur de x , donne nécessairement trois valeurs de x précédées du signe \pm , & qu'on n'a aucune raison pour préférer l'une de ces valeurs aux autres; que d'ailleurs on sçait qu'une équation du quatrième degré ne sçauroit avoir plus de quatre racines, il vient assez naturellement dans l'esprit qu'on peut indifféremment employer celle qu'on voudra de ces trois valeurs de x précédée de \pm , & en tirer cependant toujours la même expression pour les quatre valeurs de z .

Mais quoiqu'après avoir un peu réfléchi sur la théorie des équations, on ne puisse guères douter que cela ne soit ainsi, on doit souhaiter de s'en assurer par le détail du calcul.

Pour y parvenir, ce qui se présente le plus naturellement, c'est de trouver les trois valeurs de x précédées de \pm que donne l'équation $x^4 + 2 p x^2 + p p x^2 - q^2 = 0$,

$- 4 r$

& les substituer ensuite l'une après l'autre dans l'expression

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$$

afin de reconnoître l'identité des trois différentes expressions qu'on auroit par ces substitutions; mais le calcul que cette méthode demanderoit est si long, qu'on ne sçauroit se résoudre à le suivre jusqu'au bout. Voici une autre manière de parvenir au même résultat.

Je remarque d'abord que quelle que soit

la valeur de x que je substitue dans l'expression générale.

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \pm \frac{q}{2x}}$$

les quatre valeurs de z exprimées à-la-fois par cette quantité, pourront être représentées par $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$: ou, ce qui revient au même, que les quatre racines de l'équation $z^4 + p z z + q z + r = 0$ pourront être représentées par $z-i-k$, $z-i+k$, $z+i-l$, $z+i+l$; i désignant alors la partie $\frac{1}{2} x$ de la valeur de z , & k & l les deux quantités.

$$\sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p - \frac{q}{2x}} \text{ \& \dots}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p + \frac{q}{2x}} \text{ , mul-}$$

tipliant donc ces quatre racines les unes par les autres, j'ai l'équation

$$\begin{aligned} z^4 - 2 i i z^2 - 2 i k k z + i^4 &= 0 \\ - k k + 2 i l l - i i k k & \\ - l l - i i l l & \\ + k k l l & \end{aligned}$$

qui étant comparée à $z^4 + p z z + q z + r = 0$ donne les équations.

$$\begin{aligned} p &= -2 i i - k k - l l, q = -2 i k k + 2 i l l \\ r &= i^4 - i i k k - i i l l + k k l l \end{aligned}$$

par lesquelles l'équation.

$$\begin{aligned} x^6 + 2 p x^4 + p p x^2 - q &= 0 \\ - 4 r & \end{aligned}$$

Vüj

se change en.

$$\begin{aligned}
 x^6 - 4 i i x^4 + 8 i i k k x^2 - 4 i i k^4 &= 0 \\
 - 2 k k &+ 8 i i l l &+ 8 i i k k l l \\
 - 2 l l &+ k^4 \\
 &- 2 k k l l &- 4 i i l^4 \\
 &+ l^4
 \end{aligned}$$

dont les racines sont

$x = \pm 2 i$; $x = \pm k \pm l$; $x = \pm k \mp l$;
 or, si on substitue présentement celle qu'on
 voudra de ces valeurs de x dans les quatre
 expressions contenues dans

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2 x}}$$

ou plutôt dans.

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x + i i + \frac{1}{2} k k + \frac{1}{2} l l \pm \frac{i l l - i k k}{x}}$$

on verra qu'il en viendra également les quatre
 valeurs de z ;
 $i + k, i - k, -i + l, -i - l.$

X X I X.

La méthode précédente fournit non-seule-
 ment le moyen de démontrer que les trois ra-
 cines de la réduite.

$$\begin{aligned}
 x^6 + 2 p x^4 + p p x x - q q &= 0, \\
 &- 4 r
 \end{aligned}$$

donnent le même résultat par leur substitution
 dans l'équation $z^4 + p z^2 + q z + r = 0$; elle
 met de plus à portée de remarquer une vérité im-
 portante sur les équations du quatrième degré;

c'est que leurs racines sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou bien que des quatre racines deux sont réelles, & les deux autres imaginaires. Car il n'est pas possible de faire d'autres suppositions pour les quatre racines de l'équation donnée, aussitôt qu'on est assuré, comme on vient de l'être, que ces quatre racines sont toutes exprimées à-la-fois par la formule.

Les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires ou deux réelles & deux imaginaires.

$$\pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

X X X.

En jettant les yeux sur cette valeur des racines des équations du quatrième degré, on croiroit volontiers, à cause que x est un radical carré, que lorsque quelques-unes de ces racines sont imaginaires, elles pourroient être des quantités imaginaires d'une autre nature que celles qu'on rencontre dans le second degré; c'est-à-dire, qu'au lieu d'être simplement la somme d'une quantité réelle, & de la racine d'une quantité réelle, mais négative, telle, par exemple, qu'est $a + \sqrt{-b}$, elles pourroient être des quantités composées de racines imaginaires simples, & de la racine d'autres quantités en partie réelles & en partie imaginaires, comme seroit

Les racines imaginaires du quatrième degré, sont de même nature que celles du second.

$\sqrt{-b} + \sqrt{a + \sqrt{-b}}$: mais il est aisé de s'assurer que toutes les racines imaginaires du quatrième degré peuvent se réduire, ainsi que celles du second, à la somme de quantités réelles & de la racine de quantités réelles négatives. Car

ayant vû dans les articles précédens que, lorsqu'on veut trouver la valeur de z , on peut choisir à volonté entre les valeurs de xx que donne la réduite, & remarquant d'ailleurs par la théorie des équations que cette réduite qui a toujours pour dernier terme ou produit des racines, une quantité qq négative, doit par conséquent avoir nécessairement une valeur de xx positive, on verra que x pourra toujours être une quantité réelle, & que, dans ce cas, lorsque

$\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$ fera imaginaire, ce ne sera autre chose que la racine d'une quantité réelle & négative.

X X X I.

Lorsque des quatre racines deux sont réelles & deux imaginaires, on résout exactement l'équation.

Une autre remarque que peut fournir encore l'article XXVIII, c'est que toutes les fois que des quatre racines deux seront imaginaires & deux réelles, la réduite.

$$x^6 + 2px^4 + pp^2x^2 - qq = 0$$

$$- 4r$$

sera du nombre des équations exactement résolues par la formule de l'article VI, c'est-à-dire, qu'on arrivera alors à la solution complète de l'équation.

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0.$$

C'est le contraire lorsque les quatre racines sont toutes réelles.

Au contraire, lorsque les quatre racines seront, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, l'équation réduite ne pourra pas se résoudre par la formule de l'article VI, & par consé-

Quant on ne parviendra pas en ce cas à la solution de l'équation les ou toutes imaginaires.

$$z^4 + p z^2 + q z + r = 0.$$

Ces deux vérités se tirent de ce que la réduite

$$\begin{aligned} x^6 - 4 i i x^4 + 8 i i k k x^2 - 4 i i k^4 &= 0 \\ - 2 l l + 8 i i l l + 8 i i k k l l & \\ - 2 k k + k^4 - 4 i i l^4 & \\ - 2 k k l l & \\ + l^4 & \end{aligned}$$

est le produit des trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$, or, si l'une des deux quantités k ou l seulement est imaginaire, les deux racines. $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ sont imaginaires, & par conséquent la réduite est alors résoluble par la formule de l'article VI.

Si, au contraire, k & l sont toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, les trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$, de la réduite seront toutes trois réelles, & par conséquent la formule de l'article VI ne pourra pas les donner; ainsi dans le quatrième degré, comme dans le troisième, les formules de la résolution ne sçauroit s'appliquer qu'aux équations qui ont deux racines imaginaires.

X X X I I.

Lorsqu'on aura une équation du quatrième Maniere de

distinguer le cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

degré à résoudre, & qu'on aura formé par son moyen la réduite.

$$x^6 - 2 p x^4 + p p x^2 - q q = 0, \\ - 4 r.$$

si on trouve qu'elle échappe à la formule de l'article VI, & qu'on se propose de sçavoir si alors les quatre racines sont réelles, ou si elles sont toutes quatre imaginaires, on y parviendra aisément en partant des deux réflexions suivantes qui se présentent assez naturellement lorsqu'on examine la réduite de l'article XXVIII.

1°. Dans le cas où les quatre racines sont réelles, la réduite

$$x^6 - 4 i i x^4 + 8 i i k k x^2 - 4 i i k^4 = 0, \text{ ou} \\ - 2 k k + 8 i i l l + 8 i i k k l l \\ - 2 l l + k^4 - 4 i i l^4 \\ - 2 k k l l \\ + l^4$$

Conditions des quatre racines réelles.

$x^6 - 2 \times 2 i i + k k + l l \times x^4 + 8 i i \times k k + l l + k k - l l$
 $\times x^2 - 4 i i \times k k - l l = 0$ a nécessairement un second terme négatif & un troisième terme positif, puisque $- 2 \times 2 i i + k k + l l$ ne sçauroit être ni zéro, ni positif, tant que i, k, l , sont des quantités réelles, & que $8 i i \times k k + l l + k k - l l$ ne sçauroit non plus être ni zéro, ni négatif dans les mêmes conditions.

2°. Si, au contraire, les quatre racines

font imaginaires; ou, ce qui revient au même, si kk & ll font négatifs, la réduite qui doit alors s'écrire ainsi

$$\begin{aligned}
 x^6 - 4ii x^4 - 8iikk x^2 - 4iik^4 &= 0, \\
 + 2kk - 8iill + 8iikkll \\
 + 2ll + k^4 - 4iil^4 \\
 - 2kkll \\
 + l^4
 \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même.

$$\begin{array}{l}
 x^6 + 2 \times \overline{kk + ll} - 2ii \times x^4 \\
 \overline{+ kk + ll} \times \overline{kk + ll} - 8ii - 4kkll
 \end{array}$$

Conditions
des quatre
racinesima-
ginaires.

$\times x^2 - 4ii \times \overline{kk - ll}^2$ ne fçauroit jamais avoir à-la-fois, & le second terme négatif & le troisiéme positif. Car, si $kk+ll$ est plus petit que $2ii$, ce qui rendroit le second terme négatif, le troisiéme terme, dont le coëfficient est $\overline{kk + ll} \times \overline{kk + ll} - 8ii - 4kkll$ sera nécessairement négatif.

XXXIII.

L'inspection de l'équation.

$$\begin{aligned}
 z^4 - 2iiz^2 - 2iikkz - \&c. \text{ donnée dans} \\
 - kk + 2iill \\
 - ll
 \end{aligned}$$

Toute équation du quatrième degré sans second terme, & qui a le troisiéme positif, a des racines imaginaires.

le même article XXVIII fournit une remarque, par laquelle on peut reconnoître en quelques rencontres si une équation qui doit

avoir ses quatre racines, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, est dans le premier de ces deux cas, ou dans le second. C'est que toute équation du quatrième degré dont le second terme est évanoui, & dont le troisième est positif, doit avoir nécessairement des racines imaginaires, puisque le troisième terme de toutes ces équations représenté par

$- 2 i i + k k + l l \times z z$, ne sçauoit jamais être positif tant que $i i$, $k k$, $l l$, seront positifs : c'est-à-dire, tant que les racines seront réelles. Or, dès qu'on sçaura qu'une équation du quatrième degré a des racines imaginaires, & qu'on aura reconnu d'ailleurs qu'elle doit avoir ses quatre racines ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, on ne fera plus embarrassé à sçavoir lequel de ces deux cas a lieu.

X X X I V.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une équation du quatrième degré sont réelles, avant d'entreprendre de résoudre par approximation sa réduite pour avoir la valeur de x à substituer dans celle de z , il fera à propos d'examiner par les méthodes de la troisième Partie, si quelques-unes de ces racines ne seroient pas commensurables. S'il n'y en avoit qu'une, on n'en seroit guères plus avancé pour avoir les trois autres, puisqu'alors il resteroit à résoudre une équation du troisième degré, dont les trois racines se-

roient réelles. Mais si l'équation du quatrième degré avoit deux racines commensurables, elle n'offrirait plus aucune difficulté, aussi-tôt que ces deux racines seroient trouvées, parce qu'alors il ne resteroit plus qu'une équation du second degré à résoudre.

X X X V.

Lorsqu'une équation du quatrième degré a deux racines commensurables, on peut les reconnoître plus aisément par sa réduite, que par elle-même; car il est clair alors que dans les quatre valeurs de z représentées généralement par $i+k$; $i-k$; $-i+l$; $-i-l$; i ne pourra jamais être qu'une quantité commensurable, & partant dans la racine $xx-4ii$ de la réduite, $4ii$ représentera une quantité quarrée & commensurable: or, par cette réflexion on peut diminuer beaucoup les tentatives nécessaires dans la méthode de la troisième Partie, articles XII & XIII, puisqu'il ne faudra chercher dans les diviseurs du dernier terme qu'une quantité quarrée, & prise avec le signe —.

Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite plutôt que dans la proposée.

Il en seroit de même si l'équation $z^4 + pzz + qz + r = 0$ devoit se décomposer en deux équations du second degré dont les coefficients fussent commensurables, au lieu d'employer alors la méthode de la troisième Partie, article XIX, il faudra employer celle des articles XII & XIII, pour chercher les diviseurs de la réduite, & ne choisir parmi les diviseurs du dernier terme que les quantités quarrées & affectées du signe —.

X X X V I.

Lorsqu'une équation où x est au quatrième degré, a deux racines commensurables, ou qu'elle est simplement composée de deux diviseurs de deux dimensions, on peut dire qu'elle n'est pas véritablement du quatrième degré, & il est bien simple alors qu'elle se résolve par la méthode du second degré; mais il y a des équations nécessairement du quatrième degré, qui se réduisent cependant à la méthode du second degré. Telles sont les équations traitées dans la quatrième Partie, article XX, & les équations semblables à

$$z^4 + 2 a a z z - 8 a a b z + a^4 = 0,$$

$$- 4 a^3 b z z \qquad - 4 a^3 b$$

qui est le produit des deux équations . . .
 $z z - 2 z \sqrt{a b} + a a - 2 a \sqrt{a b} = 0$ &
 $z z + 2 z \sqrt{a b} + a a + 2 a \sqrt{a b} = 0,$
 & qui a pour ses quatre racines.

$$\pm \sqrt{a b} \pm \sqrt{a b - a^2} \pm 2 a \sqrt{a b},$$

dans lesquels il n'entre point d'autres radicaux que ceux du second degré.

Maniere de
connoître
les équations du
quatrième
degré, dont
les racines
n'ont point
d'autres radicaux que
ceux du second degré.

On peut distinguer aisément toutes les équations qui sont dans ce cas; car, puisque dans ces équations la partie $\pm \frac{1}{2} x$ de l'expression

$$\pm \frac{1}{2} x + \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$$

de la valeur de z ; ou, ce qui revient au même

me la partie i commune aux quatre racines $i + k, i - k, -i + l, -i - l$, doit être un simple radical du second degré, à cause que x ne monte qu'à des dimensions paires dans la réduite; il faut nécessairement que dans toutes les équations de cette nature, la réduite soit divisible par $xx \pm$ une quantité commensurable: or les diviseurs de cette espèce sont aisés à trouver par la méthode des articles XII & XIII de la troisième Partie.

XXXVI.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles, & que cette équation n'a aucun diviseur commensurable ni affecté de radicaux du second degré; on cherchera une des racines de sa réduite par la méthode d'approximation enseignée article XXI, & après l'avoir substituée à la place de x dans la formule générale.

Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorsqu'elles sont réelles.

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2 x}}$$

on aura les valeurs approchées des quatre racines cherchées.

XXXVII.

Dans la vûe d'appliquer les règles précédentes, soit pris pour exemple l'équation $z^4 + 3z^2 + 2z - 3 = 0$. En comparant cette équation à l'équation générale

Application des méthodes précédentes à un exemple.

$z^4 + p z^2 + q z + r = 0$, on aura
 $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$. Et ces va-
 leurs étant substituées dans la réduite générale

$$x^6 + 2 p p x^4 + p p x x - q q = 0,$$

$$- 4 r$$

la changeront en

$$x^6 + 6 x^4 + 21 x^2 - 4 = 0.$$

Pour résoudre cette équation, soit d'abord
 fait $x^2 = u - 2$, afin de faire évanouir
 le second terme, & la réduite se changera en
 $u^3 + 9 u - 30 = 0$; laquelle, suivant
 l'article XIV, est de celles qui n'ont qu'une
 racine de réelle, & est par conséquent dans le
 cas d'être résolue par la formule générale de
 l'article VI, d'où l'on voit que l'équation
 proposée aura deux racines réelles & deux ima-
 ginaires, & qu'on parviendra par conséquent
 à les exprimer toutes les quatre par les formules
 précédentes.

On auroit pû reconnoître (article XXXIII)
 que cette équation devoit avoir des racines ima-
 ginaires par cela seul, que son troisième terme
 $2 z$ avoit un coefficient positif.

Résolvant maintenant l'équation $u^3 + 9 u$
 $- 30 = 0$, par la formule de l'article VI, on
 a pour sa racine réelle $u = \sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}}$
 $+ \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}$. Donc $\pm \sqrt{u - 2}$, ou

$$x = \pm \sqrt{\sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}} - 2}.$$

Si on substitue ensuite cette valeur de x
 dans la valeur générale,

$$z = \pm \frac{1}{2} x$$

$$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

qui est dans le cas présent

$$x = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{3}{2} \mp \frac{1}{x}}$$

on aura pour les deux racines réelles de l'équation proposée

$$z = -\frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{15+6\sqrt{7}} + \sqrt{15-6\sqrt{7}}} - 2$$

$$\pm \sqrt{-\frac{1}{4} \sqrt{\sqrt{15+6\sqrt{7}} - \frac{1}{4} \sqrt{\sqrt{15-6\sqrt{7}}} - 1} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{15+6\sqrt{7}}} + \sqrt{\sqrt{15-6\sqrt{7}}}}}}$$

& pour les deux imaginaires

$$z = +\frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{\sqrt{15+6\sqrt{7}}} + \sqrt{\sqrt{15-6\sqrt{7}}}}$$

$$\pm \sqrt{-\frac{1}{4} \sqrt{\sqrt{15+6\sqrt{7}} - \frac{1}{4} \sqrt{\sqrt{15-6\sqrt{7}}} - 1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{15+6\sqrt{7}}} + \sqrt{\sqrt{15-6\sqrt{7}}}}}}$$

X X X I X.

Soit présentement l'équation $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$, en la comparant à l'équation générale, on en tirera $p = -6$, $q = 8$, $r = -1$. Et partant, la réduite sera $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, dans laquelle faisant $x^2 = u + 4$, afin que le second terme disparoisse, on aura $u^3 - 8u - 32 = 0$ qui étant comparée à la forme

X

mule générale de l'article VI donnera une seule valeur réelle, laquelle fera

$$u = \frac{\sqrt[3]{16 + \frac{80}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{16 - \frac{80}{3\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}}$$

qui en se servant de la méthode de la quatrième Partie, article XXXV, se réduit à

$$u = \frac{2 \times 1 + \sqrt{3} - 2 \times 1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4.$$

Substituant présentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{u + 4}$, on aura $x = \sqrt{8}$, par laquelle on changera l'équation générale . . .

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

en $z = \mp \sqrt{2} \pm \sqrt{1 \mp \sqrt{2}}$ qui donne pour les deux racines réelles de l'équation proposée $-\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, & pour les deux imaginaires $+\sqrt{2} \pm \sqrt{1 - \sqrt{2}}$. Ainsi l'équation proposée $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$ est de celles qui peuvent se décomposer en deux équations du second degré, dont les coefficients sont incommensurables; car chacune des doubles racines précédentes sont les racines des équations $z z + 2z\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$ & $z z - 2z\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$.

On auroit pû, sans appliquer la formule de l'article VI, & par conséquent sans avoir besoin de la méthode de la quatrième Partie, article XXXV, résoudre l'équation $x^5 - 12x^4 + 40x^3 - 64 = 0$, en employant la méthode de la troisième Partie, articles XII & XIII. Car on auroit trouvé, par cette méthode, que cette équation avoit pour diviseur $xx - 8 = 0$.

X L.

Soit l'équation $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$. En substituant dans cette équation $z - 4$ pour y , afin de faire évanouir le second terme, on la changera en $z^4 + 3z^3 - 52z^2 + 48z = 0$, qui étant comparée à l'équation générale $z^4 + p z^3 + q z^2 + r z = 0$ donnera $p = 3; q = -52; r = 48$, & partant la réduite

Troisième exemple.

$x^6 + 6x^4 - 183x^2 - 2704 = 0$, de laquelle faisant évanouir le second terme par la substitution de $u - 2$ à la place de x^2 , on tirera $u^3 - 195u - 2322 = 0$ qui est résoluble par la formule de l'article VI, & fait voir par conséquent que l'équation proposée est de celles qu'on peut résoudre exactement, c'est-à-dire, de celles qui ont deux racines réelles & deux racines imaginaires. Pour les trouver, soit donc employée la formule de l'article VI, à résoudre l'équation $u^3 - 195u - 2322 = 0$.

on aura pour la seule valeur réelle qu'elle donne

$$u = \sqrt[3]{1161 + \sqrt{1073296}} - \sqrt[3]{-1161 + \sqrt{1073296}}$$

qui se réduit à

$$\sqrt[3]{1161 + 1036} - \sqrt[3]{-1161 + 1036},$$

ou à $\sqrt[3]{2197} + \sqrt[3]{-125}$, ou enfin à 18 ; substituant présentement cette valeur de u dans

$x = \sqrt{u - 2}$ on a $x = \sqrt{10} = 4$ qu'il ne s'agit plus que de substituer dans la valeur générale de

$$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} x x - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

on aura par cette substitution pour les deux racines réelles de l'équation

$$z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0;$$

$$z = 2 \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}}, \text{ ou}$$

$z = 2 \pm 1$, c'est-à-dire, ou 3, ou 1, & pour les deux racines imaginaires

$$z = -2 \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} \mp \frac{13}{2}}, \text{ ou}$$

$z = -2 \pm \sqrt{-12}$. Substituant ensuite ces quatre valeurs dans $y = z - 4$, on aura pour les quatre racines de l'équation proposée

$$y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0;$$

$$y = -1; y = -3; y = -6$$

$\pm \sqrt{-12}$. On auroit pû trouver ces racines, tant par la méthode de la troisième Partie, articles XII & XIII, que par celle de l'article XXIV de la même Partie, en les cherchant dans l'équation $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$. Car, par la première de ces méthodes, on auroit trouvé les diviseurs simples $y + 1$; $y + 3$, & pour quotient $yy + 12y + 48$; & la seconde auroit donné les deux diviseurs de deux dimensions $yy + 4y + 3$, & $yy + 12y + 48$. On auroit encore pû trouver ces racines bien facilement en cherchant les diviseurs de la réduite par le moyen de la méthode des articles XII & XIII de la troisième Partie, & en ajoutant à cette méthode l'attention de ne choisir parmi les diviseurs du nombre 2704, que des nombres carrés, & de ne les employer qu'avec le signe $-$. On auroit trouvé alors que la réduite a pour diviseur de cette espèce $xx - 16 = 0$ qui donne $x = 4$.

X L I.

Soit l'équation $z^4 + 11z^2 - 2z + 56 = 0$. En la comparant à $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, il vient $p = 11$, $q = -2$, $r = 56$. D'où la réduite est $x^6 + 22x^4 - 103x^2 - 4 = 0$ qui devient $u^3 - \frac{79}{3}u + \frac{41522}{27} = 0$, après avoir fait évanouir le second terme. Cette équation étant de celles qui échappent à la formule de l'article VI,

X üj

l'équation proposée doit être, ou de celles qui ont leurs quatre racines réelles, ou de celles qui les ont toutes quatre imaginaires; mais à cause du terme positif $11z^2$, il faut (article XXXIII), qu'il y ait des racines imaginaires: donc toutes les quatre racines le sont. On parvient ensuite à réduire ces quatre racines imaginaires à de simples racines imaginaires du second degré, en cherchant par la méthode des articles XII & XIII de la troisième Partie, les diviseurs de la réduite. Car trouvant $xx - 4$ pour diviseur de cette réduite, il suit que les quatre racines de l'équation proposée sont $z = +1 \pm \sqrt{-6}$ & $z = -1 \pm \sqrt{-7}$.

X L I I.

Soit maintenant l'équation $z^4 - 5z^2 + 4z + 29 = 0$, qui donne par sa comparaison avec $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$; $p = -5$; $q = 4$; $r = 29$, & par conséquent la réduite $x^6 - 10x^4 - 91x^2 - 16 = 0$; laquelle, en faisant $x^2 = u + \frac{10}{3}$, se changera en $u^3 - \frac{373}{3}u - \frac{10622}{27} = 0$. Or, comme cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sauroit résoudre, c'est-à-dire de celles qui ont leurs trois racines réelles, il s'ensuit que les racines cherchées de l'équation $z^4 - 5z^2 + 4z + 29 = 0$ sont ou toutes quatre réelles, ou toutes imaginaires. Et si on se rappelle qu'on a vû, article XXXII, que lorsque les racines sont

toutes réelles, la réduite a le second terme négatif, le troisième positif, &c. on en conclura que la proposée est dans le cas d'avoir toutes ses racines imaginaires à cause que le troisième terme $-91x^2$ de sa réduite est négatif.

Mais par aucune méthode connue, on ne sauroit parvenir, ainsi que dans l'exemple précédent, à donner à ces quatre racines imaginaires, la forme ordinaire des racines imaginaires du second degré; parce que la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, la proposée ne sauroit avoir ni des diviseurs commensurables, ni des diviseurs affectés de simples radicaux du second degré.

X L I I I.

Soit l'équation $z^4 - 32zz - 16z - 2 = 0$, qui donne $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$, & par conséquent la réduite $x^6 - 64x^4 + 1032x^2 - 256 = 0$. Sixième exemple.

Cette réduite ayant, comme on peut aisément s'en assurer, ses trois racines réelles, fait voir que la proposée doit avoir toutes ses racines réelles ou toutes imaginaires; on s'assurera facilement, par l'article XXXII, que c'est le premier de ces deux cas qui a lieu. Qu'on cherche maintenant, par la méthode des articles XII & XIII de la troisième Partie, les diviseurs de cette réduite, & l'on trouvera $xx - 32$; qui, au moyen de l'expression générale

$$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2x}}$$

donne pour les quatre racines cherchées . .

$$2\sqrt{2+\sqrt{8+\sqrt{2}}}, 2\sqrt{2-\sqrt{8+\sqrt{2}}}, \\ -2\sqrt{2+\sqrt{8-\sqrt{2}}}, -2\sqrt{2-\sqrt{8-\sqrt{2}}}$$

X L I V.

Septième
exemple.

Soit présentement l'équation $z^4 - 18z^2 + z + 70 = 0$, qui donne la réduite $x^6 - 36x^4 + 44x^2 - 1 = 0$, ou $u^3 - 388u - 2929 = 0$, en faisant évanouir le second terme par le moyen de la transformée $x^2 = u + 12$.

Or, comme cette équation a ses trois racines réelles, & que le second terme $36x^4$ est négatif, tandis que le troisième $44x^2$ est positif, il s'ensuit par l'article XXXII, que la proposée a ses quatre racines réelles. De plus la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, ainsi qu'on peut s'en assurer, par la méthode des articles XII & XIII de la troisième Partie, il faut se contenter de trouver par approximation les racines cherchées.

Pour cela, on commencera par employer la méthode de l'article XXI, à la résolution de l'équation $u^3 - 388u - 2929 = 0$, & ayant trouvé 22, 74 pour la valeur de u , on la substituera dans l'équation

$x = \sqrt{u + 12}$, ce qui donnera 5, 894 pour x , & en substituant cette valeur de x dans

$$x = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

on aura pour les quatre racines cherchées ;
 $+ 3, 426$; $+ 2, 467$; $- 2, 315$;
 $- 3, 579$ qui seront fort proches des vraies ;
 on en auroit eu de plus exactes , si on avoit
 poussé plus loin la méthode de l'article XXI,
 pour résoudre l'équation $u^3 - 388u = 2929$.

X L V.

Après avoir vû dans les résolutions des équations , tant du second , que du troisième & du quatrième degré , comment , à l'aide des signes radicaux , on parvient à exprimer la valeur de l'inconnue dans ces équations , il peut venir dans l'esprit de chercher par quelle opération on retrouveroit les équations qui auroient amené une expression radicale proposée. On peut se proposer , par exemple , de sçavoir quelle est l'équation dont la racine seroit $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c}$, celle dans laquelle x seroit $\sqrt[3]{a^3+b^3} - \sqrt[3]{a^3-b^3}$, &c.

Pour résoudre tous les Problèmes de ce genre ; ou , ce qui revient au même , pour faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque , on s'y prendra de la manière suivante , qui étoit bien aisée à imaginer , après ce qui a été enseigné dans la deuxième Partie , article XXXV.

Manière de
faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque.

On mettra à la place de chaque radical une inconnue, & l'on aura, par ce moyen;

1°. Au lieu de l'équation donnée, une nouvelle équation qui ne contiendra plus de radicaux ; 2°. Autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'équation proposée. Or chacune de ces équations à deux termes sera délivrée tout de suite de ses radicaux, en élevant ses deux membres à la puissance indiquée par l'exposant du signe radical que l'un de ses deux termes contiendra. Donc il n'y aura plus qu'à chasser de toutes ces équations délivrées de radicaux les inconnues introduites, opération que l'on a enseignée à l'article XXXV de la seconde Partie.

Exemple.

Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par un exemple, soit proposé de faire évanouir les radicaux de l'équation $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{add}$, ayant fait $\sqrt[3]{ab^2} = y$ & $\sqrt[3]{add} = z$, on aura les trois équations $x = y + z$; $y^3 = ab^2$, $z^3 = ad^2$. Tirant de la première $y = x - z$, & la substituant dans la seconde, il viendra $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$, de laquelle, avec le secours de l'équation $z^3 = ad^2$, il ne s'agit plus que de chasser z .

Pour cela, je commence par mettre dans la première de ces deux équations $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$ à la place de z^3 , ad^2 que donne la seconde ; & elle devient $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, de laquelle je tire

$$z^2 = \frac{a d^2 + a b^2 - x^3 + 3 x^2 z}{3 x} ; \text{ mul-}$$

tipliant ensuite les deux membres de cette équation par z , & mettant à la place de z^3 sa valeur $a d^2$ j'ai une nouvelle équation . . .

$$a d^2 z = \frac{a d^2 z + a b^2 z - x^3 z + 3 x^2 z z}{3 x}$$

qui donne ,

$$z z = \frac{3 a d^2 x - a d^2 z - a b^2 z + x^3 z}{3 x^2} .$$

J'égale alors ces deux valeurs de $z z$, & j'en tire une équation où z n'est plus qu'au premier degré, je la résous, & j'ai . . .

$$z = \frac{x^4 + 2 a d^2 x - a b^2 x}{a b^2 + a d^2 + 2 x^3} \text{ qui étant}$$

substitué dans l'une des précédentes, par exemple, dans $x^3 - 3 x^2 z + 3 x z^2 - a d^2 = a b^2$, donne enfin l'équation

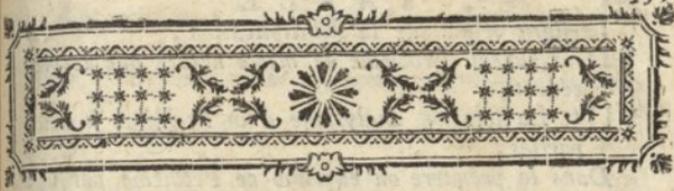
$$x^9 - 3 a d^2 x^6 - 3 a b^2 x^6 + 3 a^2 b^4 x^5 + 3 a^2 d^4 x^5 - 21 a^2 d^2 b^2 x^3 = a^3 b^6 + 3 a^3 b^4 d^2 + 3 a^3 d^4 b^2 + a^3 d^6, \text{ qui}$$

ne contient d'autre inconnue que celle qui étoit dans la proposée, & qui est délivrée de toute quantité radicale. On se tireroit de la même manière de quelque équation qu'on eût.

Quelquefois les équations proposées sont si aisées à délivrer des radicaux, qu'il est inutile d'avoir recours à la méthode précédente, & qu'il suffit de transposer les termes, & d'élever les deux membres à la puissance indiquée par le radical qui est seul alors dans un des

332 ELEMENS D'ALGEBRE.
membres. Par exemple, si on avoit l'équation
 $x = y + \sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^2 x}}$, en passant y dans
le premier membre, & élevant l'un & l'autre
à la troisiéme puissance, on aura une équation
qui ne contiendra plus d'autre radical que $\sqrt{a^2 x}$.
Mettant alors ce terme seul d'un côté & élevant
les deux membres au quarré, on aura une équation
qui ne contiendra plus de radicaux. Il en
seroit de même dans beaucoup de rencontres.

F I N.



TABLE

DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

De la méthode Algébrique d'exprimer les Problèmes par des équations, & de la résolution des équations du premier degré,

- I. **E**XEMPLE d'un Problème semblable à ceux que les premiers Algébristes ont pu se proposer, Page 2
Solution de ce Problème, telle qu'on la pourroit trouver sans Algebre. ibid.
- II. Méthode Algébrique d'exprimer le Problème précédent, 3
Le signe + indique l'addition, ibid.
Le signe = marque l'égalité, 4
Une équation est l'égalité de deux quantités, ibid.
On résout une équation lorsqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme, ibid.
- III. Résolution de l'équation qui exprime le Problème précédent, ibid.
Le caractère — indique la Soustraction, ibid.
- IV. Autre Solution du Problème précédent, 5
- V. Autre exemple du Problème précédent. 6
- VI. Troisième exemple du Problème précédent, 6 & 7

	<i>Le signe \times indique la Multiplication ;</i>	7
VII.	<i>Nouveau Problème de même nature que le précédent ,</i>	8
VIII.	<i>La solution analytique d'un Problème a deux parties ,</i>	9
	<i>Dans la premiere on exprime ce Problème par une équation ,</i>	ibid.
	<i>Dans la seconde on résout cette équation ,</i>	ibid.
IX.	<i>Les équations du premier degré sont celles où l'inconnue n'est multipliée ou divisée que par des quantités connues ,</i>	10
X.	<i>Les termes d'une équation sont ses parties séparées par les $+$ ou $-$.</i>	11
XI.	<i>Tout terme peut être passé d'un côté de l'équation à l'autre, en changeant de signe ,</i>	12
XII.	<i>On appelle membres d'une équation les deux parties séparées par le signe $=$.</i>	ibid.
XIV.	<i>Maniere de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue ,</i>	13
XV.	<i>Maniere de faire disparaître le diviseur qui affecte l'inconnue ,</i>	14
XVI.	<i>Exemple d'équation du premier degré résolue par les principes précédens ,</i>	ibid.
XVII.	<i>Maniere de faire évanouir les fractions d'une équation ,</i>	ibid.
XVIII.	<i>Autre méthode par laquelle on les fait toutes évanouir ,</i>	15
XIX.	<i>Troisième Problème ,</i>	17
	<i>On employe une barre en Algebre comme en Arithmétique pour indiquer la division ,</i>	ibid.
XXI.	<i>Autre solution du même Problème ,</i>	20
XXII.	<i>Quatrième Problème ,</i>	ibid.
	<i>Maniere dont on exprime les proportions en Algebre ,</i>	21
XXIV.	<i>Solution du Problème précédent pris généralement ,</i>	24
	<i>On employe les premieres lettres de l'alphabet pour exprimer ce que l'on connoît , & les dernieres pour ce qu'on ne connoît pas.</i>	25

DES MATIERES. 335

- Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles,
sont censées se multiplier, *ibid.*
- XXV. Application de la solution précédente à des nombres,
Autre application, 30 *ibid.*
- XXVI. Cinquième Problème, 31
- XXVII. Exemple en nombres, 32
Autre exemple, 33
- XXIX. Les règles des articles X & suivant suffisent
pour les équations littérales, 34
L'application de ces règles a donné naissance à plusieurs
opérations de l'Algebre, *ibid.*
Premier exemple de résolution d'équations littérales,
34 & 35
- XXX. Deuxième exemple de résolution d'équations littérales,
35
- XXXI. Réduction des quantités à leur plus simple expression,
ibid.
On appelle termes positifs, ceux qui sont précédés de + ; négatifs, ceux qui sont précédés de —, 36
- XXXII. L'Addition Algébrique est la même opération
que la précédente, 37
- XXXIII. Comment on peut dire que l'on ajoute une
quantité négative, 38
- XXXIV. On tire encore de l'opération précédente la
Soustraction Algébrique, *ibid.*
Procédé de la Soustraction, 39
- XXXV. On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait
une quantité négative, 40
- XXXVI. Troisième exemple de résolution d'équations
littérales, 41
- XXXVII. Un chiffre placé au-dessus & à droite d'une
lettre, désigne ce qu'elle auroit été répétée de fois
par la multiplication, 42
Et dans ce cas la lettre est dite élevée à la puissance
exprimée par ce chiffre qu'on appelle exposant,
ibid.
- Les chiffres qui sont à gauche & sur la même ligne,
sont nommés coëfficiens. 43

XXXVIII. Quatrième exemple de résolution d'équations littérales,	ibid.
XXXIX. Les quantités incomplexes sont celles qui n'ont qu'un terme,	44
Multiplication des quantités incomplexes, tirée des deux exemples précédens,	ibid.
XL. Cinquième exemple de résolution d'équations littérales,	45
XLI. Division des quantités incomplexes,	46
XLII. Sixième exemple de résolution d'équations littérales,	47
Usage des barres au dessus des quantités, le même que celui des parenthèses,	ibid.
XLIII. Multiplication des quantités complexes ou polynomes tirée de l'article précédent,	49
Exemple de multiplication de polynomes,	ibid.
XLIV. Principe fondamental des Multiplications,	51
XLV. Méthode qu'il faut suivre dans la Multiplication,	ibid.
XLVI. Application de la méthode précédente à un exemple,	52
XLVII. Sixième exemple de résolution d'équations littérales,	54
Manière de faire la division indiquée dans cet exemple,	55
XLVIII. Méthode générale pour les divisions des quantités complexes,	56
Manière d'éviter tout tâtonnement dans la division,	57
Ce que c'est qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre,	ibid.
XLIX. Application de la méthode précédente à un exemple,	58
L. Autre exemple,	60
LI. Attention qu'il faut avoir en ordonnant lorsqu'il y a plusieurs lettres,	61
LII. Problème dans lequel on employe deux inconnues,	62 & 63
	LIV.

- LIV. Application de la solution précédente à un exemple, 67
- LVI. Autre Problème où l'on employe deux inconnues, 68
- LVII. Exemple du Problème précédent en nombres, 70
- LVIII. Autre exemple, 71
Singularité des expressions où l'on arrive dans cet exemple, *ibid.*
Maniere de reconnoître ce qu'elles peuvent signifier, 72
- LIX. Théorèmes généraux concernant les signes des quotiens ou des produits, *ibid.*
- LX. On démontre que $-b$ par $-d$ est $+bd$, quoique ces quantités ne soient précédées de rien, 73
- LXI. Les autres cas se démontrent de même, 74
- LXII. Comment la valeur négative qu'on a trouvée, résout le Problème, *ibid.*
- LXIII. Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du Problème, 75
Il en est de même des connues, *ibid.*
- LXIV. Exemple de l'usage des quantités connues faites négatives, 76
- LXV. Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives, 77
- LXVI. Deux équations du premier degré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes, 78
Exemple, 79
- LXVII. Autre exemple, *ibid.*
- LXVIII. Autre maniere de résoudre le même exemple, 83
- LXIX. Comparaison des deux solutions précédentes, 84
- LXXI. Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, 87
- LXXIII. Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviseur des quantités Algébriques, 91

LXXIV. Premier exemple ,	92
LXXV. Second exemple ,	94
LXXVI. Troisième exemple ,	95
LXXVII. Autre maniere de résoudre le même exemple ,	96
LXXVIII. Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviseur sans la méthode précédente ,	97
LXXIX. Lorsqu'il y a trois inconnues dans un Problème, il faut trois équations pour le résoudre ,	98
Comment on dégage les inconnues de ces équations ,	ibid.
LXXX. Problème dans lequel on employe trois inconnues ,	99
LXXXI. Maniere d'abrèger les calculs par des dénominations particulieres ,	101
LXXXII. Exemple du Problème précédent en nombres ,	103
LXXXIII. Tous les Problèmes du premier degré à trois inconnues peuvent , étant mis en équations, être compris dans le précédent ,	104

S E C O N D E P A R T I E .

De la résolution des équations du second degré.

I. Problème qui contient dans sa généralité des Problèmes de tous les genres ,	108
II. Equation du Problème précédent pour le second degré ,	109
III. Pour le troisième degré ,	110
IV. Pour le degré n.	111
V. Maniere d'arriver à la solution générale des équations du second degré ,	ibid.
Le signe $\sqrt{\quad}$ indique la racine quarrée ,	113
VI. La racine quarrée d'une quantité est aussi-bien négative que positive ,	ibid.
Une équation du second degré a deux racines , c'est-à-dire, deux valeurs d' x ,	ibid.

DES MATIERES. 339

VII. Formule contenant ces deux racines ,	113
VIII. Application de la formule précédente à l'équation de l'article II ,	ibid.
IX. Réduction de la valeur d' <i>x</i> en formant la racine du produit par celles des produisans ,	115
X. Exemple de ce Problème ,	ibid.
XI. Autre exemple ,	117
XII. Troisième exemple qui , demandant la racine d'une quantité négative , est impossible ,	ibid.
Ces racines sont dites imaginaires ,	118
XIII. Quelles sont les équations du second degré ; dont les racines sont imaginaires ,	ibid.
XIV. Résolution des équations du second degré , sans les comparer à la formule générale ,	ibid.
XV. Autre Problème du second degré ;	119
XVI. Des deux valeurs précédentes , l'une est nécessairement positive , l'autre négative ,	122
XVII. Usage de la valeur négative ,	ibid.
XX. Nouveaux exemples de résolutions d'équations du second degré ,	125
XXI. Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué sur un exemple ,	129
XXII. Autres exemples d'extractions de racines quarrées ,	130
XXIII. Exemples de réductions de quantités radicales ,	131
XXIV. Les quantités qui n'ont point de racines exactes , sont dites incommensurables ou irrationnelles ,	132
L'Addition & la Soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction ,	ibid.
XXV. Multiplication des incommensurables ,	133
XXVI. Division des incommensurables ,	134
XXVII. Problème du second degré demandant plusieurs inconnues ,	136
XXVIII. Autre maniere de résoudre les équations précédentes ,	138
XXIX. Exemple d'équation du second degré à deux inconnues , plus compliqué que le précédent ,	139

Y ij

- Equation finale à laquelle conduisent ces équations ;
 140
 XXX. Autre maniere de traiter le même exemple,
 ibid.
 XXXII. y étant à un degré quelconque, & x seule-
 ment au second degré, on traiteroit de même les
 deux équations, 143
 XXXIII. Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'équa-
 tion finale, lorsque x seroit au troisième degré,
 144
 XXXIV. Ce seroit la même chose, si x montoit à des
 degrés plus élevés, 145
 XXXV. Et s'il y avoit plus de deux inconnues, on
 parviendroit de même à l'équation finale, ibid.

T R O I S I É M E P A R T I E.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les
 équations de tous les degrés, avec la méthode de
 tirer de ces équations, celles du premier & du se-
 cond degré qu'elles peuvent renfermer.

- I. Maniere de former une équation par le moyen de ses
 racines, 148
 II. Une équation a autant de racines que de degrés,
 149
 III. Propriété des équations de tous les degrés, ibid.
 IV. Dans une équation sans second terme, la somme
 des racines positives est égale à celle des négatives,
 150
 V. Une équation qui n'a point de terme connu, a au
 moins une racine égale à zéro, 151
 VI. Conditions qu'il faut observer dans une équation,
 pour y trouver les propriétés précédentes, ibid.
 VII. Méthode pour avoir les racines commensurables
 d'une équation, 152
 VIII. Dans une équation dont tous les coefficients sont
 entiers, l'inconnue ne sçauroit être une fraction,
 153

DES MATIERES. 347

IX. Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une équation quelconque ,	154
X. Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux équations fractionnaires ,	155
XI. Inconvénient de la méthode précédente ,	ibid.
XII. Réflexions qui ont servi à perfectionner cette méthode ,	156
XIII. Principe fondamental pour trouver les racines commensurables ,	157
XIV. Application de la Méthode précédente à un exemple ,	158
XV. Maniere d'avoir tous les diviseurs d'un nombre ,	162
XVII. Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables ,	164
XVIII. Troisième exemple de la méthode de trouver les racines commensurables ,	165
XIX. Méthode pour trouver des équations du second degré commensurables dans une équation donnée ,	167
XX. Application de la méthode précédente ,	169
XXI. Autre application de la méthode précédente ,	172
XXII. Méthode pour trouver les diviseurs d'une dimension , lorsque l' x doit avoir un coefficient ,	177
XXIII. Application de cette méthode à un exemple ,	178
XXIV. Méthode pour trouver les diviseurs des deux dimensions , lorsque l' x^2 doit avoir un coefficient ,	180
XXV. Application de cette méthode à un exemple ,	181
XXVI. Toute quantité de moins de six dimensions , & qui a des diviseurs , en doit avoir d'au-dessous de trois dimensions ,	182
XXVII. Si la quantité a six ou plus de dimensions , elle pourroit n'avoir de diviseurs que de trois ou de plus de dimensions ,	ibid.
XXIX. Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux	

lettres dans une quantité qui en a trois ,	184
XXX. Exemple ,	185
XXXI. Autre exemple ,	ibid.
XXXII. Méthode pour trouver les diviseurs de trois lettres & d'une dimension ,	186
XXXIII. Application de la méthode précédente à un exemple ,	187
XXXIV. Autre exemple ,	188
XXXV. Troisième exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même temps que ceux à trois ,	190
XXXVI. Méthode pour trouver les diviseurs de deux dimensions & à trois lettres ,	193
XXXVII. Application de cette méthode à un exemple ,	194
XXXVIII. Autre exemple ,	196
Application de la méthode donnée , article XIV , pour trouver tous les diviseurs d'un nombre , aux quantités littérales ,	197
XL. Ce qu'il faut faire pour trouver les diviseurs des quantités qui ne sont pas homogènes ,	201
XLI. Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes ,	202

QUATRIÈME PARTIE.

Résolution des équations de degrés quelconques , lorsqu'elles n'ont que deux termes , ou lorsqu'en ayant trois , elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux , par la méthode des équations du second degré , avec différentes opérations nécessaires pour ces équations , comme l'extraction des racines , la réduction des quantités radicales , &c.

- I. Des équations du troisième degré à deux termes ,
204
On met 3 sur le caractère $\sqrt{\quad}$, pour exprimer la racine cube ,
ibid.
- II. Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à-la-fois ,
ibid.

DES MATIERES. 343

IV. Comment on multiplie les radicaux cubes ,	206
V. Racines de l'équation du troisiéme degré à deux termes ,	ibid.
VI. Des équations à deux termes d'un degré quelconque ,	207
Ces équations ne scauroient jamais avoir plus de deux racines réelles ,	ibid.
VII. Réflexions sur l'élevation des puissances ,	208
VIII. Application des réflexions précédentes à l'extraction des racines ,	209
IX. De l'extraction des racines , lorsqu'on a des puissances incomplètes ,	210
XI. En quoi consiste le cube d'un binome ,	212
XII. Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes ,	213
XIII. Premier exemple ,	ibid.
XIV. Second exemple ,	214
XV. Additions & Soustractions des quantités radicales de toute espèce ,	216
XVI. Multiplication & Division des quantités radicales qui ont mêmes exposans ,	ibid.
Exemple ,	ibid.
XVII. Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans , il faut les réduire au même exposant ,	217
Méthode pour cette réduction ,	ibid.
XVIII. Autre maniere de faire les opérations précédentes ,	219
XIX. Ce que c'est qu'une puissance fractionnaire ,	225
Ce que c'est qu'une puissance négative ,	ibid.
Ce que c'est que la puissance 0 ,	ibid.
XX. Des équations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré ,	227
XXI. Exemple de la méthode précédente ,	228
XXII. Autre exemple ,	229
XXIII. Troisiéme exemple ,	ibid.
XXIV. Quatriéme exemple ,	230
XXV. Méthode pour trouver les racines quarrées des	

quantités en partie commensurables & en partie radicales,	231
XXVII. Application de la méthode précédente à un exemple,	234
XXVIII. Autre exemple,	ibid.
XXX. Troisième exemple,	235
XXXI. Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables,	237
XXXII. Application de la méthode précédente à un exemple,	240
XXXIII. Autre exemple,	241
XXXV. Méthode pour trouver les racines des quantités numériques en partie commensurables, &c.	244
XXXVI. Application de la méthode précédente à un exemple,	246
XXXVII. Autre exemple,	ibid.
XXXVIII. Simplification de la méthode précédente,	247
XXXIX. Application de la nouvelle méthode,	248
XL. Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où A & B sont de signes différens,	249
Ce qu'il faut faire en ce cas,	ibid.
XLI. Cas où la méthode précédente pourroit induire en erreur,	251
Moyen de s'en garantir,	252
XLIII. Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux,	254
XLIV. Comment on prend la racine quatrième des quantités de même espèce que les précédentes,	255
XLV. Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair,	ibid.
XLVI. Pour les racines cinquièmes,	ibid.
XLVII. Pour les racines de tous les degrés,	256
XLVIII. De la manière d'élever un binome à une puissance quelconque,	257
Formule générale pour l'élevation de $p+q$ à la puissance m ,	262

DES MATIERES. 345

- L. Démonstration du théorème de l'article XLVII, 263
 LI. Application de la formule précédente à un exemple, ibid.
 LII. Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes, 265
 LIII. Exemple, ibid.
 LIV. L'on fait voir que la formule précédente est bonne encore, lorsque l'exposant est fractionnaire, 268
 LV. La même formule va aux puissances négatives, 270
 LVI. Exemple d'une racine quarrée prise par la formule de l'élevation des puissances, 272
 LVII. Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes, on en trouve d'approchées par la méthode précédente, 273
 Exemple, ibid.
 Ce que c'est qu'une série ou suite infinie, ibid.
 LVIII. Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente, 275

CINQUIÈME PARTIE.

Résolution des équations du troisième & du quatrième degré.

- I. Equation du troisième degré la plus composée, 278
 II. Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette équation, ibid.
 III. Transformation précédente appliquée à une équation du quatrième degré, 280
 Ce n'est ordinairement que le second terme qu'on fait évanouir, 281
 IV. Evanouissement du second terme dans une équation du cinquième degré, ibid.
 V. Dans une équation du degré quelconque m, ibid.
 VI. Résolution de l'équation générale $x^3 + px + q = 0$, ibid.

- VII. La formule précédente ne donne qu'une des trois racines, 284
 Maniere d'avoir les deux autres, ibid.
- VIII. Cas où la formule précédente ne scauroit faire connoître x à cause des imaginaires qu'elle renferme, 285
- IX. On démontre cependant que dans ce cas x est réel, 286
- X. Par la même méthode on a une valeur approchée de x , 288
- XI. Les deux autres valeurs de x sont aussi réelles dans le même cas, 289
- XII. Comment des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, on tire celle de l'équation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$, 290
- XIII. Une équation du troisième degré a ses trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires, ibid.
- XIV. Comment on peut distinguer ces cas, ibid.
- XV. Quelles sont les racines lorsque $\frac{1}{27} p^3$ est négatif & $= \frac{1}{27} qq$, 291
- XVI. Application des méthodes précédentes à un exemple, 292
- XVII. Autre exemple contenant une équation du sixième degré qui se réduit au troisième, 293
 Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi, 294
- XIX. Quatrième exemple dans lequel la formule de l'article VI est insuffisante, 295
 Application de la méthode de l'article X, pour approcher des racines, ibid.
 Cas irréductible du troisième degré, 297
- XX. Inconvénient de la méthode enseignée, art. X, ibid.
- XXI. Autre méthode d'approximation générale & facile dans la pratique, 298
 La méthode qu'on vient d'enseigner donne d'abord x à $\frac{1}{1000}$ ème près, 300
- XXII. Maniere de rendre l'approximation beaucoup plus exacte, ibid.
- XXIII. Application de cette méthode à un exemple, 301

DES MATIERES. 347

- XXIV. Autre exemple, 302
- XXV. Résolution de l'équation générale du quatrième degré, 303
- La résolution d'une équation du quatrième degré dépend d'une équation du troisième, 305
- Cette équation s'appelle la réduite, *ibid.*
- XXVI. Dans le quatrième degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule, 306
- XXVII. On arrive aux mêmes racines d'une équation du quatrième degré quelle que soit celle des racines de la réduite qu'on ait prise, 308
- XXIX. Les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux imaginaires & deux réelles, 311
- XXX. Les racines imaginaires du quatrième degré sont de même nature que celles du second, *ibid.*
- XXXI. Lorsque des quatre racines deux sont réelles & deux imaginaires, on résout exactement l'équation, 312
- C'est le contraire lorsque les quatre racines sont toutes réelles ou toutes imaginaires, *ibid.*
- XXXII. Maniere de distinguer les cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires, 313 & 314
- Conditions des quatre racines réelles, *ibid.*
- Conditions des quatre racines imaginaires, 315
- XXXIII. Toute équation du quatrième degré sans second terme, & qui a le troisième positif, a des racines imaginaires, *ibid.*
- XXXV. Avantages qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite, plutôt que dans la proposée, 317
- XXXVI. Maniere de connoître les équations du quatrième degré dont les racines n'ont point d'autres radicaux que ceux du second degré, 318
- XXXVII. Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorsqu'elles sont réelles, 319
- XXXVIII. Application des méthodes précédentes à un exemple, *ibid.*

XXXIX. Autre exemple,	327
XL. Troisième exemple,	323
XLI. Quatrième exemple,	325
XLII. Cinquième exemple d'une équation,	326
XLIV. Sixième exemple,	327
XLV. Septième exemple,	328
XLVI. Manière de faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque,	330
Exemple,	ibid.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de CHARDON.

A P P R O B A T I O N.

J'AI LU, par ordre de Monseigneur le Chancelier, les *Eléments d'Algebre & de Géométrie*, par M. Clairaut, & je crois que l'on peut en permettre l'Impression: A Paris le 12 Novembre 1768.

Signé, l'Abbé DE LA CHAPELLE.

P R I V I L È G E D U R O I.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: à nos Amés & Féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maître des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenants Civils, & autres, nos Justiciers qu'il appartiendra: S A L U T, notre amé Jean-Baptiste DESPILLY, Libraire, Nous a fait exposer, qu'il desireroit faire imprimer & donner au public: les *Eléments d'Algebre & de Géométrie*, par M. Clairaut, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. FAISONS défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impresion étrangere dans aucun lieu de notre obéissance:

TABLE

comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit ouvrage, ni d'en faire aucun extrait sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts, A LA CHARGE que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en beau papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril mil sept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du présent Privilège; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit ouvrage, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, es mains de notre trésorier & féal Chevalier, Chancelier-Garde des Sceaux de France, le sieur DE MAUPEOU; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit sieur DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des Présentes; DU CONTENU desquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit ouvrage, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers, Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. COM-

MANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis, & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre-Normande & Lettres à ce contraires; Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le quatorzième jour du mois de Décembre l'an de grace mil sept cent soixante-huit, & de notre Règne le cinquante-quatrième. Par le Roi en son Conseil.

Signé, LE BEGUE.

Réglé sur le Registre XVII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, le présent Privilège & ensemble la Cession, N^o 195. Fol. 591, conformément aux Réglemens de 1723. A Paris, ce 20 Décembre 1768.

Signé, BRIASSON, *Syndic.*

Je soussigné reconnois que Messieurs les Intéressés au présent Privilège, sont Durand neveu, pour un quart; Veuve Savoye; Delalain; Desaint; Pankouke; Saillant & moi, chacun pour un huitième, renonçant à toute autre propriété du présent Privilège: A Paris ce 20 Décembre 1768.

Signé, DESPILLY.

MAIRONS au premier notre Huisier ou Sergent sur
ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous
actes requis, et nécessaires, sans demander autre per-
mission, & nonobstant clamour de Huis, Chanc-
Normande & autres à ce contraires; Car tel est no-
tre plaisir Donnés à Paris, le quatorzième jour du
mois de Décembre l'an de grace mil sept cent soixante-
huit, & de notre Règne le cinquante-quatrième. Par
le Roi en son Conseil.

Signé, LE BECUE.
Régis à Paris le 14 Décembre 1768. Le Comte de Camille Royale &
Syndic des Libraires & Imprimeurs de Paris, le présent
Placard & enregistre au Chanc. N. 197. fol. 191. con-
formément aux Réglements de 1723. A Paris, ce 20 Dé-
cembre 1768.

Signé, BRIASSON, Syndic.
Je soussigné reconnais que Messieurs les Interci-
lés au présent Placard, sont Durand neveu, pour
un quart; Veuve Savoye; Delain; Delain; Pan-
kouk; Saillan & moi, chacun pour un huitième,
renvoiant à toute autre propriété du présent Placi-
ard: A Paris ce 20 Décembre 1768.

Signé, DESPILLY.
Je soussigné reconnais que Messieurs les Interci-
lés au présent Placard, sont Durand neveu, pour
un quart; Veuve Savoye; Delain; Delain; Pan-
kouk; Saillan & moi, chacun pour un huitième,
renvoiant à toute autre propriété du présent Placi-
ard: A Paris ce 20 Décembre 1768.





