Boutieu

ELÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de notre signature sera réputé contrefait.

Charles Delagrave et Cie

A LA MÊME LIBRAIRIE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Applications de la Géométrie élémentaire, rédigées d'après le programme de l'enseignement scientifique des lycées. 4e édition. 1 volume in-8. Prix.. 3 fr.

Leçons nouvelles de Géométrie élémentaire, 2e édition, entièrement refondue.

Première partie : GÉOMÉTRIE PLANE. 1 volume in-8. Prix..... 4 fr.
Deuxième partie : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE. 1 vol. in-8. Prix. 4 fr.

Ces leçons comprennent les principes de la Géométrie moderne.

Leçons nouvelles d'Algèbre élémentaire, rédigées d'après le programme des classes de seconde et de logique scientifiques. 3e édition, refondue et augmentée, 1 vol. in-8. Prix, broché............. 4 fr.

Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de Géométrie de M. A. AMIOT et précédées d'observations sur la résolution des problèmes de géométrie, par M. AMIOT et M. DESVIGNES. 3e édition, revue et augmentée (1865). 1 fort vol. in-8, avec planches. Prix.. 6 fr.

Leçons nouvelles de Géométrie descriptive de A. AMIOT, 3e édition, refondue et augmentée d'*applications aux ombres et de la méthode des plans côtés,* par M. A. CHEVILLARD, professeur de perspective à l'École impériale des Beaux-Arts. 2 vol. in-8, dont un de planches. Prix.. 7 fr.

Paris. — Typ. Rouge frères, Dunon et Fresné, rue du Four-St-Germ., 43.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE

RÉDIGÉS

D'APRÈS LE NOUVEAU PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT

SCIENTIFIQUE DES LYCÉES

SUIVIS D'UN

COMPLÉMENT

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR A. AMIOT

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS, A PARIS

ET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES BEAUX-ARTS

QUINZIÈME ÉDITION

OUVRAGE AUTORISÉ PAR S. E. M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PARIS

CH. DELAGRAVE ET C^{ie}, LIBRAIRES-ÉDITEURS

58, RUE DES ÉCOLES, 58

1873

AVERTISSEMENT

Ces Éléments de géométrie, réimprimés pour la treizième fois, sont conformes non-seulement au nouveau programme des classes de lettres (24 mars 1865), mais encore à celui du cours de mathématiques élémentaires ; car ces programmes sont identiques pour la géométrie plane, à deux ou trois questions près, et ne diffèrent pour la géométrie dans l'espace que par quelques théories que le programme du cours de mathématiques élémentaires contient seul.

Nous publions ci-après ces deux programmes dans toute leur étendue, avec l'indication du nombre des leçons qui leur sont consacrées, pour qu'on puisse reconnaître leur identité dans les parties qui leur sont communes. Nous indiquons aussi, au moyen de la pagination, la concordance de ces programmes et de nos Éléments de géométrie.

NOUVEAU

PROGRAMME DE GÉOMÉTRIE

PARTICULIER AUX CLASSES DE LETTRES

24 *Mars* 1865

Classe de Quatrième.

Classe de Troisième.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE PLANE.

(2 LEÇONS PAR SEMAINE.

[1] On admettra qu'on ne peut mener, par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite.

Classe de seconde.

(2 leçons par semaine; 30 leçons environ.)

[1] La solution de cette question sera complétée dans le cours de mathématiques élémentaires. — La longueur de la circonférence de cercle sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dont les côtés diminuent indéfiniment.

[2] Voir la solution de ces questions dans nos *Applications de la Géométrie élémentaire*, 4e édition, 1865.

Classe de Rhétorique.

(UNE LEÇON PAR SEMAINE; 15 LEÇONS ENVIRON.)

Révision des principales propositions relatives à la ligne droite et au plan.

Cylindre droit à base circulaire. — Mesure de la surface latérale et du volume. — Extension aux cylindres droits à base quelconque 292

Cône droit à base circulaire. — Sections parallèles à la base. — Surface latérale du cône, — du tronc de cône à bases parallèles. — Volume du cône, — du tronc de cône à bases parallèles. 282

Sphère. — Sections planes, grands cercles, petits cercles. — Pôles d'un cercle. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane. 299

Plan tangent à la sphère 305

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Aire de la zone de la sphère entière. — Exercices 313

Mesure du volume de la sphère considérée comme somme d'une infinité de pyramides ayant pour bases des polygones plans infiniment petits, et le rayon pour hauteur. — Autre méthode fondée sur la considération du volume engendré par un triangle, tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets. — Application au secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Volume du secteur sphérique, de la sphère 319

Classe de Philosophie.

(TROIS LEÇONS PAR SEMAINE DANS LE PREMIER SEMESTRE, ET DEUX DANS LE SECOND.)

L'enseignement des mathématiques de cette classe ne demande pas de programme particulier; on reprendra les matières déjà enseignées dans les années de troisième, seconde et rhétorique.

Le professeur introduira seulement quelques leçons complémentaires sur la similitude des figures dans l'espace.

NOUVEAU

PROGRAMME DE GÉOMÉTRIE

DES COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

24 *Mars* 1865

On reprendra rapidement le programme de la classe de troisième et celui de la classe de seconde, en les complétant sur quelques points, particulièrement sur l'inscription des polygones réguliers (cas du décagone) et la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, par la méthode des isopérimètres.

On terminera cette révision par des exercices et des problèmes sur la comparaison des aires :

Construire un carré équivalent à un polygone donné. 151

Construire un carré dont le rapport à un carré donné soit égal au rapport de deux lignes données. 161

Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les côtés adjacents fassent une somme ou aient entre eux une diffé ence donnée. . . . 116

Application à la construction des racines des équations du second degré à une inconnue. 405

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Du plan et de la ligne droite. — Condition pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan. 189

Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan. 195

Parallélisme des droites et des plans. 199

Angle dièdre. — Génération des angles dièdres par la rotation d'un plan autour d'une droite. — Dièdre droit. 207

Mesure des angles dièdres. 210

Propriétés des plans perpendiculaires entre eux. 213

Angles trièdres. — Cas d'égalité et de symétrie. 217

Propriété de l'angle tièdre supplémentaire. 226

Limite de la somme des faces d'un angle polyèdre convexe. 224

Limites de la somme des angles dièdres d'un angle trièdre. — Analogies et différences entre les angles trièdres et les triangles rectilignes. 227

Des polyèdres. — Prisme, parallélipipède, cube, pyramide. — Sections planes, parallèles du prisme et de la parallèle. . . . . 230 et 246

NOTIONS SUR QUELQUES COURBES USUELLES

[1] L'étude de la symétrie par rapport à un point se ramène à celle de la symétrie par rapport à un plan, en imprimant une rotation de 180° à l'une des figures autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le centre de symétrie.

[2] On appelle ainsi ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et dont les angles polyèdres homologues sont égaux.

[3] Ces notions n'occuperont que cinq ou six leçons.

GÉOMÉTRIE

FIGURES PLANES

PREMIÈRE LEÇON

Programme. — Ligne droite et Plan. — Ligne brisée. — Ligne courbe. — Lorsque deux droites partent d'un même point suivant des directions différentes, elles forment une figure qu'on appelle *angle*. — Génération des angles par la rotation d'une droite autour d'un de ses points. — Angles droit, aigu, obtus. — Par un point pris sur une droite, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette droite

DÉFINITIONS

1. On appelle *volume* une portion limitée de l'espace. Ce qui sépare le volume du reste de l'espace se nomme *surface*.

Lorsque deux surfaces se pénètrent, on donne le nom de *ligne* à leur partie commune. De même, le *point* est la partie commune à deux lignes qui se coupent.

La *Géométrie* a pour objet l'étude des propriétés des volumes, des surfaces et des lignes : aussi dit-on qu'elle est la *science de l'Étendue*.

2. Il y a deux espèces de lignes : la ligne *droite* et la ligne *courbe*.

La ligne *droite* est la ligne qui va d'un point à un autre par le chemin le plus court.

On admet comme évident qu'*on ne peut mener qu'une ligne droite d'un point à un autre*. Il en résulte que, *si l'on applique* *deux points d'une ligne droite sur une autre ligne droite, ces deux lignes coïncident dans toute leur étendue.*

On désigne un point par une lettre quelconque. Pour nommer une ligne droite, on énonce deux points de cette ligne; ainsi la ligne droite AB est celle qui passe par les points A et B.

Toute ligne composée de portions finies de lignes droites est une *ligne brisée.*

On appelle ligne *courbe* toute ligne qui n'est ni droite ni brisée. Il existe une infinité d'espèces de lignes courbes; chacune a sa définition propre.

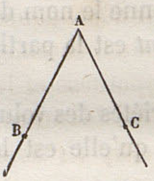
3. Parmi les surfaces, on distingue la *surface plane* ou le *plan.*

Le *plan* est une surface telle que la ligne droite, menée par deux points quelconques de cette surface, coïncide avec elle dans toute son étendue.

4. On désigne les volumes, les surfaces et les lignes sous le nom commun de *figures.* — Une figure est *plane* lorsque tous ses éléments sont compris dans un même plan.

Deux figures sont *égales* lorsqu'on peut les faire coïncider, en appliquant l'une sur l'autre. Dans la superposition de deux figures planes on admet ce principe qui sera démontré plus loin : *Si l'on applique trois points d'un plan sur un autre plan, ces deux surfaces coïncident dans toute leur étendue.*

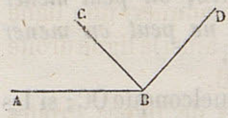
On dit que deux figures sont *équivalentes* lorsqu'elles ont la même étendue, sans avoir la même forme.



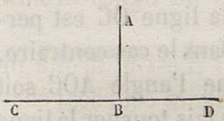
5. Lorsque deux lignes droites partent d'un même point A suivant des directions différentes AB, AC, elles forment une figure qu'on appelle *angle.* Les lignes droites AB AC sont les *côtés* de l'angle; le point A en est le *sommet.*

On désigne un angle par son sommet s'il est seul en ce point; dans le cas contraire, on marque deux points sur les côtés de l'angle et l'on énonce le sommet entre ces deux points. Ainsi l'angle BAC a le point A pour sommet, et ses côtés passent respectivement par les points B, C.

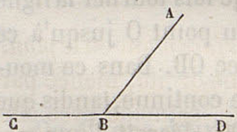
La grandeur d'un angle, par exemple BAC, ne dépend que de l'écartement de ses côtés, qu'il faut toujours concevoir prolongés indéfiniment. Pour se faire une idée de cette grandeur, on suppose le côté AC d'abord appliqué sur AB, puis on le fait tourner autour du sommet A jusqu'à ce qu'il ait repris sa position primitive; la quantité dont la ligne droite AC a tourné est précisément ce qui constitue la grandeur de l'angle BAC.



6. Deux angles ABC, CBD sont *adjacents* lorsqu'ils ont le même sommet B, un côté commun BC et qu'ils sont placés de part et d'autre de ce côté.



7. Une ligne droite AB est *perpendiculaire* ou *oblique* à une autre ligne droite CD, selon qu'elle fait avec celle-ci deux angles adjacents ABC, ABD, égaux ou inégaux. Dans l'un et l'autre cas, l'intersection B des deux lignes droites est appelée le *pied* de la perpendiculaire ou de l'oblique.



On nomme *angle droit* tout angle dont l'un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

8. Un *théorème* est la proposition d'une vérité qu'il faut démontrer.

L'énoncé d'un théorème renferme deux parties, savoir : une *hypothèse* faite sur un certain sujet et une *conclusion* qui est la conséquence de l'hypothèse. Le raisonnement que l'on fait pour déduire la conclusion de l'hypothèse, lorsque leur dépendance n'est pas évidente, est appelé la *démonstration* du théorème.

Deux théorèmes sont *réciproques*, lorsque l'hypothèse et la conclusion de l'un sont la conclusion et l'hypothèse de l'autre. Ainsi le théorème : « *Si deux angles sont droits, ils sont égaux,* » a pour réciproque : « *Si deux angles sont égaux, ils sont droits.* »

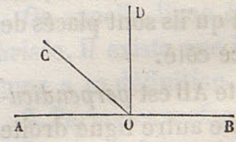
Lorsque la conclusion d'un théorème convient à plus de cas que l'hypothèse, le théorème réciproque peut être faux. Nous en avons un exemple dans le théorème précédemment énoncé ; car deux angles peuvent être égaux sans être droits.

On appelle *corollaire* d'un théorème une conséquence quelconque de ce théorème.

THÉORÈME

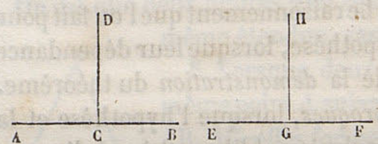
D'un point O, pris sur une ligne droite AB, on peut mener une perpendiculaire à cette ligne, et on ne peut en mener qu'une.

Je tire par le point O une ligne droite quelconque OC ; si les angles adjacents AOC, BOC sont égaux, la ligne OC est perpendiculaire à AB. Dans le cas contraire,



et en admettant que l'angle AOC soit moindre que BOC, je fais tourner la ligne droite OC autour du point O jusqu'à ce qu'elle coïncide avec OB. Dans ce mouvement, l'angle AOC croît d'une manière continue, tandis que l'angle BOC, d'abord plus grand que AOC, décroît d'une manière continue jusqu'à devenir nul. Donc la ligne droite OC passe par une position OD, dans laquelle elle fait avec AB des angles adjacents AOD, BOD, égaux entre eux. Cette position est unique ; car, avant de l'atteindre et après l'avoir dépassée, la ligne OC fait avec AB des angles inégaux. Par conséquent, OD est la seule perpendiculaire qu'on puisse mener à la ligne droite AB par le point O, pris sur cette ligne.

Corollaire. — *Tous les angles droits sont égaux.*



Soient la ligne droite CD perpendiculaire à AB, et la ligne droite GH perpendiculaire à EF ; je dis que l'angle droit ACD est égal à l'angle droit EGH.

Je transporte l'angle ACD sur l'angle EGH, et j'applique la ligne droite AB sur EF, de telle sorte que le point C coïncide avec le point G. La ligne droite CD, perpendiculaire à AB, prend alors la direction de la ligne droite GH perpendiculaire à EF, et l'angle ACD coïncide avec l'angle EGH.

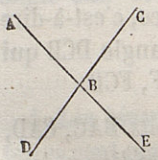
Remarque. — Un angle est *aigu* ou *obtus*, selon qu'il est plus petit ou plus grand qu'un angle droit.

DEUXIÈME LEÇON

Programme. — Angles adjacents. — Angles opposés par le sommet.

DÉFINITIONS.

On dit que deux angles ABC, DBE sont *opposés par le sommet* lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

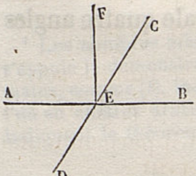


Deux angles sont *complémentaires*, lorsque leur somme est égale à un angle droit. — Deux angles sont *supplémentaires*, s'ils valent ensemble deux angles droits.

THÉORÈME I

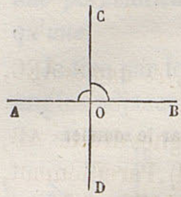
Lorsqu'une ligne droite AB *en rencontre une autre* CD, *la somme de deux angles adjacents* AEC, BEC, *formés par ces lignes, égale deux angles droits.*

Si la ligne droite CD est perpendiculaire sur AB, le théorème est évident, puisque les angles AEC, BEC sont droits.



Dans le cas contraire, j'élève par le point E la perpendiculaire EF sur la ligne droite AB, et je fais remarquer que l'angle obtus AEC est plus grand que l'angle droit AEF de l'angle CEF, tandis que l'angle aigu BEC est moindre que l'angle droit BEF du même angle CEF. Donc la somme des deux angles adjacents AEC, BEC égale la somme des deux angles droits AEF, BEF.

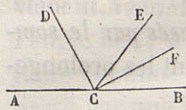
Corollaire I. — *Lorsque l'un des quatre angles formés par deux lignes droites* AB, CD *est droit, les trois autres sont droits aussi.*



En effet, si l'angle AOC est droit, l'angle COB qui lui est adjacent sera droit aussi, puisque ces angles sont supplémentaires.

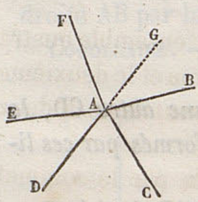
Il résulte pareillement, de ce que l'angle COB est droit, que son supplément BOD égale aussi un angle droit. Enfin l'angle AOD est droit, parce qu'il est le supplément de l'angle droit BOD.

Corollaire II. — *La somme des angles adjacents* ACD, DCE, ECF, FCB, *faits d'un même côté d'une ligne droite* AB, *égale deux angles droits.*



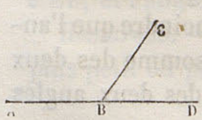
Car le premier de ces angles, c'est-à-dire ACD, a pour supplément l'angle DCB qui est la somme de tous les autres angles DCE, ECF, FCB.

Corollaire III. — *La somme des angles adjacents* BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, *que font autour d'un point* A *les lignes droites* AB, AC, AD, AE, AF, *tirées de ce point, égale quatre angles droits.*



Je prolonge l'une de ces lignes droites, par exemple AD, au delà du point A et je remplace l'angle BAF par les deux angles BAG, GAF dont il est la somme. Les angles adjacents, faits de chaque côté de la ligne droite DG, valent ensemble deux angles droits; donc la somme de tous les angles faits autour du point A égale quatre angles droits.

THÉORÈME II



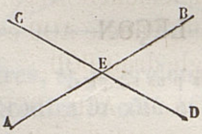
Si deux angles adjacents* ABC, CBD *sont supplémentaires, leurs cotés non communs* AB, BD *sont en ligne droite.

En effet, le prolongement de la ligne droite AB au delà du point B doit faire avec BC un angle égal au supplément de l'angle ABC *, c'est-à-dire égal à l'angle CBD ; il coïncide donc avec la ligne droite BD.

THÉORÈME III

Si deux lignes droites AB, CD *se rencontrent, les angles* AEC, BED, *opposés par le sommet, sont égaux.*

Les angles adjacents AEC, CEB, faits par les lignes droites AB, EC, sont supplémentaires (I). Pareillement, les angles adjacents BED, CEB, faits par les lignes droites CD, EB, valent ensemble deux angles droits. Donc les angles AEC, BED, opposés par le sommet, ont pour supplément le même angle CEB et sont égaux entre eux.



PROBLÈMES

1. Les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont perpendiculaires l'une à l'autre. (On appelle *bissectrice* d'un angle la ligne droite qui divise cet angle en deux parties égales).

2. Lorsque quatre angles adjacents valent ensemble quatre angles droits, si le premier est égal au troisième et le deuxième égal au quatrième, les côtés de ces angles sont deux à deux en lignes droites.

3. Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont en ligne droite.

* Les nombres mis entre parenthèses indiquent les théorèmes sur lesquels s'appuie la démonstration que l'on fait. Un seul nombre écrit en chiffres romains, comme (I), indique le théorème 1 de la leçon actuelle; deux nombres, l'un en chiffres arabes et l'autre en chiffres romains, par exemple (20, III), indiquent le théorème III de la 20[e] leçon.

TROISIÈME ET QUATRIÈME LEÇON

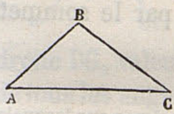
PROGRAMME. — Triangles. — Cas d'égalité les plus simples.

DÉFINITIONS

Un *triangle* est une portion de plan terminée par trois lignes droites qui se coupent deux à deux et qu'on appelle les *côtés* du triangle. Les angles des côtés consécutifs et les sommets de ces angles se nomment aussi les *angles* et les *sommets* du triangle.

THÉORÈME I

Un coté quelconque d'un triangle est moindre que la somme des deux autres.



En effet, la ligne droite AC étant le plus court chemin du point A au point C, le côté AC du triangle ABC est moindre que la somme des deux autres côtés AB, BC.

COROLLAIRE. — Si de chacun des membres de l'inégalité

$$AB + BC > AC$$

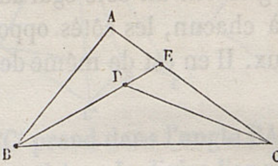
on retranche le côté BC, on a la nouvelle inégalité

$$AB > AC - BC$$

qui conduit à cet autre énoncé du théorème précédent : *Un côté quelconque d'un triangle est plus grand que la différence des deux autres.*

THÉORÈME II

Si, d'un point D *pris à l'intérieur d'un triangle* ABC, *on mène les droites* DB, DC *aux extrémités d'un côté* BC, *la somme de ces droites est moindre que la somme des deux autres côtés* AB, AC *du triangle.*



Chaque côté d'un triangle étant moindre que la somme des deux autres, si je prolonge la droite BD jusqu'au point E où elle rencontre le côté AC, j'ai dans le triangle ABE :

$$BD + DE < AB + AE,$$

et dans le triangle CDE :

$$CD < DE + EC.$$

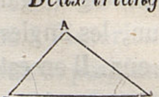
J'ajoute les deux inégalités précédentes membre à membre ; je supprime ensuite le terme DE, commun aux deux membres de la nouvelle inégalité, et je trouve :

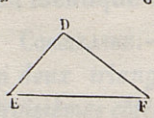
$$BD + CD < AB + AE + EC ;$$

ce qui démontre le théorème énoncé, puisque la somme des deux lignes AE, EC est égale au côté AC.

THÉORÈME III

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.





Soient ABC, DEF, deux triangles ayant le côté BC égal à EF, l'angle ABC égal à DEF et l'angle ACB égal à DFE ; je dis que ces triangles sont égaux.

En effet, je transporte le triangle DEF sur le triangle ABC, et je fais coïncider le côté EF avec le côté BC qui lui est égal, en plaçant le point E sur le point B et le point F sur le point C. Le côté ED prend alors la direction de BA, parce que les angles DEF, ABC sont égaux ; le côté FD prend pareillement la direction de CA, à cause de l'égalité des angles

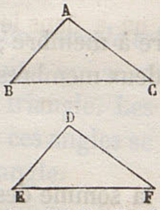
DFE, ACB. Par suite, le point D, commun aux deux droites ED, FD, vient se placer sur l'intersection A des deux droites BA, CA, et les triangles ABC, DEF coïncident dans toute leur étendue.

Corollaire. — Lorsque deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, les côtés opposés aux angles égaux sont aussi égaux. Il en est de même des angles opposés aux côtés égaux.

THÉORÈME IV

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Soient ABC, DEF, deux triangles ayant l'angle A égal à l'angle D, le côté AB égal au côté DE et le côté AC égal au côté DF, je dis que ces triangles sont égaux.



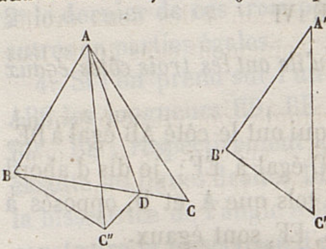
En effet, je transporte le triangle DEF sur le triangle ABC, et je fais coïncider les côtés égaux AB, DE, en posant le point D sur le point A et le point E sur le point B. Le côté DF prend alors la direction de AC à cause de l'égalité des angles EDF, BAC, et le point F se place sur le point C, puisque les deux côtés DF, AC sont égaux ; le côté EF se confond par suite avec BC, qui a les mêmes extrémités, et les triangles ABC, DEF coïncident dans toute leur étendue.

Corollaire. — Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, les angles opposés aux côtés égaux sont aussi égaux entre eux. Il en est de même des côtés opposés aux angles égaux.

THÉORÈME V

Si deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, les troisièmes côtés sont inégaux, et le plus grand de ces côtés est opposé au plus grand angle.

Je suppose l'angle A du triangle ABC plus grand que l'angle A′ du triangle A′B′C′, et les côtés AB, AC égaux respectivement aux côtés A′B′, A′C′; je dis que le côté BC opposé à l'angle A



est plus grand que le côté B′C′ opposé à l'angle A′.

Pour le démontrer, j'applique le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que le côté A′B′ coïncide avec son égal AB. Soit AC la position que le côté A′C′ prend dans l'angle BAC, plus grand que l'angle B′A′C′ par hypothèse. Je divise l'angle CAC″ en deux parties égales par la droite AD qui rencontre le côté BC au point D, et je tire la droite DC″. Les triangles ADC, ADC″ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle DAC égal à DAC″ par construction, le côté AC égal à AC″ par hypothèse, et le côté AD commun ; ces triangles sont donc égaux (IV), et le côté CD est égal à DC″. Or, on a dans le triangle BDC″ (1) :

$$BD + DC'' > BC'',$$

ou

$$BD + DC > BC'';$$

par conséquent le côté BC est plus grand que BC″, ou que son égal B′C′.

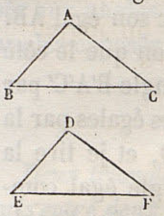
Remarque. — En plaçant le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, j'ai supposé que l'extrémité C′ du côté A′C′ se trouvait à l'extérieur du triangle ABC. Ce point peut être sur le côté BC, ou à l'intérieur du triangle ABC ; pour chacune de ces deux autres positions du sommet C′, la démonstration du théorème est identique à la précédente.

Corollaire. — Les deux théorèmes précédents prouvent que *si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, les troisièmes côtés de ces triangles ne sont égaux ou inégaux qu'autant que les angles opposés sont eux-mêmes égaux ou inégaux,* et que, *dans le cas de l'inégalité, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.*

THÉORÈME VI

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

Soient les triangles ABC, DEF, qui ont le côté AB égal à DE, le côté AC égal à DF et le côté BC égal à EF ; je dis d'abord



que deux angles, tels que A et D, opposés à des côtés égaux BC, EF, sont égaux.

En effet, les deux côtés AB, AC du triangle ABC étant égaux respectivement aux côtés DE, DF du triangle DEF, les troisièmes côtés BC, EF de ces triangles ne peuvent être égaux que si les angles A et D qui leur sont opposés sont eux-mêmes égaux (V. c.). Or, BC égale EF par hypothèse; donc l'angle A égale aussi l'angle D. Les triangles ABC, DEF, ayant alors un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux (IV).

Corollaire. — Si deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

PROLLÈMES

1. La somme des lignes droites qui joignent un point, pris à l'intérieur d'un triangle, aux trois sommets, est moindre que le périmètre du triangle et plus grande que la moitié de ce périmètre.

2. La ligne droite qui joint le sommet d'un triangle au milieu du côté opposé est moindre que la moitié de la somme des deux autres côtés, mais plus grande que la moitié de l'excès de cette somme sur le troisième côté.

Conclure de ce théorème que la somme des lignes droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés est moindre que le périmètre du triangle et plus grande que la moitié de ce périmètre.

3. Si l'on prolonge les côtés BA, CA du triangle BAC au delà du sommet A, de quantités AB′, AC′ qui leur soient respecti-

vement égales, et qu'on tire la ligne droite B′C′, 1° les milieux des lignes CB, B′C′ et le sommet A seront en ligne droite; 2° le dernier de ces trois points divisera la distance des deux autres en parties égales.

4. Si l'on prend sur l'un des côtés d'un angle quelconque ABC les longueurs BD, BE et sur l'autre côté les longueurs BD′, BE′, respectivement égales à BD, BE, et qu'on trace ensuite les lignes droites DE′, ED′, ces lignes se couperont sur la bissectrice de l'angle ABC. — De là résulte un moyen de construire la bissectrice d'un angle.

CINQUIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Propriétés du triangle isocèle.

DÉFINITIONS

Un triangle *isocèle* est un triangle qui a deux côtés égaux.

Un triangle *équilatéral* ou *équiangle* est un triangle dont les trois côtés ou les trois angles sont égaux.

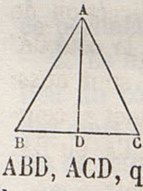
La perpendiculaire abaissée d'un sommet d'un triangle sur le côté opposé se nomme *hauteur* du triangle; ce côté prend alors, relativement à la hauteur, le nom de *base*.

On choisit ordinairement pour la base d'un triangle isocèle celui des trois côtés qui n'est pas égal à l'un des deux autres.

THÉORÈME I

Les angles opposés aux deux côtés égaux d'un triangle isocèle sont égaux.

Soit ABC un triangle dont les côtés AB, AC sont égaux; je dis que l'angle ACB opposé au côté AB égale l'angle ABC opposé au côté AC.



En effet, je joins le sommet A du triangle au milieu D de sa base BC par la ligne droite AD. Cette ligne divise le triangle ABC en deux triangles ABD, ACD, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun; car le côté AD leur est commun, les côtés AB, AC sont égaux d'après l'hypothèse, et le côté BD égale CD, puisque le point D est le milieu de BC. Les triangles ABD, ACD sont donc égaux (4, VI), et l'angle ABD, opposé au côté AD du triangle

ABD, est égal à l'angle ACD, opposé au côté AD du triangle ACD.

Corollaire I. — De l'égalité des triangles ABD, ACD, on peut conclure aussi l'égalité des angles BAD, DAC, et celle des angles ADB, ADC, qui sont supplémentaires (2, I). Par conséquent, *la ligne droite qui joint le sommet d'un triangle isocèle au milieu de sa base divise l'angle du sommet en deux parties égales, et est perpendiculaire à la base du triangle.*

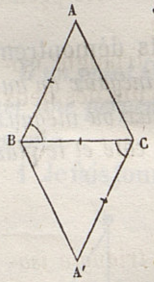
Corollaire II. — *Un triangle équilatéral est équiangle.*

En effet, les angles de ce triangle sont égaux, puisqu'ils sont opposés à des côtés égaux.

THÉORÈME II

Si un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux aussi, et le triangle est isocèle.

Soit ABC un triangle dont les angles ABC, ACB sont égaux; je dis que le côté AC, opposé à l'angle ABC, égale le côté AB, opposé à l'angle ACB.



Je construis sous le côté BC le triangle BCA' égal au triangle ABC, en faisant l'angle BCA' égal à l'angle CBA, et le côté CA' égal au côté BA. Ces triangles sont effectivement égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (4, IV); donc l'angle CBA', opposé au côté CA', est égal à l'angle BCA, opposé au côté BA, et, par suite, égal à l'angle CBA. Cela posé, je plie la figure suivant la droite BC et je rabats le triangle A'BC sur le triangle ABC; le côté BA' prend la direction de BA, à cause de l'égalité des angles CBA', CBA, et le côté CA' s'applique sur CA, puisque les angles BCA', BCA sont aussi égaux d'après l'hypothèse. Par conséquent le sommet A' coïncide avec le sommet A, et le côté CA égale le côté CA' ou BA.

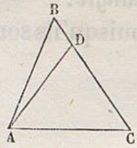
Corollaire. — *Un triangle équiangle est équilatéral.*

En effet, les côtés de ce triangle sont égaux, puisqu'ils sont opposés à des angles égaux.

THÉORÈME III

Si un triangle a deux angles inégaux, le côté opposé au plus grand de ces angles est plus grand que le côté opposé à l'autre angle.

Soit ABC un triangle dans lequel l'angle BAC est plus grand que l'angle BCA ; je dis que le côté CB, opposé à l'angle BAC, est plus grand que AB, opposé à l'angle BCA.



Je fais au point A, sur le côté AC, l'angle CAD égal à l'angle BCA ; la ligne droite AD se trouve dans l'angle BAC, qui est par hypothèse plus grand que BCA. Soit D l'intersection de cette ligne et du côté BC ; le triangle DAC ayant deux angles égaux, les côtés AD, CD, opposés à ces angles, sont aussi égaux (II). Or, le côté AB du triangle ABD est moindre que la somme AD + DB des deux autres ; donc AO est aussi moindre que CD + DB, ou que CB.

Corollaire. — Les deux théorèmes précédents démontrent que *deux côtés d'un triangle ne sont égaux ou inégaux qu'autant que les angles opposés sont eux-mêmes égaux ou inégaux* et que, *dans le cas de l'inégalité, le plus grand côté et le plus grand angle sont toujours opposés l'un à l'autre.*

PROBLÈMES

1. Les perpendiculaires menées des sommets d'un triangle équilatéral sur les côtés opposés sont égales.

2. Si, sur les côtés égaux d'un triangle isocèle, on prend des points également éloignés du sommet et qu'on les joigne par des lignes droites aux extrémités opposées de la base, ces lignes se couperont sur la droite qui va du sommet au milieu de la base.

3. Les droites qui joignent les sommets d'un triangle isocèle aux milieux des côtés opposés se coupent au même point.

SIXIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à une droite. — Cas d'égalité des triangles rectangles.

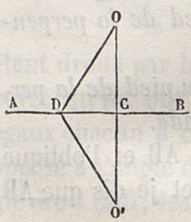
DÉFINITIONS

Un triangle *rectangle* est un triangle qui a l'un de ses angles droit; on appelle *hypoténuse* le côté opposé à cet angle.

THÉORÈME I

D'un point O, *situé hors d'une ligne droite* AB, *on peut mener une perpendiculaire à cette ligne, et on ne peut en mener qu'une.*

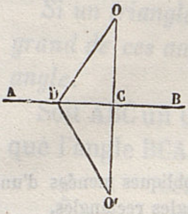
1° Je fais tourner la partie supérieure du plan de la figure sur



la droite AB comme axe, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la partie inférieure; soit alors O′ la position du point O. Je relève ensuite le plan, et je tire la ligne droite OO′; cette ligne est perpendiculaire à AB qu'elle rencontre au point C. En effet, si je replie le plan suivant AB, la ligne droite CO prend la direction de CO′, puisque le point O s'applique par hypothèse sur le point O′; donc les angles adjacents ACO, ACO′ coïncident, et la ligne droite OO′ est perpendiculaire à la ligne droite AB.

2° Je dis que la droite OD, menée du point O à tout autre point D de la ligne AB, est oblique à cette ligne. Pour le démontrer, je tire la droite DO′, et je plie la figure suivant AB. Le point O vient se placer sur le point O′, et la droite DO sur

DO'; l'angle CDO égale par suite l'angle CDO'. Cela posé, comme on ne peut mener que la droite OCO' du point O au point O', la droite DO' n'est pas le prolongement de OD. Par conséquent, la somme des deux angles adjacents CDO, CDO', dont les côtés non communs DO, DO' ne sont pas en ligne droite, n'est pas égale à deux angles droits (2, II); et l'angle CDO, moitié de cette somme, n'est pas droit. La ligne droite OD est donc oblique à la ligne droite AB.



Remarque. — Lorsqu'une perpendiculaire et différentes obliques sont abaissées d'un point extérieur à une ligne droite sur cette ligne, on dit que *deux obliques sont également ou inégalement éloignées du pied de la perpendiculaire, selon que leurs pieds sont à des distances égales ou inégales de celui de la perpendiculaire.*

THÉORÈME II

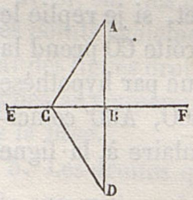
Si d'un point pris hors d'une ligne droite on abaisse une perpendiculaire et différentes obliques sur cette droite,

1° *La perpendiculaire sera plus courte que toute oblique;*

2° *Deux obliques également éloignées du pied de la perpendiculaire seront égales;*

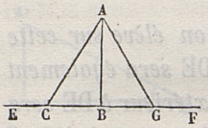
3° *De deux obliques inégalement distantes du pied de la perpendiculaire, la plus éloignée sera la plus grande.*

1° J'abaisse du point A la perpendiculaire AB et l'oblique AC sur la ligne droite EF, et je dis que AB est moindre que AC.



Car, si je prends sur le prolongement de AB la longueur BD égale à AB, et que je tire la ligne droite DC, les deux triangles ABC, DBC ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles ABC, DBC, égaux parce qu'ils sont droits par hypothèse, le côté BC commun et les côtés AB, BD, égaux d'après la construction de la figure. Ces triangles sont donc égaux (3, IV), et le côté AC égale le côté DC. Or, la ligne droite AD est moindre que la ligne brisée AC + CD; donc la moitié de AD, c'est-à-dire la perpendiculaire AB, est moindre que la moitié de AC + CD ou que l'oblique AC.

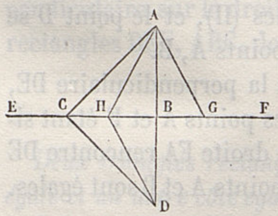
2° Je prends sur EF, de chaque côté de la perpendiculaire AB, les longueurs égales BC, BG; je tire les obliques AC, AG, qui s'écartent également du pied de AB, et je dis que ces deux lignes sont égales.



En effet, les deux triangles ABC, ABG ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux (3, IV), et le côté AC opposé à l'angle droit ABC égale le côté AG opposé à l'angle droit ABG.

1° Soit la distance BC plus grande que BG, je dis que l'oblique AC est plus grande que AG.

Pour le démontrer, je prends sur BC une longueur BH égale à BG, et je tire l'oblique AH qui est égale à AG, puisque ces lignes s'écartent également du pied de la perpendiculaire AB. Je prolonge ensuite AB d'une longueur BD qui lui soit égale, et je mène du point D les droites DC, DH. Les deux angles CBA, CBD étant droits par hypothèse, les triangles ABC, DBC sont égaux parce qu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (3, IV); par conséquent, le côté AC opposé à l'angle droit CBA est égal au côté DC opposé à l'angle droit CBD; les deux droites AH, DH sont aussi égales pour une raison semblable. Or, le point H étant à l'intérieur du triangle ACD, la somme AH + DH de ses distances aux extrémités du côté AD est moindre que la somme AC + CD des deux autres côtés (3, II); donc l'oblique AH, moitié de AH+DH, est moindre que l'oblique AC, moitié de AC + CD.



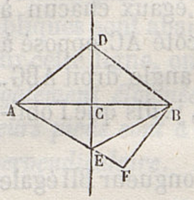
Corollaire I. — *On mesure la distance d'un point à une ligne droite par la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur cette droite*, parce qu'elle est la ligne la plus courte qu'on puisse mener de ce point à la droite donnée.

Corollaire II. — *On ne peut mener d'un point à une ligne droite que deux obliques égales.*

Corollaire III. — Les réciproques du théorème précédent sont des conséquences évidentes de ce théorème.

THÉORÈME III

Si par le milieu C *de la ligne droite* AB *on élève sur cette ligne la perpendiculaire* DE, 1° *tout point de* DE *sera également éloigné des extrémités de* AB; 2° *tout point extérieur à* DE *sera inégalement distant des mêmes extrémités* A *et* B.



1° Je joins un point quelconque D de la perpendiculaire DE aux extrémités de AB par les lignes droites AD, BD. Le point C étant par hypothèse le milieu de AB, les obliques AD, BD s'écartent également de la perpendiculaire DE; elles sont donc égales (II), et le point D se trouve à la même distance des deux points A, B.

2° Je prends un point F extérieur à la perpendiculaire DE, et je tire les lignes droites FA, FB; les points A et F étant situés de différents côtés de DE, la ligne droite FA rencontre DE en un point E dont les distances aux points A et B sont égales. Or, on a dans le triangle BEF (3, I) :

$$FB < FE + EB,$$

ou

$$FB < FE + EA;$$

donc le point F est moins éloigné du point B que du point A.

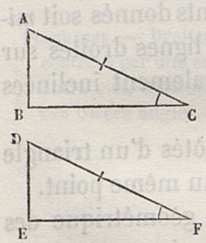
Remarque. — Dans la géométrie plane, on appelle *lieu géométrique d'un point* une ligne, droite ou courbe, dont tous les points jouissent d'une même propriété.

De là résulte ce nouvel énoncé du théorème précédent : *Le lieu géométrique des points qui sont, chacun, également éloignés des deux points* A, B, *est la perpendiculaire* DE *élevée au milieu de la droite* AB.

THÉORÈME IV

Deux triangles rectangles sont égaux s'ils ont l'hypoténuse gale et un angle égal.

Soient ABC, DEF deux triangles rectangles, et B, E leurs angles droits. Je suppose l'hypoténuse AC égale à l'hypoténuse DF, l'angle C égal à l'angle F, et je dis que ces triangles sont égaux.

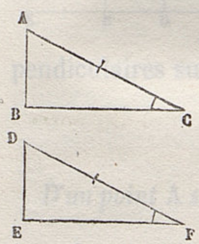


Je transporte le triangle DEF sur le triangle ABC, et, pour appliquer l'hypoténuse DF sur AC qui lui est égale, je place le point F sur le point C, le point D sur le point A. Le côté FE prend alors la direction de CB à cause de l'égalité des deux angles C, F, et la ligne droite DE perpendiculaire à EF s'applique sur la ligne droite AB, perpendiculaire à BC, puisqu'on ne peut abaisser du point A qu'une seule perpendiculaire sur la droite BC (I). Par conséquent, les triangles rectangles DEF, ABC, dont les côtés coïncident, sont égaux.

THÉORÈME V

Deux triangles rectangles sont égaux s'ils ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal.

Soient ABC, DEF deux triangles rectangles, et B, E leurs angles droits; je suppose l'hypoténuse AC égale à DF, le côté AB égal à DE, et je dis que ces triangles sont égaux.



Pour le démontrer, je transporte le triangle DEF sur le triangle ABC, et je fais coïncider les côtés égaux DE, AB, en plaçant le point E sur le point B, le point D sur le point A. Le côté EF prend alors la direction de BC à cause de l'égalité des angles droits E, B, et l'hypoténuse DF s'applique sur AC (II, c., 3), parce que ces deux lignes égales sont obliques à BC et situées du même côté de la perpendiculaire AB. Les triangles DEF, ABC sont donc égaux, puisque leurs côtés coïncident.

PROBLÈMES

1. Les perpendiculaires menées des extrémités de la base d'un triangle isocèle sur les côtés opposés sont égales.

2. Trouver sur une ligne droite un point tel que la somme ou la différence de ses distances à deux points donnés soit *minimum* ou *maximum*. Démontrer que les lignes droites sur lesquelles on mesure ces distances sont également inclinées sur la ligne droite donnée.

3. Les perpendiculaires élevées sur les côtés d'un triangle par les milieux de ces côtés se rencontrent au même point.

4. La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points également éloignés des côtés de cet angle.

5. Les bissectrices des angles d'un triangle concourent au même point.

SEPTIÈME ET HUITIÈME LEÇON

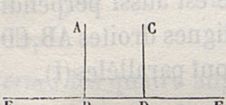
Programme. — Droites parallèles. — Lorsque deux droites parallèles sont rencontrées par une sécante, les quatre angles aigus qui en résultent sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus. — Dénominations attribuées à ces divers angles. — Réciproques.

DÉFINITIONS

Deux lignes droites sont *parallèles* lorsque, situées dans un même plan et prolongées indéfiniment, elles ne se rencontrent pas.

THÉORÈME I

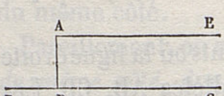
Deux lignes droites AB, CD *perpendiculaires à la même droite* EF *sont parallèles.*



En effet, les lignes droites AB, CD ne peuvent se rencontrer, puisqu'on ne peut mener d'aucun point du plan deux perpendiculaires sur la ligne droite EF (6, I).

THÉORÈME II

D'un point A *situé hors d'une ligne droite* BC, *on peut mener une parallèle à cette ligne, mais on ne peut en mener qu'une.*



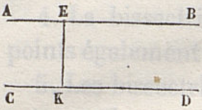
Je tire du point A la perpendiculaire AD sur la ligne droite BC, et la perpendiculaire AE sur la ligne droite AD. Les lignes AE, BC sont parallèles, puisque l'une et l'autre sont perpendiculaires à AD (I); on peut donc mener par le point A une parallèle à la ligne droite BC; *j'admettrai qu'on ne peut en mener qu'une seule.*

Corollaire. — *Si deux lignes droites sont parallèles, toute ligne droite qui rencontre l'une rencontrera aussi l'autre.*

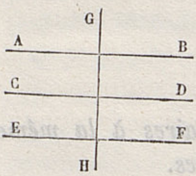
THÉORÈME III

Si deux lignes droites AB, CD *sont parallèles, toute ligne droite* EK *perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Je suppose la ligne droite EK perpendiculaire à AB, et je dis qu'elle est aussi perpendiculaire à CD.



En effet, la perpendiculaire menée d'un point quelconque de CD sur la ligne droite EK est parallèle à AB (I); elle coïncide donc avec CD (II), qui est aussi parallèle à AB par hypothèse. Par conséquent, la ligne droite EK est perpendiculaire à CD.

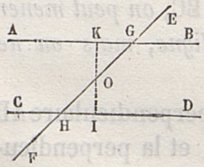


Corollaire. — *Deux lignes droites* AB, DC *parallèles à une troisième* EF *sont parallèles entre elles.*

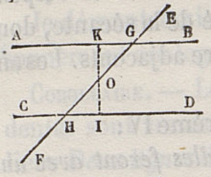
Car, si je tire la ligne droite GH perpendiculaire à EF, cette ligne est aussi perpendiculaire à chacune des lignes droites AB, CD, qui sont parallèles à EF; donc AB et CD sont parallèles (I).

THÉORÈME IV

Lorsque deux lignes droites parallèles AB, CD *sont rencontrées par une sécante* EF, *les quatre angles aigus qui en résultent sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus.*



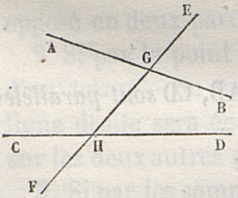
Soient G et H les points où la ligne droite EF rencontre les parallèles AB, CD. Les angles aigus AGH, EGB sont égaux puisqu'ils sont opposés par le sommet; il en est de même des deux angles aigus GHD, CHF. Pour démontrer l'égalité des quatre angles aigus formés par les lignes droites AB, CD, EF,



il suffit donc de prouver que l'angle AGH égale GHD. J'abaisse, du milieu O de la ligne GH, la perpendiculaire IK sur les deux parallèles AB, CD. Les triangles rectangles GKO, HIO sont égaux (6, IV), parce qu'ils ont les hypoténuses OG, OH égales, et les angles aigus GOK, IOH égaux comme opposés par le sommet; donc l'angle OGK est égal à l'angle OHI.

Il résulte de l'égalité des quatre angles aigus que les quatre angles obtus sont égaux entre eux, car chaque angle obtus a pour supplément l'un des quatre angles aigus.

Remarque. — Pour distinguer et énoncer plus facilement les divers cas d'égalité auxquels conduit le théorème précédent, on a donné des noms particuliers aux huit angles formés par les parallèles AB, CD et la sécante EF. Voici les dénominations qui sont applicables aux angles que deux lignes droites quelconques AB, CD font avec une troisième EF.



Les quatre angles AGH, BGH, DHG, CHG, compris entre les deux lignes droites AB, CD, sont appelés pour cette raison angles *internes*.

Au contraire, on nomme angles *externes* les quatre angles AGE, BGE, DHF, CHF, qui ne sont pas situés entre les lignes droites AB, CD.

Lorsqu'on considère deux angles internes qui ne sont pas adjacents, on les appelle *alternes-internes* ou *internes du même côté*, selon qu'ils sont placés des deux côtés de la sécante EF ou du même côté de cette ligne. Ainsi les angles AGH, DHG sont alternes-internes, et les angles AGH, CHG sont internes du même côté.

Pareillement, on appelle angles *alternes-externes* ou *externes du même côté*, deux angles externes non adjacents, et situés des deux côtés de la sécante EF, ou du même côté de cette ligne. Ainsi, les angles AGE, DHF sont alternes-externes, tandis que les angles AGE, CHF sont externes du même côté.

On donne le nom d'angles *internes-externes* ou *correspondants* à deux angles, situés du même côté de la sécante, dont l'un est interne et l'autre externe sans être adjacents. Les angles BGE, DHE sont correspondants.

De là résulte ce nouvel énoncé du théorème IV :

Si deux lignes droites sont parallèles, elles feront avec une sécante quelconque :

1° *Des angles alternes-internes égaux ;*

2° *Des angles alternes-externes égaux ;*

3° *Des angles correspondants égaux ;*

4° *Des angles internes du même côté supplémentaires ;*

5° *Des angles externes du même côté supplémentaires.*

Car deux angles alternes-internes, ou alternes-externes, ou correspondants, sont à la fois aigus ou obtus, et, par conséquent, égaux entre eux. Mais, de deux angles internes ou externes du même côté, l'un est aigu et l'autre obtus ; ces angles sont donc supplémentaires.

THÉORÈME V

Réciproquement, *deux lignes droites* AB, CD *sont parallèles lorsqu'elles font avec une sécante* MN :

1° *Des angles alternes-internes égaux ;*

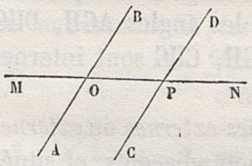
2° *Des angles alternes-externes égaux ;*

3° *Des angles correspondants égaux ;*

4° *Des angles internes du même côté supplémentaires ;*

5° *Des angles externes du même côté supplémentaires.*

Je suppose les angles alternes-internes AOP, DPO égaux, et je dis que les lignes droites AB, CD sont parallèles.



En effet, la ligne droite AB et sa parallèle, menée par le point P où la sécante MN rencontre CD, font avec MN des angles alternes-internes égaux (IV). Or, l'un de ces angles est AOP, donc l'autre est l'angle DPO, puisqu'ils ont par hypothèse la position de deux angles alternes-internes et qu'ils sont égaux. Par conséquent, la parallèle menée du point P à la droite AB n'est autre que la ligne droite CD.

Je démontrerais chacun des quatre autres cas par un raisonnement analogue.

Corollaire. — Les propositions contraires * aux deux précédentes sont vraies. Elles comprennent ce théorème particulier : *Deux lignes droites se rencontrent lorsqu'elles font avec une sécante deux angles internes du même côté, dont la somme est moindre que deux angles droits.* Dans son célèbre Traité de géométrie, *Euclide* ** demande qu'on admette ce théorème comme évident, et il en fait la base de sa théorie des lignes parallèles ; aussi ce théorème est connu sous le nom de *postulatum* d'Euclide. Nous l'avons remplacé dans ces leçons par celui-ci : *On ne peut mener d'un point donné qu'une parallèle à une ligne droite* (II).

PROBLÈMES

1. Si la bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en deux parties égales, ce triangle est isocèle.

2. Si par le point de rencontre des bissectrices des angles d'un triangle on mène une parallèle à l'un des côtés, cette ligne droite sera égale à la somme des segments interceptés sur les deux autres côtés par les deux parallèles.

3. Si par les sommets d'un triangle on mène des parallèles aux côtés opposés, ces lignes droites détermineront un second triangle égal au quadruple du premier. — Quel est le rapport des côtés parallèles ?

4. Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés se rencontrent au même point.

* Si, dans l'énoncé d'une proposition, on ajoute une négation à l'hypothèse et à la conséquence, on forme la proposition *contraire*. Par exemple, à la proposition suivante : « *Deux angles droits sont égaux,* » correspond la proposition contraire . « *Si deux angles ne sont pas droits, ils ne sont pas égaux,* » laquelle est évidemment fausse

** Géomètre grec, qui vivait vers l'an 320 avant notre ère.

NEUVIÈME LEÇON

Programme. — Angles dont les côtés sont parallèles et perpendiculaires. — Somme des angles d'un triangle et d'un polygone quelconque.

DÉFINITIONS

On nomme *polygone* une portion de plan terminée par des lignes droites. Ces lignes sont les côtés du polygone, et leur ensemble forme le contour ou le périmètre de cette figure.

Un polygone qui n'a que trois côtés est un *triangle*. Un polygone de quatre côtés se nomme *quadrilatère;* celui de cinq côtés, *pentagone;* celui de six côtés, *hexagone*.

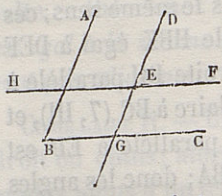
Un polygone est *convexe* lorsqu'il est tout entier du même côté de chacune des lignes droites, prolongées indéfiniment, qui le terminent. Dans le cas contraire, on dit qu'il est *concave*.

On appelle *diagonale* d'un polygone la ligne droite qui joint deux sommets non consécutifs de ce polygone.

THÉORÈME I

Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux, si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux dans le même sens ou en sens contraire. Ils sont supplémentaires, lorsque deux côtés parallèles ont la même direction et les deux autres des directions contraires.

1° Soient les deux angles ABC, DEF dont les côtés BA, ED sont parallèles et dirigés dans le même sens, ainsi que les côtés BC et EF; je dis que ces angles sont égaux.



Je prolonge le côté DE jusqu'au point G où il rencontre le côté BC. Les angles ABC, DGC sont égaux (7, IV) comme correspondants par rapport aux parallèles AB, DG et à la sécante BC; les angles DEF, DGC sont aussi égaux, comme correspondants par rapport aux parallèles BC, EF et à la sécante DG. Donc l'angle ABC est égal à l'angle DEF.

2° Les angles ABC, GEH, qui ont les côtés parallèles et dirigés deux à deux en sens contraires, sont égaux.

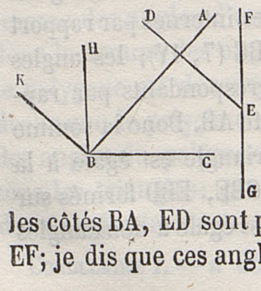
En effet, si je prolonge les côtés de l'angle GEH au delà du sommet E, l'angle ABC égale l'angle DEF, puisque leurs côtés sont parallèles et dirigés deux à deux dans le même sens; donc il égale aussi l'angle GEH qui est opposé par le sommet à l'angle DEF.

3° Les angles ABC, DEH, qui ont les côtés BA, ED parallèles et dirigés dans le même sens, et les côtés BC, EH parallèles, mais dirigés en sens contraires, sont supplémentaires.

Je prolonge le côté EH au delà du sommet E; l'angle DEF est égal à l'angle ABC, parce qu'ils ont leurs côtés parallèles et dirigés deux à deux dans le même sens. Or, l'angle DEH est le supplément de DEF; donc il est aussi le supplément de ABC.

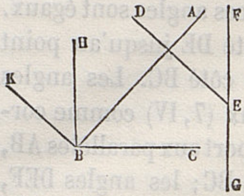
THÉORÈME II

Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux s'ils sont à la fois aigus ou obtus; mais ils sont supplémentaires si l'un est obtus et l'autre aigu.



1° Soient ABC, DEF, deux angles de même espèce, par exemple aigus, dont les côtés BA, ED sont perpendiculaires, ainsi que les côtés BC, EF; je dis que ces angles sont égaux.

En effet, du sommet B de l'angle ABC je trace les lignes droites BH, BK, respectivement parallèles aux côtés EF, ED de



l'angle DEF et dans le même sens; ces lignes font un angle HBK égal à DEF (I). Or, la ligne droite BH parallèle à EF est perpendiculaire à BC (7, III), et la ligne droite BK parallèle à ED est perpendiculaire à BA; donc les angles HBK, ABC ont pour complément le même angle ABH, et sont dès lors égaux. L'angle DEF égale par suite l'angle ABC.

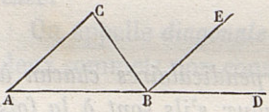
2° Soient ABC et DEG deux angles, l'un obtus et l'autre aigu; je suppose les côtés BA, BC du premier respectivement perpendiculaires aux côtés ED, EG du second, et je dis que ces angles sont supplémentaires.

En effet, si je prolonge le côté EG d'une longueur quelconque EF au delà du sommet E, l'angle DEF est égal à l'angle ABC; car ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun et sont de même espèce, puisque l'angle DEF, supplément de l'angle obtus DEG, est aigu. Par conséquent, les angles ABC, DEG sont supplémentaires.

THÉORÈME III

La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits.

Soit le triangle ABC; je prolonge le côté AB et je mène



par le sommet B la ligne droite BE parallèle au côté opposé AC.

Les angles ACB, CBE sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AC, BE et à la sécante BC (7, IV); les angles CAB, EBD sont aussi égaux comme correspondants par rapport aux mêmes parallèles et à la sécante AB. Donc la somme des trois angles ABC, ACB, CAB du triangle est égale à la somme des trois angles adjacents ABC, CBE, EBD formés sur la ligne droite AD, c'est-à-dire qu'elle est égale à deux angles droits (2, I).

Corollaire I. — L'angle CBD que le côté BC fait avec le prolongement BD du côté AB est *extérieur* au triangle. De là résulte ce théorème : *Un angle* CBD, *extérieur à un triangle* ABC, *est égal à la somme des angles intérieurs* CAB, ACB, *qui ne lui sont pas adjacents.*

Corollaire II. — Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus; alors les deux autres angles sont aigus. — Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

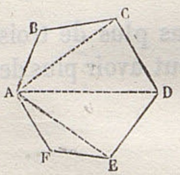
Corollaire III. — Chaque angle d'un triangle équilatéral est égal aux deux tiers d'un angle droit.

Corollaire IV. — Si deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle du premier triangle égale aussi le troisième angle du second.

THÉORÈME IV

La somme des angles d'un polygone convexe égale autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.

Soit le polygone ABCDEF; par le sommet A je mène des diagonales à tous les autres sommets, excepté B et F qui sont déjà joints au point A par les côtés AB, AF. Je décompose ainsi le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux; car chaque triangle n'a qu'un côté commun avec le polygone à l'exception des deux triangles extrêmes ABC, AEF, qui en ont deux. Or, la somme des angles d'un triangle égale deux angles droits (III), donc la somme des angles de tous les triangles dans lesquels le polygone est décomposé vaut autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux. Mais la somme des angles du polygone est la même que celle des angles de tous les triangles; par conséquent elle égale autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.



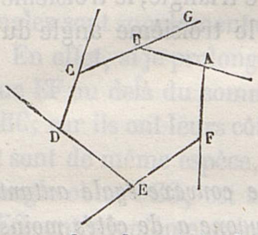
Corollaire I. — n étant le nombre des côtés du polygone, la somme de ses angles est égale à $n - 2$ fois 2 angles droits, ou à $(2n - 4)$ angles droits.

Corollaire II. — La somme des angles d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits. Par suite, si tous les angles d'un quadrilatère sont égaux entre eux, chacun d'eux est droit.

THÉORÈME V

La somme des angles qu'on fait à l'extérieur d'un polygone convexe, en prolongeant ses côtés dans le même sens, est égale à quatre angles droits.

Chaque angle extérieur au polygone ABCDEF, tel que l'angle ABG, étant le supplément de l'angle intérieur ABC qui lui est adjacent (2, I), la somme des angles extérieurs et intérieurs est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de sommets ou de côtés. Cette somme vaut dès lors $2n$ angles droits, n étant le nombre des côtés du polygone. Mais les angles intérieurs valent ensemble $(2n - 4)$ angles droits (IV); donc la somme des angles extérieurs est égale à l'excès de $2n$ angles droits sur $(2n - 4)$, c'est-à-dire égale à quatre angles droits.



Corollaire. — Un polygone convexe n'a pas plus de trois angles intérieurs qui soient aigus, car il ne peut avoir plus de trois angles extérieurs obtus.

PROBLÈMES

1. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère forment un autre quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires.

2. Si l'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, les bissectrices des deux angles qu'ils font se coupent sous un angle égal à la demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère.

Dans quel cas ces bissectrices sont-elles perpendiculaires ?

3. Les bissectrices de deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont parallèles, ou perpendiculaires. — Il en est de même des bissectrices de deux angles dont les côtés sont perpendiculaires.

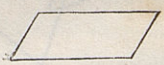
4. Dans tout quadrilatère convexe, 1° les bissectrices de deux angles consécutifs se coupent sous un angle égal à la demi-somme des deux autres angles ; 2° les bissectrices de deux angles opposés forment un angle égal à la moitié de la différence des deux autres angles du quadrilatère.

DIXIÈME LEÇON

Programme. — Parallélogrammes. — Propriétés de leurs côtés, de leurs angles et de leurs diagonales.

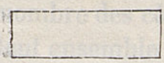
DÉFINITIONS

Le *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



Le *losange* est un quadrilatère qui a tous ses côtés égaux. On démontrera dans cette leçon que le losange est un parallélogramme.

Le *rectangle* est un parallélogramme dont tous les angles sont droits.

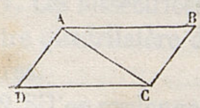


Le *carré* est un rectangle dont tous les côtés sont égaux, ou un losange dont tous les angles sont droits.

THÉORÈME 1

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux; les angles opposés le sont aussi.

Je tire la diagonale AC du parallélogramme ABCD; cette droite partage le parallélogramme en deux triangles ABC, ACD qui sont égaux (3, III), car le côté AC leur est commun; les angles BAC, ACD sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD et à la sécante AC (7, IV); les angles ACB, CAD sont aussi égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles BC, AD et à la même sé-



cante AC. Donc le côté AB opposé à l'angle ACB est égal au côté CD opposé à l'angle CAD, et le côté BC opposé à l'angle BAC, égal au côté AD opposé à l'angle ACD.

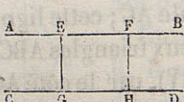
De l'égalité des triangles ABC, ADC, il résulte aussi que l'angle ABC opposé au côté AC est égal à l'angle ADC opposé au même côté AC, et que les angles BAD, BCD sont égaux comme composé de deux angles égaux chacun à chacun.

Corollaire I. — *Les parallèles* AB, CD, *comprises entre deux lignes droites parallèles* AD, BC, *sont égales.*

Car les parallèles AB, CD sont deux côtés opposés du parallélogramme ABCD.

Corollaire II. — *Deux parallèles* AB, CD *sont partout également distantes.*

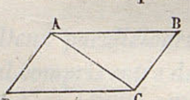
En effet, de deux points quelconques E, F, de la droite AB, j'abaisse les perpendiculaires EG, FH sur CD ; ces lignes sont parallèles (7, I) et égales, puisqu'elles sont comprises entre les parallèles AB, CD. Donc les points E et F de la ligne droite AB sont également distants de sa parallèle CD.



THÉORÈME II

Un quadrilatère dont les côtés ou les angles opposés sont égaux est un parallélogramme.

1° Soit le quadrilatère ABCD, dont le côté AB est égal à DC et le côté BC égal à AD ; je dis que les côtés opposés de ce quadrilatère sont parallèles.



La diagonale AC divise la figure ABCD en deux triangles égaux, parce qu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (4, VI) ; l'angle BAC opposé au côté BC égale par suite l'angle ACD opposé au côté AD. Or, ces deux angles sont alternes-internes par rapport aux deux lignes droites AB, CD et à la sécante AC ; donc AB est parallèle à CD (7, V) ; je prouverais pareillement que BC est parallèle à AD.

2° Le quadrilatère ABCD dont les angles opposés sont égaux, est aussi un parallélogramme

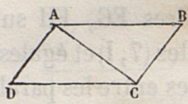
En effet, par suite de l'hypothèse, la somme des deux angles consécutifs DAB, ABC est égale à la moitié de la somme des quatre angles du quadrilatère c'est-à-dire à deux angles droits (9, IV). Or ces angles sont internes par rapport aux deux lignes AD, BC, et situés du même côté de la sécante AC ; donc le côté AD est parallèle à BC (7, V). De même, le côté AB est parallèle à DC.

Corollaire.—Le losange est un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont égaux.

THÉORÈME III

Tout quadrilatère qui a deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme.

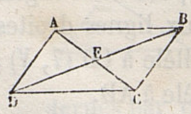
Soit le quadrilatère ABCD dont le côté AB est égal et parallèle à DC. Je tire la diagonale AC ; cette ligne divise le quadrilatère en deux triangles ABC, ADC, qui sont égaux (3, IV), car le côté AC leur est commun, le côté AB est égal à DC par hypothèse, et les angles BAC, ACD sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD et à la sécante AC. L'angle DAC opposé au côté DC égale donc l'angle ACB opposé au côté AB. Mais ces angles sont alternes-internes par rapport aux lignes droites AD, BC et à la sécante AC ; par conséquent AD est parallèle à BC (7, V), et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



THÉORÈME IV

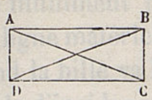
Les diagonales d'un parallélogramme se divisent mutuellement en deux parties égales.

Soit E le point d'intersection des diagonales AC, BD du parallélogramme ABCD ; les triangles ABE, CDE sont égaux, car le côté AB est égal à CD qui lui est opposé dans le parallélogramme (II), l'angle ABE est égal à CDE, parce qu'ils sont alternes-internes par rapport aux parallèles

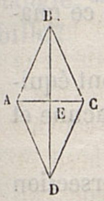


AB, CD et à la sécante BD, et l'angle BAE égal à DCE, pour une raison semblable. Par conséquent le côté AE, opposé à l'angle ABE, est égal au côté CE opposé à l'angle CDE. De même, le côté BE est égal au côté DE.

Corollaire I. — *Les diagonales d'un rectangle* ABCD *sont égales.*



Car les triangles ADC, BCD qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun sont égaux (3, IV) ; et la diagonale AC opposée à l'angle droit ADC est égale à la diagonale BD opposée à l'angle droit BCD.



Corollaire II. — *Les diagonales d'un losange* ABCD *sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

En effet, la diagonale BD dont les deux points B, D sont également distants des extrémités de la diagonale AC est perpendiculaire à cette ligne (6, III), et la divise en deux parties égales.

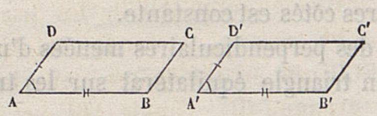
Corollaire III. — *Les diagonales d'un carré sont égales et perpendiculaires l'une à l'autre.*

Car le carré est à la fois un rectangle et un losange.

THÉORÈME V

Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Soient ABCD, A'B'C'D', deux parallélogrammes ayant l'angle A égal à l'angle A', et les côtés AB, AD respectivement égaux aux côtés A'B', A'D' ; je dis que ces quadrilatères sont égaux.



En effet, j'applique le parallélogramme ABCD sur le parallélogramme A'B'C'D' de manière que leurs côtés AB, A'B' coïncident. Comme les angles A et A' sont égaux, le côté AD se place sur le côté A'D' et le point D sur le point D'. Le côté DC, parallèle à AB, prend la direction du côté D'C', parallèle à A'B'. Pour une raison semblable, le côté BC prend la direction de B'C'; le point C se confond dès lors avec le point C', et les deux parallélogrammes coïncident.

Corollaire. —*Deux rectangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés adjacents égaux chacun à chacun.*

PROBLÈMES

1. Le parallélogramme que l'on forme en menant, par les extrémités de chaque diagonale d'un quadrilatère, des parallèles à l'autre diagonale, est équivalent au double de ce quadrilatère.

Déduire de ce théorème que deux quadrilatères sont équivalents, si leurs diagonales sont égales chacune à chacune et également inclinées l'une sur l'autre.

2. Toute ligne droite qui passe par le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est divisée par ce point en deux parties égales, et cette ligne divise à son tour le parallélogramme en deux parties égales. — Pour cette raison, on donne au point d'intersection des diagonales le nom de *centre* du parallélogramme.

3. Les diagonales de deux parallélogrammes *inscrits l'un dans l'autre*, c'est-à-dire tels que les sommets de l'un soient sur les côtés de l'autre, passent par un même point.

4. La somme des perpendiculaires tracées d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle sur les deux autres côtés est constante. — La différence des perpendiculaires menées d'un point quelconque des prolongements de la base sur les deux autres côtés est constante.

5. La somme des perpendiculaires menées d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral sur les trois côtés est constante.

Comment faut-il modifier l'énoncé pour un point extérieur au triangle?

6. Démontrer, 1° qu'on peut inscrire dans un rectangle des

parallélogrammes dont les côtés soient respectivement parallèles aux diagonales du rectangle; 2° que le périmètre de chacun de ces parallélogrammes est égal à la somme des diagonales du rectangle.

7. Étant donnés un rectangle et un point situé à l'intérieur de ce quadrilatère : si on regarde le point donné comme une bille infiniment petite et le périmètre du rectangle comme une ligne matérielle parfaitement élastique, de manière que, quand la bille va le frapper, elle se relève toujours en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion ; trouver suivant quelle direction il faut lancer cette bille pour qu'elle revienne au point de départ, après avoir touché les quatre côtés du rectangle. — Quelle est la longueur du chemin parcouru par la bille ?

ONZIÈME LEÇON

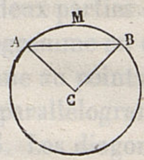
Programme. — De la circonférence du cercle. — Dépendance mutuelle des arcs et des cordes.

DÉFINITIONS

La *circonférence* est une ligne plane dont tous les points sont également éloignés d'un même point, situé dans son plan et nommé *centre*.

Le *cercle* est la portion de plan limitée par la circonférence.

On appelle *rayon* toute ligne droite tirée du centre à la circonférence. Les rayons d'une circonférence sont égaux. On désigne ordinairement une circonférence par l'un de ses rayons.



Un *arc* de cercle est une portion quelconque de la circonférence ; il a pour *corde* ou *soustendante* la droite qui joint ses extrémités. Ainsi la droite AB est la corde de l'arc AMB du cercle CA. Une corde appartient à deux arcs dont la réunion forme la circonférence ; on ne considère, en général, que le plus petit de ces arcs.

On donne le nom de *diamètre* à toute corde qui passe par le centre. Tous les diamètres sont égaux, puisque chacun d'eux est le double du rayon.

THÉORÈME I

Une ligne droite ne peut rencontrer la circonférence d'un cercle en plus de deux points.

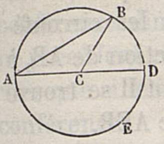
Car on ne peut mener du centre de la circonférence à la droite donnée que deux obliques égales au rayon (6, II).

Corollaire. — La circonférence est une ligne courbe.

THÉORÈME II

1° *Le diamètre est la plus grande corde du cercle ;*
2° *Il divise en deux parties égales la circonférence et le cercle.*

1° Soit AB une corde qui ne passe pas par le centre C du cercle CA ; je tire les rayons CA, CB et le diamètre AD. Le côté AB du triangle ABC est moindre que la somme des deux autres côtés CA, CB (3, I), c'est-à-dire moindre que le diamètre AD.

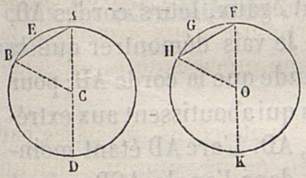


2° Je superpose les deux parties ABD, AED du cercle, en faisant tourner la première autour du diamètre AD ; l'arc ABD coïncide alors avec l'arc AED, puisque leurs points sont également éloignés du centre C. Le diamètre AD divise par suite la circonférence et le cercle en deux parties égales.

THÉORÈME III

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales. Réciproquement, *deux arcs sont égaux s'ils ont des cordes égales, et qu'ils soient l'un et l'autre moindres ou plus grands qu'une demi-circonférence.*

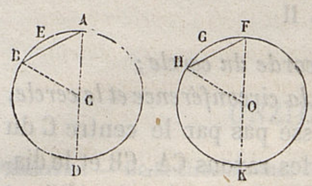
Soient le cercle CA égal au cercle OF, et l'arc AEB égal à l'arc FGH ; je dis que les cordes AB, FH de ces arcs sont égales.



Je superpose les deux cercles en plaçant le centre C de l'un sur le centre O de l'autre, et le point A sur le point F. Alors les deux circonférences coïncident et le point B s'applique sur le point H, puisque les arcs AEB, FGH sont égaux par hypothèse. Les cordes AB, FH ont donc les mêmes extrémités et sont égales.

Réciproquement. Soient les arcs AEB, FGH, moindres qu'une demi-circonférence et sous-tendus par des cordes égales AB, FH ; je dis qu'ils sont égaux.

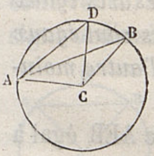
En effet, les rayons CA, CB, OF et OH, menés aux extrémités des cordes égales AB, FH, déterminent deux triangles CAB, OFH, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun; par conséquent, l'angle CAB opposé au côté CB égale l'angle OFH opposé au côté OH. Cela posé, j'applique le centre O du cercle OF sur le centre C du cercle CA, et le point F sur le point A; alors les circonférences coïncident, et la corde FH prend la direction de AB, à cause de l'égalité des angles OFH, CAB. Le point H se trouve par suite sur le point B, et l'arc FGH égale l'arc AEB.

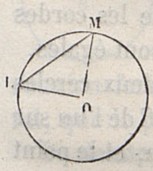


THÉORÈME IV

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, si deux arcs sont inégaux et moindres qu'une demi-circonférence, le plus grand est sous-tendu par la plus grande corde, et réciproquement.

Soient le cercle CA égal au cercle OL, et l'arc AB plus grand que l'arc LM, mais moindre qu'une demi-circonférence; je dis que la corde AB est plus grande que la corde LM.





Je prends sur l'arc AB une partie AD qui soit égale à l'arc LM, et je mène la ligne droite AD; les arcs AD, LM étant égaux, leurs cordes AD, LM sont égales (III). Je vais démontrer que la corde AB est plus grande que la corde AD; pour cela, je tire les rayons qui aboutissent aux extrémités des cordes AB, AD. L'arc AD étant moindre que AB, le rayon CD se trouve dans l'angle ACB qui est dès lors plus grand que l'angle ACD; les deux triangles ACB, ACD ont donc un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et le côté AB opposé à l'angle ACB est plus grand que le côté AD opposé à l'angle ACD (3, V).

Réciproquement. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux arcs moindres qu'une demi-circonférence sont inégaux si leurs cordes sont inégales, et celui qui a la plus grande corde est le plus grand.*

Cette réciproque est évidente ; car il résulte des deux théorèmes précédents que *deux cordes d'un même cercle ne sont égales ou inégales, qu'autant que les arcs moindres qu'une demi-circonférence qu'elles sous-tendent, sont eux-mêmes égaux ou inégaux.*

Remarque. — La corde d'un arc plus grand qu'une demi-circonférence diminue lorsque cet arc croît ; aussi, le théorème précédent et sa réciproque ne sont vrais dans toutes leurs parties que si les arcs considérés sont moindres qu'une demi-circonférence.

PROBLÈMES

1. La plus grande et la plus petite de toutes les lignes droites qu'on peut mener d'un point à une circonférence passent par le centre.

2. Une ligne droite et un point étant donnés, décrire avec un rayon donné une circonférence dont le centre soit situé sur la droite, de telle sorte que la somme des distances maximum et minimum du point à cette circonférence égale une longueur donnée.

3. Si deux arcs AB, CD d'une même circonférence sont égaux, leurs cordes AB, CD, et les droites AC, BD, qui joignent en croix les extrémités de ces arcs, se coupent sur le même diamètre.

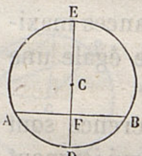
DOUZIÈME LEÇON

Programme. — Le rayon perpendiculaire à une corde divise cette corde et l'arc sous-tendu, chacun en deux parties égales.

THÉORÈME I

Le rayon CD, *perpendiculaire à une corde* AB, *divise en deux parties égales cette corde et l'arc* ADB *qu'elle sous-tend.*

Je plie le cercle CD suivant le diamètre DCE, et j'applique le demi-cercle DAE sur le demi-cercle DBE ; l'arc DAE coïncide avec l'arc DBE, et la ligne droite FA prend la direction de FB, à cause de l'égalité des angles droits CFA, CFB. Le point d'intersection A de l'arc DAE et de la droite FA s'applique dès lors sur le point d'intersection B de l'arc DBE et de la droite FB ; par suite, la ligne droite FA égale la ligne droite FB, et l'arc DA égale l'arc DB. Le point F est donc le milieu de la corde AB, et le point D le milieu de l'arc ADB.



Corollaire I. — *Le centre d'un cercle, le milieu d'une corde et le milieu de l'arc que cette corde sous-tend, sont situés sur une même ligne droite perpendiculaire à la corde.*

Comme une ligne droite est déterminée par deux points, ou par un seul point, à la condition qu'elle sera perpendiculaire à une ligne droite donnée, ce corollaire donne lieu aux six énoncés suivants :

1° *Le rayon perpendiculaire à une corde divise en deux parties égales cette corde et l'arc qu'elle sous-tend.*

2° *La perpendiculaire, élevée par le milieu d'une corde sur cette ligne elle-même, passe par le centre du cercle et le milieu de l'arc sous-tendu par la corde.*

3° *La perpendiculaire, abaissée du milieu d'un arc sur sa corde, passe par le centre du cercle et le milieu de la corde.*

4° *Le rayon, mené par le milieu d'une corde, lui est perpendiculaire et divise en deux parties égales l'arc que cette corde sous-tend.*

5° *Le rayon, passant par le milieu d'un arc, divise la corde de cet arc en deux parties égales et lui est perpendiculaire.*

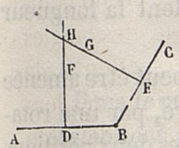
6° *La ligne droite, tracée par les milieux d'un arc et de sa corde, passe par le centre du cercle et est perpendiculaire à la corde.*

Corollaire II. — Le lieu géométrique des milieux des cordes d'un cercle, parallèles à une ligne droite donnée, est le diamètre perpendiculaire à cette ligne.

THÉORÈME II

Trois points A, B, C *qui ne sont pas en ligne droite déterminent une circonférence.*

Je tire les lignes droites AB, BC; puis j'élève, par les milieux D, E de ces lignes, la perpendiculaire DF sur AB, et la perpendiculaire EG sur BC. Les lignes droites DF, EG se rencontrent; car elles ne peuvent être parallèles, puisque les perpendiculaires BA, BC, abaissées du même point B sur ces droites, ne coïncident pas d'après l'hypothèse (7, III).



Soit H l'intersection de ces deux lignes; ce point, situé sur la ligne droite DF perpendiculaire au milieu de AB, est également distant des points A et B; il est aussi à la même distance des deux points B et C, puisqu'il se trouve sur la ligne droite EG perpendiculaire au milieu de BC; il est donc également éloigné des trois points A, B, C. De plus, c'est le seul point qui jouisse de cette propriété; car tout autre est extérieur au moins à l'une des lignes droites DF, EG et, par suite, inégalement éloigné des points A, B, C.

La circonférence décrite du point H comme centre avec le rayon AH passe donc par les trois points A, B, C; et c'est la seule, puisqu'il n'y a que le point H qui soit également distant des trois points A, B, C.

Corollaire. — Deux circonférences qui ont trois points communs coïncident.

PROBLÈMES

1. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence qui passe par deux points donnés.

2. Tracer, par un point donné, une circonférence qui passe à la même distance de trois points donnés non en ligne droite.

3. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence qui passe à la même distance de trois points donnés non en ligne droite.

4. Étant donnés sur une carte quatre points dont trois ne sont pas en ligne droite, tracer sur cette carte une route circulaire qui passe à égale distance de chacun de ces points. (Concours de troisième, 1853.)

5. Décrire, avec un rayon donné, une circonférence qui intercepte sur deux lignes droites des cordes dont la longueur soit donnée.

6. Une ligne droite, mobile dans un plan, peut être amenée d'une quelconque de ses positions à une autre, par une rotation autour d'un point du plan, pourvu que ses deux positions ne soient pas parallèles et de même sens.

7. Un triangle, et en général une figure plane quelconque, mobiles dans un plan, peuvent être amenés d'une quelconque de leurs positions à une autre par une rotation autour d'un point du plan, pourvu que dans ces deux positions les côtés égaux ne soient pas parallèles et de même sens.

8. Si l'on divise la corde d'un arc de cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division ne partagent pas l'arc en trois parties égales.

TREIZIEME LEÇON

Programme. — Dépendance mutuelle des longueurs des cordes et de leurs distances aux centres. — Condition pour qu'une droite soit tangente à une circonférence. — Arcs interceptés par des cordes parallèles.

DÉFINITIONS

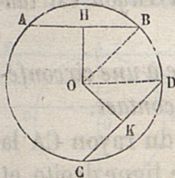
On donne le nom de *sécante* à toute ligne droite qui a deux points communs avec une circonférence.

Une ligne droite est *tangente* à une circonférence lorsqu'elle n'a qu'un point commun avec cette courbe. Ce point est appelé *point de contact*.

THÉORÈME I

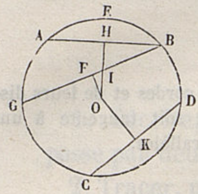
Dans le même cercle ou dans les cercles égaux : 1° deux cordes égales sont également éloignées du centre; 2° de deux cordes inégales, la plus grande est la plus rapprochée du centre.

1° Soient AB et CD deux cordes égales de la circonférence OB; je dis qu'elles sont également éloignées du centre O.



J'abaisse du centre la perpendiculaire OH sur la corde AB et la perpendiculaire OK sur la corde CD, puis je tire les rayons OB, OD. Les triangles rectangles OBH, ODK ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal chacun à chacun; car les hypoténuses OB, OD sont deux rayons de la circonférence, et les côtés BH, DK sont respectivement (12, I) les moitiés des cordes égales AB, CD. Ces triangles sont donc égaux, et la perpendiculaire OH qui mesure la distance du centre à la corde AB égale la perpendiculaire OK qui mesure aussi la distance du centre à l'autre corde CD.

2° Soit la corde BG plus grande que la corde CD, je dis qu'elle est plus près du centre O que CD.



Sur l'arc BAG, qui est par hypothèse plus grand que l'arc CD, je prends une longueur BA égale à CD et je tire la ligne droite BA. Les cordes BA, CD sont égales et, par suite, également éloignées du centre ; la question est donc ramenée à démontrer que la corde BG est plus près du centre que la corde BA.

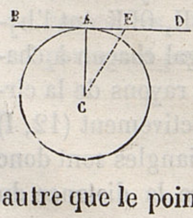
Cela posé, j'abaisse du centre la perpendiculaire OF sur la corde BG et la perpendiculaire OH sur la corde BA ; le milieu H de la corde BA et le centre O étant situés des deux côtés de la corde BG, la droite OH coupe BG en un point I. Or la droite OF perpendiculaire à BG est plus courte que l'oblique OI, et, *a fortiori*, plus courte que OI + IH ou que OH ; donc la corde BG est plus près du centre que la corde BA.

Corollaire. — Les réciproques des deux parties du théorème précédent sont évidemment vraies ; car il résulte de ce théorème que *les distances du centre d'un cercle à deux cordes ne sont égales ou inégales qu'autant que les cordes elles-mêmes sont égales ou inégales.*

THÉORÈME II

La perpendiculaire menée à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence.

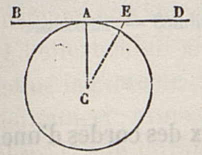
Réciproquement, *toute ligne droite tangente à une circonférence est perpendiculaire au rayon du point de contact.*



1° J'élève à l'extrémité A du rayon CA la perpendiculaire BD sur cette ligne droite, et je dis qu'elle est tangente à la circonférence CA.

En effet, la distance CE du centre C à un point quelconque E de la ligne droite BD, autre que le point A, est plus grande que le rayon CA perpendiculaire à BD (6, II). Donc le point E est extérieur à la circonférence CA, et la ligne BD n'a que le point A commun avec cette circonférence.

Réciproquement, *si la ligne droite* BD *touche la circonférence* CA *au point* A, *elle est perpendiculaire au rayon* CA.



Car tout point E de la ligne droite BE, au- tre que le point A, étant par hypothèse extérieur à la circonférence CA, le rayon CA est la ligne la plus courte qu'on puisse mener du centre à la tangente BD; il est donc perpendiculaire à cette ligne droite (6, II).

Corollaire I. — Par un point d'une circonférence, on ne peut mener qu'une tangente à cette courbe.

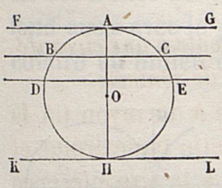
Corollaire II. — La tangente est parallèle aux cordes que le diamètre, mené au point de contact, divise en deux parties égales (12, I).

THÉORÈME III

Deux lignes droites parallèles interceptent sur une circonférence deux arcs égaux.

Les deux parallèles peuvent être à la fois sécantes, ou tangentes, ou bien être l'une sécante et l'autre tangente. Je vais examiner successivement ces trois cas.

1° Si les deux parallèles sont les sécantes BC, DE, le diamètre AH qui leur est perpendiculaire divise en deux parties égales (12, I) chacun des arcs BAC, DAE, sous-tendus par ces droites. L'arc AB est donc égal à l'arc AC, et l'arc AD égal à l'arc AE; la différence des arcs AD, AB, est dès lors égale à la différence des arcs AE, AC, c'est-à-dire que les arcs BD, CE, interceptés par les sécantes parallèles BC, DE, sont égaux.



2° Si l'une des parallèles est la sécante BC et l'autre la tangente FG, le rayon mené au point de contact A est perpendiculaire à la tangente et, par suite, à sa parallèle BC (7, III);

donc il divise l'arc BAC en deux parties égales AB, AC (12, I).

3° Lorsque les deux parallèles FG, KL, sont tangentes, le diamètre perpendiculaire à ces deux lignes droites passe par leurs points de contact A et H (II, c); donc l'arc ABH est égal à l'arc ACH.

PROBLÈMES

1. Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes d'une circonférence, égales à une droite donnée ?

2. Tracer, par un point donné, une circonférence qui touche une ligne droite en un point donné.

3. Tracer, par deux points donnés, une circonférence qui touche une parallèle à la droite menée par les points donnés.

4. Décrire une circonférence qui intercepte des cordes de longueur donnée sur deux lignes droites parallèles.

5. Les lignes droites qui joignent les extrémités de deux cordes parallèles se coupent sur le diamètre perpendiculaire à ces cordes.

6. Soit A le centre d'un cercle; si on prolonge le rayon AB d'une quantité BC égale à AB, qu'on abaisse ensuite du point C la perpendiculaire CD sur une tangente quelconque au cercle, et que l'on tire la ligne droite qui joint le pied D de cette perpendiculaire à l'extrémité B du rayon AB, l'angle ABD extérieur au triangle BCD est constamment égal au triple de l'angle intérieur BDC.

QUATORZIÈME LEÇON

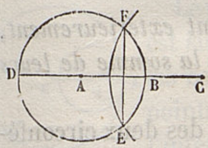
PROGRAMME. — Conditions du contact et de l'intersection de deux cercles.

DÉFINITIONS

Deux circonférences sont *tangentes* en un point qui leur est commun, lorsqu'elles ont la même tangente en ce point.

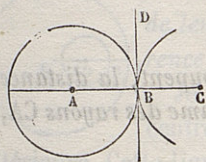
THÉORÈME I

Si deux circonférences se coupent, la ligne droite qui joint leurs centres est perpendiculaire à la corde commune et la divise en deux parties égales.



Soient les deux circonférences AE, CE, qui se coupent aux deux points E et F; chacun de leurs centres A, C étant également éloigné des deux points E, F, la ligne droite AC est perpendiculaire à la corde commune EF et la divise en deux parties égales (6, III).

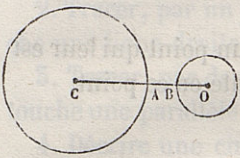
COROLLAIRE. — Si le point E coïncide avec le point B où la circonférence AB coupe la ligne droite AC, le point F se confond aussi avec le point B, puisque la droite AC est perpendiculaire au milieu de EF. Alors les deux circonférences n'ont plus qu'un point commun B, et la droite EF est tangente à l'une et à l'autre. Donc, 1° *lorsque deux circonférences* AB, CB, *n'ont qu'un point commun* B, *il est situé sur la ligne droite* AC *qui joint leurs centres;* 2° *ces circonférences ont la même tangente* BD *en ce point, c'est-à-dire qu'elles sont tangentes.*



Lorsque deux circonférences sont tracées sur le même plan, elles ont deux points communs, ou un seul, ou bien elles n'en ont pas. Dans les deux derniers cas, l'une des circonférences peut être extérieure ou intérieure à l'autre; par suite, ces lignes n'ont, l'une par rapport à l'autre, que cinq positions différentes auxquelles correspondent les cinq théorèmes suivants.

THÉORÈME II

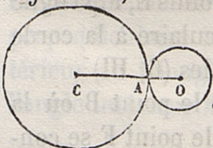
Si deux circonférences CA, OB, *qui n'ont aucun point commun, sont extérieures l'une à l'autre, la distance de leurs centres* C,O *est plus grande que la somme de leurs rayons* CA, OB.



La ligne droite CO qui joint les centres coupe l'une des circonférences au point A et l'autre au point B; elle est donc égale à la somme des rayons CA, OB, augmentée de la distance des deux points A, B, de sorte que l'on a : $CO > CA + OB$.

THÉORÈME III

Si deux circonférences CA, OA, *se touchent extérieurement, la distance de leurs centres* C, O *est égale à la somme de leurs rayons* CA, OA.

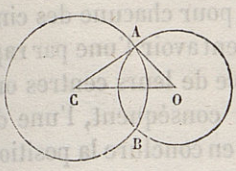


Le point de contact A des deux circonférences est situé (I) sur la ligne droite qui joint les centres C, O, et compris entre ces deux points, puisque les circonférences sont extérieures l'une à l'autre; par conséquent la distance CO des deux centres est égale à la somme des rayons CA, OA.

THÉORÈME IV

Lorsque deux circonférences CA, OA *se coupent, la distance de leurs centres* C, O *est plus petite que la somme des rayons* CA, OA, *et plus grande que leur différence.*

Soit A l'un des points d'intersection des deux circonférences, ce point étant extérieur à la ligne droite qui joint les centres C et O (I), les rayons CA, OA font avec la ligne droite CO un triangle dans lequel le côté CO est à la fois moindre que la somme des deux autres côtés CA, OA, et plus grand que leur différence.



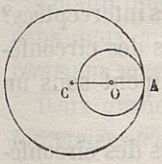
Remarque. — Lorsque deux arcs de cercle se coupent en un point A, on dit qu'ils font un *angle* en ce point, et l'on mesure cet angle par celui que forment les tangentes menées à ces arcs par le *sommet* A dans le sens des arcs mêmes. — De là résultent les théorèmes suivants qu'il est facile de démontrer.

1° *Les circonférences* CA, OA *se coupent au point* A, *sous les mêmes angles que leurs rayons* CA, OA *prolongés indéfiniment.*

2° *Les circonférences* CA, OA *se coupent, aux deux points* A *et* B, *sous les mêmes angles.*

THÉORÈME V

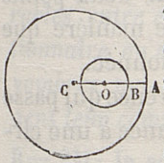
Lorsque deux circonférences CA, OA *se touchent intérieurement, la distance de leurs centres* C, O *est égale à la différence de leurs rayons* CA, OA.



Le point de contact A des deux circonférences est situé (I) sur la ligne droite qui passe par les centres C, O, et du même côté de ces deux points, puisque l'une des circonférences est à l'intérieur de l'autre ; donc la distance CO des deux centres est égale à la différence des rayons CA, OA.

THÉORÈME VI

Si deux circonférences CA, OB, *qui n'ont aucun point commun sont intérieures l'une à l'autre, la distance de leurs centres* C *et* O *est moindre que la différence de leurs rayons* CA, OB.



Je prolonge la ligne droite CO qui joint les centres au delà du centre O de la circonférence intérieure. Cette ligne rencontrant les deux circonférences aux points B et A, la distance CO est égale à la différence des rayons CA, OB, diminuée de la distance des deux points A et B ; on a donc : $CO < CA - OB$.

Corollaire. — Les réciproques des cinq théorèmes précédents sont vraies et évidentes. En effet, pour chacune des cinq positions que deux circonférences peuvent avoir l'une par rapport à l'autre, leurs rayons et la distance de leurs centres ont entre eux une relation différente ; par conséquent, l'une de ces cinq relations étant donnée, on peut en conclure la position correspondante des deux circonférences.

PROBLÈMES

1. Lorsque deux circonférences n'ont aucun point commun, la plus petite et la plus grande des lignes droites qu'on peut mener d'une circonférence à l'autre passent par les centres de ces circonférences.

2. Si, par l'un des points d'intersection de deux circonférences, on mène une parallèle à la ligne droite qui joint leurs centres, la somme des cordes interceptées sur cette parallèle est égale au double de la distance des centres. — Lorsqu'on fait tourner la sécante autour du point d'intersection des circonférences, comment varie la somme des cordes interceptées?

3. Quel est le lieu géométrique des centres des circonférences qui, décrites avec le même rayon, coupent sous un angle donné une circonférence donnée ?

4. Quel est le lieu géométrique des centres des circonférences qui, décrites avec le même rayon, divisent en deux parties égales une circonférence donnée ?

5. Décrire une circonférence qui passe par un point donné et touche une circonférence donnée en un point donné.

6. Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés et coupe une circonférence donnée, de manière que la corde commune soit parallèle à une corde donnée.

7. Décrire avec un rayon donné une circonférence qui passe par un point donné et dont la plus courte distance à une circonférence donnée soit d'une longueur connue.

8. Des sommets d'un triangle comme centres décrire trois circonférences telles que chacune touche les deux autres.

QUINZIÈME LEÇON

Programme. — Mesure des angles. — Si des sommets de deux angles on décrit deux arcs de cercle d'un même rayon, le rapport des angles sera égal à celui des arcs compris entre leurs côtés. — Angles inscrits. — Évaluation des angles en degrés, minutes et secondes.

DÉFINITIONS

1. *Mesurer* une grandeur, c'est chercher combien elle contient d'unités de son espèce et de parties de l'unité.

Lorsqu'une grandeur est contenue un nombre exact de fois dans deux grandeurs de son espèce, on dit qu'elle est leur *commune mesure*.

Deux grandeurs de même espèce sont *commensurables* ou *incommensurables entre elles*, selon qu'elles ont une commune mesure ou qu'elles n'en ont pas.

2. Le *rapport* de deux grandeurs de même espèce est le nombre qui exprimerait la mesure de la première, si on prenait la seconde pour unité.

Si deux grandeurs de même espèce A *et* B *sont commensurables entre elles, leur rapport est un nombre entier ou fractionnaire qu'on obtient en divisant l'un par l'autre les deux nombres qui expriment combien de fois ces grandeurs contiennent leur commune mesure* M. Soit, par exemple, $A = 25M$ et $B = 8M$; la commune mesure M est alors $\frac{1}{8}$ de B ; par suite,

* Ces notions d'arithmétique doivent être rappelées au commencement de cette leçon, pour bien préciser le sens des théorèmes qu'on va démontrer.

A égale les $\frac{25}{8}$ de B, et le rapport de A à B est le nombre fractionnaire $\frac{25}{8}$.

Réciproquement, *lorsque le rapport de deux grandeurs* A *et* B *est un nombre entier ou fractionnaire, ces grandeurs sont commensurables entre elles*. En effet, si le rapport de A à B est égal à $\frac{30}{7}$, le septième de B est contenu 30 fois dans A, et les grandeurs A,B ont une commune mesure égale au septième de B.

Lorsque deux grandeurs A *et* B *sont incommensurables entre elles, il est impossible de mesurer la première en prenant la seconde* B *pour unité; mais on peut trouver une grandeur* A′ *qui soit commensurable avec* B *et qui diffère de* A *aussi peu qu'on le veut*. En effet, si l'on divise B en un nombre très-grand, par exemple en un million de parties égales, et qu'on prenne pour A′ le plus grand multiple de cette fraction de B contenu dans A, la grandeur de A′ ne différera pas de A d'un millionième de B. Dans les applications numériques, on remplace A par A′, et, lorsqu'on parle du rapport de A à B, il faut entendre celui de A′ à B. *Aussi pour démontrer que le rapport de deux grandeurs de même espèce* A *et* B *égale celui de deux autres grandeurs de même espèce* C *et* D, *le programme prescrit de ne considérer que des valeurs de ces grandeurs qui soient commensurables entre elles*.

3. On appelle *angle au centre* un angle dont le sommet est situé au centre d'un cercle.

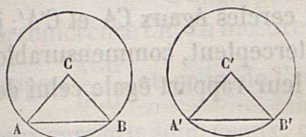
Un angle est *inscrit* dans un cercle, lorsqu'il est formé par deux cordes qui se coupent sur la circonférence de ce cercle.

Un *secteur* est la portion d'un cercle comprise entre deux rayons. — Un *segment* de cercle est la portion d'un cercle comprise entre un arc et sa corde.

Un polygone est *inscrit* dans un cercle, lorsque ses sommets sont situés sur la circonférence. Réciproquement, on dit que le cercle est *circonscrit* au polygone.

THÉORÈME I

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux, et réciproquement.



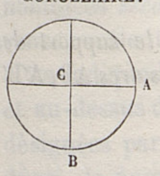
Soient deux cercles égaux CA, C′A′; je dis que les arcs AB, A′B′, interceptés par les deux angles au centre égaux ACB, A′C′B′, sont aussi égaux.

En effet, je superpose les deux cercles en plaçant le centre C′ sur le centre C et le point A′ sur le point A ; le rayon C′A coïncide alors avec le rayon CA, et la circonférence C′A′ avec la circonférence CA. Mais, l'angle A′C′B′ étant égal par hypothèse à l'angle ACB, le rayon C′B′ s'applique sur CB ; donc l'arc A′B′ coïncide avec l'arc AB et lui est égal.

Réciproquement, si les arcs AB, A′B′ sont égaux, les angles au centre ACB, A′C′B′ qui les interceptent sont aussi égaux.

Car, en superposant les cercles C′A′, CA, de manière que les rayons C′A′, CA, coïncident, l'arc A′B′ s'applique sur l'arc AB qui lui est égal ; par suite, le rayon C′B′ prend la direction du rayon CB, et les angles au centre A′C′B′, ACB, dont les côtés coïncident, sont égaux.

Corollaire. — *Si du sommet d'un angle droit* ACB *comme centre on décrit une circonférence quelconque* CA, *l'arc* AB *intercepté par cet angle est égal au quart de la circonférence.*



En effet, les quatre angles au centre, formés par les droites CA, CB prolongées au delà du point C, sont égaux, puisqu'ils sont droits ; ils partagent donc la circonférence en quatre arcs égaux.

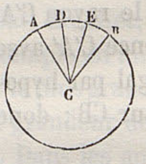
Remarque. — On désigne parfois le quart de la circonférence sous le nom de *quadrans*.

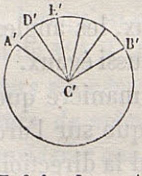
THÉORÈME II

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre est égal à celui des arcs qu'ils interceptent.

Soient ACB, A′C′B′, deux angles dont les sommets sont situés aux centres C et C′ de deux cercles égaux CA et C′A′; je suppose les arcs AB, A′B′, qu'ils interceptent, commensurables entre eux (déf. 2), et je dis que leur rapport égale celui des angles ACB, A′C′B′.

En effet, soit AD une commune mesure des arcs AB, A′B′; je la suppose contenue 3 fois dans l'arc AB et 5 fois dans





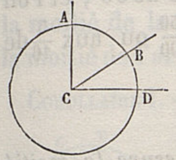
l'arc A′B′, de sorte que le rapport de AB à A′B′ égale $\frac{3}{5}$. Cela posé, je mène les rayons CD, CE aux points de division de l'arc AB et les rayons C′D′, C′E′, etc., aux points de division de l'arc A′B′: les arcs AD, DE, etc., et A′D′, D′E′, etc., étant égaux, les angles au centre ACD, DCE, etc., et A′C′D′, D′C′E′, etc., qui interceptent ces arcs, sont aussi égaux (1); donc l'angle ACD est contenu dans les angles ACB, A′C′B′ autant de fois que l'arc AD dans les arcs AB, A′B′, c'est-à-dire 3 fois dans ACB, et 5 fois dans A′C′B′. Le rapport des deux angles ACB, A′C′B′ égale par suite $\frac{3}{5}$, ou le rapport des deux arcs AB, A′B′.

Corollaire. — On démontre de même que *le rapport des deux secteurs* ACB, A′C′B′ *est égal à celui de leurs arcs* AB, A′B′.

THÉORÈME III

Tout angle a la même mesure que l'arc qu'il intercepte sur une circonférence, décrite de son sommet comme centre avec un rayon quelconque, si l'on prend pour unité l'angle au centre qui intercepte sur cette circonférence l'arc choisi pour unité de longueur.

Soit à mesurer l'angle ACB, en prenant pour unité un angle quelconque BCD ; du sommet C comme centre, avec un rayon arbitraire CA, je décris une circonférence de cercle sur laquelle les angles au centre ACB, BCD interceptent les arcs AB, BD, et je prends l'arc BD intercepté par l'unité d'angle pour l'unité de longueur des arcs de la circonférence CA. La mesure de l'angle ACB est exprimée par le rapport $\frac{ACB}{BCD}$, et celle de l'arc AB par le rapport $\frac{AB}{BD}$; or, ces deux rapports sont égaux, puisque les angles au centre ACB, BCD sont entre eux comme les arcs AB, BD qu'ils interceptent (II); par conséquent, la mesure de l'angle au centre ACB est la même que celle de l'arc AB compris entre ses côtés.



Remarque I. — Au lieu de dire : *Cet angle a la même mesure que tel arc*, on se sert ordinairement de la locution inexacte, mais plus courte : *Cet angle a pour mesure tel arc.*

Remarque II. — *On prend ordinairement le quart de la circonférence pour l'unité de longueur des arcs ; l'angle droit est alors l'unité d'angle* (I, c).

Pour exprimer plus simplement les arcs en nombres, on a divisé leur unité, c'est-à-dire le quart de la circonférence, en 90 parties égales appelées *degrés ;* dès lors la circonférence entière en contient 4 fois 90, ou 360.

Chaque degré a été divisé en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*; on a divisé aussi chaque minute en 60 parties égales nommées *secondes*. Par conséquent, le quart de la circonférence contient 5,400 minutes, ou 324,000 secondes.

On indique les degrés par la lettre (°) qu'on écrit à la droite et au-dessus du nombre qui les représente. Les minutes sont désignées par un accent aigu (′), les secondes par deux (″). Ainsi, le nombre 25° 15′ 12″ exprime 25 degrés, 15 minutes et 12 secondes.

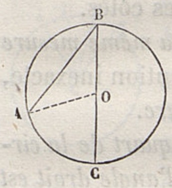
On appelle angle de 28° 7′ 30″ un angle qui intercepterait sur une circonférence un arc de 28° 7′ 30″, si l'on plaçait son sommet au centre de cette circonférence. Pour évaluer le rapport de cet angle à l'angle droit, on divise le nombre de secondes conte nues dans l'arc de 28° 7′ 30″ par le nombre de secondes dont est composé le quart de la circonférence, ou l'arc de 90°, et l'on trouve que l'angle proposé est égal aux $\frac{101250}{324000}$ ou aux $\frac{5}{16}$ de l'angle droit.

THÉORÈME IV

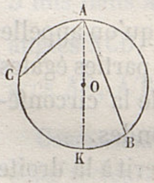
Tout angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Le centre du cercle peut être sur l'un des côtés de l'angle, ou à l'intérieur de l'angle, ou bien à l'extérieur.

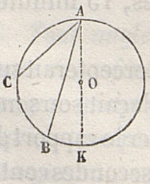
1. Soit ABC un angle inscrit dans le cercle OB, et tel que son côté BC passe par le centre O ; je tire le rayon OA. Les côtés OA, OB du triangle OAB étant égaux comme rayons du cercle OB, les angles ABC, BAO, opposés à ces côtés sont égaux (5, I), et l'angle AOC extérieur au triangle est égal à leur somme (9, III) ; l'angle inscrit ABC est par suite la moitié de l'angle au centre AOC. Or cet angle au centre a pour mesure l'arc AC compris entre ses côtés (III); donc l'angle inscrit ABC a pour mesure la moitié du même arc AC qui est aussi compris entre ses côtés.



2. Si le centre est à l'intérieur de l'angle BAC, je tire le diamètre AK. L'angle BAC égale la somme des angles inscrits BAK, CAK, dont le côté commun AK passe par le centre ; il a dès lors pour mesure la somme de leurs mesures. Or, le premier BAK est mesuré par la moitié de l'arc BK, et le second CAK par la moitié de l'arc CK ; l'angle inscrit BAC a donc pour mesure la moitié de la somme des deux arcs BK, CK, c'est-à-dire la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés.

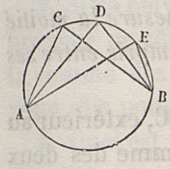


3. Je suppose le centre à l'extérieur de l'angle BAC, et je tire le diamètre AK. L'angle BAC égale la différence des angles inscrits CAK, BAK, dont le côté commun AK passe par le centre ; il a dès lors pour mesure la différence de leurs mesures. Or, le premier CAK



est mesuré par la moitié de l'arc CK, et le second BAK par la moitié de l'arc BK; l'angle inscrit BAC a donc pour mesure la moitié de la différence des deux arcs CK, BK, c'est-à-dire la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés.

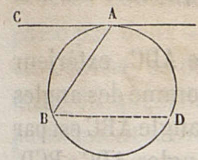
Corollaire I. — *Les angles* ACB, ADB, *etc.*, *inscrits dans le même segment de cercle*, *sont égaux*, puisqu'ils ont pour mesure la moitié du même arc AB compris entre leurs côtés.



Lorsque le segment est un demi-cercle, les angles inscrits sont droits; car ils ont pour mesure un quart de circonférence. Si le segment est plus grand ou moindre qu'un demi-cercle, les angles inscrits sont aigus ou obtus, puisque leur mesure est moindre ou plus grande que le quart de la circonférence.

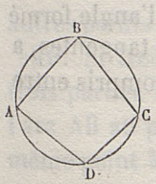
On dit qu'un segment de cercle est *capable d'un angle* lorsque les angles inscrits dans ce segment sont égaux à cet angle.

Corollaire II. — *L'angle* CAB *formé par une tangente* AC *et une corde* AB, *issue du point de contact* A *de la tangente*, *a pour mesure la moitié de l'arc* AB *compris entre ses côtés.*



Car, si je mène la corde BD parallèle à la tangente, l'angle CAB est égal à l'angle inscrit ABD (7, V), qui a pour mesure la moitié de l'arc AD compris entre ses côtés. Or, les arcs AD, AB, interceptés par les parallèles CA, BD, sont égaux (13, III); donc l'angle CAB a la même mesure que la moitié de l'arc AB compris entre ses côtés.

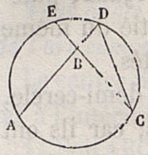
Corollaire III. — *Les angles opposés d'un quadrilatère convexe* ABCD, *inscrit dans un cercle*, *sont supplémentaires.*



L'angle inscrit ABC a pour mesure la moitié de l'arc ADC compris entre ses côtés, et l'angle inscrit ADC, qui est opposé à l'angle ABC, a pour mesure la moitié de l'arc ABC. La somme des deux angles ABC, ADC, a donc pour mesure la moitié de la somme des arcs ADC, ABC, c'est-à-dire la moitié de la circonférence ; dès lors ces deux angles sont supplémentaires.

THÉORÈME V

Tout angle ABC, *formé par deux sécantes qui se rencontrent à l'intérieur du cercle, a pour mesure la moitié de la somme des arcs* AC, DE *compris entre ses côtés et leurs prolongements.*



Je tire la corde CD ; l'angle ABC, extérieur au triangle CBD, est égal à la somme des deux angles intérieurs ADC, BCD (9, III). Or ces deux derniers angles sont inscrits dans le cercle ACD et mesurés respectivement par les moitiés des arcs AC, DE compris entre leurs côtés (IV) ; donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de la somme des deux arcs AC, DE.

THÉORÈME VI

Tout angle ABC *formé par deux sécantes qui se rencontrent hors du cercle, a pour mesure la moitié de la différence des arcs* AC, DE *compris entre ses côtés.*

Je tire la corde DC ; l'angle ADC, extérieur au triangle DBC, est égal à la somme des angles intérieurs ABC, BCD (9, III) ; l'angle ABC est par suite égal à la différence des angles ADC, BCD ; or ces deux derniers angles sont inscrits dans le cercle ACD, et mesurés respectivement par les moitiés des arcs AC, DE, compris entre leurs côtés (IV) ; donc l'angle ABC a pour mesure la moitié de la différence des deux arcs AC, DE.

Remarque. — On démontrerait de même que l'angle formé par une tangente et une sécante, ou par deux tangentes, a pour mesure la demi-différence des deux arcs compris entre ses côtés.

PROBLÈMES

1. Quel est le lieu géométrique du sommet d'un angle qui se

meut dans son plan de manière que ses côtés passent par deux points donnés ?

2. Si les angles opposés d'un quadrilatère convexe sont supplémentaires, les quatre sommets sont situés sur la même circonférence, c'est-à-dire que le quadrilatère est *inscriptible*.

3. Si un polygone convexe, inscrit dans un cercle, a un nombre pair de côtés, la somme de ses angles de rang pair égale la somme des angles de rang impair. — La réciproque n'est vraie que pour le quadrilatère.

4. Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes interceptées par une circonférence sur toutes les sécantes qu'on peut mener par un point donné ?

5. Si, d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur ses côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.

6. Les pieds des perpendiculaires menées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés sont les sommets d'un second triangle, dont les angles ont pour bissectrices les hauteurs du premier.

7. Si l'on trace quatre circonférences telles que chacune passe par deux sommets consécutifs d'un quadrilatère inscrit, ces courbes se coupent en quatre points, autres que les sommets du quadrilatère. Démontrer que ces quatre points appartiennent à une même circonférence.

8. Lorsque les côtés d'un angle coupent deux circonférences, les cordes des arcs qu'ils interceptent sur l'une de ces courbes, étant indéfiniment prolongées, font un quadrilatère inscriptible avec les cordes des arcs interceptés sur l'autre.

9. Si l'on tire une sécante par l'un des points d'intersection de deux circonférences, elle coupe ces circonférences en deux autres points dont les tangentes font un angle constant.

10. Si trois points A, B, C divisent une circonférence en trois parties égales, la distance d'un point quelconque M de l'arc AB au point C est égale à la somme des distances du même point M aux deux points A et B.

SEIZIÈME LEÇON

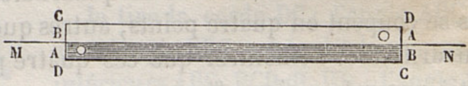
PROGRAMME. — Problèmes. — Usage de la règle et du compas dans les constructions sur le papier. — Vérification de la règle. — Problèmes élémentaires sur la construction des angles et des triangles

---

DÉFINITIONS

1. Pour tirer une ligne droite sur le papier, on se sert d'un instrument qu'on appelle *règle*. La règle est une barre de bois ou de métal dont les faces sont planes et les bords droits.

Lorsqu'on veut tracer la ligne droite déterminée par deux points donnés sur un plan, on place une règle sur ce plan de manière que l'un de ses bords passe par les deux points donnés; puis on fait glisser d'un point à l'autre, le long de ce bord, la pointe d'un crayon ou le bec d'une plume trempée dans l'encre.



Pour s'assurer que le bord AB d'une règle ABCD est droit, on tire une droite MN sur le papier en faisant glisser la pointe d'un crayon le long de AB, et l'on cherche ensuite à faire coïncider avec cette ligne droite le même bord AB, en plaçant toutefois à gauche l'extrémité B de la règle qui était d'abord à droite, et réciproquement ; on reconnaît que cette coincidence a lieu, c'est-à-dire que le bord AB est droit, lorsqu'en traçant une seconde ligne droite le long du bord AB on trouve que cette ligne droite se confond avec la première. La règle est bien dressée si chacun de ses bords satisfait à cette condition.

2. Le *compas* est un instrument avec lequel on décrit une circonférence sur un plan. Il est composé de deux tiges métalliques appelées vulgairement les *branches* du compas; ces branches

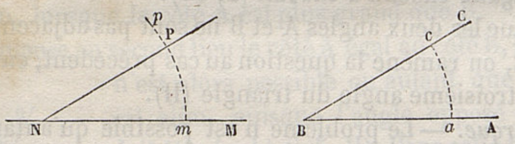
sont terminées en pointe à l'une de leurs extrémités, et jointes à l'autre extrémité par une charnière qui permet d'ouvrir plus ou moins le compas, c'est-à-dire d'agrandir ou de diminuer l'angle qu'elles forment.

Pour décrire une circonférence dont le centre et le rayon sont donnés, on ouvre le compas de telle sorte que la distance de ses pointes soit égale au rayon ; on place ensuite l'une des pointes au centre du cercle, et l'on fait tourner l'autre autour du centre en l'appuyant sur le papier. La branche mobile est terminée par un crayon ou une plume qui décrit la circonférence.

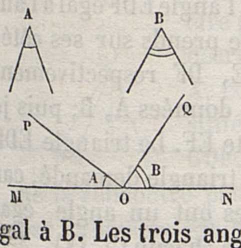
PROBLÈME I

Faire sur la ligne droite MN *un angle qui ait le point* N *pour sommet, et soit égal à un angle donné* ABC.

Du sommet B de l'angle ABC comme centre, je décris avec un rayon quelconque l'arc *ac* entre les côtés de cet angle ; du



point N comme centre, et avec le même rayon B*a*, je décris ensuite un arc indéfini *pm* jusqu'à la rencontre de la ligne droite MN, et, à partir de leur intersection *m*, je prends avec un compas une portion *m*P de l'arc *mp* égale à l'arc *ac* ; je tire ensuite la ligne droite NP. L'angle MNP est égal à l'angle ABC ; car ils sont mesurés par les arcs égaux *m*P et *ac* (15, III).



PROBLÈME II

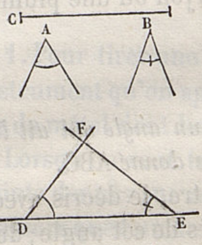
Deux angles A *et* B *d'un triangle étant donnés, construire le troisième.*

Je fais sur la ligne droite indéfinie MN l'angle MOP égal à A et l'angle NOQ égal à B. Les trois angles MOP, POQ, NOQ, qui sont adjacents et placés du même côté de la ligne droite MN, valent ensemble deux angles droits (2, I); donc l'angle POQ, supplément de la somme des deux angles A et B, est égal au troisième angle du triangle proposé.

PROBLÈME III

Étant donnés deux angles A, B *d'un triangle et un côté* C, *construire le triangle.*

Si les deux angles donnés A et B sont adjacents au côté donné C, je prends sur une ligne droite indéfinie une longueur DE égale à C; puis je fais au point D l'angle EDF égal à A, et au point E l'angle DEF égal à B. Les côtés de ces deux angles se rencontrent au point F et forment avec DE un triangle qui n'est autre que le triangle demandé; car ces deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun (3, III).



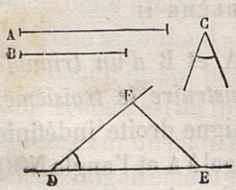
Lorsque les deux angles A et B ne sont pas adjacents au côté donné C, on ramène la question au cas précédent, en déterminant le troisième angle du triangle (II).

Remarque. — Le problème n'est possible qu'autant que la somme des deux angles donnés est moindre que deux angles droits.

PROBLÈME IV

Étant donnés deux côtés A *et* B *d'un triangle et l'angle* C *qu'ils forment, construire le triangle.*

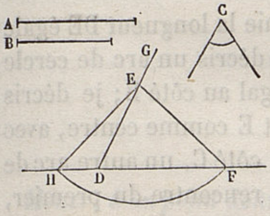
Je fais sur la ligne droite indéfinie DE l'angle EDF égal à l'angle donné C, et je prends sur ses côtés les longueurs DE, DF respectivement égales aux lignes données A, B; puis je tire la ligne droite EF. Le triangle EDF n'est autre que le triangle demandé; car ces deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (3, IV).



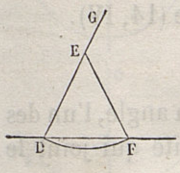
PROBLÈME V

Deux côtés A, B *d'un triangle, et l'angle* C *opposé au côté* A *étant donnés, construire le triangle.*

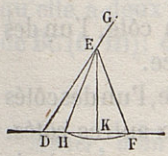
Je fais un angle GDF égal à l'angle donné C, je prends sur le côté DG une longueur DE égale au côté B, et je décris du point E comme centre, avec un rayon égal au côté A, un arc de cercle jusqu'à la rencontre de la droite DF. Si le côté A est plus grand que B, l'arc de cercle coupe la droite DF en deux points H et F, situés de part et d'autre du sommet D de l'angle GDF, puisque la droite ED est plus petite que le rayon A. Des deux triangles DEF, DEH qu'on forme en tirant les droites EF, EH, le premier satisfait seul à toutes les conditions de la question; car il a l'angle et les deux côtés donnés, tandis que l'angle EDH du second n'est que le supplément de l'angle C. Le problème n'a donc qu'une solution, lorsque le côté A est plus grand que B.



Je suppose en second lieu le côté A égal au côté B, le triangle n'est alors possible qu'autant que l'angle C est aigu, puisque l'angle opposé au côté B doit être égal à C (5, II). Dans cette hypothèse, l'arc de cercle, décrit du point E comme centre, avec le rayon A, passe par le point D, puisque ED est égale à A, et le triangle isocèle EDF est la seule solution de la question.



Enfin, si le côté A est plus petit que le côté B, il faut encore que l'angle C soit aigu, puisque l'angle opposé au côté B doit être plus grand que C (5, III). L'arc de cercle, décrit du point E comme centre avec le rayon A, coupe la droite DF en deux points F et H, situés du même côté du sommet D de l'angle GDF, ou il est tangent à cette droite, ou bien il ne la rencontre pas, selon que le rayon A, moindre que ED par hypothèse, est plus grand que la perpendiculaire, ou plus

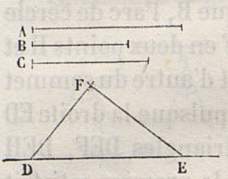


petit. Dans le premier cas, le problème a deux solutions qui sont les deux triangles EDF, EDH; dans le second cas, il n'en a plus qu'une, c'est le triangle rectangle EDK. Enfin, il est impossible dans le troisième cas.

PROBLÈME VI

Construire un triangle dont les trois côtés A, B, C, *sont donnés.*

Je prends sur une ligne droite indéfinie la longueur DE égale au côté A; du point D comme centre je décris un arc de cercle avec un rayon égal au côté B; je décris ensuite, du point E comme centre, avec un rayon égal au côté C, un autre arc de cercle jusqu'à la rencontre du premier, et je joins leur intersection F aux points D, E, par les lignes droites DF, EF. La figure DEF n'est autre que le triangle demandé, car ces deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun (3, VI).



Remarque. — Le triangle cherché n'est possible que si les arcs décrits des points D et E comme centres, avec les rayons B et C, se coupent. Donc la distance de leurs centres, c'est-à-dire la ligne droite A, doit être moindre que la somme des deux rayons B, C, et plus grande que leur différence (14, IV).

PROBLÈMES.

1. Construire un triangle dont on connaît un angle, l'un des côtés adjacents et la longueur de la ligne droite qui joint le milieu de ce côté au sommet opposé.

2. Construire un triangle dans lequel on donne deux côtés et la longueur de la ligne droite qui joint le milieu de l'un d'entre eux au sommet opposé.

3. Construire un triangle dont on connaît un côté, l'un des angles adjacents et la longueur de sa bissectrice.

4. Construire un triangle, étant donnés un angle, l'un des côtés adjacents et la somme ou la différence des deux autres côtés.

5. Construire un triangle dans lequel on donne un angle, le côté opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

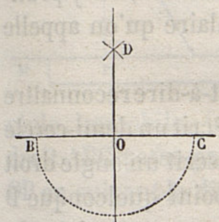
DIX-SEPTIÈME LEÇON

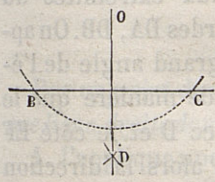
Programme. — Tracé des perpendiculaires et des parallèles. — Abréviation des constructions au moyen de l'équerre et du rapporteur. — Vérification de l'équerre.

PROBLÈME I

Mener, d'un point donné O, *une perpendiculaire sur une ligne droite donnée* BC.

Le point O peut être donné sur la ligne droite BC ou hors de cette ligne, mais la perpendiculaire se construit de la même manière dans les deux cas.





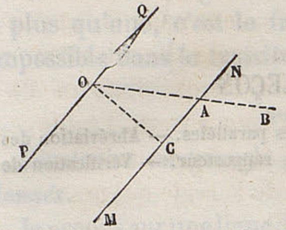
En effet, je détermine sur la ligne droite BC deux points B et C également distants du point O, en décrivant de ce point comme centre un arc de cercle qui coupe la ligne BC. De ces deux points B, C comme centres, et avec un même rayon que je prends plus grand que la moitié de la distance BC, je décris ensuite deux arcs de cercle qui se coupent au point D (14, IV), et je tire la ligne droite OD.

Cette ligne est perpendiculaire à la ligne droite BC, puisqu'elle a deux points O, D, également distants des extrémités de BC (6, III); c'est donc la perpendiculaire demandée.

PROBLÈME II

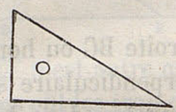
Mener, d'un point donné O, *une parallèle à une ligne droite donnée* MN.

1re *solution.* Du point donné O je tire une ligne droite OB qui coupe la ligne droite donnée MN en un point quelconque A, et je fais sur OB l'angle AOP égal à l'angle NAO. La droite OP est parallèle à MN; car ces deux lignes font avec la sécante OA deux angles alternes-internes égaux AOP, NAO (7, V).



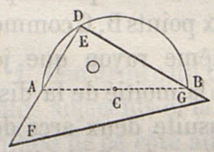
2e *solution.* Je mène successivement par le point O la perpendiculaire OC sur MN, et la perpendiculaire OP sur OC. La ligne droite OP est parallèle à MN, puisque ces deux lignes sont perpendiculaires à la même droite OC (7, I).

On abrége beaucoup les constructions des deux problèmes qui précèdent, en faisant usage des instruments nommés *équerre* et *rapporteur :*



1° L'*équerre* est une petite planche de bois qui a la forme d'un triangle rectangle; pour qu'elle soit plus aisée à manier, on y pratique une ouverture circulaire qu'on appelle l'*œil* de l'équerre.

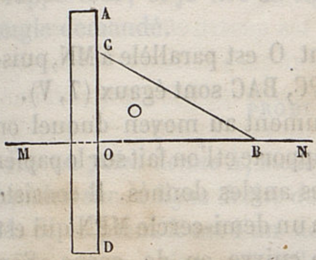
Lorsqu'on veut vérifier une équerre, c'est-à-dire reconnaître si le plus grand de ces angles est droit, on décrit un demi-cercle ADB avec un rayon arbitraire CA, et l'on inscrit un angle droit ADB, en joignant un point quelconque D de la circonférence aux extrémités du diamètre AB par les cordes DA, DB. On applique ensuite le plus grand angle de l'équerre FEG sur ADB, de manière que le sommet E coïncide avec D et le côté EF avec DA. Si le côté EG de l'équerre prend alors la direction de DB, l'angle FEG est égal à l'angle droit ADB et l'équerre est bonne; dans le cas contraire, l'équerre est fausse.



PROBLÈME III

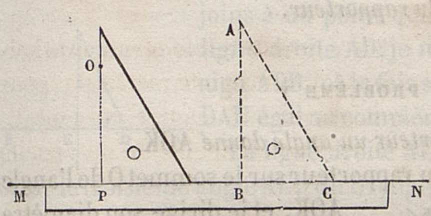
Par un point donné O, *mener avec l'équerre une perpendiculaire sur une ligne droite donnée* MN.

1. Si le point O se trouve sur la ligne droite MN, je place un des côtés de l'angle droit d'une équerre sur cette ligne de manière que le sommet de cet angle coïncide avec le point O, et j'applique une règle AD contre l'autre côté OC de l'angle droit de l'équerre. J'ôte ensuite l'équerre, et je tire une ligne droite le long du bord de la règle qui passe par le point O.



Cette ligne droite AD est perpendiculaire à MN, puisque l'angle AON est égal à l'angle droit COB de l'équerre.

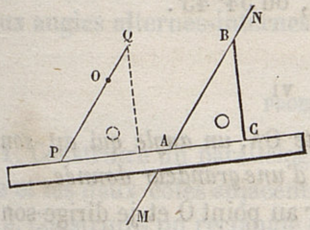
2. Si O n'est pas un point de la ligne droite MN, j'applique sur cette ligne le bord d'une règle, et contre cette règle, le côté BC de l'angle droit ABC d'une équerre. Je fais glisser ensuite l'équerre le long de la règle immobile, jusqu'à ce que l'autre côté AB de l'angle droit ABC passe par le point O, et je trace la perpendiculaire OP en suivant la direction AB.



PROBLÈME IV

Par un point donné O, *mener avec l'équerre une parallèle à une ligne droite donnée* MN.

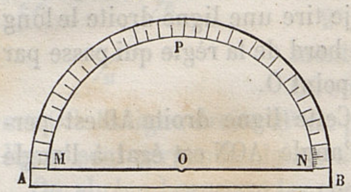
1. J'applique une règle contre le petit côté AC d'une équerre ABC. Je place ensuite le système de ces deux instruments de telle sorte que l'hypoténuse AB de l'équerre coïncide avec la ligne droite MN, et que la distance du point O à la règle soit moindre que BC. Cette position étant trouvée, je fais glisser l'équerre le long de la règle, que je



tiens immobile jusqu'à ce que son hypoténuse AB passe par le point donné O ; puis je tire la ligne droite PQ en suivant ce côté de l'équerre.

Cette ligne qui passe par le point O est parallèle à MN, puisque les angles correspondants QPC, BAC sont égaux (7, V).

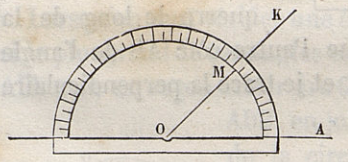
2° Le *rapporteur* est un instrument au moyen duquel on rapporte et l'on fait sur le papier des angles donnés. Il consiste en un demi-cercle MPN qui est de cuivre ou de corne. Son *limbe*, ou bord extérieur, est divisé en 180 degrés et terminé par le diamètre AB, au milieu duquel il y a une petite entaille O appelée *centre du rapporteur*.



PROBLÈME V

Mesurer avec le rapporteur un angle donné AOK.

J'applique le centre du rapporteur sur le sommet O de l'angle AOK, et je dirige son diamètre suivant le côté OA de cet angle. Si l'autre côté OK passe par la trente-quatrième division du limbe, l'angle AOK est de 34 degrés. Lorsque le côté OK rencontre le limbe entre deux divisions, par exemple entre la trente-quatrième et la trente-cinquième, j'estime à la simple vue la distance de OK à la première de ces divisions ; si je l'évalue aux $\frac{3}{4}$ d'une division, je dis que l'angle AOK est de $34^\circ \frac{3}{4}$, ou $34^\circ 45'$.



PROBLÈME VI

Construire, sur une ligne droite OA, *un angle qui ait son sommet en un point donné* O *et soit d'une grandeur donnée.*

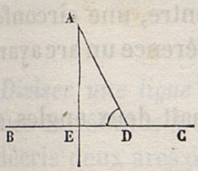
Je place le centre du rapporteur au point O et je dirige son diamètre suivant la ligne droite OA, je marque ensuite la division M, qui correspond à la grandeur de l'angle donné; j'ôte le rapporteur, et je tire la ligne droite OM qui fait avec OA l'angle demandé.

PROBLÈME VII

Par un point donné A, *mener avec le rapporteur une perpendiculaire sur la ligne droite donnée* BC.

1. Si le point A est l'un des points de la ligne droite BC, je fais en ce point, sur BC, un angle de 90 degrés, avec le rapporteur. Le second côté de cet angle est évidemment la perpendiculaire demandée.

2. Lorsque le point A est situé hors de la ligne droite BC, je le joins à un point quelconque D de BC par la ligne droite AD; je mesure ensuite l'angle aigu ADB, et je fais sur la droite AD l'angle DAE égal au complément de ADB.

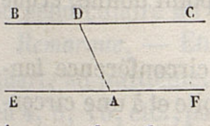


La ligne droite AE est perpendiculaire à BC; car le troisième angle AED du triangle ADE est droit (9, III).

PROBLÈME VIII

Par un point donné A, *mener avec le rapporteur une parallèle à une ligne droite donnée* BC.

Je joins le point A à un point quelconque D de BC par la ligne droite AD, et je mesure l'angle aigu ADC; je fais ensuite sur AD l'angle DAE égal à ADC. La ligne droite AE est parallèle à BC; car ces lignes font avec la sécante AD deux angles alternes-internes égaux ADC, DAE (7, V).



PROBLÈMES.

1. Construire un parallélogramme dont on connait un angle et les deux côtés adjacents.

2. Construire un rectangle dont on connaît deux côtés consécutifs.

3. Étant données les diagonales d'un losange, construire ce quadrilatère.

4. Construire un trapèze dont les quatre côtés sont donnés. (On appelle *trapèze* tout quadrilatère qui a deux côtés parallèles).

5. Deux lignes droites parallèles et un point étant donnés, mener par le point une sécante telle que la portion de cette ligne comprise entre les deux parallèles soit d'une longueur donnée.

6. Construire un triangle dans lequel on donne la base, la hauteur et la ligne droite qui joint le milieu de la base au sommet opposé.

7. Tracer entre deux circonférences une ligne droite qui ait une longueur donnée et soit parallèle à une direction aussi donnée.

8. Décrire, d'un point donné comme centre, une circonférence qui intercepte sur une autre circonférence un arc ayant une corde de longueur donnée.

9. Construire un triangle dont on connaît deux angles et l'une des trois hauteurs.

10. Construire un trapèze dont les diagonales et les côtés parallèles sont donnés.

11. Construire un triangle dont on connaît deux côtés et l'une des hauteurs.

12. Construire un triangle dans lequel on donne un côté un angle et une hauteur.

13. Inscrire dans un cercle un angle de grandeur donnée, de manière que l'un de ses côtés passe par un point donné, et que l'autre soit parallèle à une droite donnée.

14. Décrire avec un rayon donné une circonférence tangente à deux droites données, ou à une droite et à une circonférence données.

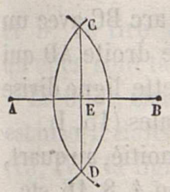
DIX-HUITIÈME ET DIX-NEUVIÈME LEÇON

Programme — Division d'une droite et d'un arc en deux parties égales. — Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés. — D'un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle.— Mener une tangente commune à deux cercles. — Décrire, sur une droite donnée, un segment de cercle capable d'un angle donné

PROBLÈME I

Diviser une ligne droite AB *en deux parties égales.*

Des extrémités A et B de la ligne droite AB, comme centres, je décris deux arcs de cercle avec le même rayon que je prends



plus grand que la moitié de AB. Soient C et D les intersections de ces arcs; je joins ces points par la ligne droite CD qui rencontre la ligne droite AB au point E et la divise en deux parties égales.

En effet, chacun des points C et D étant également éloigné des deux points A et B, la ligne droite CE est perpendiculaire au milieu de AB (6, III).

Remarque. — En appliquant ce procédé à la moitié, au quart, au huitième, etc., de la ligne droite AB, on la divise en 4, 8, 16, etc., parties égales.

PROBLÈME II

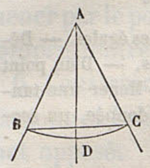
Élever, par le milieu d'une ligne droite, une perpendiculaire sur cette droite.

On résout ce problème par la même construction que le précédent, puisque la ligne droite CD est perpendiculaire au milieu de AB.

PROBLÈME III

Diviser un arc de cercle BC *en deux parties égales.*

J'abaisse du centre A de l'arc BC la perpendiculaire AD sur sa corde; cette droite rencontre l'arc BC au point D et le divise en deux parties égales (12, I).



On peut résoudre ce problème au moyen du rapporteur; mais on abrége alors la construction de la perpendiculaire AD, en mesurant l'angle au centre BAC et faisant sur AB l'angle BAD égal à la moitié de BAC, sans déplacer le rapporteur.

Remarque. — En appliquant ce procédé à la moitié, au quart, au huitième, etc., de l'arc BC, on le divise en 4, 8, 16, etc., parties égales

PROBLÈME IV

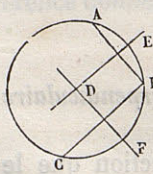
Diviser un angle BAC *en deux parties égales.*

Je décris du sommet A, comme centre, un arc BC avec un rayon quelconque AB; je tire ensuite la ligne droite AD qui divise en deux parties égales l'arc BC (III). Cette ligne divise aussi l'angle au centre BAC en deux parties égales (15, I).

Remarque.—En appliquant ce procédé à la moitié, au quart, au huitième, etc., de l'angle BAC, on le divise en 4, 8, 16, etc., parties égales.

PROBLÈME V

Décrire une circonférence passant par trois points donnés A, B, C, *qui ne sont pas en ligne droite.*

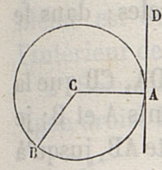


Par les milieux des lignes droites AB, BC, j'élève sur ces lignes les perpendiculaires DE, DF, qui se coupent en un point D, puisque les trois points donnés A, B, C, ne sont pas en ligne droite. Je décris ensuite, du point D comme centre et avec le rayon DA, une circonférence qui passe par les points A, B et C.

En effet, le point D est également distant des points A, B, C, puisqu'il se trouve sur chacune des perpendiculaires DE, DF, menées par les milieux des lignes droites AB, BC (6, III).

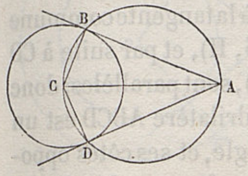
PROBLÈME VI

Mener, par le point A, *une tangente à un cercle donné* CB.



Le point A peut être donné sur la circonférence du cercle ou à l'extérieur; je vais examiner successivement ces deux cas.

1° Si le point A se trouve sur la circonférence, j'élève, par l'extrémité A du rayon CA, la perpendiculaire AD sur ce rayon. La ligne droite AD est évidemment la tangente demandée (13, II).



2° Soit le point A extérieur au cercle; je tire la ligne droite CA, et du milieu de cette ligne comme centre, avec un rayon égal à la moitié de CA, je décris une circonférence qui coupe la circonférence donnée aux points B et D. Je tire ensuite les lignes droites AB, AD, et je dis qu'elles sont tangentes au cercle CB.

En effet, chacun des angles ABC, ADC est droit, parce qu'il est inscrit dans un segment du cercle AC égal à un demi-cercle (15, IV); la ligne droite AB est donc perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB, et la ligne droite AD perpendiculaire à l'extrémité du rayon CD; par suite, AB et AD sont tangentes au cercle CB (13, II).

Corollaire. — *Les tangentes* AB, AD, *menées d'un même point* A *à un cercle* CB *sont égales, et la ligne droite* AC *qui joint ce point au centre du cercle divise en deux parties égales l'angle* BAD *des deux tangentes.*

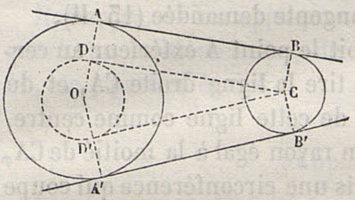
Les triangles rectangles ABC, ADC sont égaux parce qu'ils ont l'hypoténuse AC commune, et les côtés CB, CD, égaux comme rayons du cercle CB (6, V) : donc le côté AB est égal à AD et l'angle BAC égal à DAC.

PROBLÈME VII

Mener une tangente commune à deux cercles donnés.

Les cercles peuvent toucher une même ligne droite du même côté ou des deux côtés de cette ligne. Dans le premier cas, la tangente commune est *extérieure* aux deux cercles; dans le second cas, elle leur est *intérieure.*

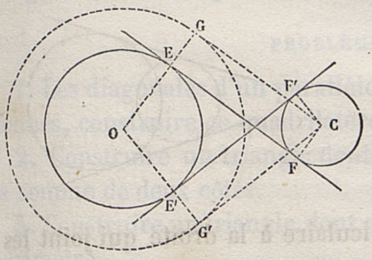
1° Soient O et C les centres des deux cercles OA, CB que la ligne droite AB touche extérieurement aux points A et B; je mène par le centre C la parallèle CD à la tangente AB, jusqu'à la rencontre de OA. Les rayons OA, CB, perpendiculaires à la tangente commune AB (13, II), et par suite à CD (7, III), sont parallèles; donc le quadrilatère ABCD est un rectangle, et ses côtés opposés AD, BC sont égaux (10, I). La circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OD égal à la différence des rayons OA, CB des deux cercles donnés, est par conséquent tangente à la ligne droite CD (13, II).



De là résulte cette construction de la tangente extérieure AB: *je décris un cercle concentrique au cercle* OA, *avec un rayon* OD *égal à la différence des rayons* OA, CB, *et je trace du centre de l'autre cercle* CB *la tangente* CD *au cercle* OD. *Je tire ensuite le rayon* OD *du point de contact; ce rayon, prolongé au delà du point* D, *coupe la circonférence* OA *au point* A, *par lequel je mène une parallèle à la ligne droite* CD. Cette parallèle n'est autre que la tangente AB, puisqu'on ne peut mener du point A qu'une parallèle à CD (7, II).

Lorsque les cercles donnés OA, CB sont extérieurs l'un à l'autre, ou tangents extérieurement, ou bien sécants, la distance OC de leurs centres est plus grande que la différence OD de leurs rayons (14), et le point C est extérieur au cercle OD. On peut donc mener du point C deux tangentes CD, CD′ à ce cercle; par suite, les cercles OA, CB ont deux tangentes AB, A′B′, communes et extérieures. — Si les cercles OA, CB se touchent intérieurement, la distance OC de leurs centres est égale à la différence OD de leurs rayons (14, V), et la circonférence OD passe par le point C. Par conséquent, on ne peut mener de ce point qu'une tangente à la circonférence OD, et les deux cercles OA, CB n'ont qu'une tangente commune qui leur soit extérieure. — Le problème est évidemment impossible si l'un des cercles est à l'intérieur de l'autre.

2° Soient O et C les centres de deux cercles OE, CF, que la ligne droite EF touche intérieurement aux points E et F; je mène par le centre C la parallèle CG à la ligne EF, jusqu'à la rencontre du prolongement de OE. Les rayons OE, CF, perpendiculaires à la tangente commune EF, et par suite à CG, sont parallèles; le quadrilatère EFGC est donc un rectangle, et ses côtés opposés EG, CF sont égaux.



La circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OG égal à la somme des rayons OE, CF des deux cercles donnés, est par conséquent tangente à la ligne droite CG.

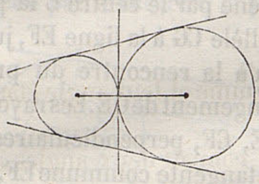
De là résulte cette construction de la tangente intérieure EF : *je décris un cercle concentrique au cercle* OE, *avec un rayon* OG *égal à la somme des rayons* OE, CF *des cercles donnés; et je trace du centre* C *de l'autre cercle* CF *la tangente* CG *au cercle* OG. *Je tire ensuite le rayon* OG *du point de contact; ce rayon coupe la circonférence* OE *au point* E, *par lequel je mène une parallèle à la ligne droite* CG. Cette parallèle n'est autre que la tangente EF, puisqu'on ne peut mener du point E qu'une parallèle à CG.

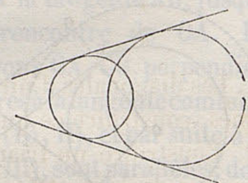
Lorsque les deux cercles donnés OE, CF sont extérieurs l'un à l'autre, la distance OC de leurs centres est plus grande que la somme OG de leurs rayons (14, II), et le point C est extérieur au cercle OG. Par conséquent, on peut mener du point C deux tangentes CG, CG' à ce cercle; les cercles donnés ont donc deux tangentes EF, E'F' communes et intérieures. — Si les cercles

OE, CF sont tangents extérieurement, la circonférence OG passe par le point C, et l'on ne peut mener de ce point qu'une tangente au cercle OG. Dès lors les cercles OE, CF n'ont plus qu'une tangente commune qui soit intérieure. — Pour toute autre position des deux cercles le problème est impossible.

En résumé : 1° On peut mener deux tangentes extérieures et deux tangentes intérieures à deux cercles qui sont extérieurs l'un à l'autre.

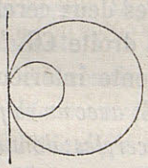
2° Deux cercles qui se touchent extérieurement ont deux tangentes communes extérieures et une seule tangente inté-





rieure, laquelle est perpendiculaire à la droite qui joint les centres des cercles.

3° Si les cercles se coupent, ils n'ont que deux tangentes communes qui sont extérieures.



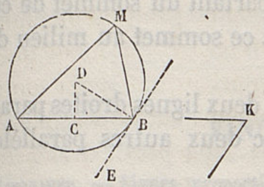
4° Deux cercles qui se touchent intérieurement n'ont qu'une tangente commune ; elle est extérieure aux deux cercles et perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres.

5° Deux cercles intérieurs l'un à l'autre n'ont aucune tangente commune.

PROBLÈME VIII

Décrire, sur une ligne droite AB, *un segment de cercle capable d'un angle donné* K.

Je fais à l'extrémité B de la ligne droite donnée AB l'angle ABE égal à l'angle donné K ; j'élève ensuite la perpendiculaire CD au milieu de AB ; et je mène du point B la perpendiculaire BD sur la ligne droite BE. Les deux lignes CD, BD se coupent au point D (7, V, c.) ; de ce point comme centre, je décris un cercle avec le rayon DB, et je dis que le segment AMB qui ne se trouve pas du même côté de la ligne droite AB que l'angle ABE, est le segment demandé.



En effet, l'angle AMB inscrit dans ce segment a pour mesure la moitié de l'arc AB compris entre ses côtés (15, IV). Or, l'angle donné ABE, dont le côté BE perpendiculaire au rayon BD est tangent au cercle, a aussi pour mesure la moitié du même arc AB (15, IV, c) ; donc l'angle AMB égale l'angle ABE, et le segment AMB est capable de l'angle donné.

PROBLÈMES

1. Les diagonales d'un parallélogramme et leur angle étant donnés, construire ce quadrilatère.

2. Construire un triangle dont on connaît deux angles et la somme de deux côtés.

3. Construire un triangle dont on connaît deux angles et le périmètre.

4. Si l'on inscrit un cercle dans un angle, les deux points de contact divisent la circonférence en deux arcs tels que toute tangente au plus petit de ces arcs forme avec les côtés de l'angle un triangle de périmètre constant.

5. Par un point M, donné dans un angle BAC, mener une sécante telle que le périmètre du triangle formé par cette ligne et les côtés de l'angle ait une longueur donnée.

6. Tracer une sécante commune à deux circonférences, de telle sorte que les cordes interceptées aient des longueurs données.

7. Deux circonférences concentriques étant données, tracer un triangle dont deux angles soient donnés, et qui ait deux sommets sur l'une des circonférences et le troisième sur l'autre.

8. Construire un triangle dans lequel on connaît l'une des trois hauteurs, un angle et sa bissectrice.

9. Construire un triangle dont le périmètre, un angle et la hauteur correspondante sont donnés.

10. Construire un triangle dans lequel on connaît un angle, ainsi que la hauteur et la *médiane* partant du sommet de cet angle, c'est-à-dire la droite qui joint ce sommet au milieu du côté opposé.

11. Mener par deux points donnés deux lignes droites parallèles qui forment un losange avec deux autres parallèles données.

12. Existe-t-il dans le plan de tout triangle un point d'où l'on voit les trois côtés du triangle sous le même angle?

13. Une ligne droite et deux points étant donnés, trouver sur la droite le point d'où l'on voit la distance des deux points sous le plus grand angle possible.

Remplacer, dans l'énoncé du problème précédent, la ligne droite par une circonférence et résoudre le même problème avec cette nouvelle donnée.

14. Décrire une circonférence tangente aux trois côtés d'un triangle. — Ce problème a quatre solutions. L'une des circonférences est intérieure au triangle et les trois autres sont extérieures; aussi on donne à la première le nom de *cironférence inscrite* et à chacune des trois autres celui de *circonférence ex-inscrite*.

Démontrer que la distance de deux quelconques des quatre points dans lesquels un côté est touché par les quatre cercles inscrits et ex-inscrits est égale à l'un des deux autres côtés, ou à la somme de ces côtés, ou bien à leur différence.

15. Construire un triangle dans lequel on connaît deux des rayons des cercles qui touchent son périmètre, l'un de ses côtés, ou la somme de deux côtés, ou bien leur différence.

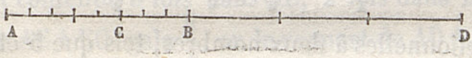
16. Le diamètre du cercle inscrit dans un triangle rectangle est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

VINGTIÈME LEÇON

Programme. — Lignes proportionnelles. — Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. — Réciproque. — Propriétés de la bissectrice de l'angle d'un triangle.

DÉFINITIONS

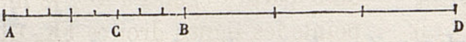
1° On dit qu'*une ligne droite* AB *est divisée par le point* C *en deux parties* AC, CB *proportionnelles à deux nombres donnés* qu'on peut toujours supposer entiers, *tels que* 5 *et* 3, *lorsque le rapport de* AC *à* CB *égale celui de* 5 *à* 3.



Il n'y a qu'une manière de diviser la ligne AB en deux parties AC, CB, qui soient proportionnelles à deux nombre donnés 5 et 3. Car, pour effectuer cette division, il faut partager AB en 5 + 3 ou 8 parties égales, et prendre pour AC les cinq premiers huitièmes à partir de l'extrémité A, et pour CB les trois autres huitièmes, c'est-à-dire le reste de AB.

La recherche du point C revient à *trouver sur la ligne droite* AB *un point dont les distances aux points* A *et* B *soient proportionnelles aux nombres* 5 *et* 3. Sous cet énoncé, la question est susceptible d'une seconde solution ; car, si on divise la distance AB en 5 — 3 ou 2 parties égales, et qu'on prenne sur le prolongement de AB une longueur BD égale à 3 fois l'une de ces parties, la droite AD contient alors 2 + 3 ou 5 fois la même partie, et le rapport des distances DA, DB du point D aux extrémités A, B de la droite BA est égal à celui des deux nombres 5 et 3 ; par conséquent le point D satisfait aussi à l'énoncé du problème.

Il importe de remarquer que le point D se trouve à la droite du point A, parce que le rapport donné est plus grand que l'unité



et qu'il serait à sa gauche, si le rapport était moindre que l'unité. On dit ordinairement que *les deux points* C *et* D *divisent la droite* AB *en segments proportionnels*, et l'on donne à ces points le nom de *points conjugués*.

Les points A et B divisent *réciproquement* la droite CD en segments proportionnels; car de l'égalité

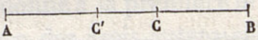
$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB},$$

on déduit évidemment la suivante

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD},$$

qui démontre la réciprocité énoncée.

2° Lorsqu'une droite AB est divisée par un point C en par-



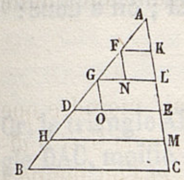
ties proportionnelles à deux nombres, tels que 5 et 3, si l'on prend sur AB une longueur AC′ égale à CB, les distances C′B, AC sont égales entre elles, et le point C′ divise AB en deux parties AC′, C′B, inversement proportionnelles aux nombres 5 et 3; car leur rapport $\frac{AC'}{BC'}$ est l'inverse du rapport $\frac{AC}{BC}$ qui égale $\frac{5}{3}$.

THÉORÈME I

Toute ligne droite, parallèle à l'un des côtés d'un triangle, divise les deux autres côtés en parties proportionnelles.

Je tire la ligne droite DE parallèle au côté BC du triangle ABC; pour démontrer que cette ligne qui rencontre les deux autres côtés AB, AC, aux points D et E, les divise en parties proportionnelles, je suppose le rapport de AD à DB égal à $\frac{3}{2}$ (15, déf. 2). Les lignes droites AD, DB ont par suite une commune mesure

AF, contenue 3 fois dans AD et 2 fois dans BD. Soient F, G, D et H, les points qui divisent le côté AB en 3+2 ou 5 parties égales à AF; je mène par ces points les lignes droites FK, GL, DE, HM, parallèles à BC, et je dis qu'elles divisent aussi le côté AC en 5 parties égales.



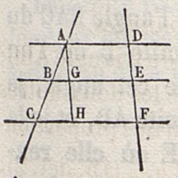
En effet, de l'un des points de division de AB, par exemple du point G, je tire la ligne droite GO parallèle à AC. Les triangles AFK, DGO sont égaux, car leurs côtés AF, GD sont égaux par hypothèse, et leurs angles FAK, DGO le sont comme correspondants, ainsi que les angles AFK, GDO ; par conséquent, les côtés AK, GO de ces triangles sont égaux. Or, le quadrilatère GOEL est un parallélogramme ; donc le côté GO est égal au côté EL qui lui est opposé, et les deux divisions AK, EL de la ligne droite AC sont égales.

Je prouverais de même l'égalité de AK et de toute autre division du côté AC; il en résulte que la longueur AK est une commune mesure des deux lignes droites AE, EC, et qu'elle est contenue 3 fois dans AE, 2 fois dans EC. Donc le rapport de AE à EC égale $\frac{3}{2}$, ou le rapport de AD à DB.

Corollaire I. — Le rapport du côté AB à l'une de ses parties, par exemple AD, est égal au rapport du côté AC à sa partie AE qui correspond à AD.

Car, d'après l'hypothèse précédente, chacun de ces deux rapports est égal à $\frac{5}{3}$.

Corollaire II. — *Plusieurs parallèles* AD, BE, CF, *etc.*, *interceptent des parties proportionnelles sur deux lignes droites* AC, DF, *qu'elles rencontrent.*



Je mène du point A la droite AH parallèle à DF, et je la prolonge jusqu'à la rencontre des lignes BE, CF ; la ligne droite BG, parallèle au côté CH du triangle ACH, divise les deux autres côtés AC, AH, en parties proportionnelles, c'est-à-dire que le rapport de AB à BC égale celui de AG à GH. Or, les lignes droites AG, DE sont égales, parce qu'elles sont opposées l'une à l'autre dans le parallélogramme ADEG, et il en est de même des deux lignes droites GH, EF; on a donc :

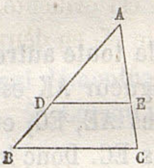
$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

et, par suite,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}.$$

THÉORÈME II

Toute ligne droite DE, *qui divise deux côtés* AB, AC *d'un triangle* ABC *en parties proportionnelles, est parallèle au troisième côté* BC.

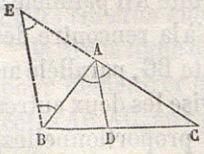


Soient D et E les points où la ligne droite DE rencontre les côtés AB, AC du triangle ABC ; je suppose le rapport de AD à DB égal à celui de AE à EC, et je dis que la ligne droite DE est parallèle au troisième côté BC du triangle.

En effet, la parallèle menée par le point D à la ligne droite BC divise le côté AC en deux parties proportionnelles à AD et DB; donc cette ligne passe par le point E et coïncide avec DE, puisqu'il n'y a qu'une manière de diviser AC, à partir du point A, en deux segments proportionnels à AD et DB.

THÉORÈME III

La bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en deux parties proportionnelles aux côtés adjacents.



Soit AD la bissectrice de l'angle BAC du triangle ABC ; par l'extrémité B de l'un des deux côtés AB, AC de cet angle, je mène une parallèle à la droite AD, et je la prolonge jusqu'au point E où elle rencontre l'autre côté AC.

La droite AD, parallèle au côté BE du triangle BCE, divise les deux autres côtés CB, CE, en parties proportionnelles, c'est-à-dire qu'on a (1) :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}.$$

Or, le triangle ABE est isocèle : en effet, l'angle AEB égale l'angle DAC, moitié de BAC, parce qu'ils sont correspondants par rapport aux parallèles AD, EB ; l'angle ABE égale aussi l'angle DAB, moitié de BAC, parce qu'ils sont alternes-internes par rapport aux mêmes parallèles ; donc les angles AEB, ABE du triangle ABE sont égaux. Par suite, les côtés AB, AE, opposés à ces angles, sont aussi égaux, et l'on a :

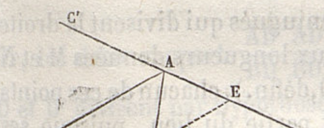
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

Corollaire. — La réciproque de ce théorème est évidente, car il n'y a qu'une manière de diviser la droite BC en deux parties proportionnelles aux côtés adjacents AB, AC.

THÉORÈME IV

La bissectrice d'un angle extérieur à un triangle coupe le côté opposé en un point dont les distances aux extrémités de ce côté sont proportionnelles aux côtés adjacents.

Soit AD la bissectrice de l'angle BAC′ extérieur au triangle BAC ; par l'extrémité B de l'un des côtés AB, AC de cet angle, je mène une parallèle à la droite AD, et je la prolonge jusqu'au point E où elle rencontre l'autre côté AC.



La droite BE, parallèle au côté AD du triangle ACD, divise les deux autres côtés CA, CD en parties proportionnelles, c'est-à-dire qu'on a (1) :

$$\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AE}.$$

Or, le triangle ABE est isocèle : en effet, l'angle ABE égale l'angle DAB, moitié de BAC′, parce qu'ils sont alternes-internes par rapport aux parallèles AD, BE ; l'angle AEB égale aussi l'angle DAC′, moitié de BAC′, parce qu'ils sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles ; donc les angles ABE, AEB du triangle ABE sont égaux. Par suite, les côtés AE, AB, opposés à ces angles, sont aussi égaux, et l'on a

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}.$$

Corollaire. — La réciproque de ce théorème est évidente. En effet, le rapport $\frac{DC}{DB}$ qui est plus grand que l'unité croît ou décroît lorsque le point D se rapproche ou s'éloigne du point B ; par conséquent, il n'existe sur le prolongement du côté CB qu'un point D dont les distances aux points C et B soient proportionnelles aux côtés adjacents AC, AB.

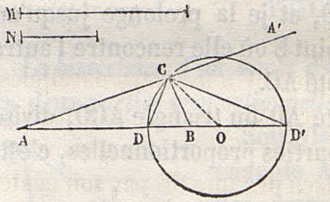
Remarque sur les deux théorèmes précédents.

La bissectrice d'un angle d'un triangle et celle de l'angle extérieur, adjacent, divisent le côté opposé en segments proportionnels.

THÉORÈME V

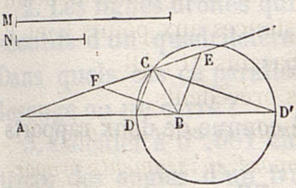
Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points donnés A *et* B *sont proportionnelles à deux longueurs données* M *et* N, *est une circonférence.*

Soient D et D′ les deux points conjugués qui divisent la droite AB en segments proportionnels aux longueurs données M et N (20, défin.) ; chacun de ces points fait partie du lieu, puisque ses distances aux deux extrémités de AB sont dans le rapport de M à N. Cela posé, je considère un point quelconque C du lieu cherché, et je le joins par des lignes droites aux quatre points A, B, D, D′. Les distances CA, CB du point C aux deux points A, B sont proportionnelles par hypothèse aux lignes M et N, ou aux deux segments DA, DB de la droite AB ; par conséquent, la droite CD, qui partage le



côté AB du triangle CAB en deux segments proportionnels aux deux autres côtés CA, CB, divise l'angle ACB en deux parties égales (20, III, c). Comme les distances D'A, D'B sont aussi proportionnelles aux côtés CA, CB, la droite CD' divise pareillement en deux parties égales l'angle extérieur BCA', adjacent à l'angle ACB (20, IV, c). Or, l'angle DCD' est droit, puisqu'il est égal à la moitié de la somme des deux angles adjacents ACB, BCA', formés sur la droite AA' (2, I) ; donc le point C est l'un des points de la circonférence décrite sur la droite DD' comme diamètre (15, IV, c).

Réciproquement, je dis que tout point C de cette circonférence fait partie du lieu demandé.



En effet, je mène par le point B une parallèle à la droite DC, et je la prolonge jusqu'au point E où elle rencontre la droite AC ; j'ai par suite (1) :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CE}.$$

En menant aussi par le point B la parallèle BF à la droite D'C jusqu'à son intersection avec AC, j'ai pareillement

$$\frac{AD'}{BD'} = \frac{AC}{CF}.$$

Or, les deux rapports $\frac{AD}{BD}, \frac{AD'}{BD'}$ sont égaux, puisque les points D et D' divisent par hypothèse la droite AB en segments proportionnels; dont CE est égale à CF.

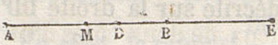
Mais le triangle BEF, dont l'angle EBF a les côtés parallèles à ceux de l'angle droit DCD', est rectangle (6, I) ; et le milieu C de son hypoténuse EF est également distant des trois sommets (15, IV, c. I). Si l'on remplace dès lors CE par son égale BC dans la première des égalités precédentes, on a

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC};$$

ce qui démontre que le rapport des distances AC, BC d'un point quelconque C de la circonférence DD′ aux deux points A, B, est constant. Le point C fait donc partie du lieu demandé, qui n'est autre que la circonférence DD′.

THÉORÈME VI

Si une ligne droite AB *est divisée en segments proportionnels par deux points* D, E, *la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu* M *aux deux points conjugués* D, E; *et réciproquement.*



On a pour hypothèse :

$$\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{BD};$$

il en résulte, d'après une propriété connue de deux rapports égaux, que

$$\frac{AE+BE}{AD+BD}=\frac{AE-BE}{AE-BD}.$$

Or, la somme AE + BE est égale au double de ME, puisque le point M est le milieu de AB; on a pareillement AD + BD égale à 2MB, AE — BE égale à 2MB et AD — BD égale à 2ME; par conséquent, si l'on divise par 2 les deux termes de chaque rapport de l'égalité précédente, on obtient la nouvelle égalité

$$\frac{ME}{MB}=\frac{MB}{MD}$$

qui démontre le théorème énoncé.

Réciproquement : *Si la moitié d'une droite* AB *est moyenne proportionnelle entre les distances du milieu* M *de cette ligne à deux points* D, E *pris sur sa direction, du même côté du point* M, *les points* D, E *divisent la droite* AB *en segments proportionnels.*

Car, en appliquant à l'égalité donnée par l'hypothèse

$$\frac{ME}{MB}=\frac{MB}{MD}$$

la propriété de deux rapports égaux, précédemment employée, on trouve :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BE}{BD};$$

par conséquent, les points D et E divisent AB en segments proportionnels.

PROBLÈMES

1. La ligne droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à la moitié de ce côté.

2. Les lignes droites qui joignent les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère forment un parallélogramme. — Dans quels cas ce parallélogramme est-il un rectangle, un losange ou un carré ?

3. Calculer à $0^m,001$ chacun des segments que les bissectrices des angles d'un triangle déterminent sur ses côtés, égaux respectivement à 12^m, 15^m et 18^m.

4. Quel est le lieu des points d'un plan également éclairés par deux points lumineux situés dans ce plan, si les intensités de leurs lumières à l'unité de distance sont proportionnelles à deux nombres donnés ? (On démontre en physique que *l'intensité de la lumière qui provient d'un point éclairant varie en raison inverse du carré de la distance.*)

VINGT ET UNIÈME ET VINGT-DEUXIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Polygones semblables. — En coupant un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, on détermine un triangle partiel semblable au premier. — Conditions de similitude des triangles. — Décomposition des polygones semblables en triangles semblables. — Rapport des périmètres.

DÉFINITIONS

Deux polygones qui ont le même nombre de côtés sont *semblables*, si leurs angles sont égaux chacun à chacun et si les côtés adjacents aux angles égaux sont proportionnels et disposés dans le même ordre.

On dit que deux points, deux lignes ou deux angles sont *homologues* lorsqu'ils se correspondent dans deux figures semblables. Ainsi, les sommets de deux angles égaux sont des points homologues ; les diagonales déterminées par des sommets homologues sont pareillement des lignes homologues.

On appelle *rapport de similitude* de deux polygones le rapport constant de deux côtés homologues. Lorsque ce rapport est égal à l'unité, les deux polygones sont égaux ; car on peut les faire coïncider par la superposition, puisqu'ils ont toutes leurs parties (côtés et angles) égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre.

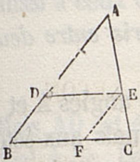
THÉORÈME I

En coupant un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, on détermine un second triangle, semblable au premier.

Soit la ligne droite DE parallèle au côté BC du triangle ABC, je dis que le triangle ADE est semblable au triangle ABC.

En effet, ces triangles ont l'angle A commun ; leurs angles

ABC, ADE sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles BC, DE, et il en est de même des deux angles ACB

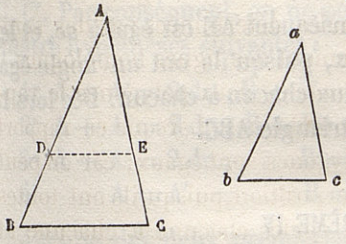


AED. De plus, la ligne droite DE étant parallèle à BC, le rapport de AD à AB égale celui de AE à AC (20, II). Pour démontrer que ce dernier rapport égale celui de DE à BC, je mène du point E la ligne droite EF parallèle au côté AB; cette ligne divise les deux autres côtés AC, BC en segments proportionnels, et le rapport de AE à AC égale le rapport de BF à BC, ou celui de DE à BC, puisque les lignes BF et DE sont égales comme côtés opposés du parallélogramme BDEF. Les triangles ADE, ABC ont donc leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels, c'est-à-dire qu'ils sont semblables.

THÉORÈME II

Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun sont semblables.

Soient ABC, *abc*, deux triangles tels que les angles *a*, *b*, *c*, de l'un égalent respectivement les angles A, B, C, de l'autre ; je dis que ces triangles sont semblables.



En effet, je prends sur AB une longueur AD égale à *ab* et je mène par le point D la droite DE parallèle à BC. Les triangles ADE, ABC sont semblables (I), et leurs angles homologues ADE, ABC sont égaux. Mais l'angle ABC est égal par hypothèse à l'angle *abc*; donc l'angle ADE est aussi égal à l'angle *abc*. Les triangles ADE, *abc*, ont dès lors un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, et sont égaux; il en résulte que le triangle *abc* est semblable au triangle ABC.

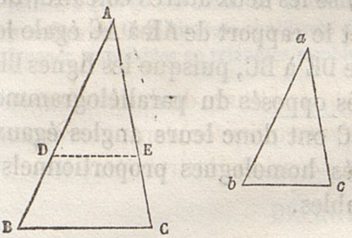
Corollaire. — *Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

Car les troisièmes angles de ces triangles sont égaux (9, III, c).

THÉORÈME III

Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels sont semblables.

Soient ABC, *abc*, deux triangles qui ont les angles A et *a* égaux, et dont les côtés AB, AC sont proportionnels aux côtés *ab*, *ac* ; je dis que ces triangles sont semblables.



En effet, je prends sur AB une longueur AD égale à *ab*, et je mène par le point D la droite DE parallèle à BC. Les triangles ADE, ABC sont semblables (I), et leurs côtés homologues sont proportionnels. Or, les côtés *ab*, *ac* du triangle *abc* sont proportionnels par hypothèse aux côtés AB, AC du triangle ABC ; donc ils sont aussi proportionnels aux côtés AD, AE du triangle ADE, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{ab}{AD} = \frac{ac}{AE}.$$

Mais AD est égal à *ab* ; par conséquent AE est égal à *ac*, et les triangles ADE, *abc* sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Dès lors le triangle *abc* est semblable au triangle ABC.

THÉORÈME IV

Deux triangles qui ont leurs côtés homologues proportionnels sont semblables.

Soient ABC, *abc*, deux triangles qui ont les côtés AB, AC, BC, proportionnels respectivement aux côtés *ab*, *ac*, *bc* ; je dis que ces triangles sont semblables.

Je prends sur AB une longueur AD égale à *ab*, et je mène par le point D la droite DE parallèle à BC. Les triangles ADE, ABC sont semblables (I), et leurs côtés homologues sont proportionnels. Or, les côtés du triangle *abc* sont proportionnels par hypothèse aux côtés du triangle ABC ; donc ils le sont aussi à ceux du triangle ADE, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{ab}{AD}=\frac{ac}{AE}=\frac{bc}{DE}.$$

Mais AD est égal à *ab* ; par conséquent AE est égal à *ac* et DE égal à *bc*. Les triangles ADE, *abc*, qui ont dès lors les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et le triangle *abc* est semblable au triangle ABC.

Corollaire. — Les trois cas de similitude de deux triangles, démontrés dans les trois théorèmes qui précèdent, correspondent aux trois cas d'égalité énoncés dans la troisième leçon.

THÉORÈME V

Deux triangles ABC, A′B′C′ *qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun sont semblables.*

Les angles A et A′, ayant leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires (9, I et II) ; il en est de même des angles B, B′, et des angles C, C′. Par conséquent, on ne peut faire sur ces angles que les quatre hypothèses suivantes :

1° $A+A'=2$ dr., $B+B'=2$ dr., $C+C'=2$ dr. ;
2° $A+A'=2$ dr., $B+B'=2$ dr., $C=C'$;
3° $A+A'=2$ dr., $B=B'$, $C=C'$;
4° $A=A'$ $B=B'$, $C=C'$.

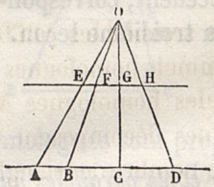
Aucune des deux premières n'est admissible, puisque la somme des six angles des deux triangles ABC, A′B′C′ égale quatre angles droits (9, III). Quant à la troisième hypothèse, elle comprend implicitement que les angles A et A′ sont droits ; car les triangles ABC, A′B′C′ ayant deux angles égaux, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre ; cette hypothèse n'est donc qu'un cas particulier de la quatrième qui seule est vraie. Les triangles ABC, A′B′C′ ont par suite les angles égaux chacun à chacun, et sont semblables (II).

Remarque. Les côtés homologues des triangles semblables ABC, A'B'C' sont parallèles dans le premier cas, et perpendiculaires dans le second.

THÉORÈME VI

Les lignes droites issues d'un même point interceptent des parties proportionnelles sur deux lignes droites parallèles, et réciproquement.

Soient AD et EH deux lignes droites parallèles ; je tire d'un point quelconque O les sécantes OA, OB, OC, OD, et je dis qu'elles interceptent des parties proportionnelles sur AD et EH.



En effet, la ligne droite EF étant parallèle au côté AB du triangle OAB, les triangles OEF, OAB sont semblables (I), et le rapport de EF à AB égale celui de OF à OB. Pareillement, les triangles OFG, OBC sont semblables, et le rapport de FG à BC égale aussi celui de OF à OB. On a dès lors

$$\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC};$$

on prouverait de même que

$$\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD}.$$

Les lignes droites issues du point O divisent donc les parallèles EH, AD en parties proportionnelles.

Réciproquement : *Si les lignes droites* AE, BF, CG, DH *divisent les parallèles* AD, EH *en parties proportionnelles, elles concourent au même point.*

Soit O le point d'intersection de deux de ces droites, par exemple de BF et DH; je tire la droite OG, et je dis que cette ligne prolongée passe par le point C.

Les trois droites OF, OG, OH issues du point O divisent, d'après le théorème précédent, les parallèles FH, BD en parties proportionnelles. La droite OG prolongée passe donc par le point

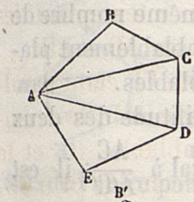
C qui divise par hypothèse la droite BD dans le rapport de FG à GH ; car il n'y a qu'une manière de diviser BD en deux segments proportionnels à FG et GH, à partir de son extrémité B.

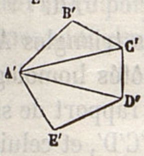
On démontrerait de même que le prolongement de la droite AE passe aussi par le point O.

Remarque. Le point O peut être situé entre les parallèles AD, EH.

THÉORÈME VII

Deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement placés.





Soient les polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E' ; de leurs sommets homologues A, A', je tire les diagonales homologues AC, A'C', AD, A'D'. Ces lignes décomposent les polygones en un même nombre de triangles semblablement placés ; je dis que ces triangles sont semblables deux à deux.

1° Les triangles ABC, A'B'C' ont les angles B, B' égaux par hypothèse et compris entre côtés proportionnels; car il résulte de la similitude des deux polygones que le rapport de AB à A'B' égale celui de BC à B'C' ; ces triangles sont donc semblables (III).

2° Les triangles ACD, A'C'D' sont aussi semblables, parce qu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels. En effet, l'angle ACD est la différence des deux angles BCD, BCA ; or, l'angle BCD égale B'C'D' par hypothèse, et l'angle BCA égale B'C'A', parce qu'ils sont homologues dans les triangles semblables ABC, A'B'C' ; donc l'angle ACD égale la différence des deux angles B'C'D', B'C'A', c'est-à-dire l'angle A'C'D'.

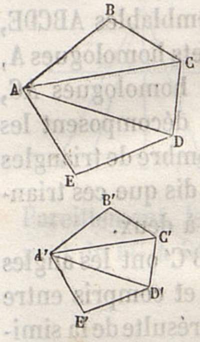
De plus, le rapport de AC à A'C' égale celui de BC à B'C', à cause de la similitude des triangles ABC, A'B'C', et le rapport de BC à B'C' égale par hypothèse celui de CD à C'D' ; donc les côtés AC, A'C' sont proportionnels aux côtés CD, C'D'. Par suite, les triangles ACD, A'C'D' sont semblables (III).

3° On démontrerait de même la similitude des autres triangles. Par conséquent, les polygones ABCDE, A'B'C'D'E' sont décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement placés.

Corollaire. — *Les diagonales homologues de deux polygones semblables sont proportionnelles aux côtés homologues.*

THÉORÈME VIII

Réciproquement : *Deux polygones, composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés, sont semblables.*



Soient les polygones ABCDE, A'B'C'D'E, que je suppose composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés; je dis qu'ils sont semblables.

Car 1° le rapport de similitude des deux triangles ABC, A'B'C' est égal à $\frac{AC}{A'C'}$; il est donc le même que celui des triangles ACD, A'C'D', qui ont aussi pour côtés homologues les diagonales AC, A'C'. Le rapport de similitude des triangles ACD, A'C'D', et celui des triangles ADE, A'D'E', sont aussi égaux, car chacun d'eux est égal à $\frac{AD}{A'D'}$; les polygones ABCDE, A'B'C'D'E' ont, par suite, leurs côtés homologues proportionnels.

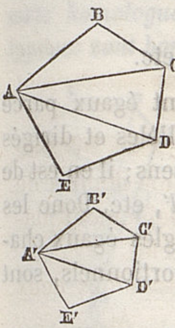
2° Leurs angles sont égaux chacun à chacun, soit comme angles homologues de deux triangles semblables, soit parce qu'ils sont composés d'angles égaux : ainsi les angles B et B' sont égaux comme angles homologues des triangles semblables ABC et A'B'C'; l'angle BCD est égal à la somme des angles BCA, ACD, qui sont respectivement égaux aux angles B'C'A', A'C'D' Or, l'angle B'C'D' est aussi la somme des angles B'C'A', A'C'D'; donc il égale l'angle BCD.

De là je conclus que les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' sont semblables, puisqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels.

THÉORÈME IX

Les périmètres de deux polygones semblables ABCDE, A′B′C′D′E′ *sont proportionnels aux côtés homologues.*

Les polygones étant semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels, c'est-à-dire que les rapports $\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}, \frac{CD}{C'D'}$, etc., sont égaux ; on a aussi, d'après un théorème d'arithmétique relatif à une suite de rapports égaux :

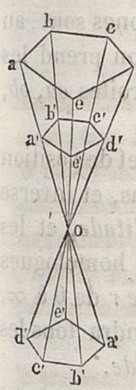


$$\frac{AB + BC + CD + \text{etc.}}{A'B' + B'C' + C'D' + \text{etc.}} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Or, le numérateur AB + BC +, etc., est la somme des côtés du polygone ABCDE, et le dénominateur A′B′ + B′C′ + etc., la somme des côtés de l'autre polygone A′B′C′D′E′; donc les périmètres de ces polygones sont proportionnels aux côtés homologues AB, A′B′.

THÉORÈME X

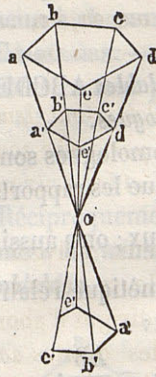
Si l'on joint un point quelconque o *aux sommets d'un polygone* abcde, *et qu'on prenne sur les droites* oa, ob, oc,... *ou sur leurs prolongements, des points* a′, b′, c′,..., *tels que*



$$\frac{oa'}{oa} = \frac{ob'}{ob} = \frac{oc'}{oc} = \ldots = r,$$

r *étant un nombre donné, le polygone* a′b′c′d′e′ *sera semblable au polygone* abcde.

Je suppose d'abord que les points a', b', c'... soient sur les droites oa, ob, oc... les deux triangles oab, $oa'b'$, ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables, et leurs angles homologues oab, $oa'b'$ sont égaux. Or, ces angles sont correspondants par rapport aux deux droites ab, $a'b'$ et à la sécante oa; donc la droite $a'b'$ est parallèle à ab et de même sens; on a par suite



$$\frac{a'b'}{ab}=\frac{oa'}{oa}=r.$$

On démontrerait de même que les droites $b'c'$, $c'd'$, etc., sont respectivement parallèles aux droites bc, cd, etc., et de même sens, et que

$$\frac{b'c'}{bc}=r,\quad \frac{c'd'}{cd}=r, \text{etc.}$$

Les angles abc, $a'b'c'$ sont égaux parce qu'ils ont leurs côtés parallèles et dirigés deux à deux dans le même sens; il en est de même des angles bcd, $b'c'd'$, etc. Donc les polygones $abcde$, $a'b'c'd'e'$, qui ont leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels, sont semblables.

Si les points a', b', c'... étaient sur les prolongements des droites oa, ob, oc,... au delà du point o, on prouverait de même la similitude des deux polygones $abcde$, $a'b'c'd'e'$; mais leurs côtés homologues seraient parallèles et dirigés en sens opposés, au lieu d'être dirigés dans le même sens.

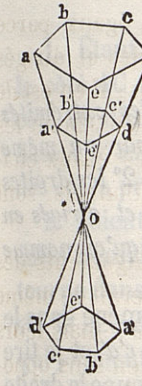
Remarque. Lorsque les points a', b', c'... sont situés sur les droites oa, ob, oc, ..., les polygones $abcde$, $a'b'c'd'e'$ sont dits *semblables et semblablement placés;* ces polygones sont, au contraire, *semblables et inversement placés*, si l'on prend les points a', b', c', ..., sur les prolongements des droites oa, ob, oc, ..., au delà du point o.

M. Chasles a donné à cette similitude de forme et de position le nom d'*homothétie* directe dans le premier cas, et inverse dans le second. Le point o est le *centre de similitude*, et les droites oa, oa' sont les *rayons vecteurs* des points homologues a, a', etc. Si l'on fait varier le *rapport de similitude* r de 0 à ∞, et la position du centre de similitude, on obtiendra tous les polygones homothétiques au polygone donné $abcde$.

Il importe de remarquer que lorsque deux polygones $abcde$, $a'b'c'd'e'$ sont homothétiques inverses, on peut les ramener à être homothétiques directs, en faisant tourner l'un d'eux, par exemple $a'b'c'd'e'$, dans son plan, autour du centre de similitude o, d'un angle de 180°; car les rayons vecteurs oa', ob', oc',.. s'appliquent alors sur les rayons homologues oa, ob, oc, ...

THÉORÈME XI

Réciproquement. — *Si deux polygones semblables ont leurs côtés homologues parallèles, les droites menées par leurs sommets homologues concourent en un même point et les deux polygones sont homothétiques.*



Soient $abcde$, $a'b'c'd'e'$ deux polygones semblables; je suppose que leurs côtés homologues soient parallèles et dirigés d'abord dans le même sens. Je tire les droites aa', bb' qui se rencontrent au point o, et je dis que les droites cc', dd' ...passent par ce point. — Pour le démontrer, je joins successivement le point o aux deux points c, c', et je remarque d'abord que les triangles oab, $oa'b'$ sont semblables à cause du parallélisme des deux droites ab, $a'b'$ (I). Les triangles obc, $ob'c'$ le sont aussi, parce qu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels (III). En effet, l'angle obc est la différence des deux angles abc, abo; or, l'angle abc égale $a'b'c'$ par hypothèse, et l'angle abo égale $a'b'o$, puisqu'ils sont homologues dans les triangles semblables oab, $oa'b'$; donc l'angle obc égale la différence des angles $a'b'c'$, $a'b'o$, c'est-à-dire l'angle $ob'c'$.

De plus, le rapport de bo à $b'o$ égale celui de ab à $a'b'$, à cause de la similitude des deux triangles oab, $oa'b'$, et le rapport de ab à $a'b'$ égale, par hypothèse, celui de bc à $b'c'$; donc les côtés bo, $b'o$ sont proportionnels aux côté bc, $b'c'$; par conséquent, les triangles obc, $ob'c'$ sont semblables et l'angle boc est égal à son homologue $b'oc'$; la droite oc' coïncide donc avec la droite oc, c'est-à-dire que la droite cc' passe par le point o. Je prouverais de même que la droite dd' passe par ce point, etc.

La démonstration serait la même, si les côtés homologues des deux polygones étaient dirigés en sens opposés.

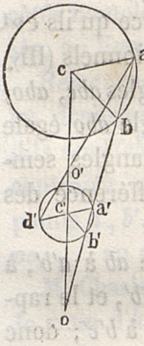
Scolie. Il résulte des deux théorèmes précédents qu'*un polygone est semblable à un polygone donné, lorsqu'il est égal à l'un des polygones homothétiques au polygone donné*. Car ces polygones ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels.

Cette nouvelle définition de la similitude de deux polygones a, sur la définition précédemment donnée, l'avantage d'être applicable à deux figures planes, terminées par des lignes courbes quelconques.

THÉORÈME XII

Dans deux cercles, 1° *les droites qui joignent les extrémités des rayons parallèles et de même sens passent par un même point qu'on appelle* centre de similitude directe ; 2° *les droites qui joignent les extrémités des rayons parallèles et dirigés en sens contraires passent aussi par un même point qu'on nomme* centre de similitude inverse.

1° Soient c et c' les centres des deux cercles, je mène dans le même sens les rayons parallèles ca, $c'a'$ et je tire la droite aa' dont le prolongement coupe la droite cc' au point o. Les triangles oac, $oa'c'$ sont semblables et donnent



$$\frac{oc}{oc'} = \frac{ca}{c'a'}.$$

La position du point o sur la droite cc' ne dépendant que du rapport des rayons ca, $c'a'$ et nullement de leur direction, j'en conclus que les droites, telles que aa', qui joignent les extrémités des rayons parallèles et dirigés dans le même sens, concourent au point o; c'est ce point qu'on appelle *centre de similitude directe* des deux cercles ca, $c'a'$.

2° Je mène en sens contraires les rayons parallèles ca, $c'd'$, et je tire la droite ad' qui rencontre cc' au point o'; de la similitude des triangles $o'ac$, $o'd'c'$, il résulte que

$$\frac{o'c}{o'c'} = \frac{ca}{c'd'}.$$

Par conséquent la position du point o' ne dépend que de rapport des rayons des deux cercles, et les droites qui joignent les extrémités des rayons parallèles et dirigés en sens contraires concourent en ce point qu'on nomme *centre de similitude inverse*.

Remarque. La construction des deux centres de similitud résulte de la démonstration précédente.

PROBLÈMES

1. Étant donné un triangle quelconque ABC, on diminue le côté AC d'une quantité arbitraire AA', et on augmente le côté BC d'une quantité égale BB'. Démontrer que la nouvelle base A'B' est coupée par l'ancienne AB dans le rapport inverse des côtés primitifs AC, BC.

2. Soient ABC, AB'C', deux triangles semblables dont les côtés homologues BC, B'C' sont parallèles, si le triangle AB'C' tourne dans son plan, autour de leur sommet commun A, quel est le lieu décrit par le point d'intersection des deux droites qui joignent les extrémités homologues des côtés BC, B'C'?

3. Étant donnés dans un même plan deux polygones semblables, démontrer qu'il existe dans ce plan un point tel que les lignes droites, menées de ce point à deux sommets homologues quelconques, font un angle constant ; et construire ce point.

4. Inscrire un carré dans un demi-cercle, ou dans un triangle.

5. Inscrire dans un cercle un triangle isocèle dont la somme ou la différence de la base et de la hauteur soit donnée.

6. Les lignes droites menées des sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés concourent en un même point qui divise chacune de ces lignes dans le rapport de 2 à 1, à partir de chaque sommet.

7. Si trois lignes droites passent par un même point, le rapport des distances d'un point quelconque de l'une aux deux autres est constant.

Déduire de ce théorème le lieu géométrique du point dont les distances à deux lignes droites données sont proportionnelles à des longueurs aussi données.

8. On fait glisser sur deux lignes droites rectangulaires les extrémités de l'hypoténuse d'une équerre; quelle est la ligne décrite par le sommet de l'angle droit?

9. Trouver le lieu géométrique des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous des angles égaux.

10. Si, d'un point donné, on mène des lignes droites aux différents points d'une circonférence, et qu'on divise chacune de ces droites dans le rapport de deux lignes données m et n, quel sera le lieu géométrique des points de division?

11. Si pour construire le quadrilatère ABCD on ne donne que les trois côtés AB, BC, CD, et la diagonale AC, le quadrilatère est indéterminé. 1° Quel est le lieu du quatrième sommet D? 2° Quel est le lieu du milieu de la diagonale BD? 3° Quel est le lieu du milieu de la ligne droite qui joint les milieux des diagonales?

12. Construire, sur deux lignes droites dont la position et la grandeur sont données, deux triangles semblables qui aient un sommet homologue commun.

13. Circonscrire à un triangle le plus grand triangle possible qui soit semblable à un autre triangle donné.

VINGT-TROISIÈME ET VINGT-QUATRIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Relations entre la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, les segments de l'hypoténuse, l'hypoténuse elle-même et les côtés de l'angle droit.

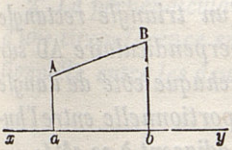
Relation entre le carré du nombre qui exprime la longueur du côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu ou obtus, et les carrés des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.

Si, d'un point pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la direction de la sécante. — Cas où elle devient tangente

---

DÉFINITIONS

1. On appelle *projection* d'un point A sur une ligne droite indéfinie xy le pied a de la perpendiculaire menée du point A sur cette ligne.



Si des extrémités A et C d'une ligne droite AB on abaisse des perpendiculaires sur une ligne droite indéfinie xy, la distance ab des projections de A et B est la *projection de la ligne* AB sur xy.

2. Pour simplifier les énoncés des théorèmes suivants, j'appellerai *produit de deux lignes* le produit des nombres qui expriment les grandeurs de ces lignes, mesurées avec la même unité ; *carré d'une ligne*, la seconde puissance du nombre qui représente la mesure de cette ligne,

3. Lorsque quatre nombres A, B, C et D sont tels que le rapport $\frac{A}{B}$ du premier au second égale le rapport $\frac{C}{D}$ du troisième au quatrième, on dit que le dernier D de ces nombres

est une *quatrième proportionnelle* aux trois autres A, B, C.

Si les deux nombres moyens C et B sont égaux, l'égalité

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

devient

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{D}, \quad \frac{A}{B}=\frac{B}{D}$$

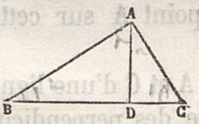
et le quatrième terme D prend le nom de *troisième proportionnelle* aux deux nombres A, B ; dans ce cas, le nombre moyen B est la *moyenne proportionnelle* entre les nombres A et D. Il résulte de l'égalité précédente qu'on a

$$B^2 = A \times D;$$

la moyenne proportionnelle B entre les nombres A et D égale dès lors la racine carrée du produit de ces nombres.

THÉORÈME I

Si du sommet A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse la perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse* BC, 1° *chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et le segment adjacent à ce côté;*



2° *La perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD, DC *de l'hypoténuse.*

1° Le triangle ABD est semblable au triangle ABC, parce qu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun (21, II); en effet, l'un et l'autre sont rectangles, et ils ont l'angle B commun. En comparant les côtés homologues de ces triangles semblables, on trouve :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD};$$

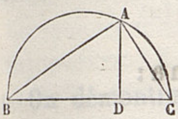
le côté AB de l'angle droit est donc moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse BC et le segment BD qui lui est adjacent.

Les triangles ABC, ADC sont aussi semblables, parce qu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun; la comparaison de leurs côtés homologues prouve que le côté AC est moyenne proportionnelle entre BC et CD.

2° Les triangles ABD, ACD, qui sont semblables au triangle ABC, ont leurs angles homologues égaux, et sont semblables. On a dès lors :

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD},$$

c'est-à-dire que la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments BD, CD de l'hypoténuse.



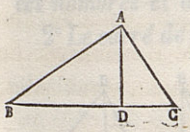
Corollaire. — Si l'on décrit une circonférence sur l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC, comme diamètre, cette courbe passe par le sommet A de l'angle droit BAC (15, IV, c); par suite, le théorème précédent peut être énoncé de la manière suivante :

1° *Toute corde* AB *est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection* BD *sur ce diamètre*;

2° *La perpendiculaire* AD, *abaissée d'un point quelconque* A *d'une circonférence sur un diamètre* BC, *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD, CD *du diamètre*.

THÉORÈME II

Le carré de l'hypoténuse BC *d'un triangle rectangle* ABC *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés* AB, AC.



Soit AD la perpendiculaire abaissée du sommet A de l'angle droit sur l'hypoténuse; comme chaque côté de cet angle est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et le segment qui lui est adjacent (I), on a les égalités:

$$AB^2=BC\times BD,$$

et

$$AC^2=BC\times DC;$$

en les ajoutant membre à membre, on trouve :

$$AB^2 + AC^2 = BC \times (BD + DC),$$

ou

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Le carré de l'hypoténuse du triangle rectangle égale donc la somme des carrés des deux autres côtés.

Remarque. Ce théorème sert à calculer l'un des côtés d'un triangle rectangle dont les deux autres sont donnés.

1° Soient AB égal à 4^m et AC égal à 3^m, on a :

$$BC^2 = 16 + 9 = 25,$$

et, par conséquent,

$$BC = 5^m.$$

2° Si BC est égal à 13^m et AC égal à 5^m, on a :

$$169 = AB^2 + 25.$$

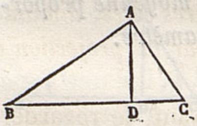
Il en résulte que

$$AB^2 = 169 - 25 = 144;$$

on a par suite,

$$AB = 12^m.$$

COROLLAIRE I. — *Les carrés des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse.*



En effet, si du sommet A de l'angle droit du triangle rectangle ABC, j'abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse, j'ai (I) :

$$AB^2 = BC \times BD,$$

$$AC^2 = BC \times CD,$$

et par suite,

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD}.$$

COROLLAIRE II. — *Les carrés d'un côté de l'angle droit et de l'hypoténuse d'un triangle rectangle sont proportionnels à la projection du côté de l'angle droit sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse.*

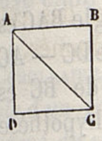
Car, en divisant par BC^2 les deux membres de l'égalité

$$AB^2 = BC \times BD,$$

on trouve

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}.$$

Corollaire III. — *Le rapport de la diagonale AC d'un carré ABCD au côté AB de ce carré est égal à* $\sqrt{2}$.



En effet, le triangle ABC étant rectangle et isocèle, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2,$$

et l'on en déduit

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

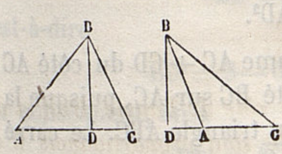
On démontre, dans l'arithmétique, qu'il n'existe aucun nombre entier ou fractionnaire dont la seconde puissance soit égale à 2 ; il en résulte que *la diagonale et le côté du carré sont deux lignes incommensurables entre elles.*

THÉORÈME III

Dans tout triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, diminuée de deux fois le produit d'un de ces côtés par la projection de l'autre sur le premier.

Pour démontrer ce théorème et le suivant, je regarderai comme connues ces propositions d'arithmétique : 1° *Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres et du double de leur produit ;*

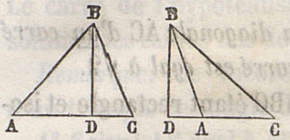
2° *Le carré de la différence de deux nombres est égal à l'excès de la somme de leurs carrés sur le double de leur produit.*



Soit ABC un triangle dans lequel le côté AB est opposé à l'angle aigu C. De l'extrémité B de ce côté j'abaisse la perpendiculaire BD sur le côté opposé AC ; cette ligne se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle, selon que l'angle BAC est aigu ou obtus. Dans les deux cas, le triangle ABD est rectangle et donne (II) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Si l'angle BAC est aigu, la ligne droite AD égale la différence AC — DC du côté AC et de la projection DC de l'autre côté BC sur AC; au contraire, si l'angle BAC est obtus, la ligne AD égale DC — AC, puisque la projection de BC est plus grande que AC. Mais, dans l'une et l'autre hypothèse, le carré de AD égale $\overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,AC \times DC$; on a donc :



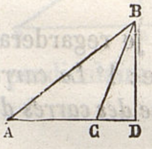
$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,AC \times DC,$$

quelle que soit la grandeur de l'angle BAC. En remarquant que le triangle BCD est rectangle, et remplaçant $\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$ par $\overline{BC}^2$ dans la valeur précédente de $\overline{AB}^2$, on trouve enfin

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \times DC.$$

THÉORÈME IV

Dans tout triangle, le carré d'un côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, augmentée de deux fois le produit d'un de ces côtés par la projection de l'autre sur le premier.



Soit ABC un triangle dans lequel le côté AB est opposé à l'angle obtus ACB; de l'extrémité B de ce côté j'abaisse la perpendiculaire BD sur le côté opposé AC, et, comme le triangle ABD est rectangle, j'en conclus que (II)

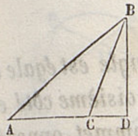
$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Mais la ligne droite AD égale la somme AC + CD du côté AC et de la projection CD de l'autre côté BC sur AC, puisque la perpendiculaire BD se trouve hors du triangle ABC. Le carré de AD égale donc

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,AC \times CD,$$

j'ai par conséquent,

$$AB^2 = BD^2 + AC^2 + CD^2 + 2AC = CD.$$



En remarquant que le triangle BCD est rectangle, et remplaçant $BD^2 + CD^2$ par BC^2 dans la valeur précédente de AB^2, je trouve enfin

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC \times CD.$$

Corollaire. — Il résulte des trois théorèmes précédents qu'*un angle d'un triangle ne peut être aigu, droit ou obtus, sans que le carré du côté opposé soit plus petit que la somme des carrés des deux autres côtés, égal à cette somme, ou plus grand.*

Lorsque les mesures des trois côtés d'un triangle sont données, les théorèmes qui précèdent servent à calculer la projection d'un côté sur l'un des deux autres et, par suite, la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé. Par exemple, soit à calculer la hauteur BD du triangle ABC, dans lequel on a $AB = 4^m$, $BC = 3^m$ et $AC = 2^m$. On remarque d'abord que l'angle ACB opposé à AB est obtus, parce que le carré de AB, ou 16, est plus grand que la somme des carrés de BC et AC, ou $9 + 4$. On a donc l'égalité

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC \times CD,$$

c'est-à-dire

$$16 = 9 + 4 + 4 \times CD;$$

on en conclut :

$$CD = \frac{16 - 13}{4} = 0^m,75.$$

Cela posé, le triangle rectangle BCD donne (II)

$$BD^2 = BC^2 - CD^2,$$

c'est-à-dire

$$BD^2 = 9 - 0,5625 = 8,4375;$$

par conséquent, on a

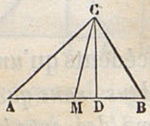
$$BD = \sqrt{8,4375} = 2^m,905$$

à moins d'un demi-millimètre.

THÉORÈME V

La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois la somme des carrés de la moitié du troisième côté et de la droite qui joint le milieu de ce côté au sommet opposé.

Soit M le milieu du côté AB du triangle ABC; la droite CM partage ce triangle en deux autres ACM, BCM dont les angles adjacents AMC, BMC sont supplémentaires. Du sommet C, opposé au côté AB, j'abaisse la perpendiculaire CD sur cette droite, et je fais remarquer que le côté AC du triangle ACM est opposé à l'angle obtus AMC; par conséquent, j'ai l'égalité (IV).



$$AC^2 = AM^2 + CM^2 + 2\,AM \times MD.$$

Le côté BC du triangle BCM étant opposé à l'angle aigu BMC, j'ai aussi l'égalité (III)

$$BC^2 = BM^2 + CM^2 - 2\,BM \times MD.$$

J'ajoute ces égalités membre à membre: comme la droite BM est égale à AM, je trouve, toute réduction faite,

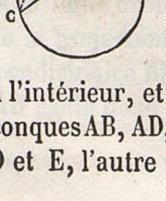
$$AC^2 + BC^2 = 2\,AM^2 + 2\,CM^2;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. Ce théorème sert à calculer la longueur de la droite qui joint le sommet d'un triangle au milieu du côté opposé, lorsqu'on connaît les mesures des trois côtés. On donne ordinairement à cette droite le nom de *médiane* du triangle.

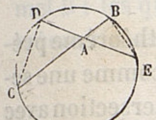
THÉORÈME VI

Si, d'un point A pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux deux intersections de chaque sécante avec la circonférence est constant.



Le point donné A peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle. Je le suppose d'abord à l'intérieur, et je mène de ce point deux lignes droites quelconques AB, AD, qui coupent la circonférence, l'une aux points D et E, l'autre aux points B et C; je tire ensuite les cordes

BE, CD. Les triangles ABE, ACD, sont semblables (21, II); car leurs angles BAE, DAC sont opposés au sommet, et leurs angles ABE, ADC, sont inscrits dans le même segment de cercle CDBE (15, IV). La comparaison des côtés homologues de ces deux triangles semblables conduit à l'égalité suivante :



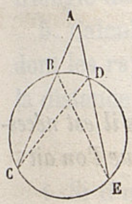
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

il en résulte que

$$AB \times AC = AD \times AE,$$

c'est-à-dire que le produit des distances du point A aux deux points B et C où la droite AB coupe la circonférence est égal au produit des distances du même point A aux deux points d'intersection D, E de la même circonférence et de toute autre sécante AD.

Soit, en second lieu, le point A situé hors du cercle ; je mène les sécantes AC, AE, qui rencontrent la circonférence, l'une aux points D et E, l'autre aux points B et C ; je tire ensuite les cordes BE et CD. Les triangles ABE, ACD sont semblables ; car ils ont l'angle A commun, et leurs angles AEB, ACD sont égaux comme inscrits dans le même segment de cercle BCED (15, IV). En comparant les côtés homologues de ces triangles, j'ai l'égalité



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

et j'en conclus la suivante :

$$AB \times AC = AD \times AE,$$

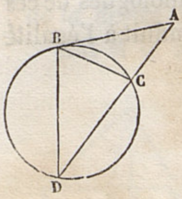
qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. Les segments AB, AC de la sécante AC sont inversement proportionnels aux segments AD, AE de l'autre sécante AE.

THÉORÈME VII

Si d'un point A *situé hors d'un cercle on mène une tangente* AB *à ce cercle et une sécante quelconque* AD, *la tangente est* *moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure* AC.

Ce théorème est une conséquence évidente du théorème précédent, car la tangente AB peut être considérée comme une sécante dont les deux points d'intersection avec la circonférence coïncident. On peut aussi le démontrer directement de la manière suivante : je joins, par les cordes BC et BD, le point de contact B de la tangente aux points C et D où la sécante coupe la circonférence.



Les triangles ABC, ABD, sont semblables, car ils ont l'angle A commun, et leurs angles ABC, ADB sont égaux, puisqu'ils sont mesurés par la moitié du même arc BC compris entre leurs côtés (15, IV) ; il en résulte que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

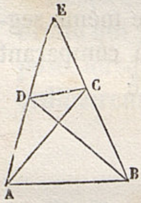
c'est-à-dire que la tangente AB est moyenne proportionnelle entre la sécante AD et sa partie extérieure AC.

THÉORÈME VIII

Lorsque deux lignes droites AD, BC, *prolongées s'il est nécessaire, se coupent en un point* E *tel que l'on ait*

$$AE \times DE = BE \times CE,$$

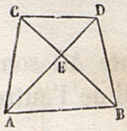
leurs extrémités A, D, B *et* C *sont situées sur la même circonférence.*



En divisant les deux membres de l'égalité

$$AE \times DE = BE \times CE$$

par le produit BE $\times$ DE, on a :



$$\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE},$$

les triangles ACE, BDE, qui ont par suite un angle commun E compris entre côtés proportionnels, sont semblables (21, III), et leurs angles homologues CAE, DBE sont égaux. Dès lors, si l'on décrit sur la ligne droite CD un segment de cercle capable de l'angle CAD, l'arc de ce segment passera par le sommet B ; les quatre points A, B, C, D sont donc situés sur la même circonférence.

PROBLÈMES NUMÉRIQUES

1. Deux cercles dont les rayons ont respectivement $0^m,5$ et $1^m,5$ de longueur, se coupent de telle façon que les tangentes menées par l'un des points d'intersection sont perpendiculaires. On demande la distance de leurs centres.

2. Les rayons de deux cercles concentriques ont 36^m et 20^m de longueur; dans le grand cercle on mène une corde tangente au petit; calculer la longueur de cette corde.

3. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont égaux à 16^m et 24^m. On demande de calculer les projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse et la distance du sommet de cet angle au côté opposé.

4. Calculer les hauteurs, les médianes et les bissectrices du triangle dont les côtés sont égaux à 16^m, 25^m et 39^m.

5. Calculer la longueur de la corde commune à deux cercles dont les rayons ont 12^m et 15^m de longueur, en sachant que la distance de leurs centres est de 18^m.

PROBLÈMES GRAPHIQUES

1. Si d'un point pris dans le plan d'un cercle on tire deux sécantes perpendiculaires l'une à l'autre, la somme des carrés des distances de ce point aux quatre points d'intersection de la circonférence et des sécantes est constante.

2. Le lieu géométrique du point, tel que la somme des carrés de ses distances à deux points fixes soit constante, est une circonférence dont le centre coïncide avec le milieu de la ligne droite qui joint les deux points fixes.

3. La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le produit du troisième côté par la projection de la médiane de ce dernier côté sur sa direction.

Le lieu géométrique du point, tel que la différence des carrés de ses distances à deux points fixes soit constante, est une ligne droite perpendiculaire à celle qui joint les points fixes.

4. Tracer par deux points donnés une circonférence qui divise en deux parties égales une circonférence donnée.

5. Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés et touche une ligne droite donnée.

6. Tracer, par un point donné, une circonférence qui touche deux lignes droites données.

7. Le lieu géométrique du point, tel que les tangentes menées de ce point à deux cercles donnés soient égales, est une perpendiculaire à la ligne droite qui joint les centres. — Ce lieu est connu sous le nom d'*axe radical des deux cercles*.

8. Les axes radicaux de trois cercles considérés deux à deux concourent au même point, qu'on appelle *centre radical des trois cercles*.

9. Tracer, par deux points donnés, un cercle qui touche une ligne droite ou un cercle donné.

10. Quel est le lieu géométrique des centres des cercles qui coupent *orthogonalement*, c'est-à-dire sous un angle droit, deux cercles donnés ?

Tous les cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés ont un même axe radical.

11. Trouver sur la droite qui joint les centres de deux cercles deux points, tels que le produit de leurs distances au centre de chaque cercle soit égal au carré du rayon de ce cercle.

12. Décrire une circonférence qui coupe orthogonalement trois circonférences données.

13. Un point A, une ligne droite et un cercle étant donnés, trouver sur la droite un point B tel que la tangente au cercle, menée par ce point, soit égale à la distance BA.

14. Si, d'un point de l'axe radical de deux cercles, on mène des tangentes à deux autres cercles concentriques aux premiers, la différence des carrés de ces tangentes est constante.

15. Les cercles décrits sur les diagonales d'un trapèze comme diamètres ont une corde commune, qui passe par l'intersection des côtés non parallèles du trapèze.

16. Si un angle droit tourne autour de son sommet, supposé fixe, quel est le lieu géométrique des milieux des cordes des arcs qu'il intercepte sur une circonférence située dans son plan ?

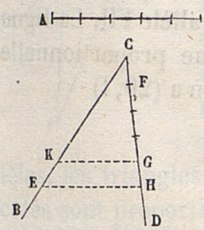
VINGT-CINQUIÈME ET VINGT-SIXIÈME LEÇON

Programme. — Diviser une ligne droite en parties égales ou en parties proportionnelles à des lignes données. — Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes, une moyenne proportionnelle à deux lignes. — Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné.

PROBLÈME I

Diviser une ligne droite en un certain nombre de parties égales.

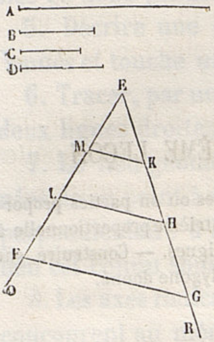
Soit à diviser la ligne droite A en cinq parties égales ; je prends sur le côté BC d'un angle quelconque BCD la longueur CE égale à A, et je porte cinq fois de suite sur l'autre côté CD une longueur arbitraire CF. Soient G le quatrième point de division et H le cinquième ; je tire la droite EH, à laquelle je mène par le point G la parallèle GK.



La droite GK divise les deux côtés CE, CH, du triangle CEH en segments proportionnels (20, I), puisqu'elle est parallèle au troisième côté. Or, le segment GH est, par hypothèse, un cinquième du côté CH ; donc le segment EK est aussi un cinquième du côté CE, ou de la ligne droite A. Pour diviser A en cinq parties égales, il suffit dès lors de porter cinq fois de suite la longueur EK sur cette ligne.

PROBLÈME II

Diviser une ligne droite A *en parties proportionnelles à des longueurs données* B, C, D.

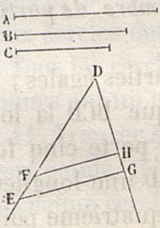


Je prends sur le côté EO d'un angle quelconque OER la longueur EF égale à A, et sur l'autre côté ER les longueurs EK, KH, HG, égales respectivement aux lignes données B, C, D. Je tire ensuite la droite FG, à laquelle je mène les parallèles HL, KM, par les points H et K.

Ces parallèles divisent la ligne droite EF, ou A (20, I, c), en segments proportionnels aux lignes EK, KH et HG, c'est-à-dire aux lignes données B, C et D.

PROBLÈME III

Construire la quatrième proportionnelle à trois lignes droites données A, B, C.



Je prends sur le côté DE d'un angle quelconque EDG les longueurs DE, DF, égales respectivement aux lignes données A, B, et sur l'autre côté la longueur DG égale à C. Je tire ensuite la ligne droite EG, à laquelle je mène par le point F la parallèle FH. La ligne droite DH est la quatrième proportionnelle demandée ; car, FH étant parallèle à EG, on a (20, I)

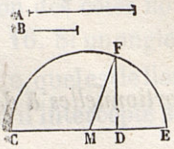
$$\frac{DE}{DF}=\frac{DG}{DH},$$

c'est-à-dire

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{DH}.$$

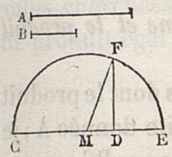
Remarque. Si les lignes B et C étaient égales, DH serait la troisième proportionnelle aux deux lignes A et B.

PROBLÈME IV



Construire la moyenne proportionnelle entre deux lignes données A et B.

Je prends, sur une droite indéfinie, les longueurs CD, DE, égales respectivement aux lignes données A et B ; je décris ensuite une demi-circonférence sur CE comme diamètre, j'élève par le point D une perpendiculaire sur CF, et je la prolonge jusqu'au point F où elle rencontre la circonférence.

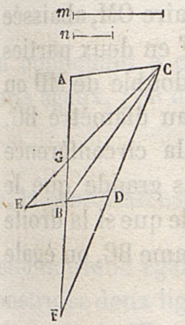


Cette perpendiculaire est la ligne demandée, car elle est moyenne proportionnelle (23, I, c) entre les deux segments CD, DE, du diamètre CE, c'est-à-dire entre les deux lignes données A et B.

Remarque. La moyenne proportionnelle DF entre deux lignes inégales CD, DE est moindre que leur demi-somme MF.

PROBLÈME V.

Construire les deux points conjugués qui divisent une ligne droite AB *en segments proportionnels à deux longueurs données* m *et* n.



Je mène par l'extrémité A de AB une droite quelconque AC égale à m, et par l'autre extrémité B une parallèle à AC, sur laquelle je prends de chaque côté du point B les longueurs BD, BE, égales à n. Je tire ensuite les droites CD, CE, qui rencontrent AB aux points F, G, et la divisent en segments proportionnels aux lignes m et n.

En effet, les droites AC, EB, étant parallèles, les triangles ACG, BEG sont semblables (21, II) et leurs côtés sont proportionnels, de sorte que :

$$\frac{GA}{GB}=\frac{AC}{BE}.$$

Comme les triangles ACF, BDF sont aussi semblables pour la même raison, on a

$$\frac{FA}{FB}=\frac{AC}{BD},$$

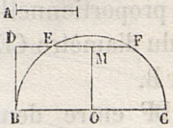
et, par suite, à cause de l'égalité des lignes BD, BE :

$$\frac{GA}{GB}=\frac{FA}{FB}=\frac{m}{n}.$$

PROBLÈME VI

Construire deux lignes droites dont la somme et le produit soient donnés.

Soit BC la somme des deux lignes demandées dont le produit égale le carré de la ligne droite donnée A ; je décris une demi-circonférence sur BC comme diamètre, j'élève par le point B la perpendiculaire BD sur ce diamètre et je prends sur cette ligne une longueur BD égale à A. Je mène ensuite par le point D et parallèlement à BC la droite DE qui coupe la circonférence aux deux points E et F.



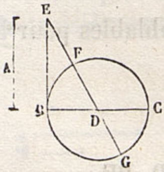
La sécante DF et sa partie extérieure DE sont les deux lignes cherchées : en effet, leur produit égale le carré de la tangente BD, ou A^2 (23, I, c), et pour démontrer que leur somme égale BC, il suffit de remarquer que la perpendiculaire OM, abaissée du centre O sur la sécante, divise la corde EF en deux parties égales ; car la somme DE + DF est égale au double de MD ou du rayon OB, c'est-à-dire qu'elle est égale au diamètre BC.

Remarque. La droite DE ne rencontre la circonférence qu'autant que la longueur BD n'est pas plus grande que le rayon. Le problème proposé n'est donc possible que si la droite donnée A est moindre que la moitié de la somme BC, ou égale au plus à cette moitié.

PROBLÈME VII

Construire deux lignes droites dont la différence et le produit soient donnés.

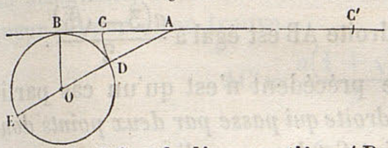
Soit BC la différence des deux lignes droites demandées dont le produit égale le carré de la ligne donnée A : je décris une circonférence sur BC comme diamètre, j'élève par le point B la perpendiculaire BE sur ce diamètre, et je prends sur cette ligne une longueur BE égale à A. Je tire ensuite la sécante EG par le point E et le centre D de la circonférence.



Cette sécante et sa partie extérieure EF sont les deux lignes droites cherchées ; car leur différence FG est égale à BC, et leur produit égal à BE^2, ou à A^2 (23, VII).

PROBLÈME VIII

Diviser une ligne droite AB *en moyenne et extrême raison,*



c'est-à-dire en deux parties AC, BC, telles que la plus grande AC soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie BC et la ligne entière AB.

Je suppose le problème résolu : soit C le point demandé ; j'ai dès lors

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}.$$

En appliquant à cette égalité une propriété connue des rapports égaux, j'en déduis

$$\frac{AB+AC}{AC+BC}=\frac{AB}{AC};$$

or, la droite AB est égale à la somme des lignes AC, BC, donc

$$(AB+AC)\,AC=AB^2.$$

Cette nouvelle égalité montre que pour avoir le point C, il faut construire deux lignes droites $AB+AC$, AC, dont la différence soit égale à AB et le produit égal à AB^2 ; puis prendre sur AB, à partir du point A, une longueur égale à la plus petite de ces deux lignes. De là résulte cette construction :

J'élève par le point B, sur la droite AB, la perpendiculaire BO égale à la moitié de AB ; je décris, du point O comme centre, une circonférence de cercle avec le rayon OB, et je tire la sécante AE par le point A et le centre du cercle. La sécante entière AE et sa partie extérieure AD sont les deux lignes dont la différence est égale à AB et le produit égal à AB^2 (20, VII). En prenant dès lors sur AB une longueur AC égale à la ligne AD, j'aurai le point C qui divise AB en moyenne et extrême raison.

Corollaire. — Si je désigne par *a* la longueur de la droite AB, j'ai dans le triangle rectangle AOB :

$$AO^2 = AB^2 + BO^2,$$

ou

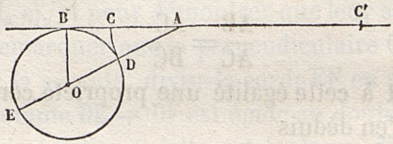
$$AO^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$

Or, AC est égale à AO — BO, donc

$$AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2};$$

l'autre segment BC de la droite AB est égal à $\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$.

Remarque. Le problème précédent n'est qu'un cas particulier de celui-ci : *Sur la droite qui passe par deux points donnés* A *et* B, *trouver un point* C *tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la ligne* AB.



Le point C, donné par la construction précédente, satisfait évidemment aux conditions de ce nouvel énoncé ; mais il existe sur l'un des prolongements de la droite AB un autre point jouissant de la même propriété. Ce point n'est pas à la gauche du point B, puisque sa distance au point A ne peut être à la fois plus grande que sa distance au point B et que la longueur AB ; il faut donc le chercher à la droite du point A. Soit C′ sa position ; on a dès lors

$$\frac{BC'}{AC'} = \frac{AC'}{AB}$$

et, par suite,

$$\frac{BC' - AC'}{AC' - AB} = \frac{AC'}{AB}.$$

Or, la droite AB est égale à la différence des deux lignes BC′ et AC′, donc

$$(AC' - AB)\,AC' = AB^2.$$

Cette égalité montre que pour avoir le point C′, il faut construire, comme dans le problème précédent, deux lignes droites AC′ — AB, AC′, dont la différence soit égale à AB, et le produit égal à AB^2, puis prendre sur AB, à la droite du point A, une longueur égale à la plus grande de ces deux lignes, c'est-à-dire égale à la sécante AE.

Le nouveau problème a donc deux solutions qu'on obtient par la même construction, puisque la différence des deux inconnues AC′ et AC est égale à AB et leur produit égal à AB^2. En désignant, comme dans le corollaire précédent, la longueur AB par a, on trouve

$$AC' = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

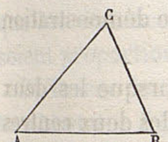
et

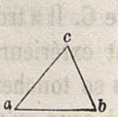
$$BC' = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2}.$$

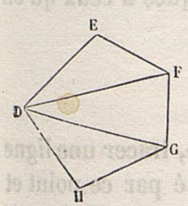
Les expressions des segments AC, BC, AC′, BC′ sont utiles à connaître, parce qu'on les trouve souvent dans la résolution des problèmes.

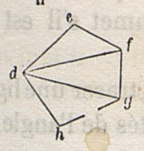
PROBLÈME IX

Construire sur une ligne droite donnée un triangle ou un polygone semblable à un triangle ou à un polygone donné.









1° Pour construire sur la ligne droite ab un triangle semblable au triangle ABC, je suppose ab homologue au côté AB, et je fais l'angle bac égal à BAC, l'angle abc égal à ABC. Le triangle abc est semblable au triangle ABC (21, II), puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

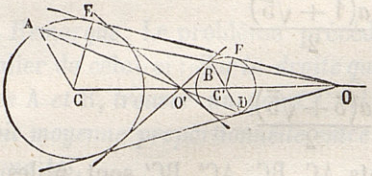
2° Soit à construire sur la ligne droite de un polygone semblable au polygone DEFGH ; je suppose cette ligne homologue au côté DE, et je décompose en triangles le polygone DEFGH, en menant du sommet D les diagonales DF, DG. Je fais ensuite sur de le triangle def semblable au triangle DEF, puis sur df le triangle dfg semblable au triangle DFG, et enfin sur dg le triangle dgh semblable au triangle DGH.

Le polygone *defgh* est semblable au polygone DEFGH; car ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés (22, VIII).

PROBLÈME X

Mener une tangente commune à deux cercles.

Déterminez les centres de similitude O, O′ des deux cercles, en divisant la distance de leurs centres en segments proportionnels aux rayons CA, C′B (V); menez ensuite par chacun des points O, O′ les tangentes au cercle C. Ces droites toucheront aussi l'autre cercle C′ : car les points E, E′ dans lesquels l'une de ces droites, par exemple la tangente OE, rencontre les deux circonférences, étant homologues, les rayons CE, C′E′ sont parallèles, et la droite OE, perpendiculaire sur CE par hypothèse, est aussi perpendiculaire sur C′E′ ; les deux cercles C, C′ ont donc la même tangente OE. On ferait la même démonstration pour les autres droites.



Scolie. Ce problème a quatre solutions, lorsque les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, puisque les deux centres de similitude O et O′ sont alors extérieurs au cercle C. Il a trois solutions, lorsque les deux cercles se touchent extérieurement; deux s'ils sont sécants, et une seule s'ils se touchent intérieurement. — Ces résultats sont identiques à ceux qu'on a trouvés précédemment (18, VII).

PROBLÈMES

1. D'un point pris dans le plan d'un angle, tracer une ligne droite qui soit divisée dans un rapport donné par ce point et les côtés de l'angle prolongés au delà du sommet s'il est nécessaire.

2. D'un point pris dans le plan d'un angle, tracer une ligne droite qui soit divisée par ce point et les côtés de l'angle en deux segments dont le produit égale le carré d'une ligne donnée.

3. Inscrire dans un cercle un triangle tel que ses côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent par deux points donnés A, B, et interceptent sur la circonférence un arc dont la corde soit parallèle à la droite AB.

4. De l'extrémité A du diamètre AB d'un cercle, tracer une sécante telle que la somme ou la différence des distances du point A aux deux points dans lesquels cette sécante coupe le cercle et la tangente, menée à l'autre extrémité B du diamètre AB, soit égale à une ligne donnée.

5. Construire un polygone qui soit semblable à un polygone donné, et dont le périmètre ait une longueur donnée.

6. Construire un parallélogramme qui soit semblable à un parallélogramme donné, et dont les côtés coupent une ligne droite donnée en quatre points donnés.

7. Mener, par deux points donnés, deux parallèles formant avec deux parallèles données un parallélogramme dont les côtés soient proportionnels à deux lignes m et n.

8. Tracer sur le plan d'un triangle une ligne droite, telle que les distances des sommets de ce triangle à cette droite soient proportionnelles à des lignes données m, n, p.

9. Tracer deux cercles qui soient tangents l'un à l'autre et touchent une ligne droite en deux points donnés, la somme ou la différence de leurs rayons étant égale à une ligne donnée.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

Programme. — Polygones réguliers. — Tout polygone régulier peut être inscrit et circonscrit à un cercle.— Le rapport des périmètres de deux polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, est le même que celui des rayons des cercles circonscrits*. — Le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.

DÉFINITIONS

1. On appelle *polygone régulier* tout polygone, convexe ou concave, qui a ses côtés égaux et ses angles égaux. Le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

2. Un polygone est *inscrit* dans un cercle lorsque tous ses sommets se trouvent sur la circonférence de ce cercle. Réciproquement, on dit que le cercle est *circonscrit* au polygone.

Un polygone est *circonscrit* à un cercle, lorsque tous ses côtés sont tangents à la circonférence de ce cercle. On dit alors que le cercle est *inscrit* dans le polygone.

3. On appelle *limite* d'une grandeur variable une grandeur fixe, de laquelle la grandeur variable peut approcher indéfiniment sans pouvoir l'égaler.

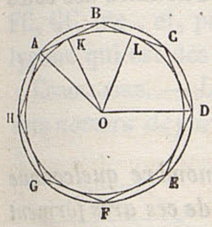
THÉORÈME I

Tout polygone régulier ABCD..... *peut être inscrit dans le cercle et lui être circonscrit.*

* La longueur de la circonférence du cercle sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, à mesure que ses côtés diminuent indéfiniment.

Je dis : 1° que la circonférence tracée par trois sommets consécutifs A, B, C passe par le sommet suivant D.

Par les milieux K et L des côtés AB, BC du polygone, j'élève des perpendiculaires sur AB et BC ; ces perpendiculaires se coupent au point O, qui est le centre de la circonférence déterminée par les trois sommets A, B et C. Pour démontrer que la droite OD est égale au rayon OA de cette circonférence, je superpose les deux quadrilatères OLBA, OLCD, en pliant la figure suivant la droite OL ; comme les angles droits OLB, OLC sont égaux, le côté LC prend la direction de LB, et le point C s'applique sur le point B, puisque L est le milieu du côté BC. Pareillement, les angles LCD, LBA du polygone régulier étant égaux, ainsi que ses côtés CD, BA, la droite CD prend la direction de BA, et le point D se place sur le point A. Or, les droites OD, OA, dont les extrémités coïncident, sont égales ; donc la circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OA, passe par le sommet D.



Je prouverais de même que cette circonférence passe par les autres sommets du polygone ABCD.... ; ce polygone régulier peut donc être inscrit dans un cercle.

2° Les côtés AB, BC, etc., du polygone ABC.... étant des cordes égales du cercle circonscrit, les perpendiculaires OK, OL, etc., abaissées du centre O sur ces cordes, sont aussi égales (13, I) ; la circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OK, passe dès lors par les milieux K, L, etc., des côtés AB, BC, etc., et est tangente à chacune de ces lignes (13, II). Par conséquent, le polygone régulier ABC.... peut être circonscrit à un cercle.

Remarque. Le point O, qui est à la fois le centre des cercles inscrit et circonscrit, se nomme *centre* du polygone régulier.

On désigne sous le nom de *rayon* et d'*apothème* du polygone régulier le rayon du cercle circonscrit et celui du cercle inscrit.

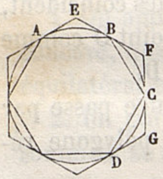
On appelle *angle au centre* du polygone régulier l'angle de deux rayons consécutifs OA, OB. Les angles au centre sont égaux, puisqu'ils interceptent des arcs égaux (15, I) sur la circonférence circonscrite; le rapport de chacun de ces angles à l'ange droit est donc égal à $\left(\frac{4}{n}\right)$, n étant le nombre des côtés du polygone régulier supposé convexe.

THÉORÈME II

Si l'on partage une circonférence en un nombre quelconque d'arcs égaux AB, BC, CD, *etc.*, 1° *les cordes de ces arcs forment un polygone régulier convexe, inscrit dans la circonférence.*

2° *Les tangentes, menées par les points de division, forment aussi un polygone régulier convexe, circonscrit à la circonférence.*

1° Les arcs AB, BC, CD, etc., étant égaux, leurs cordes sont égales (11, III), et le polygone inscrit ABC.. a ses côtés égaux.

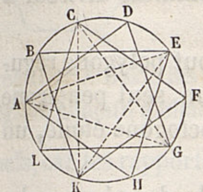


Je dis que ses angles sont égaux aussi : en effet, l'angle inscrit ABC a pour mesure (15, IV) la moitié de la somme des arcs AD, DC, compris entre ses côtés; l'angle inscrit BCD a de même pour mesure la moitié de la somme des arcs BA, AD, compris entre ses côtés. Or, les arcs DC et BA sont égaux ; donc l'angle ABC est égal à l'angle BCD. Je démontrerais pareillement l'égalité des autres angles du polygone inscrit ABCD...., qui est dès lors régulier.

2° Le polygone EFG..., formé par les tangentes menées à la circonférence par les points A, B, C, etc., est aussi régulier. En effet, je remarque d'abord que chacun des triangles EAB, FBC, etc., est isocèle, puisque les tangentes menées à un cercle par un point extérieur sont égales (19, VI); et je dis que ces triangles sont égaux, parce qu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Soient, par exemple, les deux triangles EAB, GCD : leurs côtés AB, CD sont égaux par suite de l'hypothèse ; l'angle EAB, qui a pour mesure la moitié de l'arc AB (15, IV, c), est égal à l'angle GCD mesuré par la moitié de l'arc CD. Il en est de même des angles EBA, GDC; donc les triangles

EAB, GCD sont égaux. De là résultent : 1° l'égalité des angles E, F, G, etc., du polygone ; 2° l'égalité des tangentes EB, FB, FC, GC, etc., et, par suite, celle des côtés EF, FG, etc., du polygone qui est dès lors régulier.

COROLLAIRE. — *Lorsqu'on divise une circonférence en un certain nombre de parties égales* AB, BC, *etc., en dix par exemple, et qu'à partir de* A, *on joint les points de division de* n *en* n *par des lignes droites,* n *étant un nombre entier moindre que la moitié de* 10, *on forme un polygone régulier concave de* 10 *côtés, si* n *est premier avec* 10. *Mais, lorsque les nombres* n *et* 10 *ne sont pas premiers entre eux, et que* d *est leur plus grand commun diviseur, le polygone régulier, ainsi construit, n'a que* $\frac{10}{d}$ *côtés.*

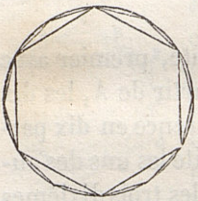


Je suppose d'abord n égal à 3 et, par suite, premier avec 10 ; je joins dès lors, de trois en trois, à partir de A, les dix points A, B, C, D, etc., qui divisent la circonférence en dix parties égales, c'est-à-dire que je prends, à la suite les uns des autres, des arcs égaux à l'arc AD qui représente les trois dixièmes de la circonférence, et je tire les cordes de ces arcs. Comme les deux nombres 3 et 10 sont premiers entre eux, leur plus petit commun multiple est égal à 3×10 ou 30 ; par conséquent la somme de 10 arcs égaux à AD égale 3 fois la longueur de la circonférence, et c'est le plus petit multiple de l'arc AD qui contienne un nombre exact de fois la circonférence. Les cordes de ces 10 arcs forment dès lors une ligne polygonale fermée, puisqu'elle commence au point A et se termine à ce point. Cette ligne a dix côtés et, par suite, dix sommets qui ne sont autres que les dix points de division de la circonférence ; elle forme donc un décagone régulier concave, car ses côtés sont évidemment égaux, ainsi que ses angles, et chacun de ses côtés traverse sa surface.

Je suppose en second lieu n égal à 4, nombre qui n'est pas premier avec 10, c'est-à-dire que je joins de quatre en quatre les dix points de division de la circonférence. Je reviens alors au point de départ A, après avoir tracé les cordes de 5 arcs consécutifs, égaux à l'arc AE qui représente les quatre dixièmes de la circonférence ; car la somme de ces 5 arcs égale 5 fois les $\frac{4}{10}$ de la circonférence ou 2 fois la longueur de cette courbe. Le polygone régulier concave formé de cette manière n'a donc que 5 côtés, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans le quotient du nombre 10 par le plus grand commun diviseur 2 des nombres 10 et 4.

On a donné le nom de *polygone étoilé* à tout polygone régulier concave, à cause de sa forme. Il y a un seul pentagone étoilé, trois heptagones étoilés, un seul octogone étoilé, un seul décagone étoilé, etc.

Remarque. Si l'on inscrit dans un cercle donné un polygone régulier convexe, par exemple un hexagone, et ensuite les polygones réguliers dont le nombre des côtés est de deux en deux fois plus grand, c'est-à-dire les polygones de 12, 24, 48, etc., côtés; les périmètres de ces polygones vont en croissant, tout en restant moindres que la circonférence dans laquelle ils sont inscrits et dont ils s'approchent indéfiniment. Il en est de même de leurs surfaces qui diffèrent de moins en moins du cercle. On exprime ces faits en disant que *la circonférence et le cercle sont les limites vers lesquelles tendent le périmètre et la surface d'un polygone régulier inscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment;* et d'après le programme, *on regarde comme acquise au cercle, ou à sa circonférence, toute propriété démontrée pour la surface ou le périmètre d'un polygone régulier, indépendamment du nombre et de la grandeur de ses côtés.*



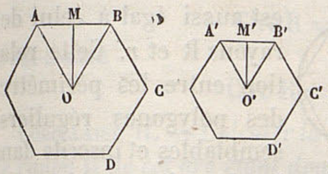
THÉORÈME III

1° *Deux polygones réguliers qui ont le même nombre de côtés sont semblables.*

2° *Le rapport des périmètres de ces polygones est le même que celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

Soient les hexagones réguliers ABC..., A'B'C'..; je dis 1° qu'ils sont semblables.

En effet, la somme des angles de l'hexagone ABC égale 2×4 ou 8 angles droits (9, IV); par suite, chaque angle de ce polygone régulier égale les $\frac{8}{6}$ d'un angle droit. Il en est de même de chacun des angles de l'hexagone



régulier A'B'C'; les polygones ABC, A'B'C' ont donc les angles égaux chacun à chacun. De plus, leurs côtés sont proportionnels, car les rapports $\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}$, etc., sont identiques d'après l'hypothèse; par conséquent, ces polygones sont semblables.

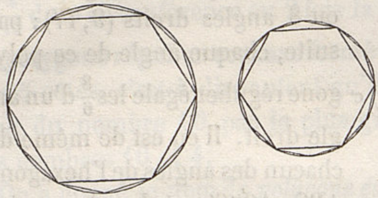
2° Soient O et O' les centres des hexagones ABC, A'B'C'; je tire les rayons OA, OB, O'A', O'B', et les apothèmes OM, O'M'. Ces polygones étant semblables, leurs périmètres sont proportionnels à deux côtés homologues quelconques, par exemple AB, A'B' (21, IX). Or, les triangles isocèles OAB, O'A'B' ont les angles O, O' égaux et compris entre côtés proportionnels; donc ils sont semblables (21, III), et le rapport de AB à A'B' égale celui de OA à O'A'. Les périmètres ABC, A'B'C' sont par suite proportionnels aux rayons OA, O'A'.

Enfin, les triangles rectangles OAM, O'A'M', dont les angles aigus AOM, A'O'M' sont égaux comme moitiés des angles au centre égaux AOB, A'O'B', sont semblables (21, II), et le rapport des rayons OA, O'A' égale celui des apothèmes OM, O'M'. Donc les périmètres ABC, A'B'C' sont aussi proportionnels aux apothèmes OM, O'M'.

THÉORÈME IV

Deux circonférences sont proportionnelles à leurs rayons.

J'inscris, dans deux circonférences dont les rayons sont R et r, deux polygones réguliers ayant le même nombre de côtés, par exemple deux hexagones; le rapport des périmètres de ces polygones est égal à celui de leurs rayons R et r (III). Si j'inscris ensuite les polygones réguliers dont le nombre des côtés est deux fois plus grand, c'est-à-dire les polygones de 12 côtés, le rapport de leurs périmètres est aussi égal à celui des rayons R et r. Cette relation entre les périmètres des polygones réguliers, semblables et inscrits dans les circonférences données,



a donc lieu, quels que soient le nombre et la grandeur de leurs côtés; par conséquent, elle existe aussi pour les limites de ces périmètres, c'est-à-dire que le rapport des deux circonférences R et r est le même que celui de leurs rayons.

Corollaire I. — *Le rapport d'une circonférence à son diamètre est constant.*

Car les circonférences étant proportionnelles à leurs rayons ou à leurs diamètres, le rapport d'une circonférence quelconque R à son diamètre 2R égale celui de toute autre circonférence r à son diamètre $2r$.

Ce rapport constant, qu'on désigne ordinairement par la lettre grecque π, est égal à 3,14159265358979... ; le géomètre *Lambert* a prouvé, en 1761, que ce nombre est irrationnel; mais sa démonstration ne peut être donnée dans ces *Leçons de géométrie élémentaire*. Deux cent cinquante ans avant notre ère, *Archimède* a trouvé, pour la première fois, que π est compris entre les nombres $3\frac{10}{70}$ et $3\frac{10}{71}$; on se sert généralement du plus grand, $3\frac{1}{7}$, qui surpasse π de moins d'un demi-centième. *Adrien Métius*, géomètre du XVI^e siècle, a donné pour valeur approchée du même rapport le nombre $\frac{355}{113}$ qui n'en diffère pas d'un demi-millionième, et qui est remarquable par la manière dont il est formé avec les trois premiers nombres impairs 1, 3 et 5.

Il résulte de ce que le rapport d'une circonférence à son diamètre est constant, que, *pour calculer la longueur d'une circonférence dont le diamètre est donné, il faut multiplier ce* *diamètre par le nombre* π; et réciproquement, *pour calculer la grandeur du diamètre d'une circonférence donnée, il faut diviser cette circonférence par le nombre* π. Ces deux règles sont comprises dans la formule suivante :

$$\text{Circ R} = 2\text{R} \times \pi,$$

c'est-à-dire

$$\text{Circ R} = 2\pi\text{R}.$$

COROLLAIRE II. — *Calculer la longueur* l *d'un arc de* n *degrés, le rayon* R *de cet arc étant donné.*

La circonférence décrite avec le rayon R étant égale à $2\pi\text{R}$, l'arc d'un degré, qui en est la trois-cent-soixantième partie, a pour mesure $\frac{2\pi\text{R}}{360}$ ou $\frac{\pi\text{R}}{180}$; l'arc de n degrés a donc pour mesure n fois $\frac{\pi\text{R}}{180}$, ou $\frac{\pi\text{R}n}{180}$. On a par suite la formule

$$l = \frac{\pi\text{R}n}{180}$$

qui sert à calculer l'une des trois quantités l, R, n, lorsque les deux autres sont données.

THÉORÈME V

Deux arcs semblables, c'est-à-dire deux arcs qui ont le même nombre de degrés dans des circonférences différentes, *sont proportionnels à leurs rayons.*

Soient R, R′ les rayons, et l, l' les longueurs de deux arcs semblables dont le nombre des degrés est n ; on a (IV) :

$$l = \frac{\pi\text{R}n}{180}, \text{ et } l' = \frac{\pi\text{R}'n}{180}.$$

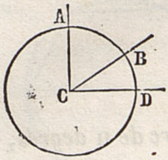
En divisant ces égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{l}{l'} = \frac{\text{R}}{\text{R}'},$$

c'est-à-dire que les arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons.

THÉORÈME VI

Si du sommet d'un angle BCD, *comme centre, on décrit une circonférence avec un rayon quelconque* CB, *et qu'on prenne pour unité l'angle au centre* ACB *qui intercepte un arc* AB *égal au rayon, l'angle* BCD *a pour mesure le rapport de l'arc* BD, *compris entre ses cotés, au rayon* CB.



En effet, on a (15, II)

$$\frac{BCD}{ACB} = \frac{BD}{AB};$$

mais l'arc AB est égal par hypothèse au rayon CB ; par conséquent,

$$\frac{BCD}{ACB} = \frac{BD}{CB}.$$

Cette égalité démontre le théorème énoncé; car le rapport $\frac{BCD}{ACB}$, ou son égal $\frac{BD}{CB}$, exprime la mesure de l'angle BCD, puisqu'on prend l'angle ACB pour unité.

Remarque I. Si on désigne par a la mesure de l'angle BCD évalué au moyen de l'unité précédente, par R le rayon CB et par l la longueur de l'arc BD, ces trois quantités sont liées par la relation

$$l = a\mathrm{R}$$

qui est d'une très-grande utilité dans la *Trigonométrie.*

Remarque II. Pour calculer le nombre de degrés contenus dans l'unité d'angle ACB, il suffit de supposer l égal à R dans la formule connue (IV, c)

$$l = \frac{\pi \mathrm{R} n}{180},$$

et d'en déduire ensuite la valeur de n ; on trouve

$$n = \frac{180}{\pi} = 57°17'44''.$$

PROBLÈMES NUMÉRIQUES

1. Calculer, à moins d'un millimètre, et sans le secours des logarithmes, la circonférence qui a pour rayon la diagonale d'un carré de $0^m,5$ de côté, et faire voir que l'on a obtenu l'approximation demandée.

2. Calculer, à moins d'un kilomètre, le rayon de la circonférence de la terre.

3. Calculer le rayon d'un arc de $25°\ 15'$ dont la longueur est de $8^m,50$.

4. Deux arcs de même longueur ont été décrits avec des rayons de $0^m,25$ et de $0^m,18$. L'un est de $15°\ 20'$; quel est le nombre des degrés de l'autre?

PROBLÈMES GRAPHIQUES

1. Décrire une circonférence égale à la somme, ou à la différence de deux circonférences données.

2. Si deux polygones réguliers semblables sont placés de telle sorte que l'un soit inscrit et l'autre circonscrit au même cercle, la circonférence de ce cercle est moyenne proportionnelle entre la circonférence inscrite dans le premier polygone et la circonférence circonscrite au second.

3. Si on fait rouler un cercle dans un autre cercle de rayon double, de manière qu'ils soient toujours tangents, un point de la circonférence du cercle mobile décrira un diamètre du cercle fixe.

4. Lorsqu'on divise une circonférence en n parties égales par les points A, B, C, etc., et qu'à partir de A on joint ces points de 2 en 2, de 3 en 3..., et, en général de h en h par des lignes droites, on forme un polygone régulier concave de n côtés, si les nombres n et h sont premiers entre eux.

Mais, si ces nombres ne sont pas premiers entre eux, et que d soit leur plus grand diviseur commun, le polygone régulier concave n'a que $\frac{n}{d}$ côtés.

5. Il y a autant de polygones réguliers de n côtés que d'unités dans la moitié du nombre qui exprime combien il existe de nombres entiers moindres que n et premiers avec lui.

6. La somme des angles intérieurs, formés par les côtés consécutifs d'un polygone régulier de n côtés, est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a d'unités dans $n - 2h$, h étant le nombre de fois que l'arc sous-tendu par le côté du polygone contient la $n^{\text{ième}}$ partie de la circonférence circonscrite.

La somme des angles extérieurs, formés par chaque côté et le prolongement du côté précédent, est égale à $4h$ angles droits.

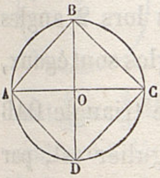
VINGT-HUITIÈME ET VINGT-NEUVIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Inscrire dans un cercle de rayon donné un carré, un hexagone régulier, un décagone régulier. — Manière d'évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre, en calculant les périmètres des polygones réguliers de 4, 8, 16, 32... côtés, inscrits dans un cercle de rayon donné. — Méthode des isopérimètres.

PROBLÈME I

Inscrire un carré dans un cercle donné OA.

Je tire deux diamètres AC, BD, perpendiculaires l'un à l'autre, et je joins leurs extrémités par les cordes AB, BC, CD, DA. Le quadrilatère ABCD est un carré (27, II); car la circonférence OA est divisée en quatre parties égales (15, I) par les quatre angles au centre AOB, BOC, COD, DOA, qui sont égaux comme droits.



Pour calculer le rapport du côté AB au rayon AO, il suffit de remarquer que le triangle ABO est rectangle, et qu'il donne :

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 2AO^2;$$

en effet, il en résulte que

$$\frac{AB}{AO} = \sqrt{2}.$$

Cette égalité montre que le rapport du côté d'un carré au rayon du cercle circonscrit est irrationnel; elle sert à calculer l'une de ces deux lignes, lorsque l'autre est donnée.

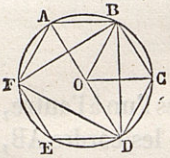
COROLLAIRE. — Si on divise en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés du carré ABCD, les points de division et les sommets du carré partageront la circonférence OA en huit arcs égaux ; on inscrira donc l'octogone régulier convexe en traçant les cordes de ces arcs (27, II.).

Pour inscrire le polygone régulier convexe de 16 côtés, on divisera en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés de l'octogone régulier, et on tracera les cordes des moitiés de ces arcs. En continuant ainsi cette bissection, on obtiendra les polygones réguliers convexes de 32, 64,... côtés.

PROBLÈME II

Inscrire un hexagone régulier, un triangle équilatéral dans un cercle donné OA.

1° Soit AB le côté de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle OA ; je dis qu'il est égal au rayon.



En effet, l'angle AOB du triangle isocèle OAB égale $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'angle droit, puisque c'est l'un des angles au centre de l'hexagone (27, I) ; la somme des deux autres angles A, B de ce triangle égale dès lors 2 angles droits moins $\frac{2}{3}$, ou $\frac{4}{3}$ d'angle droit; mais ces angles sont égaux, donc chacun d'eux vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit, et le triangle OAB est équilatéral ; le côté AB de l'hexagone régulier est, par suite, égal au rayon OA. Pour construire ce polygone, il suffit donc de tirer dans le cercle six cordes consécutives qui soient égales au rayon.

2° On inscrit le triangle équilatéral BDF, en traçant les cordes BD, DF, FB, qui joignent de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier ; car les trois points B, D, F divisent évidemment la circonférence en trois parties égales.

Pour calculer le rapport du côté BD au rayon OA, je tire le diamètre AD; l'angle ABD du triangle BAD étant droit (15, IV, c), j'en conclus successivement :

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AB}^2 = 4\mathrm{AO}^2 - \mathrm{AO}^2,$$

ou

$$\mathrm{BD}^2 = 3\mathrm{AO}^2,$$

et, par suite,

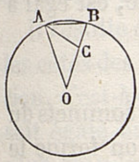
$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AO}} = \sqrt{3}$$

Cette égalité prouve que le rapport du côté du triangle équilatéral au rayon du cercle circonscrit est irrationnel; elle sert à calculer l'une de ces deux lignes, lorsque l'autre est donnée.

COROLLAIRE. — Pour inscrire dans le cercle OA les polygones réguliers convexes de 12, 24, 48, etc., côtés, on divise en 2, 4, 8, etc., parties égales les arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone régulier inscrit, et l'on tire les cordes des nouveaux arcs.

PROBLÈME III

Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné OA.



Soit AB le côté du décagone régulier convexe inscrit dans le cercle OA; je dis qu'il est égal au plus grand segment du rayon, divisé en moyenne et extrême raison.

En effet l'angle AOB du triangle isocèle OAB vaut $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ d'angle droit, puisque c'est l'un des angles au centre du décagone régulier convexe (27, I). La somme des deux autres angles A, B de ce triangle égale dès lors 2 angles droits moins $\frac{2}{5}$, ou $\frac{8}{5}$ d'angle droit; mais ces angles sont égaux, donc chacun d'eux égale $\frac{4}{5}$ d'angle droit, ou le double de l'angle AOB.

Cela posé, je divise l'angle BAO en deux parties égales par la droite AC; cette ligne partage le côté OB du triangle OAB en segments proportionnels aux côtés adjacents (20, I), c'est-à-dire que

$$\frac{AO}{AB}=\frac{OC}{BC}.$$

Or, les angles COA, CAO du triangle OAC sont égaux, puisqu'ils valent chacun $\frac{2}{5}$ d'angle droit; donc les côtés CO, CA, opposés à ces angles, sont égaux. Le triangle ABC a aussi deux angles égaux, car l'angle ACB, extérieur au triangle OAC, égale la somme des deux angles intérieurs AOC, CAO, c'est-à-dire $\frac{4}{5}$ d'angle droit, comme l'angle ABC: le côté AB égale dès lors AC et, par suite, OC. En remplaçant dans l'égalité précédente les deux droites AO, AB par OB et OC qui leur sont respectivement égales, on a

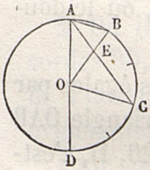
$$\frac{OB}{OC}=\frac{OC}{BC};$$

par conséquent le point C divise le rayon OB en moyenne et extrême raison, et le côté AB du décagone régulier convexe, inscrit dans le cercle OB, est égal au plus grand segment OC de ce rayon.

Remarque. Soit R le rayon du cercle donné, le côté du décagone régulier convexe, inscrit dans ce cercle, est égal à $R\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ (25, VIII).

Corollaire I. — Si l'on joint de trois en trois les sommets du décagone régulier convexe par des lignes droites, on forme le décagone étoilé (27, II. c); je dis que *la différence des côtés des deux décagones réguliers, inscrits dans le même cercle, est égale au rayon, et leur produit égal au carré du rayon.*

En effet, soient AB et AC les côtés du décagone régulier convexe et du décagone étoilé, inscrits dans le cercle OA ; je tire le diamètre AD et les rayons OB, OC. La droite AC divise en deux parties égales l'arc BD, et par suite l'angle BAD, puisque chacun des arcs BC, CD est le double de l'arc AB; il résulte aussi de la démonstration du problème III, que cette droite qui rencontre le rayon OB au point E, le divise en moyenne et extrême raison, et que les lignes OE, AE sont égales à AB. Par conséquent, l'excès du côté AC du décagone étoilé sur le côté AB du décagone convexe est égal à CE. Or, l'angle ACO du triangle isocèle OAC égale l'angle CAO, et par suite l'angle BAC; donc les triangles OCE, ABE ont deux angles égaux chacun à chacun, et sont semblables. Mais le triangle ABE est isocèle, donc le triangle OCE l'est aussi, et la différence CE des côtés des



deux décagones réguliers est égale au rayon OC du cercle circonscrit.

Je remarque ensuite que les triangles isocèles OAC, OAE, qui ont un angle commun OAC, adjacent à leurs bases AC, AO, sont équiangles et semblables ; on a dès lors

$$\frac{AC}{AO}=\frac{AO}{AD}.$$

En remplaçant, dans cette égalité, la ligne AE par AB qui lui est égale, on en déduit

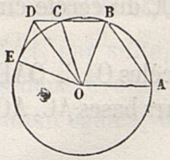
$$AC\times AB=AO^2;$$

ce qui démontre que le produit des côtés AC, AB des deux décagones réguliers est égal au carré du rayon.

Il résulte des deux propriétés précédentes qu'on peut obtenir les côtés des deux décagones réguliers par la même construction, c'est-à-dire en cherchant deux lignes dont la différence soit égale au rayon et le produit égal au carré du rayon. La plus grande de ces deux lignes sera le côté du décagone étoilé, et la plus petite, le côté du décagone convexe. Mais cette construction n'est autre que celle par laquelle on divise le rayon en moyenne et extrême raison : par conséquent, les deux solutions qu'on trouve en généralisant cette dernière question correspondent aux deux manières d'inscrire un décagone régulier dans un cercle. Soit R le rayon de ce cercle, on aura dès lors $R\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ pour l'expression du côté du décagone étoilé.

Corollaire II. — En joignant de deux en deux, par des lignes droites, les sommets du décagone régulier convexe, on inscrit le *pentagone régulier convexe*, puisque chaque côté de ce polygone sous-tend un arc égal à $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$ de la circonférence.

Pour calculer le rapport du côté de ce pentagone au rayon du cercle circonscrit, on se sert du théorème suivant que je vais démontrer : *Le carré du côté du pentagone régulier convexe égale la somme des carrés du côté du décagone régulier convexe et du rayon.*



Soient AB et BC les côtés du pentagone et du décagone réguliers convexes, inscrits dans le cercle OA. L'angle CBO du triangle isocèle OBC vaut $\frac{4}{5}$ d'angle droit d'après ce qui précède ; il égale donc l'angle au centre AOB du pentagone. Or, ces angles sont alternes-internes par rapport aux droites OA, BC ; donc ces lignes sont parallèles.

Cela posé, je trace par le point O une parallèle à la droite AB, et, du point D où elle rencontre la droite BC, je mène la tangente DE au cercle OA. Le quadrilatère ABDO étant un parallélogramme, le côté BD est égal au rayon OA, et le côté OD égal à BA ; je remarque en outre que la tangente DE est égale au côté BB du décagone régulier convexe, puisque chacune de ces lignes est moyenne proportionnelle entre la sécante DB et sa partie extérieure DC. Les trois côtés OD, DE, OE du triangle rectangle ODE sont donc égaux respectivement aux côtés du pentagone et du décagone réguliers convexes, inscrits dans le cercle OA, et au rayon de ce cercle, de sorte qu'on a

$$\mathrm{OD}^2 = \mathrm{OE}^2 + \mathrm{DE}^2.$$

En remplaçant dans cette égalité les lignes OE et DE par leurs valeurs en fonction du rayon, on trouve

$$\mathrm{OD} = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}$$

ou

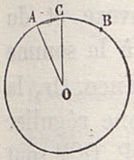
$$\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Corollaire III. — Si l'on joint de deux en deux les sommets du pentagone régulier convexe, on obtient le pentagone étoilé. On démontre, au moyen d'une construction analogue à celle qu'on a faite pour le pentagone convexe, et par un raisonnement semblable, que *le carré du pentagone étoilé est égal à la somme des carrés du côté du décagone étoilé et du rayon*. En désignant dès lors le rayon par R, on a $\sqrt{\frac{\mathrm{R}^2(\sqrt{5}+1)^2}{4} + \mathrm{R}^2}$, ou $\frac{\mathrm{R}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ pour le côté du pentagone étoilé.

Corollaire IV. — Pour inscrire dans le cercle OA les polygones réguliers convexes de 20, 40, 80, etc., côtés, on divise en 2, 4, 8, etc., parties égales, les arcs sous-tendus par les côtés du décagone régulier convexe, inscrit dans ce cercle, et l'on tire les cordes des nouveaux arcs

PROBLÈME IV

Inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle donné OA.

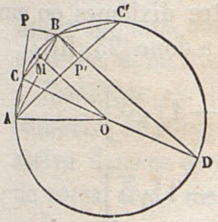


Je prends un arc AB égal au sixième de la circonférence OA, et j'en retranche l'arc BC égal au dixième de cette circonférence, le reste AC en est le quinzième, car la fraction $\frac{1}{6}$ surpasse la fraction $\frac{1}{10}$ de $\frac{2}{30}$, ou $\frac{1}{15}$. Par conséquent, la corde de l'arc AC est le côté du pentédécagone régulier convexe inscrit dans le cercle OA.

Corollaire I. — On peut inscrire trois pentédécagones étoilés, en joignant de 2 en 2, de 4 en 4 et de 7 en 7 les sommets du pentédécagone convexe.

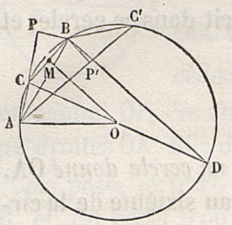
Les deux théorèmes suivants font connaître les longueurs des côtés de ces quatre pentédécagones en fonction du rayon :

1. *Le côté du pentédécagone convexe et celui du deuxième pentédécagone étoilé sont égaux, l'un à la somme et l'autre à la différence de l'apothème du decagene convexe, inscrit dans le même cercle, et de la hauteur du triangle équilatéral construit sur le côté de ce décagone.*



Soit AB un arc sous-tendu par le rayon; je prends de part et d'autre du point B les arcs BC, BC' égaux chacun au dixième de la circonférence, et je tire les cordes AC, AC'. Ces droites sont les côtés du pentédécagone convexe et du deuxième pentédécagone étoilé, car la différence et la somme des deux fractions $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{10}$ égal nt respectivement $\frac{1}{15}$ et $\frac{4}{15}$.

Cela posé, j'abaisse du point B la perpendiculaire BP sur la droite AC et la perpendiculaire BP′ sur la droite AC′. Les triangles rectangles ABP, ABP′ qui ont l'hypoténuse commune et un angle aigu égal sont égaux; donc leurs côtés AP, AP′ sont égaux aussi. Pour la même raison, le triangle BCP est égal au triangle BC′P′, et le côté CP égal au côté C′P′; par conséquent les côtés AC, AC′ du pentédécagone convexe et du deuxième pentédécagone étoilé sont égaux l'un à la somme des deux droites AP, CP et l'autre à leur différence. Or, la droite AP est égale à l'apothème OM du décagone régulier convexe BC, parce que les triangles rectangles ABP, OCM sont égaux; et la droite CP est la hauteur du triangle équilatéral construit sur BC, puisque l'angle BCP du triangle rectangle BCP a pour mesure la moitié de l'arc AB, et qu'il est dès lors égal au tiers d'un angle droit (6, III et 5, I) ; ce qui démontre le théorème énoncé.



Pour exprimer les lignes AC, AC′ en fonction du rayon OA que je désigne par R, je remarque 1° qu'on a dans le triangle rectangle BCP

$$CP = \sqrt{BC^2 - \frac{BC^2}{4}} = \frac{BC.\sqrt{3}}{2};$$

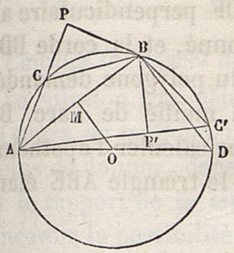
2° que, si l'on tire le diamètre CD et la corde BD, l'apothème OM est parallèle à BD et égal à la moitié de cette droite qui n'est autre que le côté du pentagone étoilé, inscrit dans le cercle OA; car l'arc BD est égal aux quatre dixièmes ou aux deux cinquièmes de la circonférence. On a donc (23, III);

$$AC = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{5}-1)\sqrt{3}\right]$$

et $$AC' = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)\sqrt{3}\right].$$

2° *Les côtés du premier pentédécagone étoilé et du troisième sont égaux l'un à la somme et l'autre à la différence de la hau-*

teur du triangle équilatéral construit sur le côté du décagone étoilé, inscrit dans le même cercle, et de l'apothème de ce décagone.



Soit AB le côté du décagone étoilé, inscrit dans le cercle OA ; je prends à partir du point B les arcs BC, BC′ égaux chacun au sixième de la circonférence, et je tire les cordes AC, AC′. Ces droites sont les côtés du premier pentédécagone étoilé et du troisième, parce que la somme et la différence des deux fractions $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{6}$ égalent respectivement $\frac{7}{15}$ et $\frac{2}{15}$. Cela posé, j'abaisse du point B la perpendiculaire BP sur la droite AC et la perpendiculaire BP′ sur AC′ ; je démontre ensuite, comme dans le cas précédent, que chacune des droites AP, AP′ est la hauteur d'un triangle équilatéral construit sur le côté AB du décagone étoilé, et que les droites CP, C′P′ sont égales à l'apothème OM du même décagone : ce qu'il fallait démontrer.

Pour calculer les expressions des lignes AC, AC′ en fonction du rayon R, il suffit de remarquer que l'apothème OM est la moitié de la corde de l'arc BD, ou du côté du pentagone régulier convexe, inscrit dans le cercle OA ; on a par suite (23, III) :

$$AC = \frac{R}{4}\left[\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

et

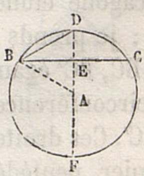
$$AC' = \frac{R}{4}\left[\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right].$$

Corollaire II. — On inscrit les polygones réguliers convexes de 30, 60, 120, etc., côtés, en divisant en 2, 4, 8, etc., parties égales les arcs sous-tendus par les côtés du pentédécagone convexe, et en traçant les cordes des nouveaux arcs.

Remarque sur les quatre problèmes précédents. Pour circonscrire un polygone régulier à un cercle donné, il suffit d'inscrire dans ce cercle un polygone régulier du même nombre de côtés, et de mener des tangentes par ses sommets (27, II).

PROBLÈME V

Le rayon AB *d'un cercle et le côté* BC *d'un polygone régulier* *convexe, inscrit dans ce cercle, étant donnés, calculer le côté du polygone régulier convexe qui a deux fois plus de côtés que le précédent, et est inscrit dans le même cercle.*



Je trace le diamètre DF perpendiculaire au côté BC du polygone donné, et la corde BD; cette corde est le côté du polygone demandé, puisque l'arc BD est la moitié de l'arc BC (12, II). Je commence par calculer l'apothème AE du polygone donné : le triangle ABE étant rectangle, il en résulte que

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2};$$

or, la ligne droite BE est la moitié de la corde BC (12, I), donc le carré de BE égale le quart du carré de BC, et j'ai la formule :

$$AE = \sqrt{AB^2 - \frac{BC^2}{4}}.$$

J'obtiens ensuite le côté BD du polygone demandé, en remarquant qu'il est moyenne proportionnelle entre le diamètre DF et sa projection DE sur ce diamètre (23, I, c). Mais DF est égal à 2AB, et DE égal à AB — AE; par conséquent j'ai la nouvelle formule

$$BD = \sqrt{2AB(AB - AE)},$$

qui fait connaître le côté BD en fonction du rayon donné AB et de l'apothème AE déjà calculé.

Remarque. Pour faciliter l'application des deux formules précédentes, je désigne par R le rayon AB du cercle donné, par c le côté BC du polygone proposé, par d le diamètre du cercle inscrit dans ce polygone ou le double de son apothème AE, et enfin par c' le côté BD du polygone demandé. La formule de laquelle on déduit la valeur de l'apothème AE devient alors:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

ou

$$d = \sqrt{4R^2 - c^2}. \qquad (a)$$

La longueur du côté BD est donnée par l'égalité suivante :

$$c' = \sqrt{R(2R-d)}. \qquad (b)$$

PROBLÈME VI

Calculer le rapport de la circonférence au diamètre.

La solution complète et pratique de ce problème fait partie du cours de mathématiques supérieures ; aussi s'agit-il bien moins de donner, dans cette leçon, une méthode pour calculer le rapport de la circonférence au diamètre que de faire concevoir la possibilité de calculer ce nombre.

Cela posé, je vais chercher la longueur de la circonférence dont le rayon est égal à un mètre. En divisant par 2 le nombre qui exprimera cette longueur, j'aurai la valeur du rapport de la circonférence au diamètre, puisque le diamètre du cercle considéré est égal à 2 mètres. La circonférence étant la limite des polygones réguliers convexes et inscrits, dont le nombre des côtés croît indéfiniment, si je calcule les périmètres des polygones réguliers convexes de 4, 8, 16, etc., côtés, inscrits dans le cercle dont le rayon égale un mètre, ces périmètres différeront de moins en moins de la circonféreuce, et, en prenant la longueur de l'un de ces périmètres pour celle de la circonférence, je commettrai une erreur d'autant moindre que le polygone considéré aura plus de côtés.

Soient donc c, c', c'', c''',.... les côtés des polygones réguliers de 4, 8, 16, 32,.....côtés inscrits dans le cercle dont le rayon égale un mètre, et d, d', d'', d''',..... les diamètres des cercles inscrits dans ces polygones. J'ai $c = \sqrt{2}$ (1) ; et je déduis successivement des formules (a) et (b) du problème V, les valeurs suivantes des quantités c', c'',..... d, d'.... :

$$\begin{array}{ll}
c = \sqrt{2} & d = \sqrt{4-c^2} \\
c' = \sqrt{2-d} & d' = \sqrt{4-c'^2} \\
c'' = \sqrt{2-d'} & d'' = \sqrt{4-c''^2} \\
c''' = \sqrt{2-d''} & d''' = \sqrt{4-c'''^2} \\
\cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

En effectuant ces calculs, je trouve.

$$\begin{array}{ll} c\ = 1,41421356 & d\ = 1,41421356 \\ c^{\text{I}} = 0,76536686 & d^{\text{I}} = 1,84775907 \\ c^{\text{II}} = 0,39018064 & d^{\text{II}} = 1,96157056 \\ c^{\text{III}} = 0,19603428 & d^{\text{III}} = 1,99036945 \\ c^{\text{IV}} = 0,09813535 & d^{\text{IV}} = 1,99759091 \\ c^{\text{V}} = 0,04908246 & d^{\text{V}} = 1,99939764 \\ c^{\text{IV}} = 0,02454308 & d^{\text{VI}} = 1,99984940 \end{array}$$

Par suite, les périmètres de polygones réguliers convexes de 4, 8, 16, 32, 64, 128, et 256 côtés, inscrits dans le cercle dont le rayon égale un mètre, sont :

$$\begin{array}{rl} 4\ c & = 5,65685 \\ 8\ c^{\text{I}} & = 6,12293 \\ 16\ c^{\text{II}} & = 6,24289 \\ 32\ c^{\text{III}} & = 6,27310 \\ 64\ c^{\text{IV}} & = 6,28066 \\ 128\ c^{\text{V}} & = 6,28255 \\ 256\ c^{\text{VI}} & = 6,28303 \end{array}$$

Le calcul précédent ne fait pas connaître l'approximation avec laquelle le périmètre du polygone régulier de 256 côtés auquel je m'arrête, représente la longueur de la circonférence circonscrite. Si je suppose cette circonférence égale à $6^{\text{m}},28303$, le rapport de la circonférence au diamètre sera égal à la moitié de 6,28303, ou à 3,141515. En comparant ce nombre à la valeur connue de π, savoir 3,1415926535...., on voit qu'il n'en diffère pas d'un dix-millième.

Remarque. On peut réduire le calcul précédent à la recherche des diamètres d^{I}, d^{II}, d^{III}, etc, et du côté c^{VI} du polygone auquel on veut s'arrêter. En effet, si on remplace dans la formule

$$d^{\text{I}} = \sqrt{4 - c^{\text{I}\,2}}$$

le côté c^{I} par sa valeur $\sqrt{2 - d}$, on trouve

$$d^{\text{I}} = \sqrt{2 + d};$$

par conséquent, chaque diamètre peut être calculé au moyen du précédent. On a dès lors :

$$d = \sqrt{2}$$

$$d^{\text{I}} = \sqrt{2+d}$$

$$d^{\text{II}} = \sqrt{2+d^{\text{I}}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$d^{\text{V}} = \sqrt{2+d^{\text{IV}}}$$

et enfin, $$c^{\text{VI}} = \sqrt{2-d^{\text{V}}}.$$

Ces dernières formules conduisent à une expression du nombre π. Je remarque, en effet, que le double de l'apothème du polygone régulier de 2^k côtés, inscrit dans le cercle dont le rayon est un mètre, égale $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc.}}}}$, le nombre des radicaux superposés étant $K-1$. Par conséquent, le côté du polygone régulier de 2^{k+1} côtés, inscrit dans le même cercle, égale $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc.}}}}}$, et la moitié de son périmètre a pour expression

$$2^k\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc.}}}}}$$

Si je suppose que le nombre K et, par suite, le nombre 2^{k+1} des côtés de ce dernier polygone croissent indéfiniment, j'aurai

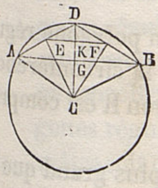
$$\pi = \text{limite}\ 2^k\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc.}}}}}$$

Dans cette formule le nombre des radicaux superposés est égal à K.

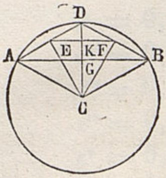
PROBLÈME VII

Étant donnés le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, calculer le rayon et l'apothème d'un polygone régulier de même périmètre et d'un nombre double de côtés.

Soit AB le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle



CA; je désigne par r son rayon CA, et par a son apothème CG que je construis en abaissant du point C le rayon CD perpendiculaire sur la droite AB. Je tire ensuite les cordes AD, BD, et la droite qui joint les milieux E, F de ces cordes. A cause de la similitude des triangles DEF, DAB (21, III), la droite EF est la moitié de AB; et, comme les droites CE, CF divisent respectivement en deux parties égales les angles ACD, BCD, l'angle ECF est aussi la moitié de l'angle au centre ACB du polygone AB. Par conséquent, si je décris un cercle du point C comme centre avec CE ou CF pour rayon, la droite EF sera le côté d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle, de même périmètre que le polygone AB et d'un nombre double de côtés. Je désigne son rayon CE par r', et son apothème CK par a'.



La droite EF, parallèle à AB, divise la droite DG en deux parties égales, puisque le point E est le milieu de AD (20, I); on a, par conséquent,

$$CK = \frac{CD + CG}{2},$$

ou

$$a' = \frac{r + a}{2}.$$

Le triangle CDE étant rectangle, on a aussi

$$CE = \sqrt{CD \cdot CK},$$

ou

$$r' = \sqrt{r \cdot a'}.$$

Remarque. Des deux droites CE, CD, la première est perpendiculaire et la seconde, oblique à la corde AD; par conséquent le rayon r' est plus petit que le rayon r. L'apothème a' est, au contraire, plus grand que l'apothème a, puisque CG n'est qu'une partie de CK.

Corollaire I. — *Le rayon d'un cercle est la limite des rayons et des apothèmes des polygones réguliers dont le périmètre est égal à la circonférence du cercle et dont le nombre des côtés croît indéfiniment.*

Soient CA et CG le rayon et l'apothème d'un polygone régulier quelconque dont le périmètre est égal à la circonférence d'un cercle donné R; je dis d'abord que le rayon R est compris entre CA et CG.

En effet, le périmètre du polygone étant plus grand que la circonférence inscrite dans ce polygone et plus petit que la circonférence circonscrite, on a :

$$2\pi CG < 2\pi R < 2\pi CA,$$

ou

$$CG < R < CA.$$

Cela posé, je double le nombre n des côtés du polygone régulier sans changer la longueur l de son périmètre ou de la circonférence R ; le rayon CA du polygone diminue, tandis que son apothème CG augmente ; par conséquent, leur différence CA — CG décroît. Or, on a dans le triangle CAG :

$$CA - CG < AG,$$

ou

$$CA - CG < \frac{l}{2n},$$

puisque AG est la moitié du côté AB ou de $\frac{l}{n}$; la différence CA — CG tend donc vers zéro, si l'on double indéfiniment le nombre n. Le rayon CA et l'apothème CG, entre lesquels le rayon constant R est toujours compris, tendent dès lors indéfiniment vers ce rayon qui est, par suite, leur limite commune.

Corollaire II. — Le problème précédent conduit à un *calcul du rapport de la circonférence au diamètre* plus rapide et plus simple que celui qui a été indiqué dans le problème VI de cette leçon. Je vais expliquer ce nouveau procédé qu'on appelle *méthode des isopérimètres.*

Soit proposé de calculer le rapport de la circonférence au diamètre à $\frac{1}{10^m}$ près ; je prends une circonférence dont la longueur soit de 4 mètres, et je vais calculer son rayon R. D'après sa définition, le nombre π sera égal à $\frac{4}{2R}$ ou à $\frac{2}{R}$. Comme le rayon R est la limite des rayons et des apothèmes des polygones réguliers convexes, dont le périmètre est égal à la circonférence R et dont le nombre des côtés croît indéfiniment, on conçoit que si je calcule les rayons et les apothèmes des polygones réguliers convexes de 4, 8, 16, 32,... côtés, dont le périmètre soit de 4 mètres, ces rayons et ces apothèmes différeront de moins en moins de R, et, en prenant la longueur de l'un de ces rayons ou de ces apothèmes pour celle de R, je commettrai sur le nombre $\frac{2}{R}$ ou π une erreur d'autant moindre que le polygone régulier, correspondant à ce rayon ou à cet apothème, aura plus de côtés.

Soient donc $r, r', r'', \ldots$ les rayons, et $a, a', a'', \ldots$ les apothèmes des polygones réguliers de 4, 8, 16, ... côtés dont le périmètre est de 4 mètres; on a pour le carré

$$r = \sqrt{2}, \qquad \text{et} \quad a = \frac{1}{2},$$

puisque le côté du carré a 1 mètre de longueur. En appliquant aux polygones réguliers isopérimètres de 8, 16,... côtés, les formules du problème précédent, on trouve successivement :

Pour l'octogone régulier

$$a' = \frac{r + a}{2}, \qquad \text{et} \quad r' = \sqrt{r \cdot a'};$$

Pour le polygone régulier de 16 côtés

$$a'' = \frac{r' + a'}{2}, \qquad \text{et} \quad r'' = \sqrt{r' \cdot a''};$$

et ainsi de suite.

Si l'on s'arrête au polygone régulier isopérimètre de 4×2^{K} côtés, K étant un nombre entier quelconque, le nombre π, ou $\frac{2}{R}$, sera compris entre les nombres $\frac{2}{a_K}$ et $\frac{2}{r_K}$; il faut donc qu'on ait

$$\frac{2}{a_K} - \frac{2}{r_K} < \frac{1}{10^m},$$

et, par suite,

$$r_K - a_K < \frac{a_K r_K}{2 \cdot 10^m}.$$

Comme l'apothème a_K et le rayon r_K sont plus grands chacun que l'apothème $\frac{1}{2}$ du carré, leur produit $a_K r_K$ est plus grand que $\frac{1}{4}$; on satisfera donc à l'inégalité précédente en déterminant r_K et a_K de manière qu'on ait

$$r_K - a_K < \frac{1}{8 \cdot 10^m},$$

et *a fortiori*,

$$r_K - a_K < \frac{1}{10^{m+1}}.$$

Par conséquent, pour avoir le nombre π à $\frac{1}{10^m}$ près, il faut continuer le calcul des rayons et des apothèmes des polygones isopérimètres, jusqu'à ce qu'on trouve un polygone dont le rayon et l'apothème diffèrent d'une quantité moindre que $\frac{1}{10^{m+1}}$, et prendre ce rayon ou cet apothème pour la valeur cherchée du rayon de la circonférence de 4 mètres.

En remarquant que la moyenne arithmétique des nombres 0 et 1 est $\frac{1}{2}$, et que la moyenne géométrique des deux nombres 1 et $\frac{1}{2}$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on déduit des formules précédentes cette règle simple pour calculer le nombre π avec une approximation donnée :

Formez une suite de nombres dont les deux premiers soient 0 *et* 1, *et dont chacun des suivants soit alternativement moyenne arithmétique et moyenne géométrique entre les deux précédents. Continuez ce calcul jusqu'à ce que deux termes consécutifs aient les* m + 1 *premières décimales communes, puis divisez le nombre* 2 *par l'un quelconque de ces deux termes, en calculant* m *chiffres décimaux dans cette division. Le quotient sera la valeur de* π *à* $\frac{1}{10^m}$ *près.*

Voici le tableau des valeurs des rayons et des apothèmes des polygones réguliers de 4, 8, 16, ..., 2048 côtés, pour calculer π à un cent-millième près,

4	$a = 0,500000$	$r = 0,707107$
8	$a_1 = 0,603553$	$r_1 = 0,653281$
16	$a_2 = 0,628417$	$r_2 = 0,640729$
32	$a_3 = 0,632573$	$r_3 = 0,637643$
64	$a_4 = 0,636108$	$r_4 = 0,636875$

La première moitié des chiffres de a_4 et r_4 étant la même, on peut remplacer leur moyenne géométrique par leur moyenne arithmétique qui n'en diffère qu'au delà de la sixième décimale *. En opérant de même pour les termes suivants, on réduit le calcul à prendre des moyennes arithmétiques.

$$
\begin{array}{rlll}
128 & \ldots\ldots\; a_5 = 0{,}636492 & \ldots\ldots\; r_5 = 0{,}636684 \\
256 & \ldots\ldots\; a_6 = 0{,}636588 & \ldots\ldots\; r_6 = 0{,}636636 \\
512 & \ldots\ldots\; a_7 = 0{,}636612 & \ldots\ldots\; r_7 = 0{,}636624 \\
1024 & \ldots\ldots\; a_8 = 0{,}636618 & \ldots\ldots\; r_8 = 0{,}636621 \\
2048 & \ldots\ldots\; a_9 = 0{,}636620 & \ldots\ldots\; r_9 = 0{,}636620
\end{array}
$$

Comme la différence des valeurs de r_9 et de a_9 est moindre qu'un millionième, la valeur de π est

$$\frac{2}{0{,}636620} = 3{,}14159,$$

à un cent-millième près.

PROBLÈMES NUMÉRIQUES

1. Calculer le côté et l'apothème de l'octogone régulier convexe en fonction de son rayon. — Faire une application des deux formules en supposant le rayon égal à $4^{m},50$.

2. Calculer le côté et l'apothème du dodécagone régulier convexe en fonction de son rayon. — Faire une application des deux formules en supposant le rayon égal à $1^{m},50$.

3. Démontrer que le rapport d'une circonférence à son diamètre est compris entre les nombres 3 et 4, par la seule considération des périmètres de l'hexagone régulier inscrit dans cette circonférence et du carré circonscrit.

4. Vérifier que la somme des côtés du carré et du triangle équilatéral, inscrits dans un même cercle, surpasse la moitié de la circonférence de ce cercle d'une quantité moindre qu'un demi-centième du rayon.

5. Si l'on construit un triangle rectangle dont les côtés de

* Voir la démonstration de ce théorème dans la 25e leçon de mes *Leçons nouvelles d'algèbre*.

l'angle droit soient égaux au diamètre d'une circonférence et à l'excès du triple du rayon sur le tiers du côté du triangle équilatéral inscrit, l'hypoténuse de ce triangle rectangle représente, à 0,0001 du rayon, la moitié de cette circonférence.

PROBLÈMES GRAPHIQUES

1. Une circonférence et un point étant donnés, tirer de ce point une sécante qui divise la circonférence en deux arcs proportionnels aux nombres 11 et 13.

2. Le côté du triangle équilatéral circonscrit à un cercle est le double du côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle.

3. L'apothème de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est égal à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

4. Si la distance des centres de deux cercles qui se coupent à angle droit est égale au double de l'un des rayons, la corde commune est le côté de l'hexagone régulier inscrit dans l'un de ces cercles et le côté du triangle équilatéral inscrit dans l'autre.

5. Quel est le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux aux sommets d'un polygone régulier, qui a un nombre pair de côtés, soit constante?

6. Décrire une circonférence telle que le périmètre du carré inscrit dans cette courbe soit égal à celui du triangle équilatéral circonscrit à une circonférence donnée.

7. Construire un losange dont le côté ait une longueur donnée et soit aussi moyenne proportionnelle entre les deux diagonales.

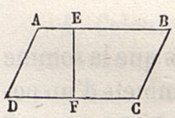
8. Construire un carré dont on connaît la somme, ou la différence de la diagonale et du côté.

TRENTIÈME ET TRENTE ET UNIÈME LEÇON

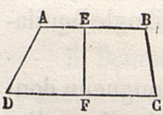
Programme. — De l'aire des polygones et de celle du cercle. — Mesure de l'air du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque. — Méthode de la décomposition en triangles et en trapèzes rectangles.

DÉFINITIONS

1. On prend pour *base* d'un parallélogramme ABCD un côté quelconque DC de ce quadrilatère. La perpendiculaire EF, qui mesure la distance de la base DC au côté opposé AB, a reçu le nom de *hauteur* du parallélogramme.



2. Un *trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles. Tout trapèze ABCD a pour *bases* ses côtés parallèles AB, CD, et pour *hauteur* la perpendiculaire EF qui mesure la distance de ses deux bases.



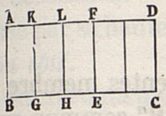
3. On appelle *aire* l'étendue superficielle d'une figure quelconque.

Si deux figures ont des aires égales, sans avoir la même forme, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

THÉORÈME I

Deux rectangles ABCD, ABEF, *de même hauteur* AB, *sont proportionnels à leurs bases* BC, BE.

Je suppose le rapport des bases BC, BE égal à $\frac{5}{3}$ (13, déf. 2); ces lignes ont dès lors une commune mesure BG, contenue

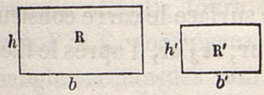


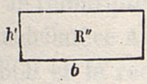
5 fois dans BC et 3 fois dans BE. Par les points G, H, etc., qui divisent BC en 5 parties égales, j'élève des perpendiculaires sur cette droite ; ces perpendiculaires partagent le rectangle ABCD en cinq rectangles ABGK, KGHL, LHEF,... égaux entre eux (10, V, c); car leurs bases BG, GH, HE,...... sont égales par hypothèse, et leurs hauteurs AB, GK, HL,.... le sont aussi, comme parallèles comprises entre parallèles. Or, le rectangle ABEF est formé de trois de ces rectangles partiels; par conséquent, les rectangles ABCD, ABEF ont une commune mesure ABGK qu'ils contiennent autant de fois que leurs bases BC, BE contiennent leur commune mesure BG, et le rapport $\frac{ABCD}{ABEF}$ des surfaces de ces rectangles est égal à $\frac{5}{3}$, ou au rapport $\frac{BC}{BE}$ de leurs bases.

Corollaire. — Deux rectangles de même base sont proportionnels à leurs hauteurs.

THÉOREME II

Deux rectangles quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.





Soient R, R′, deux rectangles, h, h', leurs hauteurs et b, b', leurs bases; je construis un rectangle R″ qui ait la même base b que le premier rectangle, et la même hauteur h' que le second. Les deux rectangles R, R″, ayant la même base b, le rapport de leurs surfaces est égal à celui de leurs hauteurs (I), c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{R}{R''} = \frac{h}{h'},$$

comme les hauteurs des rectangles R″, R′ sont aussi égales, j'en conclus pareillement que

$$\frac{R''}{R'}=\frac{b}{b'}.$$

Je multiplie ensuite les deux égalités précédentes membre à membre, et, après la suppression du facteur R″ commun aux deux termes du premier produit, je trouve :

$$\frac{R}{R'}=\frac{h\times b}{h'\times b'}.$$

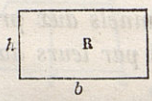
Exemple.— Soient $h=1^{m},5$, $b=3^{m},2$, $h'=1^{m},2$ et $b=2^{m},4$, on a :

$$\frac{R}{R'}=\frac{1,5\times 3,2}{1,2\times 2,4}=\frac{15\times 32}{12\times 24}=\frac{5}{3}.$$

Le rectangle R est donc égal aux $\frac{5}{3}$ du rectangle R′.

THÉORÈME III

L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur, si l'on prend pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur.



Soit à mesurer le rectangle R dont je représente la base par b et la hauteur par h ; je prends pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur, et j'ai, d'après le théorème précédent :

$$\frac{R}{1}=\frac{b\times h}{1\times 1},\ \text{ou}\ R=b\times h.$$

Or, les nombres R, b et h sont les mesures du rectangle, de sa base et de sa hauteur ; donc l'égalité précédente exprime que *l'aire de ce rectangle est égale au produit des deux nombres qui représentent les mesures de sa base et de sa hauteur.*

On énonce ordinairement ce résultat de la manière suivante :

L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.

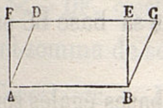
Corollaire. — *L'aire d'un carré est égale* au produit de sa base par sa hauteur, c'est-à-dire *égale à la seconde puissance de son côté.*

Réciproquement, *la seconde puissance d'un nombre quelconque peut être considérée comme l'aire du carré dont le côté est égal à ce nombre.* Ce corollaire et sa réciproque expliquent la synonymie des mots *carré* et *seconde puissance* d'un nombre, employés dans l'arithmétique.

Remarque. Si l'on prend le *mètre* pour unité de longueur, le *mètre carré* sera l'unité de surface.

THÉORÈME IV

L'aire d'un parallélogramme ABCD *est égale au produit de sa base* AC *par sa hauteur* BE.



Par les extrémités A et B de la base du parallélogramme ABCD, j'élève des perpendiculaires sur cette ligne jusqu'à la rencontre du côté opposé DC, et je dis que le parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle ABEF.

En effet, les triangles rectangles ADF, BCE ont les hypoténuses AD, BC égales comme côtés opposés du parallélogramme (10, I); leurs côtés AF, BE, adjacents aux angles droits F et E, sont égaux par une raison semblable ; donc ces triangles rectangles sont égaux (6, V).

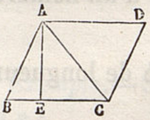
Je remarque ensuite qu'en retranchant successivement du quadrilatère ABCF chacun de ces triangles, le parallélogramme ABCD et le rectangle ABEF que je trouve pour restes sont équivalents. Or, le rectangle a pour mesure $AB \times BE$ (III) ; donc l'aire du parallélogramme est aussi égale à $AB \times BE$, c'est-à-dire au produit de sa base AB par sa hauteur BE.

Corollaire. — Deux parallélogrammes qui ont les bases égales sont proportionnels à leurs hauteurs. — Si deux parallélogrammes ont leurs hauteurs égales, ils sont proportionnels à leurs bases.

THÉORÈME V

L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

Soit ABC le triangle donné ; des extrémités A et C du côté AC je mène des droites AD, CD, respectivement parallèles aux deux autres côtés BC, BA. Les triangles ABC, ACD sont égaux ; car ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, puisque le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (10, I.). Par conséquent, le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD, qui a la même base BC et la même hauteur AE que lui.



Or, le parallélogramme a pour mesure le produit $BC \times AE$ (IV) ; donc l'aire du triangle est égale à la moitié du même produit, c'est-à-dire à la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur AE.

Corollaire I. — Deux triangles qui ont les bases égales sont proportionnels à leurs hauteurs. — Si deux triangles ont les hauteurs égales, ils sont proportionnels à leurs bases.

Corollaire II. — Deux triangles qui ont les bases égales et les hauteurs égales sont équivalents.

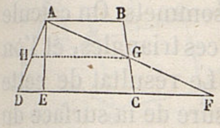
Corollaire III. — Soit c la longueur du côté d'un triangle équilatéral ; la hauteur de ce triangle est égale à $\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}}$, c'est-à-dire à $\frac{c\sqrt{3}}{2}$; par conséquent sa surface a pour mesure $\frac{c}{2} \times \frac{c\sqrt{3}}{2}$, ou $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

Si l'on suppose, par exemple, le côté c du triangle équilatéral égale à 10 mètres, l'aire de ce triangle sera égale à 43^{mc}3013.

THÉORÈME VI

L'aire d'un trapèze ABCD *est égale au produit de sa hauteur* AE *par la demi-somme de ses bases* AB, CD.

Je prolonge la base inférieure DC d'une longueur CF égale à la base supérieure AB, et je tire la ligne droite AF qui coupe le côté BC au point G. Les triangles ABG, CGF ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ; en effet, les côtés CF, AB, sont égaux par hypothèse ; l'angle ABG égale l'angle FCG, parce qu'ils sont alternes-internes par rapport aux deux parallèles AB, CF et à la sécante BC ; il en est de même des angles BAG, CFG ; les triangles ABG, CGF sont donc égaux. Si je les retranche successivement de la figure ABGFD, le trapèze ABCD et le triangle AFD que j'obtiens pour restes sont équivalents ; mais le triangle a pour mesure AE $\times \frac{1}{2}$ DF ; donc l'aire du trapèze égale aussi AE $\times \frac{1}{2}$ DF, c'est-à-dire le produit de sa hauteur AE par la demi-somme de ses deux bases DC, AB.



Corollaire. — *Le trapèze* ABCD *a aussi pour mesure le produit de sa hauteur* AE *par la droite* GH *qui joint les milieux* H *et* G *de ses côtés non parallèles* AD, BC.

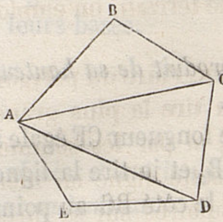
En effet, les deux triangles ADF, AHG, qui ont un angle commun compris entre côtés proportionnels, sont semblables (21, III) ; le rapport de GH à DF est donc le même que celui de AH à AD, c'est-à-dire que la droite GH égale la moitié de la droite DF, ou la moitié de la somme des bases AB, CD, du trapèze. Par suite, ce quadrilatère a pour mesure le produit de AE par GH.

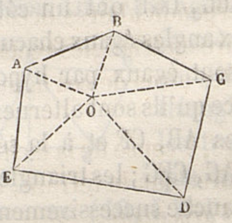
PROBLÈME I

Mesurer la surface d'un polygone quelconque.

Ce problème est susceptible de plusieurs solutions que je vais exposer successivement :

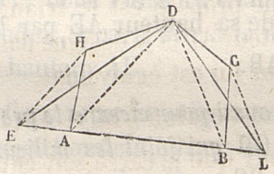
1° Pour évaluer l'aire d'un polygone ABCDE tracé sur le papier ou sur le terrain, on le décompose en triangles, soit en menant les diagonales d'un sommet, par exemple A, à tous les autres; soit en tirant des lignes droites d'un point quelconque O de sa surface à tous ses sommets. On calcule ensuite les aires de ces triangles, et l'on en fait la somme. Le résultat de cette addition est la mesure de la surface du polygone proposé.





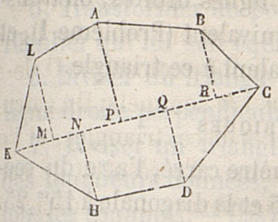
2° Lorsque le polygone dont on demande la mesure est tracé sur le papier, on peut le transformer en un triangle qui lui soit équivalent, et mesurer ensuite la surface de ce triangle.

Pour compléter cette solution, je vais indiquer comment on transforme un polygone, par exemple le pentagone ABCDH, en un triangle équivalent. Je tire la diagonale BD qui retranche du pentagone le triangle BDC, et je mène par le sommet C de ce triangle la droite CL parallèle à BD. Je prolonge ensuite le côté AB du polygone jusqu'à la rencontre de CL, et je joins leur intersection L au point D par la droite DL. Le triangle CBD, est équivalent au triangle LBD (V), parce qu'ils ont la même base BD et les hauteurs égales, leurs sommets C et L se trouvant sur une parallèle à la base. Dès lors, si je remplace dans le pentagone ABCDH le triangle CBD par le triangle équivalent LBD, le nouveau polygone LBAHD est équivalent au pentagone; mais les trois points A, B, L, étant en ligne droite, la figure LBAHD n'a que quatre côtés. Par conséquent, j'ai transformé, par la construction précédente, le polygone proposé en un autre qui lui est équivalent et a un côté de moins.



En appliquant cette construction au quadrilatère ALDH, je le transforme en un triangle DKL qui lui est équivalent, l'aire de ce triangle est par suite égale à celle du pentagone ABCDH.

3° Lorsque le polygone est tracé sur le terrain, on emploie de préférence la méthode suivante :

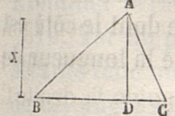


Soit à évaluer l'aire du polygone ABCDHKL ; on tire la plus grande diagonale CK, et par les sommets extérieurs à cette ligne on mène des perpendiculaires sur sa direction. Ces perpendiculaires décomposent la figure en triangles rectangles et en trapèzes. On calcule ensuite les aires de ces figures partielles, et l'on en fait la somme.

Ce procédé est préféré dans l'arpentage, à cause de la facilité avec laquelle on trace des perpendiculaires sur le terrain, au moyen de l'instrument appelé *équerre d'arpenteur*.

PROBLÈME II

Construire un carré équivalent à un polygone.



1° Si le polygone proposé est le triangle ABC, je tire sa hauteur AD et je désigne par X le côté du carré qui lui est équivalent.

L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}BC \times AD$ (V), et celle du carré, égale à X^2 (III). Pour que le carré soit équivalent au triangle, il faut donc qu'on ait :

$$X^2 = \frac{1}{2}BC \times AD ;$$

j'en conclus que

$$\frac{AD}{X} = \frac{X}{\frac{1}{2}BC},$$

c'est-à-dire que le côté X du carré demandé est moyenne proportionnelle entre la hauteur AD et la moitié de la base BC du triangle donné.

2° Si la surface du polygone proposé a pour mesure le produit de deux lignes droites connues, comme il arrive pour le parallélogramme et le trapèze, on démontre, par un raisonnement analogue au précédent, que le côté du carré équivalent à ce polygone est moyenne proportionnelle entre les deux lignes dont le produit exprime la mesure de sa surface.

3. Lorsque l'aire du polygone proposé ne s'exprime pas immédiatement par le produit de deux lignes droites, on transforme ce polygone en un triangle équivalent (Problème I), et l'on construit ensuite le carré équivalent à ce triangle.

PROBLÈMES NUMÉRIQUES

1. Calculer, à moins d'un centimètre carré, l'aire du rectangle dont la base est égale à $10^m,75$ et la diagonale à $15^m,25$.

2. Calculer l'une des hauteurs et l'aire du triangle dont les côtés sont égaux respectivement à $1^m,20$, $1^m,85$ et $2^m,25$.

3. L'aire d'un trapèze est égale à $2034^{mc},60$; sa hauteur est de $18^m,40$, et sa base inférieure de $54^m,48$. Calculer sa base supérieure à moins d'un centimètre.

4. Calculer en hectares l'aire d'un hexagone régulier dont le côté a 450 mètres de longueur.

5. Calculer, à moins d'un centimètre carré, l'aire d'un octogone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est de $2^m,25$.

6. Calculer en hectares l'aire d'un losange dont le côté est égal à la plus petite diagonale, en sachant que la longueur de chacune de ces lignes est de $20^m,50$.

7. Calculer, à un centimètre près, le côté du carré équivalent au triangle équilatéral dont l'apothème a $2^m,50$ de longueur.

PROBLÈMES GRAPHIQUES

1. L'aire d'un trapèze est égale au produit de l'un des côtés non parallèles par la distance de ce côté au milieu du côté opposé.

2. Tracer par le sommet C d'un triangle ABC une ligne droite MN telle que le trapèze qu'elle forme avec le côté AB et les perpendiculaires menées des deux autres sommets A, B, sur MN soit équivalent à un carré donné.

3. Si les angles A, A', des deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux ou supplémentaires, les aires de ces triangles sont proportionnelles aux produits $AB \times AC$, $A'B' \times A'C'$, des côtés qui forment les angles A, A'.

4. Transformer un triangle rectangle en un triangle isocèle

qui lui soit équivalent et qui ait avec lui un angle commun. Combien ce problème a-t-il de solutions?

5. Transformer un polygone régulier en un autre polygone régulier qui lui soit équivalent et ait deux fois plus de côtés.

6. Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une ligne droite perpendiculaire à l'un de ses côtés.

7. Diviser un triangle en trois parties proportionnelles à des longueurs données, en joignant un point de l'intérieur à tous les sommets. — Cas particulier dans lequel les trois lignes données sont égales.

8. Inscrire dans un cercle un trapèze dont la hauteur et la surface sont données. (La grandeur d'une surface est déterminée par le côté du carré qui lui est équivalent.)

9. La position et la longueur de deux lignes droites étant données, trouver le lieu du point tel qu'en le joignant aux extrémités de ces lignes on forme deux triangles dont les aires soient proportionnelles à deux lignes droites données M et N. Examiner le cas d'égalité de M et N.

10. Par un point donné sur le plan d'un angle, mener une sécante telle que l'aire du triangle qu'elle fait avec les côtés de cet angle soit égale à un carré donné.

11. Par un point donné sur le plan d'un angle, mener une sécante telle que le produit des distances du sommet de l'angle aux deux points d'intersection soit égal à un carré donné.

12. Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur, perpendiculaire au troisième côté, par le diamètre du cercle circonscrit. — Déduire de ce théorème que l'aire d'un triangle est égale au produit de ses trois côtés divisé par le double du diamètre du cercle circonscrit.

13. Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une parallèle à une ligne droite donnée.

14. Mener par un sommet d'un quadrilatère une ligne droite qui divise sa surface en deux parties équivalentes.

15. Si dans un quadrilatère quelconque on mène par les milieux de chacune des diagonales une parallèle à l'autre, et qu'on joigne leur point de concours aux milieux des côtés du quadrilatère, il sera partagé en quatre quadrilatères équivalents.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON

Programme. — Relations entre le carré construit sur le côté d'un triangle opposé à un angle droit, ou aigu, ou obtus, et les carrés construits sur les deux autres côtés

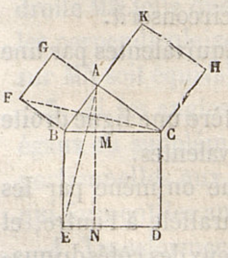
---

REMARQUE

La vingt-troisième leçon et la vingt-quatrième renferment plusieurs théorèmes dans lesquels on considère le produit de deux lignes droites. Or, on sait (30, II) qu'un tel produit peut-être considéré comme la mesure de l'aire du rectangle construit sur ces deux lignes ; par conséquent, ces théorèmes sont susceptibles d'une interprétation purement géométrique et, par suite, d'une démonstration nouvelle. J'examinerai seulement les trois théorèmes relatifs au carré d'un côté d'un triangle, opposé à un angle droit, ou aigu, ou obtus.

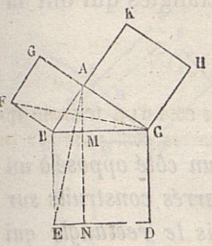
THÉORÈME I

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.



Soit ABC un triangle dont l'angle BAC est droit ; je construis un carré sur chacun de ses côtés, et je dis que le carré BCDE fait sur l'hypoténuse BC est équivalent à la somme des carrés ABFG, ACHK faits sur les deux autres côtés AB, AC.

J'abaisse du sommet A de l'angle droit la perpendiculaire AM sur l'hypoténuse; le prolongement MN de cette ligne partage le carré BCDE en deux rectangles BEMN, CDMN, respectivement équivalents aux carrés ABFG, ACHK, qui leur sont adjacents. En effet, l'aire du rectangle BEMN est le double de celle du triangle ABE, parce qu'ils ont la même base BE et les hauteurs égales, le sommet A du triangle étant sur le prolongement de la base supérieure MN du rectangle (30, III et V). Pareillement l'aire du carré ABFG est le double de celle du triangle BCF, puisqu'ils ont la même base BF et les hauteurs égales, le sommet C du triangle étant sur le prolongement de la base supérieure GA du carré. La démonstration de l'équivalence du rectangle BEMN et du carré ABFG revient donc à celle de l'égalité des deux triangles ABE, BCF. Or, d'après la construction de la figure, les côtés BF et BC de l'un égalent respectivement les côtés BA et BE de l'autre; de plus, les angles FBC, ABE, compris entre ces côtés, sont égaux parce que chacun d'eux est égal à l'angle ABC augmenté d'un angle droit. Donc les triangles ABE, BCF, sont égaux (3, IV), et le rectangle BEMN est équivalent au carré ABFG.



Je prouverais de même l'équivalence du rectangle CDMN et du carré ACHK, par conséquent, le carré BCDE fait sur l'hypoténuse BC est équivalent à la somme des carrés ABFG, ACHK, faits sur les deux autres côtés AB, AC.

Corollaire I. — *Les carrés faits sur les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle* ABC *sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse.*

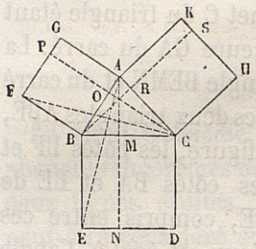
En effet, le rapport des carrés ABFG, ACHK, est le même que celui des rectangles BEMN, CDMN, qui leur sont équivalents; par conséquent, il est égal au rapport des bases BM, CM, de ces rectangles qui ont la même hauteur MN (30, I).

Corollaire II. — *Les carrés faits sur l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle* ABC *sont proportionnels à l'hypoténuse et à la projection du côté de l'angle droit sur l'hypoténuse.*

Le rapport des carrés BCDE, ABFG, est le même que celui du carré BCDE et du rectangle BEMN ; par conséquent, il est égal au rapport des bases BC et BM de ces rectangles qui ont la même hauteur BE.

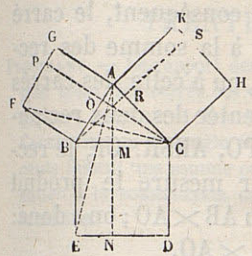
THÉORÈME II

Dans tout triangle, le carré construit sur un côté opposé à un angle aigu est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, diminuée de deux fois le rectangle qui aurait pour dimensions l'un des côtés de l'angle aigu et la projection de l'autre côté sur le premier.



Soit ABC un triangle dans lequel le côté BC est opposé à l'angle aigu BAC ; je construis un carré sur chacun des côtés de ce triangle, et je dis que le carré BCDE fait sur le côté BC est équivalent à la somme des carrés ABFG, ACHK, faits sur les deux côtés AB, AC, moins le double du rectangle ayant pour dimensions le côté AB et la projection du côté AC sur AB.

J'abaisse des sommets du triangle ABC les perpendiculaires AN, BS, CP, sur les côtés opposés ; ces perpendiculaires partagent les trois carrés en six rectangles. Je vais démontrer que deux rectangles consécutifs et placés sur les côtés d'un même angle, par exemple BEMN, BFPO, sont équivalents. En effet, l'aire du rectangle BEMN est le double de celle du triangle ABE, parce qu'ils ont la même base BE et les hauteurs égales, le sommet A du triangle étant sur le prolongement de la base supérieure MN du rectangle (30, III et V) ; par la même raison, l'aire du rectangle BFPO est le double de celle du triangle BCF. La démonstration de l'équivalence des deux rectangles BEMN, BFPO, revient donc à celle de l'égalité des triangles ABE, BCF. Or, d'après la construction de la figure, les côtés BA, BE, du premier triangle sont égaux respectivement aux côtés BF, BC, du second, et les angles ABE, FBC, compris entre ces côtés sont égaux, parce que chacun d'eux est la somme de l'angle ABC et d'un angle droit. Donc les triangles ABE, BCF, sont égaux (5, V); les rectangles BEMN, BFPO sont par suite équivalents.



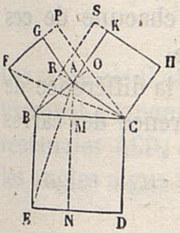
Je prouverais de même l'équivalence des rectangles DCMN, CHSR, et celle des rectangles AKSR, AGPO. Par conséquent le carré BCDE est équivalent à la somme des rectangles BFPO, CHSR, ou à celle des carrés ABFG, ACHK, diminuée des deux rectangles équivalents AGPO, AKSR. Or le rectangle AGPO a pour mesure le produit $AG \times AO$ (30, III), ou $AB \times AO$; on a donc :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AO.$$

il est évident d'ailleurs que la ligne droite AO est la projection du côté AC de l'angle aigu BAC sur l'autre côté AB de cet angle.

THÉORÈME III

Dans tout triangle, le carré construit sur un côté opposé à un angle obtus est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, augmentée de deux fois le rectangle qui aurait pour dimensions l'un des côtés de l'angle obtus et la projection de l'autre côté sur le premier.

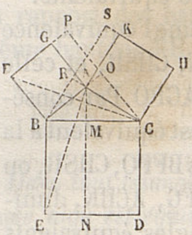


Soit ABC un triangle dans lequel le côté BC est opposé à l'angle obtus BAC ; je construis un carré sur chacun des côtés de ce triangle, et je dis que le carré BCDE fait sur le côté BC est équivalent à la somme des carrés ABFG, ACHK, faits sur les deux autres côtés AB, AC, augmentée de deux fois le rectangle ayant pour dimensions le côté AB et la projection du côté AC sur AB.

J'abaisse des sommets du triangle ABC les perpendiculaires AN, BS, CP, sur les côtés opposés ; ces perpendiculaires et les côtés des trois carrés font six rectangles BEMN, CDMN, BFPO; AGPO, CHSR, AKSR. Je démontre, comme dans le théorème précédent, l'équivalence de deux rectangles consécutifs et placés sur les côtés d'un même angle ou sur leurs prolongements ; par conséquent, le carré BCDE est équivalent à la somme des rectangles BFPO, CHSR, ou à celle des carrés ABFG, ACHK, augmentée des deux rectangles équivalents AGPO, AKSR. Or, le rectangle AGPO a pour mesure le produit $AG \times AO$ (30, III), ou $AB \times AO$; on a donc:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AO.$$

Il est d'ailleurs évident qne la ligne droite AO est la projection du côté AC de l'angle obtus sur l'autre côté AB de cet angle.



PROBLÈMES

1. Démontrer que le carré construit sur la diagonale d'un carré est le double du carré proposé.

2. Le carré fait sur la somme de deux lignes droites est équivalent à la somme des carrés faits sur chacune de ces lignes, augmentée du double de leur rectangle.

3. Le carré fait sur la différence de deux lignes droites est équivalent à la somme des carrés faits sur chacune de ces lignes, diminuée du double de leur rectangle.

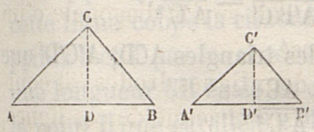
4. Le rectangle construit sur la somme et la différence de deux lignes droites est équivalent à la différence des carrés de ces lignes.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON

PROGRAMME. — Le rapport des aires de deux polygones semblables est le même que celui des carrés des côtés homologues. — Construire un carré dont le rapport à un carré donné soit égal au rapport de deux lignes données. — Construire un rectangle équivalent à un carré donné et dont les côtés adjacents fassent une somme ou aient entre eux une différence donnée. — Application à la construction des racines des équations du second degré à une inconnue.

THÉORÈME I

Les aires de deux triangles semblables ABC, A′B′C′, *sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues.*



Les triangles ABC, A′B′C′, étant semblables, leurs bases AB, A′B′, sont proportionnelles à deux côtés homologues ; par conséquent, j'ai l'égalité

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Des sommets C et C′ je tire les lignes droites CD, C′D′, respectivement perpendiculaires aux bases AB, A′B′. Les triangles rectangles ACD, A′C′D′, sont semblables (21, II, c), car ils ont les angles aigus A et A′ égaux par hypothèse ; il en résulte que

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

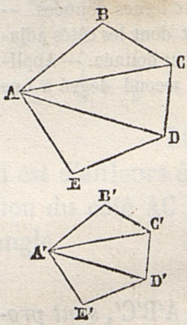
Je multiplie membre à membre les deux égalités précédentes, et je trouve

$$\frac{AB \times CD}{A'B' \times C'D'} = \frac{AC^2}{A'C'^2}.$$

Or, l'aire du triangle ABC est égale à la moitié du produit $AB \times CD$, et l'aire du triangle A′B′C′ égale à la moitié du produit $A'B' \times C'D'$ (30, V) ; donc le rapport des aires de ces triangles est le même que celui des carrés de leurs côtés homologues AC, A′C′.

THÉORÈME II

Les aires de deux polygones semblables ABCDE, A′B′C′D′E′, *sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues.*



Je décompose les deux polygones semblables ABCDE, A′B′C′D′E′, en un même nombre de triangles semblables, en traçant leurs diagonales homologues par les deux sommets homologues A et A′ (21, VII). Les deux triangles ABC, A′B′C′, étant semblables, j'ai l'égalité (I)

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AC^2}{A'C'^2};$$

il résulte aussi de la similitude des triangles ACD, A′C′D′ que

$$\frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{AC}{A'C'^2}.$$

Les deux égalités précédentes ayant un rapport commun, j'en conclus

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'},$$

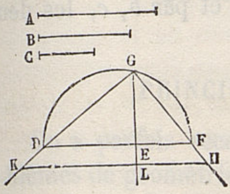
c'est-à-dire que les triangles semblables dans lesquels j'ai décomposé les polygones ABCDE, A′B′C′D′E′, sont proportionnels. Les rapports $\frac{ABC}{A'B'C'}, \frac{ACD}{A'C'D'}, \frac{ADE}{A'D'E'}$, sont donc égaux, et l'on a

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'} = \frac{ABC}{A'B'C'}.$$

Or, le numérateur ABC + ACD + ADE est égal à l'aire du polygone ABCDE, et le dénominateur A′B′C′ + A′C′D′ + A′D′E′ égal à l'aire du polygone A′B′C′D′E′ ; donc les aires de ces polygones semblables sont proportionnelles aux aires de deux triangles semblables ABC, A′B′C′, ou aux carrés des deux côtés homologues AB, A′B′ (I).

PROBLÈME I

Construire un polygone semblable à un polygone donné, et tel que son rapport à ce polygone soit égal à celui de deux lignes droites données.



Je suppose 1° que le polygone donné soit un carré ; je désigne par A son côté, par X le côté du carré demandé et par B, C, les deux lignes données ; il s'agit de déterminer X de telle sorte qu'on ait :

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{B}{C}.$$

Cela posé, je prends sur une ligne droite indéfinie la longueur DE égale à B, et, à la suite, une longueur EF égale à C. Je décris une demi-circonférence sur la ligne DF comme diamètre, puis je mène la ligne droite EG perpendiculaire à DF, cette ligne coupe la circonférence au point G que je joins aux points D et F par les cordes GD, GF. Je prends ensuite sur GF une longueur GH égale au côté A du carré donné ; je mène par le point H une parallèle à DF, et je la prolonge jusqu'au point K où elle rencontre GD. La droite GK est le côté du carré demandé.

En effet, l'angle HGK du triangle GHK étant droit (15, IV, c), on a (32, I, c) :

$$\frac{GK^2}{GH^2} = \frac{KL}{LH}.$$

Mais les parallèles KH, DF, sont divisées en parties proportionnelles (21, VI) par les lignes droites GK, GL, GH, issues du point G, c'est-à-dire que

$$\frac{KL}{LH} = \frac{DE}{EF};$$

par conséquent, on a aussi

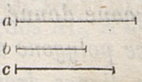
$$\frac{GK^2}{GH^2} = \frac{DE}{EF},$$

ou bien

$$\frac{GK^2}{A^2} = \frac{B}{C}.$$

La ligne droite GK est donc le côté X du carré cherché.

2. Soit donné un polygone quelconque A ; je désigne par a l'un de ses côtés, par x le côté homologue du polygone demandé X, et par b, c, les deux lignes droites données.



J'ai, par hypothèse,

$$\frac{X}{A} = \frac{b}{c},$$

et

$$\frac{X}{A} = \frac{x^2}{a^2}$$

à cause de la similitude des polygones (II), il en résulte que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}.$$

La construction du côté x est donc ramenée à celle d'un carré qui soit au carré du côté a dans le rapport des deux lignes b et c.

Je construis la ligne droite x d'après la méthode précédente, et je fais sur cette ligne un polygone semblable au polygone donné A (25, VIII), en regardant toutefois les lignes x et a comme deux côtés homologues.

Remarque. — Si le rapport des deux polygones était exprimé par celui de deux nombres, je prendrais pour les lignes b et c deux lignes droites proportionnelles aux deux nombres donnés, et je ferais ensuite la construction précédente.

PROBLÈME II

Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les côtés fassent une somme ou aient entre eux une différence donnée.

Cette question revient à construire la base et la hauteur du rectangle, c'est-à-dire deux droites dont la somme et le produit, ou la différence et le produit, sont donnés (25, VI et VII).

Emploi de l'algèbre dans la résolution des problèmes de géométrie.

PRINCIPE DE L'HOMOGÉNÉITÉ*.

On a parfois recours à l'algèbre pour résoudre les problèmes de géométrie. On désigne alors les données et les inconnues par des lettres, et l'on écrit les équations du problème en faisant usage des théorèmes de la géométrie et en appliquant les règles de l'algèbre. Je suppose qu'on ramène chacune de ces équations à n'avoir que des termes rationnels et entiers, c'est-à-dire qu'on fasse disparaître les radicaux et les dénominateurs, si elle en contient; je dis que l'équation, ainsi transformée, est *homogène*.

Dans la démonstration de cet important théorème, connu sous le nom de *principe de l'homogénéité*, on regarde comme évident que *toute relation qui existe entre les lignes d'une figure de géométrie ne change pas avec l'unité employée pour mesurer ces lignes;* ainsi, le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle égale la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, quelle que soit l'unité linéaire. Il en résulte que toute équation d'un problème de géométrie, exprimant un mode de dépendance des inconnues et des données de la figure, n'éprouve aucune modification, lorsqu'on change la grandeur de l'unité linéaire qui a servi à écrire cette équation, en supposant, comme je l'ai déjà dit, que cette unité ne soit pas l'une des lignes données.

* Pour comprendre la démonstration de ce principe, il importe de se rappeler les définitions suivantes :

On nomme *degré* d'un monôme entier le nombre des facteurs algébriques de ce terme; ce nombre est égal à la somme des exposants de toutes les lettres du monôme. Ainsi, le terme $8a^4b^3c$ est du huitième degré. — Un polynôme entier est *homogène*, lorsque tous ses termes sont du même degré. Tel est le polynôme

$$5a^2b-3ab^2+6b^3,$$

dont tous les termes sont du troisième degré.

Cela posé, considérons l'une des équations auxquelles conduit un problème; pour démontrer qu'elle est homogène, je change l'unité linéaire et j'en prends une seconde qui soit m fois plus petite que la première. Les nombres qui exprimaient les mesures des différentes lignes de la figure deviennent m fois plus grands, de sorte que chaque terme de l'équation doit être multiplié par m, ou m^2, ou m^3, etc., selon qu'il est du premier degré ou du second, ou du troisième, etc.; par conséquent, cette équation ne sera indépendante du nombre m, c'est-à-dire de la variation de l'unité linéaire, qu'autant que tous ses termes auront été multipliés par la même puissance de m, ce qui exige qu'ils soient tous du même degré.

Remarque I. — Si l'on emploie la trigonométrie dans la mise en équation d'un problème de géométrie, il importe de se rappeler que les lignes trigonométriques ne sont que des *nombres*, de sorte qu'il ne faut pas les compter en évaluant les degrés des termes de l'équation.

Remarque II. Lorsque, dans une équation entière et homogène, on remplace l'une des lettres de cette équation par le nombre 1, les degrés des termes qui contiennent cette lettre diminuent, et l'équation cesse d'être homogène. Par conséquent les équations d'un problème de géométrie ne sont pas homogènes, lorsqu'on prend l'une des lignes données pour unité de longueur.

Construction des racines des équations des deux premiers degrés à une seule inconnue et de l'équation bi-carrée.

La *construction* des racines d'une équation qui ne contient qu'une inconnue consiste à remplacer les calculs qu'il faudrait effectuer pour avoir les valeurs de ces racines, par un système d'opérations graphiques exécutées sur les lignes données et faisant connaître les grandeurs des lignes inconnues.

Pour faire ces *tracés*, on ne se sert que de la *règle* et du *compas*. Parmi les équations dont il est possible de construire les racines avec ces instruments, je ne considérerai que celles qui sont du premier ou du second degré, et les équations bicarrées.

1° *Équations du premier degré.*

Si l'équation considérée est du premier degré, la valeur de l'inconnue a l'une des formes suivantes :

$$x = a \pm b, \quad x = \frac{ab}{c}, \quad x = \frac{abcd}{efg}, \quad x = \frac{abc \pm def}{gh \pm kl},$$

les constantes a, b, c, etc. étant les représentations numériques de lignes droites données.

Pour construire la première valeur de x, il faut ajouter à la longueur a, ou en retrancher la longueur b. La seconde valeur de x est la quatrième proportionnelle aux lignes c, a et b

Quant à la troisième valeur, on la construit par autant de quatrièmes proportionnelles qu'il y a de facteurs linéaires dans son dénominateur. En effet, si l'on prend deux inconnues auxiliaires telles qu'on ait :

$$y = \frac{ab}{e}, \qquad z = \frac{cy}{f};$$

il en résulte que $$x = \frac{dz}{g}.$$

Par conséquent, on construira d'abord la quatrième proportionnelle y aux trois lignes e, a, b, puis la quatrième proportionnelle z aux trois lignes f, c, y; et l'inconnue x sera la quatrième proportionnelle aux trois lignes g, d, z.

Enfin, on ramène la quatrième valeur de x à la forme de la troisième, au moyen de deux inconnues auxiliaires y et z, choisies de manière qu'on ait

$$aby = def \quad \text{et} \quad gz = kl;$$

car on en déduit

$$x = \frac{ab\,(c \pm y)}{g\,(h \pm z)}.$$

On commencera donc par construire z et y au moyen de quatrièmes proportionnelles; l'inconnue x s'obtiendra par le même procédé, puisque les facteurs $c \pm y$, $h \pm z$ sont des lignes connues.

2° *Équations du second degré**.

Je supposerai d'abord que l'équation soit incomplète et qu'elle ne contienne que le carré de l'inconnue avec un terme constant; cette équation sera de l'une des deux formes suivantes :

$$x^2 = ab, \quad x^2 = a^2 \pm b^2.$$

Dans l'un et l'autre cas, l'inconnue a deux valeurs égales et de signes contraires; il suffit dès lors de construire celle qui est positive. Il est évident que la racine positive de la première équation est moyenne proportionnelle entre les deux lignes a, b, et qu'on obtient celle de la seconde équation en construisant le côté d'un carré égal à la somme ou à la différence des carrés des lignes a et b.

Je considère en second lieu l'équation complète du second degré qui est susceptible de l'une des quatre formes suivantes :

$$x^2 - ax + b^2 = 0, \quad (1)$$
$$x^2 + ax + b^2 = 0, \quad (2)$$
$$x^2 - ax - b^2 = 0, \quad (3)$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0. \quad (4)$$

Je remarque d'abord que les racines de la seconde équation sont égales à celles de la première et de signes contraires; car on déduit la seconde de la première en y remplaçant x par $-x$; comme la quatrième équation résulte de la troisième par le même changement de x en $-x$, il suffit d'expliquer la construction des racines des deux équations (1) et (3).

Je commence par l'équation

$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

et je désigne par x' et x'' ses deux racines que je suppose réelles et qui sont dès lors positives, puisque leur somme a et leur produit b^2 sont positifs; on a donc

$$x' + x'' = a,$$
$$x'x'' = b^2.$$

Ces relations ramènent la question à un problème connu :

* Voir, dans mes *Leçons nouvelles d'algèbre*, 3e édition, les propriétés des équations du second degré et l'application des quantités négatives à la résolution des problèmes.

Construire deux lignes x′ *et* x″ *dont la somme et le produit sont donnés* (25, VI). Cette construction fait connaître immédiatement la condition de réalité des racines, qui est

$$a > 2b.$$

Quant à l'équation

$$x^2 - ax - b^2 = 0,$$

dont les racines ont des signes contraires, je représente par x' la racine positive et par x'' la valeur absolue de celle qui est négative ; on a, par suite,

$$x' - x'' = a,$$

et

$$x' x'' = b^2.$$

La question proposée revient donc au problème suivant : *Construire deux lignes* x′ *et* x″ *dont la différence et le produit sont donnés* (25, VII).

3° *Équations bi-carrées* *.

Une équation bi-carrée ne peut avoir que l'une des quatre formes suivantes :

$$x^4 - a^2x^2 + b^4 = 0, \quad (1)$$
$$x^4 + a^2x^2 + b^4 = 0, \quad (2)$$
$$x^4 - a^2x^2 - b^4 = 0, \quad (3)$$
$$x^4 + a^2x^2 - b^4 = 0. \quad (4)$$

La seconde de ces équations, qu'on déduit de la première en y remplaçant x^2 par $-x^2$, n'a que des racines imaginaires ; il n'y a donc pas lieu de construire ces racines. Comme la quatrième équation résulte de la troisième par le même changement de x^2 en $-x^2$, il suffit de montrer comment on peut construire les racines réelles de la première et de la troisième équation. On commence par ramener ces deux équations au second degré, en posant

$$x^2 = by,$$

y étant une ligne auxiliaire. Ces équations deviennent, en effet,

$$y^2 - \frac{a^2}{b}\, y \pm b^2 = 0.$$

* Voir les propriétés des équations bi-carrées dans mes *Leçons nouvelle d'algèbre.*

On construit leurs racines d'après la méthode précédemment donnée, et l'on obtient l'inconnue x en cherchant une moyenne proportionnelle entre la ligne b et chacune des valeurs réelles et positives de la ligne auxiliaire y.

Remarque. On peut appliquer cette méthode algébrique à la résolution des problèmes suivants :

1° Diviser une ligne droite de longueur donnée en moyenne et extrême raison.

2° Inscrire un carré donné dans un autre carré, aussi donné.

3° Construire un cercle tangent à la fois à un cercle, à une corde de ce cercle et au diamètre perpendiculaire à cette corde. (On calculera le rayon du cercle demandé.)

4° Inscrire dans un triangle un rectangle d'aire donnée.

5° Diviser la surface d'un triangle en moyenne et extrême raison par une perpendiculaire ou une parallèle à l'un de ses côtés.

PROBLÈMES

1. Faire un carré égal à la somme ou à la différence de deux carrés.

2. Deux polygones semblables étant donnés, construire un polygone qui leur soit semblable, et soit équivalent à leur somme ou à leur différence.

3. Construire un triangle qui soit semblable à un triangle donné, et dont les sommets soient placés sur trois circonférences concentriques, ou sur trois lignes droites parallèles.

4. Diviser un triangle en un nombre quelconque de parties équivalentes par des parallèles à l'un de ses côtés.

5. Construire un triangle équilatéral équivalent à la somme ou à la différence de deux polygones donnés.

6. Inscrire dans un triangle donné un triangle semblable à un autre triangle donné.

7. Mener par un point donné une ligne droite qui divise la surface d'un trapèze en deux parties proportionnelles à des lignes données m et n.

8. Construire sur une base donnée un triangle équivalent

à un polygone donné, et tel que la droite qui joint son sommet au milieu de la base soit moyenne proportionnelle entre les deux autres côtés.

9. Deux droites parallèles et deux points étant donnés, tracer par ces points deux lignes droites qui se coupent sur l'une des parallèles et forment avec l'autre un triangle équivalent à un carré donné.

10. Diviser un trapèze en un nombre quelconque de parties équivalentes par des parallèles à ses bases.

11. Diviser, par une parallèle à la base, la surface d'un triangle de telle sorte que l'aire du trapèze soit moyenne proportionnelle entre les aires des deux triangles.

12. Les périmètres de deux triangles semblables sont proportionnels aux rayons des cercles inscrits et aux rayons des cercles circonscrits. — Les aires de ces triangles sont proportionnelles aux carrés des mêmes rayons.

13. Par un point situé sur la bissectrice d'un angle, mener une sécante telle que la partie de cette droite comprise dans l'angle soit d'une longueur donnée. — Ce problème, dans le cas particulier de l'angle droit, est connu sous le nom de *Problème de Pappus*, célèbre géomètre grec qui vivait au IVe siècle.

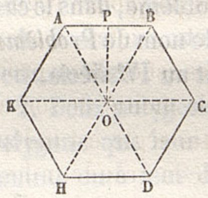
TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

Programme. — Aire d'un polygone régulier. — Aire d'un cercle, d'un secteur, et d'un segment de cercle. — Rapport des aires de deux cercles de rayons différents.

THÉORÈME I

L'aire d'un polygone régulier convexe est égale au produit de son périmètre par la moitié de son apothème.

Soit O le centre d'un polygone régulier convexe, par exemple d'un hexagone ABCDHK; de ce point je mène les rayons OA, OB, etc., aux sommets A, B, etc. Ces lignes décomposent le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés; et ces triangles sont égaux entre eux, parce qu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (27, I). J'abaisse du centre O la perpendiculaire OP sur le côté AB; cette ligne OP est à la fois l'apothème du polygone et la hauteur du triangle OAB, qui a dès lors pour mesure le produit de sa base AB par la moitié de OP (30, V). Or, l'aire du polygone proposé est la somme des aires de six triangles égaux à OAB, puisque ce polygone est convexe et qu'il a six côtés; donc elle égale six fois le produit $AB \times \frac{OP}{2}$, c'est-à-dire le produit du périmètre 6AB du polygone par la moitié de son apothème OP.



Corollaire. — *Le rapport des aires de deux polygones réguliers du même nombre de côtés est égal à celui des carrés de leurs apothèmes, ou de leurs rayons.*

Les deux polygones réguliers ayant le même nombre de côtés sont semblables (27, III) ; par conséquent, leurs surfaces sont entre elles comme les carrés des côtés homologues (33, II), ou des périmètres. Or, les périmètres sont proportionnels aux apothèmes et aux rayons des deux polygones réguliers (27, III) ; donc le rapport des surfaces de ces polygones est égal au rapport des carrés de leurs apothèmes, ou de leurs rayons.

Remarque. L'aire d'un polygone quelconque, circonscrit à un cercle, est égale au produit de son périmètre par la moitié du rayon du cercle inscrit.

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème précédent.

THÉORÈME II

L'aire d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

J'inscris d'abord dans le cercle un polygone régulier convexe; par exemple un hexagone, puis les polygones réguliers convexes de 12, 24, etc., côtés. L'aire de chacun de ces polygones est égale au produit de son périmètre par la moitié de son apothème (I). Comme cette règle est indépendante du nombre et de la grandeur des côtés des polygones réguliers inscrits, elle est applicable au cercle qui est la limite des surfaces de ces polygones; par conséquent, l'aire du cercle est égale au produit de son périmètre, ou de sa circonférence, par la moitié de son apothème qui n'est autre que son rayon.

Corollaire.—Je désigne par R le rayon du cercle donné, et j'ai dès lors

$$\textit{cercle}\ \mathrm{R} = \textit{circ.}\ \mathrm{R} \times \frac{\mathrm{R}}{2}.$$

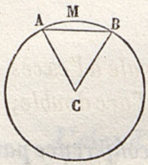
Si, dans cette expression de l'aire du cercle R, je remplace *circ.* R par sa valeur $2\pi\mathrm{R}$ (27, IV, c), je trouve :

$$\textit{cercle}\ \mathrm{R} = \pi\mathrm{R}^2.$$

Il résulte de cette égalité : 1° que *pour calculer l'aire d'un cercle dont le rayon est donné, on peut multiplier le carré de son rayon par le rapport de la circonférence au diamètre ;* 2° qu'*on obtient* réciproquement *la longueur du rayon d'un cercle dont l'aire est donnée, en divisant par* π *le nombre qui exprime cette aire, et extrayant la racine carrée du quotient.*

THÉORÈME III

L'aire d'un secteur est égale au produit de la longueur de son arc par la moitié de son rayon.



Soient C le centre et CA le rayon d'un cercle ; je dis que l'aire du secteur ACB est égale au produit de la longueur de l'arc AB par la moitié du rayon CA.

En effet, on a (15, II, c)

$$\frac{\textit{sect.}\ \mathrm{ACB}}{\textit{cercle}\ \mathrm{CA}} = \frac{\textit{arc}\ \mathrm{AB}}{\textit{circ.}\ \mathrm{CA}}.$$

et, en multipliant les deux termes du dernier rapport par la moitié du rayon CA,

$$\frac{\textit{sect.}\ \mathrm{ACB}}{\textit{cercle}\ \mathrm{CA}} = \frac{\textit{arc}\ \mathrm{AB} \times \frac{\mathrm{CA}}{2}}{\textit{circ.}\ \mathrm{CA} \times \frac{\mathrm{CA}}{2}}.$$

Le cercle CA ayant pour mesure le produit $\textit{circ.}\ \mathrm{CA} \times \frac{\mathrm{CA}}{2}$ (II), il résulte de l'égalité précédente que

$$\textit{sect.}\ \mathrm{ACB} = \textit{arc}\ \mathrm{AB} \times \frac{\mathrm{CA}}{2}.$$

Remarque. Si l'on désigne par R le rayon CA, et par n le nombre des degrés de l'arc AB, on a $\frac{\pi \mathrm{R} n}{180}$ (27, IV, c) pour la longueur de cet arc ; l'aire du secteur ACB est par suite égale à $\frac{\pi \mathrm{R} n}{180} \times \frac{\mathrm{R}}{2}$, ou à $\frac{\pi \mathrm{R}^2 n}{360}$.

Exemple : Calculer à un kilomètre carré près l'aire du secteur de 23° 27′ dans le cercle dont la circonférence à 40,000 kilomètres de longueur.

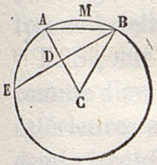
Si on remplace dans la formule $\frac{\pi R^2 n}{360}$ le rayon R par sa valeur $\frac{40000}{2\pi}$, et la quantité n par 23°, 27′, ou 23°, 45, on a

$$\frac{(40000)^2 \times 23,45}{4\pi \times 360}$$

pour la mesure de la surface du secteur proposé. En calculant cette mesure à une unité près, on trouve 8293741 kilomètres carrés.

Corollaire. — *L'aire d'un segment de cercle est égale à l'excès de la longueur de son arc sur la moitié de la corde de l'arc double, multiplié par la moitié du rayon.*

En effet, l'aire du segment AMB est égale à la différence des aires du secteur CAMB et du triangle CAB.



Le secteur a pour mesure arc AB $\times \frac{CA}{2}$; si j'abaisse du sommet B du triangle BAC la perpendiculaire BD sur le côté opposé CA, et que je prolonge cette droite jusqu'au point E où elle rencontre la circonférence, le triangle a pour mesure $BD \times \frac{CA}{2}$, ou $\frac{BE}{2} \times \frac{CA}{2}$; car le rayon CA divise l'arc BE et sa corde en deux parties égales (12,I). Par conséquent, l'aire du segment AMB égale

$$\left(\text{arc AB} - \frac{BE}{2}\right) \times \frac{CA}{2};$$

ce qui démontre le théorème énoncé, puisque l'arc soustendu par la corde BE est le double de l'arc AB.

Lorsque la corde BE est le côté de l'un des polygones réguliers qu'on sait inscrire, on peut calculer cette corde en fonction du rayon par les moyens que donne la géométrie (28, III), et obtenir l'aire du segment AMB. Dans tous les autres cas, il faut avoir recours à la *Trigonométrie.*

Exemple : Calculer, à moins d'un centimètre carré, l'aire du segment de 90° dans un cercle dont le rayon a 0,12 de longueur.

L'arc de 90°, ou le quart de la circonférence, étant égal $\pi \times 0,06$, et la moitié de la corde de l'arc de 180° égale au rayon, l'aire du segment a donc pour mesure $(\pi \times 0,06 - 0,12) \times 0,06$, ou

$$(\pi - 2)\ (0,06)^2.$$

En calculant ce produit à 0,0001 près, on trouve 0,0041; par suite, l'aire du segment est de 41 centimètres carrés.

THÉORÈME IV

Les aires de deux cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

En effet, soient S et S′ les aires de deux cercles, R et R′ leurs rayons ; on a (II) :

$$S = \pi R^2,$$

et

$$S' = \pi R'^2 ;$$

dès lors

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Corollaire I. — *Les aires de deux secteurs semblables*, c'est-à-dire terminés par des arcs semblables, *sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

Soient S et S′ les aires de ces secteurs, R et R′ leurs rayons, et n le nombre des degrés de leurs arcs ; on a (III, c) :

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360},$$

et

$$S' = \frac{\pi R'^2 n}{360},$$

par conséquent

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Corollaire II. — *Les aires de deux segments semblables*, c'est-à-dire terminés par des arcs semblables, *sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

Car le secteur et le triangle dont la différence est égale à un des segments sont respectivement semblables au secteur et au triangle qui forment l'autre segment.

PROBLÈMES

1. Exprimer l'aire du cercle en fonction de sa circonférence. Faire une application de la formule trouvée, en calculant à un kilomètre carré près l'aire d'un méridien terrestre.

2. Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on joint les sommets de deux en deux par les diagonales AC, BD, CE, DF, EA, FB, et l'on propose: 1° de démontrer que le polygone *abcdef* formé par les intersections des diagonales consécutives sera régulier; 2° de trouver le rapport de la surface de ce polygone à celle de l'hexagone donné.

3. Si, sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle comme diamètre, on décrit des demi-circonférences qui soient extérieures au triangle, chacune de ces courbes fait, avec la demi-circonférence menée par les sommets du triangle, une figure qui a la forme d'un croissant et qu'on nomme *lunule d'Hippocrate*, géomètre grec du Vᵉ siècle. Démontrer que la somme des surfaces des deux lunules est équivalente à la surface du triangle rectangle.

4. Décrire un cercle qui touche intérieurement un cercle donné et divise sa surface en deux parties proportionnelles à des lignes données.

5. La surface comprise entre deux circonférences concentriques est équivalente au cercle qui a pour diamètre une corde de la circonférence extérieure, tangente à la circonférence intérieure.

6. Décrire deux circonférences concentriques telles que la plus petite divise en deux parties équivalentes la surface comprise dans la plus grande.

7. Quel est le rapport des aires des hexagones réguliers inscrit et circonscrit au même cercle ?

8. L'aire d'un dodécagone régulier convexe est égale au triple du carré de son rayon.

9. La somme des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de l'intérieur d'un polygone régulier sur tous les côtés de ce polygone est constante.

10. Si l'on partage le diamètre AB d'un cercle en deux segments quelconques AC, CB, et qu'on décrive d'un côté de la droite AB une demi-circonférence sur le premier segment comme diamètre, et de l'autre côté une demi-circonférence sur le second segment, l'ensemble de ces deux lignes courbes divise la surface du cercle donné en deux parties proportionnelles aux segments AC, CB du diamètre AB.

11. Prenez sur la circonférence d'un cercle deux arcs AB, BC, respectivement égaux au quart et au sixième de la circonférence ; menez ensuite une sécante par le point A et le milieu de la droite BC ; la corde interceptée sur cette sécante représente, à moins d'un millième du rayon, le côté du carré équivalent au cercle.

12. Si l'on tire dans un cercle trois rayons OA, OB, OC, formant entre eux des angles de 120°, et qu'on prenne sur ces droites les longueurs OA′, OB′, OC′, égales au côté du carré inscrit dans le cercle, le triangle équilatéral A′B′C′ est équivalent à l'hexagone régulier inscrit dans le même cercle.

13. Construire sept hexagones réguliers égaux, de manière que six d'entre eux aient deux sommets situés sur une circonférence donnée et un côté commun avec le septième, qui doit avoir le même centre que cette circonférence. — Démontrer que le polygone concave, formé de ces sept hexagones, est équivalent à l'hexagone régulier inscrit dans la circonférence donnée.

FIN DES FIGURES PLANES.

GÉOMÉTRIE

FIGURES DANS L'ESPACE

PREMIÈRE ET DEUXIÈME LEÇON

PROGRAMME : Du plan et de la ligne droite. — Deux droites qui se coupent déterminent la position d'un plan. — Conditions pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan. — Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan.

—

DÉFINITIONS

1. Le *plan* est une surface telle que la ligne droite, menée par deux points quelconques de cette surface, coïncide avec elle dans toute son étendue.

La position d'un plan dans l'espace n'est pas déterminée, s'il n'est assujetti qu'à la condition de passer par une ligne droite donnée ; car on peut le faire tourner sur cette ligne comme axe sans qu'il cesse de la contenir, et le faire passer successivement par tous les points de l'espace.

2. Il résulte de la définition précédente que toute ligne droite qui traverse un plan, c'est-à-dire qui se trouve en partie d'un côté de ce plan et en partie de l'autre côté, ne peut avoir qu'un point commun avec lui, puisqu'ils ne coïncident pas. Par conséquent, *lorsqu'un plan et une ligne droite se coupent,*

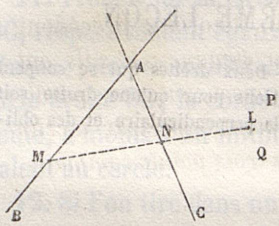
leur intersection est un point. Ce point a reçu le nom de *pied* de la ligne droite.

3. Une ligne droite et un plan qui se rencontrent sont *perpendiculaires* l'un à l'autre, si la ligne droite est perpendiculaire à toutes les lignes droites qu'on peut mener par son pied dans le plan.

On dit qu'une ligne droite est *oblique* à un plan, lorsqu'elle le rencontre sans être perpendiculaire à toutes les lignes droites qu'on peut mener par son pied dans ce plan.

THÉORÈME I

On peut faire passer un plan par deux lignes droites qui se coupent, et l'on ne peut en faire passer qu'un seul.



Soient AB et AC deux lignes droites qui se coupent au point A, je mène un plan quelconque P par la ligne droite AB, et je le fais tourner autour de cette ligne jusqu'à ce qu'il passe par le point C de l'autre ligne droite AC. Dans cette dernière position, le plan P a deux points A et C communs avec la ligne droite AC; il la contient donc tout entière. Par conséquent, on peut faire passer un plan P par les deux lignes droites AB, AC qui se coupent.

Je dis en second lieu que tout autre plan Q mené par ces lignes coïncide avec le plan P. Pour le démontrer, je tire d'un point quelconque L du plan Q une ligne droite LM, qui rencontre les deux lignes droites AB, AC. Les points d'intersection M et N sont situés dans le plan P, qui contient par hypothèse les deux lignes AB, AC; la ligne droite LM et le point L du plan Q se trouvent dès lors dans le plan P. Donc les plans P et Q ont tous leurs points communs, et coïncident dans toute leur étendue.

Corollaire I. — *Une ligne droite et un point, extérieur à cette ligne, déterminent un plan et n'en déterminent qu'un seul.*

Car, si l'on mène par le point donné une ligne droite qui coupe la ligne droite donnée, ces deux lignes déterminent un plan et n'en déterminent qu'un seul.

Corollaire II. — *Trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent un plan et n'en déterminent qu'un seul.*

En effet, les lignes droites qui joignent l'un des trois points aux deux autres ne déterminent qu'un plan.

Corollaire III. — *Deux lignes droites parallèles ne déterminent qu'un plan.*

Par définition, deux lignes droites parallèles sont situées dans un plan ; je dis en outre qu'elles ne déterminent qu'un plan, car on n'en peut mener qu'un seul par l'une de ces lignes et un point quelconque de l'autre.

Corollaire IV. — On peut conclure du théorème précédent que *deux plans coïncident dans toute leur étendue : 1° s'ils ont deux droites communes, qu'elles soient concourantes ou parallèles ; 2° s'ils ont une ligne droite et un point, extérieur à cette ligne, communs l'un à l'autre ; 3° s'ils ont trois points communs, qui ne soient pas en ligne droite.*

Corollaire V. — *Deux lignes droites* A, B, *données d'une manière quelconque dans l'espace, ne sont pas généralement situées dans un même plan.*

En effet, si l'on mène un plan P par la droite A et un point *b* de la droite B, ce plan ne contiendra pas généralement la droite B, et ne sera que traversé par elle. Dans ce cas, aucun plan ne pourra passer par les deux lignes droites A, B ; car s'il en existait un, il devrait coïncider avec le plan P, puisqu'il contiendrait avec lui la droite A et le point *b*. Par suite, la droite B serait comprise dans le plan P ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarque. — Pour représenter un plan, surface illimitée qui n'a pas de forme, on trace sur ce plan un polygone quelconque, par exemple un quadrilatère ; mais il faut concevoir ce plan prolongé indéfiniment au delà du contour de ce polygone.

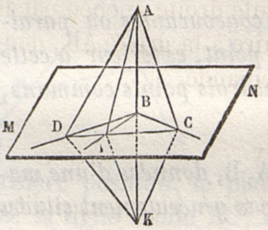
THÉORÈME II

Si deux plans M *et* N *se coupent, leur intersection est une ligne droite.*

Soient A et B deux points communs aux plans M et N; chacun de ces plans contient la ligne droite AB, qui, dès lors, fait partie de leur intersection. Comme les plans M et N ne peuvent avoir de point commun hors de cette ligne, puisqu'ils ne coïncident pas (I, c), la ligne droite AB est la seule ligne suivant laquelle ces plans se coupent.

THÉORÈME III

Une ligne droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux lignes droites, menées par son pied dans ce plan.



Soit B l'intersection de la ligne droite AB et du plan MN; je suppose AB perpendiculaire à chacune des deux lignes droites BC, BD menées par son pied dans le plan MN, et je dis qu'elle est aussi perpendiculaire à toute autre ligne droite, telle que BI, tracée par le point B dans ce plan.

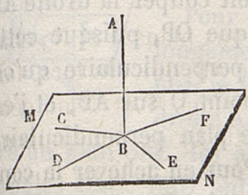
En effet, je tire la ligne droite DC dans le plan MN, de manière qu'elle rencontre les trois lignes BC, BD, BI; et je joins par des lignes droites chacune des intersections C, D, I, aux deux points A, K, pris sur la droite AB à la même distance de son pied B. Les triangles ACD, KCD sont égaux, car le côté CD leur est commun; les côtés CA, CK, sont égaux, parce que la droite BC est perpendiculaire au milieu de AK (P., 6, II*), et les côtés AD, DK le sont aussi pour la même raison. Par suite, les angles ACD, KCD, opposés aux côtés égaux DA, DK, sont égaux.

Les deux triangles ACI, KCI, ont dès lors un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc le côté AI est égal à KI. Chacun des deux points I et B étant également

* Les renvois à la Géométrie plane sont indiqués par la lettre P.

éloigné des extrémités de la droite AK, la droite BI est perpendiculaire à AK. Réciproquement, AK est perpendiculaire à BI, et, par suite, au plan MN.

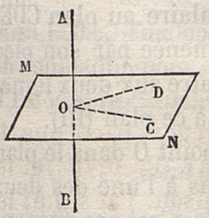
Corollaire. — *Si l'on mène par la ligne droite* AB *différents plans* ABC, ABD, etc., *et qu'on élève par le point* B *de cette ligne, dans chacun de ces plans, les perpendiculaires* BC, BD,... *sur* AB, *le lieu géométrique de ces perpendiculaires est un plan.*



En effet, soit MN le plan déterminé par les deux perpendiculaires BC, BD ; je dis qu'il contient toutes les autres. Je mène par la ligne droite AB un plan quelconque ABE qui coupe le plan MN suivant la ligne droite BE, et je fais remarquer que AB est perpendiculaire à BE, puisqu'elle est perpendiculaire par hypothèse au plan MN. Par conséquent la perpendiculaire, élevée par le point B sur la droite AB dans le plan ABE, est comprise dans le plan MN. Réciproquement, toute droite menée par le point B dans ce plan est perpendiculaire à la droite AB ; donc le plan MN est le lieu géométrique demandé.

THÉORÈME IV

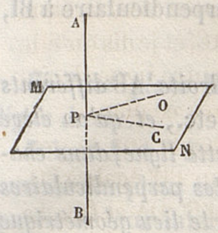
On peut mener par un point donné O *un plan perpendiculaire à une ligne droite donnée* AB, *mais on ne peut en mener qu'un seul.*



1° Je suppose le point O situé sur la droite AB, et j'élève par ce point les perpendiculaires OC, OD sur AB, dans deux plans différents. Le plan MN conduit par ces deux lignes est perpendiculaire à la droite AB, puisque cette ligne est perpendiculaire aux deux droites OC, OD, menées par son pied dans ce plan (III).

Tout autre plan passant par le point O est oblique a la droite AB, car il n'y a que le plan MN qui contienne toutes les perpendiculaires élevées par le point O sur cette droite (III, c).

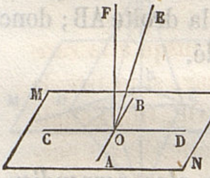
2° Si le point O est donné hors de la droite AB, j'abaisse de ce point la perpendiculaire OP sur AB dans le plan que déterminent le point O et la ligne AB. Je fais remarquer ensuite que le plan demandé doit couper la droite AB au même point P que OP, puisque cette ligne est la seule perpendiculaire qu'on puisse mener du point O sur AB, et j'en conclus que ce plan n'est autre que le plan perpendiculaire à la droite AB mené par le point P. Pour en achever la construction, il suffit donc d'élever par le point P la perpendiculaire PC sur AB dans un autre plan que ABO, et de faire passer un plan MN par les deux droites PO, PC.



THÉORÈME V

On peut mener par un point donné O *une ligne droite perpendiculaire à un plan donné* MN, *mais on ne peut en mener qu'une.*

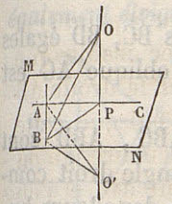
1° Je suppose le point O situé dans le plan MN, et je tire par ce point une droite quelconque AB dans ce plan. Je mène ensuite par le même point le plan CDE perpendiculaire à la droite AB (IV) ; soit CD son intersection avec le plan MN. Je trace dans le plan CDE la ligne droite OF perpendiculaire à CD, et je dis qu'elle est perpendiculaire au plan MN.



En effet, la ligne droite AB, perpendiculaire au plan CDE, est perpendiculaire à la ligne droite OF menée par son pied dans ce plan ; dès lors OF est perpendiculaire aux deux lignes droites AB, CD du plan MN et, par suite, à ce plan (III).

Toute autre ligne droite, menée par le point O dans le plan CDE ou à l'extérieur, est oblique au moins à l'une des deux lignes droites CD, AB ; par conséquent, elle n'est pas perpendiculaire au plan MN.

2° Si le point O est situé hors du plan MN, je trace dans ce plan une droite quelconque AB, et je mène par le point O le plan OAC perpendiculaire à cette ligne (IV). Soit AC son intersection avec le plan MN ; je tire dans le plan OAC la ligne droite OP perpendiculaire à AC, et je dis qu'elle est perpendiculaire à toute autre ligne droite BP du plan MN et, par suite, à ce plan.



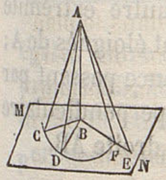
Pour le démontrer, je prends sur le prolongement de OP une longueur PO′ égale à PO, puis je tire les droites O′A, O′B, OA et OB. La droite AB étant, par hypothèse, perpendiculaire au plan OAC, les angles OAB, O′AB sont droits, et les triangles BAO, BAO′ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; car le côté AB leur est commun, et les droites AO, AO′ sont égales parce qu'elles s'écartent également de AP perpendiculaire au milieu de la droite OO′. Donc ces triangles sont égaux, et le côté BO est égal à BO′ ; le triangle OBO′ est par suite isocèle, et la droite BP qui joint son sommet B au milieu de sa base OO′ est perpendiculaire à cette base. Dès lors la droite OO′ est perpendiculaire au plan MN.

Toute autre droite OB, menée par le point O jusqu'à la rencontre du plan MN, est oblique à ce plan, car, si je tire la droite BP qui joint les pieds des deux droites OP, OB, l'angle OPB du triangle BOP est droit, puisque la droite OP est perpendiculaire au plan MN ; par conséquent l'angle OBP est aigu, et la droite OB oblique au plan MN.

THÉORÈME VI

Si on mène, d'un point A *extérieur au plan* MN, *la perpendiculaire* AB *et différentes obliques* AC, AD, AE, etc., *sur ce plan,*

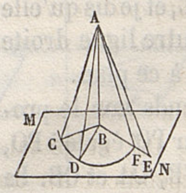
1° *La perpendiculaire* AB *est plus courte que toute oblique ;*



2° *Deux obliques* AC, AD, *qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques* AD, AE, *inégalement eloignées du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus grande.*

1° Dans le plan ABC, la ligne droite AB est perpendiculaire, et la ligne droite AC oblique à l'intersection BC des deux plans MN et ABC ; par conséquent la perpendiculaire AB au plan MN est plus courte que l'oblique AC (P., 6, II).



2° Je suppose les distances BC, BD égales entre elles, et je dis que l'oblique AC est égale à l'oblique AD.

En effet, les triangles ABC, ABD sont égaux, parce qu'ils ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc leurs hypoténuses, c'est-à-dire les obliques AC, AD, sont égales.

3° Soit la distance BE plus grande que BD; je dis que l'oblique AE est plus grande que l'oblique AD.

Je prends sur BE une longueur BF égale à BD, et je tire la ligne droite AF. Les obliques AD, AF au plan MN sont égales, puisqu'elles s'écartent également de la perpendiculaire AB. Mais les trois lignes droites AB, AE, AF sont comprises dans le même plan ABE, et la première est perpendiculaire à la ligne droite BE, tandis que les deux autres sont obliques à cette ligne; la plus grande de ces obliques est donc AE, qui s'écarte le plus de la perpendiculaire AB (P., 6, II). Par conséquent AE est aussi plus grande que AD.

Remarque. — On mesure la distance du point A au plan MN par la perpendiculaire AB abaissée de ce point sur le plan.

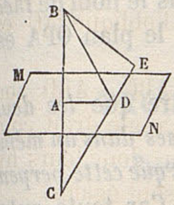
Corollaire. — Le lieu géométrique des pieds des obliques, égales à la ligne droite AC et passant par le même point A, est la circonférence décrite du pied de la perpendiculaire AB comme centre, avec un rayon égal à BC.

De là résulte cette construction pour mener une perpendiculaire sur un plan MN par un point A extérieur à ce plan : on fixe au point A l'une des extrémités d'une corde dont la longueur soit égale à AC, et l'on marque avec l'autre extrémité sur le plan donné trois points C, D, F, également éloignés de A; puis on détermine le centre B de la circonférence passant par les points C, D, F. Ce centre est le pied de la perpendiculaire demandée, qu'on obtient dès lors en tirant la droite AB.

THÉORÈME VII

Si, par le milieu A *de la ligne droite* BC, *on mène un plan*

MN *perpendiculaire à cette ligne*, 1° *tout point du plan est également éloigné des extrémités de* BC; 2° *tout point extérieur au plan est inégalement distant des mêmes extrémités.*



1° Soit D un point du plan MN; je tire les lignes droites DA, DB, DC, et je fais remarquer que DA est perpendiculaire au milieu de BC dans le plan BDC. Par conséquent, le point D de cette ligne droite est également éloigné des extrémités de BC (P., 6, III).

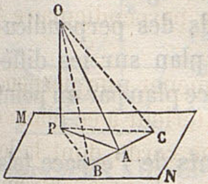
2° D'un point quelconque E, extérieur au plan MN, je tire les lignes droites EB, EC, et je dis qu'elles sont inégales.

En effet, le plan EBC coupe le plan MN suivant la ligne droite AD perpendiculaire au milieu de BC; donc le point E, extérieur à AD, n'est pas situé à la même distance des deux points B et C (P., 6, III).

Corollaire. — *Le lieu géométrique des points de l'espace également éloignés de deux points donnés est le plan perpendiculaire au milieu de la ligne droite qui joint ces deux points.*

THÉORÈME VIII

Si, du pied P *d'une ligne droite* PO *perpendiculaire au plan* MN *on abaisse une perpendiculaire sur une ligne droite* BC *de ce plan, toute ligne droite qui joint le pied* A *de cette seconde perpendiculaire à un point quelconque* O *de la première est elle-même perpendiculaire à* BC.



Je prends sur BC les distances AB, AC, égales entre elles, et je tire les droites PB, PC, ainsi que les droites OB, OC. Dans le plan MN, les obliques PB, PC, à la droite BC sont égales, puisqu'elles s'écartent également de la perpendiculaire PA (P., 6, II); donc les droites OB, OC, obliques au plan MN, sont également éloignées de la droite OP perpendiculaire à ce plan, et, par suite, égales entre elles (VI). Dès lors le triangle OBC est isocèle, et la droite AO qui joint son sommet O au milieu A de sa base est perpendiculaire à cette base.

Remarque.—Cette proposition, connue sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires*, prouve que le plan OPA est perpendiculaire à la ligne droite BC.

Corollaire.—La figure précédente montre que *les deux lignes droites* BC, OP, *qui ne sont pas comprises dans un même plan, ont une perpendiculaire commune* AP, *et que cette perpendiculaire mesure leur plus courte distance.* Car toute autre ligne droite OB, qui joint deux points quelconques O et B des lignes droites OP, BC, est plus grande que OA, et, par suite, plus grande que PA.

PROBLÈMES.

1. Tracer par un point donné une ligne droite qui rencontre deux lignes droites non situées dans le même plan.

2. Toute ligne droite, également inclinée sur trois lignes droites qui passent par son pied dans un plan, est perpendiculaire à ce plan.

3. Quel est le lieu géométrique des points d'un plan également éloignés de deux points donnés hors de ce plan?

4. Quel est le lieu géométrique des points de l'espace également éloignés de trois points non situés en ligne droite?

5. Quel est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires, menées d'un point extérieur à un plan sur les différentes lignes droites qu'on peut tirer dans ce plan par un point donné?

6. Quel est le lieu géométrique des points de l'espace tels que la différence des carrés des distances de chacun d'entre eux à deux points donnés soit constante?

7. Trouver sur une ligne droite un point tel que la différence des carrés de ses distances à deux points donnés soit égale à un carré donné.

8. Trouver sur un plan le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'entre eux à deux points donnés hors du plan soit constante.

TROISIÈME ET QUATRIÈME LEÇON

PROGRAMME : Parallélisme des droites et des plans.

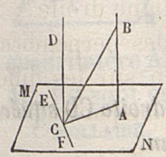
DÉFINITIONS

1. Une ligne droite est *parallèle* à un plan lorsqu'elle ne peut le rencontrer, quelque loin qu'on prolonge cette droite et le plan.

2. Deux plans sont *parallèles* s'ils ne peuvent se rencontrer, quelque prolongés qu'ils soient.

THÉORÈME I

Si deux lignes droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.



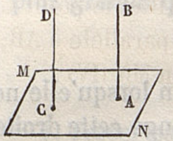
Soient AB et CD deux lignes droites parallèles ; je suppose le plan MN perpendiculaire à AB, et je dis qu'il est aussi perpendiculaire à CD.

En effet, le plan déterminé par les deux parallèles AB, CD (I) coupe le plan MN suivant la ligne droite AC. Or la ligne droite AB, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à la ligne droite AC menée par son pied dans ce plan; donc la ligne droite CD, parallèle à AB, est aussi perpendiculaire à AC (P., 7, III).

Pour démontrer que CD est perpendiculaire à une autre ligne droite du plan MN, je tire dans ce plan la ligne droite CE perpendiculaire à CA, et je joins le point C à un point quelconque B de AB par la ligne droite CB. Il résulte du théorème des trois perpendiculaires (1, VIII) que la ligne droite CE est perpendiculaire à CB et, par suite, au plan ACB (1, III) ; par conséquent, la ligne droite CD, menée par le point C dans ce plan, est perpendiculaire à CE. Or CD est déjà perpendiculaire à CA, donc elle est aussi perpendiculaire au plan MN, qui contient les deux lignes droites CA et CE.

THÉORÈME II

Si deux lignes droites AB, CD, *sont perpendiculaires au même plan* MN, *elles sont parallèles.*



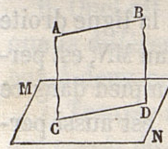
En effet, la parallèle menée à la ligne droite AB par le point C, où la droite CD rencontre le plan MN, est perpendiculaire à ce plan (I) ; elle coïncide donc avec CD qui, par hypothèse, est aussi perpendiculaire au plan MN (1, V).

Corollaire. — *Deux lignes droites* A *et* B, *parallèles à une troisième* C, *sont parallèles entre elles.*

Car, si je mène un plan perpendiculaire à la ligne droite C, ce plan sera aussi perpendiculaire aux lignes droites A, B, qui sont parallèles à C (I) ; les deux lignes A et B sont donc parallèles l'une à l'autre (II).

THÉORÈME III

Si la ligne droite AB *est parallèle à une ligne droite* CD *située dans le plan* MN, *elle est aussi parallèle à ce plan.*

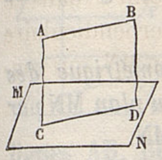


Le plan ABCD, déterminé par les deux parallèles AB, CD, coupe le plan MN suivant la ligne droite CD ; par conséquent la ligne droite AB, qui est située dans le premier de ces deux plans, ne peut rencontrer le second MN, puisqu'elle est supposée parallèle à leur intersection CD.

THÉORÈME IV

Si, par la ligne droite AB, *parallèle au plan* MN, *on fa-*

passer un plan qui coupe le plan MN, *leur intersection* CD *est parallèle à la ligne droite* AB.



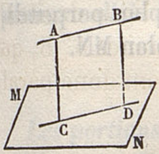
En effet, les lignes droites AB et CD ne peuvent se rencontrer, puisque la première AB est parallèle au plan MN, qui contient la seconde CD. Or ces lignes sont situées dans le même plan ABCD ; elles sont donc parallèles.

Corollaire. — *Si la ligne droite* AB *et le plan* MN *sont parallèles, la parallèle menée à* AB *par un point* C *du plan* MN *est située dans ce plan.*

Car le plan déterminé par la ligne droite AB et le point C coupe le plan MN suivant une ligne droite CD parallèle à AB, puisque la ligne droite AB est parallèle au plan MN (IV).

THÉORÈME V

Les portions AC, BD, *de deux lignes droites parallèles, comprises entre une ligne droite* AB *et un plan* MN *parallèles, sont égales.*



En effet, le plan des deux parallèles AC, BD coupe le plan MN suivant une ligne droite CD parallèle à AB, puisqu'il passe par la ligne droite AB qui est, par hypothèse, parallèle au plan MN (IV). Par conséquent, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, et les lignes droites AC, BD sont égales.

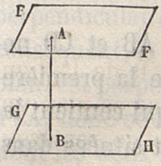
Corollaire. — *Une ligne droite et un plan parallèles sont partout également distants.*

De deux points quelconques A et B de la ligne droite AB, parallèle au plan MN, j'abaisse les perpendiculaires AC, BD sur ce plan ; ces lignes sont parallèles (II) et, par suite, égales entre elles. Donc la ligne droite AB et le plan MN sont partout également distants.

THÉORÈME VI

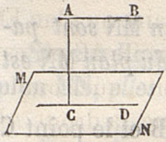
Deux plans EF, GH, *perpendiculaires à la même ligne droite* AB, *sont parallèles.*

En effet, ces plans ne peuvent se rencontrer, puisqu'on ne



peut mener par aucun point de l'espace deux plans perpendiculaires à la même ligne droite AB (1, IV).

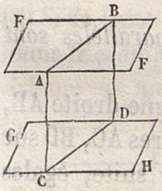
Corollaire. — *Le lieu géométrique des droites, menées parallèlement au plan* MN *par le même point* A, *est un plan parallèle au plan* MN.



Je mène du point A une parallèle quelconque AB et la perpendiculaire AC au plan MN. Ces deux lignes déterminent un plan qui coupe le plan MN suivant une droite CD parallèle à AB (IV), dès lors la droite CD et sa parallèle AB sont perpendiculaires à AC. Les parallèles au plan MN, menées par le même point A, sont donc perpendiculaires à la droite AC. Réciproquement, toute droite AB perpendiculaire à la droite AC est parallèle au plan MN. En effet, le plan mené par AB et AC coupe le plan MN suivant une droite CD, perpendiculaire à AC, de sorte que la droite AB est parallèle à CD (P., 7, 1) et, par suite, au plan MN; par conséquent, le lieu géométrique demandé est un plan perpendiculaire à AC (1, II), c'est-à-dire parallèle au plan MN.

THÉORÈME VII

Les intersections AB, CD *de deux plans parallèles* EF, GH, *par un même plan* ABCD, *sont parallèles.*

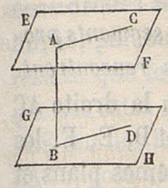


Les lignes droites AB, CD, situées respectivement dans les plans parallèles EF, GH, ne peuvent se rencontrer. Or, ces lignes se trouvent aussi dans le même plan ABCD; donc elles sont parallèles.

THEORÈME VIII

Si deux plans sont parallèles, toute ligne droite perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre.

Soit AB une ligne droite perpendiculaire au plan EF ; je dis qu'elle est aussi perpendiculaire au plan GH parallèle à EF.



Par le point d'intersection B de la ligne AB et du plan GH, je tire dans ce plan une ligne droite *quelconque* BD, et je remarque ensuite que le plan déterminé par les deux lignes AB, BD coupe le plan EF suivant une ligne droite AC parallèle à BD (VII). La droite AB, perpendiculaire au plan EF par hypothèse, est aussi perpendiculaire à la droite AC et, par suite, à sa parallèle BD. Or, BD est une droite quelconque menée par le pied de AB dans le plan GH ; donc la droite AB est perpendiculaire à ce plan.

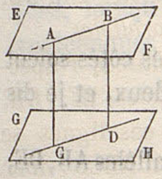
Corollaire I. — *Deux plans* A *et* B, *parallèles à un troisième* C, *sont parallèles entre eux.*

Car, si je mène une droite perpendiculaire au plan C, cette droite est aussi perpendiculaire aux plans A et B, qui sont dès lors parallèles l'un à l'autre (IV).

Corollaire II. — *On ne peut mener par un point qu'un seul plan parallèle à un plan donné.*

THÉORÈME IX

Les portions AC, BD *de deux lignes droites parallèles, comprises entre deux plans parallèles* EF, GH, *sont égales.*



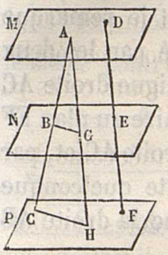
Le plan des deux droites parallèles AC, BD coupe les deux plans parallèles EF, GH suivant deux droites AB, CD, qui sont aussi parallèles (VII). Par conséquent, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, et ses côtés opposés AC, BD sont égaux.

Corollaire. — *Deux plans parallèles* EF, GH *sont partout également distants.*

De deux points quelconques A et B du plan EF j'abaisse les perpendiculaires AC, BD sur le plan GH ; ces droites sont parallèles (II) et, par suite, égales entre elles. Donc les plans parallèles EF, GH sont partout également distants.

THÉORÈME X

Trois plans parallèles M, N, P *interceptent des segments proportionnels sur deux lignes droites* AC, DF *qu'ils rencontrent.*



Soient A, B, C les points où la droite AC rencontre les plans M, N, P, et D, E, F, les intersections de chacun des mêmes plans et de la droite DF ; je tire du point A la droite AH parallèle à DF, et je mène le plan des deux droites AC, AH. Ce plan coupe les plans parallèles N et P suivant les droites BG, CH qui sont parallèles (VII) ; il en résulte que (P., 20, I)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GH}.$$

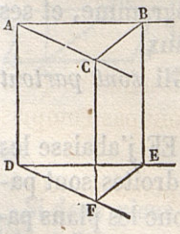
Mais les droites parallèles AG, DE sont égales, puisqu'elles sont comprises entre les plans parallèles M et N (IX), et la droite GH est égale à EF pour la même raison ; par conséquent

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

THÉORÈME XI

Si deux angles non situés dans le même plan ont leurs côtés parallèles, ils sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles.

Je considère 1° deux angles BAC, EDF, dont les côtés soient parallèles et dirigés dans le même sens deux à deux, et je dis qu'ils sont égaux.



Je prends, sur les côtés parallèles AB, DE, les longueurs AB, DE, égales entre elles, et sur les deux autres côtés, les longueurs égales AC, DF; je tire ensuite les droites AD, BE, CF. Le quadrilatère ABED, dont les côtés opposés AB, DE sont égaux et parallèles, est un parallélogramme ; par conséquent, les deux autres côtés AD, BE sont aussi égaux et parallèles. Or, la droite AD est égale et parallèle à CF pour la même raison; donc les deux droites BE, CF sont égales et parallèles à la même droite AD, et, par suite, égales et parallèles entre elles (II, c). Il en résulte que le quadrilatère BCFE est un parallélogramme, et que ses côtés opposés BC, EF sont égaux; les triangles ABC, DEF ont dès lors les côtés égaux chacun à chacun, et l'angle BAC opposé au côté BC est égal à l'angle EDF opposé au côté EF.

2° Les angles proposés sont encore égaux, si leurs côtés parallèles ont des directions contraires.

Démonstration identique à celle du même théorème de la Géométrie plane (P., 9, I).

3° Ces angles sont supplémentaires, si deux côtés parallèles ont la même direction, et les deux autres des directions contraires.

Démonstration identique à celle du même théorème de la Géométrie plane (P., 9, I).

4° Pour démontrer le parallélisme des plans ABC, DEF, je fais remarquer que les lignes droites AB, AC sont parallèles au plan DEF, puisqu'elles sont respectivement parallèles aux lignes droites DE, DF de ce plan (III); le plan déterminé par les lignes droites AB, AC est donc parallèle au plan DEF (VI, c).

Remarque I. — On appelle *angle de deux lignes droites, non situées dans le même plan*, l'angle constant que forment les parallèles menées à ces lignes par un même point de l'espace.

Remarque II. — Une ligne droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à deux lignes droites quelconques de ce plan.

PROBLÈMES.

1. Mener une parallèle à une ligne droite, de manière qu'elle rencontre deux autres lignes droites qui ne sont pas comprises dans un même plan.

2. Si une ligne droite et un plan sont perpendiculaires à la même droite, ils sont parallèles.

3. Si deux plans qui se coupent passent par deux lignes droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces lignes.

4. Lorsque deux plans qui se coupent sont parallèles à une même ligne droite, leur intersection est parallèle à cette ligne.

5. Mener par une ligne droite un plan parallèle à une autre ligne droite.

6. Mener par un point un plan parallèle à deux lignes droites données, ou à un plan donné.

7. Trouver le lieu géométrique des points dont les distances à deux plans parallèles sont proportionnelles à deux longueurs données m et n.

8. Tout plan, parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère *gauche* (quadrilatère dont les côtés ne sont pas compris dans un même plan), divise les deux autres côtés en segments proportionnels.

9. Les lignes droites qui passent par les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère gauche se rencontrent, et leur intersection est située au milieu de la ligne droite qui joint les milieux des diagonales.

CINQUIÈME LEÇON

Programme : Lorsque deux plans se rencontrent, la figure que forment ces plans, terminés à leur intersection commune, s'appelle *angle dièdre*. — Génération des angles dièdres par la rotation d'un plan autour d'une droite. — Dièdre droit. — Angle plan correspondant à l'angle dièdre. — Le rapport de deux angles dièdres est le même que celui de leurs angles plans.

DÉFINITIONS

1. On appelle *angle dièdre* la figure formée par deux plans ABC, DBC, qui se coupent et sont terminés à leur intersection BC. Cette ligne droite BC est l'*arête* de l'angle dièdre qui a les deux plans ABC, DBC pour *faces*.

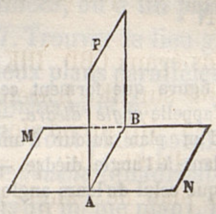
On désigne un angle dièdre par deux lettres placées sur son arête, quand cette ligne droite n'est pas l'arête d'un autre angle dièdre. Dans le cas contraire, on écrit une lettre sur chacune des faces et deux lettres sur l'arête; puis on énonce celles-ci entre les deux autres. Ainsi l'angle dièdre ABCD a pour arête la ligne droite BC, et ses deux faces ABC, DBC passent respectivement par les points A, D.

La grandeur d'un angle dièdre, par exemple de l'angle ABCD, ne dépend que de l'écartement de ses faces, qu'il faut toujours concevoir prolongées indéfiniment. Pour se faire une idée de cette grandeur, on suppose le plan DBC d'abord appliqué sur le plan ABC ; puis on le fait tourner autour de l'arête

BC jusqu'à ce qu'il ait repris sa position primitive. La quantité dont le plan DBC a tourné est précisément ce qui constitue la grandeur de l'angle dièdre ABCD.

2. Deux angles dièdres sont *adjacents* lorsqu'ils ont la même arête, une face commune, et qu'ils sont placés des deux côtés de cette face.

3. Un plan ABP est *perpendiculaire* ou *oblique* à un plan MN qu'il coupe suivant la ligne droite AB, selon qu'il fait avec celui-ci deux angles adjacents MABP, NABP, égaux ou inégaux.

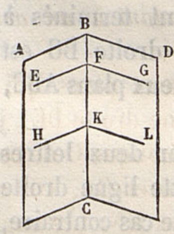


On nomme *angle dièdre droit* tout angle dièdre dont l'une des faces est perpendiculaire à l'autre.

4. Deux angles dièdres sont *opposés à l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre.

THÉORÈME I

Si, par deux points quelconques F *et* K *de l'arête d'un angle dièdre* ABCD, *on mène deux plans* EFG, HKL, *perpendiculaires à cette ligne, les angles* EFG, HKL *formés par les intersections de ces plans et des faces de l'angle dièdre sont égaux.*



En effet, les plans EFG, HKL, perpendiculaires à la ligne droite BC, sont parallèles (3, VI); ils coupent donc chacune des faces de l'angle dièdre A CD suivant deux lignes droites parallèles (3, VII). Par conséquent, les angles EFG, HKL, qui ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, sont égaux (3, XI).

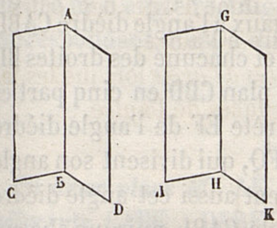
Remarque. — L'angle constant EFG, dont les deux côtés sont perpendiculaires à l'arête BC, a reçu le nom d'*angle plan correspondant à l'angle dièdre* ABCD.

THÉORÈME II

Si les angles plans qui correspondent à deux angles dièdres sont égaux, les angles dièdres sont aussi égaux.

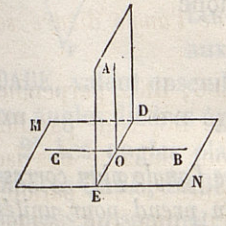
Soient deux angles dièdres AB, GH, dont les angles plans correspondants CBD, IHK, sont égaux; je dis que ces angles dièdres sont aussi égaux.

En effet, je superpose les angles plans égaux CBD, IHK, en appliquant le côté BC sur HI et le côté BD sur HK. L'arête BA perpendiculaire au plan de l'angle CBD (1, III) prend alors la direction de l'arête HG perpendiculaire au plan de l'angle IHK, et les plans ABC, GHI, qui ont par suite deux lignes droites communes, coïncident dans toute leur étendue. Il en est de même des deux plans ABD, GHK; par conséquent, les deux angles dièdres CABD, IGHK sont égaux.



Corollaire. — *Si l'angle plan correspondant à un angle dièdre est droit, cet angle dièdre est aussi droit.*

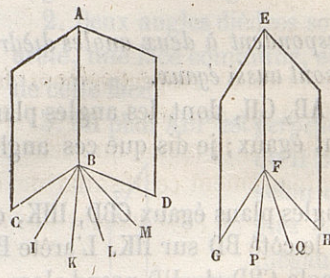
Soient MN et AD deux plans qui se coupent suivant la ligne droite DE; j'élève par un point quelconque O de cette ligne les perpendiculaires OA, OB sur DE dans les plans AD et MN. Les angles adjacents AOB, AOC, formés par ces deux lignes droites, sont les angles plans correspondants aux angles dièdres adjacents ADEN, ADEM; si l'angle AOB est droit, je dis que l'angle dièdre ADEN est aussi droit.



En effet, les angles supplémentaires AOB, AOC sont égaux puisque l'angle AOB est droit; donc les deux angles dièdres adjacents ADEN, ADEM, que le plan AD fait avec le plan MN, sont aussi égaux et, par conséquent, droits.

THÉORÈME III

Le rapport de deux angles dièdres quelconques CABD, GEFH, *est égal à celui des angles plans correspondants* CBD, GFH.

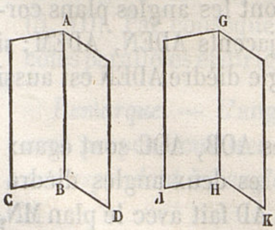


Je suppose rapport des deux angles plans CBD, GFH égal à $\frac{5}{3}$ (P., 15, déf. 2); ces angles ont alors une commune mesure CBI contenue 5 fois dans CBD et 3 fois dans GFH. Cela posé, je partage l'angle dièdre CABD en cinq angles dièdres égaux à l'angle dièdre CABI, en menant un plan par son arête AB et chacune des droites BI, BK, BL, BM, qui divisent son angle plan CBD en cinq parties égales (II). Les plans, menés par l'arête EF de l'angle dièdre GEFH et par chacune des droites FP, FQ, qui divisent son angle plan en trois parties égales, partagent aussi cet angle dièdre en trois angles dièdres égaux à l'angle CABI, puisque chacun des angles plans correspondants est égal à l'angle CBI. Par conséquent, l'angle dièdre CABI étant contenu 5 fois dans l'angle dièdre CABD et 3 fois dans l'angle dièdre GEFH, le rapport de CABD à GEFH est égal à $\frac{5}{3}$; on a donc

$$\frac{CABD}{GEFH}=\frac{CBD}{GFH}.$$

THÉORÈME IV

Tout angle dièdre a la même mesure que l'angle plan correspondant, si l'on prend pour unités un angle dièdre quelconque et l'angle plan qui lui correspond.



Soit à mesurer l'angle dièdre CABD avec un angle dièdre quelconque IGHK pris pour unité ; je conviens d'évaluer l'angle plan CBD correspondant à l'angle dièdre CABD, en prenant pour unité l'angle plan IHK, qui correspond à l'angle dièdre IGHK, et j'ai (III)

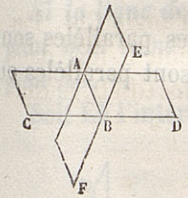
$$\frac{\mathrm{CABD}}{\mathrm{IGHK}} = \frac{\mathrm{CBD}}{\mathrm{IHK}}.$$

Or, ces deux rapports égaux expriment respectivement les mesures de l'angle dièdre CABD et de son angle plan CBD; donc la mesure de cet angle dièdre est la même que celle de son angle plan. On énonce ordinairement ce résultat de la manière suivante : *l'angle dièdre* CABD *a pour mesure l'angle plan correspondant* CBD.

Remarque. — On prend généralement pour les unités d'angle dièdre et d'angle rectiligne l'*angle dièdre droit* et l'angle plan correspondant, c'est-à-dire l'*angle rectiligne droit*.

THÉORÈME V

Si deux plans AC, AE *se rencontrent*, 1° *les angles dièdres adjacents* CABE, DABE *sont supplémentaires*, 2° *les angles dièdres* CABE, DABF, *opposés par l'arête*, *sont égaux*.



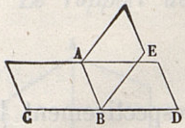
1° Je mène le plan CDEF perpendiculaire à l'intersection AB des deux plans AC, AE. Les angles plans CBE, DBE, correspondant aux deux angles dièdres adjacents CABE, DABE, valent ensemble deux angles droits; donc la somme de ces angles dièdres égale aussi deux angles dièdres droits.

2° Les angles plans CBE, DBF, correspondant aux angles dièdres CABE, DABF, opposés par l'arête, sont égaux comme opposés au sommet; donc les angles dièdres CABE, DABF sont aussi égaux.

THÉORÈME VI

Si deux angles dièdres adjacents CABE, DABE *sont supplémentaires*, *leurs faces non communes* ABC, ABD *sont comprises dans le même plan.*

Soit CDE un plan perpendiculaire à l'arête AB des deux angles dièdres supplémentaires CABE, DABE ; les angles plans CBE, DBE correspondant à ces angles dièdres sont aussi supplémentaires ; leurs côtés non communs BC, BD sont donc en ligne droite. Les plans ABC, ABD ont dès lors deux lignes droites communes AB, CD, et coïncident dans toute leur étendue (1, I).



PROBLÈMES.

1. Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un même plan, les quatre angles dièdres aigus qui en résultent sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus. — Décomposer cet énoncé en cinq autres, en se servant des dénominations d'angles dièdres alternes-internes, alternes-externes, correspondants, internes ou externes du même côté.

Les réciproques de ces théorèmes ne sont vraies que si les arêtes des deux angles dièdres que l'on compare sont parallèles.

2. Deux angles dièdres qui ont les arêtes parallèles sont égaux ou supplémentaires, si leurs faces sont parallèles ou perpendiculaires chacune à chacune.

SIXIÈME LEÇON

Programme : Plans perpendiculaires entre eux. — Si deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième.

—

DÉFINITIONS

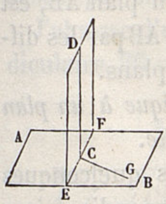
On appelle *projection d'un point* sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur ce plan.

La *projection d'une ligne* quelconque sur un plan est le lieu des projections des différents points de cette ligne sur ce plan.

THÉORÈME I

Si la ligne droite DC *est perpendiculaire au plan* AB, *tout plan* DCE *mené par cette ligne est aussi perpendiculaire au plan* AB.

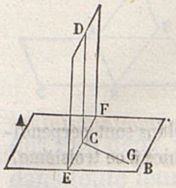
Soit EF l'intersection des deux plans AB, DE ; par le point C, où la droite DC rencontre le plan AB, je tire dans ce plan la droite CG perpendiculaire à EF. L'angle plan DCG, correspondant à l'angle dièdre DEFB, est droit, puisque la ligne droite DC est perpendiculaire au plan AB ; donc l'angle dièdre DEFB est droit (5, II, c), et le plan DCE perpendiculaire au plan AB.



THÉORÈME II

Si les plans AB, DE *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute ligne droite, menée dans l'un de ces plans de manière qu'elle soit perpendiculaire à leur intersection* EF, *est perpendiculaire à l'autre plan.*

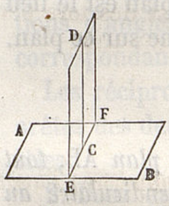
Je tire dans le plan DE la droite DC perpendiculaire à EF, et je dis qu'elle est aussi perpendiculaire au plan AB.



Pour le démontrer, je mène par le point C la droite CG perpendiculaire à EF dans le plan AB. L'angle dièdre DEFB est droit, puisque les plans AB, DE sont perpendiculaires l'un à l'autre; donc l'angle plan DCG, correspondant à cet angle dièdre, est droit. Il en résulte que la droite DC est perpendiculaire aux deux droites EF, CG, et, par suite, au plan AB qui contient ces deux lignes.

THÉORÈME III

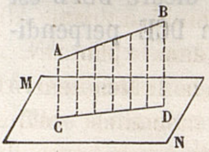
Si deux plans AB, DE *sont perpendiculaires l'un à l'autre, oute perpendiculaire élevée sur l'un de ces plans par un point de leur intersection* EF *est située dans l'autre.*



En effet, la perpendiculaire élevée sur le plan AB par un point quelconque C de l'intersection EF doit coïncider avec la droite CD, menée perpendiculairement sur EF, par le même point C, dans le plan DE; car CD est aussi perpendiculaire au plan AB (II).

Remarque. — Le plan DE, perpendiculaire au plan AB, est le lieu des perpendiculaires élevées sur le plan AB par les différents points de l'intersection EF de ces deux plans.

Corollairf. — *Si une ligne droite* AB *est oblique à un plan* MN, *sa projection sur ce plan est une ligne droite.*



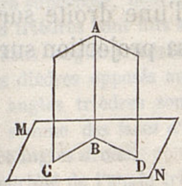
J'abaisse de deux points quelconques A et B de la droite AB les perpendiculaires AC, BD sur le plan MN. Ces droites sont parallèles (3, II), et le plan qu'elles déterminent est perpendiculaire au plan MN (I); je dis que l'intersection CD de ces deux plans est la projection de AB sur MN.

En effet, les perpendiculaires abaissées des différents points de la ligne AB sur CD sont parallèles à AC, et, par suite, situées dans le plan ABDC; le lieu des pieds de ces perpendiculaires c'est-à-dire la projection de la droite AB sur le plan MN, est donc la droite CD suivant laquelle les plans MN, AD se coupent.

THÉORÈME IV

Si deux plans AC, AD *qui se coupent sont perpendiculaires à un troisième plan* MN, *leur intersection* AB *est aussi perpendiculaire au plan* MN.

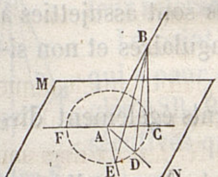
Soit B le point où le plan MN est rencontré par l'intersection AB des deux plans AC, AD; si j'élève par ce point une perpendiculaire sur le plan MN, cette droite est comprise dans chacun des plans AC, AD, perpendiculaires à MN par hypothèse (III) ; elle coïncide donc avec leur intersection AB, qui est dès lors perpendiculaire au plan MN.



THÉORÈME V

Si une ligne droite AB *est oblique à un plan* MN, *l'angle qu'elle fait avec sa projection sur ce plan est le plus petit des angles que cette ligne fait avec toutes les droites qu'on peut mener par son pied* A *dans le plan* MN.

J'abaisse d'un point quelconque B de la droite AB la perpendiculaire BC sur le plan MN; la droite AC, qui joint les pieds A et C des deux lignes BA, BC, est la projection de AB sur ce plan (III, c). Je dis que l'angle BAC est moindre que l'angle BAD formé par AB et toute autre droite AD, menée par le point A dans le plan MN.



En effet, si je prends la longueur AD égale à AC et que je tire la droite BD, cette ligne est oblique au plan MN et, par conséquent, plus grande que la perpendiculaire BC (1, VI). Les triangles ABC, ABD ont dès lors un côté inégal et les deux autres côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle BAC, opposé au plus petit côté BC, est moindre que l'angle BAD, opposé au plus grand côté BD (P., 3, V, c).

Remarque I. — L'angle BAD que l'oblique AB fait avec AD croît avec l'angle CAD, formé par AD et la projection AC de AB.

En effet, soit l'angle CAE plus grand que CAD ; je décris une circonférence du point A comme centre, avec le rayon AC. La corde CE est plus grande que CD (P., 11, IV) ; donc l'oblique BE est plus grande que l'oblique BD. Les triangles ABE, ABD, ayant par suite un côté inégal et les deux autres côtés égaux chacun à chacun, l'angle BAE opposé au côté BE est plus grand que l'angle BAD opposé au côté BD (P., 3, V, c).

Remarque II. — On mesure l'inclinaison d'une droite sur un plan par l'angle que cette ligne fait avec sa projection sur ce plan.

PROBLÈMES.

1. Si deux plans perpendiculaires à un troisième passent par deux lignes droites parallèles, ils sont eux-mêmes parallèles. — Les projections de deux lignes droites parallèles sur le même plan sont parallèles.

2. Si une ligne droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette ligne sur un plan quelconque est perpendiculaire à l'intersection des deux plans.

3. Tracer la perpendiculaire commune à deux lignes droites qui ne sont pas situées dans le même plan.

4. Quel est le lieu géométrique du milieu d'une ligne droite de longueur constante, dont les extrémités sont assujetties à rester sur deux autres lignes droites rectangulaires et non situées dans le même plan ?

5. Quel est le lieu géométrique des points également distants de deux plans qui se coupent ?

6. Quel est le lieu géométrique des points également distants de trois plans dont les trois intersections sont parallèles ?

7. Une ligne droite est également inclinée sur deux plans qui se coupent, lorsqu'elle les rencontre en des points également distants de leur intersection. — La réciproque est vraie.

8. Toute droite, oblique à un plan, est perpendiculaire à une droite menée par son pied dans ce plan.

SEPTIÈME LEÇON

Pogramme : Angles trièdres. — Chaque face d'un angle trièdre est plus petite que la somme des deux autres. — Si l'on prolonge les arêtes d'un angle trièdre au delà du sommet, on forme un nouvel angle trièdre qui ne peut lui être superposé, bien qu'il soit composé des mêmes éléments. Ces deux angles trièdres sont dits *symétriques* l'un de l'autre.

Si deux angles trièdres ont leurs faces égales chacune à chacune, les angles dièdres opposés aux faces égales sont égaux chacun à chacun, et les deux angles trièdres sont égaux ou symétriques.

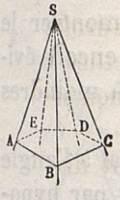
La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est plus petite que quatre angles droits.

Propriété de l'angle trièdre supplémentaire.

La somme des angles dièdres d'un angle trièdre est comprise entre deux droits et six droits. — Analogie et différence entre les angles trièdres et les triangles rectilignes.

DÉFINITIONS

1. On appelle *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans, tels que SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, qui passent par le même point S, et sont terminés à leur intersection SA, SB, SC, SD, SE.



Le point S est le *sommet* de l'angle polyèdre qui a pour *arêtes* les droites SA, SB, etc. Les angles ASB, BSC, etc., formés par deux arêtes consécutives quelconques, sont les *faces* de l'angle polyèdre S.

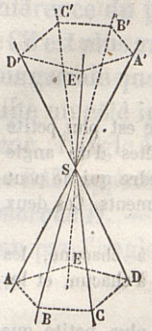
Il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre; on donne le nom d'*angle trièdre* à celui qui n'a que trois faces.

Un angle trièdre est *rectangle* s'il a un angle dièdre droit ; *birectangle* s'il en a deux, et *trirectangle* si ses trois angles dièdres sont droits.

2. Un angle polyèdre est *convexe* s'il se trouve entièrement

d'un même côté de chacun des plans prolongés indéfiniment qui le forment. On dit qu'il est *concave* dans le cas contraire.

Il est évident que le plan ABCDE, qui rencontre toutes les arêtes de l'angle polyèdre convexe S d'un même côté du sommet, coupe sa surface suivant un polygone convexe ABCDE.

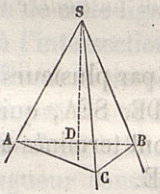


3. On dit que deux angles polyèdres, tels que SABCDE, SA'B'C'D'E', sont *opposés par le sommet* lorsque les arêtes de l'un sont les prolongements des arêtes de l'autre.

On démontrera dans cette leçon que deux angles polyèdres opposés par le sommet ont les faces égales et les angles dièdres égaux chacun à chacun, mais qu'en général ils ne sont pas superposables.

THÉORÈME I

Chacun des angles plans qui forment un angle trièdre est moindre que la somme des deux autres.



Soit SABC l'angle trièdre formé par les angles plans ASB, BSC, CSA ; si ces trois angles sont égaux, le théorème est évident. S'ils sont inégaux, et que l'angle ASB soit le plus grand des trois, il suffit de démontrer le théorème pour cet angle ; car il est encore évident pour les deux autres BSC, CSA, qui sont déjà moindres que l'angle ASB seul.

Cela posé, je fais dans le plan SAB l'angle BSD égal à l'angle BSC ; le côté SD se trouve dans l'angle ASB qui est par hypothèse plus grand que BSC. Je tire ensuite une ligne droite qui rencontre les trois lignes SA, SD, SB du même côté du point S ; soient A, D et B les points d'intersection respectifs. Je prends sur l'arête SC une longueur SC égale à SD, et je mène un plan par la droite AB et le point C ; ce plan coupe les faces ASC, BSC de l'angle trièdre suivant les droites AC et BC.

Les triangles BSC, BSD sont égaux, car ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; par conséquent les deux autres côtés BC, BD sont égaux aussi, et la droite AD, différence des deux côtés AB, BC du triangle ABC, est moindre que le troisième côté AC (P., 3, I, c). Les triangles ASD, ASC ont dès lors un côté inégal et deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : le côté AD moindre que AC, le côté SD égal à SC, et le côté SA commun. L'angle ASD opposé au côté AD est par suite moindre que l'angle ASC opposé au côté AC (P., 3, IV, c); or l'angle BSD est par hypothèse égal à l'angle BSC, donc on a :

$$ASD + BSD < ASC + BSC,$$

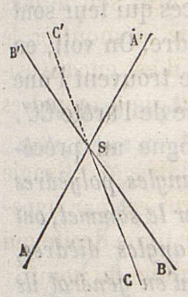
ou

$$ASB < ASC + BSC.$$

THÉORÈME II

Deux angles trièdres SABC, SA'B'C', *opposés par le sommet, ont tous leurs éléments, faces et angles dièdres, égaux chacun à chacun; mais ils ne sont superposables que si l'un ou l'autre a deux faces égales.*

En effet, les faces ASB, A'SB' des angles trièdres SABC, SA'B'C' sont égales comme opposées par le sommet (P., 2, III); il en est de même des faces ASC, A'SC', ainsi que des faces BSC, B'SC'. L'angle dièdre BSAC est égal à l'angle dièdre B'SA'C', parce qu'ils sont opposés par l'arête (5, V); les angles dièdres ASCB, A'SC'B' sont ainsi égaux pour la même raison, ainsi que les angles dièdres ASBC, A'SB'C'.

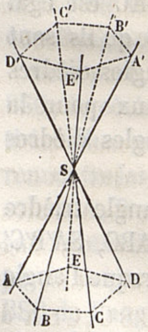


Je dis maintenant que, si l'angle trièdre SABC a deux faces égales, les angles trièdres SABC, SA'B'C' sont superposables; mais qu'ils ne le sont pas lorsque l'angle trièdre SABC a toutes ses faces inégales.

Je suppose d'abord la face ASC de l'angle trièdre SABC égale à la face BSC, et je fais coïncider les deux angles dièdres égaux ASBC, A′SB′C′, en plaçant l'arête SC′ sur l'arête SC et le plan SC′B′ sur le plan SCA; car les plans SC′A′, SCB s'appliquent alors l'un sur l'autre, à cause de l'égalité des deux angles dièdres. Cette superposition étant effectuée, je fais remarquer que les angles B′SC′, ASC sont égaux, parce que chacun d'eux est égal à l'angle BSC; dès lors l'arête SB′ prend la direction de SA. Par une raison semblable, l'arête SA′ s'applique sur SB; le plan SB′A′ coïncide par suite avec le plan SAB, et les angles trièdres SABC, SA′B′C′ sont égaux.

Je suppose, en second lieu, que l'angle trièdre SABC n'ait pas de faces égales, et je superpose encore les angles dièdres égaux ASCB, A′SC′B′; mais alors l'arête SB′ ne prend pas la direction de SA, parce que les angles B′SC′, ASC ne sont plus égaux; pareillement l'arête SA′ ne s'applique pas sur SB, de sorte que le plan SB′A′ ne coïncide pas avec le plan SBA. Les angles trièdres SABC, SA′B′C′ sont donc inégaux.

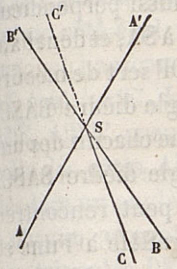
Remarque. — L'impossibilité de faire coïncider les deux angles trièdres SABC, SA′B′C′, lorsque l'angle SABC n'a pas deux faces égales, provient de ce que les faces de cet angle ne sont pas assemblées dans le même ordre que les faces qui leur sont respectivement égales dans l'autre angle trièdre. On voit, en effet, que les deux faces égales ASC, A′SC′ se trouvent l'une à la droite et l'autre à la gauche de l'arête CC′.



Par un raisonnement analogue au précédent, on démontre que *deux angles polyèdres* SABCDE, SA′B′C′D′E′, *opposés par le sommet, ont tous leurs éléments, faces et angles dièdres, égaux chacun à chacun, mais qu'en général ils ne sont pas superposables*, parce que leurs faces égales ne sont pas disposées de la même manière. On exprime ces différentes propriétés de deux angles polyèdres opposés par le sommet, en disant que ces angles sont *symétriques*.

THÉORÈME III

Si un angle trièdre SABC *a deux faces égales* CSA, CSB, *les angles dièdres* SB, SA *opposés à ces faces sont égaux*, et réciproquement.



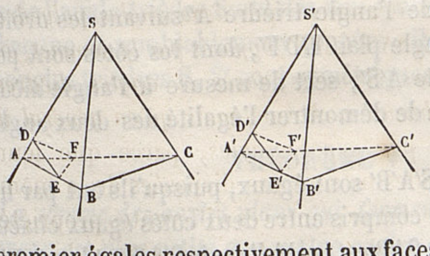
Soit SA′B′C′ l'angle trièdre formé par les prolongements des arêtes de l'angle trièdre SABC ; ces deux angles opposés par le sommet sont égaux, puisque les faces CSA, CSB de l'angle trièdre SABC sont égales par hypothèse (II), et leur superposition prouve l'égalité des angles dièdres SB, SA′. Or l'angle dièdre SA′ est aussi égal à l'angle dièdre SA, parce qu'ils sont opposés par l'arête (5, V) ; donc les angles dièdres SB, SA, opposés aux faces égales CSA, CSB de l'angle trièdre SABC, sont égaux.

Réciproquement, on démontre par un raisonnement analogue au précédent que *si un angle trièdre* SABC *a deux angles dièdres égaux* SA, SB, *les faces* CSB, CSA, *opposées à ces angles, sont égales.*

Corollaire. — *Si les trois faces d'un angle trièdre sont égales, ses trois angles dièdres sont aussi égaux*, et réciproquement.

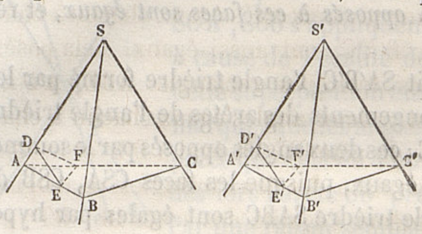
THÉORÈME IV

Si deux angles trièdres ont leurs faces égales chacune à chacune, leurs angles dièdres opposés aux faces égales sont égaux chacun à chacun, et les deux angles trièdres sont égaux ou symétriques.



Soient SABC, SA′B′C′, deux angles trièdres ; je suppose les faces ASB, BSC, CSA du premier égales respectivement aux faces A′S′B′, B′S′C′, C′S′A′ du second, et je dis d'abord que l'angle dièdre BASC est égal à l'angle dièdre B'A'S'C'.

Par un point quelconque D de l'arête SA je mène un plan perpendiculaire à cette droite ; il coupe les deux faces de l'angle dièdre BASC suivant les droites DE, DF, qui sont aussi perpendiculaires à SA, et dont l'angle EDF sert de mesure à l'angle dièdre BASC.



Comme chacun des angles ASB, ASC, dont les plans forment l'angle dièdre BASC, peut être aigu, droit ou obtus, le plan EDF peut rencontrer chacune des deux droites SB, SC, ou être parallèle à l'une et couper l'autre, ou être parallèle à ces deux lignes, ou bien rencontrer leurs prolongements au delà du point S. Pour éviter l'examen de ces différents cas, je prends sur les arêtes de l'angle trièdre S les longueurs égales SA, SB, SC ; je mène un plan par les trois points A, B, C, et je substitue à l'angle trièdre S l'angle trièdre formé par les plans ASB, ASC, ABC. Ce nouvel angle trièdre a l'angle dièdre BASC commun avec l'angle trièdre S, et le plan EDF rencontre ses arêtes AB, AC, aux points E et F, puisque les angles BAS, CAS, adjacents aux bases AB, AC des triangles isocèles SAB, SAC, sont aigus.

Cela posé, je prends sur les arêtes de l'angle trièdre S' les longueurs S'A', S'B', S'C' égales à SA, et je fais passer un plan par les trois points A', B', C'. Je prends ensuite sur A'S' une longueur A'D' égale à AD, et je mène par le point D' un plan perpendiculaire à l'arête S'A'. Ce plan coupe les trois faces A'S'B', A'S'C', A'B'C' de l'angle trièdre A' suivant les droites D'E', D'F', E'F', et l'angle plan E'D'F', dont les côtés sont perpendiculaires à l'arête A'S', sert de mesure à l'angle dièdre B'A'S'C'. Il s'agit donc de démontrer l'égalité des deux angles EDF, E'D'F'.

Les triangles SAB, S'A'B' sont égaux, puisqu'ils ont par hypothèse un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; donc l'angle SAB est égal à l'angle S'A'B' et le côté AB égal au côté A'B'. Je démontrerais de même l'égalité des triangles SAC, S'A'C' et celle des triangles SBC, S'B'C'; il en résulte que l'angle SAC est égal à l'angle S'A'C', et que les côtés AC, BC sont égaux respectivement aux côtés A'C', B'C'. Les deux triangles ABC, A'B'C' ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, leurs angles BAC, B'A'C' sont aussi égaux. Cela posé, je fais remarquer que les triangles rectangles ADE, A'D'E' ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, et j'en conclus que le côté DE est égal à D'E' et le côté AE égal à A'E'. La comparaison des deux triangles rectangles ADF, A'D'F' prouve de même l'égalité des côtés DF, D'F' et celle des côtés AF, A'F'. Les deux triangles AEF, A'E'F' ont dès lors un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et sont égaux ; donc le côté EF est égal au côté E'F'. Les triangles DEF, D'E'F' ont par conséquent les trois côtés égaux chacun à chacun, et l'angle EDF, opposé au côté EF, est égal à l'angle E'D'F', opposé au côté E'F'.

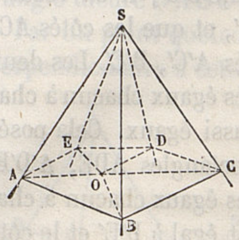
Je dis, en second lieu, que les angles trièdres SABC, S'A'B'C' sont égaux ou symétriques, selon que leurs faces égales sont semblablement ou inversement disposées. Je suppose d'abord les faces égales semblablement placées, et je superpose la face A'S'C' sur la face ASC qui lui est égale ; comme les angles dièdres SA, S'A', opposés aux faces égales B'S'C', BSC, sont égaux, le plan A'S'B' s'applique sur le plan ASB, et la droite S'B' sur la droite SB, puisque l'angle A'S'B' est égal à l'angle ASB. Les deux faces B'S'C', BSC coïncident par suite, et les deux angles trièdres S'A'B'C', SABC sont égaux.

Je suppose, en second lieu, les faces égales des deux angles trièdres inversement placées ; l'angle trièdre S' et le symétrique de l'angle trièdre S ont dès lors leurs faces égales chacune à chacune et semblablement placées ; ils sont donc égaux, et les angles trièdres S, S' sont symétriques.

THÉORÈME V

La somme des angles plans qui forment un angle polyèdre convexe est plus petite que quatre angles droits.

Soit SABCDE un angle polyèdre convexe, formé par les angles plans de ASB, BSC, CSD, DSE, ESA; je le coupe par un plan qui rencontre toutes ses arêtes du même côté de leur intersection S; je prends un point quelconque O à l'intérieur de la section ABCDE, et je le joins par des lignes droites à tous les sommets. Le polygone ABCDE est décomposé en autant de triangles qu'il a de côtés, ou en autant de triangles que son plan en détermine sur les faces de l'angle polyèdre S.



Cela posé, si on considère successivement les divers angles trièdres que le plan de la section ABCDE fait avec les faces de l'angle polyèdre S, on a dans l'angle trièdre ABSE (1) :

$$SAB + SAE > BAE;$$

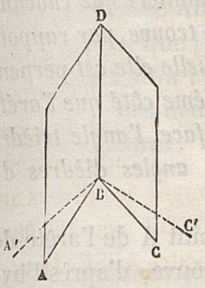
on a de même dans l'angle trièdre BCSA :

$$SBA + SBC > ABC,$$

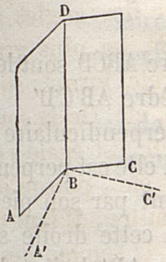
et ainsi de suite. En ajoutant membre à membre les inégalités précédentes, on trouve que la somme des angles SAB, SBA, SBC, etc., formés sur les bases AB, BC, etc. des triangles SAB, SBC, etc., est plus grande que celle des angles intérieurs BAE, CBA, etc. du polygone ABCDE, ou plus grande que la somme des angles OAB, OBA, OBC, etc. formés sur les bases AB, BC, etc. des triangles OAB, OBC, etc. Or la somme de tous les angles des triangles SAB, SBC, etc. est égale à celle de tous les angles des triangles OAB, OBC, etc., puisqu'il y a le même nombre de triangles de part et d'autre; il faut donc que, dans le premier groupe de triangles, la somme des angles qui ont le point S pour sommet commun soit moindre que celle des angles qui, dans le second groupe de triangles, ont leurs sommets au point O. Par conséquent, la somme des angles plans ASB, BSC, CSD, etc., qui forment l'angle polyèdre S, est moindre que quatre angles droits.

THÉORÈME VI

Si, d'un point quelconque de l'arête d'un angle dièdre, on élève des perpendiculaires sur ses faces, de manière que chacune de ces droites se trouve, par rapport à la face sur laquelle elle est perpendiculaire, du même côté que l'autre face, l'angle des deux perpendiculaires est le supplément de l'angle plan correspondant à l'angle dièdre.



D'un point quelconque B de l'arête BD d'un angle dièdre ABDC, j'élève la perpendiculaire BC′ sur le plan ABD du côté de la face CBD, et la perpendiculaire BA′ sur le plan CBD du côté de la face ABD. Le plan de ces deux droites coupe les faces de l'angle dièdre suivant les droites BA, BC qui sont perpendiculaires à l'arête BD, et forment dès lors l'angle plan correspondant à l'angle dièdre; je dis que l'angle A′BC′ est le supplément de cet angle plan ABC.

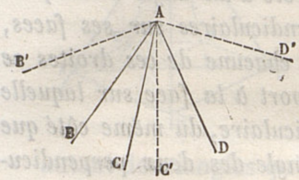


En effet, la droite BC′, perpendiculaire au plan ABD, est, par suite, perpendiculaire à la droite BA qui passe par son pied dans ce plan ; pour la même raison, la droite BA′ est aussi perpendiculaire à la droite BC ; par conséquent, les deux angles ABC, A′B′C′ ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun. Or, si l'angle ABC est aigu (fig. 1), l'angle A′BC′ est plus grand que l'angle droit ABC′, c'est-à-dire obtus ; et, si l'angle ABC est obtus (fig. 2), l'angle A′BC′ est plus petit que l'angle droit ABC′, c'est-à-dire aigu ; donc, dans l'un et l'autre cas, l'angle A′BC′ est le supplément de l'angle ABC.

Scolie. Le théorème est encore vrai lorsque l'angle ABC est droit ; car BC′ se confond alors avec BC, et BA′ avec BA ; donc l'angle A′BC′ est droit, c'est-à-dire qu'il est le supplément de l'angle ABC.

THÉORÈME VII

Si du sommet A *d'un angle trièdre* ABCD *on élève les perpendiculaires* AB′, AC′, AD′ *sur ses trois faces, de manière que chacune de ces droites se trouve, par rapport à la face sur laquelle elle est perpendiculaire, du même côté que l'arête opposée à cette face, l'angle trièdre* AB′C′D′ *a pour faces les suppléments des angles dièdres de l'angle trièdre* ABCD; *et réciproquement.*

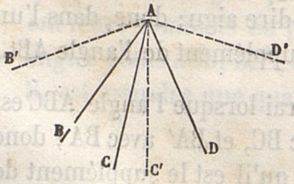


La perpendiculaire AB′, élevée par le point A de l'arête de l'angle dièdre BADC sur la face CAD, se trouve, d'après l'hypothèse, du même côté du plan CAD que l'arête AB ou que l'autre face BAD. La perpendiculaire AC′ à la face BAD est aussi du même côté du plan BAD que l'autre face CAD. Par conséquent, l'angle B′AC′ est le supplément de l'angle plan correspondant à l'angle dièdre BADC (VI).

Je prouverais, de même, que les angles C′AD′, D′AB′ sont les suppléments respectifs des angles plans correspondants aux angles dièdres CABD, DACB.

Réciproquement, les faces de l'angle driédre ABCD sont les suppléments des angles dièdres de l'angle trièdre AB′C′D′

Je remarque d'abord que la droite AD est perpendiculaire à la face B′AC′ de l'angle trièdre AB′C′D′, puisqu'elle est perpendiculaire aux deux droites AB′, AC′ qui passent par son pied dans ce plan (E., 1, II); je dis, en outre, que cette droite se trouve du même côté du plan B′AC′ que l'arête AD′ de l'angle trièdre AB′C′D′. En effet, les deux droites AD, AD′ étant, par hypothèse, du même côté du plan BAC et la droite AD′ perpendiculaire à ce plan, l'angle DAD′ est aigu; par conséquent, les deux droites AD, AD′ se trouvent aussi du même côté du plan B′AC′ qui est perpendiculaire sur la droite AD.



Je démontrerais de même : 1° que la droite AC est perpendiculaire à la face B'AD' de l'angle trièdre AB'C'D' et qu'elle se trouve du même côté de cette face que l'arête opposée AC'; 2° que la droite AB est perpendiculaire à la face C'AD' du même angle trièdre, et qu'elle est du même côté de cette face que l'arête opposée AB'. De là je conclus, en vertu de la proposition directe, que l'angle BAC est le supplément de l'angle plan correspondant à l'angle dièdre B'AD'C', etc.

Scolie. Les deux *angles trièdres* ABCD, AB'C'D' sont dits *supplémentaires*.

THÉORÈME VIII

1° *Chaque angle dièdre d'un angle trièdre, augmenté de deux angles dièdres droits, est plus grand que la somme des deux autres angles dièdres.*

2° *La somme des trois angles dièdres d'un angle trièdre est comprise entre deux angles dièdres droits et six angles dièdres droits.*

1° Soient A, B, C les rapports des trois angles dièdres d'un angle trièdre à l'angle dièdre droit ; les faces de l'angle trièdre supplémentaire, rapportées à l'angle plan droit, sont représentées respectivement par

$$2 - A, \quad 2 - B, \quad 2 - C.$$

Or, chacune de ces faces est moindre que la somme des deux autres (I) ; donc on a :

$$2 - A < 2 - B + 2 - C$$

et, par suite,

$$A + 2 > B + C,$$

2° La somme des trois faces de l'angle trièdre supplémentaire est positive et plus petite que quatre angles droits (V). Par conséquent, on a

$$6 - A - B - C > 0$$

et

$$6 - A - B - C < 4;$$

on en déduit successivement :

$$A + B + C < 6$$

et

$$A + B + C > 2.$$

Scolie. Il importe de remarquer l'analogie qui existe entre les propriétés de l'angle trièdre et celles du triangle. On passe des unes aux autres en substituant aux côtés et aux sommets du triangle les faces et les arêtes de l'angle trièdre.

1er Exemple. *Chaque côté d'un triangle est moindre que la somme des deux autres.*

Chaque face d'un angle trièdre est moindre que la somme des deux autres.

2e Exemple. *Si un triangle a deux angles égaux, les angles opposés à ces côtés sont égaux.*

Si un angle trièdre a deux faces égales, les angles dièdres opposés à ces faces sont égaux.

3e Exemple. *Si deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Si deux angles trièdres ont les trois faces égales chacune à chacune, les angles dièdres, opposés aux faces égales, sont égaux, etc.

Il n'est pas moins important de remarquer que si à chaque propriété du triangle, correspond une propriété de l'angle trièdre, la réciproque n'est pas toujours vraie. Ainsi la propriété de la somme des faces d'un angle trièdre d'être moindre que quatre angles droits, n'a pas d'analogue dans le triangle.

PROBLÈMES.

1. Quel est le lieu géométrique des points également distants des trois faces d'un angle trièdre?

2. Quel est le lieu géométrique des points également éloignés des trois arêtes d'un angle trièdre?

3. Les plans, menés perpendiculairement aux faces d'un angle trièdre par les arêtes opposées à ces faces, passent par une même droite.

4. Les plans, menés par chacune des arêtes d'un angle trièdre et la bissectrice de la face opposée à cette arête, passent par une même droite.

5. Toute section, faite dans un angle trièdre rectangle par

un plan perpendiculaire à l'une de ses arêtes, est un triangle rectangle.

6. Le point de rencontre des hauteurs du triangle qu'on obtient en coupant un angle trièdre trirectangle par un plan, est la projection du sommet de l'angle trièdre sur ce plan.

7. Si l'on coupe un angle trièdre trirectangle par un plan qui rencontre ses trois arêtes, 1° le triangle intercepté sur chacune des faces est moyenne proportionnelle entre sa projection sur le plan sécant et la section que ce plan détermine dans l'angle trièdre; 2° le carré de cette section est égal à la somme des carrés de ses projections sur les faces de l'angle trièdre.

8. Couper un angle polyèdre à quatre faces par un plan tel que la section soit un parallélogramme.

9. Les perpendiculaires, abaissées d'un point pris à l'intérieur d'un angle trièdre sur les faces de cet angle, sont les arêtes d'un second angle trièdre qui a pour faces et pour angles dièdres les suppléments des angles dièdres et ceux des faces du premier.

10. La plus grande face d'un angle trièdre est opposée au plus grand angle drièdre, et réciproquement.

11. La somme des angles que les arêtes d'un angle trièdre font avec les faces qui leur sont respectivement opposées, est moindre que la somme des trois faces, et plus grande que la moitié de cette somme.

HUITIÈME ET NEUVIÈME LEÇON

Programme : Des polyèdres. — Parallélipipède. — Mesure du volume du parallélipipède rectangle, du parallélipipède quelconque, du prisme triangulaire, du prisme quelconque.

—

DÉFINITIONS

1. Un *polyèdre* est un corps terminé en tous sens par des plans. Les polygones formés par les intersections de ces plans sont les *faces* du polyèdre, et leur ensemble constitue sa *surface*.

On appelle *angles* d'un polyèdre les angles polyèdres que ses faces font entre elles ; — *sommets*, les sommets de ses angles ; — *arêtes*, les côtés de ses faces ; — *diagonale*, toute droite qui joint deux de ses sommets non situés dans la même face.

On désigne sous les noms particuliers de *tétraèdre*, d'*hexaèdre*, d'*octaèdre*, de *dodécaèdre* et d'*isocaèdre* les polyèdres qui ont *quatre*, *six*, *huit*, *douze* et *vingt* faces.

2. Un polyèdre est *régulier*, lorsque ses angles sont égaux et que ses faces sont des polygones réguliers égaux.

Il n'y a que cinq polyèdres réguliers, qui sont : 1° le *tétraèdre régulier*, dont la surface est composée de 4 triangles équilatéraux, assemblés 3 à 3 autour de chaque sommet ; 2° l'*hexaèdre régulier*, ou *cube*, qui est formé de 6 carrés, réunis 3 à 3 autour de chaque sommet : 3° l'*octaèdre régulier*, qui est composé de 8 triangles équilatéraux, assemblés 4 à 4 autour de chaque sommet ; 4° le *dodécaèdre régulier*, ayant pour faces 12 pentagones réguliers, assemblés 3 à 3 autour de chaque sommet ; 5° l'*isocaèdre régulier*, dont la surface est composée de 20 triangles équilatéraux, réunis 5 à 5 autour de chaque sommet. On reconnaît facilement qu'il n'y a que ces cinq polyèdres réguliers, en cherchant combien on peut former d'angles polyèdres n'ayant pour faces que des angles de polygones réguliers. En effet, 1° avec l'angle du triangle équilatéral, qui vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit, on peut construire trois angles polyèdres ayant 3, 4 ou 5 faces, puisque la somme des faces d'un angle polyèdre est moindre que 4 angles droits (7, V), et que la somme de plus de 5 angles égaux à $\frac{2}{3}$ égale ou surpasse 4 angles droits. On verrait de même qu'on ne peut former qu'un seul angle polyèdre avec l'angle du carré, avec l'angle du pentagone régulier, et que cet angle polyèdre n'a que trois faces, mais qu'il est impossible d'en construire avec les angles de tous les autres polygones réguliers.

3. Un polyèdre est *convexe* s'il est tout entier d'un même côté de chacun des plans prolongés indéfiniment qui le terminent. Dans le cas contraire, on dit qu'il est *concave*.

Un plan coupe la surface d'un polyèdre convexe suivant un polygone convexe, puisque ce polygone est tout entier d'un même côté de chacune des droites qui le forment. Une ligne droite ne peut rencontrer, par suite, la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points.

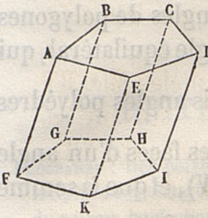
4. On distingue parmi les polyèdres le *prisme* et la *pyramide*. Occupons-nous d'abord du prisme.

Un *prisme* est un polyèdre qui a deux faces égales et parallèles, unies par des parallélogrammes.

On donne le nom de *bases* aux deux faces égales et parallèles du prisme, et celui de *faces latérales* aux divers parallélogrammes qui composent le reste de sa surface.

La *hauteur* d'un prisme est la distance des plans de ses bases. On sait que cette distance a pour mesure la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de l'une des bases sur l'autre (3, IX, c).

Pour construire un prisme, je prends un polygone quelconque, par exemple le pentagone ABCDE, et je mène par ses sommets, d'un même côté de son plan, les droites AF, BG, CH, DI, EK, parallèles et égales entre elles. Je trace ensuite les



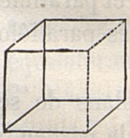
côtés du polygone FGHIK, qui a pour sommet les extrémités de ces parallèles, et je dis que le polyèdre ABCDEFFHIK est un prisme. Je remarque, en effet, que chacun des quadrilatères AK, EI, DH, CG, BF est un parallélogramme, puisqu'il a deux côtés égaux et parallèles d'après la construction. Les pentagones BCDEF, FGHIK ont, par suite, les côtés égaux et parallèles chacun à chacun; ils sont donc égaux, et le polyèdre AI, qui a deux faces égales et parallèles, unies par des parallélogrammes, est un prisme.

5. Un prisme est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc., selon que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*, un *hexagone*, etc.

6. On dit qu'un prisme est *droit* ou *oblique*, lorsque les plans de ses faces latérales sont perpendiculaires ou obliques à ceux des bases. Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

7. Si l'on coupe un prisme par un plan qui rencontre toutes les faces latérales, la portion de ce prisme comprise entre le plan sécant et l'une des bases est ce qu'on appelle un *prisme tronqué*, ou un *tronc de prisme*.

8. On appelle *volume* d'un polyèdre la grandeur du lieu qu'il occupe dans l'espace. — Si deux polyèdres ont le même volume sans avoir la même forme, on dit qu'ils sont *équivalents*.



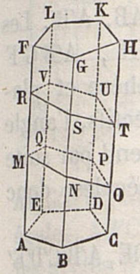
9. On nomme *parallélipipède* tout prisme dont les bases sont des parallélogrammes. — Dès lors le parallélipipède est compris sous six faces qui sont des parallélogrammes.

10. Lorsque les bases d'un parallélipipède droit sont des rectangles, on désigne ce polyèdre sous le nom de *parallélipipède rectangle*, et l'on dit qu'il a pour *dimensions* les longueurs des trois arêtes issues d'un même sommet.

Le parallélipipède rectangle dont les faces sont des carrés est appelé *cube* ou *hexaèdre régulier*.

THÉORÈME I

Les sections MNOPQ, RSTUV, *faites dans un prisme* AK *par deux plans parallèles qui rencontrent toutes ses faces latérales, sont des polygones égaux.*



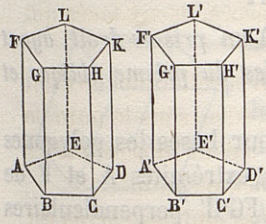
En effet, les deux plans parallèles MO, RT coupent la face AG du prisme suivant les droites MN, RS, qui sont parallèles (3, VII); donc le quadrilatère MNSR est un parallélogramme, et les parallèles MN, RS sont égales. Je prouverais de même que les côtés NO, OP, etc. de la section MNOPQ sont parallèles et égaux respectivement aux côtés ST, TU, etc. de la section RSTUV. Ces polygones ont aussi les angles égaux chacun à chacun; car leurs angles, considérés deux à deux, ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens (3, XI) : ainsi l'angle MNO est égal à l'angle RST, l'angle NOP égal à l'angle STU, etc. Donc les sections MNOPQ, RSTUV, qui ont les côtés égaux et les angles égaux chacun à chacun, sont égales.

Corollaire. — Toute section faite dans un prisme par un plan parallèle à sa base est égale à cette base.

Remarque. — On appelle *section droite* d'un prisme toute section faite dans ce polyèdre par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales.

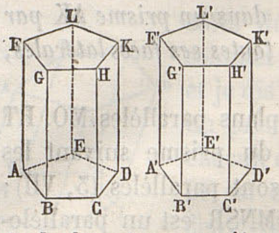
THÉORÈME II

Deux prismes sont égaux s'ils ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face latérale égales chacune à chacune et semblablement placées.



Soient la base ABCDE du prisme AK égale à la base A'B'C'D'E' du prisme A'K', la face latérale ABGF égale à la face latérale A'B'G'F', et l'angle dièdre AB égal à l'angle dièdre A'B'; je dis que les prismes AK, A'K' sont égaux, si leurs faces égales sont semblablement placées dans leurs plans respectifs.

Pour le démontrer, je superpose les deux polygones égaux ABCDE, A'B'C'D'E' de manière qu'ils coïncident, et je remarque ensuite que le plan A'B'G' s'applique sur le plan ABG, à cause de l'égalité des deux angles dièdres AB, A'B'. Les parallélogrammes ABGF, A'B'G'F étant égaux par hypothèse et placés de la même manière dans leurs plans respectifs, l'angle A'B'G' égale dès lors l'angle ABG; l'arête B'G' prend par suite la direction de l'arête BG. Or ces droites sont égales; donc leurs extrémités G et G' se confondent.



La coïncidence des deux bases inférieures ABCDE, A'B'C'D'E' et celle des deux arêtes BG, B'G' étant établies, les arêtes latérales C'H', D'K', etc. du prisme A'K', qui sont parallèles à B'G', s'appliquent respectivement sur les arêtes latérales CH, DK, etc. du prisme AK, qui sont parallèles à BC, et les sommets des bases supérieures G'H'K'L'F', GHKLF coïncident deux à deux. Les prismes AK, A'K', étant ramenés à avoir les mêmes sommets, ne font plus qu'un même polyèdre; ils sont donc égaux.

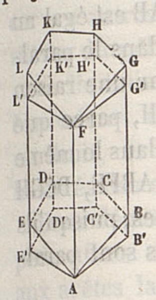
Corollaire. — *Deux prismes droits* AK, A'K' *sont égaux, s'ils ont les bases égales et les hauteurs égales.*

En effet, l'angle dièdre droit AB est égal à l'angle dièdre droit A'B', et les rectangles ABGF, A'B'G'F', qui ont les bases égales et les hauteurs égales, sont égaux. Les prismes AK, A'K' ont donc un angle dièdre égal compris entre une base et une face latérale égales chacune à chacune et semblablement disposées; par conséquent, ils sont égaux.

THÉORÈME III

Tout prisme oblique est équivalent à un prisme droit, ayant pour hauteur l'une des arêtes latérales du prisme oblique et pour base sa section droite.

Soit le prisme oblique AK, qui a pour bases les polygones ABCDE et FGHKL; je mène par les extrémités A et F de l'arête latérale AF les plans AB'C', FG'H' perpendiculaires à cette droite. Les sections AB'C'D'E', FG'H'K'L' sont deux polygones égaux, puisque leurs plans sont parallèles (I); par conséquent, le polyèdre AB'CD'E'FG'H'K'L' est un prisme droit, qui a pour hauteur l'arête latérale AF du prisme oblique AK et pour base la section droite AB'C'D'E'. Je dis que ces deux prismes sont équivalents.

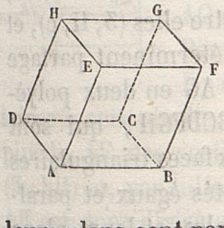


Je commence par démontrer l'égalité des deux polyèdres ABCDEB'C'D'E', FGHKLG'H'K'L', qu'on obtient en retranchant successivement les deux prismes AK, AK' de tout le polyèdre AB'C'D'E'FGHKL. A cet effet, je superpose les deux sections égales AB'C'D'E', FG'H'K'L', de manière qu'elles coïncident; les arêtes B'B, G'G, qui sont respectivement perpendiculaires à ces sections, et qui ont la même longueur AF—BG', prennent alors la même direction, et leurs extrémités B, G s'appliquent l'une sur l'autre. Il en est de même des sommets C et H, des sommets D et K, ainsi que des sommets E et L. Par conséquent, les deux polyèdres convexes AB'CD, FG'HK, que je ramène à avoir les mêmes sommets, coïncident et sont égaux.

Je remarque, en second lieu, que si je retranche successivement ces deux polyèdres égaux de la figure entière AB'C'FGK, les deux polyèdres restants, c'est-à-dire les deux prismes AK, AK' doivent être équivalents; donc le prisme oblique AK est équivalent au prisme droit AK', qui a pour hauteur l'une des arêtes latérales du prisme oblique, et pour base sa section droite.

THÉORÈME IV

Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.



Soit le parallélipipède AG, qui a pour bases les parallélogrammes ABCD, EFGH; ces deux quadrilatères sont égaux, et leurs plans sont parallèles d'après la définition du parallélipipède. Je dis que les autres faces opposées, par exemple ABFE et DCGH, sont aussi égales et que leurs plans sont parallèles.

Ces parallélogrammes ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. En effet, le côté AB est égal au côté DC, parce qu'ils sont opposés l'un à l'autre dans le parallélogramme ABCD ; le côté AE est égal à DH par une raison semblable, et l'angle BAE est égal à l'angle CDH, parce que leurs côtés sont parallèles deux à deux et dirigés dans le même sens. Par conséquent, les deux faces opposées ABFE, DCGH sont égales (P., 10, V), et leurs plans sont parallèles, puisqu'ils contiennent les angles BAE, CDH, dont les côtés sont parallèles chacun à chacun (3, XI).

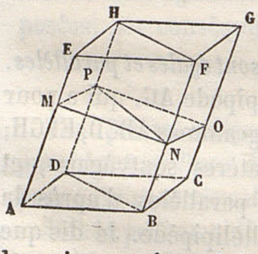
Remarque. — On peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques ; car elles sont égales et parallèles.

Corollaire. — *Toute section faite dans un parallélipipède par un plan qui rencontre deux faces opposées est un parallélogramme.*

Car cette section est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles par un même plan (3, VII).

THÉORÈME V

Le plan mené par deux arêtes opposées d'un parallélipipède divise ce polyèdre en deux prismes triangulaires qui sont équivalents



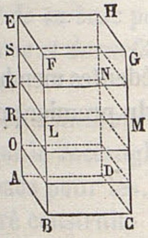
Soit le parallélipipède AG, dans lequel les arêtes BF, DH sont opposées l'une à l'autre ; ces droites, étant parallèles à la même arête AE, sont parallèles entre elles (3, II, c), et le plan qu'elles déterminent partage le parallélipipède AG en deux polyèdres ABDEFH, BCDFGH, qui sont des prismes triangulaires. En effet, les deux faces triangulaires ABD, EFH du premier polyèdre ont les côtés égaux et parallèles chacun à chacun ; donc elles sont égales, et leurs plans sont parallèles (3, XI). Ce polyèdre est par suite un prisme, car ses autres faces sont des parallélogrammes. Il en est de même du polyèdre BCDFGH.

Je dis maintenant que ces deux prismes triangulaires sont équivalents. Ce théorème est évident si le parallélipipède AG est droit, car les deux prismes, qui sont aussi droits, ont leurs bases égales et la même hauteur ; ils sont donc égaux (II, c).

Pour démontrer le même théorème lorsque le parallélipipède AG est oblique, je mène le plan MNOP perpendiculaire aux arêtes latérales des deux prismes, et je fais remarquer que le prisme oblique AFH est équivalent au prisme droit qui aurait pour base la section droite MNP du prisme oblique, et pour hauteur son arête latérale BF (III) ; pareillement, le prisme oblique CFH est équivalent au prisme droit, ayant pour base sa section droite NOP, et pour hauteur son arête latérale BF. Or, les bases MNP, NOP des deux prismes droits sont égales, parce qu'elles ont les trois côtés égaux chacun à chacun; ces prismes ont en outre la même hauteur BF ; donc ils sont égaux (II, c). Les prismes obliques AFH, CFH sont par suite équivalents.

THÉORÈME VI

Deux parallélipipèdes rectangles de même base sont proportionnels à leurs hauteurs.



Soient ABCDE et ABCDK deux parallélipipèdes rectangles, ayant la même base ABCD et les hauteurs inégales AE, AK ; je suppose le rapport de ces hauteurs égal à $\frac{5}{3}$ (P., 15, déf. 3); ces droites ont dès lors une commune mesure AO contenue 5 fois dans AE et 3 fois dans AK. Par les points O, R, K, S, qui divisent AE en 5 parties égales, je mène des plans perpendiculaires à cette droite; ces plans déterminent dans le parallélipipède AE des sections qui sont parallèles à la base ABCD (3, VII) et, par suite, égales à cette base (1). Le parallélipipède AE est donc divisé en cinq parallélipipèdes rectangles égaux, car leurs bases sont égales et leurs hauteurs égales (II) ; le parallélipipède AK contenant trois de ces parallélipipèdes partiels, ces deux polyèdres ont une commune mesure ABCDO, qu'ils contiennent respectivement autant de fois que les hauteurs AE, AK contiennent leur commune mesure AO ; par conséquent, le rapport des deux parallélipipèdes rectangles ABCDE, ABCDK, qui ont la même base ABCD, est aussi égal à $\frac{5}{3}$, ou au rapport de leurs hauteurs AE, AK.

THÉORÈME VII

Deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.

Soient P et P′ deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur h, dont les bases respectives R, R′ ont pour dimensions les lignes a, b et a', b'. Je construis un parallélipipède rectangle P″ sur les trois lignes h, a, b', et je le compare d'abord au parallélipipède P. Ces deux polyèdres ont une face égale qui a pour dimensions les lignes h, a, et que je prends pour leur base ; ils sont donc proportionnels à leurs hauteurs b, b' (VI), c'est-à-dire que

$$\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'}.$$

Les deux parallélipipèdes P″, P′ ont aussi une base égale, dont les dimensions sont h et b' ; par conséquent, on a aussi (VI) :

$$\frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'}.$$

Cela posé, je multiplie les deux égalités précédentes membre à membre ; je divise ensuite les deux termes du premier produit par le facteur commun P″, et je trouve

$$\frac{P}{P'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}.$$

Or, les rectangles R et R′ sont proportionnels aux produits $a \times b$, $a' \times b'$, de leurs bases par leurs hauteurs (P., 30, II) ; donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

THÉORÈME VIII

Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.

Soient P et P′ deux parallélipipèdes rectangles, ayant pour bases les rectangles R, R′ et pour hauteurs les lignes h, h'. Je construis un parallélipipède rectangle P″ de même base R que le parallélipipède P, et de même hauteur h' que le parallélipipède P′. Les deux parallélipipèdes P, P″, ayant la même base, sont proportionnels aux hauteurs h et h' (VI), c'est-à-dire que

$$\frac{P}{P''} = \frac{h}{h'};$$

comme les parallélipipèdes rectangles P″, P′ ont la même hauteur, ils sont proportionnels à leurs bases R, R′ (VII), et

$$\frac{P''}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

Cela posé, je multiplie les deux égalités précédentes membre à membre; je divise ensuite les deux termes du premier produit par leur facteur commun P″, et je trouve

$$\frac{P}{P'} = \frac{R \times h}{R' \times h'}.$$

THÉORÈME IX

Le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur, si l'on prend pour les unités de volume et de surface le cube et le carré faits sur l'unité de longueur.

Soit à mesurer le volume d'un parallélipipède rectangle P, ayant le rectangle R pour base et la ligne h pour hauteur; je prends pour les unités de volume et de surface le cube et le carré construits sur l'unité de longueur, et j'ai, d'après le théorème précédent :

$$\frac{P}{1} = \frac{R}{1} \times \frac{h}{1}, \text{ ou } P = R \times h.$$

Or, les nombres P, R et h sont les mesures respectives du parallélipipède rectangle, de sa base et de sa hauteur;

cette l'égalité précédente exprime que *le nombre qui représente la mesure du parallélipipède rectangle, c'est-à-dire son volume, est égal au produit des deux nombres qui représentent les mesures de sa base et de sa hauteur.* On énonce ordinairement ce résultat de la manière suivante : *Le volume du parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

COROLLAIRE I. — Soient a et b les dimensions du rectangle R; on sait que (P., 30, III)

$$R = a \times b;$$

on a par suite l'égalité :

$$P = a \times b \times h,$$

qui exprime que *le volume du parallélipipède rectangle est* aussi *égal au produit de ses trois dimensions;* car les nombres a, b, h sont les mesures des trois dimensions du parallélipipède P.

Ce nouvel énoncé de la mesure du parallélipipède rectangle ne dépend pas de l'unité de surface.

COROLLAIRE II. — *Le volume d'un cube est égal* au produit de ses trois dimensions, ou *à la troisième puissance de son côté.*

Réciproquement, *la troisième puissance d'un nombre quelconque peut être considérée comme le volume d'un cube dont la longueur du côté est représentée par ce nombre.*

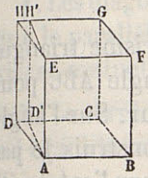
Ce corollaire et sa réciproque expliquent la synonymie des mots *cube* et *troisième puissance* d'un nombre employés dans l'arithmétique.

Remarque. — Si l'on prend le *mètre* pour l'unité de longueur, le *mètre carré* sera l'unité de surface, et le *mètre cube*, l'unité de volume.

THÉORÈME X

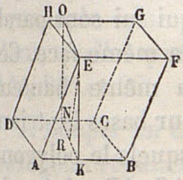
Le volume d'un parallélipipède quelconque est égal au produit de sa base et de sa hauteur.

Ce théorème est déjà démontré pour un parallélipipède rec tangle (IX). Il s'agit donc d'en établir la vérité pour le parallélipipède droit et pour le parallélipipède oblique.



1° Soit le parallélipipède droit AG qui a le parallélogramme ABCD pour base et la droite AE pour hauteur ; par un point quelconque A de l'arête AB, appartenant à l'une des bases, je mène un plan perpendiculaire à cette arête; la section AEH'D' est un rectangle, puisque les faces opposées BE, CH du parallélipipède AG sont perpendiculaires aux bases AC, EG.

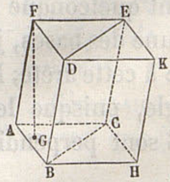
Cela posé, je fais remarquer que le parallélipipède proposé AG est équivalent au parallélipipède droit qui aurait la section AEH'D' pour base et l'arête AB pour hauteur (III). Or, ce dernier parallélipipède droit est rectangle, puisque sa base est un rectangle; il a donc pour mesure le produit de sa base par sa hauteur, c'est-à-dire $AE \times AD' \times AB$ (IX). Dès lors le parallélipipède AG a aussi pour mesure $AE \times AD' \times AB$, c'est-à-dire le produit de sa hauteur AE par sa base ABCD, car l'aire de cette base est égale à $AD' \times AB$.



2° Soit le parallélipipède oblique AG qui a pour base le parallélogramme ABCD; par un point quelconque E de l'arête EF, appartenant à l'une des bases, je mène le plan EKN perpendiculaire à cette arête, et je remarque ensuite que le parallélipipède proposé est équivalent au parallélipipède droit qui aurait la section droite EKNO pour base et l'arête EF pour hauteur (III). Soit ER la perpendiculaire abaissée du point E sur le plan ABCD; cette droite est à la fois la hauteur du parallélipipède proposé AG et celle du parallélogramme EKNO, car elle est comprise dans le plan de ce quadrilatère, et perpendiculaire au côté KN (6, II). Donc le parallélipipède droit a pour mesure $ER \times NK \times EF$; le volume du parallélipipède oblique AG est par suite égal à $ER \times NK \times EF$, c'est-à-dire égal au produit de sa hauteur ER par sa base ABCD qui a pour mesure $NK \times AB$, ou $NK \times EF$.

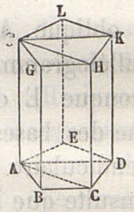
THÉORÈME XI

Le volume d'un prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur.



Je considère d'abord le prisme triangulaire ABCDEF qui a le triangle ABC pour base, et dont FG est la hauteur. Sur l'angle trièdre A de ce prisme, je construis le parallélipipède AK en menant par l'extrémité de chacune des trois arêtes AB, AC, AF, un plan parallèle au plan des deux autres. Les deux prismes triangulaires ABCDEF et BGHDEK dans lesquels le parallélipipède est divisé par le plan de ses deux arêtes opposées BD, CE, sont équivalents (V); le parallélipipède AK est donc le double du prisme proposé. Or, il a pour mesure le produit de sa base 2ABC par sa hauteur FG (X); donc le prisme triangulaire ABCDEF a pour mesure ABC $\times$ FG, c'est-à-dire le produit de sa base ABC par sa hauteur FG.

Soit, en second lieu, le prisme polygonal ABDK; je décompose ce polyèdre en prismes triangulaires, en menant des plans par l'arête latérale AF et par chacune des arêtes CH, DK, qui lui sont parallèles, et ne font pas partie de la même face. Ces prismes triangulaires ont la même hauteur que le prisme polygonal, et pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, dans lesquels le polygone ABCDE est décomposé par ses diagonales AC, AD, tirées du sommet A. Or, chacun d'eux a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; donc le volume du prisme polygonal ABCK est égal à (ABC + ACD + ADE) $\times$ H, c'est-à-dire égal au produit de sa base ABCDE par sa hauteur H.



Corollaire I. — Deux prismes qui ont des bases équivalentes sont proportionnels à leurs hauteurs. — Deux prismes sont proportionnels à leurs bases, s'ils ont la même hauteur.

Corollaire II. — Deux prismes ont des volumes équivalents, si leurs bases sont inversement proportionnelles à leurs hauteurs.

PROBLÈMES.

1. Les diagonales d'un parallélipipède sont inégales, à moins que le parallélipipède ne soit rectangle. — Ces droites se divisent mutuellement en deux parties égales.

2. Le carré d'une diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés des trois dimensions du parallélipipède.

3. Calculer, à un décimètre cube près, le volume d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier, en sachant que le côté de la base est de $1^m,56$ et la hauteur de $2^m,45$.

4. Un prisme droit a pour base un triangle équilatéral; son volume est égal à 1 mètre cube, et sa hauteur égale à $0^m,80$. Calculer, à un centimètre près, le côté de sa base.

5. Le volume d'un prisme triangulaire est égal à la moitié du produit d'une face latérale quelconque par la distance de cette face à l'arête qui lui est opposée.

6. Si, sur trois droites parallèles et non situées dans le même plan, on prend des longueurs AA', BB', CC', égales à une droite donnée, le volume du prisme triangulaire AA'BB'CC' est constant, quelles que soient les positions respectives des arêtes AA', BB' et CC'.

7. Couper un cube par un plan tel que la section soit un hexagone régulier.

8. La somme des distances des sommets d'un parallélipipède à un plan qui lui est extérieur égale huit fois la distance du point d'intersection des diagonales de ce polyèdre au même plan.

9. Trouver sur un plan le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux aux sommets d'un parallélipipède soit égale à un carré donné.

10. Soit ABCD un rectangle; du sommet A on abaisse la perpendiculaire AE sur la diagonale BD; par le point d'intersection E de ces deux lignes, on tire la droite EG perpendiculaire

au côté BC du rectangle et la droite EH perpendiculaire au côté CD. 1° Démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{AB^3}{AD^3}=\frac{EG}{EH},$$

$$AE^3=BD\times EG\times EH.$$

2° Déduire de ce qui précède un moyen de construire une droite qui soit à une droite donnée dans le même rapport que deux cubes donnés.

3° Prouver que les droites DH, BG sont deux moyennes proportionnelles entre EH et EG, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{EH}{DH}=\frac{DH}{BG}=\frac{BG}{EG}.$$

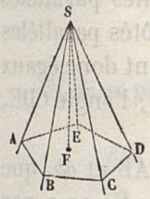
DIXIÈME ET ONZIÈME LEÇON

Programme : Pyramide. — Mesure du volume de la pyramide triangulaire, de la pyramide quelconque. — Volume d'un tronc de prisme à bases parallèles. — Exercices numériques.

DÉFINITIONS

1. On appelle *pyramide* un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont les autres faces sont des triangles ayant pour bases les côtés de la face polygonale et pour sommets un même point de l'espace.

On donne le nom de *base* à la face polygonale, et celui de *sommet* au point commun à toutes les faces triangulaires dont l'ensemble forme la *surface latérale* de la pyramide. — La *hauteur* de la pyramide est la distance de son sommet à sa base.



Le polyèdre SABCDE est une pyramide qui a pour base le pentagone ABCDE et pour sommet le point S. Sa surface latérale est composée des cinq triangles SAB, SBC, SCD, SDE, SAE, et sa hauteur est représentée par la perpendiculaire SF, abaissée du sommet sur le plan de la base.

2. Une pyramide est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, etc., selon que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*, etc. On donne le nom particulier de *tétraèdre* à une pyramide triangulaire.

3. On dit qu'une pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier, et que la droite qui joint le centre de

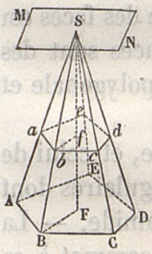
ce polygone au sommet de la pyramide est perpendiculaire à la base.

4. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes les faces latérales, la portion de ce polyèdre comprise entre la base et le plan sécant est appelée *pyramide tronquée* ou *tronc de pyramide.*

THÉORÈME I

1° *Tout plan* abcde, *parallèle à la base* ABCDE *d'une pyramide* SABCDE, *divise les arêtes latérales et la hauteur en parties proportionnelles.*

2° *La section* abcde *faite dans la pyramide est semblable à la base.*



1° Je mène par le sommet S de la pyramide le plan MN parallèle à la base ABCD, et je fais remarquer que les arêtes latérales SA, SB, SC, etc., sont divisées, ainsi que la hauteur SF, en segments proportionnels par les trois plans parallèles MN, *ad*, AD (3, X). On a donc :

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \text{etc.....} = \frac{Sf}{fF}$$

2° Les plans de la base ABCDE et de la section *abcde* étant parallèles, leurs intersections par chacune des faces latérales de la pyramide sont des droites parallèles (3, VII). Les angles ABC, *abc* ont dès lors les côtés parallèles deux à deux et dirigés dans le même sens ; ils sont donc égaux (3, XI). Pareillement, l'angle BCD est égal à *bcd* ; l'angle CDE, égal à *cde*, etc.

Il résulte aussi du parallélisme des droites AB et *ab*, que les triangles SAB, S*ab* sont semblables (P., 21, I) ; on a par suite :

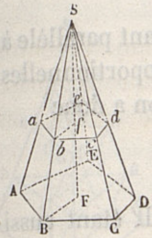
$$\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb}.$$

La similitude des deux triangles SBC, S*bc* donne aussi

$$\frac{BC}{bc} = \frac{SB}{Sb};$$

par conséquent on a :

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$



On prouverait de même l'égalité des deux rapports $\frac{BC}{bc}$, $\frac{CD}{cd}$, puis celle des deux rapports $\frac{CD}{cd}$, $\frac{DE}{de}$, et ainsi de suite. Les polygones ABCDE, *abcde* sont dès lors semblables; car ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

Corollaire. — La section *abcde* étant semblable à la base de la pyramide, les aires des ces deux polygones sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues (P., 33, II); on a donc :

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{ab^2}{AB^2}.$$

Or, on sait que

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sf}{SF};$$

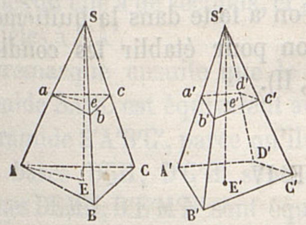
par conséquent on a aussi

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{Sf^2}{SF^2}.$$

De là résulte ce théorème : *Les sections, faites dans une pyramide par des plans parallèles, sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*

THÉORÈME II

Si deux pyramides ont la même hauteur, les sections faites par des plans parallèles aux bases, à la même distance des sommets, sont proportionnelles aux bases.



Je suppose la hauteur SE de la pyramide SABC égale à la hauteur S'E' de la pyramide S'A'B'C'D', et je prends sur ces lignes les longueurs égales S*e*, S'*e'*; puis je mène par le point *e* le plan *abc* parallèle à la base ABC, et par le point e' le plan $a'b'c'd'$ parallèle à la base A'B'C'D'.

La section *abc* faite dans la pyramide SABC étant parallèle à la base ABC, les aires de ces polygones sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet S (I) ; on a donc

$$\frac{abc}{\text{ABC}} = \frac{\text{S}e^2}{\text{SE}^2}.$$

La section $a'b'c'd'$ faite dans la pyramide S'A'B'C'D' étant aussi parallèle à la base A'B'C'D', on a pareillement

$$\frac{a'b'c'd'}{\text{A'B'C'D'}} = \frac{\text{S}'e'^2}{\text{S'E'}^2}.$$

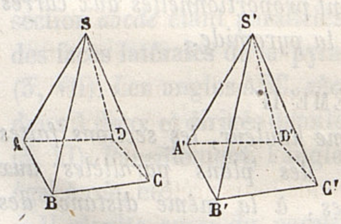
Or les hauteurs SE, S'E' sont égales par hypothèse, ainsi que les droites Se, S'e' ; par conséquent

$$\frac{abc}{\text{ABC}} = \frac{a'b'c'd'}{\text{A'B'C'D'}}.$$

Corollaire. — Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections *abc*, $a'b'c'd'e'$, le sont aussi.

THÉORÈME III

Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face latérale égales chacune à chacune et semblablement placées.

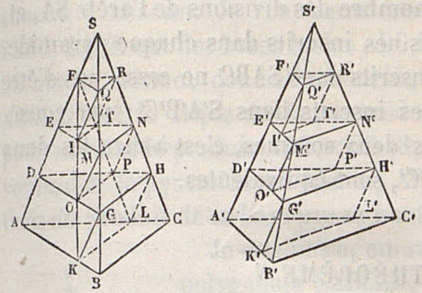


La démonstration de ce théorème est identique à celle qu'on a faite dans la huitième leçon pour établir les conditions d'égalité de deux prismes (8, II).

THÉORÈME IV

Deux pyramides triangulaires qui ont les bases équivalentes et les hauteurs égales sont équivalentes.

Soient SABC, S'A'B'C', deux pyramides triangulaires, ayant leurs bases ABC, A'B'C', équivalentes, et leurs hauteurs égales ; je dis qu'elles sont équivalentes.



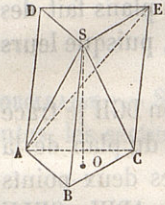
Pour le démontrer, je place ces pyramides sur le même plan, et je divise l'une de leurs arêtes latérales en un nombre quelconque de parties égales, par exemple l'arête SA en quatre parties égales. Par les points de division D, E, F, je mène ensuite des plans parallèles au plan ABC qui contient les bases; chacun de ces plans fait des sections équivalentes dans les deux pyramides, puisque leurs bases sont équivalentes (II, c).

Cela posé, par les sommets G et H de la section DGH je trace des parallèles à l'arête SA jusqu'à la rencontre du plan de la base ABC, et je tire la droite KL qui joint les deux points d'intersection. Chacun des quadrilatères ADGK, ADHL, GKLH est un parallélogramme, et les triangles AKL, DGH, compris dans des plans parallèles sont égaux, parce qu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun; le polyèdre AKLDGH est donc un prisme triangulaire. Je construis de même sous chacune des sections EMN, FRQ de la pyramide SABC un prisme qui ait cette section pour base, et dont les arêtes latérales soient aussi parallèles à SA et terminées au plan de la section précédente. J'inscris pareillement dans la pyramide S'A'B'C' autant de prismes qu'elle a de sections, et je prends leurs arêtes latérales parallèles à S'A'.

Je remarque ensuite que le prisme ADGH inscrit dans la pyramide SABC est équivalent au prisme A'D'G'H' inscrit dans la pyramide S'A'B'C', parce qu'ils sont la même hauteur et que leurs bases DGH, D'G'H' sont équivalentes (8, XI). Or, les prismes DEMN, D'E'M'N' sont équivalents pour la même raison, ainsi que les prismes EFQR, E'F'Q'R'; donc la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC est égale à celle des prismes inscrits dans la pyramide S'A'B'C'. Si maintenant je double indéfiniment le nombre des divisions de l'arête SA, et, par suite, celui des prismes inscrits dans chaque pyramide, la somme des prismes inscrits dans SABC ne cesse pas d'être égale à celle des prismes inscrits dans S'A'B'C'; par conséquent, les limites de ces deux sommes, c'est-à-dire les deux pyramides* SABC, S'A'B'C', sont équivalentes.

THÉORÈME V

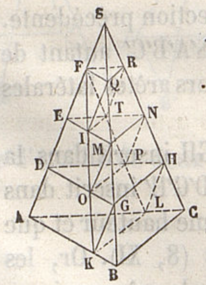
Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.



Soit d'abord la pyramide triangulaire SABC; je construis sur sa base ABC un prisme triangulaire ABCDES dont les arêtes latérales soient parallèles à BS, et je dis que la pyramide SABC est le tiers de ce prisme.

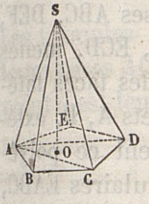
En effet, le prisme ABCDES est égal à la somme de la pyramide triangulaire SABC et de la pyramide quadrangulaire SACED. Or, le plan SAE divise la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires SADE, SACE, qui sont équivalentes (IV), puisqu'elles ont le même sommet S, et que leurs bases ADE, ACE, placées

* Conformément à l'esprit du programme, j'admets que la pyramide SABC est la limite vers laquelle tend la somme des prismes inscrits dans ce polyèdre lorsque le nombre des prismes croît indéfiniment.



Cependant, pour démontrer ce théorème, il suffirait de remarquer : 1° que si l'on mène par le point F un plan parallèle à la face SBC, ce plan passe par chacune des droites IT, OP, KL, puisque les droites SF, QI, MO, GK, RT, NP, HL sont égales et parallèles; 2° que l'excès de la pyramide SABC sur la somme des prismes inscrits est dès lors moindre que le tronc de pyramide compris entre les plans parallèles SBC, FKL. Car, la distance de ces plans étant plus petite que SF qui est l'une des divisions de l'arête SA, l'épaisseur du tronc de pyramide et son volume, par suite, diminuent indéfiniment, lorsqu'on divise SA en parties égales de plus en plus petites.

sur le même plan, sont égales comme ayant les côtés égaux chacun à chacun. Je remarque ensuite que les pyramides SABC, SADE ont des bases égales ABC, SDE, et la même hauteur SO que le prisme ; donc elles sont équivalentes, et le prisme ABCDES est le triple de la pyramide SABC. Or, ce prisme a pour mesure le produit ABC $\times$ SO (8, XI) ; par conséquent, le volume de la pyramide est égal à $\frac{1}{3}$ ABC $\times$ SO, c'est-à-dire au tiers du produit de sa base par sa hauteur.



Je considère, en second lieu, la pyramide polygonale SABCDE, que je décompose en pyramides triangulaires, en menant un plan par l'une de ses arêtes latérales, par exemple SA, et par chacune des diagonales de la base issues du sommet A. Ces pyramides ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, dans lesquels le polygone ABCDE est divisé par ses diagonales AC, AD, et pour hauteur la perpendiculaire SO, menée de leur sommet commun S sur le plan qui contient leurs bases. Le volume de chacune de ces pyramides étant égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur, celui de la pyramide polygonale SABCDE est égal à $\frac{1}{3}$ (ABC + ACD + ADE) $\times$ SO, ou au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire I. — Toute pyramide est le tiers d'un prisme de base équivalente et de même hauteur (8, XI).

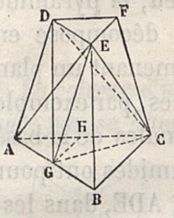
Corollaire II. — Deux pyramides de même base sont proportionnelles à leurs hauteurs. — Si deux pyramides ont la même hauteur, elles sont proportionnelles à leurs bases.

Corollaire III. — Pour mesurer le volume d'un polyèdre quelconque, on le décompose en pyramides ayant pour bases ses différentes faces, et pour sommet commun un point quelconque pris à l'intérieur de ce polyèdre. On calcule ensuite le volume de chacune de ces pyramides, et on fait la somme de leurs mesures.

S'il existe à l'intérieur du polyèdre un point également éloigné de toutes ses faces, et qu'on le prenne pour le sommet de toutes les pyramides, le volume du polyèdre sera égal au tiers du produit de sa surface totale par la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une de ses faces.

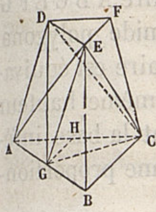
THÉORÈME VI

Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à trois pyramides, ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.



1° Je considère le tronc de pyramide triangulaire ABCDEF, dont les bases ABC, DEF, sont parallèles. Les plans ECA, ECD, menés par la diagonale EC de l'une des faces latérales et par chacun des sommets A, D, extérieurs à cette face, décomposent ce polyèdre en trois pyramides triangulaires EABC, ECDF, EACD. La première, EABC, a pour face la base inférieure ABC du tronc; si je prends ce triangle pour sa base, elle aura la même hauteur que le tronc, car son sommet E est un point de la base supérieure DEF de la pyramide tronquée. La seconde pyramide ECDF peut être considérée comme ayant pour base le triangle DEF, qui est la base supérieure du tronc; elle a par suite la même hauteur que le tronc, puisque son sommet C est un point de la base inférieure ABC. Quant à la troisième pyramide EACD, je la transforme en une autre GACD de même base ACD et de même hauteur (IV), en transportant son sommet E au point G, où la droite EG, menée parallèlement à DA, rencontre le côté AB de la base inférieure ABC. Je considère ensuite la pyramide GACD comme ayant le triangle ACG pour base et le point D pour sommet; sa hauteur est alors égale à celle du tronc. Je dis que sa base ACG est moyenne proportionnelle entre les deux bases ABC, DEF de la pyramide tronquée.

Pour le démontrer, je mène du point G, jusqu'à la rencontre de AC, la droite GH parallèle à BC, et je fais remarquer que le triangle AGH est égal au triangle DEF; en effet, leurs côtés AG, DE sont égaux comme côtés opposés du parallélogramme AGED, et les angles GAH, AGH sont égaux respectivement aux angles EDF, DEF, parce qu'ils ont leurs côtés parallèles deux à deux et dirigés dans le même sens (3, XI). Cela posé, je compare successivement le triangle ACG aux deux triangles ABC, AGH. Les triangles ACG, ABC ont le sommet C commun et leurs bases AG, AB situées sur la même droite ; leurs hauteurs sont donc égales, et le rapport de leurs aires est le même que celui de leurs bases (P., 30, V, c), c'est-à-dire que



$$\frac{ABC}{ACG}=\frac{AB}{AG}.$$

Les triangles ACG, AGH ont aussi la même hauteur, puisque leurs bases AC, AH sont situées sur la même droite, et que le point G est leur sommet commun ; par conséquent,

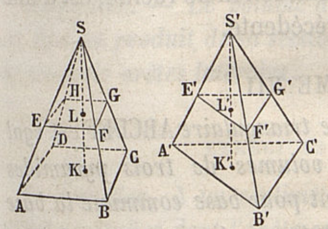
$$\frac{ACG}{AGH}=\frac{AC}{AH}.$$

Mais les rapports $\frac{AB}{AG}$, $\frac{AC}{AH}$ sont égaux à cause du parallélisme des droites BC, GH (P., 21, I) ; il résulte donc des deux égalités précédentes qu'on a

$$\frac{ABC}{ACG}=\frac{ACG}{AGH},$$

c'est-à-dire que le triangle ACG est moyenne proportionnelle entre les deux triangles ABC, AGH.

2° Soit le tronc de pyramide ABCDEFGH, qu'on obtient en coupant la pyramide polygonale SABCD par le plan EFGH parallèle à la base ABCD ; je construis sur le plan ABC une pyramide triangulaire S'A'B'C', ayant la même hauteur que la pyramide SABCD et pour base un triangle A'B'C' équivalent au polygone ABCD (P., 31, prob. I). Ces deux pyramides sont équivalentes, parce qu'elles ont la même mesure (V).



Je remarque ensuite que le plan EFG détermine dans ces pyramides deux sections équivalentes EFGH, E'F'G' (II, c), et j'en conclus que la pyramide $S'E'F'G'$ est équivalente à la pyramide SEFGH. Le tronc de pyramide triangulaire $A'B'C'E'F'G'$ est, par suite, équivalent au tronc de pyramide polygonal ABCDEFGH ; or le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides qui ont la même hauteur que le tronc, et dont les bases respectives sont la base inférieure du tronc, sa base supérieure et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases. Donc, etc.

Remarque. — Soient B, b les bases d'un tronc de pyramide dont les bases sont parallèles, et h sa hauteur ; son volume V est égal à $\frac{1}{3} h \times B + \frac{1}{3} h \times b + \frac{1}{3} h \times \sqrt{Bb}$, ou à $\frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb})$.

On peut éviter le calcul de l'une des deux bases B et b, parce qu'elles sont semblables (I). En effet, si l'on désigne par A et a deux côtés homologues de ces bases, on a (P., 33, II) :

$$\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2},$$

et, par conséquent, $$b = B \times \left(\frac{a}{A}\right)^2.$$

En remplaçant b par cette valeur dans l'égalité

$$V = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb}),$$

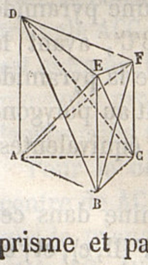
on trouve, après l'extraction de la racine carrée :

$$V = \frac{B \times h}{3}\left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right).$$

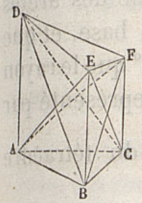
Cette formule, qui n'exige pas d'extraction de racine, est d'une application plus facile que la précédente.

THÉORÈME VII

Le volume d'un tronc de prisme triangulaire ABCDEF *est égal à la somme des volumes de trois pyramides triangulaires, ayant pour base commune la base inférieure* ABC *du tronc et pour sommets respectifs les sommets* D, E, F *de la base supérieure.*



Je mène les plans ECA, ECD par la diagonale EC de l'une des faces latérales du tronc de prisme et par chacun de ses sommets A, D, qui sont extérieurs à cette face. Ces plans décomposent le tronc en trois pyramides triangulaires ECAB, ECAD, ECDF. La première, ECAB, a le triangle ABC pour base et le point E pour sommet ; la seconde, ECAD, est équivalente à la pyramide BCAD, parce qu'elles ont la même base CAD, et que leurs sommets E, D sont situés sur une droite parallèle au plan de leur base. Or la pyramide BACD peut être considérée comme ayant le triangle ABC pour base et le point D pour sommet ; donc la seconde pyramide ECAD est équivalente à une pyramide qui aurait le triangle ABC pour base et le point D pour sommet. La troisième pyramide ECDF est équivalente à la pyramide ABCF, parce que leurs bases CDF, CAF sont deux triangles équivalents, et que leurs sommets E, B se trouvent sur une droite parallèle au plan de leurs bases. Mais on peut prendre le triangle ABC pour la base de la pyramide ABCF et le point F pour son sommet ; donc le prisme tronqué ABCDEF est équivalent à la somme de trois pyramides ayant le triangle ABC pour base commune et les points D, E, F, pour sommets.



Remarque. — Soient h, h', h'' les distances des sommets D, E, F, de la base supérieure du prisme tronqué à sa base inférieure que je désigne par b, le volume de ce polyèdre est égal à $\frac{1}{3}b \times h + \frac{1}{3}b \times h' + \frac{1}{3}b \times h''$, ou à $\frac{1}{3}b(h + h' + h'')$.

Corollaire. — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal au produit de sa section droite par le tiers de la somme de ses trois arêtes latérales.*

EXERCICES NUMÉRIQUES

1. *Calculer, à un centimètre cube près, le volume d'un tétraèdre régulier dont l'arête est égale à* $0^m,60$.

Je commence par chercher les expressions de la base et de la hauteur du tétraèdre en fonction de l'arête que je désigne par a. La base est un triangle équilatéral dont le côté est exprimé par a ; l'aire de ce triangle égale donc $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (P., 30, V, c).

Pour calculer la hauteur du tétraèdre, je remarque : 1° que cette droite fait un triangle rectangle avec l'une des arêtes latérales et le rayon du cercle circonscrit à la base, et que l'arête latérale est l'hypoténuse de ce triangle ; 2° que le rayon du triangle équilatéral dont le côté égale a est représenté par $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (P., 28, II). J'en conclus que la hauteur du tétraèdre égale $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}$, ou $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; par conséquent, ce polyèdre a pour mesure $\frac{1}{3}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times\frac{a\sqrt{6}}{3}$, ou $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Telle est l'expression du volume d'un tétraèdre régulier en fonction de son arête a.

Si je suppose maintenant l'arête a égale à $0^m,60$, je trouve $\frac{(0,60)^3\times\sqrt{2}}{12}$, ou 25 décimètres cubes 456 centimètres cubes pour le volume demandé.

2. *Calculer, à un décimètre cube près, le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, en sachant que la hauteur de ce tronc est de 3 mètres et que ses bases sont deux hexagones réguliers dont les côtés ont* $0^m,80$ *et* $0^m,60$ *de longueur.*

Si l'on désigne par h la hauteur du tronc de pyramide proposé, par A un côté de sa base inférieure B et par a le côté homologue de la base supérieure, le volume V de ce polyèdre est donné par la formule (VI, c) :

$$V=\frac{B\times h}{2}\left(1+\frac{a}{A}+\left(\frac{a}{A}\right)^2\right).$$

Or, l'hexagone régulier construit sur la droite A est égal à la somme de six triangles équilatéraux construits sur la même droite ; par conséquent on a (P., 30, V) :

$$B=\frac{6A^2\sqrt{3}}{4}.$$

En remplaçant B par cette valeur dans l'expression du volume V, on arrive à la formule suivante :

$$V=\frac{h\,(A^2+Aa+a^2)\sqrt{3}}{2}$$

Pour faire l'application numérique proposée, on prendra $h=3$, $A=0{,}80$, $a=0{,}60$, et l'on trouvera

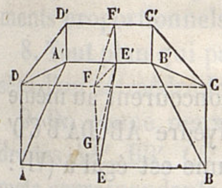
$$V=1{,}50\,(0{,}64+0{,}48+0{,}36)\sqrt{3},$$

ou $$V=3^{\text{m.c.}},845.$$

3. Les amas de pierres qu'on fait de distance en distance le long des routes ont la forme de prismes quadrangulaires tronqués dont deux faces latérales opposées sont des rectangles, tandis que les deux autres sont des trapèzes isocèles, égaux entre eux. Chacun de ces troncs de prisme a dès lors pour bases deux trapèzes isocèles égaux, et c'est par la plus grande de ses faces rectangulaires qu'il s'appuie sur le sol.

Les côtés AB, BC *de l'une des faces rectangulaires d'un amas de pierres* ABCDA'B'C'D' *ont* $1^{\text{m}},20$ *et* $0^{\text{m}},40$ *de longueur; les côtés* A'B', B'C' *de l'autre face rectangulaire sont égaux respectivement à* $0^{\text{m}},54$ *et* $0^{\text{m}},18$. *Calculer le volume de cet amas de pierres dont la hauteur est égale à* $0^{\text{m}},80$.

Je cherche d'abord l'expression du volume du prisme tronqué en fonction des lignes données; pour cela, je désigne par a et b les dimensions AB, BC de la face rectangulaire ABCD, par a' et b' les dimensions A'B', B'C' de l'autre face rectangulaire A'B'C'D', et par d la distance E'G de ces deux faces. Le plan mené par les arêtes parallèles A'B' et DC décompose le prisme quadrangulaire tronqué en deux troncs de prismes triangulaires ABCDA'B' et A'B'C'D'CD; le premier a pour mesure le produit de sa section droite EFE' par le tiers de la somme $2a+a'$ de ses arêtes latérales (VII, c). Or la base EF du triangle EFE' est égale à b, et sa hauteur E'G égale à d; donc sa surface a pour mesure le produit $\dfrac{b\times d}{2}$, et le volume du tronc de prisme ABCDA'B' est par suite égal à $\dfrac{bd}{6}(2a+a')$. Je prouverais de même que le tronc de prisme A'B'C'D'CD a pour mesure



$\frac{b'd}{6}(2a'+a)$; par conséquent, le volume de l'amas de pierres est égal à $\frac{bd}{6}(2a+a')+\frac{b'd}{6}(2a'+a)$.

Si je suppose maintenant $a=1^{m},20$, $b=0^{m},40$, $a'=0^{m},54$, $b'=0^{m},18$, et $d=0^{m},80$, je trouve 211 décimètres cubes 520 centimètres cubes pour le volume demandé.

Remarque I. — La formule $\frac{bd}{6}(2a+a')+\frac{b'd}{6}(2a'+a)$ sert aussi à calculer la capacité des fossés ou *cuvettes* que l'on creuse le long des routes. Si on y fait $b'=0$, elle se réduit à

$$\frac{bd}{6}(2a+a').$$

Elle exprime alors le volume d'un tronc de prisme triangulaire dont les bases sont deux triangles isocèles égaux, et qui a pour faces latérales un rectangle et deux trapèzes isocèles égaux ; c'est la forme qu'on donne aux toits de certains édifices, aux piles de boulets dans les parcs d'artillerie, etc.

Remarque II. — Si l'on suppose les rectangles ABCD, A'B'C'D' semblables, c'est-à-dire si l'on a :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$

les arêtes AA', BB', CC', DD', prolongées, concourent au même point. On peut alors considérer le polyèdre ABCDA'B'C'D' comme un tronc de pyramide ; son volume est égal à (VI) :

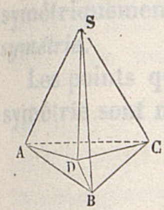
$$\frac{d}{3}\left(ab+a'b'+\sqrt{aba'b'}\right).$$

Il est facile de vérifier l'identité de cette formule et de la précédente, en tenant compte de la condition

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}.$$

PROBLÈMES.

1. Le plan bissecteur d'un angle dièdre d'un tétraèdre divise l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces adjacentes.



2. Si, par le sommet S du tétraèdre SABC, on mène la droite SD formant des angles égaux avec les faces SAB, SBC, SAC, et qu'on joigne les sommets A, B, C de la base au point D dans lequel cette droite rencontre ABC, les triangles DAB, DBC, DAC sont proportionnels aux faces SAB, SBC, SAC.

3. Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre passent par le même point.

4. Les plans perpendiculaires aux milieux des arêtes d'un tétraèdre passent par un même point.

5. Déterminer à l'intérieur d'un tétraèdre un point tel qu'en le joignant à tous les sommets on décompose le tétraèdre en quatre pyramides triangulaires équivalentes.

6. Si les angles trièdres A, A' des deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' sont égaux, les volumes de ces tétraèdres sont proportionnels aux produits $AB \times AC \times AD$, $A'B' \times A'C' \times A'D'$ des arêtes des deux angles trièdres égaux.

7. Tout plan, mené par les milieux de deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, divise les deux autres côtés en segments proportionnels.

8. Tout plan qui passe par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le divise en deux parties équivalentes.

9. On donne deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D', tels que les droites AA', BB', CC', DD', qui joignent deux à deux les sommets correspondants, concourent en un même point. Démontrer que, si les faces correspondantes se coupent, les quatre droites d'intersection sont situées dans un même plan.

10. Par un point quelconque pris à l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on élève une perpendiculaire sur cette base; cette perpendiculaire rencontre toutes les faces latérales de la pyramide, prolongées au besoin. On demande de démontrer que la somme des distances des points de rencontre au plan de la base est une quantité constante.

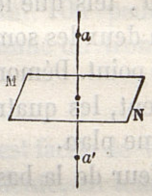
DOUZIÈME ET TREIZIÈME LEÇON

Programme. Plan de symétrie. — Centre de symétrie. — L'étude de la symétrie par rapport à un point se ramène à celle de la symétrie par rapport à un plan, en imprimant une rotation de 180° à l'une des deux figures autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le centre de symétrie.

Dans deux polyèdres symétriques, les faces homologues sont égales chacune à chacune, et l'inclinaison de deux faces adjacentes, dans l'un de ces solides, est égale à l'inclinaison des faces homologues dans l'autre. — Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

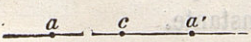
DÉFINITIONS

1° Deux points a, a' sont *symétriquement placés* par rapport à un plan MN, si ce plan est perpendiculaire à la ligne droite aa' et la divise en deux parties égales.



On dit que deux corps sont *symétriques par rapport à un plan*, lorsque tous les points de leurs surfaces sont, deux à deux, placés symétriquement par rapport à ce plan qu'on appelle *plan de symétrie*.

2° Deux points a, a' sont *symétriquement placés* par rapport à un troisième c, si le point c se trouve au milieu de la ligne droite aa'.

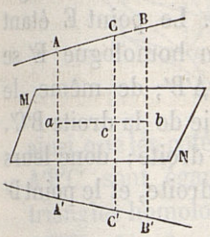


On dit que deux corps sont *symétriques par rapport à un point* c, lorsque tous les points de leurs surfaces sont, deux à deux, placés symétriquement par rapport au point c qu'on appelle *centre de symétrie.*

Les points qui se correspondent dans ces deux genres de symétrie sont nommés *points homologues.*

THÉORÈME I

Si deux figures sont symétriques par rapport à un plan MN, *et que trois points* A, B, C *de l'une soient en ligne droite, les points homologues* A′, B′, C′ *de l'autre sont aussi en ligne droite*



Les droites AA′, BB′, CC′, qui rencontrent le plan MN aux points a, b, c, sont par hypothèse perpendiculaires à ce plan, elles sont donc parallèles (3, II). Le plan mené par les droites AB′, AA′ contient dès lors les droites BB′, CC′, et coupe le plan MN suivant la droite ab. Cela posé, je fais tourner le trapèze ABba autour de son côté ab, jusqu'à ce qu'il s'applique sur la partie inférieure du plan ABB′A′. La droite aA prend alors la direction de aA′, puisque ces lignes sont perpendiculaires au plan MN; et, comme elles sont égales, le point A coïncide avec le point A′. Je prouverais de même que le point B s'applique sur B′ et le point C sur C′. Or, les trois points A, B, C sont en ligne droite; donc les points homologues A′, B′, C′ sont aussi en ligne droite.

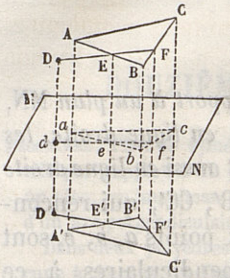
Corollaire I. — A une arête rectiligne AB de l'une des deux figures symétriques correspond une arête rectiligne A′B′ de l'autre figure.

Corollaire II. — La droite qui joint deux points A, B est égale à celle qui joint les points homologues A′, B′.

Car les côtés AB, A′B′ des deux trapèzes égaux ABab, A′B′ab ont la même longueur.

THÉORÈME II

Si deux figures sont symétriques par rapport à un plan MN, *et que quatre points* A, B, C, D *de l'une soient dans un plan, les points homologues* A′, B′, C′, D′ *de l'autre sont aussi dans un plan.*



Ce théorème est évident, si trois des points A, B, C, D sont en ligne droite, puisque les trois points homologues sont aussi en ligne droite (I). Je suppose dès lors que trois de ces points ne soient pas en ligne droite; et je tire du point D une droite qui coupe les côtés de l'angle ABC aux points E, F. Le point E étant sur la droite NB, son homologue E′ se trouve sur la droite A′B′; de même, le point F′, qui est homologue à F, fait partie de la droite B′C′. Or, les trois points D, E, F sont en ligne droite; donc leurs homologues D′, E′, F′ sont aussi en ligne droite, et le point D′ est dans le plan des trois points A′, B′, C′.

Corollaire I. — A une face plane de l'une des deux figures symétriques correspond une face plane de l'autre figure, et ces faces homologues ont le même nombre de côtés.

Corollaire II. — Deux polyèdres symétriques par rapport à un plan ont le même nombre de faces.

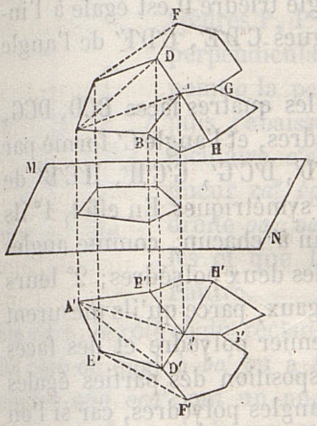
Corollaire III. — Deux polyèdres sont symétriques par rapport à un plan, lorsque leurs sommets sont, deux à deux, placés symétriquement par rapport à ce plan.

Car tout point M d'une face quelconque ABCD de l'un de ces polyèdres a son homologue M′ dans la face correspondante A′B′C′D′ de l'autre polyèdre.

THÉORÈME III

Dans deux polyèdres symétriques par rapport à un plan, 1° *les faces homologues sont égales;* 2° *l'inclinaison de deux faces adjacentes, dans un de ces solides, est égale à l'inclinaison des faces homologues dans l'autre;* 3° *deux angles polyèdres homologues sont symétriques.*

1° Soient ABCDE, A′B′C′D′E′ deux faces homologues de deux polyèdres symétriques par rapport au plan MN; comme ces faces ont le même nombre de côtés (II), je les décompose en un même nombre de triangles, en tirant des diagonales par leurs sommets homologues A et A'. Les deux triangles homologues ABC, A'B'C' ont les trois côtés égaux chacun à chacun : en effet, le côté AB est égal au côté A'B', parce que leurs extrémités sont des points homologues (I). Les côtés AC, A'C' sont égaux pour la même raison, ainsi que les côtés BC, B'C'; par conséquent les triangles ABC, A'B'C' sont égaux. Je démontrerai de même l'égalité des triangles homologues ACD, A'C'D', et celle des triangles ADE, A'D'E'. Les deux faces homologues ABCDE, A'B'C'D'E' sont donc égales, puisqu'elles sont composées d'un même nombre de triangles égaux et disposés de la même manière.



Je prouverais de même que les autres faces homologues des deux polyèdres sont égales.

2° Je dis que l'inclinaison des deux faces ABCDE, CDFG de l'un des polyèdres est égale à l'inclinaison des faces homologues A'B'C'D'E', C'D'F'G', de l'autre. Par les deux arêtes DE, DF du premier polyèdre je mène un plan qui fait un angle trièdre avec les faces ABCDE, CDFG. Le plan déterminé par les deux arêtes D'E', D'F' du second polyèdre fait aussi un angle trièdre avec les faces A'B'C'D'E', C'D'F'G'; ces deux angles trièdres ont les trois angles plans égaux chacun à chacun.

En effet, les angles CDE, C'D'E' sont égaux, comme angles homologues des polygones égaux ABCDE, A'B'C'D'E'; de même les angles CDF, C'D'F' sont égaux, parce qu'ils sont homologues dans les polygones égaux CDFG, C'D'F'G'. Enfin, si je tire les droites EF, E'F', les triangles DEF, D'E'F', qui ont pour sommets des points homologues des deux polyèdres, sont égaux, et l'angle EDF est égal à E'D'F'. Par conséquent, l'inclinaison des deux faces CDE, CDF de l'angle trièdre D est égale à l'inclinaison des deux faces homologues C'D'E', C'D'F' de l'angle trièdre D' (7. IV).

3° Soient l'angle C formé par les quatres faces BCD, DCG, GCH, HCB de l'un des deux polyèdres, et l'angle C' formé par les quatre faces homologues B'C'D', D'C'G', G'C'H', H'C'B' de l'autre polyèdre; je dis qu'ils sont symétriques. En effet, 1° ils ont les angles plans égaux chacun à chacun, comme angles homologues de faces égales dans les deux polyèdres; 2° leurs angles dièdres homologues sont égaux, parce qu'ils mesurent les inclinaisons des faces du premier polyèdre et des faces homologues du second; 3° la disposition des parties égales n'est pas la même dans ces deux angles polyèdres, car si l'on superposait les deux faces homologues ABCDE, A'B'C'D'E', en faisant coïncider le côté A'B' avec AB et le côté B'C' avec BC, l'un de ces angles serait au-dessus du plan ABC et l'autre au-dessous; les angles polyèdres C et C' sont donc symétriques.

Corollaire I. — Deux polyèdres symétriques par rapport à un plan ne sont pas superposables.

Car leurs angles polyèdres ne sont pas égaux.

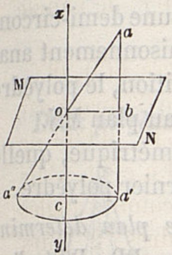
Corollaire II. — Deux polyèdres P, P' sont égaux, s'ils sont symétriques à un même polyèdre P″ par rapport à deux plans différents.

En effet, les polyèdres P et P″ ont leurs faces égales chacune à chacune et leurs angles polyèdres symétriques; il en est de même des polyèdres P' et P″. Par conséquent, les polyèdres P et P' ont les faces égales et les angles polyèdres égaux chacun à chacun, ils sont donc égaux.

THÉORÈME IV

Si deux polyèdres P *et* P' *sont symétriques par rapport à un plan* MN, *on peut les placer de manière qu'ils soient symétriques par rapport à un point quelconque* o *de ce plan;* et *réciproquement.*

Soient a, a' deux points homologues quelconques des polyèdres P, P′ et b le milieu de la droite aa' perpendiculaire au plan MN; j'élève par le point o la perpendiculaire xy sur ce plan, puis j'abaisse du point a' sur xy la perpendiculaire $a'c$ que je prolonge d'une longueur ca'' égale à ca'. Je tire ensuite les droite oa, oa'', et je dis qu'elles sont égales et que l'une est le prolongement de l'autre.



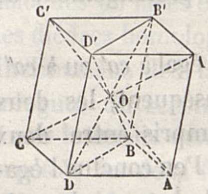
En effet, le côté ob du rectangle $oba'c$ est égal à ca' ou à ca'', et le côté oc égal à ba' ou à ba; par conséquent, les deux triangles abo oca'' ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et sont égaux. J'en conclus l'égalité de leurs hypoténuses oa, oa'', et celles de leurs angles oab, $a''oc$. Or, les angles oab, xoa étant alternes internes par rapport aux parallèles aa', xy, la somme des deux angles adjacents xoa'', xoa est égale à la somme des deux angles supplémentaires xoa'', $a''oc$, ou à deux angles droits; donc la droite oa'' est le prolongement de ao, et les deux points a'', a sont symétriquement placés par rapport au point o.

Cela posé, je suppose le polyèdre P invariablement lié à la droite xy, et je le fais tourner sur cette droite comme axe. Dans ce mouvement de rotation, la droite ca' perpendiculaire à l'axe xy engendre un plan (1, III, c), et le point a' vient se placer au point a'', après avoir décrit une demi-circonférence dans ce plan. Comme il en est de même de chacun des points du polyèdre P′, on voit que si ce polyèdre tourne sur la droite xy jusqu'à ce que chacun de ses points ait décrit une demi-circonférence, il sera symétrique, dans sa dernière position, au polyèdre P par rapport au point o, puisque les points de ces polyèdres seront deux à deux symétriquement placés par rapport à o, comme le sont les points a et a''.

Réciproquement : *Si deux polyèdres* P *et* P″ *sont symétriques par rapport à un point* o, *on peut les placer de manière qu'ils soient symétriques par rapport à un plan quelconque* MN *passant par ce point.*

J'élève par le point o la perpendiculaire xy sur le plan MN, et je fais tourner le polyèdre P″ autour de cette droite comme axe, jusqu'à ce que chacun de ses points ait décrit une demi-circonférence. Je démontrerais ensuite par un raisonnement analogue au précédent que, dans sa nouvelle position, le polyèdre P″ est symétrique au polyèdre P par rapport au plan MN.

Corollaire I. — Un polyèdre n'a qu'un symétrique, quelle que soit la manière dont on construise ce dernier polyèdre.



Corollaire II. — *Le plan déterminé par deux arêtes opposées* BD, B′D′ *d'un parallélipipède* ABCDA′B′C′D′ *divise ce polyèdre en deux prismes triangulaires, symétriques par rapport au point d'intersection* O *de ses diagonales.*

Car le point O divise chacune des diagonales du parallélipipède en deux parties égales.

THÉORÈME V

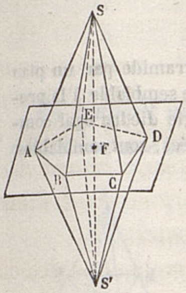
Deux polyèdres symétriques P *et* P′ *peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides symétriques.*

Je place les deux polyèdres P et P′ de manière qu'ils soient symétriques par rapport à un plan MN; je prends un point quelconque O à l'intérieur du premier et je détermine son homologue O′ dans le second. Je décompose ensuite le polyèdre P en autant de pyramides qu'il a de faces, en menant des plans par le point O et chacune des arêtes de sa surface; je décompose de même le polyèdre P′ en autant de pyramides qu'il a de faces, en menant des plans par le point O′ et chacune des arêtes de sa surface. Ces polyèdres contiennent le même nombre de pyramides, puisqu'ils ont le même nombre de faces; et ces pyramides sont deux à deux symétriques, car leurs sommets sont symétriquement placés par rapport au plan MN (II, c. III).

Corollaire. — Si l'on mène les diagonales homologues dans les faces homologues des polyèdres P et P′, ces polyèdres peuvent être considérés comme composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques, ayant pour sommets les points homologues O et O′.

THÉORÈME VI

Deux polyèdres symétriques sont équivalents.



Soient d'abord deux pyramides symétriques; je les place de manière que leurs bases coïncident, et que leurs sommets S, S′ se trouvent de différents côtés du plan de leur base commune ABCDE. Les points S, S′ sont dès lors placés symétriquement par rapport au plan ABC, et les hauteurs SF, S′F des deux pyramides sont égales. Par conséquent, ces pyramides qui ont la même base et les hauteurs égales sont équivalentes (10, V).

Je considère, en second lieu, deux polyèdres symétriques quelconques, et je les décompose en un même nombre de pyramides symétriques (V). Ces pyramides étant deux à deux équivalentes, les deux polyèdres sont, par suite, équivalents.

QUATORZIÈME LEÇON

Programme : Polyèdres semblables. — En c pant une pyramide par un plan parallèle à sa base, on détermine une pyramide partielle semblable à la première. — Deux pyramides triangulaires qui ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables et semblablement placées, sont semblables

---

DÉFINITIONS

Deux polyèdres sont *semblables* s'ils ont les faces semblables chacune à chacune, et que leurs angles polyèdres formés par les faces semblables soient égaux.

Deux points, deux lignes, deux faces, deux angles dièdres ou polyèdres, qui se correspondent dans deux polyèdres semblables, sont appelés *homologues*. Ainsi, deux angles polyèdres égaux sont des angles homologues, et leurs sommets, des points homologues. Pareillement, deux arêtes, deux diagonales, terminées à des sommets homologues, sont des lignes homologues. Enfin, deux faces semblables sont aussi des faces homologues.

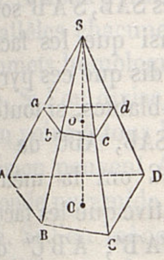
THÉORÈME I

Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables P *et* P′ *sont proportionnelles.*

Il est d'abord évident que les côtés homologues de deux faces homologues quelconques des polyèdres semblables P et P′ sont proportionnels, puisque ces faces sont des polygones semblables. Je remarque ensuite que le côté commun à deux faces adjacentes A, B du polyèdre P est homologue au côté commun aux deux faces adjacentes A′, B′, qui sont respectivement homologues à A et B dans le polyèdre P′; donc le rapport de similitude (P., 21, déf.) des deux faces homologues A, A′ est le même que celui des deux autres faces homologues B, B′. Par suite, les arêtes homologues des deux polyèdres P, P′ sont proportionnelles.

THÉORÈME II

En coupant une pyramide par un plan parallèle à sa base on détermine une seconde pyramide semblable à la première.



Soit *abcd* la section faite dans la pyramide SABCD par un plan parallèle à sa base ABCD; je dis que les pyramides S*abcd*, SABCD sont semblables.

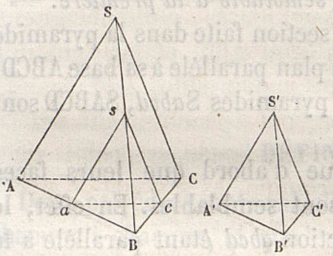
Je remarque d'abord que leurs faces homologues sont semblables. En effet, le plan de la section *abcd* étant parallèle à la base de la pyramide SABCD, les polygones *abcd*, ABCD sont semblables (10, I); les triangles homologues S*ab*, SAB sont aussi semblables, car ils ont les angles égaux chacun à chacun, à cause du parallélisme des droites *ab* et AB, etc.

Je dis, en second lieu, que les angles polyèdres homologues des pyramides S*abcd*, SABCD sont égaux. L'angle polyèdre S leur est commun; pour démontrer l'égalité des deux angles trièdres homologues *a* et A, je les superpose en plaçant le sommet *a* sur le sommet A, l'arête *a*S sur l'arête AS, et faisant coïncider le plan S*ad* avec le plan SAD. L'arête *ad* prend alors la direction de l'arête AD, parce que l'angle S*ad* est égal à l'angle SAD; pareillement, le plan S*ab* s'applique sur le plan SAB, à cause de l'égalité des deux angles dièdres *d*S*ab*, DSAB, et l'arête *ab* prend la direction de l'arête AB, puisque les deux angles S*ab*, SAB sont égaux. Dès lors la troisième face *dab* de l'angle trièdre *a* coïncide aussi avec la troisième face DAB de l'autre angle trièdre A, et ces deux angles trièdres sont égaux. Il en est de même des deux angles trièdres b et B, etc. Donc les pyramides S$abcd$, SABCD, qui ont les faces semblables chacune à chacune et les angles polyèdres homologues égaux, sont semblables.

THÉORÈME III

Deux pyramides triangulaires qui ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement placées, sont semblables.

Soient SABC, S'A'B'C' deux pyramides triangulaires qui ont les angles dièdres AB, A'B' égaux, et dont les faces SAB, S'A'B' sont semblables ainsi que les faces ABC, A'B'C' ; je dis que ces pyramides sont semblables, si toutefois les faces SAB, ABC de la pyramide SABC ont la même disposition relative que les faces homologues S'A'B', A'B'C' de l'autre pyramide S'A'B'C'.



Je prends d'abord sur l'arête BA une longueur Ba égale à l'arête B'A', puis je mène par le point a le plan acs parallèle à la face ACS de la pyramide SABC. Ce plan détermine une pyramide saBc semblable à SABC (II) ; je vais démontrer qu'elle est égale à la pyramide S'A'B'C'. Je remarque, en effet, que l'angle dièdre aB est égal par hypothèse à l'angle dièdre A'B', et le triangle saB égal au triangle S'A'B', parce que chacun d'eux est semblable au triangle SAB et que leurs côtés homologues aB, A'B' sont égaux. Le triangle aBc est aussi égal au triangle A'B'C' pour la même raison ; donc les pyramides triangulaires saBc, S'A'B'C', qui ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement placées, sont égales (10, III). La pyramide S'A'B'C' est, par suite, semblable à la pyramide SABC.

PROBLÈMES

1. Deux pyramides polygonales sont semblables lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face latérale semblables chacune à chacune et semblablement placées.

2. Les surfaces des deux pyramides semblables sont proportionnelles aux carrés de deux arêtes homologues.

3. Couper une pyramide par un plan parallèle à sa base, de manière que la surface de la pyramide déterminée par ce plan et celle de la pyramide donnée soient proportionnelles aux deux longueurs m et n.

4. Si deux pyramides semblables ont leurs faces homologues parallèles chacune à chacune, les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent au même point.

5. Si l'on divise dans un même rapport les droites menées d'un point à tous les sommets d'une pyramide, les points de division peuvent être considérés comme les sommets d'une seconde pyramide semblable à la première.

6. Si l'on mène par les sommets d'un tétraèdre des plans parallèles aux faces opposées, le tétraèdre formé par ces plans est-il semblable au premier tétraèdre?

QUINZIÈME ET SEIZIÈME LEÇON

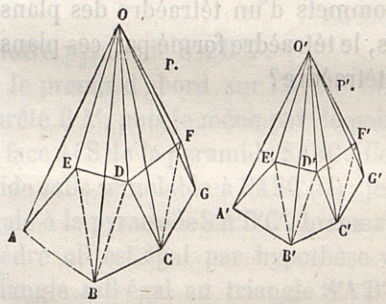
Programme : Décomposition des polyèdres semblables en pyramides triangulaires semblables. — Rapport de leurs volumes. — Exercices numériques.

Centre de similitude de deux polyèdres semblables et semblablement placés.

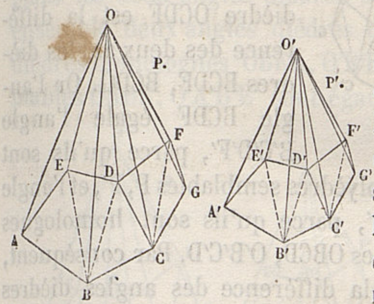
THÉORÈME I

Deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides triangulaires semblables et semblablement placées.

Soient P et P′ deux polyèdres semblables; je commence par diviser en triangles semblables leurs faces homologues, qui, comme ABCDE et A′B′C′D′E′, ne sont pas triangulaires. A cet effet, je trace les diagonales homologues de ces polygones ; ces lignes décomposent les surfaces des deux polyèdres en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.

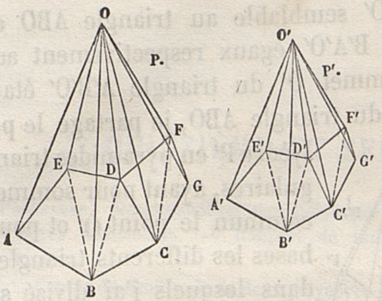


Cela posé, je partage le polyèdre P en pyramides triangulaires, ayant pour bases les divers triangles dans lesquels j'ai décomposé sa surface, et pour sommet commun un point quelconque O, pris à l'intérieur de ce polyèdre. Pour déterminer dans l'autre polyèdre P′ le point homologue à O, je mène par l'une de ses arêtes, par exemple A′B′, un plan qui forme à l'intérieur de ce polyèdre, avec la face A′B′C′D′E′, un angle dièdre égal à l'angle dièdre OABC ; je construis ensuite dans ce plan le triangle A'B'O' semblable au triangle ABO en faisant les angles A'B'O', B'A'O' égaux respectivement aux angles ABO, BAO. Le sommet O' du triangle A'B'O' étant homologue au sommet O du triangle ABO, je partage le polyèdre P' en pyramides triangulaires, ayant pour sommet commun le point O' et pour bases les différents triangles dans lesquels j'ai divisé sa surface. Les deux polyèdres P et P' sont alors décomposés en un même nombre de pyramides triangulaires, semblablement placées ; je dis que ces tétraèdres sont semblables deux à deux.



Je considère d'abord les tétraèdres OABE, OBDE, OBCD, et les tétraèdres homologues O'A'B'E', O'B'D'E', O'B'C'D' qui ont pour bases les triangles semblables dans lesquels j'ai décomposé les faces homologues ABCDE, A'B'C'D'E des deux polyèdres. Les tétraèdres OABE, O'A'B'E' sont semblables, parce qu'ils ont les angles dièdres égaux AB, A'B', compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement placées (12, III) ; par conséquent le triangle OBE est semblable au triangle homologue O'B'E', et l'angle dièdre OBEA égal à l'angle dièdre homologue O'B'E'A'. Les deux tétraèdres suivants OBDE, O'B'D'E' sont aussi semblables pour la même raison ; car leurs bases BDE, B'D'E' sont semblables par hypothèse, ainsi que leurs faces latérales homologues OBE, O'B'E', et l'angle dièdre OBED est égal à l'angle dièdre O'B'E'D', puisque leurs suppléments OBEA, O'B'E'A' sont égaux. Je prouverais de même la similitude des deux tétraèdres OBCD, O'B'C'D'.

Je considère, en second lieu, les tétraèdres correspondant à deux autres faces homologues CDFG, C'D'F'G' des polyèdres P et P', adjacentes aux faces ABCDE, A'B'C'D'E', et je dis que ces tétraèdres sont aussi semblables deux à deux. En effet, les tétraèdres homologues OCDF, O'C'D'F' ont leurs bases CDF, C'D'F' semblables par hypothèse; leurs faces latérales OCD, O'C'D' sont aussi semblables, à cause de la similitude des tétraèdres OBCD, O'B'C'D'; de plus, l'angle dièdre OCDF est la différence des deux angles dièdres BCDF, BCDO. Or l'angle BCDF égale l'angle B'C'D'F', parce qu'ils sont homologues dans les deux polyèdres semblables P, P', et l'angle BCDO égale l'angle B'C'D'O', parce qu'ils sont homologues dans les tétraèdres semblables OBCD, O'B'C'D. Par conséquent, l'angle dièdre OCDF égale la différence des angles dièdres C'D'F', B'C'D'O', c'est-à-dire l'angle dièdre O'C'D'F'. Les tétraèdres OCDF, O'C'D'F' sont donc semblables, puisqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement placées. Je prouverais de même la similitude des autres tétraèdres correspondant aux deux faces CDFG, C'D'F'G', et ainsi de suite. Dès lors les polyèdres P et P' sont décomposés en un même nombre de pyramides triangulaires semblables et semblablement placées.



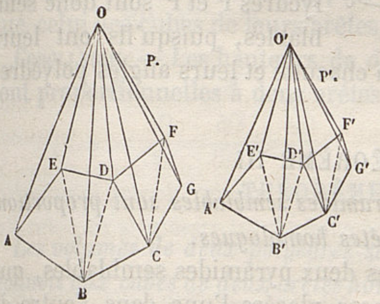
Corollaire. — On peut prendre le point O sur la surface même du polyèdre P. Si ce point coïncide avec l'un des sommets de P, par exemple avec A, le point O' coïncidera avec le sommet A' homologue à A, et les arêtes latérales des tétraèdres dans lesquels on décomposera les polyèdres P et P' seront des diagonales homologues de ces polyèdres. Par conséquent, *les diagonales homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles à leurs arêtes homologues* (12, I).

THÉORÈME II

Réciproquement : *Deux polyèdres P et P', composés d'un même nombre de pyramides triangulaires semblables et semblablement placées, sont semblables.*

Je dis d'abord que si deux pyramides OABE, OBDE du polyèdre P ont leurs bases ABE, BDE comprises dans le même plan, il en est de même des bases A'B'E', B'D'E' des pyramides homologues O'A'B'E', O'B'D'E' du polyèdre P'.

En effet, les triangles ABE, BDE étant situés dans le même plan, les deux angles dièdres adjacents OBEA, OBED valent ensemble deux angles dièdres droits (5, V). Or, les angles dièdres homologues OBEA, O'B'E'A' des deux tétraèdres semblables OABE, O'A'B'E' sont égaux ; les angles dièdres OBED,

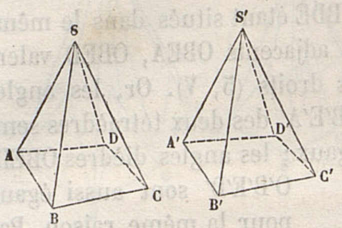


O'B'E'D' sont aussi égaux pour la même raison. Par conséquent, les angles dièdres adjacents O'B'E'A', O'B'E'D' sont supplémentaires, ce qui exige que leurs faces non communes B'E'A', B'E'D' soient dans le même plan (5, VI).

Cela posé, je fais remarquer que le polyèdre P ayant une face ABCDE composée de trois triangles ABE, BDE, BCD, les triangles A'B'E', B'D'E', B'C'D', qui leur sont respectivement semblables, forment la face correspondante A'B'C'D'E' de l'autre polyèdre P'; or ces deux faces homologues sont composées d'une même nombre de triangles semblables et semblablement placés, donc elles sont semblables (P. 21, VIII). Il en est de même des faces CDFG, C'D'F'G', et ainsi de suite.

Je dis, en second lieu, que l'inclinaison de deux faces adjacentes ABCDE, CDFG du polyèdre P est égale à celle des deux faces correspondantes A'B'C'D'E', C'D'F'G' du polyèdre P'. Je remarque, en effet, que l'angle dièdre BCDF est égal à la somme des angles dièdres BCDO, FCDO ; or les angles dièdres homologues BCDO, B'C'D'O' des tétraèdres semblables OBCD, O'B'C'D' sont égaux, ainsi que les angles dièdres homologues FCDO, F'C'D'O' des tétraèdres semblables OCDF, O'C'D'F'. Par conséquent, l'angle dièdre BCDF égale aussi la somme des angles dièdres B'C'D'O', F'C'D'O', c'est-à-dire l'angle dièdre B'C'D'F'.

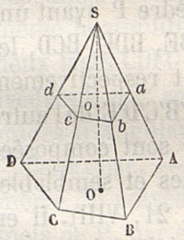
Il résulte évidemment de ce que les faces homologues des polyèdres P et P′ sont semblables, également inclinées et semblablement placées, que leurs angles polyèdres homologues, tels que SABCD, S′A′B′C′D′, ont tous leurs éléments, faces et angles dièdres, égaux chacun à chacun et semblablement placés; par conséquent ils sont superposables et, dès lors, égaux entre eux. Les polyèdres P et P′ sont donc semblables, puisqu'ils ont leurs faces semblables chacune à chacune et leurs angles polyèdres homologues égaux.



THÉORÈME III

Les volumes de deux pyramides semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arêtes homologues.

Soient SABCD, S*abcd*, les deux pyramides semblables, que je suppose placées l'une dans l'autre de manière que leurs angles polyèdres coïncident. Les bases ABCD, *abcd* de ces pyramides sont alors parallèles, et leurs hauteurs SO, S*o* se mesurent sur la même droite SO, menée perpendiculairement aux bases par le sommet commun S.



Les pyramides SABCD, S*abcd* étant semblables, leurs bases ABCD, *abcd* sont aussi semblables, et les aires de ces polygones sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues (P., 33, II), ou aux carrés de deux arêtes homologues des pyramides (12, I); on a donc

$$\frac{ABCD}{abcd}=\frac{SA^2}{Sa^2}.$$

Or le plan *abcd*, parallèle à la base ABCD de la pyramide SABCD, divise les droites SA, SO en segments proportionnels (10, I); par conséquent, on a aussi

$$\frac{SO}{So}=\frac{SA}{Sa}.$$

En multipliant membre à membre les deux égalités précédentes, on trouve que

$$\frac{\mathrm{ABCD} \times \mathrm{SO}}{abcd \times \mathrm{S}o} = \frac{\mathrm{SA}^3}{\mathrm{S}a^3};$$

or, les volumes des pyramides SABCD, S*abcd* sont égaux respectivement aux tiers des produits $\mathrm{ABCD} \times \mathrm{SO}$, $abcd \times \mathrm{S}o$ (10, V) ; par conséquent, le rapport de ces volumes est le même que celui des cubes de leurs arêtes homologues SA, S*a*.

Corollaire. — Les hauteurs de deux pyramides semblables sont proportionnelles à deux arêtes homologues.

THÉORÈME IV

Les volumes de deux polyèdres semblables P *et* p *sont proportionnels aux cubes de deux arêtes homologues* A *et* a.

Je décompose les deux polyèdres semblables P et p en un même nombre de tétraèdres semblables (I), soient V, V′, V″,... les volumes de ceux qui forment le polyèdre P, et v, v', v'',... les volumes des tétraèdres correspondants du polyèdre p. Les pyramides triangulaires homologues étant semblables, et les arêtes homologues des deux polyèdres étant proportionnelles (12, I), on a (III) :

$$\frac{V}{v} = \frac{A^3}{a^3},$$

$$\frac{V'}{v'} = \frac{A^3}{a^3},$$

$$\frac{V''}{v''} = \frac{A^3}{a^3},$$

$$\cdots\cdots$$

et, par conséquent,

$$\frac{V}{v} = \frac{V'}{v'} = \frac{V''}{v''} = \ldots = \frac{A^3}{a^3};$$

on en déduit :

$$\frac{V + V' + V''\ldots}{v + v' + v''\ldots} = \frac{A^3}{a^3},$$

c'est-à-dire que les volumes des polyèdres P et p sont proportionnels aux cubes des arêtes homologues A et a.

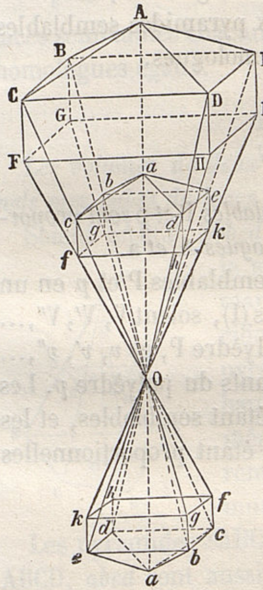
Corollaire. — *Les surfaces de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues.*

THÉORÈME V

Si l'on joint un point quelconque O *aux sommets d'un polyèdre* ABCDEFGHK, *et qu'on prenne sur les droites* OA, OB, OC,... *des points* a, b, c,... *tels que*

$$\frac{Oa}{OA} = \frac{Ob}{OB} = \frac{Oc}{OC} = \ldots r,$$

r *étant un nombre donné, le polyèdre* abcdefghk *est semblable au polyèdre* ABCDEFGHK.



En effet, je considère une face quelconque FGKH du polyèdre donné, et je mène par le point f un plan parallèle à FGKH ; ce plan divise les arêtes OF, OG, OH, OK de la pyramide OFGHK en segments proportionnels (10, I), et passe dès lors par les points g, h, k ; les points homologues aux sommets du polygone FGHK sont donc dans un même plan, et le polygone $fghk$ qu'ils déterminent est semblable à FGHK. Je prouverais de même que les autres faces homologues des deux polyèdres sont semblables.

Pour démontrer l'égalité de deux angles polyèdres homologues, tels que A et a, il suffit de remarquer que leurs arêtes homologues sont parallèles et dirigées dans le même sens. Car ces angles polyèdres ont alors leurs faces homologues égales (P, 9, I), et leurs angles dièdres homologues égaux (7, IV), ils sont donc égaux. Les deux polyèdres abc..., ABC..., qui ont par suite les angles polyèdres égaux chacun à chacun et les faces homologues semblables, sont semblables.

Scolie I. Si au lieu de prendre les points $a, b, c...$ sur les droites OA, OB, OC, on les prenait sur les prolongements de ces droites à partir du point O, on démontrerait comme ci-dessus la similitude des faces homologues des deux polyèdres; mais les angles polyèdres homologues, tels que A et a, ont leurs arêtes homologues parallèles et dirigées en sens contraires, de sorte que l'angle polyèdre a est égal au symétrique de A. Les deux polyèdres $abc...$, ABC... ne sont donc pas semblables.

Scolie II. On dit, dans le premier cas, que les deux polyèdres sont *homothétiques directs*, et dans le second qu'ils sont *homothétiques inverses;* le point O est *leur centre de similitude.* De là résulte ce nouvel énoncé du théorème précédent.

1° *Deux polyèdres homothétiques directs sont semblables.*

2° *Deux polyèdres homothétiques inverses ont leurs faces homologues semblables, et leurs angles polyèdres homologues symétriques.*

THÉORÈME VI

Réciproquement : 1° *Si deux polyèdres semblables ont leurs faces homologues parallèles, les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent aussi en un même point.*

2° *Si deux polyèdres ont leurs faces semblables et parallèles chacune à chacune, et que leurs angles polyèdres homologues soient symétriques, les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent aussi en un même point.*

EXERCICES NUMÉRIQUES

1. *La hauteur d'une pyramide est égale à* $4^m,50$, *et sa base est un carré dont le côté a* $1^m,20$ *de longueur. Calculer les dimensions correspondantes d'une pyramide semblable dont le volume est de 7 mètres cubes 290 décimètres cubes.*

Soient c le côté de la base et h la hauteur de la seconde pyramide; le volume de la première étant égal à $\frac{1}{3}(1,2)^2 \times 4,5$, c'est-à-dire à 2 mètres cubes 160 décimètres cubes, on a (III).

$$\frac{c^3}{(1,2)^3}=\frac{h^3}{(4,5)^3}=\frac{7,290}{2,160};$$

il en résulte que

$$c=\sqrt[3]{\frac{729\,(1,2)^3}{216}}=\frac{9\times 1,2}{6},$$

et

$$h=\sqrt[3]{\frac{729\,(4,5)^3}{216}}=\frac{9\times 4,5}{6}.$$

En effectuant les calculs indiqués, on trouve :

$$c=1^{\mathrm{m}},80,\ \text{et}\ h=6^{\mathrm{m}},75.$$

2. *Calculer le volume d'un parallélipipède rectangle dont la surface est égale à 3 mètres carrés, et dont les dimensions sont proportionnelles aux trois nombres 4, 6 et 9.*

Je calcule d'abord la surface et le volume du parallélipipède rectangle dont les dimensions sont 4 mètres, 6 mètres et 9 mètres. La surface est composée de six rectangles, parmi lesquels deux ont pour dimensions 4 mètres et 6 mètres; deux autres ont pour dimensions 4 mètres et 9 mètres; enfin les dimensions des deux derniers sont 6 mètres et 9 mètres. Donc la surface totale de ce parallélipipède est égale à $4\times6\times2+4\times9\times2+6\times9\times2$ ou à 228 mètres carrés. Quant à son volume, il est égal à $4\times6\times9$ ou à 216 mètres cubes.

Cela posé, je fais remarquer que ce parallélipipède est semblable au parallélipipède cherché, parce qu'ils ont leurs faces semblables chacune à chacune et leurs angles polyèdres homologues égaux (II); par conséquent, leurs volumes sont proportionnels aux cubes de leurs arêtes homologues, et leurs surfaces proportionnelles aux carrés des mêmes arêtes (IV). Dès lors, si je désigne par V le volume inconnu et par A son arête homologue à 4 mètres, j'aurai (IV) :

$$\frac{V}{216}=\frac{A^3}{64},$$

et

$$\frac{3}{228}=\frac{A^2}{16}.$$

La dernière de ces égalités donne, toute réduction faite :

$$A = \frac{2}{\sqrt{19}};$$

et la première devient, par la substitution de cette valeur de A,

$$\frac{V}{216} = \frac{8}{64(\sqrt{19})^3}.$$

J'en conclus que

$$V = \frac{27}{(\sqrt{19})^3},$$

ou

$$V = 0^{m.c.},326012.$$

PROBLÈMES

1. Calculer, à un centimètre près, les dimensions d'un parallélipipède rectangle, en sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$, et que son volume est égal à 2 mètres cubes.

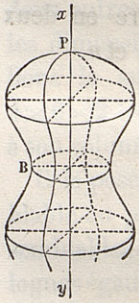
2. Mener un plan parallèle à la base d'une pyramide, de telle sorte qu'il divise le volume de ce polyèdre en deux parties proportionnelles à deux lignes données *m* et *n*.

DIX-SEPTIÈME ET DIX-HUITIÈME LEÇON

Programme : Cône droit à base circulaire. — Section parallèle à la base. — Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles. — Volume du cône à bases parallèles*.

DÉFINITIONS

1. Lorsqu'une ligne droite ou courbe se meut dans l'espace, le lieu des positions qu'elle y occupe successivement est une surface ; aussi on donne à cette ligne le nom de *génératrice* de la surface, et celui de *directrices* aux lignes qui dirigent le mouvement de la génératrice.



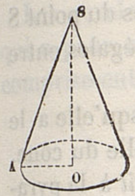
Toute surface qui n'est pas plane, ni formée par la réunion de surfaces planes, est appelée *surface courbe*.

On distingue parmi les surfaces courbes celles qu'on nomme *surfaces de révolution*. Une surface de révolution est engendrée par la rotation d'une ligne quelconque ABC sur une ligne droite fixe xy, à laquelle elle est liée d'une manière invariable. La ligne droite xy est l'*axe* de la surface.

On désigne sous le nom de *parallèle d'une surface de révolution* toute section plane, perpendiculaire à l'axe. Les sections faites par des plans qui passent par l'axe sont les *méridiens* de cette surface.

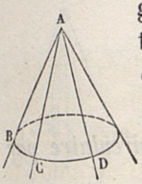
* L'aire du cône (ou du cylindre) sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend l'aire de la pyramide inscrite (ou du prisme inscrit), à mesure que ses faces diminuent indéfiniment

2. On appelle *cône droit à base circulaire* le corps engendré par la rotation d'un triangle rectangle SAO sur l'un des côtés de son angle droit SOA, par exemple sur le côté SO.



L'autre côté OA de l'angle droit décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe SO (1, III, c), et qu'on nomme *base* du cône : le point S est le sommet de ce corps, et la droite SO en est la *hauteur*. L'hypoténuse SA du triangle rectangle SAO engendre une surface de révolution qu'on appelle *surface convexe* du cône ; la droite SA a reçu le nom d'*apothème*.

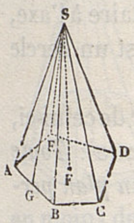
3. Par analogie, on appelle *surface conique* la surface engendrée par une droite AB, assujettie à passer toujours par un point fixe A, et à tourner autour de ce point en s'appuyant sur une ligne courbe donnée BCD, qui est la *directrice* de la surface.



Si la directrice est une courbe fermée, et qu'on coupe la surface conique par un plan BCD qui rencontre toutes les positions de la génératrice d'un même côté du sommet A, on désigne sous le nom de *cône* le corps compris entre ce plan et la surface conique ; il a pour *base* la face BCD, pour sommet le point A, et pour *hauteur* la distance de son sommet à sa base.

4. Deux cônes droits à base circulaire sont *semblables*, si leurs hauteurs sont proportionnelles aux rayons de leurs bases, c'est-à-dire s'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables.

5. On appelle *apothème* d'une pyramide régulière SABCDE, la perpendiculaire SG abaissée de son sommet S sur un côté quelconque AB de sa base ABCDE.



Cette droite SG a une longueur constante : en effet, d'après la définition de la pyramide régulière, les arêtes latérales SA, SB, SC... s'écartent également de la perpendiculaire SF abaissée du sommet sur la base; elles sont donc égales (1, VI). De là résulte l'égalité des triangles isocèles, SAB, SBC, SCD,....

qui composent la surface latérale de la pyramide, car ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun. Les hauteurs de ces triangles, c'est-à-dire les perpendiculaires menées du point S sur les divers côtés de la base ABCDE sont donc égales entre elles.

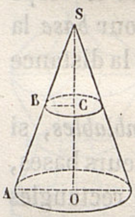
Une pyramide est *inscrite* dans un cône lorsqu'elle a le même sommet, et que sa base est inscrite dans celle du cône. On dit réciproquement que le cône est *circonscrit* à la pyramide.

Si l'on inscrit dans un cône droit à base circulaire une pyramide dont la base soit un polygone régulier, cette pyramide est régulière ; car la droite qui joint le centre de sa base à son sommet est perpendiculaire à la base, puisqu'elle coïncide avec l'axe du cône.

THÉORÈME I

Toute section faite dans un cône droit à base circulaire par un plan parallèle à sa base est un cercle.

Soit le cône engendré par la rotation du triangle rectangle SAO sur le côté SO de l'angle droit SOA ; j'abaisse d'un point quelconque B de la génératrice SA la perpendiculaire BC sur l'axe SO. Pendant la rotation du triangle SAO, la droite BC engendre un plan perpendiculaire à SO (1, III, c), et le point B, dont la distance au point C est constante, décrit sur ce plan une circonférence de cercle qui a le point C pour centre. Par conséquent, toute section BC faite dans le cône droit SAO à base circulaire par un plan perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire parallèle à la base du cône (3, VI), est un cercle qui a son centre sur l'axe SO.



Remarque I. — Ce théorème est un cas particulier de celui-ci, dont la démonstration est identique à la précédente : *Toute section faite dans une surface de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle.*

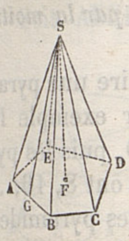
Remarque II. — Si l'on coupe un cône circulaire droit SAO par un plan BC parallèle à sa base OA, la portion du cône comprise entre la base et la section est appelée *cône tronqué* ou *tronc de cône à bases parallèles*.

Les cercles OA, CB sont les deux *bases* du tronc de cône, qui a pour *apothème* la partie AB de l'apothème SA du cône comprise entre ses bases.

THÉORÈME II

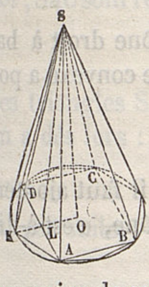
La surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la moitié de son apothème.

Soit SABCDE une pyramide régulière qui a le polygone



régulier ABCDE pour base, le point S pour sommet, et la droite SG pour apothème ; sa surface latérale est la somme des triangles SAB, SBC, SCD,... qui ont pour bases les côtés AB, BC, CD... du polygone ABCDE, et pour hauteur commune l'apothème SG de la pyramide (déf. 5). Or, chacun de ces triangles a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur ; donc la surface latérale de la pyramide régulière SABCDE a pour mesure $(AB + BC + CD + \ldots) \times \frac{SG}{2}$, c'est-à-dire le produit du périmètre $AB + BC + CD + \ldots$ de sa base par la moitié de son apothème SG.

Remarque. — Si l'on inscrit dans un cône droit SOK à base

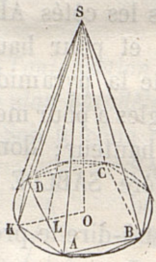


circulaire une pyramide régulière quelconque, par exemple la pyramide quadrangulaire SABCD, dont l'apothème est SL, et qu'ensuite on double indéfiniment le nombre des côtés de sa base, l'apothème SL croît, sans pouvoir égaler l'apothème SK du cône dont il s'approche indéfiniment. La surface latérale de la pyramide augmente par suite, et diffère de moins en moins de celle du cône ; il en est de même des volumes de ces deux corps. Aussi *je considérerai l'apothème, la surface convexe et le volume du cône comme les limites vers lesquelles tendent respectivement l'apothème, la surface latérale et le volume d'une pyramide régulière inscrite, lorsque le nombre de ses faces augmente indéfiniment ; et je regarderai comme acquise au cône toute propriété démontrée pour une pyramide régulière inscrite, indépendamment du nombre et de la grandeur de ses faces.*

THÉORÈME III

La surface convexe d'un cône droit à base circulaire a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème.

J'inscris dans le cône droit SOK à base circulaire une pyramide régulière quelconque, par exemple la pyramide quadrangulaire SABCD, puis les pyramides régulières dont les bases ont 8, 16,... côtés. Les surfaces latérales de ces pyramides vont en croissant, et ont pour limite la surface convexe du cône SOK qui leur est circonscrit ; or, chacune d'elles a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la moitié de son apothème, quels que soient le nombre et la grandeur des faces qui la composent ; donc la surface convexe du cône SOK a aussi pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème (II, Rem.).



Remarque. — Soient A l'apothème d'un cône droit à base circulaire et R le rayon de sa base ; sa surface convexe a pour mesure :

$$\pi R \times A.$$

Pour avoir la mesure de sa surface totale, il faut ajouter à la quantité $\pi R \times A$ la mesure de la base du cône, c'est-à-dire πR^2, et l'on a :

$$\pi R (A + R).$$

Corollaire. — *La surface convexe d'un cône droit* SBC *à base circulaire a pour mesure le produit de son apothème par la circonférence du parallèle* DE, *également distant du sommet et de la base.*

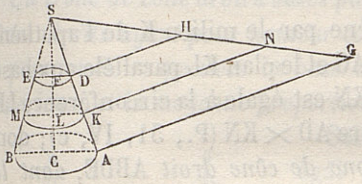
En effet, le rayon DE de ce parallèle égale la moitié du rayon CB de la base, puisque le point D est le milieu de SC ; on a par suite (P, 27, IV) :

$$\frac{1}{2} circ.\ CB \times SB = circ.\ DE \times SB.$$

THÉORÈME IV

La surface convexe d'un tronc de cône droit à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences de ses bases par son apothème.

Soit ABED un tronc de cône égal à la différence des deux cônes de révolution SAC, SDF, dont les bases AB, DE sont parallèles. Par l'extrémité A de la génératrice SA, j'élève sur cette droite une perpendiculaire quelconque AG, que je prends égale à la circonférence CA de la base inférieure du cône tronqué. Je tire ensuite la droite SG, et je mène par le point D, où la génératrice SA coupe la base supérieure du tronc, la droite DH parallèle à AG. Je dis d'abord que cette droite est égale à la circonférence du cercle FD.



En effet, la droite SC étant l'axe du cône SAC, les triangles SDF, SAC sont rectangles et semblables ; on a donc (P., 27, IV) :

$$\frac{SD}{SA} = \frac{FD}{CA} = \frac{cir.\ FD}{cir.\ CA}.$$

Les triangles SDH, SAG sont aussi rectangles et semblables ; on a dès lors :

$$\frac{SD}{SA} = \frac{DH}{AG},$$

et, par suite,

$$\frac{cir.\ FD}{cir.\ CA} = \frac{DH}{AG}.$$

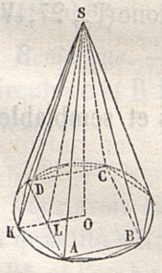
Or, la droite AG est, par hypothèse, égale à *cir.* CA; donc la droite DH est aussi égale à *cir.* FD.

Je remarque, en second lieu, que la surface convexe du cône SAC a pour mesure $\frac{1}{2}$ *cir.* CA $\times$ SA (III); elle est donc équivalente à la surface du triangle rectangle SAG, qui est mesurée par $\frac{1}{2}$ AG $\times$ SA. De même, la surface convexe du cône SDF est équivalente au triangle rectangle SDH; par conséquent, la surface convexe du cône tronqué ABED est équivalente à la surface du trapèze AGHD. Or, l'aire de ce trapèze est égale à AD $\times \left(\frac{\text{AG} + \text{DH}}{2}\right)$ (P., 13, VI); donc la surface convexe du tronc du cône ABED a pour mesure le produit de son apothème AD par la demi-somme des circonférences CA FD de ses bases.

Corollaire. — Si l'on mène par le milieu K de l'apothème AD la droite KN parallèle à AG et le plan KL parallèle aux bases du cône tronqué, la droite KN est égale à la circonférence LK. Or, le trapèze a pour mesure AD $\times$ KN (P., 31, IV, c); donc *la surface convexe d'un tronc de cône droit* ABDE, *dont les bases sont parallèles, a pour mesure le produit de son apothème* AD *par la circonférence du parallèle* KL, *également éloigné de ses bases.*

THÉORÈME V

Le volume d'un cône droit à base circulaire est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.



J'inscris dans le cône droit SOK à base circulaire une pyramide régulière quelconque, par exemple la pyramide quadrangulaire SABCD, puis les pyramides régulières dont les bases ont 8, 16,.... côtés. Les volumes de ces pyramides vont en croissant, et ont pour limite le volume du cône SOK qui leur est circonscrit; or, chacun d'eux a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur, quels que soient le nombre et la grandeur de ses faces; donc le volume du cône SOK a aussi pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur (II, Rem.).

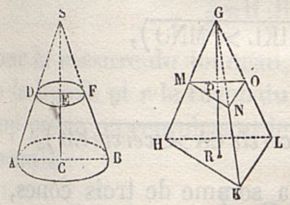
Remarque. — Soient R le rayon de la base et H la hauteur d'un cône droit à base circulaire; son volume est égal à

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \times H.$$

COROLLAIRE. — Les volumes de deux cônes droits à base circulaire sont proportionnels à leurs bases si leurs hauteurs sont égales. — Lorsque deux cônes droits à base circulaire ont des bases égales, leurs volumes sont proportionnels à leurs hauteurs.

THÉORÈME VI

Un tronc de cône droit à bases parallèles est équivalent à trois cônes droits ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.



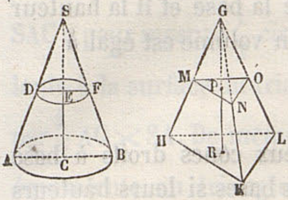
Soit ABFD le tronc de cône égal à la différence des deux cônes droits SAB, SDF, dont les bases AB, DF sont parallèles; je construis sur le plan de la base inférieure du cône tronqué une pyramide triangulaire GHKL dont la base HKL soit équivalente au cercle AC et la hauteur GR égale à la hauteur SC du cône SAB. Je dis d'abord que le plan de la base supérieure du cône tronqué détermine dans la pyramide une section MNO équivalente au cercle ED.

En effet, les bases du tronc de cône étant parallèles, le plan SCA coupe la base supérieure du tronc de cône suivant une droite ED parallèle à CA, et le rapport des rayons CA, ED égale celui des hauteurs SC, SE; on a donc :

$$\frac{\textit{cercle}\ CA}{\textit{cercle}\ ED} = \frac{CA^2}{ED^2} = \frac{SC^2}{SE^2}.$$

Il résulte aussi du parallélisme des plans MNO, HKL, que (10, I, c.)

$$\frac{HKL}{MNO}=\frac{GR^2}{GP^2}.$$



Or, les droites GR et SC sont égales par hypothèse, ainsi que les droites GP et SE; par conséquent on a :

$$\frac{\textit{cercle}\ CA}{\textit{cercle}\ ED}=\frac{HKL}{MNO}.$$

Mais le triangle HKL est, par construction, équivalent au cercle CA; donc le triangle MNO est aussi équivalent au cercle ED.

Je remarque en second lieu que le cône SAC a pour mesure $\frac{1}{3}$ *cercle* $CA \times SC$; il est donc équivalent à la pyramide GHKL qui a pour mesure $\frac{1}{3}HKL \times GR$. De même, le cône SDE et la pyramide GMNO sont équivalents; donc le tronc du cône ABFD est équivalent au tronc de pyramide HKLMNO. Le volume de cette pyramide tronquée étant égal à (10, VI)

$$\frac{1}{3}PR\ (HKL + MNO + \sqrt{HKL \times MNO}),$$

le tronc de cône a pour mesure

$$\frac{1}{3}CE\ (\textit{cercle}\ CA + \textit{cercle}\ ED + \sqrt{\textit{cercle}\ CA \times \textit{cercle}\ ED}),$$

c'est-à-dire qu'il est équivalent à la somme de trois cônes, ayant pour hauteur commune la hauteur CE du tronc, et pour bases respectives les cercles CA et ED, ainsi que la moyenne proportionnelle entre ces deux cercles.

Remarque. — Soient R, r et H les rayons des bases et la hauteur du cône tronqué; on a :

$$\frac{1}{3}\pi H\,(R^2 + r^2 + Rr)$$

pour l'expression de son volume.

PROBLÈMES

1. Si deux cônes droits à base circulaire sont semblables,

leurs surfaces convexes sont proportionnelles aux carrés des rayons de leurs bases, et leurs volumes proportionnels aux cubes des mêmes rayons.

2. Diviser la surface latérale d'un cône droit à base circulaire en deux parties équivalentes par un plan parallèle à sa base.

3. La surface totale d'un cône droit à base circulaire est égale à 10 mètres carrés, et le rayon de sa base égal à $1^m,2$; calculer, à un centimètre près, l'apothème et la hauteur du cône, puis son volume, à moins d'un centimètre cube.

4. Si l'on fait tourner successivement un triangle rectangle autour de chaque côté de son angle droit, les volumes des deux cônes qu'il engendre sont inversement proportionnels à leurs hauteurs.

5. Si l'on considère un tonneau comme la somme de deux troncs de cône égaux, réunis par leur grande base, quelle est, à un centilitre près, la capacité d'un tonneau qui a $1^m,32$ de longueur, et dont les diamètres de la bonde et du fond sont égaux respectivement à $0^m,88$ et $0^m,64$?

L'hypothèse précédente donne :

$$\frac{1}{3}\pi H (R^2 + Rr + r^2)$$

pour la mesure du tonneau, H étant sa longueur, R le rayon de la bonde et r le rayon du fond. Le volume ainsi calculé est trop petit; en remplaçant le produit Rr par R^2, on obtient la formule :

$$\frac{1}{3}\pi H (2R^2 + r^2),$$

proposée par *Oughtred* et employée en Angleterre pour le *jaugeage* des tonneaux.

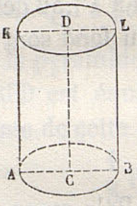
6. Le côté c d'un triangle équilatéral étant donné, calculer la surface totale et le volume du cône engendré par la rotation de ce triangle autour de sa hauteur. — Déterminer, à un centimètre près : 1° la valeur de c pour laquelle la surface totale du cône égale un mètre carré; 2° celle pour laquelle le volume est d'un mètre cube. — (On dit qu'un cône est *équilatéral* lorsque la section faite par un plan passant par l'axe est un triangle équilatéral.)

DIX-NEUVIÈME LEÇON

Programme. Cylindre droit à base circulaire. — Mesure de la surface latérale et du volume. — Extension aux cylindres droits à base quelconque.

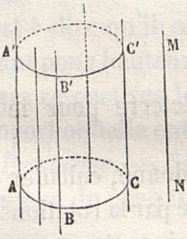
DÉFINITIONS

1. On appelle *cylindre droit à base circulaire* le corps engendré par la rotation d'un rectangle ACDK sur l'un de ses côtés, par exemple CD.



Les côtés CA, DK, perpendiculaires à l'axe CD, décrivent des cercles égaux et parallèles qui sont les *bases* du cylindre. Ce corps a pour *hauteur* la droite CD qui mesure la distance de ses bases. La surface de révolution engendrée par le côté AK parallèle à l'axe se nomme *surface convexe* du cylindre.

2. Par analogie, on appelle *surface cylindrique* la surface engendrée par une ligne droite AA′, assujettie à se mouvoir parallèlement à une droite fixe MN, en s'appuyant sur une directrice courbe ABC.



Si cette directrice est une ligne fermée, et qu'on coupe la surface cylindrique par deux plans parallèles ABC, A′B′C′ rencontrant la droite MN, le corps compris entre ces plans et la surface cylindrique a reçu le nom de *cylindre*. Le cylindre a pour *bases* ses deux faces planes ABC, A′B′C′, et pour hauteur la distance des plans de ses bases.

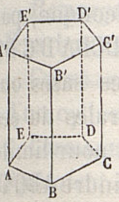
3. Deux cylindres droits à base circulaire sont *semblables* si leurs hauteurs sont proportionnelles aux rayons de leurs

bases, c'est-à-dire s'ils sont engendrés par des rectangles semblables.

4. Un prisme est *inscrit* dans un cylindre, lorsque ses bases sont inscrites dans les bases correspondantes du cylindre. — On dit réciproquement que le cylindre est *circonscrit* au prisme.

THÉORÈME I

La surface latérale d'un prisme droit a pour mesure le produit de sa hauteur par le périmètre de sa base.

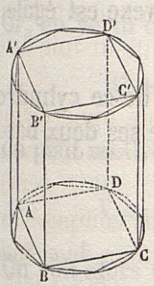


Soit le prisme droit qui a pour bases les polygones égaux ABCDE, A'B'C'D'E' ; sa surface latérale est la somme des rectangles AB', BC', CD',.... qui ont la même hauteur AA' que le prisme, et dont les bases sont les côtés AB, BC, CD.... de la base ABCDE de ce polyèdre. Or, l'aire de chacun de ces rectangles est égale au produit de sa base par sa hauteur (P., 30, III) ; donc la surface latérale du prisme a pour mesure :

$$(AB + BC + CD + \ldots) \times AA',$$

c'est-à-dire le produit du périmètre AB + BC + CD + ... de sa base par sa hauteur AA'.

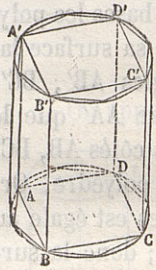
Remarque. — Si l'on inscrit dans un cylindre droit ABC'D' à base circulaire un prisme régulier quelconque, par exemple le prisme à base carrée ABCDA'B'C'D', et qu'ensuite on double indéfiniment le nombre des côtés de sa base, la surface totale de ce prisme augmente, tout en restant moindre que celle du cylindre circonscrit dont elle s'approche sans cesse. Il en est de même du volume du prisme, qui diffère de moins en moins de celui du cylindre.



Aussi *je considérerai la surface convexe d'un cylindre droit à base circulaire et son volume comme les limites vers lesquelles tendent respectivement la surface latérale et le volume d'un* *prisme inscrit dont le nombre des côtés de la base croît indéfiniment, et je regarderai comme acquise au cylindre toute propriété démontrée pour le prisme indépendamment du nombre et de la grandeur des côtés de sa base.*

THÉORÈME II

La surface convexe d'un cylindre droit à base circulaire a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence de sa base.



J'inscris dans le cylindre droit ABC'D' à base circulaire un prisme régulier quelconque, par exemple le prisme à base carrée ABCDA'B'C'D', puis les prismes réguliers dont les bases ont 8, 16.... côtés. Les surfaces latérales de ces prismes vont en croissant, et ont pour limite commune la surface convexe du cylindre ABC'D' qui leur est circonscrit (1, Rem.). Or, chacune d'elles a pour mesure le produit de sa hauteur par le périmètre de sa base, quels que soient le nombre et la grandeur des faces qui la composent ; donc la surface convexe du cylindre ABC'D' a aussi pour mesure le produit de sa hauteur AA' par la circonférence de sa base ABC.

Remarque. — Soient H la hauteur de ce cylindre et R le rayon de sa base, la mesure de sa surface convexe est égale à

$$2\pi R \times H.$$

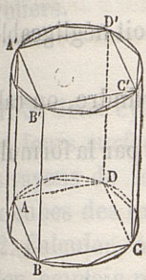
Pour avoir l'expression de la surface totale de ce cylindre, il faut ajouter à $2\pi R \times H$ la mesure $2\pi R^2$ de ses deux bases (P., 34, II), et l'on trouve :

$$2\pi R(H + 2).$$

THÉORÈME III

Le volume d'un cylindre droit à base circulaire est égal au produit de sa base par sa hauteur.

J'inscris dans le cylindre droit ABC'D' à base circulaire un prisme régulier quelconque, par exemple le prisme à



base carrée ABCDA'B'C'D', puis les prismes réguliers dont les bases ont 8, 16.... côtés. Les volumes de ces prismes vont en croissant, et ont pour limite commune le volume du cylindre ABC'D' qui leur est circonscrit (1, Rem.). Or, chacun d'eux a pour mesure le produit de sa hauteur par sa base, quels que soient le nombre et la grandeur de ses faces latérales; donc le volume du cylindre est aussi égal au produit de sa hauteur par le cercle qui lui sert de base.

Remarque. — Soient R le rayon de la base d'un cylindre et H sa hauteur; le volume de ce corps est égal à $\pi R^2 \times H$.

Corollaire. — Un cône droit à base circulaire est le tiers d'un cylindre droit de même base et de même hauteur (14, V).

Corollaire II. — *Un tronc de cône droit à bases parallèles est équivalent à la somme d'un cylindre et d'un cône droits, à base circulaire, qui ont la même hauteur que le tronc, et dont les bases ont respectivement pour rayons la demi-somme et la demi-différence des rayons des bases du tronc.*

Si R et r sont les rayons des bases du cône tronqué, et que H soit sa hauteur, on sait que son volume V est égal à (14, VI, c) :

$$\frac{1}{3}\pi H (R^2 + Rr + r^2).$$

Or, en vertu de l'identité facile à vérifier

$$R^2 + Rr + r^2 = 3\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2,$$

on peut mettre l'expression de V sous la forme suivante :

$$V = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \times H + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 \times H.$$

On voit alors que V est égal à la somme des volumes d'un cylindre et d'un cône droits, à base circulaire, qui ont la même hauteur H que le cône tronqué, et dont les rayons des bases sont égaux respectivement à $\frac{R+r}{2}$ et $\frac{R-r}{2}$.

Lorsque la différence des rayons R et r sera assez petite pour que le volume $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 \times H$ du cône soit négligeable relativement au volume $\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \times H$ du cylindre, on calculera de préférence le volume du cône tronqué par la formule approximative

$$V = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \times H.$$

On fait une application continuelle de cette formule pour le *cubage* des troncs d'arbre qui ne sont pas équarris. En effet, on considère un tronc d'arbre non équarri comme équivalent à un cylindre droit de même hauteur, qui aurait pour base la section faite parallèlement aux bases du tronc par le milieu de sa longueur.

La même formule a été employée au *jaugeage* des tonneaux. Dans cette hypothèse H désigne la longueur du tonneau, R le rayon de la bonde et r celui du fond. Le volume ainsi calculé est beaucoup trop petit; on se sert maintenant en France d'un autre mode de jaugeage proposé par *Dez*, ancien professeur à l'École militaire. Il consiste à considérer un tonneau comme équivalent à un cylindre ayant pour hauteur la longueur du tonneau, et pour rayon de sa base l'excès du rayon de la bonde sur les $\frac{3}{8}$ de la différence des rayons de la bonde et du fond.

On a par conséquent :

$$V = \pi\left[R - \frac{3(R-r)}{8}\right]^2 \times H.$$

THÉORÈME IV

1° *La surface convexe d'un cylindre droit dont la base n'est pas circulaire a pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.*

2° *Le volume de ce cylindre est égal au produit de sa hauteur par sa base.*

Les démonstrations des deux parties de ce théorème sont identiques à celles des théorèmes II et III ; mais les bases des prismes inscrits dans le cylindre ne sont plus des polygones réguliers.

PROBLÈMES

1. Si deux cylindres droits à base circulaire sont semblables, leurs surfaces convexes sont proportionnelles aux carrés des rayons de leurs bases, et leurs volumes proportionnels aux cubes des mêmes rayons.

2. Calculer, à un millimètre près, les dimensions du litre qu'on emploie pour les liquides, en sachant qu'il a la forme d'un cylindre droit à base circulaire, et que sa hauteur est le double du diamètre de sa base.

3. Calculer, à un millimètre près, les dimensions du litre, du décalitre et de l'hectolitre qu'on emploie pour les matières sèches, en sachant qu'ils ont la forme de cylindres droits à base circulaire, et que la hauteur de chacun d'eux est égale au diamètre de sa base.

4. Inscrire dans un cône droit à base circulaire un cylindre droit dont la surface convexe soit égale à un cercle donné. — Maximum de cette surface.

5. La hauteur d'un cône droit à base circulaire est égale à $7^{m},20$ et le rayon de sa base égal à $1^{m},80$. Calculer, à un décimètre cube près, le tronc de cône que l'on obtient en coupant le cône proposé par un plan parallèle à sa base, à la distance d'un centimètre de cette base.

6. Laquelle des deux formules, proposées par *Oughtred* et par *Dez* pour le jaugeage des tonneaux, donne le plus grand volume?

7. Calculer le rayon intérieur d'un tube de verre parfaitement cylindrique, en sachant que ce tube pèse 90 grammes lorsqu'il est vide, et 150 grammes lorsqu'on y introduit une colonne de mercure ayant 9 centimètres de longueur. (La densité du mercure est égale à 13,568.)

8. Mener un plan parallèle à la base d'un cylindre droit et circulaire, de manière qu'il divise sa surface convexe en deux parties telles que la base du cylindre soit moyenne proportionnelle entre elles.

9. Déterminer les dimensions d'un cylindre droit à base circulaire, en sachant que sa hauteur est égale à la moitié du rayon de sa base et que sa surface totale est équivalente à un cercle donné.

10. La surface totale d'un cylindre droit à base circulaire est égale au cercle dont le rayon a deux mètres de longueur; sa hauteur est d'un mètre. Calculer son volume à un centimètre cube près.

11. Pour retirer l'eau d'un puits, on se sert d'une pompe dont le tube a un diamètre intérieur égal à d. La course du piston est égale à h; D est le diamètre du puits et H la profondeur de l'eau. Quel sera le nombre des coups de piston nécessaires pour retirer l'eau du puits?

On supposera dans la formule d égal à $0^{m},12$, h égal à $0^{m}35$, D égal à $1^{m},05$, et H égal à $2^{m},88$.

12. Diviser une ligne droite donnée en deux parties telles qu'en prenant l'une pour la hauteur et l'autre pour le rayon de la base d'un cylindre droit et circulaire, la surface convexe de ce corps soit égale à un cercle donné. — Quel est le plus grand des deux cylindres qui répondent à la question?

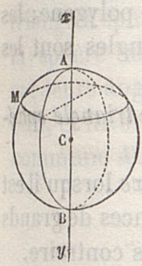
VINGTIÈME ET VINGT ET UNIÈME LEÇON

PROGRAMME : Sphère. — Sections planes, grands cercles, petits cercles. — Pôles d'un cercle. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon. — Plan tangent. — Angle de deux arcs de grand cercle. — Notions sur les triangles sphériques : leur analogie parfaite avec les angles trièdres

—

DÉFINITIONS

1. On appelle *sphère* le corps engendré par la rotation du demi-cercle AMB sur son diamètre AB.



Il résulte de cette définition que la sphère est terminée par une surface de révolution dont tous les points sont également éloignés du centre C de la génératrice AMB; aussi on donne au point C le nom de *centre* de la sphère.

On nomme *rayon* la droite menée du centre d'une sphère à un point quelconque de sa surface. — Tous les rayons sont égaux.

Les droites qui passent par le centre d'une sphère et se terminent aux points où elles rencontrent sa surface s'appellent *diamètres*. — Tous les diamètres sont égaux, car chacun d'eux est le double d'un rayon.

2. Un plan est *tangent* à une sphère s'il n'a qu'un point commun avec elle; ce point est appelé *point de contact*.

3. Deux *sphères* sont *tangentes* en un point lorsqu'elles ont le même plan tangent en ce point.

4. Lorsque deux plans parallèles coupent une sphère, on appelle *zone* la portion de la surface de la sphère comprise entre ces plans. — La zone a pour *hauteur* la distance des deux plans parallèles, et pour *bases* les deux sections que ces plans font dans la sphère.

Une zone n'a qu'une base si l'un des deux plans parallèles qui la déterminent est tangent à la sphère. Alors on l'appelle aussi *calotte sphérique*.

5. Lorsque deux arcs de cercle tracés sur une sphère se coupent en un point A, on dit qu'ils font un *angle* en ce point, et l'on prend pour sa mesure, comme dans la géométrie plane (1, IV), l'angle que forment les tangentes menées à ces arcs par le *sommet* A dans le sens des arcs mêmes.—Si les deux arcs considérés appartiennent à des circonférences de grands cercles, leur angle a la même mesure que l'angle dièdre formé par les plans des deux cercles; car chacun de ses côtés est perpendiculaire au diamètre suivant lesquels les grands cercles se coupent (P. 13, II).

6. Un *polygone sphérique* est la portion de la surface d'une sphère comprise entre plusieurs arcs de grands cercles.

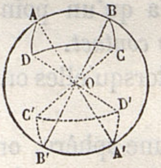
Ces arcs de grands cercles sont les *côtés* du polygone; les angles qu'ils forment et les sommets de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone sphérique.

Le polygone sphérique qui a trois côtés est le *triangle sphérique*.

7. On dit qu'un polygone sphérique est *convexe* lorsqu'il est situé d'un même côté de chacune des circonférences de grands cercles qui le forment. Il est *concave* dans le cas contraire.

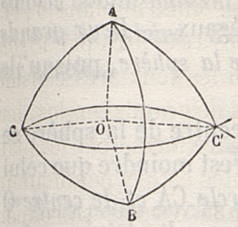
Le périmètre d'un polygone sphérique convexe ne peut évidemment être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle.

8. Les plans des arcs de grands cercles, qui forment un polygone sphérique ABCD, déterminent au centre O de la sphère un angle polyèdre OABCD, dont les angles dièdres ont les mêmes mesures que les angles du polygone, et dont les angles plans AOB, BOC, etc. sont mesurés par les côtés correspondants AB, BC, etc. de ABCD; car ces arcs sont décrits avec le même rayon.



Si on prolonge les faces de l'angle polyèdre OABCD au delà du sommet O, l'angle polyèdre symétrique OA'B'C'D' intercepte sur la surface de la sphère un polygone A'B'C'D', dont les anples et les côtés sont égaux à ceux du polygone ABCD ; mais les parties égales des deux polygones étant disposées dans un ordre inverse, comme celles des deux angles polyèdres symétriques, ces polygones ne sont pas superposables. Ils sont *symétriques* par rapport au centre O de la sphère.

Pour construire un triangle sphérique qui soit symétrique

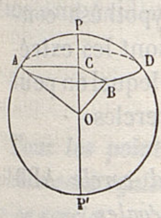


à un triangle donné ABC, on peut décrire deux arcs de cercle, des extrémités A et B de l'un des côtés du triangle ABC comme pôles, avec des distances polaires égales respectivement aux deux autres côtés AC, BC ; puis joindre le point d'intersection C' de ces arcs aux deux points A et B par des arcs de grands cercles. Le triangle ABC', ainsi construit, sera le triangle demandé. En effet, les plans des arcs de grands cercles, qui forment les triangles sphériques ABC, ABC', déterminent au centre O de la sphère deux angles trièdres symétriques OABC, OABC' ; car leurs angles plans sont évidemment égaux chacun à chacun, et inversement disposés par rapport au plan de leur face commune AOB.

THÉORÈME I

Toute section faite dans une sphère par un plan est un cercle.

Je suppose d'abord que le plan donné passe par le centre O de la sphère OA ; il rencontre alors sa surface en des points également éloignés du point O. Donc la section est un cercle qui a le même centre et le même rayon que la sphère.



Si le plan ne passe pas par le centre O, et qu'il coupe la surface de la sphère suivant la courbe ABD, j'abaisse du point O la perpendiculaire OC sur le plan de cette courbe. Les rayons OA, OB, etc. de la sphère, menés aux différents points A, B, etc. du contour de la section, sont obliques au plan ABD et égaux entre eux ; ils s'écartent donc également de la perpendiculaire OC (1, VI), et la courbe ABD, qui a tous ses points également distants du point C, est une circonférence de cercle dont le rayon CA est moindre que le rayon OA de la sphère.

Remarque. — Les cercles qui ont le même centre et, par suite, le même rayon que la sphère, se nomment *grands cercles*. — Tous les grands cercles sont égaux. — *Deux grands cercles se coupent suivant un diamètre de la sphère*, puisqu'ils passent l'un et l'autre par son centre.

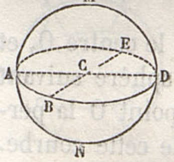
Tout cercle qui ne passe pas par le centre de la sphère se nomme *petit cercle*, parce que son rayon est moindre que celui de la sphère. — *Le centre* C *d'un petit cercle* CA *et le centre* O *de la sphère se trouvent sur une droite perpendiculaire au plan du cercle.*

On appelle *pôles d'un cercle* ABD les extrémités P et P′ du diamètre de la sphère perpendiculaire à ce cercle. Cette dénomination provient de ce que le diamètre PP′ peut être considéré comme l'axe de la surface de révolution qui termine la sphère. — *Deux cercles parallèles ont les mêmes pôles* (3, VII).

Corollaire I. — *On peut tracer une circonférence de grand cercle par deux points de la surface d'une sphère.*

Car, si l'on mène un plan par le centre de la sphère et les deux points donnés, ce plan coupe la surface de la sphère suivant la circonférence d'un grand cercle.

Lorsque le centre et les deux points de la sphère ne sont pas en ligne droite, ils ne déterminent qu'un plan (1, I), et l'on ne peut tracer alors qu'une circonférence de grand cercle par les deux points donnés. Dans l'hypothèse contraire, les deux points donnés sont les extrémités d'un même diamètre par lequel on peut mener une infinité de grands cercles.



Corollaire II. — *Tout grand cercle* ABD *divise la sphère* CA *et sa surface en deux parties égales.*

En effet, si l'on pose les zones ABDEM, ABDEN sur un même plan, et qu'on fasse coïncider ensuite leurs bases qui sont égales au cercle CA, ces zones coïncideront aussi, puisque tous leurs points sont également éloignés du point C, centre commun à la sphère et à leurs bases.

Corollaire III. — *Deux grands cercles se divisent mutuellement en deux parties égales.*

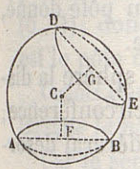
Car la droite suivant laquelle ils se coupent passe par le centre de la sphère, c'est-à-dire par le centre de chacun des deux cercles.

THÉORÈME II

1° *Deux petits cercles égaux sont également éloignés du centre de la sphère;*

2° *De deux petits cercles inégaux le plus grand est le plus rapproché du centre de la sphère.*

Le plan mené par le centre C de la sphère CA et par les centres F, G de deux petits cercles FA, GD coupe la sphère suivant le grand cercle ABED et les deux petits cercles suivant leurs diamètres AB, DE, qui sont des cordes de ce grand cercle. Par conséquent, 1° les distances CF, CG sont égales, si le diamètre AB est égal au diamètre DE (P., 13, I), c'est-à-dire si les deux petits cercles sont égaux; 2° la distance CG est moindre que CF, si le diamètre DE est plus grand que le diamètre AB (P., 13, I), c'est-à-dire si le cercle GD est plus grand que le cercle FA,

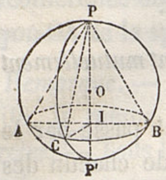


Remarque. — Les réciproques des deux parties de ce théorème sont évidentes.

THÉORÈME III

Tous les points de la circonférence ABC *d'un cercle de la sphère sont également éloignés de chacun des deux pôles* P, P′ *de ce cercle.*

En effet, le pied I de la perpendiculaire abaissée du pôle P sur le plan ABC étant le centre de la circonférence IA (I), les droites PA, PB, PC, etc., menées du pôle aux différents points A, B, C, etc., de cette courbe, sont égales, parce qu'elles s'écartent également de la perpendiculaire PI (1, VI); les points de la circonférence ABC sont donc à la même distance du pôle P. Je prouverais de même qu'ils sont également éloignés de l'autre pôle P'.



Il résulte aussi de cette démonstration que les arcs de grands cercles PA, PB, PC, etc., menés du pôle P à la circonférence ABC, sont égaux, puisque leurs cordes sont égales.

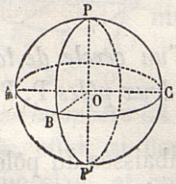
Remarque. — Cette propriété du pôle d'un cercle de la sphère est analogue à celle du centre de ce cercle; aussi, en se servant d'un compas à branches courbes, on décrit les arcs de cercle sur la sphère avec la même facilité que sur un plan. On prend la distance des pointes du compas égale à celle du pôle à l'un des points de la circonférence qu'on veut décrire, on place ensuite l'une des pointes du compas au pôle donné, et l'on trace la circonférence avec l'autre pointe.

J'appellerai *distance polaire* d'un cercle de la sphère la distance du pôle de ce cercle à l'un des points de sa circonférence; et, des deux pôles d'un petit cercle, je ne considérerai désormais que celui qui est situé sur le même hémisphère que ce cercle.

Corollaire I. — *Le centre d'une sphère, le pôle et le centre d'un cercle quelconque tracé sur cette sphère, sont sur une même ligne droite perpendiculaire au plan du cercle.*

Ce théorème peut être décomposé en six autres, analogues à ceux qui sont énoncés dans le premier corollaire de la 12^e leçon des *Figures planes*.

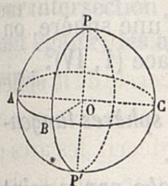
Corollaire II. — *La distance polaire d'un grand cercle est égale à la corde du quadrans.*



Soit P l'un des pôles du grand cercle ABC de la sphère OA ; l'angle droit POA dont le sommet est situé au centre de la circonférence du grand cercle PAP' intercepte un arc PA égal au quart de cette circonférence

Or, la corde de cet arc est la distance polaire du grand cercle ABC; donc, etc.

Corollaire III. — *On peut obtenir le pôle d'un grand cercle* ABC *de la sphère* OA, 1° *en prenant deux points quelconques* A, B, *sur la circonférence* ABC, *et décrivant, de ces points comme pôles, deux arcs de grands cercles dont l'intersection sera le point* P; 2° *en traçant un grand cercle* APC *perpendiculaire au cercle* ABC, *et prenant, à partir du point* A, *un arc* AP *égal au quart de la circonférence* APC.



En effet, 1° les angles POA, POB étant droits d'après la construction, la droite PO est perpendiculaire aux deux rayons OA, OB, et, par suite, au plan OAB (1, III) ; donc le point P est le pôle du cercle ABC.

2° Les deux plans APC, ABC sont perpendiculaires par hypothèse. Or, la droite OP, située dans le premier de ces plans, est perpendiculaire à leur intersection AC (6, II) ; donc elle est perpendiculaire au second, et le point P est le pôle du cercle ABC.

Corollaire IV. — *Deux grands cercles sont perpendiculaires lorsque le pôle de l'un est sur la circonférence de l'autre.*

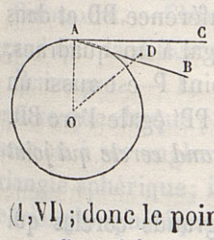
Car le second passe par le diamètre de la sphère perpendiculaire au premier (6, I).

THÉORÈME IV

Le plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon de la sphère est tangent à cette sphère.

Réciproquement, *tout plan tangent à une sphère est perpendiculaire au rayon du point de contact.*

1° Je mène par l'extrémité A du rayon OA de la sphère O le plan BAC perpendiculaire à cette droite, et je dis qu'il est tangent à la sphère.



En effet, la distance OD du centre O à un point quelconque D du plan BAC, autre que le point A, est plus grande que le rayon OA perpendiculaire à ce plan (1, VI) ; donc le point D est extérieur à la sphère, et le plan BAC n'a par suite que le point A commun avec la surface de la sphère, c'est-à-dire qu'il est tangent à cette surface.

Réciproquement, *si le plan* BAC *touche la sphère* OA *au point* A, *il est perpendiculaire au rayon* OA.

Car tout point D du plan BAC, autre que le point A, étant par hypothèse extérieur à la surface de la sphère, le rayon OA est la ligne la plus courte qu'on puisse mener du centre O au plan BAC; il est donc perpendiculaire à ce plan (1, VI).

Corollaire I. — Par un point de la surface d'une sphère, on ne peut mener qu'un plan tangent à cette surface (1, IV).

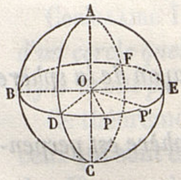
Corollaire II. — *Le point de contact de deux sphères tangentes est situé sur la droite qui joint leurs centres.*

Car la perpendiculaire au plan tangent, menée par le point de contact, passe par chacun des centres des deux sphères.

THÉORÈME V

L'angle BAD *de deux arcs de grands cercles* AB, AD *a pour mesure l'arc de grand cercle* BD *décrit de son sommet* A *comme pôle entre ses côtés* AB, AD.

Le point A étant le pôle de l'arc de grand cercle BD, chacun des arcs AB, AD est un quadrans, et les angles au centre AOB, AOD sont droits. Donc l'angle BOD est l'angle plan correspondant à l'angle dièdre BACD, et l'arc BD qui mesure l'angle BOD, mesure aussi l'angle BAD formé par les deux arcs de grands cercles AB, AD (17, I).



Corollaire I. — Si on prend sur la circonférence BD et dans le même sens chacun des arcs BP, DP', égal à un quadrans, le point P est un pôle de l'arc AB, le point P est aussi un pôle de l'arc AD, et l'arc de grand cercle PP' égale l'arc BD. Donc *l'angle* BAD *a pour mesure l'arc de grand cercle qui joint les pôles* P *et* P' *de ses côtés* AB, AD.

Corollaire II. — Le lieu des pôles des grands cercles qui forment avec le grand cercle BAC un angle égal à BAD, est la circonférence décrite du point P comme pôle avec la distance polaire PP′.

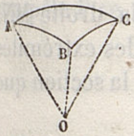
Le lieu des diamètres de la sphère, perpendiculaires aux plans des mêmes cercles, est la surface conique de révolution qui a le point O pour centre, la droite OP pour axe et la droite OP′ pour génératrice.

Corollaire III. — Si on prolonge les arcs BA, DA au delà de leur intersection A, les angles BAD, EAF, opposés au sommet, sont égaux ; les angles adjacents BAD, DAE sont supplémentaires.

THÉORÈME VI

1° *Chaque côté d'un triangle sphérique* ABC *est moindre que la somme des deux autres.*

2° *La somme des trois côtés de ce triangle est moindre que la circonférence d'un grand cercle.*



En effet, soit O le centre de la sphère ; les plans des arcs de grands cercles qui forment le triangle sphérique ABC déterminent un angle trièdre OABC, dont les angles plans sont mesurés par les côtés correspondants du triangle ABC. Or, l'angle plan AOB est moindre que la somme des deux autres BOC, COA (E, 7, I) ; donc l'arc AB est aussi moindre que la somme des arcs BC, CA.

En second lieu, la somme des trois faces AOB, BOC, COA est moindre que quatre angles droits (E, 7, V) ; donc le périmètre du triangle ABC est moindre que la circonférence d'un grand cercle.

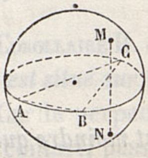
Corollaire. — Chaque côté d'un triangle sphérique est plus grand que la différence des deux autres côtés.

Remarque. — La démonstration du théorème précédent prouve que chaque propriété de l'angle trièdre, relative à ses faces ou à ses angles, appartient aux côtés ou aux angles du triangle sphérique ; il existe donc une analogie parfaite entre le triangle sphérique et l'angle trièdre. Ainsi, d'après le théorème VIII de la septième leçon des figures dans l'espace, 1° *chaque angle d'un triangle sphérique, augmenté de deux angles droits, est plus grand que la somme des deux autres;* 2° *la somme des trois angles d'un triangle sphérique est plus grande que deux angles droits; plus petite que six angles droits; etc.*

PROBLÈME Ier

Etant donnée une sphère, trouver son rayon.

Je prends deux points quelconques M et N sur la sphère donnée. Du point M comme pôle, je décris un arc de cercle avec une distance polaire arbitraire; je trace ensuite, avec la même distance polaire et du point N comme pôle, un second arc de cercle qui coupe le premier en un point

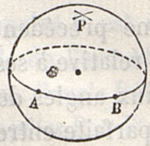


A également éloigné de M et N. Je détermine de même deux autres points B, C, également éloignés des points M et N. Le centre de la sphère et les points A, B, C sont compris dans un même plan perpendiculaire au milieu de la droite MN, puisque chacun d'eux est à la même distance des extrémités M et N de cette droite (1, VIII); par conséquent, la section que ce plan fait dans la sphère est un grand cercle.

Je prends ensuite, avec un compas, les longueurs des cordes AB, BC, AC, et je construis un triangle avec ces trois droites. Le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est égal au rayon de la sphère.

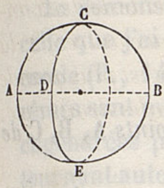
PROBLÈME II

Tracer une circonférence de grand cercle par deux points A et B de la surface d'une sphère.



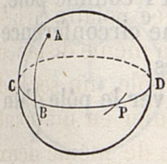
Des points A et B comme pôles, je décris deux arcs de grands cercles; ces arcs se rencontrent au point P, l'un des deux pôles du grand cercle qui passe par les points A et B (III c. 3). Je trace ensuite du point P comme pôle la circonférence du grand cercle AB.

Corollaire. — Si les points donnés A et B sont les extrémités d'un diamètre de la sphère, le problème proposé a une infinité de solutions ; car les arcs de grands cercles décrits des points A et B comme pôles coïncident, et tout point de la circonférence de grand cercle CDE dont ces arcs font partie est le pôle d'un grand cercle passant par les deux points A et B.



PROBLÈME III

Par un point A *de la surface d'une sphère, mener un arc de grand cercle perpendiculaire à une circonférence de grand cerle donnée* CBD.

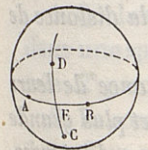


Du point A comme pôle, je trace un arc de grand cercle jusqu'à la rencontre de la circonférence CBD, et je décris de leur point d'intersection P comme pôle l'arc de grand cercle AB. Cet arc est perpendiculaire à la circonférence donnée CBD, puisqu son pôle P se trouve sur cette circonférence (IV).

PROBLÈME IV

Diviser un arc de grand cercle en deux parties égales.

Je détermine sur la sphère deux points C et D qui soient également éloignés des extrémités de l'arc donné AB, et je joins ces deux points par un arc de grand cercle (Prob. II). Le plan de cet arc est perpendiculaire au milieu de la corde AB (1, VIII) ; il divise donc l'arc en deux parties égales.



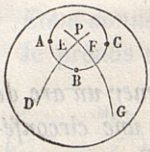
Corollaire. — L'arc CD divise aussi en deux parties égales chacun des arcs de petits cercles qu'on peut mener par les deux points A et B ; car tous ces arcs ont la même corde AB.

Remarque. — La construction précédente sert aussi à tracer un arc de grand cercle DC perpendiculaire au milieu d'un arc de cercle quelconque qui joint deux points donnés A et B. (Théor. IV.)

PROBLÈME V

Tracer le petit cercle déterminé par trois points A, B, C *de la surface d'une sphère.*

Je trace les arcs de grands cercles DE, FG, respectivement perpendiculaires aux milieux des arcs AB, BC (Prob. IV, Rem.). Ces arcs se rencontrent en un point P également distant des trois points A, B et C. Je décris ensuite du point P comme pôle, avec la distance polaire PA, une circonférence de cercle qui passe par les trois points donnés.



Corollaire. — Cette construction sert à trouver le pôle d'un petit cercle donné.

REMARQUE SUR LES POSITIONS RELATIVES DE DEUX SPHÈRES

Deux sphères, comme deux cercles, peuvent avoir l'une par rapport à l'autre cinq positions différentes, auxquelles correspondent les cinq théorèmes suivants :

1° *Si deux sphères qui n'ont aucun point commun sont extérieures l'une à l'autre, la distance de leurs centres est plus grande que la somme de leurs rayons.*

2° *Si deux sphères se touchent extérieurement, la distance de leurs centres est égale à la somme de leurs rayons.*

3° *Lorsque deux sphères se coupent,* 1° *la distance de leurs centres est moindre que la somme de leurs rayons et plus grande que la différence des mêmes rayons;* 2° *la ligne d'intersection de leurs surfaces est une circonférence située dans un plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres de ces sphères.*

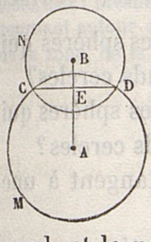
4° *Lorsque deux sphères se touchent intérieurement, la distance de leurs centres est égale à la différence de leurs rayons.*

5° *Si deux sphères, qui n'ont aucun point commun sont inté-*

rieures l'une à l'autre, la distance de leurs centres est moindre que la différence de leurs rayons.

La démonstration directe de ces théorèmes est identique à celle que j'ai donnée pour les théorèmes correspondants du cercle (P., 14). Je ferai remarquer néanmoins que ces théorèmes sont évidents, si l'on considère les deux sphères comme engendrées par deux cercles situés dans le même plan, et tournant autour de la droite qui passe par leurs centres.

Pour démontrer le second cas du troisième théorème, je prends deux sphères qui se coupent, puis je mène un plan par



leurs centres A, B, et par un point quelconque C de leur intersection, ce plan détermine deux grands cercles AM, BN, dont les circonférences se rencontrent au point C. Cela posé, si je fais tourner le plan ABC sur la droite AB comme axe, chacune des circonférences AM, BN engendre la surface sphérique qui lui correspond, et le point C décrit un parallèle commun à ces deux surfaces de révolution; par conséquent, les sphères AM, BN se coupent suivant ce parallèle.

Les réciproques des cinq théorèmes précédents sont évidentes.

PROBLÈMES

1. Quel est le lieu géométrique des centres des sections faites dans une sphère par des plans passant : 1° par une droite donnée; 2° par un point donné?

2. La somme des aires des cercles, suivant lesquels les trois faces d'un angle trièdre trirectangle coupent une sphère, est constante pour une position donnée du sommet de cet angle trièdre.

La somme des carrés des distances du sommet de l'angle trièdre aux six points où les trois arêtes de cet angle rencontrent la surface de la sphère, est aussi constante.

3. Quel est le lieu géométrique des points de l'espace, tels

que le rapport des distances de chacun d'entre eux à deux points fixes soit constant?

4. Quel est le lieu géométrique des points de l'espace également éclairés par deux lumières d'inégale intensité?

5. Les tangentes menées à une sphère par un point extérieur sont égales. — Le lieu géométrique de ces tangentes est une surface conique de révolution, et celui des points de contact est une circonférence située dans un plan perpendiculaire à la droite qui joint le centre de la sphère au point donné.

6. Trouver un point tel qu'on voit de ce point trois sphères données sous le même angle.

7. Quel est le lieu géométrique des centres des sphères qui coupent deux sphères données suivant des grands cercles?

8. Quel est le lieu géométrique des centres des sphères qui coupent trois sphères données suivant des grands cercles?

9. Mener par une droite donnée un plan tangent à une sphère.

10. Les plans qui touchent deux sphères extérieurement rencontrent au même point la droite menée par leurs centres. — Il en est de même des plans qui touchent deux sphères intérieurement.

11. Mener par un point donné un plan tangent à deux sphères.

12. Mener un plan tangent à trois sphères.

13. Mener par une droite un plan qui coupe deux sphères, de manière que les rayons des sections soient proportionnels à ceux des sphères.

14. Mener par un point un plan qui coupe trois sphères de manière que les rayons des sections soient proportionnels à ceux des sphères.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

Programme : Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Aire de la zone, de la sphère entière.

—

DÉFINITIONS

1. On appelle *ligne brisée régulière* une ligne brisée, plane et convexe, dont les côtés sont égaux et les angles égaux.

Toute ligne brisée régulière peut être inscrite dans le cercle et lui être circonscrite, comme le périmètre d'un polygone régulier, dont elle diffère en ce que son angle au centre n'est pas généralement une partie aliquote de quatre angles droits (P., 27, I).

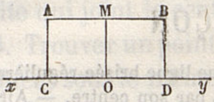
Une ligne brisée régulière a un *centre*, un *rayon* et un *apothème* qui sont le centre et les rayons des cercles circonscrit et inscrit. On donne aussi le nom de *diamètre* à toute droite menée par son centre.

Pour inscrire une ligne brisée régulière dans un arc de cercle, il suffit évidemment de diviser cet arc en un nombre quelconque de parties égales, et de tracer les cordes des arcs consécutifs (P., 27, II).

2. La portion de plan comprise entre une ligne brisée régulière et les deux rayons extrêmes de cette ligne se nomme *secteur polygonal régulier*.

THÉORÈME I

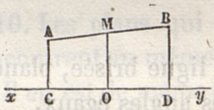
Si l'on fait tourner sur une droite indéfinie xy, *comme axe, une droite limitée* AB *qui soit dans le même plan avec l'axe et d'un même côté de cette ligne, la surface de révolution qu'elle engendre a pour mesure le produit de la génératrice* AB *par la circonférence que décrit le milieu* M *de cette droite.*



La droite AB peut avoir trois positions différentes par rapport à l'axe xy.

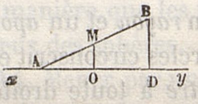
1° Je suppose AB parallèle à xy, et j'abaisse des points A, B, M, les perpendiculaires AC, BD, MO, sur l'axe. Dans sa révolution autour de xy, le rectangle ABCD engendre un cylindre droit à base circulaire dont la ligne AB décrit la surface convexe ; on a donc (16, II) :

$$surf.\ AB = AB \times cir.\ OM.$$



2° Si la droite AB n'a ancun point commun avec l'axe, sans lui être parallèle, j'abaisse encore les perpendiculaires AC, BD, MO sur xy. Le trapèze ABCD, en tournant autour de xy, engendre un tronc de cône droit, à bases parallèles, dont la ligne AB décrit la surface convexe ; dès lors on a aussi (14, IV, c) :

$$surf.\ AB = AB \times cir.\ OM.$$



3° Lorsque l'une des extrémités de AB, par exemple A, est située sur l'axe xy, la perpendiculaire BD détermine un triangle rectangle AB qui engendre un cône droit en tournant autour de xy. La ligne AB décrit la surface convexe de ce cône, par conséquent on a encore (14, III, c.) :

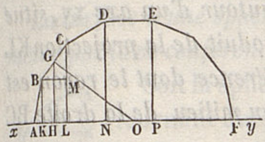
$$surf.\ AB = AB \times cir.\ OM.$$

THÉORÈME II

La surface engendrée par une ligne brisée régulière BCDE, *tournant autour d'un diamètre* xy *qui ne la coupe pas, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection* KP *de cette ligne sur l'axe.*

Soient O le centre et OG l'apothème de la ligne brisée régulière BCDE; cette ligne, en tournant autour de son diamètre xy, décrit une surface égale à la somme des surfaces engendrées par ses côtés BC, CD, DE.

Je mène par le milieu G du côté BC la droite GH perpendiculaire à l'axe xy, et j'ai, d'après le théorème précédent :



$$surf.\ BC = BC \times cir.\ HG.$$

Pour transformer cette mesure, je tire les droites BK, CL, perpendiculaires à l'axe xy, et la droite BM parallèle au même axe. Les triangles rectangles BCM, GOH sont semblables, parce qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun (P., 21, V); il en résulte que

$$\frac{BC}{BM} = \frac{OG}{HG} = \frac{cir.\ OG}{cir.\ HG}.$$

On a dès lors

$$BC \times cir.\ HG = BM \times cir.\ OG,$$

et, par suite,

$$surf.\ BC = BM \times cir.\ OG,$$

ou bien, à cause de l'égalité des droites BM et KL,

$$surf.\ BC = KL \times cir.\ OG.$$

Soient LN et NP les projections des côtés CD, DE, sur l'axe de rotation; on démontrerait, par un raisonnement analogue au précédent, que

$$surf.\ CD = LN \times cir.\ OG,$$

et

$$surf.\ DE = NP \times cir.\ OG.$$

En ajoutant les trois égalités précédentes, membre à membre, et remarquant que la somme $surf.\ BC + surf.\ CD + surf.\ DE$ n'est autre que $surf.$ BCDE, on trouve :

$$surf.\ BCDE = (KL + LN + NP) \times cir.\ OG,$$

ou

$$surf.\ BCDE = KP \times cir.\ OG.$$

COROLLAIRE I. — *La surface engendrée par un demi-polygone régulier ABCEF d'un nombre pair de côtés, tournant autour de son diamètre AF, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans ce polygone par le diamètre du cercle circonscrit.*

Car la projection du demi-périmètre ABCEF sur l'axe est le diamètre AF du cercle circonscrit au polygone.

COROLLAIRE II. — L'égalité

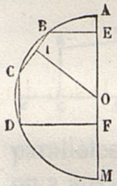
$$surf. BC = KL \times cir. OG,$$

précédemment démontrée, conduit à ce théorème : *La surface décrite par une droite* BC *qui tourne autour d'un axe* xy, *situé dans le même plan, a pour mesure le produit de la projection* KL *de cette droite sur l'axe par la circonférence dont le rayon est égal à la perpendiculaire* GO, *élevée au milieu de la droite* BC *jusqu'à la rencontre de l'axe.*

THÉORÈME III

Une zone a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.

Je considère la zone engendrée par l'arc de cercle BD tournant autour du diamètre AM ; soit EF sa hauteur, que je détermine en abaissant des extrémités de l'arc BD les perpendiculaires BE, DF sur l'axe AM. J'inscris ensuite dans l'arc BD la ligne brisée régulière BCD, dont l'apothème est OI. La surface que décrit cette ligne en tournant autour de AM est évidemment moindre que la zone BD qui l'enveloppe de toutes parts, et leur différence diminue de plus en plus, si je double indéfiniment le nombre des côtés de la ligne inscrite dans l'arc BD ; la zone BD est donc la limite vers laquelle tend la surface décrite par la ligne brisée BCD, lorsque le nombre des côtés de cette ligne croît indéfiniment. Or, quel que soit le nombre, la surface engendrée par la ligne brisée régulière BCD a pour mesure le produit de la projection EF de cette ligne sur l'axe par la circonférence inscrite OI (II); par conséquent, la zone a aussi pour mesure le produit de sa hauteur EF par la circonférence du cercle OA, c'est-à-dire par la circonférence d'un grand cercle de la sphère dont la zone BD fait partie.



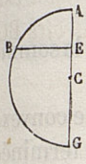
COROLLAIRE I. — Soient H la hauteur de la zone et R le rayon de la sphère, on a

$$zone = 2\pi R \times H.$$

Corollaire II. — *Dans la même sphère, ou dans des sphères égales, deux zones sont proportionnelles à leurs hauteurs.*

THÉORÈME IV

La surface d'une sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.



Soit la sphère engendrée par le demi-cercle ABG tournant autour de son diamètre AG ; la demi-circonférence ABG étant la somme des deux arcs AB, BG, la réunion des deux zones engendrées par ces arcs forme la surface de la sphère. On a (III) :

$$\textit{zone}\ \mathrm{AB} = \mathrm{AE} \times \textit{cir.}\ \mathrm{CA}$$

et

$$\textit{zone}\ \mathrm{BG} = \mathrm{EG} \times \textit{cir.}\ \mathrm{CA};$$

si l'on additionne ces égalités membre à membre, on trouve :

$$\textit{surf. sph.}\ \mathrm{CA} = (\mathrm{AE} + \mathrm{EG}) \times \textit{cir.}\ \mathrm{CA}$$

et, par suite,

$$\textit{surf. sph.}\ \mathrm{CA} = \mathrm{AG} \times \textit{cir.}\ \mathrm{CA}.$$

Corollaire I. — Soient R le rayon d'une sphère, D son diamètre et S sa surface, on a :

$$\mathrm{S} = 2\mathrm{R} \times 2\pi\mathrm{R} = 4\pi\mathrm{R}^2.$$

Il résulte de cette valeur de S que *la surface de la sphère est égale à quatre fois l'aire d'un grand cercle* (P., 34, II).

On a aussi :

$$\mathrm{S} = \mathrm{D} \times \pi\mathrm{D} = \pi\mathrm{D}^2.$$

Corollaire II. — *Les surfaces de deux sphères sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

PROBLÈMES

1. Si l'on inscrit dans un demi-cercle un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés, et qu'on lui circonscrive un demi-polygone semblable, la surface de la sphère engendrée par le demi-cercle tournant autour de son diamètre sera moyenne proportionnelle entre les surfaces engendrées par les deux polygones.

2. Toute zone à une base est équivalente à un cercle ayant pour rayon la corde de l'arc qui engendre la zone. Ce théorème est-il applicable à une zone à deux bases?

3. Exprimer la surface d'une sphère en fonction de la circonférence d'un grand cercle. — Évaluer en myriamètres carrés la surface de la terre supposée sphérique.

4. Circonscrire à une sphère un cône droit dont la surface convexe soit le double de la base.

5. Inscrire dans une sphère un cylindre droit dont la somme des deux bases soit le double de la surface latérale.

6. Inscrire dans une sphère un cône dont la surface convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique qui est terminée au même cercle.

7. Couper une sphère par un plan tel que la section soit équivalente à la différence des deux zones dans lesquelles ce plan partage la surface de la sphère.

8. Couper une sphère par un plan tel que l'aire d'un grand cercle soit moyenne proportionnelle entre les deux zones que ce plan détermine.

9. Couper une sphère par deux plans parallèles également éloignés du centre de la sphère, de manière que la somme des aires des deux sections soit égale à l'aire de la zone comprise entre les deux plans.

10. Inscrire dans une sphère un cône dont la base soit équivalente à la moitié de la surface convexe.

11. Un cône équilatéral étant inscrit dans une sphère, déterminer entre quelles limites peut varier la différence des sections faites dans ces deux corps par un plan parallèle à la base du cône. — Dans quelle position du plan sécant la différence des deux sections est-elle égale aux deux tiers de l'aire d'un grand cercle de la sphère?

Remarque. — La plupart des problèmes précédents sont d'excellents exercices sur les équations du second degré.

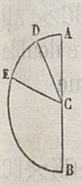
VINGT-TROISIÈME ET VINGT-QUATRIÈME LEÇON

PROGRAMME : Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets. — Application au secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre. — Volume du secteur sphérique, de la sphère entière et du segment sphérique.

—

DÉFINITIONS

1. Le volume engendré par un secteur circulaire DCE tournant autour du diamètre AB qui lui est extérieur, s'appelle *secteur sphérique*. Il a pour *base* la zone que décrit l'arc DE du secteur circulaire.



2. Un polyèdre est *circonscrit* à une sphère, lorsque chacune de ses faces est tangente à la sphère. On dit réciproquement que la sphère est *inscrite* dans le polyèdre.

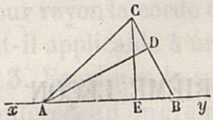
Au contraire, un polyèdre est *inscrit* dans une sphère, lorsque tous ses sommets sont des points de la surface sphérique. La sphère est alors *circonscrite*.

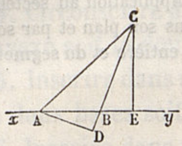
THÉORÈME I

Le volume du corps engendré par un triangle ABC *qui tourne autour d'une ligne droite* xy, *menée dans le plan de ce triangle par son sommet* A, *sans traverser sa surface, est égal au tiers de la distance du sommet* A *au côté opposé* BC; *multiplié par la surface que décrit ce côté en tournant autour de l'axe* xy.

Le triangle ABC peut avoir trois positions différentes par rapport à l'axe xy.

1° Je suppose le côté AB situé sur l'axe, et j'abaisse du sommet opposé C la perpendiculaire CE sur ce côté. Le volume engendré par la révolution du triangle ABC est égal à la somme ou à la différence des cônes droits engendrés par les triangles rectangles ACE, BCE, tournant autour de xy, selon que la perpendiculaire CE est à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ABC.





Or, on a (14, V) :

$$\textit{cône}\ \mathrm{ACE} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{CE}^2 \times \mathrm{AE},$$

et

$$\textit{cône}\ \mathrm{BCE} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{CE}^2 \times \mathrm{BE};$$

par conséquent, on a aussi :

$$\textit{vol.}\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{CE}^2 \times \mathrm{AB}.$$

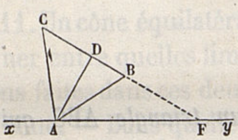
Cela posé, j'abaisse du sommet A la perpendiculaire AD sur le côté opposé BC, et je remplace dans l'expression précédente du volume ABC le produit AB $\times$ CE par le produit BC $\times$ AD qui lui est égal ; car chacun de ces produits exprime le double de l'aire du triangle ABC (P., 30, V). Il en résulte que

$$\textit{vol.}\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{CE} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AD}.$$

Or, la surface convexe du cône BCE a pour mesure $\pi\mathrm{CE}\times\mathrm{BC}$ (14, III); on a donc :

$$\textit{vol.}\ \mathrm{ABC} = \textit{surf.}\ \mathrm{BC} \times \frac{1}{3}\mathrm{AD}.$$

2° Si aucun des côtés AB, AC ne coïncide avec l'axe, le côté CB opposé au sommet A peut rencontrer l'axe, ou lui être parallèle. Je suppose d'abord que le prolongement de CB rencontre xy au point F, et j'abaisse du sommet A la perpendiculaire AD sur CB. Le triangle ABC égale dès-lors la différence des triangles ACF, ABF, et le volume qu'il engendre en tournant sur l'axe xy égale aussi la différence des volumes engendrés par les triangles ACF, ABF. Or,



$$\textit{vol.}\ \mathrm{ACF} = \textit{surf.}\ \mathrm{CF} \times \frac{1}{3}\mathrm{AD},$$

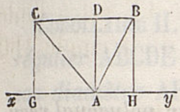
et

$$\textit{vol.}\ \mathrm{ABF} = \textit{surf.}\ \mathrm{BF} \times \frac{1}{3}\mathrm{AD},$$

on a donc

$$vol.\ ABC = surf.\ BC \times \frac{1}{3} AD.$$

3° Le théorème précédent étant vrai, quelque petit que soit l'angle que le côté BC fait avec l'axe, on peut en conclure qu'il est encore vrai lorsque cet angle devient nul, c'est-à-dire lorsque BC devient parallèle à xy.



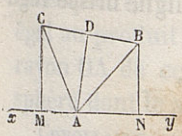
Au reste, voici une démonstration directe de ce théorème dans le cas du parallélisme des droites BC et xy. J'abaisse des extrémités de BC les perpendiculaires BH, CG sur xy, et je fais remarquer que le volume engendré par le triangle ABC, tournant autour de xy, est la somme des volumes engendrés par les triangles ABD, ACD. Or, le cône engendré par le triangle rectangle ABH est égal au tiers du cylindre engendré par le rectangle ADBH (16, III, c); donc le triangle ABD engendre, dans sa révolution autour de l'axe xy, un volume égal aux deux tiers du même cylindre ADBH. Je démontrerais de même que le volume produit par la rotation du triangle ACD autour de xy est égal aux deux tiers du cylindre produit par la rotation du rectangle ADCG autour du même axe; par conséquent, le triangle ABC engendre un volume égal aux deux tiers de la somme des cylindres engendrés par les rectangles ADCG, ADBH, c'est-à-dire égal aux deux tiers du cylindre engendré par le rectangle BCGH. On a dès lors :

$$vol.\ ABC = \frac{2}{3} \pi AD^2 \times BC.$$

Mais la surface convexe du cylindre BCGH a pour mesure $2\pi AD \times BC$ (16, II); on a donc :

$$vol.\ ABC = surf.\ BC \times \frac{1}{3} AD.$$

Corollaire. — Si le triangle ABC est isocèle, et que la droite MN soit la projection du côté BC sur l'axe xy, on a (19, II, c) :



$$surf.\ BC = MN \times cir.\ AD,$$

et par suite,

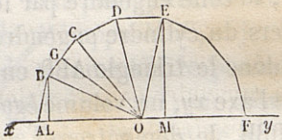
$$vol.\ ABC = \frac{2}{3} \pi AD^2 \times MN.$$

Par conséquent, *le volume engendré par un triangle isocèle qui* *tourne autour d'un axe, situé dans son plan et passant par son sommet sans traverser sa surface, est égal aux deux tiers de la projection de sa base sur l'axe, multipliés par l'aire du cercle qui a pour rayon la hauteur de ce triangle.*

THÉORÈME II

Le volume du corps engendré par un secteur polygonal régulier OBCDE *qui tourne autour du diamètre* xy, *extérieur à sa surface, est égal au produit de la surface que décrit le périmètre* BCDE *du secteur polygonal par le tiers de son apothème.*

Soient O le centre et OG l'apothème de la ligne brisée régulière BCDE; je tire les rayons OC, OD, qui décomposent le secteur polygonal OBCDE en triangles isocèles. Dans sa révolution autour de l'axe xy, ce secteur engendre un volume égal à la somme des volumes engendrés par les triangles isocèles OBC, BCD, ODE. On a dès lors (1) :



$$vol.\ \text{OBC} = surf.\ \text{BC} \times \frac{1}{3}\text{OG},$$

$$vol.\ \text{OCD} = surf.\ \text{CD} \times \frac{1}{3}\text{OG},$$

et

$$vol.\ \text{ODE} = surf.\ \text{DE} \times \frac{1}{3}\text{OG};$$

en ajoutant ces égalités membre à membre, on trouve que

$$vol.\ \text{OBCDE} = (surf.\ \text{BC} + surf.\ \text{CD} + surf.\ \text{DE})\ \frac{1}{3}\text{OG},$$

ou

$$vol.\ \text{OBCDE} = surf.\ \text{BCDE} \times \frac{1}{3}\text{OG}.$$

Corollaire I. — Soit LM la projection de la ligne brisée régulière BCDE sur l'axe xy, on a (19, II) :

$$surf.\ \text{BCDE} = \text{LM} \times cir.\ \text{OG},$$

et, par suite,

$$vol.\ \text{OBCDE} = \frac{2}{3}\pi\text{OG}^2 \times \text{LM}.$$

Par conséquent, *le volume engendré par le secteur polygonal* *régulier* OBCDE *tournant autour du diamètre* xy, *extérieur à sa surface, est égal aux deux tiers du produit de la projection de la ligne brisée régulière* BCDE *sur l'axe* xy *par l'aire du cercle inscrit dans cette ligne.*

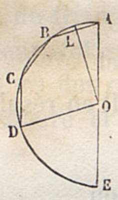
Corollaire II. — *Le volume engendré par un demi-polygone régulier* ABCDE *d'un nombre pair de côtés, tournant autour de son diamètre* AF, *est égal aux deux tiers du cercle inscrit par le diamètre du cercle circonscrit.*

Car la projection AF du périmètre ABCDEF sur l'axe n'est autre que le diamètre du cercle circonscrit au polygone.

THÉORÈME III

Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.

Je considère le secteur sphérique engendré par le secteur circulaire AOD tournant autour du diamètre AE, et j'inscris la ligne brisée régulière ABCD dans l'arc AD. Le volume engendré par le secteur polygonal régulier OABCD, tournant autour de l'axe AE, est moindre que celui du secteur sphérique qui lui est circonscrit, et la différence de ces volumes diminue de plus en plus, si je double indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée régulière ABCD; le secteur sphérique AOD est donc la limite vers laquelle tend le volume engendré par le secteur polygonal, lorsque le nombre des côtés de ce secteur croît indéfiniment.



Or, quel que soit le nombre, le volume engendré par le secteur polygonal OABCD est égal au produit de la surface que décrit la ligne brisée ABCD par le tiers de son apothème OL (II). Par conséquent, le volume du secteur sphérique AOD est aussi égal au produit de la zone que décrit l'arc AD par le tiers du rayon OA de cet arc, c'est-à-dire par le tiers du rayon de la sphère dont le secteur sphérique AOD fait partie.

Corollaire. — Soient R le rayon de la sphère et H la hauteur de la zone qui sert de base au secteur sphérique, on a (19, III) :

$$zone\,H = 2\pi R \times H,$$

et, par suite,

$$sect.\ sph.\ R = \frac{2}{3}\pi R^2 \times H.$$

Donc *un secteur sphérique a* aussi *pour mesure les deux tiers du produit de la hauteur de la zone qui lui sert de base par l'aire d'un grand cercle de la sphère.*

THÉORÈME IV

Le volume d'une sphère est égal au produit de sa surface par le tiers du rayon.

Soit la sphère engendrée par le demi-cercle ABD, tournant autour de son diamètre AD ; je tire un rayon quelconque CB, et je considère la sphère comme la somme des secteurs sphériques engendrés par les deux secteurs circulaires ACB, BCD.

Or, on a (III) :

$$sect.\ sph.\ ACB = zone\ AB \times \frac{1}{3} CA,$$

et

$$sect.\ sph.\ BCD = zone\ BD \times \frac{1}{3} CA.$$

Il en résulte que

$$sphère\ CA = (zone\ AB + zone\ BD)\frac{1}{3} CA,$$

ou

$$sphère\ CA = surf.\ sphér.\ CA \times \frac{1}{3} CA.$$

Corollaire I. — En désignant par R le rayon de la sphère, par D son diamettre et par V son volume, on a :

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

et

$$V = \pi D^2 \times \frac{D}{6} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Corollaire II. — *Les volumes de deux sphères sont proportionnels aux cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

THÉORÈME V

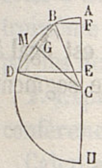
Le volume d'un polyèdre convexe, circonscrit à une sphère, est égal au produit de sa surface par le tiers du rayon de la sphère.

Car, si l'on mène un plan par le centre de la sphère et par chacune des arêtes du polyèdre, on le décompose en pyramides qu'on peut considérer comme ayant pour bases les différentes faces du polyèdre, et pour sommet commun le centre de la sphère. Or, chacune de ces pyramides a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur, c'est-à-dire par le tiers du rayon de la sphère (10, V); donc, etc.

COROLLAIRE. — *Les volumes de deux polyèdres convexes, circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales, sont proportionnels à leurs surfaces.*

THÉORÈME VI

Le volume engendré par un segment circulaire BMD, *tournant sur le diamètre* AH *qui lui est extérieur, est égal à la moitié du volume d'un cône dont la base a pour rayon la corde* BD *du segment, et dont la hauteur est égale à la projection* EF *de cette corde sur l'axe* AH.



Le segment circulaire BMD étant égal à la différence du secteur circulaire CBMD et du triangle CBD, le volume qu'il engendre en tournant sur AH comme axe est égal à la différence des volumes engendrés par le secteur circulaire et le triangle. Or, on a (E, 20, III) :

$$vol.\ \mathrm{CBMD} = \frac{2}{3}\pi \mathrm{CD}^2 \times \mathrm{EF};$$

soit CG la hauteur du triangle isocèle CBD, on a pareillement (E, 20, I, c.) :

$$vol.\ \mathrm{CBD} = \frac{2}{3}\pi \mathrm{CG}^2 \times \mathrm{EF},$$

donc
$$vol.\ \mathrm{BMD} = \frac{2}{3}\pi(\mathrm{CD}^2 - \mathrm{CG}^2) \times \mathrm{EF};$$

mais, le triangle CDG étant rectangle, il en résulte que

$$\mathrm{CD}^2 - \mathrm{CG}^2 = \mathrm{DG}^2 = \frac{\mathrm{BD}^2}{4};$$

on a, par conséquent,

$$vol.\ \mathrm{BMD} = \frac{1}{6}\pi \mathrm{BD}^2 \times \mathrm{EF}.$$

Remarque. — Si le segment circulaire est égal à un demi-cercle, le volume qu'il engendre est celui de la sphère, et l'on a, en remplaçant BD et EF par AH dans la formule précédente,

$$sphère\ CA = \frac{1}{6}\pi AH^3,$$

expression déjà trouvée pour le volume de la sphère en fonction de son diamètre.

THÉORÈME VII

Le volume d'un segment sphérique est égal à celui d'une sphère qui a pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant pour hauteurs et pour bases la hauteur et les bases du segment.

Soient BE et DF les rayons des sections circulaires faites dans la sphère CA par deux plans perpendiculaires au diamètre AG, la droite EF est la hauteur du segment sphérique qui a pour bases les deux cercles BE et DF.

Le volume du segment sphérique EF est égal à la somme des volumes engendrés par le segment circulaire BMD et par le trapèze EBDF. Or, on a :

$$vol.\ BMD = \frac{1}{6}\pi BD^2 \times EF,$$

et $$vol.\ EBDF = \frac{1}{3}\pi(BE^2 + DF^2 + BE \times DF)EF;$$

par conséquent,

$$seg.\ sph.\ EF = \frac{1}{6}\pi(BD^2 + 2BE^2 + 2DF^2 + 2BE \times DF)\ EF.$$

En abaissant du point B la perpendiculaire BH sur DF, et remarquant que le triangle BDH est rectangle, on trouve :

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = EF^2 + (DF - BE)^2,$$

ou $$BD^2 = EF^2 + DF^2 + BE^2 - 2BE \times DF,$$

si on substitue cette valeur de BD^2 dans l'expression précédente du volume du segment sphérique EF, on a :

$$seg.\ sph.\ EF = \frac{1}{6}\pi(EF^2 + 3BE^2 + 3DF^2)\ EF,$$

ou $$seg.\ sph.\ EF = \frac{1}{6}\pi EF^3 + \frac{1}{2}(\pi BE^2 \times EF + \pi DF^2 \times EF).$$

Or, le terme $\frac{1}{6}\pi EF^3$ exprime le volume de la sphère dont le diamètre est égal à la hauteur EF du segment sphérique, et les produits $\pi BE^2 \times EF$, $\pi DF^2 \times EF$ sont les mesures des deux cylindres ayant pour hauteur la droite EF et pour bases les cercles BE, DF; donc, etc.

Corollaire. — Si la base BE du segment sphérique est nulle, c'est-à-dire si le plan BE perpendiculaire à l'axe AG devient tangent à la sphère, *le segment sphérique* ADF, *à une seule base, est égal à la sphère qui a pour diamètre la hauteur du segment, plus la moitié d'un cylindre de même base et de même hauteur que ce segment.*

Car, on a ·

$$seg.\ sph.\ ADF = \frac{1}{6}\pi AF^3 + \frac{1}{2}\pi DF^2 \times AF.$$

PROBLÈMES.

1. Si l'on joint par une ligne droite les milieux de deux côtés d'un triangle, et qu'ensuite on le fasse tourner autour du troisième côté, quel sera le rapport des volumes engendrés par les deux parties de ce triangle?

2. Exprimer le volume d'une sphère en fonction de la circonférence d'un grand cercle.

Calculer le volume et le poids de la terre supposée sphérique, en sachant que sa densité moyenne est égale à $5\frac{1}{2}$ d'après *Cavendish*.

3. La surface du cylindre circonscrit à une sphère est moyenne proportionnelle entre les surfaces de la sphère et du cône équilatéral circonscrit.

La même relation existe entre les volumes de ces trois corps.

4. Les diamètres de la terre, de la lune et du soleil étant proportionnels aux nombres 1, $\frac{3}{11}$ et 112, quels sont les volumes de la lune et du soleil, si l'on prend celui de la terre pour unité?

5. Démontrer que si l'on fait tourner un parallélogramme successivement autour de deux côtés non parallèles, les volumes engendrés seront en raison inverse de ces côtés.

6. Couper une sphère par un plan qui divise en deux parties équivalentes le secteur sphérique, ayant pour base la plus petite des deux zones dans lesquelles ce plan décompose la surface de la sphère

7. Inscrire dans un demi-cercle un triangle rectangle tel que le volume qu'il engendre en tournant autour de son hypoténuse ait un rapport donné avec celui de la sphère décrite par le demi-cercle. — Maximum de ce rapport.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

GÉOMÉTRIE

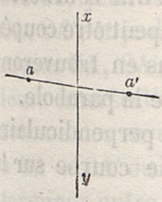
NOTIONS
SUR QUELQUES COURBES USUELLES

PREMIÈRE, DEUXIÈME, TROISIÈME ET QUATRIÈME LEÇON

PROGRAMME : Définition de l'ellipse par la propriété des foyers. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. — Axes. — Sommets. — Rayons vecteurs.
Définition générale de la tangente à une courbe. — Les rayons vecteurs menés des foyers à un point de l'ellipse font, avec la tangente en ce point, et d'un même côté de cette ligne, des angles égaux.— Mener la tangente à l'ellipse : 1° par un point pris sur l'ellipse; 2° par un point extérieur. — Normale à l'ellipse.
HYPERBOLE. — Propriétés principales de cette courbe.

DÉFINITIONS

1. Deux points a et a' sont *symétriques par rapport à une ligne droite* xy, lorsque cette droite est perpendiculaire au milieu de celle qui joint les points a et a'.

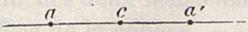


On appelle *axe de symétrie d'une ligne courbe*, ou simplement *axe*, une ligne droite par rapport à laquelle les points de cette courbe sont symétriques deux à deux.

Un axe de symétrie d'une courbe divise dès lors cette courbe en deux parties égales, c'est-à-dire superposables.

2. Deux points a et a' sont *symétriques par rapport à un*

troisième c, lorsque la ligne droite qui joint les points *a* et *a'* est divisée par le point *c* en deux parties égales.

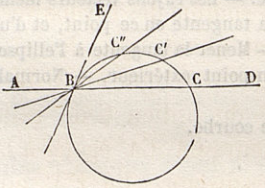


On nomme *centre de symétrie d'une ligne courbe*, ou simplement *centre*, un point par rapport auquel les points de cette courbe sont symétriques deux à deux. Si une ligne courbe a un centre, les cordes qui passent par ce point sont divisées par lui en deux parties égales. En effet, chacune de ces droites coupe la courbe en deux points symétriquement placés par rapport au centre.

Lorsqu'une ligne courbe a un axe et un centre, l'axe passe par le centre ; car il divise en deux parties égales la corde menée perpendiculairement à sa direction par ce point.

3. Toute ligne droite qui passe par le centre d'une ligne courbe se nomme *diamètre*.

4. On appelle *tangente à une ligne courbe*, en un point donné B, la limite BE des positions que prend une sécante BC, lorsqu'on la fait tourner autour du point B de manière qu'un second point d'intersection C se rapproche du premier jusqu'à se confondre avec lui. Le point B se nomme *point de contact*.

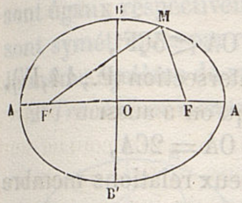


Si la ligne courbe considérée ne peut être coupée qu'en deux points par une ligne droite, sa tangente n'a qu'un point commun avec elle. Mais il est faux de dire réciproquement qu'une ligne droite, qui n'a qu'un point commun avec une courbe, lui soit tangente, même lorsque cette courbe ne peut être coupée qu'en deux points par une ligne droite. Nous en trouverons des exemples dans l'étude de l'hyperbole et de la parabole.

5. On désigne sous le nom de *normale* la perpendiculaire menée par un point quelconque d'une ligne courbe sur la tangente en ce point.

6. On appelle *ellipse* une courbe plane telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F', situés dans son plan, est constante.

Les points fixes F, F′ sont les *foyers* de l'ellipse, et les lignes droites FM, FM′, qui joignent les foyers à un point quelconque M de cette courbe, sont les *rayons vecteurs* de ce point. — La distance FF′ se nomme *excentricité*.

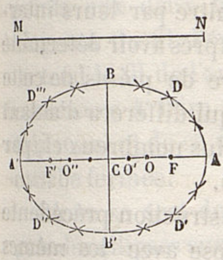


Deux ellipses qui ont les mêmes foyers sont dites *homofocales*.

PROBLÈME I.

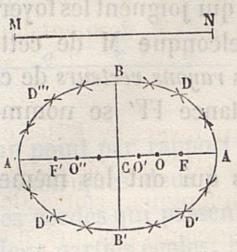
Décrire par points, ou d'un mouvement continu, une ellipse dont les foyers et la somme des rayons vecteurs d'un point quelconque sont donnés.

1° *Tracé par points.*



Soient F, F′ les foyers de l'ellipse qu'il s'agit de tracer, et MN une ligne droite égale à la somme des rayons vecteurs d'un point quelconque de cette courbe. Je prends sur la ligne droite FF′, de chaque côté du milieu C de cette ligne, les longueurs CA, CA′ égales à la moitié de MN; les distances FA, F′A′ sont par suite égales entre elles, et les points A, A′ appartiennent à l'ellipse; car chacune des sommes FA + F′A, FA′ + F′A′ est égale à AA′ ou MN. Pour construire d'autres points de cette courbe, je divise la distance AA′ en deux parties quelconques OA, OA′, et je décris des points F, F′, comme centres, avec les rayons OA, OA′, deux arcs de cercles. Si ces arcs se coupent, leurs intersections D, D′ appartiendront à l'ellipse, puisque la somme des rayons vecteurs de chacun de ces points est égale à OA + OA′ ou MN. Afin d'éviter des essais inutiles, je vais déterminer entre quelles limites il faut prendre le point O pour que les cercles OA, OA′ se coupent constamment.

La somme AA′ ou 2CA des rayons OA, OA′ de ces cercles est, par hypothèse, plus grande que la distance FF′, ou 2CF′, de leurs centres; il suffit donc que les rayons satisfassent à l'inégalité suivante :



$$OA' - OA < 3CF',$$

pour qu'il y ait intersection (P., 14, IV). En remarquant qu'on a aussi

$$OA' + OA = 2CA,$$

et ajoutant ces deux relations membre à membre, on trouve

$$2OA' < 2CF' + 2CA,$$

c'est-à-dire $\quad OA' < AF';$

on a, par suite : $\quad OA > AF.$

La droite AF est donc le *minimum* des rayons vecteurs de l'ellipse, et la droite AF' leur *maximum*. Il en résulte que le point O doit toujours être compris entre les deux foyers F, F'.

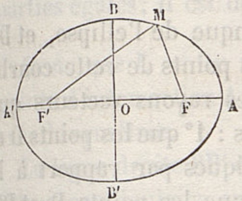
Cela posé, je prends un second point O' sur la droite FF', et je décris des points F, F', comme centres, avec les rayons O'A, O'A', deux arcs de cercles qui font connaître par leurs intersections deux autres points de l'ellipse. Après avoir déterminé de cette manière un assez grand nombre de points de cette courbe, je les unis par un trait continu qui différera d'autant moins de l'ellipse que ces points seront plus nombreux et, par suite, plus rapprochés les uns des autres.

Remarque. — On peut abréger la construction précédente en déterminant quatre points de l'ellipse avec les mêmes rayons.

En effet, après avoir tracé du point F comme centre avec le rayon OA et du point F' comme centre avec le rayon OA' deux arcs de cercles qui se coupent aux points D et D', je décris du point F, comme centre avec le rayon OA', et du point F' comme centre avec le rayon OA, deux autres arcs de cercles, dont les intersections D'' et D''' sont encore des points de l'ellipse. Le système des deux rayons OA, OA' sert donc à déterminer les quatre points D, D', D'', D''' de cette courbe.

Lorsqu'on applique ce mode de construction, il suffit de considérer les positions du point O sur l'une des moitiés de FF', par exemple CF; car si l'on prend sur la droite CF' une longueur CO'' égale à CO, les segments O''A', O''A de la ligne AA' sont égaux respectivement à OA et OA′. Les points O″ et O, qui sont symétriques par rapport au milieu C de FF′, donnent donc le même système de rayons.

2° *Tracé d'un mouvement continu.*



On attache aux foyers F, F′ les extrémités d'un fil FMF′ flexible et inextensible, dont la longueur soit égale à la somme des rayons vecteurs d'un point quelconque de l'ellipse. On tend d'abord ce fil d'un côté de la ligne droite FF′, par exemple au-dessus, en appliquant contre lui une pointe ou un crayon; puis on fait glisser la pointe sur le plan, de manière que le fil soit toujours tendu. L'arc de courbe ABA′ que l'on trace ainsi est une portion d'ellipse, car la somme des distances de chacun de ses points aux deux foyers F, F′ est constamment égale à la longueur du fil. Pour décrire l'autre portion AB′A′ de l'ellipse, on tend le fil de l'autre côté de la ligne droite FF′, et l'on recommence à faire glisser la pointe le long du fil. Il résulte évidemment de ce mode de construction que l'ellipse est une courbe fermée.

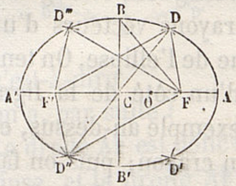
On ne se sert de cette seconde méthode que pour tracer de grandes ellipses sur le terrain, sur des planches ou des feuilles de carton. Mais on préfère la première pour décrire de petites ellipses sur le papier, à cause de la ténuité du fil qu'il faut alors employer et de la difficulté d'en fixer les extrémités aux foyers.

Remarque. — Si, la longueur AA′ du fil restant la même, les foyers F, F′ se rapprochent jusqu'à se confondre, l'ellipse devient une circonférence de cercle ayant le point O pour centre et la droite AA′ pour diamètre. Car la distance du point O à la pointe avec laquelle on décrit l'ellipse est alors constante et égale à la moitié de la longueur du fil; on peut donc considérer la circonférence d'un cercle comme une ellipse dont les deux foyers se confondent avec le centre.

THÉORÈME I

L'ellipse a deux axes de symétrie et un centre situé à l'intersection de ses axes.

En effet, soient D un point quelconque de l'ellipse, et D', D'', D''' les trois points de cette courbe ayant les mêmes rayons vecteurs que le point D. Je dis : 1° que les points D et D' sont symétriques par rapport à la droite FF' ; 2° que les points D et D''' sont symétriques par rapport à la droite BB' perpendiculaire au milieu de FF'; 3° que D et D'' sont symétriques par rapport au point d'intersection C des droites FF' et BB'.



1° Les circonférences décrites des points F, F', comme centres avec les rayons OA, OA', se coupent en deux points D, D', symétriquement placés par rapport à la droite FF'; car cette droite est perpendiculaire au milieu de leur corde commune DD' (P., 14, I). Donc les points de l'ellipse sont deux à deux symétriques par rapport à la droite FF', qui est par conséquent un axe de symétrie de cette courbe.

2° Les triangles DFF', D'''FF' ont par hypothèse les côtés égaux chacun à chacun; il en résulte que l'angle DFF', opposé au côté DF', égale l'angle D'''F'F opposé au côté D'''F. Cela posé, je fais tourner la partie BAB' de l'ellipse autour de la droite BB', et je la rabats sur l'autre partie BA'B'. Le point F vient s'appliquer sur le point F', parce que les angles BCF, BCF' sont droits, et que le point C est le milieu de la distance FF'. La droite FD prend ensuite la direction de F'D''', à cause de l'égalité des angles CFD, CF'D'''. Or, ces lignes ont par hypothèse la même longueur, donc leurs extrémités D et D''' coïncident, ce qui exige évidemment que les points D, D''' soient symétriquement placés par rapport à la droite BB'. Par conséquent, cette droite par rapport à laquelle les points de l'ellipse sont deux à deux symétriques est un axe de symétrie.

3° Le quadrilatère DFD''F' qui a ses côtés opposés égaux par hypothèse est un parallélogramme, et ses diagonales DD″, FF′ se divisent mutuellement en deux parties égales. J'en conclus que si l'on mène par l'intersection C des axes AA′, BB′ de l'ellipse une corde quelconque DD″, ce point la divise en deux parties égales; il est donc le centre de l'ellipse.

Remarque I. — On appelle *sommets* de l'ellipse les quatre points d'intersection A, A′, B, B′ de cette courbe avec ses deux axes de symétrie.

La ligne droite BB′ est moindre que AA′; en effet, la droite BC perpendiculaire sur AA′ est moindre que l'oblique BF. Or, le point B étant également distant des deux foyers F et F′, son rayon vecteur BF est égal à la moitié de AA′; on a donc

$$BC < \frac{AA'}{2},$$

et, par suite,

$$2BC \text{ ou } BB' < AA'.$$

La ligne droite AA′ s'appelle pour cette raison *grand axe* de l'ellipse, et la ligne droite BB′ le *petit axe*. On désigne ordinairement les longueurs AA′, BB′, FF′ par $2a$, $2b$, $2c$; les trois quantités a, b, c sont liées par la relation

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

car elles représentent les côtés du triangle rectangle BCF.

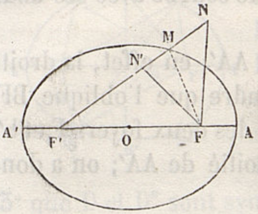
Remarque II. — Lorsque les longueurs $2a$, $2b$ des deux axes d'une ellipse sont données, on peut construire cette courbe par points ou d'un mouvement continu.

On prend sur deux lignes droites rectangulaires, à partir de leur intersection C, les longueurs CA, CA′, égales à a, et les longueurs CB, CB′, égales à b. Les lignes droites AA′, BB′ sont les axes de l'ellipse cherchée. Pour en construire les foyers, on décrit de l'extrémité B du petit axe BB′, avec un rayon égal à CA, moitié de AA′, un arc de cercle qui coupe le grand axe AA′ aux points F et F′. L'ellipse peut alors être construite d'après l'une des deux méthodes précédentes, car on connaît ses foyers et la somme $2a$ des rayons vecteurs d'un point quelconque de cette courbe.

THÉORÈME II

Si un point est extérieur ou intérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus grande ou moindre que le grand axe.

Soit d'abord un point N extérieur à l'ellipse; je tire les lignes droites NF, NF′, et le rayon vecteur MF du point M où la ligne droite NF′ rencontre l'ellipse. La ligne brisée NF + MN est plus grande que la ligne droite MF; en augmentant chacune de ces lignes de la même longueur MF′, je trouve



$$NF + NF' > MF + MF'.$$

Or, le point M étant sur l'ellipse, la somme MF + MF′ de ses rayons vecteurs égale le grand axe $2a$; donc la somme NF + NF′ des distances du point N aux deux foyers est plus grande que $2a$.

Je suppose, en second lieu, le point N′ intérieur à l'ellipse, et je tire les droites N′F, N′F′. Le prolongement de N′F′ rencontre la courbe au point M, dont je tire le rayon vecteur MF. La ligne droite N′F est moindre que la ligne brisée MN′ + MF; en augmentant chacune de ces lignes de la même longueur N′F′, j'ai

$$N'F' + N'F < MF' + MF.$$

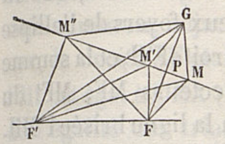
Or, le point M étant sur l'ellipse, la somme MF′ + MF de ses rayons vecteurs égale le grand axe $2a$; donc la somme N′F′ + N′F des distances du point N′ aux deux foyers est moindre que $2a$.

Corollaire. — Les réciproques des deux parties de ce théorème sont évidentes. Elles donnent le moyen de distinguer les points intérieurs à une ellipse de ceux qui sont extérieurs, lorsque cette courbe n'est pas tracée et qu'elle est déterminée seulement par ses axes.

THÉORÈME III

Une ligne droite ne peut rencontrer une ellipse en plus de deux points.

En effet, je suppose qu'une ligne droite puisse avoir trois points communs M, M′, M″ avec une ellipse ayant pour foyers les deux points F et F′; j'abaisse du foyer F la perpendiculaire FP sur la droite MM″, et je la prolonge, au delà de son pied P, d'une longueur PG égale à FP.

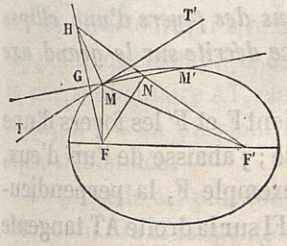


La droite MM″ étant perpendiculaire au milieu de FG, les distances MG, M′G, M″G sont respectivement égales aux distances MF, M′F, M″F (P., 6, III); par conséquent, les sommes MG + MF′, M′G + M′F′, M″G + M″F′ seraient égales chacune au grand axe de l'ellipse, et, dès lors, égales entre elles, ce qui est impossible; car le point M′, qui se trouve sur la droite MM″ entre les points M et M″, est à l'intérieur de l'un des deux triangles MGF′, M″GF′; par suite, la somme M′G + M′F′ de ses distances aux extrémités du côté GF′ est moindre que la somme des deux autres côtés du triangle (P., 3, II). Donc la droite MM″ ne peut avoir plus de deux points communs avec l'ellipse FF′.

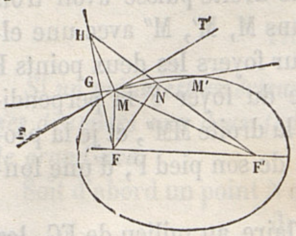
THÉORÈME IV

La tangente en un point de l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point.

Soient F, F′ les foyers d'une ellipse et TT′ sa tangente au point M. Pour démontrer que les angles FMT, F′MT′ sont égaux, je mène une sécante par le point M et un point voisin M′; j'abaisse du foyer F sur cette droite la perpendiculaire FG que je prolonge, au delà de son pied G, d'une longueur GH égale à GF, et je dis : 1° que la droite F′H rencontre la sécante MM′ en un point N situé entre les points M et M′; 2° que les droites NF, NF′ font avec MM′ des angles égaux.



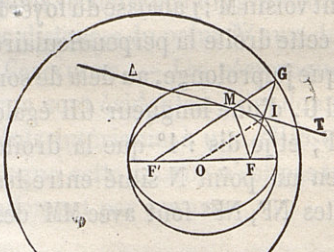
En effet, les triangles FGN, HGN, qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et le côté NF est égal au côté NH; je démontrerais de même que les droites MF et MH sont égales. Par conséquent, la somme des distances NF, NF′ du point N aux deux foyers de l'ellipse est égale à la droite F′H, et la somme des rayons vecteurs MF, MF′ du point M égale à la ligne brisée F′MH. Or, la droite F′H est moindre que la ligne brisée F′MH, puisque ces deux lignes ont les mêmes extrémités; donc, 1° la somme FN + NF′ est moindre que MF + MF′, ou que le grand axe de l'ellipse, et le point N se trouve à l'intérieur de cette courbe (II), sur la sécante MM′; 2° il résulte de l'égalité des triangles FGN, HGN, que l'angle FNM est égal à l'angle HNG, et, par suite, à l'angle F′NM′.



Cela posé, je fais tourner la sécante MM′ autour du point M jusqu'à ce que le point M′ coïncide avec lui; alors le point N de la droite MM′ se confond aussi avec M, puisqu'il est toujours compris entre les points M et M′. Or, pendant sa rotation, la sécante MM′ ne cesse pas de faire des angles égaux avec les droites NF, NF′; donc les angles FMT, F′MT′, que la position limite de la sécante MM′, ou la tangente TT′, fait avec les rayons vecteurs F′M, FM du point de contact M, sont aussi égaux.

THÉORÈME V

Le lieu géométrique des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est la circonférence décrite sur le grand axe de cette courbe comme diamètre.



Soient F et F′ les foyers d'une ellipse; j'abaisse de l'un d'eux, par exemple F, la perpendiculaire FI sur la droite AT tangente au point M, et je dis que la distance du pied I de cette perpendiculaire au centre O de l'ellipse est égale à la moitié du grand axe.

Pour le démontrer, je prolonge les deux droites FI, F′M, jusqu'à leur rencontre en G. Les triangles rectangles MIF, MIG sont égaux, parce qu'ils ont un côté commun, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; car, la droite AT étant tangente au point M de l'ellipse, l'angle FMI est égal à F'MA (III) et, par suite, à l'angle GMI. Il résulte de l'égalité des triangles MIF, MIG, que les côtés IF, IG sont égaux, et que la droite F'G égale F'M + MF ou le grand axe de l'ellipse. Je remarque ensuite que les points O et I étant les milieux des droites FF', FG, les triangles FOI, FF'G ont un angle commun compris entre deux côtés proportionnels, et qu'ils sont dès lors semblables; par conséquent, le côté OI est la moitié de F'G, et le point I se trouve sur la circonférence décrite du point O comme centre avec la moitié du grand axe de l'ellipse pour rayon.

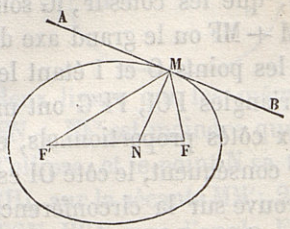
Remarque.— La droite MG étant égale à MF, et la droite F'G égale au grand axe $2a$ de l'ellipse, si je décris un cercle du foyer F' comme centre avec un rayon égal à $2a$, tout point M de l'ellipse est également éloigné de ce cercle et de l'autre foyer F.

On appelle *cercles directeurs* de l'ellipse les deux cercles qui ont les foyers de cette courbe pour centres et son grand axe pour rayon. Il résulte de ce qui précède que tout cercle directeur peut servir à tracer l'ellipse par points lorsqu'on connaît ses foyers et son grand axe. En effet, si l'on décrit le cercle directeur qui a le foyer F' pour centre, et qu'on joigne un point quelconque G de sa circonférence à l'autre foyer F, la perpendiculaire AT, élevée au milieu de la droite FG, coupe le rayon F'G en un point M qui appartient évidemment à l'ellipse demandée.

Ce procédé est plus long que le précédent (Probl. I), mais il fait connaître la tangente en chaque point de la courbe; car la droite AT est tangente à l'ellipse. On peut déduire de cette nouvelle construction que, *si d'un point* F *pris à l'intérieur d'un cercle* F'G *on mène des droites aux points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées sur ces lignes par leurs milieux toucheront une même ellipse, ayant pour foyers le point* F *et le centre* F' *du cercle donné, et pour grand axe le rayon* F'G *de ce cercle.*

THÉORÈME VI

La normale en un point quelconque M de l'ellipse divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs de ce point.

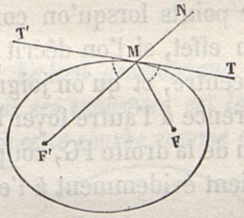


Soient AB la tangente et MN la normale au point M de l'ellipse FF′ ; les angles FMB, F′MA, que la tangente AB fait avec les rayons vecteurs FM, F′M du point de contact M étant égaux (IV), leurs compléments FMN, F′MN le sont aussi. Par conséquent la normale MN divise l'angle FMF′ en deux parties égales.

PROBLÈME II

Mener une tangente à une ellipse par un point M donné sur cette courbe.

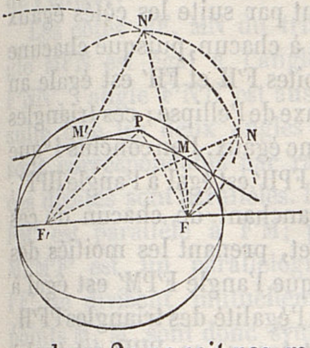
Soient F et F′ les deux foyers d'une ellipse; pour tracer la droite qui touche cette courbe au point M, je mène les rayons vecteurs FM, F′M de ce point, et je divise en deux parties égales l'angle FMN que l'un de ces rayons, par exemple FM, fait avec le prolongement MN de l'autre F′M. La bissectrice TT′ de cet angle est la tangente demandée (IV). En effet, l'angle FMT est égal par construction à l'angle NMT et, par suite, à l'angle F′MT′, puisque les angles NMT, F′MT′ sont opposés au sommet.



PROBLÈME III

Mener une tangente à une ellipse par un point P extérieur à cette courbe.

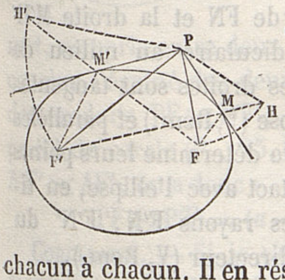
Je décris l'un des cercles directeurs de l'ellipse, par exemple celui qui a pour centre le foyer F′; je trace ensuite du point P comme centre avec un rayon égal à la distance du point P à l'autre foyer F un second cercle qui coupe le premier aux deux points N et N′, parce que le point P est extérieur à l'ellipse. En effet, 1° la distance PF′ des deux centres est moindre



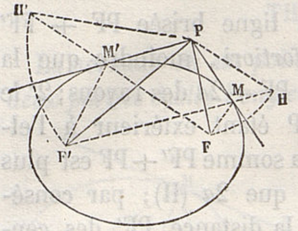
que la ligne brisée PF + FF′ et, *à fortiori*, moindre que la somme PF + 2a des rayons; 2° le point P étant extérieur à l'ellipse, la somme PF′ + PF est plus grande que 2a (II); par conséquent, la distance PF′ des centres est plus grande que la différence 2a — PF des rayons. Cette conséquence suppose que le grand axe 2a ne soit pas moindre que la distance PF. Dans le cas contraire, on raisonnera de la manière suivante : le côté PF′ du triangle PFF′ est plus grand que la différence PF — FF′ des deux autres; il est donc, *à fortiori*, plus grand que PF — 2a.

Les points N, N′ étant ainsi déterminés, je mène par le point P les droites PM, PM′, respectivement perpendiculaires à FN et FN′; ces droites sont les tangentes demandées (V, Rem.). Pour avoir leurs points de contact M et M′ avec l'ellipse, il suffit de tirer les rayons F′N, F′N′ du cercle directeur (V, Rem.).

Corollaire. — 1° *Les deux tangentes* PM, PM′, *menées à l'ellipse par un point extérieur* P, *font des angles égaux* MPF, M′PF′, *avec les droites qui joignent le point* P *aux foyers* F, F′; 2° *la droite* FP *divise en deux parties égales l'angle* MFM′ *des rayons vecteurs menés d'un même foyer* F *aux deux points de tangence.*



Je prolonge le rayon vecteur F′M d'une longueur MH égale à FM et le rayon vecteur FM′ d'une longueur M′H′ égale à F′M′. Je tire ensuite les droites PH, PH′, et je fais remarquer que les triangles PMF, PMH sont égaux parce qu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que le côté PF est égal au côté PH, et que l'angle PFM est égal à l'angle PHM. Je démontrerais de même l'égalité des droites PF′, PH′, et celle des angles PF′M′, PH′M′. Les triangles PF′H, PFH′ ont par suite les côtés égaux chacun à chacun, puisque chacune des droites F′H et FH′ est égale au grand axe de l'ellipse ; ces triangles sont donc égaux. J'en conclus 1° que l'angle FPH′ est égal à l'angle HPF′ ; en retranchant de chacun de ces

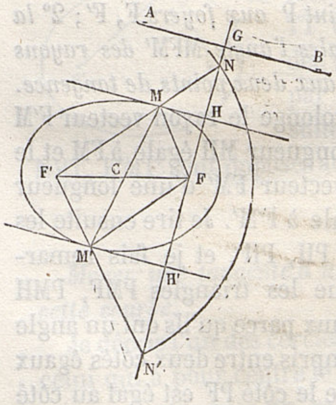


angle leur partie commune FPF′, et, prenant les moitiés des restes égaux F′PH′, FPH, je trouve que l'angle F′PM′ est égal à l'angle FPM ; 2° il résulte aussi de l'égalité des triangles PF′H, PFH′, que les angles PFH′, PHF′ sont égaux ; or, PHF′ est égal à PFM ; donc l'angle PFH′ est aussi égal à PFM, et la droite FP divise l'angle MFM′ en deux parties égales.

PROBLÈME IV

Mener à une ellipse une tangente parallèle à une droite donnée AB.

Je décris l'un des cercles directeurs, par exemple, celui qui a pour centre le foyer F′, et j'abaisse de l'autre foyer F sur la droite AB la perpendiculaire FH, qui coupe le cercle directeur aux deux points N et N′, puisque le point F est à l'intérieur de ce cercle. Je mène ensuite la droite MH perpendiculaire au milieu de FN et la droite M′H′ perpendiculaire au milieu de FN′. Ces droites sont tangentes à l'ellipse (V, Rem.) et parallèles à AB. Je détermine leurs points de contact avec l'ellipse, en tirant les rayons F′N, F′N′ du cercle directeur (V, Rem.).



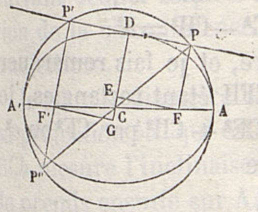
Corollaire. — *Les points de contact* M, M′ *des deux tangentes* *parallèles* MH, M'H' *sont symétriques par rapport au centre* C *de l'ellipse.*

Les côtés MF, MN du triangle FMN étant égaux (V), l'angle MFN est égal à l'angle MNF. Dans le triangle isocèle F'NN', l'angle F'N'N est aussi égal à l'angle F'NN'; il en résulte que les deux angles MFN, F'N'N sont égaux. Or, ils sont correspondants par rapport aux droites MF, F'N'; donc ces droites sont parallèles. Pour une raison analogue, la droite FM' est parallèle à F'M; par conséquent, le quadrilatère MFM'F' est un parallélogramme, et ses diagonales MM', FF' se divisent mutuellement en deux parties égales. Les points M, M' sont donc symétriques par rapport au centre C de l'ellipse.

THÉORÈME VII

Le produit des distances FP, F'P' *des deux foyers* F *et* F' *d'une ellipse à une tangente quelconque* PP' *est constant.*

Sur le grand axe AA' de l'ellipse comme diamètre je décris une circonférence qui passe par les projections P et P' des foyers sur la tangente PP' (III, Rem.). Je prolonge ensuite la droite P'F' jusqu'au point P'', où elle rencontre la circonférence, et je tire la droite PP''. L'angle inscrit PP'P'' étant droit, la corde PP'' est un diamètre du cercle; donc elle passe par le centre C, et les triangles CFP, CF'P'' sont égaux, parce qu'ils ont un angle opposé au sommet, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. J'en conclus l'égalité des deux côtés PF, P''F', et, par suite, celle des produits $PF \times P'F'$, $P''F' \times P'F'$. Or, d'après une propriété du cercle (P., 23, VI), le dernier de ces produits égale $A'F' \times AF'$, on a donc :



$$PF \times P'F' = (a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = b^2.$$

Corollaire. — Si je mène de chaque foyer une parallèle la tangente PP' jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette tangente, les triangles rectangles

FCE, F′CG sont égaux, parce qu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal. Il en résulte 1° que les côtés CE, CG sont égaux; 2° que la droite F′P′ est égale à la somme des lignes CD, CG, et la droite FP égale à la différence des mêmes lignes. Par conséquent on a :

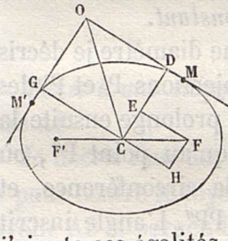
$$F'P' \times FP = (CD + CG)\,(CD - CG) = CD^2 - CG^2.$$

De là ce théorème : *La différence des carrés des distances du centre d'une ellipse à une tangente et à sa parallèle menée par un foyer est constante.*

THÉORÈME VIII

Le lieu géométrique des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse est une circonférence de cercle, qui a le même centre que cette courbe.

Soit MOM′ un angle droit circonscrit à l'ellipse FF′; je trace par le centre C une parallèle à chaque côté de cet angle, jusqu'à la rencontre de la parallèle menée par le foyer F à l'autre côté. En appliquant successivement aux deux tangentes OM, OM′ le théorème qui précède, j'ai



$$CD^2 - CE^2 = b^2,$$

et

$$CG^2 - CH^2 = b^2;$$

j'ajoute ces égalités membre à membre, et je fais remarquer que, les deux quadrilatères CDOG, CEFH étant rectangles, je puis remplacer $CD^2 + CG^2$ par CO^2, et $CE^2 + CH^2$ par CF^2 ou c^2. En faisant cette substitution, je trouve

$$CO^2 - c^2 = 2b^2,$$

et j'en conclus :

$$CO^2 = c^2 + 2b^2,$$

ou

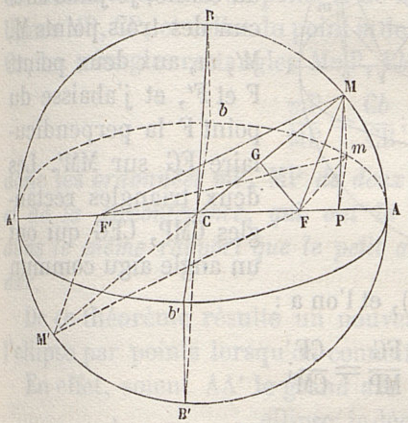
$$CO^2 = a^2 + b^2.$$

Donc la distance du sommet de l'angle MOM′ au centre de l'ellipse est constante, et le lieu géométrique de ce point est la circonférence décrite du point C comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$, ou à la moitié de la diagonale du rectangle construit sur les axes $2a$, $2b$ de l'ellipse.

THÉORÈME IX

La projection de la circonférence d'un cercle sur un plan est une ellipse.

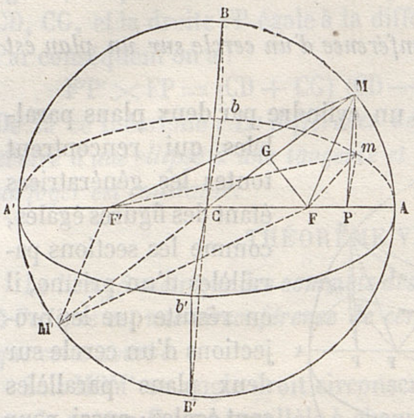
Les sections faites dans un cylindre par deux plans parallèles qui rencontrent toutes les génératrices étant des figures égales, comme les sections parallèles d'un prisme, il en résulte que les projections d'un cercle sur deux plans parallèles sont égales ; aussi, pour faciliter la démonstration du théorème précédent, je supposerai que le plan de projection passe par le centre C du cercle. Soit AA′ le diamètre suivant lequel ce plan coupe le cercle, et AbA′b′ la projection de la circonférence ABA′B′; je dis que cette projection est une ellipse.



Je trace le diamètre BB′ du cercle perpendiculaire à AA′, et sa projection bb′ qui est aussi perpendiculaire à AA′; l'angle BCb mesure l'inclinaison du cercle sur le plan de projection. Je prends ensuite sur AA′ les longueurs CF, CF′, égales à Bb; les points F et F′ sont les foyers de l'ellipse. Pour le démontrer, j'abaisse d'un point quelconque M de la circonférence la perpendiculaire Mm sur le plan de projection, puis du point m la perpendiculaire mP sur AA′, et je tire la droite MP qui est aussi perpendiculaire sur AA′ d'après le théorème des trois

* C'est à M. *Courcelles*, professeur au lycée de Rennes, qu'est due la démonstration si remarquable que nous donnons de cet important théorème.

perpendiculaires. Cela posé, les triangles rectangles MmP, BbC, qui ont les angles égaux, chacun à chacun sont semblables, et donnent



$$\frac{Mm}{MP} = \frac{Bb}{BC};$$

je tire le diamètre MM' du cercle, je joins chacun des trois points M, M', m, aux deux points F et F', et j'abaisse du point F la perpendiculaire FG sur MM'. Les deux triangles rectangles CMP, CFG qui ont un angle aigu commun sont semblables (P. 21, II), et l'on a :

$$\frac{FG}{MP} = \frac{CF}{CM};$$

en comparant cette égalité à la précédente, et remarquant que les lignes CF, Bb sont égales par hypothèse, ainsi que les rayons CM et CB, j'en conclus que Mm est égale à FG.

Je dis maintenant que les distances mF, mF' sont respectivement égales aux segments GM, GM' du diamètre MM'. Les triangles MFm, MFG, rectangles l'un en G et l'autre en m, ont l'hypoténuse égale et un côté égal ; ils sont donc égaux, et le côté mF est égal à GM. Pareillement, le quadrilatère MFM'F', dont les diagonales MM', FF' se divisent mutuellement en parties égales, étant un parallélogramme, les triangles rectangles MmF', FGM' sont égaux parce qu'ils ont leurs hypoténuses MF', M'F égales, et les côtés Mm, FG égaux ; donc le côté mF' est égal à GM', et, par conséquent, la somme mF + mF' des distances d'un point quelconque m de la projection AbA'b' aux deux points fixes F et F' est égale à la somme GM + GM'. Or, cette dernière somme est constante et égale au diamètre MM' du cercle, donc la courbe AbA'b' est une ellipse ayant pour foyers les points F et F', pour grand axe le diamètre AA' et pour petit axe la projection du diamètre du cercle perpendiculaire à AA'.

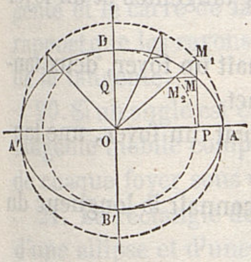
Corollaire.—Si l'on convient d'appeler *ordonnée* d'un point de la circonférence, ou de l'ellipse, la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe AA', et *abscisse* la distance de cette perpendiculaire au centre de la courbe, l'ordonnée et l'abscisse du point M de la circonférence seront les lignes MP, CP, et celles du point *m* de l'ellipse seront *m*P et CP. Or, les triangles rectangles M*m*P, B*b*C étant semblables, on a

$$\frac{mP}{MP}=\frac{Cb}{CB};$$

donc les *ordonnées* *m*P, MP *de deux points* m *et* M *de l'ellipse et de la circonférence, qui ont la même abscisse* CP, *sont dans le même rapport que le petit axe de l'ellipse et le grand axe.*

De ce théorème résulte un nouveau moyen de construire l'ellipse par points lorsqu'on connaît ses axes.

En effet, soient AA' le grand axe et BB' le petit axe d'une ellipse; je décris une circonférence sur chacune de ces lignes comme diamètre, et j'abaisse d'un point quelconque M_1 de la circonférence OA la perpendiculaire M_1P sur AA'. Pour trouver le point M de l'ellipse qui a la même abscisse CP que le point M_1, je réduis l'ordonnée M_1P dans le rapport du petit axe OB de l'ellipse au grand axe OA, en tirant le rayon OM_1, et menant une parallèle à AA' par le point M_2 où la droite OM_1 rencontre la circonférence OB; car on a



$$\frac{MP}{M_1P}=\frac{OM_2}{OM_1}=\frac{OB}{OA}.$$

Après avoir construit par ce procédé un nombre suffisant de points, on les réunira par un trait continu qui représentera l'ellipse dont les axes sont AA' et BB'.

PROBLÈMES.

1. Décrire une ellipse dont les foyers et un point sont donnés.

2. Quel est le lieu géométrique des points également distants de deux circonférences dont l'une est inférieure à l'autre?

3. Construire une ellipse dont on connaît la longueur des axes, un foyer et un point.

4. Tout diamètre divise l'ellipse en deux parties égales.

5. Le carré d'un diamètre quelconque de l'ellipse est égal au carré du petit axe, augmenté du carré de la différence des deux rayons vecteurs qui vont à l'une des extrémités de ce diamètre.

6. Tout diamètre de l'ellipse est plus grand que le petit axe, et plus petit que le grand axe.

7. La somme du carré de la droite qui joint un point d'une ellipse à son centre, et du produit des deux rayons vecteurs du même point est constante.

8. Construire une ellipse dont les deux foyers et une tangente sont donnés.

9. Construire une ellipse dont trois tangentes et un foyer sont donnés.

10. Tracer une ellipse dont on connaît un foyer, deux tangentes et l'un des deux points de contact.

11. Tracer une ellipse dont on connaît un foyer, une tangente et deux points.

12. Construire une ellipse dont on connaît la longueur du grand axe, le centre et deux tangentes.

13. Construire une ellipse dont on connaît un sommet, un foyer est une tangente.

14. Deux ellipses égales ont leurs grands axes situés sur la même ligne droite et sont tangentes. Si l'on fait rouler l'une de ces ellipses sur l'autre de manière que leur point de contact soit toujours également éloigné des deux sommets par lesquels ces courbes se touchaient d'abord, quel est le lieu géométrique de chacun des foyers de l'ellipse mobile?

15. Quels sont les lieux géométriques des sommets des différents trapèzes qu'on peut construire sur une base donnée, avec

cette double condition que l'autre base ait une longueur donnée et que la somme des deux côtés non parallèles soit aussi donnée?

Quel est le lieu géométrique des points de rencontre des côtés non parallèles de ces trapèzes? — Quel est le lieu géométrique des intersections de leurs diagonales?

16. Étant donnés un cercle et un point dans son intérieur, si sur chacun des diamètres de ce cercle on décrit une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe et qui passe par ce point, quel sera le lieu géométrique des foyers de ces ellipses?

17. Soient MT, MT', deux tangentes menées par le point M à une ellipse dont les foyers sont F, F'; si l'on prend sur ces tangentes les longueurs MO, MO', respectivement égales aux distances MF, MF', la droite OO' sera égale au grand axe de l'ellipse.

18. Une droite et un cercle qui se touchent étant donnés, si l'on décrit une ellipse tangente à la droite, et ayant pour foyers les extrémités d'un diamètre quelconque du cercle, quel sera le lieu géométrique des extrémités du petit axe de cette ellipse?

19. Le carré de la distance du foyer F de l'ellipse à une tangente et le carré de la moitié du petit axe sont dans le même rapport que les rayons vecteurs FM, F'M du point de contact M de la tangente.

20. Si un angle est circonscrit à une ellipse, la portion d'une tangente mobile comprise entre les côtés de cet angle est vue de chaque foyer sous un angle constant.

21. Le rectangle des segments interceptés par le grand axe d'une ellipse et d'une tangente mobile sur les deux tangentes menées aux extrémités du grand axe est constant.

22. Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à deux ellipses homofocales est un cercle concentrique à ces ellipses.

23. Si deux sphères extérieures l'une à l'autre sont inscrites dans le même cône, tout plan tangent intérieurement à ces sphères coupe la surface du cône suivant une ellipse qui a pour foyers les points de contact du plan tangent.

Démontrer le même théorème pour deux sphères inscrites dans un cylindre, et remarquer en outre que le petit axe de l'ellipse est constamment égal au diamètre du cylindre.

24. Couper un cône ou un cylindre de révolution par un plan de manière que la section soit une ellipse égale à une ellipse donnée.

25. Trouver les points de rencontre d'une ligne droite avec une ellipse qui n'est pas tracée, et dont on connaît les foyers et la longueur du grand axe.

26. Si deux cônes de révolution sont opposés au sommet et qu'on inscrive une sphère dans chacun d'eux, tout plan tangent extérieurement à ces sphères coupe les deux cônes suivant une hyperbole qui a pour foyers les points de contact du plan tangent. (Voir ci-après la définition de l'*hyperbole.*)

Remarque. — Comme l'hyperbole est d'un usage aussi fréquent que l'ellipse dans la Géométrie descriptive et dans les arts, je vais exposer ses principales propriétés qui ont la plus grande analogie avec celles de l'ellipse, malgré la différence de forme de ces deux courbes, représentant avec la parabole tous les genres de sections planes du cône.

Propriétés principales de l'hyperbole.

On appelle *hyperbole* une courbe plane, telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes F et F′, situés dans son plan, est constante.

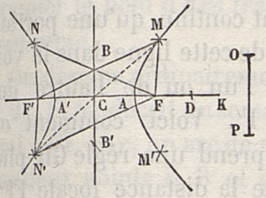
Les points F, F′ sont les *foyers* de l'hyperbole, et les lignes droites MF, MF′, qui joignent un point quelconque M de cette courbe à ses foyers, sont les *rayons vecteurs* de ce point. La distance FF′ se nomme *excentricité*.

Deux hyperboles qui ont les mêmes foyers sont dites *homofocales*.

PROBLÈME I.

Décrire par points, ou d'un mouvement continu, une hyperbole dont les foyers et la différence des rayons vecteurs d'un point quelconque sont donnés.

1° Soient F, F′ les foyers de l'hyperbole qu'il s'agit de décrire et OP une ligne droite égale à la différence des rayons vecteurs d'un point quelconque de cette courbe. Je prends, sur la ligne droite FF′ de chaque côté du milieu C de cette ligne, les



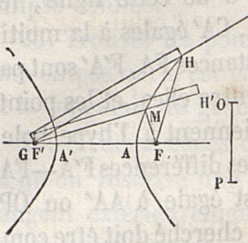
longueurs CA, CA′ égales à la moitié de OP ; les distances FA, F′A′ sont par suite égales entre elles, et les points A, A′ appartiennent à l'hyperbole; car chacune des différences F′A—FA, FA′—F′A′ est égale à AA′ ou OP. Cela posé, je fais remarquer que le lieu cherché doit être composé de deux lignes distinctes, l'une contenant les points du lieu plus rapprochés du foyer F que du foyer F′, et l'autre contenant au contraire les points plus rapprochés du foyer F′ que du foyer F.

Pour construire la première partie du lieu, on marque un point quelconque D sur le prolongement FK de la droite F′F, et l'on décrit des points FF′ comme centres, avec les longueurs respectives DA, DA′ pour rayons, deux arcs de cercle qui se coupent; car la distance FF′ des deux centres est plus grande que la différence DA′—DA ou AA′ des rayons, et moindre que leur somme DA + DA′ ou FF′ + 2DF. Les points d'intersection M, M′ des deux arcs de cercle appartiennent à l'hyperbole, puisque la différence de leurs rayons vecteurs DA′, DA est égale à AA′ ou OP. En faisant varier la position du point D sur la droite FK, on obtiendra autant de points de l'hyperbole qu'on le voudra; s'ils sont suffisamment rapprochés les uns des autres, on les réunira par un trait continu et l'on aura un arc d'hyperbole MAM′. Comme la distance du point D au point A peut croître indéfiniment, on voit que la ligne cherchée se compose de deux branches, partant du point A et s'étendant indéfiniment des deux côtés de la droite FF′.

On construira la seconde partie du lieu avec les mêmes rayons DA, DA′, en prenant le point F pour le centre du plus grand des deux cercles et le point F′ pour le centre du plus petit, et l'on trouvera une seconde ligne NA′N′ composée de deux branches indéfinies qui partent du point A′. L'ensemble des deux lignes MAM′, NAN′ constitue le lieu géométrique cherché.

2° *Tracé d'un mouvement continu.*

L'hyperbole étant une courbe à branches infinies, il est évident qu'on ne peut décrire d'un mouvement continu qu'une portion très-petite de cette ligne dans le voisinage de l'un ou de l'autre des foyers F, F'. Voici comment on opère : on prend une règle GH plus grande que la distance focale FF'; on attache à l'une de ses extrémités, par exemple au point H, un fil d'une longueur HL égale à l'excès de GH sur OP, puis on fixe l'extrémité G de la règle au foyer F' et l'extrémité L du fil à l'autre foyer F. On fait tourner ensuite la règle autour du point F', en appliquant le fil contre elle avec une pointe ou un crayon, de manière qu'il soit toujours tendu. La courbe que le crayon décrit pendant ce mouvement est un arc d'hyperbole; car si le crayon se trouve au point M pour la position F'H' de la règle, comme on ne change pas la différence de ses rayons vecteurs MF', MF en augmentant chacun d'eux de la même longueur MH', on voit que cette différence est égale à l'excès constant de la longueur MF' + MH' de la règle sur la longueur MF + MH' du fil, c'est-à-dire égale à la ligne OP.

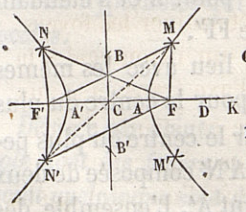


On décrirait de même une portion de l'autre branche en fixant l'extrémité G de la règle au foyer F et l'extrémité L du fil à l'autre foyer F'.

THÉORÈME I

L'hyperbole a deux axes de symétrie et un centre situé à l'intersection de ses axes.

On démontre, comme on l'a fait pour l'ellipse : 1° que la droite qui passe par les foyers F et F' de l'hyperbole est un axe de cette courbe; 2° que la perpendiculaire BB', élevée par le milieu C de FF' sur cette droite, est aussi un axe; 3° que le point d'intersection C des deux axes est le centre de l'hyperbole.



Remarque I. — L'axe FF′ rencontre l'hyperbole en deux points A, A′, qu'on appelle les *sommets* de cette courbe; mais l'axe BB′ ne rencontre pas l'hyperbole. Aussi on donne au premier le nom d'*axe transverse*, et au second celui d'*axe non transverse*.

On désigne ordinairement les longueurs AA′ et FF′ par $2a$ et $2c$. Si on décrit du sommet A comme centre, avec un rayon égal à CF ou c, un arc de cercle qui coupe l'axe non transverse aux deux points B, B′ et qu'on représente par $2b$ la longueur BB′ de la corde interceptée, les trois quantités a, b, c satisferont à la relation suivante :

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

puisque le triangle ABC est rectangle. Par analogie avec l'ellipse, on appelle les deux quantités a et b les *longueurs des axes de l'hyperbole*. L'égalité précédente ne diffère de celle qu'on a trouvée entre les axes de l'ellipse et la distance de ses foyers, savoir :

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

qu'en ce que b^2 est remplacé par $-b^2$. Cette remarque permet de déduire les propriétés de l'hyperbole correspondantes à des propriétés données de l'ellipse, lorsque ces dernières sont exprimées par des relations entre les axes.

Si les deux axes a, b de l'hyperbole sont égaux, on dit que cette courbe est *équilatère*.

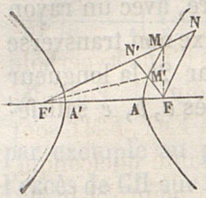
Remarque II. — Lorsque les longueurs $2a$, $2b$ des axes de l'hyperbole sont données, on peut construire cette courbe par points ou d'un mouvement continu.

On prend sur deux lignes droites rectangulaires, à partir de leur intersection C, les longueurs CA, CA′ égales à a, et les longueurs CB, CB′ égales à b. Les droites AA′, BB′ sont les axes de l'hyperbole demandée. Pour en déterminer les foyers, on décrit du point C comme centre, avec un rayon égal à la distance AB, un arc de cercle qui coupe l'axe transverse aux points F et F′. L'hyperbole peut alors être construite d'après l'une des deux méthodes précédentes, puisqu'on connaît ses foyers et la différence $2a$ des rayons vecteurs d'un point quelconque de cette courbe.

THÉORÈME II

Si un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus grande ou plus petite que l'axe transverse.

Soit : 1° un point N intérieur à l'hyperbole FF′, c'est-à-dire situé dans la partie concave de cette courbe :



je tire les lignes droites NF, NF′ et le rayon vecteur du point M, où la ligne droite NF′ rencontre la branche d'hyperbole dans laquelle se trouve le point N. La ligne droite NF étant moindre que la ligne brisée NM + MF, si je retranche chacune d'elles de la ligne droite NF′, j'aurai

$$NF' - NF > MF' - MF,$$

ou

$$NF' - NF > 2a,$$

puisque le point M est sur l'hyperbole FF′.

Je suppose, 2°, le point N′ extérieur à l'hyperbole, et plus rapproché du foyer F que du foyer F′ ; je mène les lignes droites N′F, N′F′. La première rencontre l'hyperbole au point M′, dont je tire le rayon vecteur M′F′. Comme la ligne droite N′F′ est moindre que la ligne brisée M′F′ + M′N′, si je retranche de ces deux longueurs la ligne N′F, j'aurai

$$N'F' - N'F < M'F' - M'F,$$

ou

$$N'F' - N'F < 2a,$$

puisque le point M′ appartient à l'hyperbole.

Corollaire. — Les réciproques des deux parties de ce théorème sont évidentes ; elles donnent le moyen de distinguer les points intérieurs à l'hyperbole des points qui sont extérieurs lorsque cette courbe n'est pas tracée et qu'elle est déterminée seulement par ses axes.

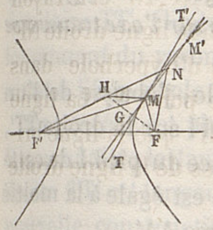
THÉORÈME III

Une ligne droite ne peut rencontrer une hyperbole en plus de deux points.

Démonstration analogue à celle du théorème III de l'ellipse.

THÉORÈME IV

La tangente en un point de l'hyperbole divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs de ce point.



Soient F, F′ les foyers d'une hyperbole et TT′ sa tangente au point M. Pour démontrer que les angles FMT, F′MT sont égaux, je mène une sécante quelconque MM′ par le point M et un point voisin M′, situé sur la même branche; du foyer F j'abaisse sur cette droite la perpendiculaire FG, que je prolonge au delà de son pied G d'une longueur GH égale à GF, et je dis 1° que la droite F′H rencontre la sécante MM′ en un point N situé entre les points M et M′; 2° que les droites NF, NF′ font des angles égaux avec MM′.

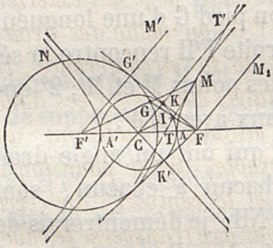
En effet, les triangles FGN, HGN, qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et le côté NF est égal au côté NH; je démontrerais de même que les droites MF, MH sont égales. Par conséquent, la différence des distances NF′, NF du point N aux deux foyers de l'hyperbole est égale à la droite F′H, et la différence des rayons vecteurs MF′, MF du point M égale à MF′ — MH. Or, le côté F′H du triangle F′MH est plus grand que la différence MF′ — MH des deux autres côtés, dont 1° la différence NF′ — NF est plus grande que MF′ — MF, ou que l'axe transverse de l'hyperbole, et le point N se trouve à l'intérieur de cette courbe (II) sur la sécante MM′; 2° il résulte aussi de l'égalité des triangles FGN, HGN que les angles FNG, F′NG sont égaux.

Cela posé, je fais tourner la sécante MM′ autour du point M jusqu'à ce que le point M′ coïncide avec lui; alors le point N de la droite MM′ se confond aussi avec M, puisqu'il est toujours compris entre les points M et M′. Or, pendant sa rotation, la sécante MM′ ne cesse pas de diviser en deux parties égales l'angle FNF′ des deux rayons vecteurs du point N; donc les angles FMT, F'MT que la position limite de la sécante MM', ou la tangente TT', fait avec les rayons vecteurs MF, MF' du point de contact M sont égaux.

THÉORÈME V

Le lieu géométrique des projections des foyers d'une hyperbole sur ses tangentes est la circonférence décrite sur l'axe transverse de cette courbe comme diamètre.

Soient F et F' les foyers d'une hyperbole; j'abaisse de l'un d'eux, par exemple F, la perpendiculaire FI sur la droite TT', tangente au point M, et je dis que la distance du pied I de cette perpendiculaire au centre C de l'hyperbole est égale à la moitié de l'axe transverse AA'.

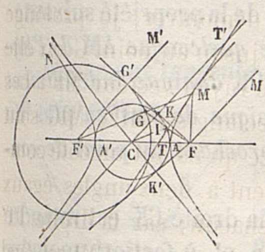


Pour le démontrer, je prolonge la droite FI jusqu'au point G où elle rencontre le rayon vecteur MF'. Les triangles rectangles MIF, MIG sont égaux, parce qu'ils ont un côté commun adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; car la droite TT' étant tangente au point M de l'hyperbole, l'angle FMI est égal à F'MI (III). Il en résulte que le point I est le milieu de la droite FG, et que la droite F'G égale F'M — FM ou l'axe transverse $2a$. Je remarque ensuite que les triangles FIC, FGF' ont un angle commun, compris entre deux côtés proportionnels, et qu'ils sont conséquemment semblables; or, FC égale la moitié de FF', donc CI égale aussi la moitié de F'G, et le point I se trouve sur la circonférence décrite du point C comme centre, avec la moitié a de l'axe transverse de l'hyperbole pour rayon.

Remarque 1. — La droite MG étant égale à MF, et la droite F'G égale à l'axe transverse $2a$ de l'hyperbole, si je décris un cercle du point F' comme centre avec un rayon égal à $2a$, tout point M de l'hyperbole est également éloigné de la circonférence de ce cercle et de l'autre foyer F.

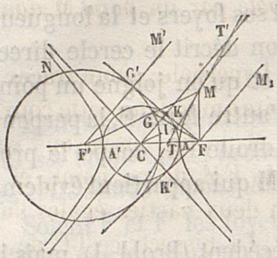
On appelle *cercles directeurs* de l'hyperbole les deux cercles décrits des foyers de l'hyperbole comme centres, avec un rayon égal à l'axe transverse. Il résulte de ce qui précède que tout cercle directeur d'une hyperbole peut servir à tracer cette courbe par points, lorsqu'on connaît ses foyers et la longueur de son axe transverse. En effet, si l'on décrit le cercle directeur qui a le foyer F' pour centre, et qu'on joigne un point quelconque G de sa circonférence à l'autre foyer F, la perpendiculaire TT', élevée au milieu de la droite FG, coupe le prolongement du rayon F'G en un point M qui appartient évidemment à l'hyperbole demandée.

Ce procédé est plus long que le précédent (Probl. I), mais il fait connaître la tangente en chaque point de la courbe; car la droite TT' est tangente à l'hyperbole. On peut déduire de cette nouvelle construction que, *si d'un point* F *pris à l'extérieur d'un cercle* F'G, *on mène des droites aux points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées sur ces lignes par leurs milieux toucheront une même hyperbole, ayant pour foyers le point* F *et le centre* F' *du cercle donné, et pour axe transverse le rayon* F'G *du cercle.*



Remarque II. — Lorsque la droite FI, tournant autour du foyer F, vient se confondre avec la tangente FK menée du point F au cercle CA, elle touche aussi le cercle F'G; car les rayons F'G, CI, qui sont constamment parallèles, deviennent simultanément perpendiculaires à FI. Pendant ce mouvement de rotation, l'angle GFM du triangle isocèle MFG tend à devenir droit, ainsi que son égal FGM; par suite, le point M, dont les rayons vecteurs F'M, FM s'approchent de plus en plus d'être parallèles à sa tangente TT', s'éloigne indéfiniment des deux foyers F, F' et la tangente TT' tend vers une position limite qui n'est autre que le rayon CK du point de contact de la droite FK et du cercle CA.

On donne le nom d'*asymptote* à la droite remarquable CK, qui touche l'hyperbole au point situé à l'infini sur la partie supérieure de la branche AM. On reconnaît facilement, par des considérations analogues aux précédentes, que la même droite CK touche aussi l'hyperbole au point situé à l'infini sur la partie inférieure de l'autre branche A'N. Si l'on mène par le point F



la seconde tangente FK' au cercle CA et qu'on trace le rayon CK' du point de contact, cette droite indéfiniment prolongée est aussi une asymptote de l'hyperbole, qu'elle touche aux points situés à l'infini sur la partie inférieure de la branche AM et sur la partie supérieure de la branche A'N.

Les deux asymptotes CK, CK', qui font évidemment des angles égaux avec l'axe transverse FF', sont d'une grande utilité pour le tracé des branches de l'hyperbole dont elles déterminent la direction; car elles jouissent de la propriété suivante· *La distance d'un point* M *d'une branche quelconque* AM *de l'hyperbole à l'asymptote correspondante* CK *diminue indéfiniment à mesure que le point considéré s'éloigne de plus en plus du sommet* A *de cette branche, en se rapprochant du point de contact de l'asymptote.*

En effet, la distance du point M à la droite CK est moindre que celle du point T à la même droite, et, *à fortiori*, moindre que CT. Or cette dernière distance décroît indéfiniment à mesure que le point M s'éloigne du sommet A, puisque la tangente TT' a pour limite l'asymptote CK; donc le point M se rapproche indéfiniment de l'asymptote, tout en s'éloignant du point A.

Remarque III. — Les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont rectangulaires — La réciproque de ce théorème est vraie.

THÉORÈME VI

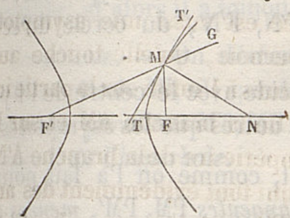
La normale en un point quelconque d'une hyperbole fait des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point.

Démonstration analogue à celle du théorème VI de l'ellipse.

PROBLÈME II

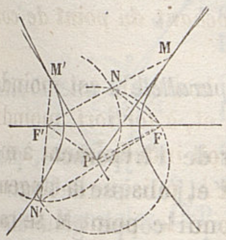
Mener une tangente à une hyperbole par un point M *donné sur cette courbe.*

Soient F et F′ les foyers d'une hyperbole; pour tracer la ligne droite qui touche cette courbe au point M, je tire les rayons vecteurs FM, F′M de ce point, et je divise en deux parties égales l'angle FMF′. La bissectrice TT′ de cet angle est la tangente demandée (IV).



PROBLÈME III

Mener une tangente à une hyperbole par un point P *extérieur à cette courbe.*



Je décris l'un des cercles directeurs de l'hyperbole, par exemple celui qui a pour centre le foyer F′; je trace ensuite du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance du point P à l'autre foyer F, un second cercle qui coupe le premier aux deux points N et N′, parce que le point P est extérieur à l'hyperbole. Pour démontrer cette double intersection, il suffit de prouver que l'une quelconque des trois lignes $2a$, PF, PF′, qui représentent les rayons des deux cercles et la distance de leurs centres, est moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence (P., 14, V). Or, le côté FF′ du triangle PFF′ est moindre que la somme des deux autres côtés PF, PF′; on a donc, *à fortiori*,

$$2a < PF + PF'$$

Comme le point P est extérieur à l'hyperbole, on a aussi (II)

$$2a > PF - PF',$$

ou

$$2a > PF' - PF.$$

selon que le point P est plus près ou plus loin du foyer F′ que du foyer F ; par conséquent les deux cercles se coupent.

Les points N et N′ étant ainsi déterminés, je mène par le point P les droites PM, PM′ respectivement perpendiculaires à FN et FN′ ; ces droites sont les tangentes demandées (V, Rem.). Pour avoir leurs points de contact M et M′ avec l'hyperbole, il suffit de tirer les deux rayons F′N, F′N′, du cercle directeur (V, Rem.).

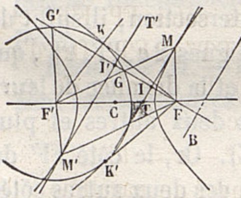
Remarque. — Si le point P coïncide avec le centre de l'hyperbole, les deux tangentes ne sont autres que les asymptotes.

Corollaire. — On démontrerait, comme on l'a fait pour l'ellipse (Probl. III, c) : 1° que *les tangentes* PM, PM′, *menées à l'hyperbole par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites* PF, PF′, *qui joignent le point* P *aux deux foyers* F, F′ ; 2° que *la droite* FP *divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs, menés d'un même foyer* F *aux deux points de tangence* M, M′, *ou le supplément de cet angle.*

PROBLÈME IV

Mener à une hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée AB.

Je décris l'un des cercles directeurs de l'hyperbole, par exemple celui qui a pour centre le foyer F′ et j'abaisse de l'autre foyer F sur AB la perpendiculaire FI qui coupe généralement le cercle en deux points G et G′.



Je mène ensuite la droite MT perpendiculaire au milieu de FG et la droite M′T′ perpendiculaire au milieu de FG′. Ces droites sont tangentes à l'hyperbole (V, Rem.), et parallèles à AB ; je détermine leur point de contact M, M′ en tirant les rayons F′G, F′G′ du cercle directeur (V, Rem.).

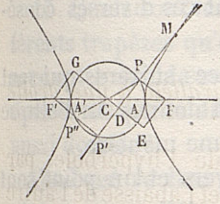
Ce problème n'est possible que si la droite FI, perpendiculaire à AB ou à sa parallèle MT, se trouve dans l'angle KFK′ formé par les tangentes menées du foyer F au cercle F′ ; par conséquent, l'angle IFT doit être moindre que l'angle KFF′, et par suite l'angle ITF, complément de IFT, doit être plus grand que l'angle KF'F, complément de KFF'. Or le rayon F'K est parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole (V, Rem. 2); donc il faut et il suffit que la droite donnée AB fasse avec l'axe transverse FF' un angle aigu plus grand que celui que les asymptotes font avec le même axe, pour que le problème soit possible; et alors il a toujours deux solutions.

Corollaire. — On démontrerait, comme on l'a fait pour l'ellipse (Prob. IV, c), que *les points de contact* M, M' *des deux tangentes parallèles* MT, M'T' *sont symétriques par rapport au centre* C *de l'hyperbole.*

THÉORÈME VII

Le produit des distances FP, F'P' *des deux foyers* F *et* F' *d'une hyperbole à une tangente quelconque* PP' *est constant.*

Sur l'axe transverse AA' de l'hyperbole comme diamètre, je décris une circonférence qui passe par les projections P



et P' des foyers sur la tangente (V). Soit P'' le second point d'intersection de cette circonférence et de la droite F'P'; je tire la droite PP''. L'angle inscrit PP'P'' étant droit, la corde PP'' est un diamètre du cercle CP; elle passe donc par le centre C, et les triangles CFP, CF'P'' sont égaux, parce qu'ils ont un angle opposé au sommet compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; de là résulte l'égalité des côtés FP, F'P'' et, par suite, celle des produits $FP \times F'P'$, $F'P'' \times F'P'$. Or, d'après une propriété du cercle (P., 23, VI), le dernier de ces produits est égal à $F'A \times F'A'$; on a donc

$$FP \times F'P' = (c+a)\,(c-a) = c^2 - a^2 = b^2.$$

Corollaire. — Si je mène de chaque foyer un parallèle à la tangente PP' jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire tracée du centre C sur cette tangente, les triangles rectangles FCE, F'CG sont égaux, parce qu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal. Il en résulte aussi 1° que les côtés CG, CE sont égaux; 2° que la droite F'P' est égale à la somme des lignes

CD, CG et la droite FP égale à la différence des mêmes lignes. Par conséquent on a :

$$F'P' \times FP = (CG + CD)\ (CG - CD) = CG^2 - CD^2.$$

De là ce théorème : *La différence des carrés des distances du centre d'une hyperbole à une tangente et à sa parallèle menée par un foyer est constante.*

THÉORÈME VI

Le lieu géométrique des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est une circonférence de cercle, ayant le même centre que cette courbe.

Démonstration analogue à celle du théorème correspondant de l'ellipse (VIII).

Le rayon de la circonférence est égal à $\sqrt{a^2 - b^2}$, de sorte que le lieu géométrique demandé n'existe que pour les hyperboles dont l'axe transverse $2a$ est plus grand que l'axe non transverse. Ce lieu géométrique se réduit à un point lorsque l'hyperbole est équilatère. On peut vérifier facilement ces diverses conséquences sur une figure.

Je propose sur l'hyperbole les exercices suivants qui sont analogues aux problèmes précédemment donnés sur l'ellipse et dont la démonstration se fait de la même manière.

1. Décrire une hyperbole dont les foyers et un point sont donnés.

2. Quel est le lieu géométrique des points également éloignés de deux circonférences dont l'une n'est pas intérieure à l'autre ?

3. Construire une hyperbole dont on connaît la longueur des axes, un foyer et un point.

4. Le carré d'un diamètre quelconque de l'hyperbole est égal au carré de la somme des rayons vecteurs menés à l'une des extrémités de ce diamètre, diminué du carré de l'axe non transverse.

5. La différence du carré de la distance du point de l'hyperbole à son centre et du produit des deux rayons vecteurs de ce point est constant.

6. Construire une hyperbole dont les deux foyers et une tangente sont donnés.

7. Construire une hyperbole dont trois tangentes et un foyer sont donnés.

8. Tracer une hyperbole dont on connaît un foyer, deux tangentes et l'un des points de contact.

9. Tracer une hyperbole dont on connaît un foyer, une tangente et deux points.

10. Construire une hyperbole dont on connaît la longueur de l'axe transverse, le centre et deux tangentes.

11. Construire une hyperbole dont on connaît un sommet, un foyer et une tangente.

12. Deux hyperboles égales ont leurs axes transverses situés sur la même ligne droite et sont tangentes. Si l'on fait rouler l'une de ces hyperboles sur l'autre, de manière que leur point de contact soit toujours également éloigné des deux sommets par lesquels ces courbes se touchaient d'abord, quel sera le lieu géométrique de chaque foyer de l'hyperbole mobile?

13. Quels sont les lieux géométriques des sommets des différents trapèzes qu'on peut construire sur une base donnée, avec cette double condition que l'autre base ait une longueur donnée et que la différence des deux côtés non parallèles soit aussi donnée?

Quel est le lieu géométrique des points de rencontre des côtés non parallèles de ces trapèzes? — Quel est le lieu géométrique des intersections de leurs diagonales?

14. Étant donnés un cercle et un point extérieur, si sur chacun des diamètres de ce cercle on décrit une hyperbole ayant ce diamètre pour axe transverse et passant par le point donné, quel sera le lieu géométrique des foyers de ces hyperboles?

15. Soient MT, MT′ deux tangentes menées par le point M à une hyperbole dont les foyers sont F et F′; si on prend sur ces tangentes les longueurs MO, MO′ respectivement égales aux distances MF, MF′, la droite OO′ sera égale à l'axe transverse de l'hyperbole.

16. Le carré de la distance du foyer F de l'hyperbole à une tangente et le carré de la moitié de l'axe transverse sont dans

le même rapport que les rayons vecteurs FM, F'M du point de contact M de la tangente.

17. Si un angle est circonscrit à une hyperbole, la portion d'une tangente mobile comprise entre les côtés de cet angle est vue de chaque foyer sous un angle constant.

18. Le rectangle des segments interceptés par l'axe transverse d'une hyperbole et une tangente mobile sur les deux tangentes menées aux sommets de cette courbe est constant.

19. Le lieu géométrique des sommets des angles droits circonscrits à deux hyperboles homofocales est une circonférence concentrique à ces hyperboles.

20. Le lieu géométrique des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse et à une hyperbole homofocales est une circonférence concentrique à ces deux courbes.

21. Une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent sous des angles droits.

22. Construire les points de rencontre d'une ligne droite et d'une hyperbole dont on ne connaît que les foyers et l'axe transverse.

Toute droite parallèle à l'une des asymptotes ne rencontre l'hyperbole qu'en un point.

23. Construire une hyperbole dont on connaît un foyer, une asymptote et la longueur de l'axe transverse.

24. Construire une hyperbole dont une asymptote, une tangente et un foyer sont donnés.

25. Démontrer que le quadrilatère, formé par les rayons vecteurs des deux points dans lesquels une tangente quelconque à l'hyperbole rencontre les asymptotes de cette courbe, est inscriptible.

CINQUIÈME ET SIXIÈME LEÇON

Programme : Définition de la parabole par la propriété du foyer et de la directrice. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. — Axe. — Sommet. — Rayon vecteur. — La tangente fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur, menés par le point de contact. — Mener la tangente à la parabole, 1° par un point pris sur la courbe ; 2° par un point extérieur. — Normale. — Sous-normale. — Le carré de la corde perpendiculaire à l'axe est proportionnel à la distance de cette corde au sommet.

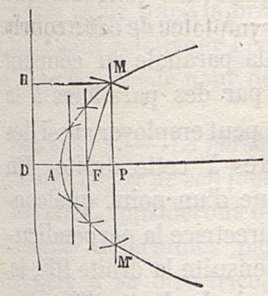
DÉFINITIONS

La *parabole* est une courbe plane dont chacun des points est également éloigné d'un point fixe et d'une droite fixe, situés dans son plan. — Le point fixe se nomme *foyer*, et la droite fixe, *directrice*.

On appelle *rayon vecteur* d'un point de la parabole la droite qui joint ce point au foyer.

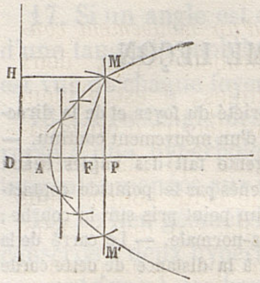
PROBLÈME I

Décrire par points, ou d'un mouvement continu, une parabole dont la directrice et le foyer sont donnés.

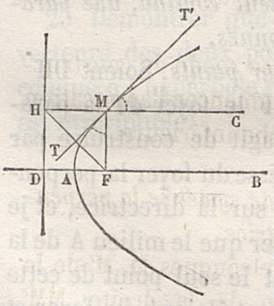


1° *Tracé par points*. Soient DH directrice et F le foyer de la parabole qu'il s'agit de construire par points ; j'abaisse du foyer la perpendiculaire FD sur la directrice, et je fais remarquer que le milieu A de la droite DF est le seul point de cette ligne également éloigné du foyer et de la directrice ; il appartient donc à la parabole qui n'a pas d'autre point commun avec DF.

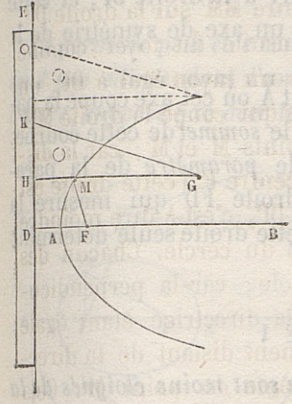
Pour déterminer un autre point de la parabole, je prends sur la droite DF une longueur quelconque DP plus grande que DA, et j'élève par le point P la perpendiculaire MM′ sur la droite DF. Je décris ensuite du foyer comme centre, avec un rayon égal à DP, un arc de cercle qui coupe la droite MM′ aux deux points M et M′; car la distance FP du centre F à cette droite est moindre que DP, c'est-à-dire moindre que le rayon du cercle. Chacun des points M, M′ appartient à la parabole; car la perpendiculaire MH abaissée du point M sur la directrice étant égale à DP ou à MF, le point M est également distant de la directrice et du foyer; il en est de même du point M′. Cela posé, en faisant varier la grandeur de DP et, par suite, la position de la sécante MM′, je détermine autant de points de la parabole que je veux; je les unis ensuite par un trait continu qui représente d'autant mieux la parabole que ces points sont plus nombreux.



Il résulte de cette construction que la parabole est composée de deux branches AM, AM′ qui partent du point A, et vont en s'éloignant indéfiniment du foyer et de la directrice; car la distance DP de la directrice et de sa parallèle MM′ peut croître, à partir de DA, au delà de toute limite, sans que le cercle décrit du point F comme centre avec le rayon DP cesse de couper la droite MM′.



Remarque. — Au lieu de déterminer les points de la parabole en coupant cette courbe par des parallèles à la directrice, on peut employer aussi des perpendiculaires à cette droite. En effet, si je mène d'un point quelconque H de la directrice la perpendiculaire HC sur cette ligne, et que je tire ensuite la droite HF, la perpendiculaire TT′ élevée au milieu de la droite HF rencontre la droite HC en un point M situé sur la parabole; car les distances MF et MH sont égales. Il résulte de cette construction que *la parabole n'est coupée qu'en un seul point par une perpendiculaire à la directrice.*

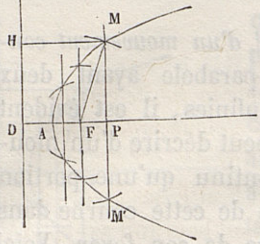


2° *Tracé d'un mouvement continu.* La parabole ayant deux branches infinies, il est évident qu'on ne peut décrire d'un mouvement continu qu'une portion très-petite de cette courbe dans le voisinage de son foyer. Voici comment on opère : on place le bord d'une règle sur la directrice DE, et l'on applique contre cette règle le plus petit côté HK de l'angle droit d'une équerre GHK; on prend ensuite un fil dont la longueur soit égale à l'autre côté GH de l'angle droit, puis on attache l'une de ses extrémités au sommet G de l'équerre et l'autre au foyer F de la parabole. On fait alors glisser l'équerre le long de la règle, en appliquant contre l'équerre, avec une pointe ou un crayon, le fil qu'on tient toujours tendu. L'arc de courbe que la pointe décrit de cette manière est un arc de parabole. En effet, la longueur GM + MF du fil étant égale par hypothèse au côté GM ou GM + MH de l'équerre, la distance MF est constamment égale à la distance MH, de sorte que le point M est également éloigné de la directrice et du foyer.

Après avoir tracé la branche AM par ce mode de construction, il faut retourner l'équerre et recommencer l'application du même procédé pour décrire la branche inférieure.

COROLLAIRE. — *La parabole a pour axe de symétrie la perpendiculaire menée de son foyer sur sa directrice.*

En effet, considérons deux points quelconques M, M′ de la parabole déterminés par l'intersection de la droite MM′ parallèle à sa directrice, et du cercle qui a le foyer F pour centre et la droite DP pour rayon. La perpendiculaire DP menée du centre de cercle sur la corde MM′ divise cette corde en deux parties égales (P., 12, I); donc les points M et M′ sont symétriques par rapport à la droite DF, et cette droite est un axe de symétrie de la parabole.

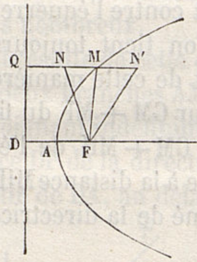


Le point A où cet axe coupe la parabole est le *sommet* de cette courbe. On appelle *paramètre* de la parabole la droite FD qui mesure la distance du foyer à la directrice. Cette droite seule détermine la parabole.

THÉORÈME I

Les points extérieurs à la parabole sont moins éloignés de la directrice que du foyer; les points intérieurs sont au contraire *plus éloignés de la directrice que du foyer.*

1° Soit N′ un point extérieur à la parabole; je mène par ce point et parallèlement à l'axe la droite NQ, qui coupe la courbe au point M et la directrice au point Q; je tire ensuite les droites FM et FN. Le rayon vecteur MF, ou la droite MN + NQ qui lui est égale, parce que le point M appartient à la parabole, est moindre que la ligne brisée MN + NF; il faut donc qu'on ait



$$NQ < NF.$$

2° Soit N′ un point intérieur; je mène la droite N′Q parallèle à l'axe. Cette droite rencontre la directrice au point Q et la parabole au point M dont je trace le rayon vecteur FM. La ligne brisée N′M + MF est plus grande que la droite N′F; or les droites MF, MQ sont égales, parce que le point M est sur la parabole; on a donc

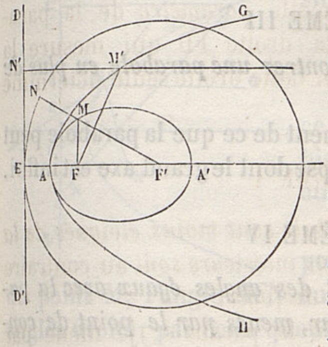
$$N'M + MQ > N'F,$$

ou

$$N'Q > N'F.$$

THÉORÈME II

La parabole peut être considérée comme la limite vers laquelle tend une ellipse dont l'un des foyers s'éloigne indéfiniment de l'autre, supposé fixe avec le sommet voisin.



Soient F et F' les foyers d'une ellipse dont le grand axe est AA'; du point F' comme centre je décris le cercle directeur F'E, et je suppose que, les points A et F restant fixes, le foyer F' s'éloigne indéfiniment de l'autre foyer F. L'ellipse se change alors en une courbe ouverte GAH ayant deux branches infinies AG, AH et le cercle directeur se confond avec sa tangente DD' au point E, où il coupe la droite AF; car la distance AE est égale à AF et, par suite, constante. Or, quelle que soit la position du point F', tout point M de l'ellipse est également distant du point F et du cercle directeur (*Courbes usuelles*, 1, V, Rem.); par conséquent, chaque point M' de la courbe GAH, limite de l'ellipse, est aussi également distant du point F et de la droite DD', limite du cercle directeur. La courbe GAH est donc une parabole.

Corollaire. — Le théorème précédent sert à déduire les propriétés de la parabole des propriétés déjà connues de l'ellipse. Si ces dernières dépendent explicitement des axes a, b de l'ellipse et de l'excentricité c, on désigne par p le paramètre EF de la parabole, et l'on a :

$$a = c + \frac{p}{2},$$

et

$$b^2 = a^2 - c^2 = p\left(c + \frac{p}{4}\right).$$

En remplaçant dans la relation donnée les quantités a, b par les valeurs qui précèdent, et supposant ensuite $c = \infty$, on trouvera la propriété correspondante de la parabole.

Remarque. — On démontrerait de même que *la parabole peut* aussi *être considérée comme la limite vers laquelle tend une hyperbole dont l'un des foyers s'éloigne indéfiniment de l'autre, supposé fixe avec le sommet voisin.*

THÉORÈME III

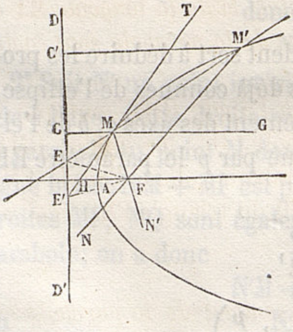
Une ligne droite ne peut rencontrer une parabole en plus de deux points.

Ce théorème résulte évidemment de ce que la parabole peut être considérée comme une ellipse dont le grand axe est infini.

THÉORÈME IV

La tangente à la parabole fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur, menés par le point de contact.

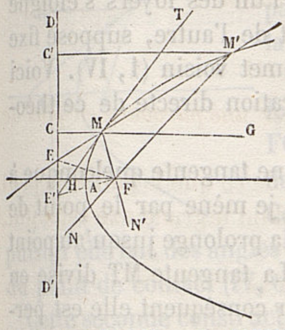
Ce théorème est une conséquence évidente de ce que la parabole (voir la figure précédente) est la limite d'une ellipse dont le foyer F′ s'éloigne indéfiniment de l'autre foyer F, supposé fixe avec le sommet voisin A; car le rayon vecteur MF′ d'un point quelconque M de l'ellipse tend à devenir parallèle à l'axe AF. Néanmoins je vais donner une démonstration directe de ce théorème.



Soient F le foyer et DD′ la directrice d'une parabole; je dis que la droite MT qui la touche au point M fait des angles égaux avec le rayon vecteur MF et la droite MG, menée parallèlement à l'axe par le point M. Pour le démontrer, je tire du point M une sécante quelconque MM′, qui rencontre la directrice au point E, et je fais remarquer que la droite EF divise en deux parties égales l'angle MFN extérieur au triangle FMM′. En effet, des points M et M′ je tire les droites MC, M′C′ perpendiculaires à la directrice, et j'ai :

$$\frac{EM}{EM'} = \frac{MC}{M'C'}.$$

Or, les droites MC, MF sont égales, ainsi que les droites M′C′, M′F, puisque les points M et M′ sont situés sur la parabole; donc



$$\frac{EM}{EM'} = \frac{MF}{M'F},$$

ce qui exige que la droite EF soit la bissectrice de l'angle MFN extérieur au triangle MFM′ (P. 20, IV).

Je suppose maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, l'angle MFN augmente et a pour limite deux angles droits; par conséquent, la bissectrice de cet angle tend à devenir perpendiculaire au rayon vecteur FM. De là je conclus que la tangente MT et la perpendiculaire FE′ menée par le foyer F sur le rayon FM du point de contact rencontrent la directrice au même point E′. Les triangles rectangles MFE′, MCE′ ont dès lors l'hypoténuse ME′ commune et les côtés MC, MF égaux l'un à l'autre; ils sont donc égaux, et l'angle E′MF est égal à l'angle E′MC, ou à son opposé au sommet TMG.

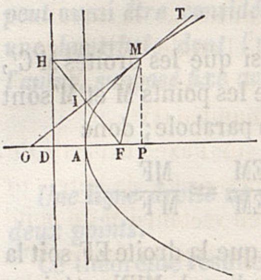
Corollaire I. — *Le point de contact M de la tangente MT et le point H où cette droite coupe l'axe de la parabole sont également éloignés du foyer.*

En effet, l'angle FMH est égal à l'angle GMT, puisque la droite MT est tangente à la parabole. Or, les angles GMT, FHM sont égaux comme correspondants; donc l'angle FMH est égal à l'angle FHM, et le côté FH du triangle FMH égal au côté FM.

Corollaire II. — *La tangente au sommet de la parabole est perpendiculaire à l'axe.*

THÉORÈME V

Le lieu géométrique des projections du foyer d'une parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.



Ce théorème résulte évidemment de ce que la parabole est la limite d'une ellipse dont l'un des foyers s'éloigne indéfiniment de l'autre, supposé fixe avec le sommet voisin (1, IV). Voici la démonstration directe de ce théorème :

Soit MT une tangente quelconque à la parabole; je mène par le point de contact M une parallèle à l'axe, et je la prolonge jusqu'au point H où elle rencontre la directrice. La tangente MT divise en deux parties égales l'angle FMH; par conséquent elle est perpendiculaire au milieu I de la base FH du triangle isocèle MFH, et le point I est la projection du foyer F sur la droite MT. Or la tangente au sommet A de la parabole est parallèle à la directrice DH, et divise la droite FD en deux parties égales; donc elle divise aussi la droite FH en deux parties égales, c'est-à-dire qu'elle passe par le point I.

Remarque. — Si l'on projette sur l'axe de la parabole la partie MO de la tangente comprise entre l'axe et le point de contact, la projection PO se nomme *sous-tangente.*

Corollaire. — *Le sommet* A *de la parabole divise en deux parties égale la sous-tangente* OP.

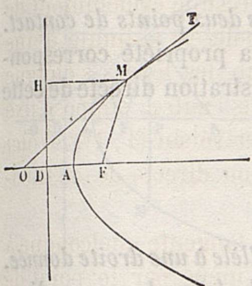
En effet, la perpendiculaire FI, abaissée du sommet F du triangle isocèle OFM (IV, c) sur la base OM, divise cette droite en deux parties égales; donc le point I est le milieu de OM. La droite AI qui est parallèle à MP passe dès lors par le milieu de OP, et le sommet A divise la sous-tangente OP en deux parties égales.

PROBLÈME II

Mener une tangente à la parabole par un point M *pris sur cette courbe.*

On peut résoudre ce problème de deux manières différentes :

1° Je mène par le point M la droite MH parallèle à l'axe jusqu'à la rencontre de la directrice en H, et je divise l'angle FMH en deux parties égales. La bissectrice MO est la tangente demandée (IV)



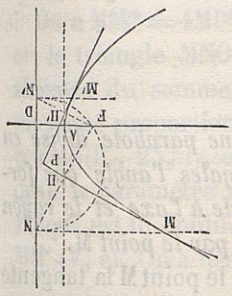
2° Je prends sur l'axe, à partir du foyer F et dans le sens FA, la longueur FO égale au rayon vecteur FM du point de contact, et je tire la droite MO. Cette ligne est tangente à la parabole, puisqu'elle fait des angles égaux avec l'axe et le rayon vecteur du point de contact (IV, c).

Cette seconde construction est plus simple que la première.

PROBLÈME III

Mener une tangente à la parabole par un point P *extérieur à cette courbe*

Je décris du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance PF de ce point au foyer F de la parabole, un cercle qui coupe la directrice en deux points N et N′; car le point P, extérieur à la parabole, est plus éloigné du foyer que de la directrice (I). Je tire ensuite les droites FN, FN′, et j'abaisse du point P les perpendiculaires PM, PM′ sur ces droites.



Les lignes PM, PM′ sont tangentes à la parabole (IV). Pour avoir leurs points de contact M, M′ je mène des parallèles à l'axe par les points N, N′, jusqu'à la rencontre de PM et PM′.

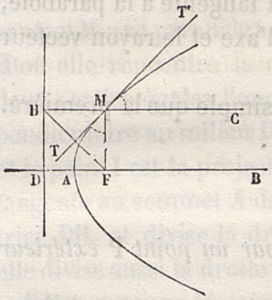
Remarque. — On peut mener par un point extérieur à la parabole deux tangentes à cette courbe.

Corollaire. — *Si d'un point* P *extérieur à la parabole on* *mène deux tangentes à cette courbe, 1° ces tangentes font des angles égaux avec la droite* PF *et la parallèle à l'axe, menée par le point* P; 2° *la droite* PF *divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs des deux points de contact.*

C'est une conséquence évidente de la propriété correspondante de l'ellipse (1, III, c). La démonstration directe de cette propriété n'offre aucune difficulté.

PROBLÈME IV

Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.

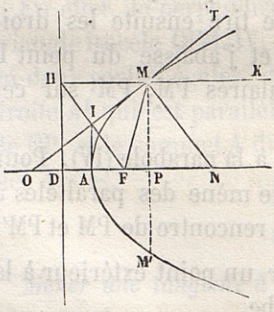


J'abaisse du foyer la perpendiculaire FH sur la droite donnée, et je la prolonge jusqu'à la rencontre de la directrice en H, puis j'élève la perpendiculaire TT' au milieu de la droite FH. Cette perpendiculaire est tangente à la parabole (V); j'obtiens son point de contact M en menant par le point H la droite HC parallèle à l'axe.

Remarque. — On ne peut mener à la parabole qu'une tangente parallèle à une droite donnée.

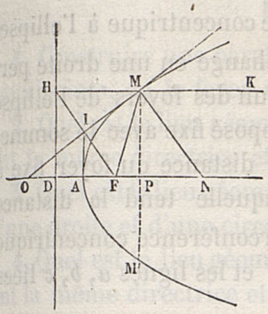
THÉORÈME VI

La normale en un point donné M *d'une parabole divise en deux parties égales l'angle que forment la parallèle à l'axe et le rayon vecteur, menés par le point* M.



Je mène par le point M la tangente MT et la droite MN perpendiculaire à cette tangente. Les angles FMO, KMT, que la droite MT fait avec le rayon vecteur FM et la droite MK parallèle à l'axe, étant égaux, leurs compléments FMN, KMN le sont aussi; donc la normale MN divise l'angle FMK en deux parties égales.

Remarque. — Si l'on projette sur l'axe de la parabole la portion MN de la normale comprise entre l'axe et la courbe, la projection PN se nomme *sous-normale.*



Corollaire I. — *Dans la parabole, la sous-normale* PN *est constante et égale au paramètre* FD.

Je prolonge la droite KM jusqu'au point H où elle coupe la directrice, et je tire la droite FH. Les deux triangles rectangles MNP, FDH sont égaux, parce qu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun : en effet, les côtés MP, HD sont parallèles et compris entre les droites parallèles DF et HM ; il en est de même des hypoténuses MN, HF qui sont l'une et l'autre perpendiculaires à la tangente MT et, dès lors, parallèles. Par conséquent, les deux autres côtés PN et FD sont égaux, c'est-à-dire que la sous-normale PN est égale au paramètre FD de la parabole.

Corollaire II. — *Le carré d'une corde* MM' *perpendiculaire à l'axe de la parabole est proportionnel à la distance* AP *de cette corde au sommet* P.

On a $MM'^2 = 4MP^2$, puisque le point P est le milieu de MM' ; or, le triangle MNO étant rectangle, la perpendiculaire MP abaissée du sommet M de l'angle droit sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments PN, PO de ce côté (P., 23, I), c'est-à-dire entre la sous-normale PN qui égale le paramètre p de la parabole (VI, c) et la sous-tangente PO qui est le double de la distance AP du sommet à la corde MM' (V, c). On a dès lors

$$MM'^2 = 8p \times AP.$$

Le rapport $\frac{MM'^2}{AP}$ égale par suite $8p$; il est donc constant.

THÉORÈME VII

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est la directrice.

Ce théorème est une conséquence du théorème correspondant de l'ellipse (1, VII).

Il est d'abord évident que le cercle concentrique à l'ellipse, et décrit avec le rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, se change en une droite perpendiculaire à l'axe focal, lorsque l'un des foyers de l'ellipse s'éloigne indéfiniment de l'autre, supposé fixe avec le sommet voisin. Je remarque ensuite que la distance du foyer fixe à cette droite est la limite vers laquelle tend la distance $\sqrt{a^2+b^2}-c$ du même foyer à la circonférence concentrique à l'ellipse, lorsqu'on suppose $c=\infty$ et les lignes a, b, c liées par les relations (II, c) :

$$a=c+\frac{p}{2},\quad b^2=p\left(c+\frac{p}{4}\right),$$

dans lesquelles p désigne la distance du foyer et du sommet fixes.

On a successivement :

$$\sqrt{a^2+b^2}-c=\frac{(\sqrt{a^2+b^2}-c)\,(\sqrt{a^2+b^2}+c)}{\sqrt{a^2+b^2}+c}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+c},$$

et, par suite,

$$\sqrt{a^2+b^2}-c=\frac{2\left(\dfrac{b^2}{c}\right)}{\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}}+1}.$$

Or, en supposant $c=\infty$, et remarquant qu'il résulte des valeurs précédentes de a et b que

$$\textit{limite}\left(\frac{a}{c}\right)=1,\quad \textit{limite}\left(\frac{b^2}{c}\right)=p,\quad \textit{limite}\left(\frac{b^2}{c^2}\right)=0,$$

on trouve :

$$\textit{limite}\,(\sqrt{a^2+b^2}-c)=\frac{2p}{1+1}=p.$$

Donc le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est la directrice.

Remarque. — La démonstration directe de cette proposition n'offre aucune difficulté; elle conduit à ces deux conséquences remarquables : 1° *La droite qui joint les points de contact des côtés de chaque angle droit passe par le foyer*; 2° *cette droite est perpendiculaire à celle qui joint le foyer au sommet de l'angle.*

PROBLÈMES

1. Construire une parabole dont on connaît la directrice et deux points, ou le foyer et deux points.

2. Quel est le lieu géométrique des foyers des paraboles qui ont la même directrice et un point commun?

3. Quel est le lieu géométrique des points également distants d'une droite et d'une circonférence de cercle?

4. Quel est le lieu géométrique des foyers des paraboles qui ont la même directrice et une tangente commune? — Trouver le lieu géométrique des sommets des mêmes paraboles.

5. Construire une parabole dont on connaît la directrice et deux tangentes, ou le foyer et deux tangentes.

6. Tracer une parabole dont on connaît la tangente au sommet et deux autres tangentes.

7. Quel est le lieu des foyers des paraboles qui ont trois tangentes communes?

8. Décrire une parabole qui touche quatre droites données.

9. Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une parabole donnée par son foyer et sa directrice.

10. Décrire une parabole dont on connaît un point, une tangente et le foyer ou la directrice. — Cas particulier dans lequel le point donné est sur la tangente.

11. Les carrés des perpendiculaires abaissées du foyer sur deux tangentes à la parabole sont proportionnels aux rayons vecteurs des deux points de contact.

12. Inscrire un cercle dans un segment de parabole déterminé par une corde perpendiculaire à l'axe.

13. Quel est le lieu géométrique des points tels que la somme ou la différence des distances de chacun d'eux à un point et à une droite fixes soit constante?

14. Si par le foyer d'une parabole on mène une perpendiculaire à son axe, et que l'on prenne, à partir du foyer, sur cette perpendiculaire, deux longueurs égales, le trapèze formé en abaissant de leurs extrémités des perpendiculaires sur les tangentes est constant.

15. Si des différents points N d'une tangente CM à une parabole on mène deux droites, l'une FN au foyer F et l'autre NB tangente, l'angle FNB de ces deux droites est constant.

16. Si des différents points K d'une corde de contact de deux tangentes AC, AB à une parabole, on mène deux parallèles KD, KE aux deux tangentes, il en résulte un parallélogramme dont la diagonale DE est tangente à la parabole.

17. La distance du foyer d'une parabole au sommet d'un angle circonscrit à cette courbe est moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs des points de contact des côtés de cet angle.

18. Si un angle est circonscrit à une parabole, une tangente mobile coupe les deux côtés de cet angle en deux points tels que le produit de leurs distances au foyer de la parabole est directement proportionnel à la distance du foyer au point de contact de la tangente mobile.

19. Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer à deux sommets opposés du quadrilatère est égal au produit des distances du foyer aux deux autres sommets.

20. Étant donnés sur un plan deux points fixes A, B et un système de paraboles ayant le même foyer F, si l'on mène par les points A et B quatre tangentes à l'une de ces paraboles, le produit des rayons vecteurs des quatre points de contact est constant, quelle que soit la parabole que l'on considère.

21. Si deux points d'une parabole sont en ligne droite avec le foyer de cette courbe, le produit de leurs distances à la directrice est dans un rapport constant avec la longueur de la droite qui joint ces deux points.

22. Des extrémités M et M' d'une corde passant par le foyer F d'une parabole, on abaisse les perpendiculaires MP, M'P' sur une droite fixe, située dans le plan de la parabole, et l'on propose de démontrer que la somme $\frac{MP}{MF}+\frac{M'P'}{M'F'}$ est constante.

23. Si une sphère est inscrite dans un cône, tout plan tangent à cette sphère et parallèle à une seule génératrice du cône coupe la surface conique suivant une parabole. Cette

courbe a pour foyer le point de contact du plan tangent, et pour directrice l'intersection du plan tangent et du plan de la circonférence suivant laquelle le cône touche la sphère.

24. La perspective d'un cercle sur un plan non parallèle à celui du cercle est une ellipse, ou une hyperbole, ou bien une parabole. — On démontrera ce théorème en supposant l'œil placé en un point de la perpendiculaire élevée par le centre du cercle sur son plan.

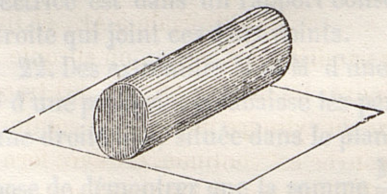
SEPTIÈME ET HUITIÈME LEÇON

Programme : Définition de l'hélice, considérée comme résultant de l'enroulement du plan d'un triangle rectangle sur un cylindre droit à base circulaire — La tangente à l'hélice fait avec l'arête du cylindre un angle constant. — Construire la projection de l'hélice et de sa tangente sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre.

DÉFINITIONS

1. On appelle *surface développable* toute surface qu'on peut étendre sur un plan sans déchirure ni duplicature.

Une surface engendrée par le mouvement d'une ligne droite est développable, si deux positions consécutives quelconques de cette génératrice rectiligne sont comprises dans un même plan. Telles sont les surfaces cylindriques et les surfaces coniques.

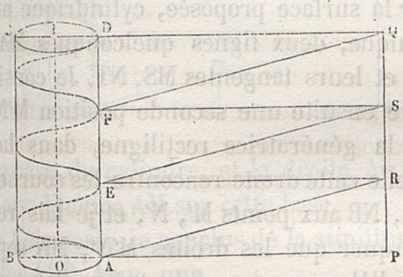


Si l'on pose un cylindre droit à base circulaire sur un plan, de manière qu'il le touche par sa surface convexe, il est évident qu'après avoir fendu cette surface suivant une position de sa génératrice rectiligne, et l'avoir détachée des deux bases du cylindre, on peut l'étendre sur le plan de sorte qu'elle prenne la forme d'un rectangle, ayant pour base une droite égale à la circonférence de la base du cylindre et pour hauteur la hauteur même de ce corps. On énonce ordinairement ce fait de la manière suivante : *Le développement de la surface convexe d'un cylindre droit sur un plan est un rectangle qui a pour dimensions la hauteur du cylindre et la longueur de la circonférence de sa base.*

2. On démontre dans le cours supérieur de mathématiques, et j'admettrai comme évident, que *les tangentes menées par un point d'une surface courbe à toutes les lignes qu'on peut tracer par ce point sur cette surface sont comprises dans un même plan.* Ce plan s'appelle *plan tangent.*

Il résulte de cette définition que, pour mener un plan tangent à une surface en un point donné M, il suffit de mener les tangentes à deux lignes tracées par ce point sur la surface, et de faire passer un plan par ces deux tangentes. — Si la surface peut être engendrée par le mouvement d'une ligne droite, comme le cylindre et le cône, le plan tangent en un point quelconque de cette surface contient la génératrice rectiligne qui passe par ce point; car cette ligne est elle-même sa tangente.

3. Soit ADQP le rectangle qu'on obtient en développant sur un plan la surface convexe du cylindre droit ABCD à base circulaire. Si l'on divise sa hauteur AD en parties égales AE, EF,.., et, qu'après avoir pris sur le côté opposé PQ une longueur PR égale à AE, et tiré



la droite AR, ainsi que ses parallèles ES, FQ,... on enroule le rectangle ADQP sur le cylindre; les droites AR, ES, FQ traceront sur la surface convexe du cylindre une courbe continue qu'on appelle *hélice*. Cette courbe est continue, car l'arc formé par la droite AR vient aboutir au point E où commence celui qui forme la droite ES; et ainsi de suite.

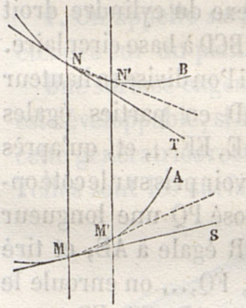
Chacun des arcs AR, ES... de l'hélice, qui ont leurs extrémités sur la même génératrice AD de la surface cylindrique et font le tour entier du cylindre, se nomme *spire*. On appelle *pas de l'hélice* la portion constante AE de la génératrice AD, comprise entre les extrémités d'une spire. La longueur de la circonférence de la base du cylindre, la longueur d'une spire de l'hélice tracée sur ce cylindre et le pas de cette hélice sont les trois côtés du triangle rectangle APR, dont l'enroulement sur le cylindre produit la spire AR. La connaissance de deux des éléments de ce triangle rectangle suffit donc à la détermination de l'hélice.

Il est important de remarquer que la droite AR et ses parallèles ES, FQ font le même angle avec toutes les génératrices de la surface du cylindre; cet angle n'est autre que ARP.

THÉORÈME I

Le plan, tangent à une surface cylindrique ou conique en un point donné M, *est aussi tangent à cette surface en tout autre point* N *de la génératrice rectiligne* MN *qui passe par le point* M.

Pour démontrer ce théorème, je trace par les points M et N sur la surface proposée, cylindrique ou conique, deux lignes quelconques MA, NB et leurs tangentes MS, NT. Je considère ensuite une seconde position M'N' de la génératrice rectiligne, dans laquelle cette droite rencontre les courbes MA, NB aux points M', N', et je fais remarquer que les droites M'N', MN sont parallèles ou concourantes, selon que la surface proposée est cylindrique ou conique. Ces droites se trouvent dès lors dans un même plan qui contient les sécantes MM', NN'. Si je fais tourner ce plan autour de MN jusqu'à ce que la génératrice ait passé de la position M'N' à la position MN, alors les sécantes MM', NN' coïncident respectivement avec les tangentes MS, NT. Ces tangentes sont donc comprises dans un même



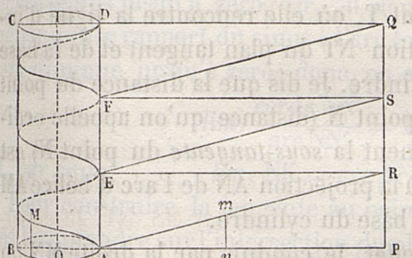
plan avec la droite MN, et le plan MNT tangent au point N coïncide avec le plan NMS tangent au point M.

Corollaire. — Pour mener un plan tangent à un cylindre ou à un cône en un point donné M, il suffit de tracer par ce point la génératrice rectiligne de la surface cylindrique ou conique jusqu'à la rencontre de la base, et de mener ensuite la tangente à la base par le point d'intersection; le plan déterminé par la génératrice et cette tangente sera le plan tangent demandé.

THÉORÈME II

La distance d'un point M *de l'hélice à la base du cylindre est proportionnelle à l'arc* MA *de cette courbe, compris entre la base du cylindre et le point* M; *elle est aussi proportionnelle à la projection* AN *de cet arc sur la base.*

En effet, soit m la position du point M sur la droite AR, lorsqu'on développe la surface du cylindre sur le plan DAP; je tire du point m une parallèle à RP et je la prolonge jusqu'au point n où elle rencontre AP. La droite mn est égale à la distance MN du point M à sa base du cylindre, et la droite An égale à la projection de l'arc d'hélice AM sur cette base.



Cela posé, je conclus de la similitude des triangles rectangles ARP, Amn, que

$$\frac{mn}{RP} = \frac{Am}{AR} = \frac{An}{AP}.$$

Or, les dénominateurs RP, AR, AP de ces rapports égaux sont constants, quelle que soit la position du point M; donc leurs numérateurs mn, Am, An sont directement proportionnels.

Corollaire. — Si je désigne par l la longueur AR d'une spire, par h le pas RP de l'hélice et par R le rayon OA du cylindre, j'aurai $$mn = \frac{h}{l} \times Am$$

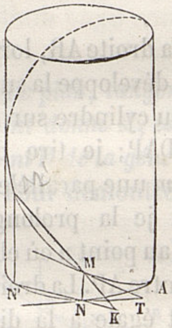
et $$mn = \frac{h}{2\pi R} \times An.$$

Remarque. — La projection An de l'arc d'hélice AM sur la base du cylindre est égale à l'arc de cercle AN, lorsque le point M se trouve sur la première spire. Dans l'hypothèse contraire, la droite An surpasse l'arc AN d'autant de circonférences que l'arc d'hélice AM fait de fois le tour entier du cylindre.

PROBLÈME I

Mener une tangente à l'hélice par un point pris sur cette courbe.

Soit MT la tangente au point M de l'hélice AMM′; cette droite est située dans le plan MNT qui touche le cylindre suivant la génératrice MN (déf. 2). Pour la tracer, il suffit dès lors de connaître le point T, où elle rencontre la ligne d'intersection NT du plan tangent et de la base du cylindre. Je dis que la distance du point T au point N (distance qu'on appelle ordinairement la *sous-tangente* du point N) est égale à la projection AN de l'arc d'hélice AM sur la base du cylindre.



En effet, je conduis par la droite MN un plan qui coupe la surface du cylindre suivant une seconde génératrice M′N′; soient M′ et N′ les points d'intersection de cette droite avec l'hélice et la circonférence de la base du cylindre. Je tire les sécantes MM′, NN′ qui se rencontrent au point K, et je remarque qu'en faisant tourner le plan MNM′N′ autour de la droite MN jusqu'à ce que la génératrice M′N′ se confonde avec MN, les sécantes KMM′, KNN′ deviennent simultanément tangentes, la première à l'hélice et la seconde à la circonférence de la base du cylindre. Par conséquent, la sous-tangente NT est la limite vers laquelle tend la longueur variable NK. Cela posé, de la similitude des triangles MNK, M′N′K, je déduis l'égalité suivante :

$$\frac{NK}{NM} = \frac{N'K}{N'M'};$$

par une propriété de l'hélice démontrée précédemment (III), j'ai aussi :

$$\frac{MN}{arc\ AN} = \frac{M'N'}{arc\ AN'}.$$

En multipliant ces deux égalités membre à membre, je trouve :

$$\frac{NK}{arc\ AN} = \frac{N'K}{arc\ AN'},$$

et, par suite, $$\frac{NK}{arc\ AN} = \frac{N'K - NK}{arc\ AN' - arc\ AN},$$

ou bien $$\frac{NK}{arc\ AN} = \frac{corde\ NN'}{arc\ NN'}.$$

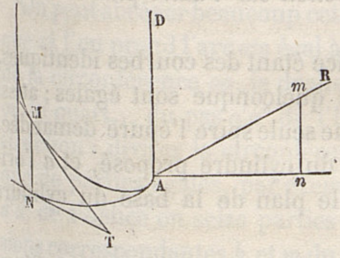
Si je suppose maintenant que le point M′ vienne coïncider avec le point M, l'arc de cercle NN′ et sa corde décroissent en même temps jusqu'à zéro. Or, on démontre dans la trigonométrie que le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité, lorsque l'arc diminue jusqu'à zéro; donc, on a aussi :

$$lim.\ \frac{corde\ NN'}{arc\ NN'} = 1,$$

et, par suite, $$lim.\ NK = arc\ AN.$$

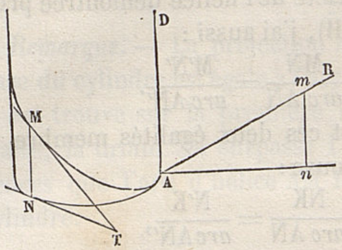
Pour construire la tangente au point M de l'hélice, il faut dès lors prendre sur l'intersection du plan tangent et de la base du cylindre, à partir du point N et dans le sens de l'arc NA, une longueur NT égale à cet arc, et tirer ensuite la droite MT.

Corollaire. — *La tangente à l'hélice fait un angle constant avec la génératrice du cylindre, menée par le point de contact.*



Soient MT la tangente au point M de l'hélice AM et NT sa projection sur le plan de la base; la droite NT étant égale à la longueur de l'arc AN, si je prends sur le développement rectiligne AR de l'hélice une longueur Am égale à l'arc AM de cette courbe, et que j'abaisse du point m la perpendiculaire mn sur la base An du rectangle suivant lequel se développe la surface du cylindre, j'aurai

$$An = arc\ AN = NT.$$



Donc les triangles MNT, mnA, qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux entre eux ; l'angle TMN est, par suite, égal à l'angle Amn, c'est-à-dire à l'angle constant sous lequel la droite AR, qui engendre l'hélice, coupe toutes les génératrices du cylindre.

Lorsque l'angle Amn est connu, cette propriété de la tangente à l'hélice permet d'éviter la rectification de l'arc AN pour tracer cette droite. En effet, on peut alors mener par le point M, dans le plan tangent, la droite MT, de manière qu'elle fasse avec la génératrice MN l'angle NMT égal à l'angle Amn.

PROBLÈME II

Construire la projection de l'hélice et de sa tangente sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre.

Dans la résolution de ce problème, je ferai usage des principes suivants de géométrie descriptive* :

1° *La droite qui joint les deux projections d'un même point de l'espace est perpendiculaire à la ligne de terre.*

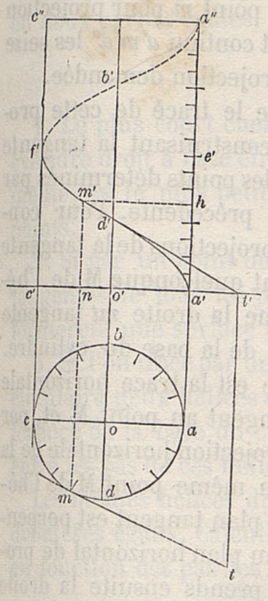
2° *La distance d'un point à l'un des plans de projection est égale à la distance de sa projection sur l'autre plan à la ligne de terre.*

Les spires d'une même hélice étant des courbes identiques, leurs projections sur un plan quelconque sont égales ; aussi je réduirai à la projection d'une seule spire l'épure demandée.

Soient le cercle oa la base du cylindre proposé, et a l'origine de l'hélice ; je prends le plan de la base du cylindre

* Voir leur démonstration dans mes *Applications de la Géométrie élémentaire* (Cours de seconde).

pour plan horizontal de projection, et je choisis le plan vertical de telle sorte que la ligne de terre $a'c'$ soit parallèle au diamètre ac de la base. Le cylindre étant droit par hypothèse, il a pour projection horizontale le cercle oa, et pour projection verticale le rectangle $a'c'c''a''$, dont la base est égale au diamètre ac du cercle oa, et dont la hauteur est égale au pas $a'a''$ de l'hélice.

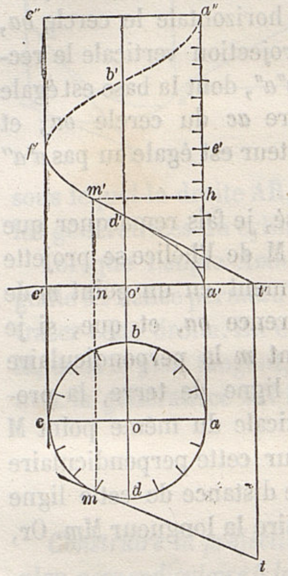


Cela posé, je fais remarquer que tout point M de l'hélice se projette horizontalement en un point m de la circonférence oa, et que, si je tire du point m la perpendiculaire mn sur la ligne de terre, la projection verticale du même point M se trouve sur cette perpendiculaire au-dessus de la ligne de terre et à une distance de cette ligne égale à Mm; il s'agit donc de construire la longueur Mm. Or, on a (III) :

$$\frac{\mathrm{M}m}{arc\ \mathrm{M}a} = \frac{a'a''}{cir.\ oa};$$

par conséquent, la ligne Mm est une quatrième proportionnelle à trois lignes connues. En construisant cette droite et prenant nm' égale à sa longueur, j'aurai la projection verticale m' du point M.

On peut abréger beaucoup cette construction, en remarquant que si l'on prend l'arc am égal à la moitié, au tiers, au quart... de la circonférence oa, la droite Mm sera la moitié, ou le tiers, ou le quart... du pas $a'a''$ de l'hélice. De là résulte cette construction : divisez la circonférence oa en un nombre quelconque de parties égales, par exemple seize; divisez aussi le pas $a'a''$ de l'hélice en seize parties égales, et menez par les divisions correspondantes h et m du pas et de la circonférence une parallèle et une perpendiculaire à la ligne de terre. Ces deux droites se rencontrent en un point m', qui sera la projection verticale du point de l'hélice ayant le point m pour projection horizontale. En réunissant par un trait continu $a'm'a''$ les seize points ainsi obtenus, vous aurez la projection demandée.



On rectifie le tracé de cette projection en construisant la tangente en chacun des points déterminés par la méthode précédente. Pour construire les projections de la tangente en un point quelconque M de l'hélice, je mène la droite mt tangente au point m de la base du cylindre. Cette droite est la trace horizontale du plan tangent au point M et, par suite, la projection horizontale de la tangente au même point M de l'hélice; car le plan tangent est perpendiculaire au plan horizontal de projection. Je prends ensuite la droite mt égale à l'arc am, c'est-à-dire à la sous-tangente du point M (Prob. I); par conséquent, le point t est la trace horizontale de la tangente. Je projette ce point sur la ligne de terre, et je tire la droite $m't'$; cette droite est la projection verticale de la tangente MT.

Il est facile de reconnaître, 1° que la courbe $a'm'a''$ est symétrique par rapport à la droite qui joint les milieux e', f' des côtés $a'a''$, $c'c''$ du rectangle $a'c'c''a''$; 2° qu'elle est tangente à ses côtés dans les points a', a'' et f'; 3° que la tangente au point d', qui divise en deux parties égales la moitié $a'f'$ de la courbe $a'm'a''$, coupe cette courbe, c'est-à-dire que l'arc $a'd'$ est au-dessous de cette tangente et l'arc $d'f'$ au-dessus; et qu'il en est de même de la tangente au point b' de l'arc $f'a''$; 4° que la distance d'un point quelconque m' de la courbe $a'm'a''$ à la projection verticale $b'd'$ de l'axe du cylindre est proportionnelle au cosinus de l'arc de cercle am; 5° que chacun des points d', b' est un centre de la courbe $a'f'a''$, c'est-à-dire que toute corde qui passe par l'un de ces points sera divisée par lui en deux parties égales.

PROBLÈMES

1. Le plus court chemin de deux points de la surface d'un cylindre droit à base circulaire, mesuré sur cette surface elle-même, est le plus petit des arcs d'hélice qui joint ces deux points.

2. Si par un point de l'espace on mène des parallèles aux tangentes de tous les points d'une spire d'hélice, ces droites formeront une surface conique de révolution.

3. Si l'on trace par un point d'une surface cylindrique à base circulaire deux hélices qui se coupent à angle droit, la circonférence de la base du cylindre sera moyenne proportionnelle entre les pas de ces hélices.

Les mêmes hélices divisent la surface du cylindre en quadrilatères égaux. Calculer l'aire de l'un de ces quadrilatères en fonction des pas des deux hélices.

FIN DES COURBES USUELLES

COMPLÉMENT DE GÉOMÉTRIE

EXIGÉ POUR L'ADMISSION
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

FIGURES TRACÉES SUR LA SPHÈRE

CHAPITRE I

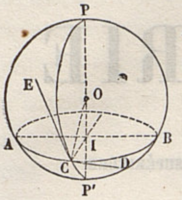
Du triangle et de la pyramide sphériques.

PROGRAMME : Dans tout triangle sphérique, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres. — Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est un arc de grand cercle. — Mesure de l'angle de deux arcs de grands cercles. — Propriétés du triangle polaire ou supplémentaire. — Deux triangles sphériques, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux dans toutes leurs parties : 1° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; 2° lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; 3° lorsqu'ils sont équilatéraux entre eux; 4° lorsqu'ils sont équiangles entre eux. Dans ces différents cas, les triangles sont égaux ou symétriques. — La somme des angles de tout triangle sphérique est plus grande que deux angles droits, et moindre que six. — Ce qu'on appelle *excès sphérique*.

THÉORÈME I

Si, par le pôle P *d'une circonférence quelconque* AB *tracée sur une sphère* OP, *on mène une circonférence de grand cercle, ces deux lignes courbes sont perpendiculaires l'une sur l'autre,* c'est-à-dire qu'elles se coupent en formant un angle droit; *et réciproquement.*

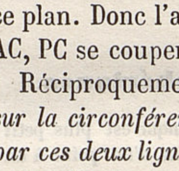
Je trace une circonférence de grand cercle par le pôle P et un point quelconque C de la circonférence AB, et je dis que ces deux courbes font un angle droit au point C. Je remarque d'abord que leurs plans sont perpendiculaires (6, I); car le plan du grand cercle PC contient la perpendiculaire élevée par le centre I du cercle AB sur le plan de ce cercle, puisque cette droite passe par le pôle P et le centre O de la sphère.



Cela posé, je mène par le point C les tangentes CD, CE aux deux cercles AB, PC. La droite CD est perpendiculaire au rayon IC du cercle AB, c'est-à-dire à l'intersection des deux plans ABC, PCI; par conséquent, elle est aussi perpendiculaire au plan PCI (6, II), et à la droite CE qui passe par son pied dans ce plan. Donc l'angle DCE, sous lequel les deux circonférences AC, PC se coupent, est droit.

Réciproquement, le *pôle de la circonférence* AB *se trouve sur la circonférence de grand cercle* PC, *si l'angle* DCE, *formé par ces deux lignes, est droit.*

En effet, la droite OI qui joint le centre de la sphère au centre du cercle AB étant perpendiculaire au plan ABC (I, Rem.), et le rayon IC étant aussi perpendiculaire à la tangente CD, il résulte du théorème des trois perpendiculaires que le rayon OC du grand cercle PC est perpendiculaire à la droite CD. Or, cette droite CD fait par hypothèse un angle droit avec la tangente CE; donc le plan OCE, c'est-à-dire le plan du grand cercle PC est perpendiculaire à CD et, par suite, au plan ABC; il contient dès lors le diamètre OI de la sphère et le pôle P de la circonférence AB.



Corollaire. — *Par un point* A *de la surface d'une sphère on ne peut mener qu'une circonférence de grand cercle* BAB' *perpendiculaire à une circonférence* BCD *tracée sur cette sphère.*

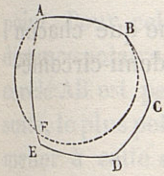
Car on ne peut mener qu'une circonférence de grand cercle par le point A et le pôle P du cercle BCD, à moins que ces deux points ne coïncident.

Soient B et B' les intersections des deux circonférences; si l'on ne considère que les arcs moindres qu'une demi-circonférence, et qu'il en soit ainsi des deux arcs AB, APB′, il résulte de ce corollaire qu'*on peut mener d'un point* A *donné sur une sphère deux arcs de grand cercle* AB,APB′, *perpendiculaires à une circonférence* BCD, *tracée sur cette sphère, et qu'on ne peut en mener que deux.*

THÉORÈME II

Chaque côté d'un polygone sphérique convexe ABCDE *est moindre que la moitié de la circonférence d'un grand cercle.*

Car si on supposait un côté quelconque AE de ce polygone plus grand qu'une demi-circonférence de grand cercle, l'arc AB prolongé rencontrerait AE en un second point F, situé entre les points A et E, de sorte que le polygone sphérique ne serait pas tout entier d'un même côté de la circonférence AB ; ce qui contredit l'hypothèse. Donc, etc.



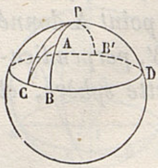
Remarque I. — La réciproque de ce théorème est fausse.

Remarque II. — On ne considère ordinairement que des polygones sphériques convexes ; par conséquent, chacun de leurs côtés est moindre qu'une demi-circonférence de grand cercle.

THÉORÈME III

Une circonférence quelconque BCD *et un point* A *extérieur à cette courbe étant donnés sur une sphère, si l'on mène de ce point les deux arcs de grands cercles* AB, AB′ *perpendiculaires et l'arc de grand cercle* AC *oblique à la circonférence* BCD, *l'arc oblique est plus grand que l'un des deux arcs* AB, AB′ *et plus petit que l'autre.*

1° Soit P le pôle de la circonférence BCD ; ce point se trouve sur la circonférence de grand cercle BAB′, qui est perpendiculaire à BCD par hypothèse (16, IV). En le joignant au point C par un arc de grand cercle, on forme le triangle sphérique PAC, dans lequel la somme des deux côtés PA, AC est plus grande que le troisième côté PC (II). Mais l'arc PC est égal à l'arc PB, puisque le point P est le pôle du cercle BCD; on a donc



$$PA + AC > PA + AB,$$

et, par suite, $AC > AB$.

2° Dans le même triangle PAC, le côté AC est plus petit que la somme des deux autres PA, PC; or, l'arc PC est égal à l'arc PB', puisque le point P est le pôle du cercle BCD; on a donc

$$AC < PA + PB',$$

ou

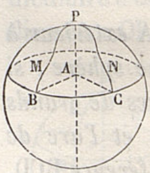
$$AC < AB'.$$

Remarque. — On suppose dans ce théorème que chacun des arcs AB, AB' et AC est moindre qu'une demi-circonférence.

THÉORÈME IV

Les plus courts chemins du pôle P *d'une circonférence* BC *aux différents points de cette courbe, sur la surface de la sphère, sont égaux entre eux.*

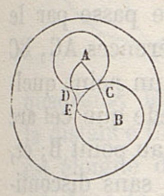
Soient PMB, PNC les plus courts chemins du pôle P à deux points quelconques B et C de la circonférence BC; je dis que ces lignes ne peuvent être inégales. En effet, si on supposait l'une, par exemple PMB, plus courte que l'autre PNC, et qu'on la fît tourner sur le diamètre PA de la sphère comme axe, elle engendrerait une surface de révolution qui ne serait autre que la zone PBC, puisque tous ses points sont également éloignés du centre de la sphère. L'extrémité B de cette ligne, décrivant la circonférence BC, passerait donc par le point C; mais ce point serait alors joint au pôle par une ligne plus courte que PNC, ce qui est contraire



à l'hypothèse. Par conséquent, les plus courts chemins PMB, PNC du pôle P aux deux points B et C de la circonférence BC sont égaux.

THÉORÈME V

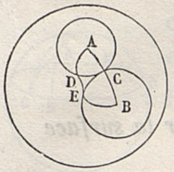
Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface a sphère est un arc de grand cercle.



Soient A et B deux points de la surface d'une sphère; je les joins par un arc de grand cercle que je suppose d'abord moindre qu'une demi-circonférence, et je dis que cet arc est le plus court chemin du point A au point B sur la surface de la sphère.

En effet, je prends un point quelconque C de l'arc AB, et je vais démontrer que le plus court chemin cherché passe par ce point. Pour cela je décris du point A comme pôle, avec la distance polaire AC, une circonférence à laquelle l'arc de grand cercle AB est perpendiculaire (E., 17, IV); l'arc BC est, par suite, le plus petit de tous les arcs de grands cercles qu'on peut mener à cette circonférence (III). Si je décris dès lors une circonférence du point B comme pôle, avec la distance polaire BC, cette courbe n'aura que le point C commun avec la circonférence AC et lui sera extérieure.

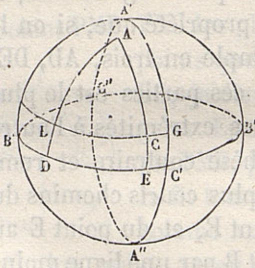
Cela posé, je représente pour un instant le plus court chemin du point A au point B sur la sphère par la ligne ADEB, et je fais remarquer qu'il jouit de cette propriété que, si on le divise en plusieurs parties, par exemple en trois, AD, DE, EB, par les points D et E, chacune de ces parties est le plus court chemin pour aller de l'une de ses extrémités à l'autre sur la sphère; car, en faisant l'hypothèse contraire et remplaçant les lignes AD, DE, ED par les plus courts chemins du point A au point D, du point D au point E, et du point E au point B, on joindrait le point A au point B par une ligne moins longue que ADEB; ce qui est impossible, d'après la première hypothèse. De là je conclus que le plus court chemin du point A au point B est décomposé, par les deux circonférences AC, BC, en trois parties, qui sont : 1° le plus court chemin du point A à la circonférence AC; 2° le plus court chemin du point B à la circonférence BC; 3° le plus court chemin de l'une des circonférences AC, BC à l'autre. Or, le pôle A est également distant des points de la circonférence AC (IV); le pôle B est aussi également distant des points de la circonférence BC; donc le plus court chemin du point A au point B sur la sphère passe par le point C, puisque la distance des deux circonférences AC, BC est nulle pour ce point seul. Le point C étant un point quelconque de l'arc AB, il résulte de ce qui précède que cet arc fait partie du plus court chemin du point A au point B; et, comme il joint ces deux points l'un à l'autre sans discontinuité, il est le plus court chemin cherché.



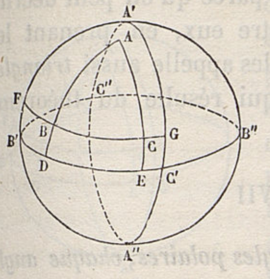
Je suppose, en second lieu, que les points A, B soient les extrémités d'un même diamètre de la sphère; les circonférences AC, BC, décrites de ces points comme pôles, coïncident alors dans toute leur étendue, de sorte que le plus court chemin du point A au point B est l'une quelconque des demi-circonferences de grands cercles qu'on peut mener par les deux points A et B.

THÉORÈME VI

Un triangle sphérique ABC *étant donné, si des sommets* A, B, C, *comme pôles, on décrit les circonférences de grands cercles* B′C′B″C″, C′A′C″A″, A′B′A″B″, *ces lignes divisent la surface de la sphère en huit triangles sphériques, tels que les sommets de chacun d'eux sont les pôles des côtés du triangle* ABC.



1° Les deux circonférences de grands cercles B′C′B″C″, C′A′C″A″ divisent évidemment en quatre triangles la surface de chacun des deux hémisphères déterminés par le plan de la troisième circonférence A′B′A″B″; par conséquent, la surface de la sphère est partagée en huit triangles sphériques ayant pour sommets les six points d'intersection A′, A″, B′, B″, C′, C″ des trois circonférences de grands cercles A′B′, B′C′ et C′A′.



2° Soit A′B″C′ l'un de ces triangles; je dis que les sommets A′, B″, C′ sont les pôles des côtés BC, CA, AB du triangle ABC. En effet, le point B étant le pôle de la circonférence A′C′, la distance BA′ est un quadrans; le point C étant le pôle de la circonférence A′B′, la distance CA′ égale aussi un quadrans. Dès lors le point A′ est éloigné d'un quadrans de chacun des points B et C; il est donc le pôle de l'arc BC. Je démontrerais de même que le sommet B″ est le pôle de l'arc AC et le sommet C′ le pôle de l'arc AB.

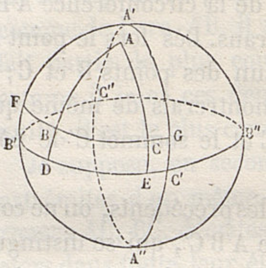
Remarque. — Parmi les huit triangles précédents, on ne considère ordinairement que le triangle A′B′C′, qui se distingue des sept autres parce qu'il a son sommet A′ du même côté de l'arc BC que le point A, son sommet B′ du même côté de l'arc AC que le point B, et son sommet C′ du même côté de l'arc AB que le point C.

Réciproquement, je dis que, parmi les huit triangles sphériques qu'on formerait en décrivant trois circonférences de grands cercles des sommets du triangle A′B′C′ comme pôles, le triangle ABC est celui qui jouit des mêmes propriétés par rapport au triangle A′B′C′. En effet, pour démontrer que le sommet A du triangle ABC se trouve du même côté de l'arc B′C′ que le point A′, il suffit de remarquer que les deux points A, A′ étant, par hypothèse, dans le même hémisphère terminé par la circonférence BC dont le point A′ est le pôle, la plus courte distance du point A′ au point A est moindre qu'un quadrans; il en résulte que ces deux points doivent se trouver d'un même côté de la circonférence de grand cercle B′C′, décrite du point A comme pôle. Je prouverais de même que le triangle ABC a son sommet B du même côté de l'arc A′C′ que le point B′, et son sommet C du même côté de l'arc A′B′ que le point C′.

Legendre a donné aux deux triangles sphériques ABC, A′B′C′ le nom de *triangles polaires*, parce qu'on peut décrire les côtés de l'un quelconque d'entre eux, en prenant les sommets de l'autre pour pôles. On les appelle aussi *triangles supplémentaires* pour une raison qui résulte du théorème suivant.

THÉORÈME VII

Si ABC *et* A′B′C′ *sont deux triangles polaires, chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure l'excès d'une demi-circonférence sur le côté opposé dans l'autre triangle.*



Je prolonge les côtés AB, AC de l'angle A du triangle ABC jusqu'aux points D et E, où ils rencontrent le côté B′C′ du triangle A′B′C′. Le point A étant le pôle de l'arc B′C′, l'angle BAC a pour mesure l'arc DE compris entre ses côtés (E, 20, V); je dis que DE est égal à l'excès d'une demi-circonférence sur l'arc B′C′. En effet, l'arc EB′ est un quadrans, puisque le point B′ est le pôle du côté AC; pareillement l'arc DC′ est un quadrans, car le point C′ est le pôle du côté AB. La somme des deux arcs EB′, DC′ égale donc une demi-circonférence. Si de l'arc EB′ je retranche DB′, et que j'ajoute la même longueur à l'arc DC, la somme des deux arcs EB′, DC′ n'est pas changée; j'ai dès lors

$$DE + B'C' = EB' + DC' = \frac{1}{2}\,circonf.,$$

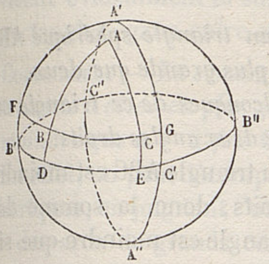
et, par suite,

$$DE = \frac{1}{2}\,circonf. - B'C'.$$

Je démontrerais de même que chacun des deux autres angles B, C du triangle ABC a pour mesure l'excès d'une demi-circonférence sur le côté qui lui est opposé dans le triangle A′B′C′.

Je considère, en second lieu, l'angle A′ du triangle A′B′C′;

soient F et G les points d'intersection de ses côtés A′B′, A′C′ et de l'arc BC prolongé. Le point A′ étant le pôle de BC, l'angle B′A′C′ a pour mesure l'arc FG compris entre ses côtés. Or, chacun des arcs BG et CF est un quadrans, puisque le point B est le pôle de l'arc A′C′, et le point C le pôle de l'arc A′B′; par conséquent, la somme BG + CF égale une demi-circonférence. Mais cette somme égale aussi BC + FG; donc BC + FG est une demi-circonférence, et l'arc FG égale l'excès d'une demi-circonférence sur le côté BC du triangle ABC. Je ferais la même démonstration pour les deux autres angles B′ et C′ du triangle A′B′C′.



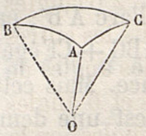
Remarque. — Cette propriété du triangle A′B′C′ appartient aussi à son symétrique A″B″C″, puisque ces triangles ont les côtés égaux et les angles égaux chacun à chacun; mais elle n'est pas commune aux six autres triangles qu'on obtient en décrivant les trois circonférences des grands cercles B′C′B″C″, C′A′C″A″, A′B′A″B″, des sommets A, B, C, du triangle ABC comme pôles. Ainsi, par exemple, l'angle BAC a pour mesure le côté B″C′ qui lui est opposé dans le triangle A′B″C′, et non pas l'excès d'une demi-circonférence sur ce côté; car l'arc C′B″ est égal à l'excès de la demi-circonférence B′C′B″ sur l'arc C′B′ ou à l'arc ED qui sert de mesure à l'angle BAC. L'angle C du triangle ABC a aussi pour mesure le côté A′B″ qui lui est opposé dans le triangle A′C′B″; mais l'angle B a pour mesure l'excès d'une demi-circonférence sur le côté A′C′ qui lui est opposé dans le même triangle A′C′B″.

Le théorème précédent explique le choix qu'on a fait du triangle A′B′C′ parmi les huit triangles que les trois circonférences B′C′B″C″, A′C′A″C″, A′B′A″B″ déterminent sur la sphère, et justifie le nom de *triangles supplémentaires*, donné aux deux triangles ABC, A″B″C″.

THÉORÈME VIII

1° *La somme des trois angles d'un triangle sphérique* ABC *est moindre que six angles droits et plus grande que deux.*

2° *La somme de deux angles quelconques de ce triangle est moindre que le troisième augmenté de deux angles droits.*



1° Chaque angle du triangle ABC est moindre que deux angles droits; donc la somme des trois angles de ce triangle est moindre que six angles droits.

Si on désigne par A, B, C les nombres de degrés contenus dans les mesures des angles BAC, ABC, ACB du triangle proposé, les côtés du triangle supplémentaire sont respectivement égaux à

$$180^\circ - A,\ 180^\circ - B,\ 180^\circ - C.$$

Or, la somme de ces côtés est moindre qu'une circonférence (E, 20, VI); par conséquent on a

$$180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ,$$

et l'on en déduit :

$$A + B + C > 180^\circ.$$

Donc la somme des trois angles du triangle sphérique ABC est plus grande que deux angles droits.

2° Chaque côté du triangle supplémentaire étant moindre que la somme des deux autres (E, 20, VI), on a aussi :

$$180^\circ - A < 180^\circ - B + 180^\circ - C,$$

d'où l'on tire :

$$B + C < A + 180^\circ;$$

la somme de deux angles quelconques B et C du triangle ABC est donc moindre que le troisième A, augmenté de deux angles droits.

Remarque. — On appelle *excès sphérique* d'un triangle l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits.

Un triangle sphérique est *rectangle* lorsqu'il a un angle droit; on appelle *hypoténuse* le côté opposé à cet angle.

On donne le surnom de *birectangle*, de *trirectangle* à un triangle sphérique qui a deux ou trois angles droits.

Trois grands cercles qui sont perpendiculaires deux à deux divisent évidemment la surface de la sphère en huit triangles trirectangles égaux entre eux (X).

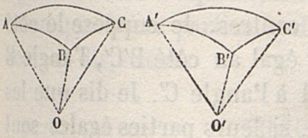
Corollaire. — *La somme des angles d'un polygone sphérique convexe de* n *côtés est plus grande que* n — 2 *fois* 2 *angles droits et moindre que* n — 2 *fois* 6 *angles droits.*

En effet, on peut décomposer ce polygone en $n - 2$ triangles sphériques, en joignant l'un de ses sommets à tous les autres par des arcs de grands cercles; or, la somme des angles de chaque triangle est comprise entre 2 angles droits et 6 angles droits; donc la somme des angles de tous les triangles, ou la somme des angles du polygone, est comprise entre $n - 2$ fois 2 angles droits et $n - 2$ fois 6 angles droits.

L'excès de la somme des angles de ce polygone sur $2(n - 2)$ angles droits est appelé l'*excès sphérique* du polygone.

THÉORÈME IX

Deux triangles sphériques, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux ou symétriques, s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.



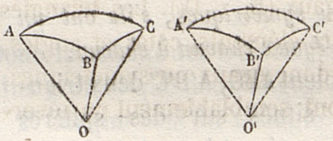
Soient ABC, A'B'C' deux triangles situés sur des sphères égales qui ont les points O et O' pour centres; je suppose l'angle A égal à l'angle A', le côté AB égal au côté A'B' et le côté AC égal au côté A'C'. Je dis que les triangles ABC, A'B'C' sont égaux, si leurs parties égales sont semblablement disposées, et qu'ils sont symétriques dans l'hypothèse contraire.

Dans la première hypothèse, je superpose les surfaces des deux sphères en faisant coïncider leurs centres O et O'; j'amène ensuite le point A' sur le point A et le point B' sur le point B; l'arc A'B' s'applique alors sur l'arc AB. Comme l'angle A' est égal à l'angle A, et que les parties égales des deux triangles sont semblablement disposées, l'arc A'C' prend la direction de l'arc AC, et le point C' se confond avec le point C, puisque les arcs AC, A'C' sont égaux. Les côtés BC, B'C' ont par suite les mêmes extrémités et coïncident; les triangles ABC, A'B'C' sont donc égaux.

Je suppose, en second lieu, les parties égales des triangles ABC, A'B'C' inversement disposées, et je construis un triangle sphérique *abc* qui soit symétrique au triangle ABC. Ces deux triangles ont tous leurs éléments, côtés et angles, égaux chacun à chacun et inversement disposés; par conséquent, le triangle A'B'C' et le triangle *abc* ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et leurs parties égales sont semblablement disposées. D'après le cas précédent, le triangle A'B'C' est donc égal au triangle *abc*, et les triangles ABC, A'B'C' sont symétriques.

THÉORÈME X

Deux triangles sphériques, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux ou symétriques, s'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.



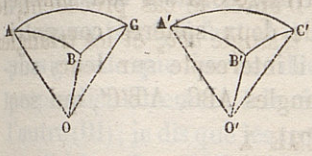
Soient ABC, A'B'C' deux triangles situés sur deux sphères égales dont les points O et O' sont les centres. Je suppose le côté BC égal au côté B'C', l'angle B égal à l'angle B' et l'angle C égal à l'angle C'. Je dis que les triangles ABC, A'B' C' sont égaux, si leurs parties égales sont semblablement disposées, et qu'ils sont symétriques dans l'hypothèse contraire.

J'admets d'abord que la disposition des parties égales soit la même dans les deux triangles, et je superpose les surfaces des deux sphères en faisant coïncider leurs centres O, O'. J'amène ensuite le point B' sur le point B et le point C' sur le point C; l'arc B'C' s'applique alors sur l'arc BC. Comme les angles B' et C' sont respectivement égaux aux angles B et C, l'arc B'A' prend la direction de l'arc BA, et l'arc C'A' la direction de l'arc CA. Par conséquent, le point d'intersection A' des arcs B'A', C'A' se confond avec celui des arcs BA, CA, c'est-à-dire avec le point A, et les triangles ABC, A′B′C′ qui coïncident dans toute leur étendue sont égaux.

Si les parties égales des deux triangles ABC, A′B′C′ étaient inversement disposées, je démontrerais, comme dans le théorème précédent, que ces triangles sont symétriques.

THÉORÈME XI

Deux triangles sphériques ABC, A′B′C′, *situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux ou symétriques s'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*



Soient O et O′ les centres de deux sphères égales, sur lesquelles les triangles ABC, A′B′C′ sont placés; les grands cercles qui forment ces triangles déterminent deux angles trièdres OABC, O′A′B′C′ dont les faces sont égales chacune à chacune, puisque les côtés des deux triangles qui servent de mesure à ces angles sont eux-mêmes égaux chacun à chacun. Par conséquent les angles dièdres, opposés aux faces égales, sont égaux (E, 7, IV). Les triangles ABC, A′B′C′ ont dès lors tous leurs éléments, côtés et angles, égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux ou symétriques, selon que leurs parties égales sont semblablement ou inversement disposées.

THÉORÈME XII

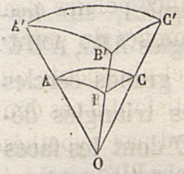
Deux triangles sphériques ABC, A′B′C′, *situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux ou symétriques, s'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.*

Je construis les triangles polaires *abc*, *a′b′c′* des triangles ABC, A′B′C′, et je fais remarquer que les angles des triangles ABC, A′B′C′ étant par hypothèse égaux chacun à chacun, leurs suppléments le sont aussi; par conséquent les triangles *abc*, *a′b′c′* ont les trois côtés égaux chacun à chacun (VII) et sont égaux ou symétriques (XI). Les angles de ces triangles sont donc égaux chacun à chacun, ainsi que leurs suppléments; les triangles

ABC, A′B′C′ ont, par suite, les côtés égaux chacun à chacun, et sont égaux ou symétriques, selon que leurs parties égales sont semblablement ou inversement disposées.

Corollaire I. — Si l'on appelle, comme dans la Géométrie plane, triangles sphériques *semblables* deux triangles équiangles dont les côtés adjacents aux angles égaux soient proportionnels, la proposition précédente démontre que deux triangles sphériques semblables ne peuvent appartenir à la même sphère sans être égaux.

Corollaire II. — Si un angle trièdre OABC a son sommet au centre O de deux sphères concentriques OA, OA′, il intercepte sur leurs surfaces deux triangles ABC, A′B′C′, qui sont semblables.



En effet, ces triangles sont évidemment équiangles; de plus, leurs côtés AC, A′C′ sont des arcs semblables, proportionnels aux rayons OA, OA′, il en est de même des côtés BC, B′C′ et des côtés AB, A′B′; on a donc

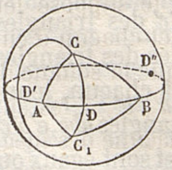
$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'},$$

et les triangles sphériques ABC, A′B′C′ sont semblables.

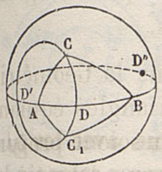
PROBLÈME I

Construire un triangle sphérique dont les trois côtés sont donnés.

Soient a, b, c les trois arcs de grands cercles donnés; je suppose leur somme moindre que la circonférence de grand cercle AB, et chacun d'eux plus grand que la différence des deux autres (E, 20, VI). Pour construire un triangle sphérique avec ces trois arcs, je prends sur la circonférence de grand cercle AB un arc AB égal à c, et je décris du point A comme pôle, avec une distance polaire égale à b, la circonférence CD rencontrant la circonférence AB



aux point D et D′. Je décris ensuite du point B comme pôle, avec une distance polaire égal à a, un arc de cercle qui coupe la circonférence CD aux deux points C, C_1, et je joins chacun de ces points aux deux points A, B par un arc de grand cercle. Les triangles sphériques symétriques ABC, ABC_1 satisfont l'un et l'autre aux conditions du problème proposé qui a dès lors deux solutions.



La possibilité de ce problème ne dépend que de l'intersection de la circonférence CD et de l'arc décrit du point B comme pôle avec la distance polaire a. Or, pour que les deux lignes se rencontrent, il faut et il suffit que la distance polaire a soit plus grande que l'un des deux arcs BD, BD′, menés du point B perpendiculairement à la circonférence CD, et plus petite que l'autre (III) ; je dis que les trois arcs donnés satisfont à ces deux conditions. En effet, 1° l'arc a est plus grand par hypothèse que l'arc BD qui égale AB — AD ou $c - b$; 2° l'arc BD′, ou $c + b$, peut être plus petit ou plus grand qu'une demi-circonférence : dans le premier cas, l'arc a est plus petit par hypothèse que l'arc BD′; dans le second cas, je compare l'arc a à l'arc BD″D′, ou $360° - (c + b)$, qui est moindre qu'une demi-circonférence, et je fais remarquer qu'il est encore plus petit que BD″D′; car on a par hypothèse

$$a + b + c < 360°,$$

et, par conséquent,

$$a < 360° - (b + c).$$

PROBLÈME II

Construire un triangle sphérique dont les trois angles sont donnés.

Soient A, B, C les trois angles donnés; je suppose leur somme plus grande que deux angles droits, et chacun d'eux, augmenté de deux angles droits, plus grand que la somme des deux autres (VIII). Cela posé, je désigne par a', b', c' les suppléments respectifs de ces angles, et dans chacune des inégalités suivantes :

$$A + B + C > 180°,$$
$$A + 180° > B + C.$$

données par hypothèse, je remplace A par $180° - a'$, B par $180° - b'$, et C par $180° - c'$; je trouve ainsi :

$$a' + b' + c' < 360°,$$

et

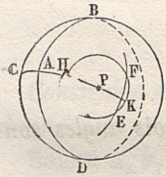
$$a' < b' + c'.$$

On peut donc construire un triangle sphérique avec les trois arcs de grands cercles a', b', c', puisque leur somme est moindre que la circonférence d'un grand cercle, et que chacun d'eux est moindre que la somme des deux autres (Probl. I). Ce triangle sphérique étant construit, je décris ensuite son triangle polaire qui a pour angles les suppléments des arcs a', b', c' (VII), c'est-à-dire les angles donnés A, B, C et qui résout dès lors le problème proposé.

Ce problème a deux solutions, puisqu'on peut construire un triangle sphérique et son symétrique avec les trois arcs a', b', c'. Ces deux solutions sont aussi deux triangles sphériques symétriques.

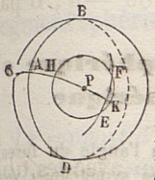
PROBLÈME III

Tracer par un point A *donné sur une sphère une circonférence de grand cercle qui fasse un angle donné avec une circonférence de grand cercle donné* BCD.



Je commence par déterminer le pôle P du cercle BCD, situé sur l'hémisphère ABCD; je décris ensuite la circonférence EFH, lieu géométrique des pôles des circonférences de grands cercles, qui font avec la circonférence BCD un angle égal à l'angle donné (E, 20, V), et je trace du point A comme pôle un arc de grand cercle, rencontrant généralement la circonférence EFH en deux points E, F. Chacun de ces points est le pôle d'une circonférence de grand cercle qui résout le problème proposé, car elle passe par le point A et fait l'angle donné avec la circonférence BCD.

Pour reconnaître la condition de possibilité de ce problème, je joins le point A au point P par un arc de grand cercle qui coupe la circonférence EFH aux deux points H, K et la circonférence BCD au point C. Les deux arcs AH, AK étant perpendiculaires à cette circonférence (E., 20, III), il faut et il suffit que l'arc AH soit plus petit et l'arc AK plus grand qu'un quadrans qui est la distance polaire de l'arc de grand cercle, décrit du point A comme pôle. La première de ces deux conditions est toujours satisfaite, puisque l'arc AH est moindre que AP, et, par suite, moindre qu'un quadrans. Le problème proposé a donc deux solutions lorsque l'arc AK est plus grand que PC, c'est-à-dire lorsque l'arc PK est plus grand que l'arc AC qui mesure la distance du point A à la circonférence BCD. Il n'a qu'une solution si PK est égal à CA; enfin, il est impossible lorsque PK est moindre que CA.



Remarque. — Ce problème sert à construire un triangle sphérique dans lequel on connaît un angle et les deux côtés qui le forment, ou un côté et deux angles.

CHAPITRE II

Mesure de la surface du triangle sphérique et du volume de la pyramide sphérique.

Programme : Un fuseau est à la surface de la sphère comme l'angle du fuseau est à quatre angles droits. — Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents. — L'aire d'un triangle sphérique est à celle de la sphère entière comme l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits est à huit angles droits. — A chaque propriété des triangles ou polygones sphériques correspond une propriété analogue des angles trièdres ou polyèdres.

DÉFINITIONS

1. On appelle *fuseau* la portion de la surface d'une sphère comprise entre deux demi-circonférences de grands cercles terminées au même diamètre. L'angle de ces deux circonférences a reçu le nom d'*angle* du fuseau.

Il est évident que deux fuseaux situés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux s'ils ont des angles égaux.

2. Un *onglet sphérique* est la partie d'une sphère comprise entre deux demi-grands cercles terminés au même diamètre. L'angle des plans de ces deux cercles est l'*angle* de l'onglet sphérique; le fuseau qui le termine lui sert de *base*.

Dans la même sphère ou dans des sphères égales deux onglets sont évidemment égaux s'ils ont des angles égaux.

3. On appelle *pyramide sphérique* la portion d'une sphère comprise dans un angle polyèdre qui a son sommet au centre de cette sphère. — La pyramide a pour *base* le polygone intercepté par l'angle polyèdre sur la surface sphérique.

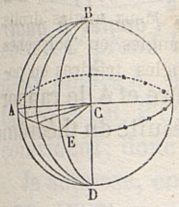
Deux pyramides sphériques opposées par le sommet sont *symétriques* comme leurs bases.

4. Un *segment sphérique* est la portion d'une sphère comprise entre deux plans parallèles; il a pour *bases* les deux cercles qui le terminent, et pour *hauteur* la plus courte distance des plans de ses bases.

Si l'un des deux plans parallèles est tangent à la sphère, le segment sphérique correspondant n'a qu'une base.

THÉORÈME I

Le rapport d'un fuseau à la surface de la sphère est égal au rapport de l'angle de ce fuseau à quatre angles droits.



Soit le fuseau ABED déterminé sur la sphère CA par les demi-circonférences BAD, BED, qui se coupent aux extrémités du diamètre BD. Je décris, du point D comme pôle, une circonférence de grand cercle rencontrant les arcs BAD, BED aux points A et E; l'angle du fuseau a pour mesure l'arc AE. Je suppose d'abord cet arc et la circonférence CA commensurables entre eux, et leur rapport égal à $\frac{3}{16}$. Je divise la circonférence CA en 16 parties égales; dès lors l'arc AE contient exactement trois de ses parties. Par le diamètre BD et chacun des points de division, je mène des plans qui partagent la surface de la sphère en 16 fuseaux égaux entre eux, car leurs angles sont égaux. Or, le fuseau ABED contient exactement trois de ces fuseaux partiels; donc son rapport à la surface de la sphère égale aussi $\frac{3}{16}$; par conséquent il est le même que le rapport de l'arc AE à la circonférence CA, ou que celui de son angle à quatre angles droits.

Si l'arc AE et la circonférence CA n'ont pas de commune mesure, je divise la circonférence en un nombre quelconque de parties égales, par exemple en 1000, et je suppose que l'arc AE soit plus grand que 345 de ces parties, mais moindre que 346; le rapport de cet arc à la circonférence CA, ou celui de l'angle du fuseau à quatre angles droits, est compris par suite entre $\frac{345}{1000}$ et $\frac{346}{1000}$. Par le diamètre BD et chacun des points de division de la circonférence, je mène des plans qui partagent la surface de la sphère en 1000 fuseaux égaux entre eux, car leurs angles ont des mesures égales. Or, le fuseau ABED est plus grand que 345 de ces fuseaux partiels, et moindre que 346;

donc son rapport à la surface de la sphère est aussi compris entre $\frac{345}{1000}$ et $\frac{346}{1000}$. Ce rapport et celui de l'angle du fuseau à quatre angles droits contiennent dès lors le même nombre de millièmes. Je prouverais par un raisonnement semblable que ces deux rapports contiennent le même nombre d'unités d'un ordre décimal quelconque; par conséquent ils sont égaux.

Remarque. — On démontre de même que *le rapport d'un onglet à la sphère égale celui de l'angle de l'onglet à quatre angles droits.*

Corollaire. — Soient R le rayon d'une sphère et A le rapport de l'angle d'un fuseau à l'angle droit. 1° Il résulte du théorème précédent que

$$\frac{fus.\,A}{4\pi R^2} = \frac{A}{4};$$

on en déduit :

$$fus.\,A = \pi R^2 \times A,$$

c'est-à-dire que *l'aire d'un fuseau est égale au produit de l'aire d'un grand cercle de la sphère par le rapport de l'angle du fuseau à l'angle droit.*

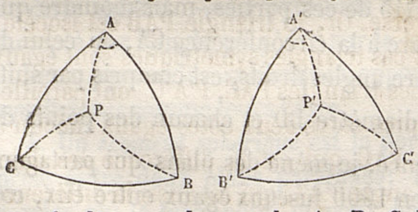
2° On a aussi

$$\frac{onglet\,A}{sphère\,R} = \frac{fus.\,A}{surf.\,sph.\,R};$$

or, le volume de la sphère est égal au produit de sa surface par le tiers de son rayon; donc *le volume de l'onglet est égal au produit du fuseau correspondant par le tiers du rayon de la sphère.*

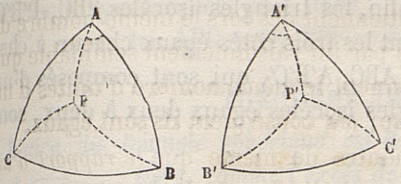
THÉORÈME II

Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents.



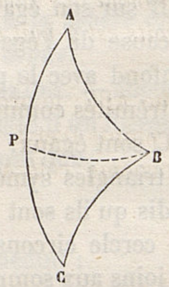
Soient ABC, A′B′C′ deux triangles sphériques symétriques dans lesquels le côté AB est égal à A′B′, le côté AC égal à A′C′, et le côté BC égal à B′C′; il en résulte que les angles A, B, C du premier triangle sont égaux respectivement aux angles A′, B′, C′ du second.

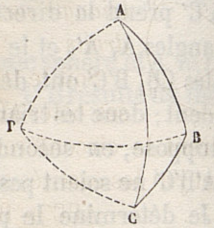
Le triangle ABC peut être isocèle ou ne l'être pas. Je le suppose d'abord isocèle, et ses côtés AB, AC égaux; je dis



qu'il est égal au triangle A'B'C', qui est aussi isocèle puisque A'B' est égal à AB et A'C' égal à AC. En effet, si j'applique le côté A'B' sur son égal AC, le côté A'C' prend la direction de AB, à cause de l'égalité des deux angles A, A', et le point C' se confond avec le point B. Les côtés CB, B'C' ont dès lors leurs extrémités communes et coïncident; donc les triangles ABC, A'B'C' sont égaux.

Je suppose, en second lieu, que les triangles symétriques ABC, A'B'C' ne soient pas isocèles, et je dis qu'ils sont équivalents. Je détermine le pôle P du petit cercle circonscrit au triangle ABC (E., 20, Prob. V), et je le joins aux sommets de ce triangle par des arcs de grand cercle. Le point P peut être à l'intérieur du triangle ABC ou à l'extérieur, ou bien sur le plus grand côté. J'examine d'abord le premier cas : les arcs PA, PB, PC décomposent le triangle ABC en trois triangles PAB, PAC, PBC qui sont isocèles, car le pôle P est également éloigné des trois points A, B et C. Je tire dans l'angle B'A'C' un arc de grand cercle A'P', faisant avec le côté A'B' un angle B'A'P' égal à l'angle BAP; je prends ensuite sur l'arc A'P' une longueur A'P' égale à AP; et je joins le point P' aux trois sommets du triangle A'B'C' par les arcs de grand cercle P'A', P'B', P'C'. Les deux triangles PAB, P'A'B', qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont symétriques; car leurs parties égales sont évidemment disposées dans un ordre inverse. Or, le triangle PAB est isocèle; donc P'A'B' l'est aussi, et ces triangles symétriques sont égaux d'après ce qui précède. Les triangles PAC, P'A'C' ont pareillement un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, puisque l'angle PAC, qui est la différence des deux angles BAC, BAP, égale l'angle P'A'C' qui est aussi la différence des deux angles B'A'C', B'A'P' égaux respectivement aux angles BAC, BAP. De plus, les parties égales de ces triangles sont disposées dans un ordre inverse ; donc PAC et P'A'C' sont symétriques. Mais le triangle PAC est isocèle ; par conséquent il est égal à P'A'C'. Enfin, les triangles isocèles PBC, P'B'C' sont égaux, puisqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun. Donc les triangles ABC, A'B'C', qui sont composés d'un même nombre de triangles isocèles égaux deux à deux, sont équivalents.



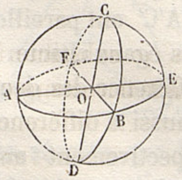


On fait la démonstration de la même manière, lorsque le pôle P du cercle circonscrit au triangle ABC se trouve sur le plus grand côté AC du triangle ABC, ou à l'extérieur de ce triangle. Dans le premier cas, on décompose ABC en deux triangles isocèles PBA, PBC, en tirant l'arc de grand cercle PB. Dans le second cas, le triangle ABC est égal à l'excès de la somme des deux triangles isocèles PBA, PBC sur le triangle PAC qui est aussi isocèle.

Corollaire I. — *Si un triangle sphérique* ABC *est isocèle, les angles* B, C, *opposés aux côtés égaux* AB, AC, *sont égaux ;* et réciproquement.

L'égalité du triangle isocèle ABC et de son symétrique A'B'C' prouve que l'angle B est égal à l'angle C', et par suite à l'angle C.

La réciproque se démontre aussi par la superposition du triangle ABC et de son symétrique A'B'C'.



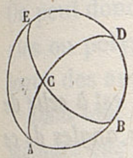
Corollaire II. — *Deux triangles sphériques* ABC, DBE, *qui ont un angle opposé par le sommet et dont les côtés* AC, DE, *opposés à cet angle, sont situés sur la même circonférence de grand cercle, forment ensemble le fuseau* ABCF *dont l'angle est* ABC.

Le fuseau ABCF égale la somme des deux triangles ABC, ACF; or, le triangle ACF est équivalent au triangle DBE parce qu'ils sont symétriques, on a donc :

$$tri.\,ABC + tri.\,DBE = fus.\,ABCF.$$

THÉORÈME III

L'aire du triangle sphérique est à celle de la sphère entière, comme l'excès de la somme des angles du triangle sur deux angles droits est à huit angles droits.



Soit le triangle sphérique ABC; je prolonge ses côtés AC, BC jusqu'aux points D et E, où ils rencontrent la circonférence dont le troisième côté AB fait partie, et j'ai les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} ABC + BCD &= \textit{fuseau}\ A, \\ ABC + ACE &= \textit{fuseau}\ B, \\ ABC + CDE &= \textit{fuseau}\ C\ (II, 2). \end{aligned}$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, et remarquant que la somme des quatre triangles ABC, BCD, CDE, ACE est égale à la moitié de la surface de la sphère, je trouve :

$$2\,ABC + \tfrac{1}{2}\,surf.\,sph. = fus.\,A + fus.\,B + fus.\,C,$$

et par suite,

$$ABC = \tfrac{1}{2}\,(fus.\,A + fus.\,B + fus.\,C) - \tfrac{1}{4}\,surf.\,sph.$$

Je divise ensuite les deux membres de cette dernière égalité par la surface de la sphère, et j'y remplace le rapport de chaque fuseau à la surface de la sphère par celui de l'angle de ce fuseau à quatre angles droits; si je désigne par A, B, C les rapports des angles du triangle ABC à l'angle droit, j'aurai

$$\frac{ABC}{surf.\,sph.} = \frac{A + B + C - 2}{8};$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

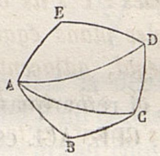
Corollaire. — Si, dans l'égalité précédente, je substitue à la surface de la sphère huit fois l'aire T du triangle trirectangle, cette égalité devient :

$$\frac{ABC}{T} = A + B + C - 2;$$

le nombre $A + B + C - 2$, qu'on obtient en divisant l'excès de la somme des angles du triangle ABC sur deux angles droits par l'angle droit, est le rapport de l'*excès sphérique* de ce triangle à l'angle droit. Par conséquent, *le triangle sphérique* ABC *a pour mesure le rapport de son excès sphérique à l'angle droit, lorsqu'on prend le triangle trirectangle*, ou le huitième de la surface de la sphère, *pour l'unité de surface.*

THÉORÈME IV

L'aire d'un polygone sphérique convexe ABCDE *est à celle de la sphère entière, comme l'excès de la somme des angles de ce polygone sur autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux est à huit angles droits.*



Je joins le sommet A aux autres sommets par des arcs de grand cercle qui décomposent le polygone sphérique ABCDE en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux. Or, l'aire de chaque triangle est à celle de la sphère comme l'excès de la somme de ses angles, diminuée de deux angles droits, est à huit angles droits; donc la somme des aires de tous les triangles ABC, ACD, ADE, ou l'aire du polygone ABCDE, est à celle de la sphère entière comme la somme des angles de ce polygone, diminuée d'autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux, est à huit angles droits; car la somme des angles de tous les triangles est égale à celle des angles du polygone.

Corollaire. — Soient n le nombre des côtés du polygone, S le rapport de la somme de ses angles à l'angle droit et T l'aire du triangle sphérique trirectangle; on a

$$\frac{ABCDE}{T} = S - 2(n - 2).$$

Le nombre $S - 2(n - 2)$, qui est le rapport de l'*excès sphérique* du polygone à l'angle droit, exprime la mesure de la surface de ce polygone, lorsqu'on prend le triangle sphérique trirectangle pour unité.

Remarques sur les deux chapitres précédents.

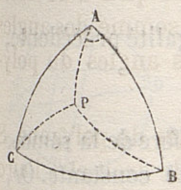
On sait que les plans des arcs de grands cercles qui formen un polygone sphérique déterminent au centre de la sphère un angle polyèdre qui a les mêmes angles que le polygone et dont les angles plans sont mesurés par les côtés du même polygone. On peut donc conclure de là qu'à chaque propriété des triangles ou polygones sphériques correspond une propriété analogue des angles trièdres ou polyèdres. Par exemple :

Dans tout angle trièdre : 1° la somme des angles dièdres est moindre que six angles dièdres droits, et plus grande que deux ; 2° la somme de deux angles dièdres est moindre que le troisième augmenté de deux angles dièdres droits.

Deux angles trièdres sont égaux ou symétriques : 1° s'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun ; 2° s'ils ont un angle plan égal, adjacent à deux angles dièdres égaux chacun à chacun ; 3° s'ils ont les trois angles plans égaux chacun à chacun ; 4° s'ils ont les trois angles dièdres égaux chacun à chacun.

THÉORÈME V

Le lieu géométrique des sommets A des triangles sphériques qui ont une base commune BC, et dans lesquels l'angle A, opposé à la base, diffère de la somme B + C des deux autres angles d'une quantité constante K, est une circonférence passant par les points B et C.



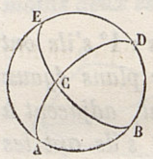
Soit ABC l'un des triangles jouissant de la propriété énoncée ; je détermine le pôle P du cercle qui passe par ses sommets, et je tire des arcs de grand cercle PA, PB, PC. Le triangle PAB étant isocèle, l'angle PBA, opposé au côté PA, est égal à l'angle PAB, opposé au côté PB ; pour une raison semblable, l'angle PCA est égal à l'angle PAC. Par conséquent, la somme des angles égaux PBC, PCB du triangle isocèle PBC égale l'excès K de la somme des deux angles ABC, ACB du triangle

ABC sur le troisième BAC, et chacun des angles PBC, PCB égale la moitié de l'angle donné K (II, c., I). Le triangle isocèle PBC est donc déterminé, puisqu'on connaît son côté BC et les deux angles adjacents ; la distance AP du sommet variable A au point fixe P est par suite constante, et le lieu géométrique du point A est la circonférence décrite du point P comme pôle avec la distance polaire PB ou PC.

THÉORÈME VI

Le lieu géométrique des sommets C *des triangles sphériques de même base* AB *et de même surface est une circonférence.*

Soit ABC l'un des triangles satisfaisant aux conditions de l'énoncé ; je prolonge les côtés BC, AC de l'angle ACB jusqu'à la rencontre de la circonférence AB. En désignant par A, B, C, D, E les rapports des angles des triangles ABC, CDE à l'angle droit, et par S le rapport constant de l'aire du triangle ABC à celle du triangle trirectangle, j'ai l'égalité (III) :



$$A + B + C - 2 = S;$$

or, les angles A et D des triangles ABC, CDE sont supplémentaires, ainsi que leurs angles B et E ; par conséquent,

$$A = 2 - D,$$
$$B = 2 - E.$$

En substituant ces valeurs de A et B dans l'égalité précédente, je trouve :

$$2 + C - D - E = S,$$

c'est-à-dire que l'angle C du triangle CDE diffère de la somme D + E des deux autres angles d'une quantité constante. Or, les deux sommets D et E de ce triangle sont diamétralement opposés aux points donnés A et B et, par suite, fixes ; donc le lieu du troisième sommet C est une circonférence passant par les points D et E (V).

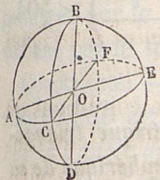
Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Lexell ;* c'est à M. *Steiner* qu'est due la démonstration géométrique précédente.

THÉORÈME VII

Si deux pyramides sphériques triangulaires sont symétriques, elles sont équivalentes.

Démonstration analogue à celle du théorème II, même chapitre; il suffit d'y remplacer chaque triangle sphérique par la pyramide sphérique correspondante.

Corollaire. — *Deux pyramides sphériques triangulaires* OABC, OCDE *qui ont un angle dièdre opposé par l'arête et dont les deux faces* AOB, EOD, *opposées à cet angle, font partie du même plan, forment ensemble l'onglet* ACFB *dont l'angle est* ACB.

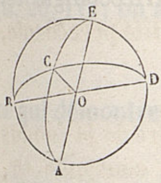


Car la pyramide OCDE est équivalente à la pyramide OAFB, parce qu'elles sont symétriques.

THÉORÈME VIII

Le volume d'une pyramide sphérique triangulaire OABC *est égal au produit de sa base* ABC *par le tiers du rayon* OA *de la sphère.*

Les plans des faces AOC, BOC divisent l'hémisphère ABCB en quatre pyramides sphériques triangulaires OABC, OACD, OCDE, OBCE, l'on a :



$$OABC + OBCE = \textit{onglet } A$$
$$OABC + OACD = \textit{onglet } B,$$
$$OABC + OCDE = \textit{onglet } C \text{ (VII, c)}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre et remarquant que la somme des quatre pyramides OABC, OBCE, OACD, OCDE est égale à la moitié de la sphère, on trouve :

$$2OABC + \frac{1}{2}\,\textit{sphère} = \textit{onglet } A + \textit{onglet } B + \textit{onglet } C$$

et par conséquent,

$$\text{OABC} = \frac{1}{2}\,(\textit{onglet}\ \text{A} + \textit{onglet}\ \text{B} + \textit{onglet}\ \text{C}) - \frac{1}{4}\,\textit{sphère}.$$

Or, on a successivement (I, c) :

$$\textit{onglet}\ \text{A} = \textit{fus.}\ \text{A} \times \frac{1}{3}\ \text{OA},$$

$$\textit{onglet}\ \text{B} = \textit{fus.}\ \text{B} \times \frac{1}{3}\ \text{OA},$$

$$\textit{onglet}\ \text{C} = \textit{fus.}\ \text{C} \times \frac{1}{3}\ \text{OA},$$

et
$$\textit{sphère}\ \text{OA} = \textit{surf. sph.} \times \frac{1}{3}\ \text{OA};$$

donc
$$\text{OABC} = \left(\frac{\textit{fus.}\,\text{A} + \textit{fus.}\,\text{B} + \textit{fus.}\,\text{C} - \frac{1}{4}\,\textit{surf. sph.}}{2}\right) \times \frac{1}{3}\text{OA},$$

ou (III)
$$\text{OABC} = \textit{tri.}\ \text{ABC} \times \frac{1}{3}\ \text{OA}.$$

CoROLLAIRE. — *Le volume de la pyramide sphérique triangulaire* OABC *est aussi égal au rapport de l'excès sphérique de sa base à l'angle droit, si l'on prend la pyramide trirectangle*, ou le huitième de la sphère, *pour l'unité du volume.*

Soient A, B, C les rapports des angles de la pyramide OABC à l'angle droit et R le rayon de la sphère ; on a (III) :

$$\textit{tri.}\ \text{ABC} = \frac{\pi R^2}{2}\,(A + B + C - 2)$$

et, par suite,

$$\textit{pyr.}\ \text{OABC} = \frac{\pi R^3}{6}\,(A + B + C - 2);$$

mais le volume V de la pyramide sphérique trirectangle est égal $\frac{\pi R^3}{6}$ (E., 20, IV) ; on a donc :

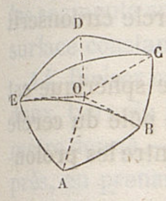
$$\frac{\textit{pyr.}\ \text{OABC}}{V} = A + B + C - 2;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

THÉORÈME IX

Le volume d'une pyramide sphérique polygonale OABCDE *est égal au produit de sa base* ABCDE *par le tiers du rayon de la sphère.*

Je mène les grands cercles OEB, OEC qui décomposent la pyramide polygonale ABCD en pyramides triangulaires ayant pour bases les différents triangles dans lesquels le polygone ABCD est partagé par les arcs EB, EC. Chaque pyramide triangulaire a pour mesure le produit de sa base par le tiers du rayon de la sphère; donc le volume de la pyramide polygonale OABCDE est égal au produit de la somme des bases des pyramides triangulaires par le tiers du rayon, c'est-à-dire égal au produit de sa base par le tiers du rayon.



Corollaire. — *Le volume de la pyramide sphérique polygonale* OABGD *est aussi égal au rapport de l'excès sphérique de sa base à l'angle droit, si l'on prend la pyramide sphérique trirectangle pour l'unité de volume.*

Soient R le rayon de la sphère, n le nombre des faces latérales de la pyramide et A le rapport de la somme de ses angles dièdres à l'angle dièdre droit; on a (IV) :

$$\textit{polyg.}\ \mathrm{ABCDE} = \frac{\pi R^2}{2}\left(A - 2(n-2)\right)$$

et, par suite,
$$\mathrm{OABCDE} = \frac{\pi R^3}{6}\left(A - 2(n-2)\right).$$

Or, le volume V de la pyramide trirectangle est égal à $\frac{\pi R^3}{6}$ (E. 20, IV); on a donc :

$$\frac{\mathrm{OABCDE}}{V} = A - 2(n-2);$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

PROBLÈMES

1. La somme des angles dièdres d'un angle polyèdre qui a n faces est plus grande que $2(n-2)$ angles droits, et moindre que $2n$ angles droits.

2. Le tétraèdre qui a pour sommets les points d'intersection des médianes des faces d'un tétraèdre donné est semblable au symétrique de ce dernier tétraèdre. — Quel est le rapport de leurs volumes?

3. Si le plus grand des angles d'un triangle sphérique est égal à la somme des deux autres, le pôle du cercle circonscrit à ce triangle est sur le plus grand côté.

4. Si le plus grand des angles d'un triangle sphérique est plus grand que la somme des deux autres, le pôle du cercle circonscrit est situé à l'extérieur du triangle, entre les prolongements des côtés du plus grand angle.

5. Si le plus grand des angles d'un triangle sphérique est moindre que la somme des deux autres, le pôle du cercle circonscrit est situé à l'intérieur du triangle.

6. Tout point de l'arc bissecteur de l'angle de deux arcs de grands cercles est également éloigné des deux côtés de cet angle. — Tout point extérieur à l'arc bissecteur est inégalement distant des deux côtés de l'angle.

7. Les arcs bissecteurs des trois angles d'un triangle sphérique passent par le même point qui est le centre du cercle inscrit. — Les arcs bissecteurs des suppléments de deux angles d'un triangle sphérique et l'arc bissecteur du troisième angle se rencontrent en un même point, centre de l'un des cercles ex-inscrits.

8. Quel est le lieu géométrique des sommets des triangles sphériques qui ont une base commune et dont l'angle au sommet est égal à la somme des deux autres?

9. Calculer la portion de la surface et du volume de la terre comprise entre l'équateur et l'écliptique, en sachant que ces deux cercles forment un angle 23° 28′?

10. Déterminer l'angle des méridiens de Paris et de Londres, en sachant que le fuseau terrestre qu'ils forment est égal à 3,367 myriamètres carrés.

11. Calculer l'aire d'un triangle sphérique ABC, en sachant que le rayon de la sphère est égal à $1^m,2$, et que les angles A, B, C sont respectivement égaux à 78° 15′, 62° 45′ et 72° 40′.

12. Calculer les angles d'un triangle sphérique, en sachant qu'ils sont entre eux comme les nombres 4, 6 et 7, et que ce triangle est égal au quart du triangle trirectangle de la même sphère.

13. Calculer le rayon du segment sphérique maximum parmi les segments sphériques qui sont terminés par des zones de surface constante, à une seule base.

14. Diviser une sphère en deux segments dont l'un soit les deux tiers de l'autre, par un plan perpendiculaire à un diamètre donné. — Calculer le rayon de la section à un millimètre près, en prenant celui de la sphère pour unité.

15. Inscrire dans une sphère un cylindre dont le volume ait un rapport donné avec celui de la sphère. — Maximùm de ce rapport.

FIN DU COMPLÉMENT.

TABLE DES MATIÈRES

Nouveau programme de géométrie, particulier à la section scientifique.

GÉOMÉTRIE

FIGURES PLANES.

[1] On admettra qu'on ne peut amener, par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite.

[1] La proposition étant démontrée pour le cas où il y a entre les arcs une commune mesure, quelque petite qu'elle soit, sera, par cela même, considérée comme générale.

FIGURES DANS L'ESPACE.

[1] La longueur de la circonférence de cercle sera condidérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, à mesure que ses côtés diminuent indéfiniment.

[1] On appelle ainsi ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et dont les angles polyèdres homologues sont égaux.

[2] L'aire du cône (ou du cylindre) sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend l'aire de la pyramide inscrite (ou du prisme inscrit), à mesure que ses faces diminuent indéfiniment.

NOTIONS SUR QUELQUES COURBES USUELLES.

COMPLÉMENT

DES FIGURES TRACÉES SUR LA SPHÈRE.

CHAPITRE PREMIER

Du Triangle et de la Pyramide sphériques.

CHAPITRE II

Mesure de la surface du triangle sphérique et du volume de la pyramide sphérique.

FIN DE LA TABLE