Bizemont

R. Eybert

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ALGÉBRE.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ALGÈBRE;

Par M. l'Abbé BOSSUT, *de l'Académie Royale des Sciences, Honoraire-Associé-Libre de l'Académie Royale d'Architecture, de l'Institut de Bologne, de* [illegible] *Examinateur des* [illegible], *&c.*

A PARIS,
Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, fils aîné, Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXVI.
Avec Approbation & Privilége du Roi.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ALGÉBRE;

Par M. l'Abbe BOSSUT, *de l'Académie Royale des Sciences, Honoraire-Associé-Libre de l'Académie Royale d'Architecture, de l'Institut de Bologne, de l'Académie des Sciences de Lyon, Examinateur des Ingénieurs, &c.*

A PARIS,

Chez Claude-Antoine JOMBERT, Fils aîné, Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXVI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

PRÉFACE.

LE Discours imprimé à la tête de ce nouveau Cours de Mathématiques contient une Histoire abrégée de l'Arithmétique & de l'Algébre. J'y ai exposé en même tems la manière générale dont j'ai cru devoir traiter les sciences que mon plan embrasse. Voici en peu de mots l'ordre particulier du présent Ouvrage.

L'Algébre n'étant autre chose que l'Arithmétique généralisée, les opérations fondamentales de ces deux sciences se correspondent nécessairement. J'ai donc suivi ici, pour les fondements, la même méthode que dans le Traité d'Arithmétique. Après avoir fait connoître la nature des quantités Algébriques & les différents signes dont on se sert pour abréger les expressions qui les représentent, j'explique l'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division de ces quantités, soit qu'elles se présentent sous une forme rationnelle, ou qu'elles soient affectées de radicaux. La régle pour la multiplication des signes négatifs embarrasse ordinairement les Commerçants. Il me semble que je la propose avec toute la clarté qu'on peut desirer.

Au calcul des fractions ordinaires, j'ai joint celui des fractions qu'on nomme *Continues*. On n'en traite pas ordinairement dans les Eléments d'Algébre ; mais elles ont quelques propriétés remarquables & utiles que je démontre briévement.

Les principes de la formation des puiſſances & de l'extraction des racines, tant pour les entiers que pour les fractions, ſont fondés immédiatement ſur ceux de la Multiplication & de la Diviſion. Mais pour faciliter l'uſage de ces principes, je les développe au long, & j'ai ſoin d'éclaircir les préceptes par des exemples. De-là je paſſe à la réſolution des Equations, qui eſt, à proprement parler, le véritable objet de l'Algébre, & qui fournit l'occaſion naturelle d'appliquer les régles précédentes à des Problêmes intéreſſants.

J'enſeigne d'abord à réſoudre les Problêmes déterminés du premier degré. Puis j'expoſe une méthode générale & facile pour réſoudre les Problêmes indéterminés du même degré, à deux inconnues, lorſqu'on exige que ces inconnues ſoient des nombres entiers.

Les Problêmes déterminés du ſecond degré n'ont guère plus de difficulté que ceux du premier ; j'en traite avec le détail néceſſaire. Quant aux Problêmes indéterminés du ſecond degré, ils ne peuvent être réſolus en nombres rationnels que dans certaines ſuppoſitions particulières que j'ai la plupart indiquées.

Les formules pour la réſolution des Equations déterminées du troiſième & du quatrième degré ſont un peu compliquées. Je les trouve par des moyens ſimples & d'une pratique commode. Je ne dis rien des Problêmes indéterminés, relatifs à ces deux degrés, parce qu'ils n'admettent de ſolutions en nombres rationnels que dans un très-petit nombre de cas qui ſe traitent par des méthodes à-peu-près ſemblables à celles que l'on a employées pour le ſecond degré.

On n'a pas encore pu réſoudre généralement & en rigueur les Equations qui paſſent le quatriéme degré. Mais il y a dans tous les degrés plus élevés des Equations particulières exactement réſolubles. Il en eſt d'autres qui peuvent être abaiſſées à des degrés inférieurs, & qui par-là deviennent plus faciles à manier. Je donne pluſieurs exemples de ces différens cas, & je mets le Lecteur ſur la voie d'en trouver de nouveaux. Pour connoître de plus en plus la nature des Equations de tous les degrés, j'examine la manière générale dont elles ſe forment. Cet examen fait voir que, ſans égard aux ſignes, le coéfficient du ſecond terme d'une Equation eſt égal à la ſomme de ſes racines ; que celui du troiſiéme eſt le produit des racines priſes deux à deux ; que celui du quatriéme eſt le produit des racines priſes trois à trois ; &c. De-là je tire, en paſſant, une démonſtration aiſée de la formule pour élever un binome à une puiſſance quelconque, entière ou rompue, poſitive ou négative. Enſuite j'explique, dans le plus grand détail, la manière de décompoſer une Equation en ſes facteurs rationnels ſi elle en a de tels ; & de trouver directement & ſéparément les racines égales qu'elle peut contenir.

A ces recherches ſuccédent diverſes opérations de calcul que l'on peut faire ſur les racines d'une Equation quelconque ſans les connoître. L'objet de ces calculs eſt de faciliter la réſolution ſinon exacte, du moins approchée, d'une Equation priſe à volonté.

Il y a dans le troiſiéme & le quatriéme degré pluſieurs Equations qui étant réſolues par les formules ordinaires peuvent quelquefois ſe ſimplifier. Il en eſt de même pour certaines Equations dans les degrés ſupérieurs. Je donne la méthode pour faire ces réductions, lorſqu'elles ſont poſſibles. Par les mêmes principes, je fais voir que toute expreſſion imaginaire qui provient d'un radical pair placé au-devant d'une quantité négative, ou d'un radical quelconque placé au-devant d'une quantité en partie réelle, en partie imaginaire de la première eſpece, peut être regardée comme produite par la réſolution d'une Equation du ſecond degré dont les racines ſont imaginaires ; propoſition eſſentielle dans l'analyſe des Equations. M. d'Alembert avoit démontré depuis long-tems ce Théorême, par une méthode très-ſavante, qui embraſſe dans ſa généralité les quantités exponentielles. La démonſtration que je donne du même Théorême, pour les Equations, eſt nouvelle, purement algébrique, & je crois qu'on la trouvera fort ſimple.

Lorſque tous les moyens de réſoudre en rigueur une Equation ſont épuiſés inutilement, il reſte au moins la reſſource de la réſoudre par approximation. J'employe, pour cela, la méthode de Neuton ; & je la préſente de manière qu'on ne peut, en aucun cas, rencontrer de la difficulté à faire l'opération dont il s'agit, ni à la pouſſer juſques à tel point d'exactitude qu'on voudra. Cette méthode eſt très-expéditive pour la pratique, où l'on eſt rarement obligé de pouſſer l'approximation aſſez loin pour que le calcul devienne long & pénible. Je parle, comme on voit, des Equations numériques. On peut toujours, dans l'uſage de l'Algébre, ramener à cette claſſe les Equations littérales; car l'objet de tout Problême déterminé eſt de faire trouver une inconnue mêlée avec des quantités données & par conſéquent exprimables par des nombres donnés. Ainſi il ne reſte rien à deſirer pour l'approximation des racines, lorſqu'il eſt ſimplement queſtion de réſoudre un Problême particulier qui en dépend. Néanmoins comme il y a des cas où l'on a beſoin d'avoir ſous une forme générale les expreſſions des racines d'une Equation littérale, j'explique l'uſage des ſuites directes & inverſes pour trouver ces ſortes d'expreſſions.

La Théorie des Equations eſt terminée par la méthode d'éliminer les inconnues, & de faire évanouir les radicaux, dans les Equations de tous les degrés, quel que puiſſe être le nombre des inconnues ou des radicaux.

L'art de former des ſuites & de les ſommer eſt une partie eſſentielle de l'Algébre. On doit mettre au rang des ſuites les plus curieuſes & les plus utiles celles des nombres figurés. J'en explique donc la théorie; je forme, par leur moyen, d'autres ſuites plus générales, que je ſomme d'une maniére nouvelle, comme on pourra s'en convaincre, en liſant le Traité de M. Jacques Bernoulli, *De Seriebus Infinitis*, où l'Auteur conſidère de pareilles ſuites.

Les ſuites récurrentes ne méritent pas moins d'attention. J'apprens à les former; & je tire de leurs premiers éléments l'expreſſion du terme général dont dépend principalement leur ſommation.

Enfin j'expoſe les propriétés des logarithmes ſous un point de vue plus général & plus approfondi que je n'avois pu le faire dans l'Arithmétique.

Tel eſt le précis des matières qui compoſent cet Ouvrage. On trouvera à la ſuite de cette nouvelle édition un Ecrit de M. de la Place, ſur la théorie des nombres premiers; théorie très-piquante par elle-même, & qui le devient encore plus par la manière ingénieuſe & neuve dont l'Auteur l'a ici traitée.

On prie le Lecteur de commencer par corriger à la main les fautes marquées dans l'Errata *qui accompagne cet Ouvrage.*

TABLE
DES MATIERES.

Fin de la Table.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ALGÉBRE.

CHAPITRE I.

Définitions & Notions préliminaires.

1. L'ALGÉBRE est une Science qui considère les grandeurs abstraites en général, & qui les compare ensemble suivant le même esprit que l'Arithmétique compare les nombres. C'est pour cela que plusieurs Auteurs donnent à l'Algébre le nom d'*Arithmétique universelle*.

2. TOUT ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution s'appelle *grandeur*. L'Algébre représente les grandeurs en général par les lettres a, b, c,

d, &c de l'alphabet ; & ſans ſonger aux valeurs individuelles qu'elles ont dans chaque cas, elle les compare enſemble de toutes les manières poſſibles, ſoit en les compoſant par l'addition & la multiplication, ſoit en les décompoſant par la ſouſtraction & la diviſion. Elle trouve par ce moyen des réſultats généraux, qui ſont enſuite ſuſceptibles d'une infinité d'applications particulières, ſuivant les différentes valeurs numériques qu'on voudra attribuer aux lettres qu'ils renferment.

3. A l'avantage qui réſulte de la généralité des ſymboles, l'Algébre réunit encore celui d'employer certains ſignes qui rendent ſa langue extrêmement ſimple & laconique. J'ai déja fait connoître en partie ces ſignes dans l'Arithmétique ; mais il eſt bon de les remettre ici ſous les yeux du Lecteur, avec ceux que je n'ai pas eu occaſion d'expliquer.

4. Le ſigne $+$ ſignifie *plus*. C'eſt le caractère de l'addition. Ainſi, l'expreſſion $+a+b$, indique l'addition de la grandeur repréſentée par a, avec la grandeur repréſentée par b.

Une quantité qui n'a pas de ſigne, eſt cenſée précédée du ſigne $+$. Ordinairement on ſupprime ce ſigne, lorſqu'il commence une phraſe algébrique. Par exemple, au lieu d'écrire, comme on vient de faire, $+a+b$, on écrit ſimplement $a+b$. Dans cette dernière expreſſion, le ſigne $+$ eſt ſous-entendu audevant de a.

5. Le ſigne $-$, mis entre deux quantités écrites l'une à la ſuite de l'autre, ſignifie *moins*, & veut dire

que la ſeconde quantité eſt ſouſtraite de la premiere, ou que la ſeconde eſt priſe dans un ſens contraire à celui qu'on attribue à la première, comme je l'expliquerai ci-deſſous. Ainſi, l'expreſſion $a - b$ indique que la grandeur b eſt ſouſtraite de la grandeur a, ou que ſi l'on a pris a dans un ſens, on doit prendre b dans le ſens contraire. La quantité a qui commence la phraſe, eſt cenſée affectée du ſigne $+$.

6. Le ſigne $\times$ ſignifie *multiplié par*. Ainſi, $a \times b$ veut dire, a *multiplié par* b. Les deux grandeurs a & b ſont cenſées chacune affectées du ſigne $+$. De même, $a \times b \times c$ repréſente le produit des trois grandeurs a, b, c multipliées enſemble.

Ordinairement, quand il s'agit d'indiquer la multiplication de deux ou d'un plus grand nombre de quantités ſimples, on ſupprime le ſigne $\times$, & on ſe contente d'écrire ces quantités les unes à côté des autres. Ainſi, au lieu de $a \times b$, on écrit ab; au lieu de $a \times b \times c$, on écrit abc; au lieu de $a \times b \times c \times d$, on écrit $abcd$.

Quelquefois, au lieu du ſigne $\times$, on met un point. Ainſi, pour $a \times b$, on écrit $a.b$; pour $a \times b \times c$, on écrit $a.b.c$; &c.

Lorſqu'une quantité compoſée de pluſieurs parties ſéparées par les ſignes $+$ & $-$, doit être multipliée par une autre quantité ſimple ou compoſée, on enferme entre deux parenthèſes toutes les parties qui doivent former une quantité; & on regarde le réſultat, comme une quantité ſimple à multiplier par une autre quantité ſimple. Ainſi, l'expreſſion

$(a+b-d)\times g$, veut dire que la quantité $(a+b-d)$, regardée comme ne formant qu'un même tout, eſt multipliée par la quantité g. De même, $(a+b-d)\times(g+h-k)$, veut dire que les deux quantités $(a+b-d)$, $(g+h-k)$, regardées comme formant chacune un tout particulier, ſont multipliées enſemble. Les mêmes multiplications peuvent s'indiquer autrement ; pour $(a+b-d)\times g$, on peut écrire $(a+b-d).g$, ou $\overline{a+b-d}\times g$, ou $\overline{a+b-d}.g$; pour $(a+b-d)\times(g+h-k)$, on peut écrire $(a+b-d).(g+h-k)$, ou $\overline{a+b-d}\times\overline{g+h-k}$, ou $\overline{a+b-d}.\overline{g+h-k}$. Il vaut mieux, pour prévenir toute équivoque, enfermer les quantités compoſées, entre des parenthèſes, que de mettre des barres au-deſſus d'elles.

7. Le ſigne —, placé entre deux quantités écrites l'une au-deſſus de l'autre, indique le quotient de la quantité ſupérieure diviſée par l'inférieure. Ainſi, $\frac{a}{b}$ repréſente le quotient de la quantité a diviſée par la quantité b. Les deux quantités a & b ſont cenſées chacune affectées du ſigne $+$.

Quelquefois on indique la diviſion de deux grandeurs, en les ſéparant par deux points. Ainſi, $a:b$ veut dire la même choſe que $\frac{a}{b}$; $(a+b+c-d):(g-h-k)$ eſt la même choſe que $\frac{a+b+c-d}{g-h-k}$.

8. POUR désigner qu'une quantité est égale à une autre, on se sert du caractère $=$ qui veut dire *est égal*. Ainsi, $a=b$ signifie, a *est égal à* b.

9. LE signe $>$ ou $<$, mis entre deux quantités, signifie que celle qui est du côté de l'ouverture de ce signe, est la plus grande, ou bien que celle qui est du côté de la pointe, est la plus petite. Ainsi, $a>b$, veut dire, a *plus grand que* b, ou, ce qui est la même chose, b *plus petit que* a. De même, $a<b$, veut dire, a *plus petit que* b, ou, ce qui est la même chose, b *plus grand que* a.

10. LE signe $\sqrt{}$, placé au-devant d'une quantité, indique une certaine racine de cette quantité. On écrit, sur la tête du radical, le chiffre 2, ou 3, ou 4, ou 5, &c, pour désigner la racine quarrée, ou la racine cube, ou la racine quatrième, ou la racine cinquième, &c. Lorsqu'il s'agit de la racine quarrée, on s'abstient ordinairement d'écrire l'indice; en sorte que tout radical qui n'a point d'indice est censé un radical du second degré. Ainsi, l'expression $\sqrt[2]{a}$, ou $\sqrt{a}$, représente la racine quarrée de a; l'expression $\sqrt{[a+b-d]}$ représente la racine quarrée de la quantité $[a+b-d]$ regardée comme ne formant qu'un même tout; l'expression $\sqrt[3]{a}$ indique la racine cube ou troisième de a; l'expression $\sqrt[3]{[a+b-d]}$ représente la racine cube de la quantité $[a+b-d]$ regardée comme ne formant qu'un même tout; l'expression $\sqrt[4]{a}$ désigne la racine quatrième de a; &c.

11. ON appelle *quantité simple* ou *monome*, une

quantité qui ne contient qu'une ſeule partie, un ſeul *terme*, ou qui n'eſt précédée que d'un ſeul ſigne exprimé ou ſous-entendu. Ainſi, *a* eſt un monome; —*b* eſt un monome. Le produit de pluſieurs quantités ſimples, comme *abc* qui eſt le produit des trois facteurs *a*, *b*, *c*, eſt encore un monome, parce qu'on regarde ce produit comme ne formant qu'un même tout.

12. LES lettres qui compoſent un monome, en ſont appellées les *dimenſions*; chaque lettre eſt une dimenſion particulière. Ainſi, *a* eſt un monome d'une ſeule dimenſion; *ab* eſt un monome de deux dimenſions; *abc* eſt un monome de trois dimenſions; ainſi de ſuite.

13. COMME le quarré d'une quantité eſt le produit de cette quantité multipliée *une fois* par elle-même; que le cube eſt le produit de la quantité multipliée *deux fois* par elle-même; ainſi de ſuite: on voit que le nombre des dimenſions du quarré, ou du cube, ou de la quatrième puiſſance, ou, &c, eſt *double*, ou *triple*, ou *quadruple*, ou, &c, de celui des dimenſions de la racine. Car, par exemple, le quarré de la quantité *a* qui a une dimenſion, eſt $a \times a$ ou *aa* qui a deux dimenſions; le cube de la même quantité *a* eſt $a \times a \times a$, ou *aaa*, qui a trois dimenſions; la quatrième puiſſance de *a* eſt $a \times a \times a \times a$, ou *aaaa*, qui a quatre dimenſions; &c.

14. DONC, réciproquement le nombre des dimenſions de la racine quarrée, ou cube, ou quatrième, ou, &c, n'eſt que la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou,

&c, de celui des dimenſions du quarré, ou du cube, ou de la quatrième puiſſance, ou, &c. Ainſi, par exemple, la quantité $\sqrt{ab}$ n'eſt que d'une dimenſion, puiſque le produit ab, dont on indique la racine quarrée, eſt de deux dimenſions. De même, les quantités $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt[4]{abcd}$, $\sqrt[5]{abcde}$, ne ſont que d'une dimenſion. On voit ſemblablement que les quantités $\sqrt{aabb}$, $\sqrt[3]{abcdef}$, $\sqrt[4]{aabccdde}$, ſont de deux dimenſions.

15. ON appelle *quantité complexe*, ou *polynome*, une quantité compoſée de pluſieurs termes ſéparés les uns des autres par les ſignes + & —. Ainſi, $a+b+c-d$ eſt un polynome. On voit qu'un polynome n'eſt autre choſe que l'aſſemblage de pluſieurs monomes.

16. LORSQUE tous les termes d'un polynome ont le même nombre de dimenſions, ce polynome eſt *homogène*. Ainſi, le polynome $a+b-c$ eſt homogène; chacun de ſes termes eſt d'une dimenſion. De même, le polynome $a+b-\sqrt{cd}$, eſt homogène, chacun de ſes termes ayant une dimenſion. Le polynome $ab+cd-\sqrt[3]{fghkmn}$, eſt auſſi homogène; il a deux dimenſions à chacun de ſes termes. Mais les polynomes $a+bc-d$, $ab+cd-\sqrt[3]{fgh}$, ne ſont homogènes ni l'un ni l'autre.

17. LES quantités qu'on compare enſemble dans un même calcul, ou qui forment le réſultat de quelques opérations, ſont toujours homogènes, c'eſt-à-dire, contiennent réellement ou implicitement le même nombre de dimenſions à tous leurs termes. Car on ne peut comparer enſemble que des quantités de même nature;

& chaque lettre qui entre dans un terme d'un polynome, a néceſſairement ſa lettre correſpondante dans un autre terme.

18. QUOIQUE les quantités qui compoſent un même polynome, ſoient toujours du même genre, en ce ſens qu'elles ont toutes le même nombre de dimenſions exprimées ou ſous-entendues ; elles peuvent d'ailleurs être oppoſées entr'elles, quant à leur manière d'exiſter; & pour marquer cette oppoſition, on diſtingue en général ces quantités, en qnantités *poſitives* & quantités *négatives*. Cette diſtinction eſt très-importante; je vais tâcher de la faire bien comprendre par des exemples.

Suppoſons qu'un homme ait *mille* livres de biens ou de dettes : vous exprimerez également l'une ou l'autre quantité par le même ſymbole 1000₶. Et en général, pour déſigner un bien ou une dette, d'une manière indéterminée, vous pourrez employer une même lettre a. Cependant, comme les biens & les dettes ſont des quantités qui affectent différemment l'état d'un homme, & que ces quantités peuvent ſe trouver mêlées enſemble dans un même calcul, on eſt convenu de les diſtinguer, en appellant les unes *quantités poſitives*, les autres *quantités négatives*, & en mettant le ſigne $+$ au-devant des quantités poſitives, & le ſigne $-$ au-devant des quantités négatives. Ainſi, pour dire algébriquement qu'un homme a un bien exprimé par a, on écrit $+a$; & pour dire qu'il a une dette exprimée par a, on écrit $-a$. Si un homme a un bien exprimé par a & une dette exprimée par b, on repréſente ſon état par $+a-b$, ou par $a-b$, en ſous-entendant le ſigne + au-devant de la lettre *a* qui commence la phraſe algébrique.

On voit ſemblablement que ſi, en partant d'un même point, le mouvement vers l'occident entre, comme quantité poſitive, dans un calcul; le mouvement vers l'orient, qui eſt oppoſé au premier mouvement, devra entrer dans le même calcul, comme quantité négative. Si les élévations du Soleil au-deſſus de l'horiſon, ſont conſidérées comme des quantités poſitives, les abaiſſemens du Soleil au-deſſous de l'horiſon devront être traités comme des quantités négatives. Il en eſt de même de toutes les quantités qui exiſtent différemment les unes par rapport aux autres.

19. Il peut arriver qu'une quantité qui ſe préſente dans un calcul, ou poſitivement ou négativement, ſoit impoſſible, autrement *imaginaire*. Ces ſortes de quantités proviennent de quelque incompatibilité entre les conditions d'une queſtion. Nous en parlerons dans la ſuite plus expreſſément & plus clairement.

CHAPITRE II.

Addition des quantités Algébriques.

20. AJOUTER enſemble pluſieurs quantités, c'eſt les joindre, les prendre à-la-fois avec les ſignes qu'elles ont. Ainſi, ajouter enſemble pluſieurs biens, c'eſt former un bien plus grand ; ajouter enſemble pluſieurs dettes, c'eſt former une dette plus grande ; ajouter un bien avec une dette, c'eſt former un réſultat qui eſt l'excès du bien ſur la dette, ou de la dette ſur le bien, ſelon que le bien eſt plus grand que la dette, ou que la dette eſt plus grande que le bien.

21. IL eſt clair par-là qu'en Algébre, *ajouter* ne ſignifie pas toujours *augmenter*. Quand j'ajoute un bien avec un bien, j'augmente le bien ; de même quand j'ajoute une dette avec une dette, j'augmente la dette. Mais quand je joins un bien avec une dette, je *diminue* réellement l'une ou l'autre quantité.

22. DONC, *pour ajouter enſemble pluſieurs monomes, il faut les écrire les uns à la ſuite des autres, avec les ſignes* + & — *qu'ils ont*. Si dans le réſultat, la ſomme des quantités poſitives l'emporte ſur la ſomme des quantités négatives, c'eſt une marque qu'il y a plus de biens que de dettes ; au contraire, il y auroit plus de dettes que de biens, ſi la ſomme des quantités néga-

tives l'emportoit ſur la ſomme des quantités poſitives. Par exemple, qu'il s'agiſſe d'ajouter enſemble les quatre monomes $+a$, $+b$, $-c$, $+d$? On écrira $+a+b-c+d$, ou bien $a+b-c+d$, en ſous-entendant le ſigne $+$ qui commence la phraſe.

23. L'ADDITION des polynomes eſt fondée ſur celle des monomes ; car il eſt clair qu'un tout étant égal à la ſomme de toutes ſes parties priſes enſemble, on aura la ſomme de pluſieurs polynomes, en joignant enſemble tous les termes dont ils ſont composés, & en les affectant des ſignes qu'ils ont.

EXEMPLE I.

Ajouter enſemble les trois polynomes

$$\begin{array}{c} a+b-c, \\ g-h-k, \\ m+n-p? \\ \hline \end{array}$$

Somme $a+b-c+g-h-k+m+n-p$.

EXEMPLE II.

Ajouter enſemble les quatre polynomes

$$\begin{array}{c} a+b+c-d, \\ b-f+g+a, \\ c+e-b+g, \\ h+c+n-d? \\ \hline \end{array}$$

Somme $a+b+c-d+b-f+g+a+c+e-b+g+h+c+n-d$.

24. LORSQUE dans la ſomme il ſe trouve des termes *ſemblables*, c'eſt-à-dire, des termes qui contiennent la

même lettre, s'ils n'ont qu'une dimension ; ou les mêmes lettres, s'ils ont plus d'une dimension : alors au lieu d'écrire plusieurs fois le même terme, on ne l'écrit qu'une seule fois, mais on met au-devant un chiffre qui marque combien de fois ce terme doit être répété. Cela s'appelle *faire la réduction*. Ainsi, dans l'exemple précédent, au lieu de $a+a$, j'écris $2a$; au lieu de $+b+b-b$, j'écris simplement $+b$, parce que l'un des biens, $+b$, est détruit par la dette $-b$, & que par conséquent le résultat du tout $+b+b-b$ est simplement $+b$; au lieu de $+c+c+c$, j'écris $+3c$; au lieu de $-d-d$, j'écris $-2d$; enfin, au lieu de $+g+g$, j'écris $+2g$. Par toutes ces réductions, notre somme devient $2a+b+3c-2d-f+2g+e+h+n$.

Le chiffre qu'on place ainsi au-devant d'une quantité pour marquer combien de fois elle doit être répétée positivement ou négativement, s'appelle *coéfficient*.

Lorsqu'une quantité n'a point de coéfficient, elle est censée avoir l'unité pour coéfficient. Ainsi, a est la même chose que $1a$; ab est la même chose que $1ab$.

Voici encore deux exemples d'additions de polynomes, avec les réductions.

EXEMPLE I.

Ajouter ensemble les polynomes

$$\begin{array}{rl}
 & 3a-2b+4c-8d, \\
 & -8a+7b-5c+4d, \\
 & 3a-4b+6h? \\
\hline
\text{Somme} & -2a+b-c-4d+6h.
\end{array}$$

EXEMPLE II.

Ajouter ensemble les polynomes

$$6aa - 5bc + 3k\sqrt{de},$$
$$-7aa + 3bc - 2k\sqrt{de},$$
$$2mn - f\sqrt[3]{mnp} + ff - gh?$$

Somme $-aa - 2bc + k\sqrt{de} + 2mn - f\sqrt[3]{mnp} + ff - gh.$

CHAPITRE III.

Soustraction des quantités Algébriques.

25. SOUSTRAIRE une quantité d'une autre, c'est prendre la première dans un sens contraire à celui qu'elle a. Ainsi; soustraire un bien, c'est poser une dette; soustraire une dette, c'est poser un bien.

26. ON voit donc que *soustraire* n'est pas toujours *diminuer*. Quand je soustrais un bien d'un bien, je diminue celui-ci : mais quand d'un bien je soustrais une dette, *j'augmente* réellement le bien, puisqu'un homme à qui l'on ôte une dette, devient plus riche de la quantité qui exprime cette dette.

27. DONC, *pour retrancher un monome d'une autre quantité quelconque, il faut changer le signe + ou — de ce monome, & l'écrire en cet état à la suite de la quantité*

proposée. Le résultat exprimera un bien ou une dette, selon qu'il sera positif ou négatif.

Par exemple, si de la quantité $a+b$, il s'agit de retrancher le monome $+c$, on écrira pour reste $a+b-c$.

Si de la quantité $a+b$, on veut retrancher le monome $-c$, on écrira pour reste $a+b+c$.

28. La soustraction des polynomes se fait en changeant les signes de tous les termes de la quantité à soustraire. Quand il se trouve dans le résultat des termes semblables, on fait la réduction, comme nous l'avons expliqué pour l'addition.

EXEMPLE I.

De.......... $6a-4b+5c$,

soustraire...... $4a-6b+9c$?

reste $6a-4b+5c-4a+6b-9c$,

ou bien en faisant la réduction, $2a+2b-4c$.

EXEMPLE II.

De... $-5aa+5bc+4g\sqrt{cd}$,

soustraire $+3aa-2g\sqrt{cd}-f\sqrt[3]{mnp}$,

reste $-5aa+5bc+4g\sqrt{cd}-3aa+2g\sqrt{cd}+f\sqrt[3]{mnp}$, ou bien en faisant la réduction, $-8aa+5bc+6g\sqrt{cd}+f\sqrt[3]{mnp}$.

CHAPITRE IV.

Multiplication des quantités Algébriques.

29. MULTIPLIER une quantité par une autre, c'eſt répéter la première autant de fois qu'il y a d'unités dans la ſeconde ; & de plus, la répéter dans le ſens de la ſeconde, c'eſt-à-dire, l'ajouter ou la prendre avec ſes ſignes, tels qu'ils ſont, ſi le multiplicateur eſt poſitif; ou bien la ſouſtraire, & par conſéquent changer ſes ſignes, ſi le multiplicateur eſt négatif. Tout cela ſuit clairement des idées que nous avons données de l'addition & de la ſouſtraction.

30. DONC, 1°. ſi le multiplicande & le multiplicateur ſont poſitifs, le produit ſera poſitif, puiſqu'un bien ajouté un certain nombre de fois avec lui-même, ne peut produire qu'un bien. Ainſi, $+a \times +b$, donne $+ab$. Cette régle s'exprime ainſi en général, $+ \times +$ *donne* $+$.

2°. Si le multiplicande eſt négatif, & le multiplicateur poſitif, le produit ſera négatif, puiſqu'une dette ajoutée un certain nombre de fois avec elle-même, ne peut produire qu'une dette. Ainſi, $-a \times +b$, donne $-ab$. Cette regle s'exprime ainſi en général, $- \times +$ *donne* $-$.

3°. Si le multiplicande eſt poſitif, & le multiplicateur négatif, le produit ſera négatif, puiſqu'un bien ſouſtrait un certain nombre de fois, opère dans l'état d'un homme le même effet qu'une dètte exprimée par la même valeur, & que par conſéquent ces deux effets doivent être déſignés par le même caractère $-$. Cette régle s'exprime ainſi en général, $+ \times -$ *donne* $-$.

4°. Si le multiplicande & le multiplicateur ſont tous deux négatifs, le produit ſera poſitif, puiſqu'une dette ſouſtraite un certain nombre de fois, opère dans l'état d'un homme le même effet qu'un bien exprimé par la même valeur, & que par conſéquent ces deux effets doivent être déſignés par le même caractère $+$. Cette régle s'exprime ainſi en général $- \times -$ *donne* $+$.

31. Les quantités qu'on doit multiplier enſemble peuvent être libres ou non de ſignes radicaux. Dans le premier cas, on les appelle *quantités rationnelles*, & dans le ſecond on les nomme *quantités radicales*. Nous allons traiter d'abord de la multiplication des quantités rationnelles, c'eſt-à-dire, de la multiplication, en ſuppoſant que ni le multiplicande, ni le multiplicateur, ne contiennent de ſignes radicaux; nous parlerons enſuite de la multiplication des quantités radicales.

SECTION I.

Multiplication des quantités rationnelles.

32. La première opération que nous avons à faire ici, & celle d'où dépendent toutes les autres, est de savoir multiplier un monome rationnel par un autre monome rationnel. Elle se fait, en écrivant le signe qui doit précéder le produit, conformément à la régle établie (30), & en écrivant ensuite, les unes à côté des autres, les lettres dont les deux facteurs de la multiplication sont composés. Ainsi, par exemple, pour multiplier $+a$ par $+b$, on écrira $+ab$; pour multiplier $+ab$ par $-c$, on écrira $-abc$; pour multiplier $-abc$ par $+de$, on écrira $-abcde$; pour multiplier $-gh$ par $-mn$, on écrira $+ghmn$.

33. Lorsque deux monomes qu'on doit multiplier ensemble, ont des coéfficients, autres que l'unité, après avoir écrit le signe qui doit précéder le produit, il faut multiplier ensemble les coéfficients, suivant les régles de l'Arithmétique, & ensuite écrire les quantités littérales les unes à côté des autres. Par exemple, qu'on ait à multiplier $+3a$ par $-5b$, on écrira $-15ab$. De même, le produit de $-4cd$ par $-8f$, est $+32cdf$; le produit de $-7ab$ par $+3fg$, est $-21abfg$.

34. Il arrive souvent qu'une même lettre doit être multipliée une fois ou plusieurs fois par elle-même: alors pour éviter les répétitions de cette lettre, &

pour plus de clarté, on ſe contente de l'écrire une ſeule fois, & on met à ſa droite un petit chiffre un peu élevé, qu'on appelle *expoſant*, lequel marque combien de fois la lettre devroit être écrite comme facteur. Par exemple, qu'on ait le produit $a \times a$, au lieu d'écrire aa, on écrit a^2; pour le produit $a \times a \times a$, au lieu d'écrire aaa, on écrit a^3; pour le produit $a \times a \times a \times a$, on écrit a^4; ainſi de ſuite.

Lorſqu'une lettre n'a pas d'expoſant, elle eſt cenſée avoir l'unité pour expoſant. Ainſi, a eſt la même choſe que a^1.

Les expoſants ſont ſur-tout d'uſage pour les cas où une même lettre doit être écrite plus de deux fois comme facteur; car on ne s'en ſert pas quelquefois, lorſqu'une lettre doit être écrite deux fois ſeulement; ainſi pour aa, on écrit indifféremment aa ou a^2.

On doit bien prendre garde à ne pas confondre l'expoſant avec le coéfficient. Celui-ci marque qu'une quantité doit être *ajoutée* avec elle-même une fois, deux fois, &c, & l'autre, qu'une quantité doit être *multipliée* par elle-même une fois, deux fois, &c. Ainſi, $2a$ n'eſt pas la même choſe que a^2. En effet, ſoit, par exemple, $a = 3$; $2a$ ou $a + a$ ſera $3 + 3$, c'eſt-à-dire, 6; & a^2 ſera $a \times a$, ou 3×3, c'eſt-à dire, 9.

35. Il réſulte de la nature de l'expoſant, que ſi l'on veut multiplier enſemble des monomes qui contiennent la même lettre avec des expoſants différents, il faudra écrire une fois ſeulement cette lettre, & lui donner pour expoſant, la ſomme des expoſants des facteurs. Ainſi, le produit de a par a^2, eſt a^{1+2} ou a^3; le

produit de a^2 par a^3, eſt a^5; le produit de a^3 par a^4, eſt a^7; le produit de $-a^2b^2$ par a^5b^3, eſt $-a^7b^5$; le produit de $-4a^2$ par $-5a^3b^2$, eſt $+20a^5b^2$; le produit de $-5a^2b^2c^2$ par $-3ab^5c^4$ eſt $+15a^3b^7c^6$.

Tout cela eſt clair, puiſque le produit de a par a^2 eſt la même choſe que $a \times a \times a$ ou a^3; que le produit de a^2 par a^3, eſt la même choſe que $a \times a \times a \times a \times a$ ou a^5; ainſi des autres.

36. NOUS ſommes maintenant en état de multiplier un polynome par un monome; car il ne s'agit pour cela que de multiplier ſucceſſivement tous les termes du polynome, par ce monome, en ayant égard à la régle des ſignes, à celle des coéfficients, & à celle des expoſants. La ſomme de tous ces produits partiels ſera le produit total.

EXEMPLE.

Multiplier le polynome . . . $a^2 - 5ab + 7cd$
par le monome . . . . $-5ac$?

Produit $-5a^3c + 25a^2bc - 35ac^2d$.

37. QU'ON ait à multiplier un polynome par un autre polynome: on multipliera ſucceſſivement tous les termes du multiplicande, par tous ceux du multiplicateur; & on ajoutera enſemble tous ces produits partiels, pour avoir le produit total. On fera dans ce produit les réductions convenables (24).

EXEMPLE I.

Multiplier .... $3a^2 - 5bd + cf$
par .... $-5a^2 + 4bd - 8cf$?

1^er produit $-15a^4 + 25a^2bd - 5a^2cf$;
2^e produit $+12a^2bd - 20b^2d^2 + 4bcdf$;
3^e produit $-24a^2cf + 40bcdf - 8c^2f^2$.

Produit total $-15a^4 + 37a^2bd - 29a^2cf - 20b^2d^2 + 44bcdf - 8c^2f^2$.

On voit que le multiplicande $3a^2 - 5bd + cf$ a été d'abord multiplié par $-5a^2$, puis par $+4bd$, enfin par $-8cf$; & qu'enſuite on a ajouté enſemble tous les produits partiels ; ce qui a donné, toutes réductions faites, le produit total écrit ci-deſſus.

EXEMPLE II.

Multiplier . . $-5a^2b + ab^2 - cd^2 + 8fgh$,
par .... $-9ab + 4f^2 - 15mn + 9cd$?

1^er prod. $+45a^3b^2 - 9a^2b^3 + 9abcd^2 - 72abfgh$;
2^e prod. $-20a^2bf^2 + 4ab^2f^2 - 4cd^2f^2 + 32f^3gh$;
3^e prod. $+75a^2bmn - 15ab^2mn + 15cd^2mn - 120fghmn$;
4^e prod. $-45a^2bcd + 9ab^2cd - 9c^2d^3 + 72cdfgh$.

Produit total $45a^3b^2 - 9a^2b^3 + 9abcd^2 - 72abfgh - 20a^2bf^2 + 4ab^2f^2 - 4cd^2f^2 + 32f^3gh + 75a^2bmn - 15ab^2mn + 15cd^2mn - 120fghmn - 45a^2bcd + 9ab^2cd - 9c^2d^3 + 72cdfgh$.

38. Il peut ſe faire qu'on ait à multiplier enſemble plus de deux quantités. Alors il faut commencer par multiplier, l'une par l'autre, deux de ces quantités, puis multiplier leur produit par la troiſième, ce qui donnera un ſecond produit, qu'on multipliera par la quatrième ; ainſi de ſuite. On voit aſſez qu'il eſt indifférent de prendre les facteurs dans tel ordre qu'on voudra.

EXEMPLE I.

Effectuer la multiplication indiquée $-6a^2 \times -4bc \times +3mn \times -9gh$?

Je multiplie d'abord $-6a^2$ par $-4bc$; le produit eſt $+24a^2bc$, que je multiplie enſuite par $+3mn$; le ſecond produit eſt $+72a^2bcmn$, que je multiplie par $-9gh$; le troiſième produit eſt $-648a^2bcmngh$, & c'eſt le réſultat de la multiplication indiquée.

EXEMPLE II.

Effectuer la multiplication indiquée $(a-b) \times (3a^2-2b^2) \times (5m^3+6n^3)$?

Je commence par multiplier $a-b$ par $3a^2-2b^2$; ce qui me donne le produit $3a^3-3a^2b-2ab^2+2b^3$. Enſuite je multiplie ce produit par $5m^3+6n^3$; ce qui me donne le produit cherché $15a^3m^3-15a^2bm^3-10ab^2m^3+10b^3m^3+18a^3n^3-18a^2bn^3-12ab^2n^3+12b^3n^3$.

SECTION II.

Multiplication des quantités radicales.

39. Lorsque parmi les facteurs d'une multiplication, il se trouve des quantités radicales, la multiplication se fait, comme je l'expliquerai tout-à-l'heure, après avoir enseigné la manière de présenter les quantités radicales sous une forme qui les rend susceptibles des mêmes calculs qu'on fait sur les quantités rationnelles. Voici en quoi consiste ce moyen. Nous en avons déja indiqué l'esprit (13 & 14).

40. Soit la quantité a, ou, ce qui est la même chose (34), a^1; & qu'on éleve cette quantité successivement au quarré, au cube, à la quatrième puissance, à la cinquième puissance, & en général à une puissance dont le numéro, suivant l'ordre de dénomination, est le nombre entier n; on formera la suite,

1re puiss.	2e puiss.	3e puiss.	4e puiss.	5e puiss.	ne puiss.
a^1,	a^2,	a^3,	a^4,	a^5, ...	a^n,

dans laquelle on voit que les exposants des puissances seconde, troisième, quatrième, &c, sont les produits de l'exposant 1 de la première puissance, par les nombres 2, 3, 4, &c.

On voit pareillement que le quarré d'une quantité telle que a^p est a^{2p}, que son cube est a^{3p}, que sa quatrième puissance est a^{4p}; ainsi de suite. Car le quarré de

a^p n'eſt autre choſe que $a^p \times a^p$; c'eſt-à-dire (35), a^{p+p}, ou a^{2p} ; le cube de a^p n'eſt autre choſe que $a^p \times a^p \times a^p$, c'eſt-à-dire, a^{p+p+p}, ou a^{3p} ; la quatrième puiſſance de a^p n'eſt autre choſe que $a^p \times a^p \times a^p \times a^p$; c'eſt-à-dire, $a^{p+p+p+p}$, ou a^{4p} ; &c.

En ſuivant le même principe, le quarré de $a^n b^p$ eſt $a^{2n} b^{2p}$; le cube de $a^n b^p$ eſt $a^{3n} b^{3p}$; &c.

41. Il ſuit de-là qu'en général l'expoſant du quarré eſt double de l'expoſant de la racine quarrée ; que l'expoſant du cube eſt triple de l'expoſant de la racine cube ; que l'expoſant de la quatrième puiſſance eſt quadruple de l'expoſant de la racine quatrième ; ainſi de ſuite.

42. Donc réciproquement, on tirera ou on indiquera la racine ſeconde, ou troiſième, ou quatrième, &c, d'une quantité propoſée, en prenant la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou, &c, de l'expoſant de cette quantité. Si cette même quantité contient pluſieurs lettres, il faut prendre la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c, de l'expoſant de chaque lettre. Ainſi, $\sqrt{a^2}$ eſt la même choſe que $a^{\frac{2}{2}}$, ou a^1, ou a ; $\sqrt[3]{a}$, ou $\sqrt[3]{a^1}$, eſt lam ême choſe que $a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{ab^2}$ eſt la même choſe que $a^{\frac{1}{2}}b$; $\sqrt[4]{a^2b^3c^5}$ eſt la même choſe que $a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{5}{4}}$, ou $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{5}{4}}$.

43. Cela poſé, il eſt facile de faire une multiplication, lorſque les facteurs contiennent des quantités radicales. Nous allons d'abord exécuter cette opération

pour les monomes ; elle n'a pas plus de difficulté pour les polynomes, puisque dans ce dernier cas, il ne s'agit, à chaque opération particulière, que de multiplier un monome par un monome, & d'ajouter ensuite tous les produits partiels ensemble, pour avoir le produit total.

44. JE suppose en premier lieu, pour aller du plus simple au plus composé, que l'un des facteurs de la multiplication soit une quantité radicale, l'autre étant une quantité rationnelle. Alors, après avoir écrit le signe qui doit affecter le produit, conformément à la régle de l'article 30, & après avoir multiplié ensemble les coéfficients, s'il y en a d'autres que l'unité, il faut écrire les quantités littérales rationnelles au-devant des quantités radicales. Ainsi, le produit de $+\sqrt{ac}$ par $-b$, est $-b\sqrt{ac}$, ou $-ba^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$; le produit de $+4d\sqrt{ac}$ par $-6b$ est $-24bd\sqrt{ac}$, ou $-24bda^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$; le produit de $-5f$ par $-\sqrt[3]{abf}$ est $+5f\sqrt[3]{abf}$, ou $+5fa^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}f^{\frac{1}{3}}$; le produit de $-7b\sqrt[4]{a^2c}$ par $-9ah$, est $+63ahb\sqrt[4]{a^2c}$, ou $+63ahba^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}$; le produit de $-6a^2$ par $+7c\sqrt[5]{a^4b^5}$ est $-42a^2c\sqrt[5]{a^4b^5}$, ou $-42a^2ca^{\frac{4}{5}}b$.

45. NOUS observerons que si dans le produit, une même lettre a un exposant entier & un exposant fractionnaire, comme cela arrive souvent, on peut n'écrire qu'une fois cette lettre, en l'affectant d'un exposant égal à la somme de ses exposants partiels. Les trois

derniers produits ſont dans ce cas. Ainſi, au lieu de $+5fa^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}f^{\frac{1}{3}}$, on peut écrire $+5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}f^{\frac{4}{3}}$; au lieu de $+63ahba^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}$, on peut écrire $+63hba^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{4}}$; au lieu de $-42a^2ca^{\frac{4}{5}}b$, on peut écrire $-42ca^{\frac{14}{5}}b$.

46. EN ſecond lieu, ſuppoſons que les deux facteurs de la multiplication ſoient des quantités radicales. Il peut arriver que les deux radicaux ſoient ou ne ſoient pas de la même eſpèce ; ce qui fait deux cas.

47. QUE les deux radicaux ſoient d'abord de même eſpèce, c'eſt-à-dire, ou tous les deux du ſecond degré, ou tous les deux du troiſième degré, &c. En ce cas, après avoir écrit le ſigne qui doit précéder le produit, & après avoir multiplié les coëfficients & les quantités entières, s'il y en a au-devant des radicaux, vous écrirez le ſigne radical commun aux deux facteurs de la multiplication, & à la ſuite de ce ſigne, les produits des lettres qui ſont après les ſignes radicaux de ces deux mêmes facteurs. Ainſi, le produit de $+\sqrt{a}$ par $+\sqrt{b}$, eſt $+\sqrt{ab}$, ou $+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; le produit de $+\sqrt{a}$ par $-\sqrt{b}$, eſt $-\sqrt{ab}$, ou $-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; le produit de $+\sqrt[3]{a}$ par $-\sqrt[3]{b}$, eſt $-\sqrt[3]{ab}$, ou $-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; le produit de $-8a\sqrt[4]{h}$ par $-5c\sqrt[4]{g}$, eſt $+40ac\sqrt[4]{hg}$, ou $+40ach^{\frac{1}{4}}g^{\frac{1}{4}}$; le produit de $-\sqrt[3]{[a+4b]}$ par $+6b\sqrt[3]{4b}$, eſt $-6b\sqrt[3]{[4ab+16bb]}$, ou $-6b[4ab+16bb]^{\frac{1}{3}}$; le produit de $\sqrt{[a+b]}$ par

$\sqrt{[a-b]}$, eſt $\sqrt{(a+b).(a-b)}$, ou $\sqrt{[a^2-b^2]}$; ou $[a^2-b^2]^{\frac{1}{2}}$; le produit de $+\sqrt{-a}$ par $+\sqrt{-a}$ eſt $+\sqrt{[-a]^{1+1}}$, ou $+\sqrt{[-a]^2}$, ou $+[-a]^{\frac{2}{2}}$, ou $+[-a]$; c'eſt-à-dire, $-a$, car le ſigne $+$ qui eſt au-devant de la parenthèſe dans l'expreſſion $+[-a]$, ſignifie qu'il faut ajouter la dette $-a$, ce qui donne $-a$.

48. LA raiſon de toutes ces opérations eſt fondée ſur ce principe, que le produit de la racine quarrée, ou cube, ou quatrième, &c, d'une quantité, par la racine ſemblable d'une autre quantité, eſt égal à la racine pareille du produit de ces deux quantités. Or, ce principe eſt évident ; car puiſque le quarré d'une quantité, telle que ab eſt a^2b^2, que ſon cube eſt a^3b^3, que ſa quatrième puiſſance eſt a^4b^4, &c, il s'enſuit réciproquement que $\sqrt{a^2b^2}=ab=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^2}$; que $\sqrt[3]{a^3b^3}=ab=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^3}$; ainſi des autres quantités pareilles.

49. SI les deux facteurs de la multiplication ſont des quantités radicales de différentes eſpèces, on commencera par les ramener à la même eſpèce, en ſubſtituant aux ſignes radicaux, les fractions exponentielles correſpondantes, & en réduiſant enſuite ces fractions au même dénominateur ; ce qui rappelle ce cas au précédent. Qu'on ait, par exemple, à multiplier $+\sqrt{a}$ par $+\sqrt[3]{b^2}$; pour $+\sqrt{a}$, j'écris $+a^{\frac{1}{2}}$, & pour $+\sqrt[3]{b^2}$, j'écris $+b^{\frac{2}{3}}$; je réduits (Arith. 91) les deux fractions

exponentielles $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ au même dénominateur ; elles deviennent $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, en forte que $+a^{\frac{1}{2}}$ est la même chose que $+a^{\frac{3}{6}}$, ou $+\sqrt[6]{a^3}$, & $+b^{\frac{2}{3}}$ est la même chose que $+b^{\frac{4}{6}}$, ou $+\sqrt[6]{b^4}$: or, par le cas précédent, le produit de $+\sqrt[6]{a^3}$ par $+\sqrt[6]{b^4}$, est $+\sqrt[6]{a^3b^4}$, ou $+a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{4}{6}}$.

50. On peut, au lieu de $+a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{4}{6}}$, écrire simplement $+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$, en laissant les fractions exponentielles sous leur première forme. Mais nous avons enseigné le moyen de ramener ces fractions, ou les radicaux qu'elles représentent, à la même dénomination, parce qu'il est utile de savoir faire & de pratiquer cette opération dans plusieurs cas.

On trouvera de la même manière que le produit de $-\sqrt[3]{a^2}$ par $+\sqrt[4]{b^3}$, est $-\sqrt[12]{a^8b^9}$, ou $-a^{\frac{8}{12}}b^{\frac{9}{12}}$, ou $-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$; que le produit de $-\sqrt{a}$ par $-\sqrt[5]{[a^3+b^3]}$, est $+\sqrt[10]{a^5[a^3+b^3]^2}$, ou $+a^{\frac{5}{10}}[a^3+b^3]^{\frac{2}{10}}$, ou $+a^{\frac{1}{2}}[a^3+b^3]^{\frac{1}{5}}$; que le produit de $+4a\sqrt[3]{a^2}$ par $-5c\sqrt[4]{b^3}$, est $-20ac\sqrt[12]{a^8b^9}$, ou $-20ac.a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$, ou $-20ca^{\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{4}}$.

51. Toutes ces opérations sont évidentes Pour en sentir la justesse, il suffit de voir qu'une quantité, telle que $a^{\frac{m}{n}}$, est la même chose que $a^{\frac{2m}{2n}}$, ou $a^{\frac{3m}{3n}}$, ou $a^{\frac{4m}{4n}}$, &c. Or, cette identité est manifeste. Car, par exemple,

en doublant l'exposant de $a^{\frac{m}{n}}$, c'est-à-dire, en écrivant $a^{\frac{2m}{n}}$, j'éleve $a^{\frac{m}{n}}$ au quarré, & en prenant ensuite la moitié de l'exposant $\frac{2m}{n}$, c'est-à-dire, en écrivant $a^{\frac{2m}{2n}}$, je tire la racine quarrée de $a^{\frac{2m}{n}}$. Ces deux opérations réunies ne changent donc rien à la valeur de $a^{\frac{m}{n}}$, & on a $a^{\frac{2m}{2n}} = a^{\frac{m}{n}}$. Ainsi des autres.

52. SI on avoit plus de deux quantités radicales à multiplier ensemble, on multiplieroit d'abord l'une par l'autre les deux premières, puis on multiplieroit le produit résultant, par la troisiéme; ainsi de suite. Par exemple, pour effectuer le produit $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[4]{c}$, je multiplie d'abord $\sqrt{a}$ par $\sqrt[3]{b}$, ce qui donne le produit $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$, ou $a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{2}{6}}$, ou $\sqrt[6]{a^3b^2}$; ensuite je multiplie ce produit par $\sqrt[4]{c}$, ou $c^{\frac{1}{4}}$, & j'ai $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}$, ou (en réduisant les trois fractions exponentielles au même dénominateur), $a^{\frac{12}{24}}b^{\frac{8}{24}}c^{\frac{6}{24}}$, ou $\sqrt[24]{a^{12}b^8c^6}$.

53. JE finis par un exemple de multiplication de polynomes, dans lequel on fera l'application de tout ce que nous avons prescrit pour la multiplication des monomes où il entre des radicaux. Le calcul de cet exemple s'exécute d'ailleurs à l'ordinaire, en multipliant tous les termes du multiplicande, par ceux du multiplicateur, & en ajoutant ensemble tous les produits partiels.

EXEMPLE.

Multiplier . . . . $-5a^2+7mn+\sqrt{abfh}$

par . . . . $-7m+8\sqrt[3]{a^2b}$?

Produit $35a^2m - 49m^2n - 7m\sqrt{abfh} - 40a^2\sqrt[3]{a^2b} + 56mn\sqrt[3]{a^2b} + 8\sqrt[6]{a^7b^5f^3h^3}$, ou $35a^2m - 49m^2n - 7m\sqrt{abfh} - 40a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 56mna^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 8a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}f^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}$.

CHAPITRE V.

Division des quantités Algébriques.

54. DIVISER une quantité par une autre, c'est en chercher une troisième, qui multipliant la seconde, donne un produit égal à la première. Le dividende peut donc être regardé comme le produit du diviseur par le quotient.

55. IL suit de-là & de l'article 30,

1°. Que si le dividende & le diviseur ont tous deux le signe $+$, le quotient aura aussi le signe $+$. Cette régle s'exprime ainsi en général, $\frac{+}{+}$ *donne* $+$.

2°. Si le dividende a le signe $+$, & le diviseur le signe $-$, le quotient aura le signe $-$. Cette régle s'exprime ainsi en général, $\frac{+}{-}$ *donne* $-$.

3°. Si le dividende a le ſigne —, & le diviſeur le ſigne +, le quotient aura le ſigne —. Cette régle s'exprime ainſi en général, $\frac{-}{+}$ *donne* —.

4°, Si le dividende & le diviſeur ont tous les deux le ſigne —, le quotient aura le ſigne +. Cette régle s'exprime ainſi en général, $\frac{-}{-}$ *donne* +.

Tout cela eſt évident, puiſque le produit du diviſeur par le quotient, doit avoir un ſigne qui ſoit celui du dividende.

SECTION I.

Diviſion des quantités rationnelles.

56. QU'ON ait d'abord un monome rationnel à diviſer par un autre monome rationnel : cette opération ſe fait en écrivant le ſigne qui doit précéder le quotient, conformément à la régle que nous venons de preſcrire, & en effaçant enſuite les lettres communes au dividende & au diviſeur. Ainſi, le quotient de la quantité $+ ab$, diviſée par la quantité $+ a$, eſt $+ b$; le quotient de la quantité $- abh$ diviſée par $+ ab$, eſt $- h$; le quotient de la quantité $- mnpq$, diviſée par $- nq$, eſt $+ mp$.

En effet, puiſqu'on multiplie (32), en écrivant les lettres les unes à côté des autres, & en affectant le produit du ſigne convenable, il eſt clair que réciproquement on diviſera, en effaçant les lettres communes au dividende & au diviſeur, & en affectant le quotient du ſigne convenable.

57. QUELQUEFOIS il n'y a pas de lettres communes au dividende & au diviſeur : alors la diviſion ne peut que s'indiquer. Par exemple, on ne peut qu'indiquer la diviſion de a par b ; & la manière de l'indiquer eſt $\frac{a}{b}$. Dans cette expreſſion, a doit être regardé comme le numérateur d'une fraction dont b eſt le dénominateur ; en ſorte que ſi a vaut 6, & b, 7, l'expreſſion $\frac{a}{b}$ revient à la fraction $\frac{6}{7}$.

Quelquefois les lettres du diviſeur ne ſe trouvent qu'en partie dans le dividende : alors la diviſion ſe fait en partie, & s'indique en partie. Ainſi, en diviſant $-abcd$ par $+abh$, le quotient eſt $-\frac{cd}{h}$; en diviſant $-mnpq$ par $-nrs$, le quotient eſt $+\frac{mpq}{rs}$.

58. LORSQUE le dividende ou le diviſeur, ou tous les deux, ont des coéfficients différents de l'unité, il faut diviſer, ſuivant les régles de l'Arithmétique, le coéfficient du dividende par celui du diviſeur, & enſuite diviſer les quantités littérales, comme nous venons de l'expliquer. Ainſi, qu'on ait à diviſer $-15\,abb$ par $+3\,ab$, le quotient eſt $-5\,b$. Le quotient de la quantité $-35\,mnpq$, diviſée par $-7\,amn$, eſt $+\frac{5\,pq}{a}$.

59. SI dans le dividende & dans le diviſeur, il ſe

trouve une même lettre avec des exposans différents, la division de ces deux quantités se fait en retranchant, de l'exposant du dividende, l'exposant du diviseur. Ainsi $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$; $\frac{8a^5b^2}{4a^3b} = 2a^{5-3}b^{2-1} = 2a^2b$; $\frac{5a^7b^4c^2}{7a^6b^2c} = \frac{5a^{7-6}b^{4-2}c^{2-1}}{7} = \frac{5ab^2c}{7}$. En effet, $\frac{a^4}{a^2}$ n'est autre chose que $\frac{aaaa}{aa}$, qui devient (en effectuant la division), aa ou a^2. De même, $\frac{8a^5b^2}{4a^3b} = \frac{8aaaaabb}{4aaab} = 2aab = 2a^2b$; ainsi des autres.

60. ON voit par-là que $a^0 = 1$; car $1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$. Ainsi, toute quantité élevée à la puissance 0 vaut 1; car une telle expression représente toujours le quotient d'une grandeur divisée par elle-même; quotient qui est nécessairement 1, puisque toute grandeur se contient une fois elle-même.

61. SI l'exposant d'une lettre dans le dividende est moindre que l'exposant de la même lettre dans le diviseur, on aura un reste négatif, en retranchant le second exposant du premier. Ainsi, $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$; $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = 7a^{3-5}b^{2-3} = 7a^{-2}b^{-1}$.

Il est évident que si on avoit commencé par supprimer les lettres communes au dividende & au diviseur, on on auroit eu $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = a^{-3}$; $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = \frac{7}{a^2b} = \frac{7a^0b^0}{a^2b^1} = 7a^{-2}b^{-1}$.

62. PAR-LA, on comprend la ſignification préciſe des expoſants négatifs qu'on employe fréquemment dans l'Algébre. Une lettre qui a un expoſant négatif, repréſente un diviſeur égal à cette lettre affectée du même expoſant pris poſitivement; c'eſt-à-dire, par exemple, que a^{-2}, ou $1a^{-2}$ eſt la même choſe que $\frac{1}{a^2}$; $4b^2a^{-5}$ eſt la même choſe que $\frac{4b^2}{a^5}$.

63. TOUT cela poſé, nous pouvons diviſer un polynome quelconque par un monome. Voici un exemple de cette opération, dans lequel on trouvera une application de toutes les régles précédentes. Les termes du dividende ſont diviſés ſucceſſivement par le diviſeur, & la ſomme de tous les quotients partiels, forme le quotient total.

Il eſt à propos, pour faciliter l'opération, d'*ordonner* le polynome, c'eſt-à-dire, d'écrire ſucceſſivement, en allant de gauche à droite, tous les termes où une lettre choiſie à volonté a les plus grands expoſants, & de diviſer enſuite, dans le même ordre, chaque terme du polynome par le diviſeur.

EXEMPLE.

Diviſer le polynome $a^2b^2 - 2a^3d + 4a^4 - 4abcd$, *par le monome* $-2a^2$?

Je commence par ordonner le polynome par rapport à la lettre *a* qui ſe trouve au dividende & au diviſeur ; je diſpoſe ces deux quantités, comme pour les quantités numériques, & comme on le voit ici. Enſuite je diviſe tous les termes du dividende par le diviſeur, & j'écris chaque quotient partiel, à meſure que je le trouve. La ſomme de tous les quotients partiels forme le quotient total.

Dividende.	Diviſeur.
$4a^4 - 2a^3d + a^2b^2 - 4abcd$	$-2a^2$.
	Quotient.
	$-2a^2 + ad - \frac{b^2}{2} + \frac{2bcd}{a}$.

64. QU'ON ait maintenant à diviſer un polynome par un polynome : on commencera par ordonner le dividende & le diviſeur par rapport à une même lettre ; puis on diviſera toutes les parties du dividende par le diviſeur, en ſuivant à peu près les mêmes procédés que dans l'Arithmétique. Cela s'entendra mieux par des exemples.

EXEMPLE I.

Diviſer le polynome . . . . $3ab^2 - 3a^2b + a^3 - b^3$,
par le polynome . . . . $-2ab + a^2 + b^2$?

	Dividende	Diviſeur.
Divid.	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,	$a^2 - 2ab + b^2$.
	$-a^3 + 2a^2b - ab^2$,	
1er reſte	$-a^2b + 2ab^2 - b^3$,	Quotient.
	$+a^2b - 2ab^2 + b^3$,	$a - b$
2e reſte	0	

J'ordonne d'abord le dividende & le diviſeur par rapport à la même lettre a.

Cela poſé, 1°. je diviſe le premier terme du dividende par le premier terme du diviſeur ; & comme ils ſont cenſés avoir tous les deux le ſigne $+$, le quotient aura auſſi le ſigne $+$ qu'on pourra ſupprimer, parce qu'il commence la phraſe. Or, en diviſant a^3 par a^2, on a pour quotient la lettre a que j'écris à l'endroit du quotient. Je multiplie le diviſeur entier $a^2 - 2ab + b^2$, par le quotient partiel a, ce qui donne le produit $a^3 - 2a^2b + ab^2$. Ce produit doit être retranché du dividende. Ainſi je l'écris, ſous le dividende, avec des ſignes contraires à ceux qu'il a ; & après avoir fait la réduction, c'eſt-à-dire, après avoir effacé les termes qui ſe trouvent avec des ſignes contraires au dividende, & au produit dont nous venons de parler, pris négativement, j'ai le reſte $- a^2b + 2ab^2 - b^3$ qu'il faut diviſer par le diviſeur $a^2 - 2ab + b^2$.

2°. Je fais cette ſeconde opération, en diviſant le premier terme $- a^2b$ du dividende, par le premier terme a^2 du diviſeur ; j'ai pour ſecond quotient partiel, $-b$ que j'écris à la ſuite de la première partie a du quotient total. Je multiplie le diviſeur entier, par $-b$; ce qui donne le produit $- a^2b + 2ab^2 - b^3$ que j'écris, avec des ſignes contraires, ſous le dividende. Et comme après avoir fait la réduction, il ne reſte rien, je conclus que le quotient exact de la quantité $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ diviſée par $a^2 - 2ab + b^2$, eſt $a - b$.

EXEMPLE II.

Divifer . . . . $a^5 + b^5$,

par . . . . $a + b$?

Dividende	$a^5 + b^5$,	Diviſeur $a + b$
	$-a^5 - a^4b$,	
1^{er} reſte	$-a^4b + b^5$,	Quotient.
	$+a^4b + a^3b^2$,	$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$.
2^{e} reſte	$a^3b^2 + b^5$,	
	$-a^3b^2 - a^2b^3$,	
3^{e} reſte	$-a^2b^3 + b^5$,	
	$+a^2b^3 + ab^4$,	
4^{e} reſte	$ab^4 + b^5$,	
	$-ab^4 - b^5$,	
5^{e} reſte	0	

1°. Le dividende & le diviſeur étant ordonnés par rapport à a, je diviſe le premier terme a^5 du dividende, par le premier terme a du diviſeur ; il vient le premier quotient partiel a^4 que j'écris à ſa place. Je multiplie le diviſeur $a+b$ par a^4 ; & j'écris le produit, avec des ſignes contraires, ſous le dividende ; il vient $-a^5 - a^4b$. Faiſant la réduction du dividende & de cette quantité, on a pour premier reſte, ou pour ſecond dividende partiel ordonné par rapport à a, la quantité $-a^4b + b^5$.

2°. Je diviſe le premier terme $-a^4b$ de ce dividende, par le premier terme a du diviſeur ; il vient le ſecond quotient partiel $-a^3b$ que j'écris à la ſuite du premier ; je multiplie $a+b$ par $-a^3b$; & j'écris le produit, avec des ſignes contraires, ſous le dividende ; il vient $a^4b+a^3b^2$. Faiſant la réduction, le ſecond reſte, ou le troiſiéme dividende partiel eſt $a^3b^2+b^5$.

3°. Je diviſe le premier terme a^3b^2 de ce dividende par a ; il vient au quotient $+a^2b^2$ que j'écris ; je multiplie le diviſeur $a+b$ par a^2b^2, & j'écris le produit, avec des ſignes contraires, ſous le dividende ; il vient $-a^3b^2-a^2b^3$. La réduction étant faite, on a $-a^2b^3+b^5$ pour troiſième reſte, ou pour quatrième dividende partiel.

4°. Je diviſe $-a^2b^3$ par a ; il vient $-ab^3$ pour quatrième quotient partiel ; je multiplie le diviſeur $a+b$ par $-ab^3$, & j'écris le produit, avec des ſignes contraires, ſous le dividende ; il vient $+a^2b^3+ab^4$. La réduction faite, on a ab^4+b^5 pour quatrième reſte, ou pour cinquième dividende partiel

5°. Je diviſe ab^4 par a ; il vient b^4 pour cinquième quotient partiel ; je multiplie $a+b$ par b^4, & j'écris le produit, avec des ſignes contraires, ſous le dividende ; il vient $-ab^4-b^5$. La réduction faite, on a o pour reſte. D'où je conclus que le quotient exact de la quantité a^5+b^5 diviſée par $a+b$, eſt $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$.

65. QUELQUEFOIS, après avoir ordonné le dividende & le diviſeur, par rapport à une lettre, il ſe trouve pluſieurs termes dans leſquels cette lettre a le même expoſant. Alors il faut diſpoſer tous ces termes dans une même colonne verticale.

EXEMPLE.

Diviser.... $10a^3 + 11a^2b - 19abc - 15a^2c + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$,
par..................$3ab + 5a^2 - 5bc$?

J'ordonne le dividende & le diviseur par rapport à la lettre a, & j'ai $10a^3 + 11a^2b - 15a^2c - 19abc + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$ à diviser par $5a^2 + 3ab - 5bc$. Or, comme dans le dividende, il y a deux termes qui contiennent a^2, & deux qui contiennent a, je dispose mon dividende & mon diviseur, comme on le voit ici.

$$
\begin{array}{ll|l}
\text{Divid.} & \left\{\begin{array}{l} 10a^3 + 11a^2b - 19abc + 15bc^2 - 5b^2c, \\ \quad - 15a^2c + 3ab^2 \end{array}\right. & \text{Diviseur.} \\
 & - 10a^3 - 6a^2b + 10abc, & 5a^2 + 3ab - 5bc. \\
\hline
1^{\text{er}}\ \text{reste} & \left\{\begin{array}{l} 5a^2b - 9abc + 15bc^2 - 5b^2c, \\ - 15a^2c + 3ab^2 \end{array}\right. & \text{Quotient.} \\
 & - 5a^2b - 3ab^2 + 5b^2c, & 2a + b - 3c. \\
\hline
2^{\text{e}}\ \text{reste} & - 15a^2c - 9abc + 15bc^2, & \\
 & + 15a^2c + 9abc - 15bc^2, & \\
\hline
3^{\text{e}}\ \text{reste} & \quad 0 &
\end{array}
$$

1°. Je divise $10a^3$ par $5a^2$; il vient $2a$ au quotient; je multiplie le diviseur par $2a$, & j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende. Puis ayant fait la réduction, j'ai le premier reste écrit ci-dessus.

2°. Je divise le premier terme $5a^2b$ de ce reste par $5a^2$; il vient $+b$ au quotient; je multiplie le diviseur par $+b$, & ayant écrit le produit, avec des ſignes contraires, ſous le dividende, puis ayant fait la réduction, on a un ſecond reſte écrit ci-deſſus.

3°. Je diviſe le premier terme $-15a^2c$ de ce reſte par $5a^2$, enſuite ayant fait les mêmes opérations que ci-devant, il ne reſte rien. Ainſi la diviſion eſt achevée, & le quotient exact eſt $2a+b-3c$.

66. LES Commençants doivent beaucoup s'exercer à la pratique de la diviſion. Ils acquerront l'habitude de faire cette opération facilement, & quelquefois même à la ſeule inſpection du dividende & du diviſeur, en multipliant enſemble des polynomes, & en diviſant enſuite le produit, par l'un des facteurs de la multiplication. C'eſt par les mêmes moyens qu'on apprend à décompoſer les quantités en leurs facteurs, lorſqu'elles en ont d'autres qu'elles-mêmes & l'unité. Par exemple, qu'on ait la quantité $aa-bb$: on voit ſans peine, avec un peu d'uſage du calcul, que cette quantité eſt compoſée des deux facteurs $a+b$, $a-b$, ou bien que $aa-bb=(a+b)\times(a-b)$. On voit de même que $m^2+n^2=(m+n\sqrt{-1})\times(m-n\sqrt{-1})$; que $aa+2ab+bb=(a+b)\times(a+b)=(a+b)^2$. Ces ſortes de décompoſitions ou de transformations ſont d'un fréquent uſage dans les calculs algébriques.

67. LORSQUE le diviſeur n'eſt pas contenu exactement dans le dividende, comme cela arrive très-ſouvent, la diviſion ne ſe fait qu'avec un reſte; elle reſſemble en tout à celle des quantités numériques. Par exemple, qu'on ait à diviſer $a^2+2ab+b^2+c^2$,

par $a+b$: on trouvera que le quotient eſt $a+b$, & que le reſte eſt c^2 ; de ſorte qu'en indiquant la diviſion de ce reſte, par le diviſeur, le quotient total eſt

$$a+b+\frac{c^2}{a+b}.$$

68. DANS ces ſortes de cas, où la diviſion ne peut pas ſe faire exactement, le quotient peut être repréſenté par une ſuite infinie de termes, dont chacun en particulier eſt un monome. Par-là, on ſe débarraſſe de toute quantité complexe au diviſeur, ce qui eſt ſouvent utile dans l'Algèbre. Cette opération ſe fait, en pouſſant la diviſion à l'infini, de la manière qu'on va expliquer ſur l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

Diviſer à l'infini c^2 par $a+b$?

$$\begin{array}{l|l}
\text{Divid. } c^2, & \text{Diviſeur } a+b \\
\hline
-c^2-\dfrac{c^2b}{a}, & \text{Quotient} \\
\hline
1^{\text{er}} \text{ reſte} -\dfrac{c^2b}{a}, & \dfrac{c^2}{a}-\dfrac{c^2b}{a^2}+\dfrac{c^2b^2}{a^3}- \\
+\dfrac{c^2b}{a}+\dfrac{c^2b^2}{a^2} & \dfrac{c^2b^3}{a^4}+\dfrac{c^2b^4}{a^5}-\&c. \\
\hline
2^{\text{e}} \text{ reſte} +\dfrac{c^2b^2}{a^2}, & \\
-\dfrac{c^2b^2}{a^2}-\dfrac{c^2b^3}{a^3}, & \\
\hline
\end{array}$$

3^e reste $-\frac{c^2b^3}{a^3}$,

$+\frac{c^2b^3}{a^3} + \frac{c^2b^4}{a^4}$,

4^e reste $+\frac{c^2b^4}{a^4}$,

$-\frac{c^2b^4}{a^4} - \frac{c^2b^5}{a^5}$;

5^e reste &c.

1°. Je divise le dividende c^2 par le premier terme a du diviseur, ou plutôt (57), j'indique cette division, parce que le dividende c^2 & le diviseur a n'ont pas de lettre commune. Le quotient est $\frac{c^2}{a}$, que j'écris à la place où il doit être. Je multiplie le diviseur $a+b$ par $\frac{c^2}{a}$, & j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende. Puis ayant fait la réduction, j'ai $-\frac{c^2b}{a}$ pour premier reste, ou pour second dividende partiel.

2°. Je divise ce dividende par le premier terme a du diviseur, & j'ai $-\frac{c^2b}{a^2}$ pour second quotient partiel que j'écris à la suite du premier. Je multiplie le diviseur $a+b$ par $-\frac{c^2b}{a^2}$; & j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende. La réduction faite, j'ai $+\dfrac{c^2b^2}{a^2}$ pour ſecond reſte, ou pour troiſième dividende partiel à diviſer par $a+b$.

On continuera la diviſion toujours de la même manière. Il eſt évident qu'elle n'aura pas de fin, & qu'elle donnera continuellement de nouveaux termes au quotient. Le quotient total ſera donc exprimé par cette ſuite infinie.

$$\frac{c^2}{a}-\frac{c^2b}{a^2}+\frac{c^2b^2}{a^3}-\frac{c^2b^3}{a^4}+\frac{c^2b^4}{a^5}-\&c.$$

Comme chaque terme de cette ſuite a c^2 pour un de ſes facteurs, elle peut être écrite ſous cette forme,

$$c^2\times\left(\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\&c.\right)$$

69. ON voit facilement que tous les termes de cette même ſuite iront en diminuant de grandeur, ſi $a>b$; & qu'au contraire, ils iront en augmentant, ſi $a<b$.

En effet, comparons d'abord enſemble les deux premiers termes $\frac{1}{a}$ & $-\frac{b}{a^2}$, en faiſant abſtraction de leurs ſignes, ou en les ſuppoſant affectés du même ſigne. Si on a $a>b$, on aura auſſi $\frac{1}{a}>\frac{b}{a^2}$: car puiſque $a>b$, il eſt clair qu'en diviſant les deux membres par la même grandeur a^2, on aura $\frac{a}{a^2}>\frac{b}{a^2}$, ou bien $\frac{1}{a}>\frac{b}{a^2}$ Si au contraire on avoit $a<b$, on trouveroit $\frac{1}{a}<\frac{b}{a^2}$.

On fera voir d'une manière semblable, qu'en supposant $a > b$, le second terme $\frac{b}{a^2}$ est plus grand que le troisième $\frac{b^2}{a^3}$, & qu'au contraire, en supposant $a < b$, le second terme $\frac{b}{a^2}$ est plus petit que le troisième $\frac{b^2}{a^3}$; ainsi de suite. D'où nous pouvons conclure en général que les termes de la suite iront en diminuant ou en augmentant, selon que a sera plus grand ou plus petit que b.

70. ON appelle *suites convergentes*, celles dont les termes vont en diminuant, & *suites divergentes*, celles dont les termes vont en augmentant. Une suite peut converger ou diverger plus ou moins rapidement, selon que ses termes vont en diminuant ou en augmentant, par des sauts plus ou moins grands.

71. LORSQU'UNE suite converge rapidement, il suffit de prendre quelques termes du commencement, pour avoir, à peu de chose près, la valeur de la suite entière. Par exemple, ayant trouvé par la méthode de l'article 68, que la valeur générale du quotient indiqué $\frac{1}{a+b}$, peut être exprimée par la suite infinie,

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \&c;$$

si l'on suppose $a = 100$, $b = 1$, & qu'on prenne seulement les deux premiers termes de cette suite, on aura

$\frac{1}{100} - \frac{1}{10000}$, c'eſt-à-dire, $\frac{99}{10000}$, en réduiſant les deux fractions au même dénominateur, puis ſouſtrayant la ſeconde de la première. Or, cette dernière fraction ne differe pas beaucoup de la fraction $\frac{1}{100+1}$, ou $\frac{1}{101}$, qui eſt la valeur totale de la ſuite. Car réduiſons les deux fractions $\frac{1}{101}$ & $\frac{99}{10000}$ au même dénominateur, pour pouvoir les comparer plus facilement enſemble ; elles deviendront reſpectivement $\frac{10000}{1010000}$ & $\frac{9999}{1010000}$; d'où l'on voit que leur différence eſt preſqu'inſenſible.

On approcheroit davantage, & de plus en plus, de la valeur entière de la ſuite, en prenant enſemble ſes trois premiers termes, ou ſes quatre premiers termes ; ainſi de ſuite.

Il eſt clair, par la raiſon contraire, que ſi une ſuite eſt divergente, on s'éloignera de plus en plus de ſa valeur totale, à meſure qu'on prendra plus de termes du commencement. On ne peut donc prendre les premiers termes d'une ſuite qui en a une infinité, pour exprimer, à peu de choſe près, ſa valeur totale, que quand cette ſuite eſt convergente. Plus elle converge promptement, moins il faut prendre de termes du commencement, pour la repréſenter d'une manière approchée.

72. L'EXPRESSION $\frac{1}{a+b}$ peut être développée en ſuite infinie, de deux manières, ſelon qu'on regardera a ou b, comme le premier terme du diviſeur. Dans le premier cas, la ſuite infinie eſt

$$(A)\ \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \&c.$$

Et dans le ſecond, la ſuite infinie eſt

$$(B)\ \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} + \frac{a^4}{b^5} - \&c.$$

Or, lorſque $a > b$, la ſuite (A) eſt convergente, & la ſuite (B) eſt divergente; au contraire, lorſque $a < b$, la ſuite (A) eſt divergente, & la ſuite (B) eſt convergente. Ainſi, lorſque $a > b$, il faut ſe ſervir de la ſuite (A) pour repréſenter le quotient indiqué $\frac{1}{a+b}$, & lorſque $a < b$, il faut ſe ſervir de la ſuite (B) pour repréſenter le même quotient.

73. SI on avoit $a = b$, l'une ou l'autre ſuite deviendroit également,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \&c.$$

Or, comme chaque terme eſt détruit par le terme ſuivant, il paroît s'enſuivre que la valeur totale de la ſuite eſt o, tandis que cette valeur doit être réellement $\frac{1}{2a}$ ou $\frac{1}{2b}$. Mais il faut prendre garde que dans ce cas, la ſuite n'eſt pas convergente, & que ſi l'on veut employer quelques-uns de ſes termes pour exprimer la quantité $\frac{1}{2a}$, on ne peut pas se dispenser d'ajouter à ces termes, le reste de la division, divisé par le diviseur.

Si, par exemple, on arrête la série au second terme $-\frac{1}{a}$; à la somme $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$ des deux premiers termes qu'on trouve (68) en divisant 1 par $a+a$, il faudra joindre le quotient du second reste 1 de la division, divisé par $a+a$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2a}$: alors on aura $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2a}$, pour la valeur de $\frac{1}{2a}$, comme cela doit être.

Si l'on arrête la série au troisième terme $+\frac{1}{a}$, à la somme $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}$ des trois premiers termes provenants de la division, il faudra joindre le quotient du troisième reste -1, divisé par $2a$, c'est-à-dire, $-\frac{1}{2a}$: alors on aura $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2a}$, pour la valeur de $\frac{1}{2a}$.

Ainsi de suite.

SECTION II.

Division des quantités radicales.

74 EST-IL d'abord question de diviser un monome rationnel par un monome radical, ou un monome radical par un monome rationnel ? La division ne peut alors que s'indiquer ; en observant néanmoins que s'il y a des coéfficients, autres que l'unité, au-devant des quantités ; ou que la quantité radicale soit précédée de quantités rationnelles, la division des coéfficients & des quantités rationnelles, se fait comme on l'a expliqué ci-dessus. Ainsi, par exemple, en divisant $+a$ par $+\sqrt{b}$, on a pour quotient $+\frac{a}{\sqrt{b}}$, ou $+\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}$; en divisant $-8a\sqrt{c}$ par $+2ab$, on a pour quotient $-\frac{4\sqrt{c}}{b}$, ou $-\frac{4c^{\frac{1}{2}}}{b}$.

75. ON doit observer qu'au lieu d'écrire, comme nous venons de faire, le quotient en forme de fraction, on écrit souvent le diviseur à côté du dividende, en donnant au diviseur un exposant négatif. Ainsi, l'expression $+\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}$ est la même chose que $+ab^{-\frac{1}{2}}$; l'expression $-\frac{4c^{\frac{1}{2}}}{b}$ est la même chose que $-4c^{\frac{1}{2}}b^{-1}$. On traite à cet égard les quantités qui ont des

expoſants fractionnaires, comme celles qui ont pour expoſants des nombres entiers (61).

76. FAUT-IL diviſer un monome radical par un autre monome radical ? Je diſtingue deux cas ; l'un où les deux quantités radicales ſont de même eſpéce, l'autre où elles ſont de différentes eſpéces.

77. SUPPOSONS d'abord que le dividende & le diviſeur ſoient des quantités radicales de même dénomination. Après avoir écrit le ſigne qui doit précéder le quotient, on écrira le ſigne radical commun au dividende & au diviſeur, & à la ſuite de ce ſigne, le quotient des quantités diviſées de la même maniére que ſi elles n'étoient point affectées de radicaux. La diviſion des coéfficients & des quantités rationnelles qui peuvent précéder les quantités radicales, ſe fait à l'ordinaire. Ainſi, en diviſant $+\sqrt{a^2b^2}$ par $-\sqrt{a}$, on a pour quotient $-\sqrt{ab^2}$, ou $-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{2}}$, ou (en réduiſant la fraction exponentielle de b à ſa plus ſimple expreſſion), $-a^{\frac{1}{2}}b$; en diviſant $-8a^2\sqrt[3]{10m^2n^2}$ par $+4a\sqrt[3]{5mn}$, on a pour quotient $-2a\sqrt[3]{2mn}$, ou $-2a\times 2^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$, ou $-2^{\frac{4}{3}}am^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$; en diviſant $-7a^3\sqrt[3]{m^2n^2p}$ par $-8a^2\sqrt[3]{cmp}$, on a pour quotient $+\frac{7a\sqrt[3]{\frac{mn^2}{c}}}{8}$, ou $+\frac{7a\sqrt[3]{mn^2c^{-1}}}{8}$, ou $+\frac{7am^{\frac{1}{3}}n^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{3}}}{8}$, ou bien encore $+7 \,.\, 8^{-1} \,.\, am^{\frac{1}{3}}n^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{3}}$.

78.

78. ON ſe rendra facilement raiſon de cette régle, en conſidérant que la diviſion eſt une opération inverſe de la multiplication, & que le produit du diviſeur par le quotient doit toujours être une quantité égale au dividende. Ainſi, par exemple, je dis que ſi l'on diviſe $-\sqrt{a}$ par $+\sqrt{b}$, le quotient ſera $-\sqrt{\frac{a}{b}}$. En effet, ſi l'on multiplie (47) cette derniere quantité par $+\sqrt{b}$, on aura $-\sqrt{\frac{ab}{b}}$, ou $-\sqrt{a}$, qui eſt le dividende propoſé. Il en ſera de même dans tous les autres cas pareils.

79. LORSQUE le dividende & le diviſeur ne ſont pas des quantités radicales de même dénomination, on peut les réduire à la même dénomination (49); & alors ce cas revient au précédent. Qu'on ait, par exemple, à diviſer $-\sqrt[3]{a^3b^2}$ par $+\sqrt[2]{a}$: je réduis les deux quantités radicales à la même dénomination; la première devient $-\sqrt[6]{a^6b^4}$, ou $-a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}$, la ſeconde devient $+\sqrt[6]{a^3}$, ou $+a^{\frac{3}{6}}$; & en diviſant la première par la ſeconde, j'ai pour quotient $-\sqrt[6]{a^3b^4}$, ou $-a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{4}{6}}$, ou $-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$. On trouvera ſemblablement qu'en diviſant $-4a^2\sqrt[3]{b^2}$ par $-2a\sqrt[4]{bc}$, le quotient eſt $+2a\sqrt[12]{\frac{b^5}{c^3}}$, ou $+2a\sqrt[12]{b^5c^{-3}}$, ou $+2ab^{\frac{5}{12}}c^{-\frac{3}{12}}$, ou $+2ab^{\frac{5}{12}}c^{-\frac{1}{4}}$. Ainſi des autres quantités pareilles.

80. DONNONS un exemple de diviſion de polynomes où il entre des quantités radicales. Je me contente d'indiquer l'opération, qui ſera facile pour ceux qui auront bien entendu tout ce qui précéde.

EXEMPLE.

Diviſer .... $a^3b^2 - 7a^2b^3 + 7abc\sqrt{m^2np} - 5a^2b^2\sqrt[3]{a^2c} + 35ab^3\sqrt[3]{a^2c} - 35bc\sqrt[6]{m^6n^3p^3a^4c^2}$,
par .... $ab - 5b\sqrt[3]{a^2c}$?

On fera cette opération à l'ordinaire, en diviſant ſucceſſivement les différentes parties du dividende par le premier terme du diviſeur, & retranchant du dividende, à chaque diviſion partielle, le produit du quotient partiel par le diviſeur entier. Il n'y aura point de difficulté à l'égard de la diviſion ou multiplication des quantités radicales, puiſque toutes les opérations partielles ſe font ſur des monomes, & qu'elles ne demandent par conſéquent point d'autres régles que celles que nous avons données pour ces dernières quantités. On trouvera ainſi que le quotient demandé eſt $a^2b - 7ab^2 + 7c\sqrt{m^2np}$.

CHAPITRE VI.

Des Fractions Algébriques.

81. Les fractions littérales sont, comme les fractions numériques, les quotients des numérateurs divisés par les dénominateurs. Ainsi, tout ce que nous avons dit au sujet des fractions numériques, s'applique également aux fractions littérales, en substituant aux opérations arithmétiques, les opérations algébriques correspondantes, c'est-à-dire, addition à addition, soustraction à soustraction, &c. On verra, par cette correspondance, la raison de la plupart des calculs que je vais faire sur les fractions littérales ; & cela nous épargnera beaucoup de raisonnements.

82. *Réduire une quantité entière en une fraction qui ait un dénominateur donné ?*

Soit la quantité a qu'il s'agit de réduire en une fraction qui ait le dénominateur b. Je multiplie a par b, & j'applique sous le produit ab, le dénominateur b ; en sorte que a est la même chose que $\frac{ab}{b}$.

83. On voit semblablement que toute fraction peut être transformée en une autre de même valeur, en multipliant ou divisant son numérateur & son dénominateur par une même quantité. Ainsi, la fraction $\frac{a}{b}$

devient (en multipliant haut & bas par c), $\frac{ac}{bc}$; la fraction $\frac{aa+ab}{aa-bb}$, devient (en divisant haut & bas par $a+b$), $\frac{a}{a-b}$.

84. RÉDUIRE *en une seule fraction une quantité composée d'un entier & d'une fraction ?*

Multipliez l'entier par le dénominateur de la fraction, & appliquez sous le tout ce dénominateur. Ainsi, $a+\frac{bd}{c}$ est la même chose que $\frac{ac+bd}{c}$; $a+\frac{ac-cd-ad}{c+d}$ est la même chose que .... $\frac{ac+ad+ac-cd-ad}{c+d}$, ou que $\frac{2ac-cd}{c+d}$, en faisant la réduction du numérateur.

85. TIRER *les entiers qui peuvent se trouver dans une fraction ?*

Divisez le numérateur par le dénominateur, autant que cela sera possible. Ainsi, ayant la fraction $\frac{a^2+ab-cd}{a}$, je divise les deux premiers termes du numérateur, par a, & je la réduis, par ce moyen, à cette quantité $a+b-\frac{cd}{a}$. De même, la fraction $\frac{a^2-2ab+b^2+c^2}{a-b}$ devient $a-b+\frac{c^2}{a-b}$, en divisant les trois premiers termes du numérateur, par $a-b$.

86. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur?*

Multipliez le numérateur & le dénominateur de chacune d'elles, par le produit des dénominateurs de toutes les autres, & appliquez, sous chaque nouveau numérateur, le produit de tous les dénominateurs. Ainsi, les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, se changent respectivement en celles-ci $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$, qui ont le même dénominateur.

L'opération se feroit de même, si le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux, étoient des quantités complexes. Ainsi, les deux fractions $\frac{a-b}{b+c}$, $\frac{g+h}{f+e}$ deviennent $\frac{(a-b)\times(f+e)}{(b+c)\times(f+e)}$, $\frac{(g+h)\times(b+c)}{(b+c)\times(f+e)}$, ou bien en effectuant les multiplications, $\frac{af-bf+ae-be}{bf+cf+be+ce}$, $\frac{bg+bh+cg+ch}{bf+cf+be+ce}$.

87. Lorsque les fractions ont des facteurs communs à leurs dénominateurs, elles peuvent être réduites à la même dénomination, d'une manière abrégée, qui est utile dans la pratique du calcul. Soient, par exemple, les deux fractions $\frac{a^3}{bc}$, $\frac{dfg}{bh}$, dont les dénominateurs ont le facteur commun b : je vois qu'en multipliant la première, haut & bas, par le facteur non commun h du dénominateur de la seconde, & la seconde, aussi haut & bas, par le facteur non commun c

du dénominateur de la première, je les réduirai tout de suite au même dénominateur. Elles deviendront ainsi $\frac{a^3h}{bch}$, $\frac{cdfg}{bch}$.

88. *AJOUTER des fractions avec d'autres quantités entières ou rompues.*

Ecrivez toutes les quantités à ajouter, les unes à la suite des autres, avec les signes qu'elles ont, & faites les réductions dont la somme peut être susceptible. Qu'on ait à ajouter ensemble la quantité entière $a-b$ & la fraction $\frac{b^2}{a+b}$: j'écris $a-b+\frac{b^2}{a+b}$; & en réduisant l'entier en une fraction qui ait le dénominateur $a+b$, j'ai $\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}$, c'est-à-dire, $\frac{a^2}{a+b}$. Pour ajouter ensemble les trois fractions $+\frac{a}{b}$, $-\frac{c}{d}$, $+\frac{e}{f}$, j'écris $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$. Si on réduit ces trois fractions au même dénominateur, on aura $\frac{adf}{bdf}-\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}$, ou bien, $\frac{adf-bcf+bde}{bdf}$.

89. *FAIRE la soustraction des quantités où il se trouve des fractions ?*

Changez les signes de la quantité que vous devez soustraire, & en cet état, écrivez-la à la suite de celle dont elle doit être soustraite. Ainsi, pour retrancher $\frac{b^2}{a-b}$ de $a-b$, j'écris $a-b-\frac{b^2}{a+b}$, & en réduisant tout en fraction, je trouve $\frac{a^2-b^2-b^2}{a+b}$, ou bien $\frac{a^2-2b^2}{a+b}$. Pour soustraire $-a$ de $\frac{aa}{a-b}$, j'écris $\frac{aa}{a-b}+a$, ou bien $\frac{aa+aa-ab}{a-b}$, ou $\frac{2aa-ab}{a-b}$. Pour soustraire la fraction $-\frac{c}{d}$ de la fraction $\frac{a}{b}$, j'écris $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, & en réduisant les deux fractions au même dénominateur, on aura $\frac{ad+bc}{bd}$ pour résultat de la soustraction.

90. *MULTIPLIER ensemble une fraction rationnelle, & d'autres quantités, entières ou rompues ?*

Si l'on doit multiplier un entier par une fraction, ou une fraction par un entier, on multipliera l'entier par le numérateur de la fraction, sans toucher au dénominateur. Et si l'on doit multiplier une fraction par une fraction, on multipliera numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur. Ainsi, le résultat du produit indiqué $a\times\frac{m}{n}$ est $+\frac{am}{n}$; le résultat du produit indiqué $-\frac{4h}{7g}\times-5a$, est $+\frac{20ah}{7g}$; le résultat du produit indiqué $\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}$ est $\frac{am}{bn}$.

91. *MULTIPLIER ensemble des quantités où il se trouve des fractions radicales ?*

Puisqu'on multiplie une fraction par une autre, en multipliant numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur, il est clair qu'on élevera une fraction au quarré, au cube, à la quatrième puissance, &c, en élevant chacun de ses deux termes au quarré, au cube, à la quatrième puissance, &c. Donc réciproquement la racine seconde, ou troisième, ou quatrième, &c, d'une fraction, est une fraction qui a pour numérateur la racine seconde, ou troisième, ou quatrième, &c, du numérateur, & pour dénominateur la racine pareille du dénominateur. Or, cette dernière fraction peut être considérée comme le quotient de son numérateur divisé par son dénominateur, de la même manière que si ses deux termes étoient des quantités rationnelles. Ainsi, la multiplication des quantités où il entre des fractions radicales, se fera par le moyen de l'article précédent, & des principes que nous avons donnés (44, 47, 49) pour la multiplication des quantités radicales qui ne contiennent point de fractions.

Qu'on ait, par exemple, la quantité $-ab$ à multiplier par la fraction radicale $\sqrt{\frac{m}{n}}$: comme cette fraction est la même chose que $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, la question se réduit à multiplier l'entier $-ab$ par la fraction $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, de la même manière que si les deux termes de cette fraction étoient des quantités rationnelles ; le produit est donc $-\frac{ab\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ou $-\frac{abm^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$, ou $-abm^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}$. De même, le résultat du produit indiqué $-6a^2\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}\times$

$-5b$ ou $-\frac{6a^2\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{n^2}} \times -5b$, eſt $+\frac{30ba^2\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{n^2}}$,

ou $+\frac{30ba^2m^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}$, ou $+30ba^2m^{\frac{2}{3}}n^{-\frac{2}{3}}$, ou $+$

$30ba^2\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}$.

Si on avoit à multiplier enſemble deux fractions radicales, telles que $-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, & $-\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$; on mettroit la première ſous cette forme $-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, & la ſeconde ſous celle-ci $-\frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{n}}$: alors il s'agiroit d'effectuer la multiplication indiquée $-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times -\frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{n}}$; ce qui donne le produit $+\frac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{m}}{\sqrt[3]{b}\times\sqrt[4]{n}}$, ou $+\frac{a^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{4}}}$, ou $+a^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{3}}n^{-\frac{1}{4}}$, ou (en réduiſant tous les expoſants fractionnaires à la même denomination), $+a^{\frac{4}{12}}m^{\frac{3}{12}}b^{-\frac{4}{12}}n^{-\frac{3}{12}}$, ou $+\sqrt[12]{\frac{a^4m^3}{b^4n^3}}$.

92. *Faire la diviſion des quantités où il ne ſe trouve que des fractions rationnelles?*

Si le dividende eſt une fraction, & le diviſeur un entier, multipliez le dénominateur de la fraction, par l'entier, ſans toucher au numérateur. Et ſi le diviſeur eſt une fraction, renverſez cette fraction, & en cet état vous la multiplierez avec le dividende. Ainſi, en diviſant $-\frac{a}{b}$ par $+c$, le quotient eſt $-\frac{a}{bc}$; en diviſant $-\frac{a}{b}$ par $+\frac{m}{n}$, le quotient eſt $-\frac{a}{b}\times+\frac{n}{m}$, c'eſt-à-dire en effectuant la multiplication, $-\frac{an}{bm}$.

93. *Faire la diviſion des quantités où il ſe trouve des fractions radicales?*

Une racine quelconque d'une fraction n'eſt autre choſe (91) que la racine ſemblable du numérateur, diviſée par la racine auſſi ſemblable du dénominateur; ce qui donne une fraction par rapport à laquelle on opérera, comme nous venons de le preſcrire pour les fractions rationnelles. Ainſi, qu'on me propoſe de diviſer $-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ par m: je change la fraction en celle-ci: $-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$; & j'ai pour quotient $-\frac{\sqrt[3]{a}}{m\sqrt[3]{b}}$. S'il eſt queſtion de diviſer la fraction $-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ par la fraction $-\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$; je change la première fraction en celle-ci $-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, & la ſeconde en celle-ci $-\frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{n}}$: alors il s'agit de diviſer $-$

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ par $-\frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{n}}$; le quotient est $-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times -\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m}}$, c'est-à-dire, $+\frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{b} \times \sqrt[4]{m}}$, ou $+\frac{a^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{4}}}$, ou $+a^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{3}}m^{-\frac{1}{4}}$, ou $+a^{\frac{4}{12}}n^{\frac{3}{12}}b^{-\frac{4}{12}}m^{-\frac{3}{12}}$, ou $+\sqrt[12]{\frac{a^4n^3}{b^4m^3}}$.

94. *Réduire une fraction à ses moindres termes?*

Après avoir ordonné les deux termes de la fraction, par rapport à une même lettre, il faut diviser celui des deux termes, où cette lettre a le plus grand exposant, par le second, & pousser l'opération tant qu'elle est possible, conformément aux régles ordinaires de la division; ensuite il faut diviser, suivant les mêmes conditions, le second terme par le premier reste; puis le premier reste, par le second reste; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division exacte: alors le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction proposée. Si on ne pouvoit pas parvenir à faire une division exacte, la fraction seroit irréductible. On voit que le procédé est absolument le même pour les fractions littérales que pour les fractions numériques,

95. L'application de cette régle à la pratique peut être simplifiée & facilitée par les observations suivantes.

On ne change rien au commun diviseur de deux quantités, en multipliant ou en divisant l'une de ces quantités par un facteur qui n'est pas diviseur de l'autre. Qu'on ait, par exemple, la fraction $\frac{ab}{ac}$, dont les deux termes ont a pour diviseur commun : en multipliant le numérateur ou le dénominateur par une quantité d, on formera la nouvelle fraction $\frac{abd}{ac}$, ou $\frac{ab}{acd}$, dont les deux termes n'ont pas d'autre diviseur commun que a. Mais si la quantité par laquelle on multiplie un des termes de la fraction, étoit diviseur de l'autre terme, alors on changeroit le diviseur commun. Par exemple, qu'on multiplie le numérateur de la fraction $\frac{ab}{ac}$ par c, qui est diviseur du dénominateur, on formera la fraction $\frac{abc}{ac}$, dont les deux termes ont, pour diviseur commun, ac, & non pas simplement a comme tout-à-l'heure. De même, si l'on multiplie le dénominateur de la fraction $\frac{ab}{ac}$, par b, qui est diviseur du numérateur, on formera la fraction $\frac{ab}{abc}$, dont les deux termes ont pour diviseur commun ab, & non a simplement. On ne conserve donc le même diviseur commun aux deux termes d'une fraction, qu'en multipliant ou en divisant l'un de ces termes par une quantité qui ne soit pas diviseur de l'autre.

Appliquons ces principes à des exemples.

EXEMPLE I.

Réduire la fraction $\frac{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}{4a^4 - 2a^2b^2 - 4a^3b + 2ab^3}$ *à ses moindres termes ?*

J'ordonne tout par rapport à la lettre a, & je prens le dénominateur pour dividende, & le numérateur pour diviseur. Cela posé,

1°. Comme $2a$ divise tous les termes du dividende, & ne divise pas ceux du diviseur, je commence par délivrer le dividende de ce diviseur, pour simplifier l'opération. Il me vient ainsi $2a^3 - 2a^2b - ab^2 + b^3$ à diviser par $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$. Le quotient est 2, & le reste $- 3ab^2 + 3b^3$.

2°. Je prens pour dividende le diviseur $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, & pour diviseur le premier reste $- 3ab^2 + 3b^3$. Et comme $3b^2$ est diviseur de ce reste, sans l'être du nouveau dividende, je délivre mon diviseur actuel du facteur $3b^2$. Par ce moyen, j'ai $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ à diviser par $- a + b$. Il vient pour quotient exact $- a^2 - b^2$. D'où je conclus que $- a + b$ est le plus grand commun diviseur cherché. Divisant donc les deux termes de la fraction proposée $\frac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3}{4a^4 - 4a^3b - 2a^2b^2 + 2ab^3}$ par $- a + b$, elle deviendra $\frac{- a^2 - b^2}{- 4a^3 + 2ab^2}$, ou $\frac{a^2 + b^2}{4a^3 - 2ab^2}$, & sera réduite à ses moindres termes.

EXEMPLE II.

Réduire la fraction $\frac{2a^4 + 2a^3b - a^2bc - ab^2c}{3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3}$ *à ses moindres termes ?*

J'ordonne tout par rapport à la lettre a ; & je prens pour dividende le numérateur, & pour diviseur le dénominateur.

1°. Je prépare le dividende, en divisant tous ses termes par a qui n'est pas diviseur commun de tous les termes du dénominateur. Ensuite je multiplie tous les termes du même dividende par 3 qui n'est pas diviseur du dénominateur, afin de rendre le premier terme du dividende, divisible par le premier terme du diviseur. Par ces deux opérations, j'ai $6a^3 + 6a^2b - 3abc - 3b^2c$ à diviser par $3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3$. Le quotient est 2, & le reste $-3abc - 8ab^2 - 3b^2c - 8b^3$.

2°. Je prens pour dividende le diviseur précédent $3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3$, & pour diviseur le premier reste $-3abc - 8ab^2 - 3b^2c - 8b^3$. Je prépare la division, en observant que $-3bc - 8b^2$ divise le diviseur, & ne divise pas le dividende. Ainsi, je délivre le diviseur de ce facteur ; & alors j'ai $3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3$ à diviser par $a + b$. La division se fait exactement, & le quotient est $3a^2 + 4b^2$. Par conséquent, le plus grand commun diviseur de la fraction proposée $\frac{2a^4 + 2a^3b - a^2bc - ab^2c}{3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + 4b^3}$ est $a + b$; & en divisant son numérateur & son dénominateur par ce diviſeur, cette fraction devient $\frac{2a^3 - abc}{3a^2 + 4b^2}$.

Des Fractions continues.

96. LORSQU'UNE fraction a pour dénominateur l'aſſemblage d'un entier & d'une fraction ; que cette ſeconde fraction a pour dénominateur l'aſſemblage d'un entier & d'une fraction ; que cette troiſième fraction a pour dénominateur, l'aſſemblage d'un entier & d'une fraction ; ainſi de ſuite : l'expreſſion composée de toutes ces fractions particulieres, eſt ce qu'on appelle une *fraction continue*, ſoit que le nombre des fractions intégrantes ſoit fini ou infini. Ainſi, l'expreſſion

$$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \&c}}}}},$$

eſt une fraction continue.

97. SI chacun des numérateurs α, β, γ, δ, ε, &c. vaut 1, l'expreſſion précédente deviendra

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \&c.}}}}}$$

Les fractions continues que nous avons conſidérées dans l'Arithmétique ont cette dernière forme.

93. TOUTE fraction continue peut être réduite en une fraction ordinaire. Soit, par exemple, la fraction continue,

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{6}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d}}}}.$$

1°. L'assemblage $\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d}}$ des deux dernières fractions intégrantes étant une fraction qui a γ pour numérateur, & $c+\frac{\delta}{d}$ pour dénominateur; il est clair que si nous réduisons ce dénominateur en la fraction équivalente $\frac{cd+\delta}{d}$, l'assemblage en question pourra être regardé comme une fraction qui a γ pour numérateur, & $\frac{cd+\delta}{d}$ pour dénominateur; ou, ce qui revient au même, comme le quotient de la quantité γ divisée par la fraction $\frac{cd+\delta}{d}$, ce qui donne (92), $\frac{\gamma d}{cd+\delta}$.

2°. A la place de l'assemblage des trois dernières fractions intégrantes, nous pouvons substituer $\cfrac{6}{b+\cfrac{\gamma d}{cd+\delta}}$; d'où l'on tire, en opérant comme nous venons

venons de faire sur l'assemblage des deux dernières fractions intégrantes, $\frac{\mathfrak{b}cd+\mathfrak{b}\delta}{bcd+b\delta+\gamma d}$.

3°. Pareillement, au lieu de l'assemblage des quatre fractions intégrantes, nous pouvons prendre $\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\mathfrak{b}cd+\mathfrak{b}\delta}{bcd+b\delta+d\gamma}}$; d'où l'on tire la fraction ordinaire $\frac{\alpha bcd+\alpha b\delta+\alpha d\gamma}{abcd+ab\delta+ad\gamma+\mathfrak{b}cd+\mathfrak{b}\delta}$, expression de la fraction continue proposée.

Il est clair que si une fraction continue avoit un plus grand nombre de termes, on parviendroit toujours, en remontant de proche en proche, de droite à gauche, à la convertir en une fraction ordinaire.

99. NOMMONS A la valeur totale d'une fraction continue, telle que

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\mathfrak{b}}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\&c.}}}}}$$

Il est aisé de voir que si en allant de gauche à droite, on prend d'abord la première fraction intégrante seule, puis les deux premières fractions intégrantes seules, puis les trois premières fractions intégrantes seules, ainsi de suite; on aura des quantités alternativement plus grandes & plus petites que

A; c'eſt-à-dire, que $A < \frac{\alpha}{a}$, $A > \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b}}$,

$$A < \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{e}}}, \quad A > \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d}}}}, \text{ \&c.}$$

Car dans la première expreſſion $\frac{\alpha}{a}$, le dénominateur a eſt plus petit que le vrai dénominateur, puiſque ce dernier eſt formé de l'addition de a avec toutes les fractions qui ſuivent à droite. Or, on augmente la valeur d'une fraction, lorſqu'on diminue ſon dénominateur, ſans toucher à ſon numérateur. Ainſi, on a $A < \frac{\alpha}{a}$. Dans la ſeconde expreſſion $\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b}}$, le dénominateur b étant évidemment trop petit, la fraction $\frac{\beta}{b}$ eſt trop grande, & par conſéquent auſſi l'aſſemblage $a + \frac{\beta}{b}$ eſt trop grand; donc notre expreſſion, qui a pour numérateur α, & pour dénominateur l'aſſemblage dont nous venons de parler, eſt trop petite, puiſqu'on diminue la valeur d'une fraction, lorſqu'on augmente ſon dénominateur, ſans toucher au numérateur. En raiſonnant toujours ainſi de ſuite pour les autres expreſſions, on reconnoîtra la vérité de la propoſition générale que nous avons avancée.

100. Il suit de-là que si nous réduisons chacune des expressions dont nous venons de parler, en fractions ordinaires, on aura

$$A < \frac{\alpha}{a}.$$

$$A > \frac{ab}{ab + \beta},$$

$$A < \frac{abc + a\gamma}{abc + a\gamma + \beta c},$$

$$A > \frac{abcd + ab\delta + a\gamma d}{abcd + ab\delta + a\gamma d + \beta\delta + \beta cd},$$

ainsi de suite, alternativement.

101. Les fractions continues appliquées aux nombres servent, comme nous l'avons vû dans l'Arithmétique, à représenter d'une manière approchée, avec de petits nombres, la valeur d'une fraction irréductible exprimée par de grands nombres. L'approximation est d'autant plus exacte, qu'on prend plus de fractions intégrantes du commencement de la suite; mais aussi plus on prend de ces fractions, plus les termes de la fraction résultante qu'elles donnent sont grands.

102. Les fractions résultantes qu'on trouve ainsi en prenant un certain nombre des premières fractions intégrantes qui composent la fraction continue, ont la propriété d'être irréductibles, & de donner la valeur de la fraction principale, d'une manière plus approchée que ne la donneroit une fraction exprimée par de plus petits nombres. On en verra facilement la raison,

en considérant qu'on emploie (Arith. 110 & 115) des opérations semblables pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, & pour développer une fraction ordinaire en fraction continue. Montrons ici en général la correspondance de ces opérations.

103. QU'IL s'agisse de réduire à ses moindres termes la fraction $\frac{A}{B}$, dans laquelle A & B sont des nombres donnés. Soit $B > A$; & supposons qu'en divisant B par A, on ait a pour quotient, & α pour reste; qu'en divisant A par α, on ait b pour quotient, & β pour reste; qu'en divisant α par β, on ait c pour quotient, & γ pour reste; ainsi de suite. Il est clair que la fraction proposée pourra subir les transformations suivantes, (en mettant successivement pour chaque dividende, le produit du diviseur par le quotient, & ajoutant le reste de la division),

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{aA+\alpha},$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha b+\beta}{a(\alpha b+\beta)+\alpha},$$

$$\frac{A}{B} = \frac{b(\beta c+\gamma)+\beta}{a(b\beta c+b\gamma+\beta)+\beta c+\gamma},$$

$$\frac{A}{B} = \frac{b(cd\gamma+c\delta+\gamma)+\gamma d+\delta}{a(bc\gamma d+bc\delta+b\gamma+d\gamma+\delta)+c\gamma d+c\delta+\gamma}$$

&c.

Ces expressions indiquent en général la marche qu'on suit dans la décomposition des deux nombres

A & B, pour parvenir à trouver leur plus grand commun diviſeur. On voit que ſi, par exemple, dans la dernière de ces expreſſions, le dernier reſte δ diviſe le reſte précédent γ, la fraction $\frac{A}{B}$ ſera réductible, & que δ ſera le plus grand commun diviſeur de ſes deux termes.

104. DÉVELOPPONS maintenant la même fraction $\frac{A}{B}$ en fraction continue, par la méthode donnée (Arith. 115) : en diviſant les deux termes par A, cette fraction devient $\frac{1}{\frac{B}{A}}$. Suppoſons, comme tout-à-l'heure, que le quotient de B diviſé par A eſt a; & que le reſte eſt α; la fraction deviendra $\frac{1}{a+\frac{\alpha}{A}}$.

Diviſant par α les deux termes de $\frac{\alpha}{A}$, on aura $\frac{A}{B}=\frac{1}{a+\frac{1}{\frac{A}{\alpha}}}$. Soit b le quotient de A diviſé par α, & $\mathcal{C}$ le reſte; on aura $\frac{A}{B}=\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{\mathcal{C}}{\alpha}}}$. En continuant d'opérer de la même manière, on trouvera

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \&c.}}}}$$

Or, je dis, 1°. que si en allant de gauche à droite, on arrête cette suite à telle fraction intégrante qu'on voudra, le résultat qu'on obtiendra, étant converti en une fraction ordinaire, sera une fraction irréductible. Car, par exemple, arrêtons-nous à la fraction intégrante $\frac{1}{c}$, en excluant toutes les suivantes à droite: nous aurons la fraction continue $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}}$, qui étant réduite en fraction ordinaire, devient $\frac{bc+1}{abc+a+c}$. Or, cette dernière fraction est irréductible; car si elle étoit réductible, on pourroit diviser ses deux termes par un même nombre plus grand que 1. Soit g ce nombre: alors $\frac{bc+1}{g}$ & $\frac{abc+a}{g}$ ou $\frac{a(bc+1)}{g}$ seroient des entiers. De plus $\frac{abc+a+c}{g}$ seroit un entier. Donc $\frac{c}{g}$ seroit un entier, ainsi que $\frac{bc}{g}$. Or, si les nombres $\frac{bc+1}{g}$ &

$\frac{bc}{g}$ étoient des entiers, $\frac{1}{g}$ feroit un entier ; ce qui eſt impoſſible, puiſque g eſt > 1.

2°. Je dis qu'on ne peut pas approcher davantage de la valeur de la fraction $\frac{A}{B}$, au moyen d'une fraction qui ſoit exprimée par de plus petits nombres que la fraction $\frac{bc+1}{abc+a+c}$. Car déſignons, pour abréger, cette dernière fraction par $\frac{C}{D}$; & conſidérons que puiſque les deux fractions $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$ contiennent l'une & l'autre les fractions intégrantes $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, toute fraction qu'on prétendra qui approche plus de $\frac{A}{B}$ que n'en approche $\frac{C}{D}$, contiendra néceſſairement les mêmes fractions intégrantes, & de plus quelqu'autre fraction intégrante que je déſigne par $\frac{1}{m}$. Ainſi, cette fraction, plus voiſine de $\frac{A}{B}$, ſera $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{m}}}}$,

ou bien $\frac{bcm+b+m}{abcm+ab+am+cm+1}$. Or, il eſt clair que cette dernière fraction eſt irréductible ; car ſi elle étoit réductible, on pourroit diviſer ſes deux termes par un même nombre plus grand que 1 ; je l'appelle h.

Alors $\frac{bcm+b+m}{h}$ & $\frac{a(bcm+b+m)}{h}$ feroient des entiers. De plus le nombre $\frac{a(bcm+b+m)+cm+1}{h}$ feroit un entier. Donc $\frac{cm+1}{h}$ en feroit auſſi un, ainſi que $\frac{bcm+b}{h}$. Les nombres $\frac{bcm+b+m}{h}$ & $\frac{bcm+b}{h}$ étant des entiers, $\frac{m}{h}$ feroit auſſi un entier, de même que $\frac{cm}{h}$. Enfin $\frac{cm+1}{h}$ & $\frac{cm}{h}$ étant des entiers, $\frac{1}{h}$ feroit un entier ; ce qui eſt impoſſible, puiſque $h > 1$.

D'un autre côté la fraction $\frac{bcm+b+m}{abcm+ab+am+cm+1}$ eſt exprimée par de plus grands nombres que la fraction $\frac{C}{D}$.

Donc, il n'y a point de fraction qui étant exprimée par de plus petits termes que ceux de la fraction $\frac{C}{D}$, approche plus que cette même fraction, de la fraction principale $\frac{A}{B}$.

CHAPITRE VII.

De la Formation des Puissances, & de l'extraction des Racines des quantités Algébriques.

105. Les notions que nous avons données, dans l'Arithmétique, de la formation des puissances des nombres, & de l'extraction de leurs racines, s'appliquent ici en général aux quantités littérales. Former une puissance d'une quantité littérale, ou ce qui signifie la même chose, élever une quantité littérale à une puissance proposée, c'est multiplier cette quantité un certain nombre de fois par elle-même : extraire la racine d'une quantité, c'est trouver une autre quantité qui étant multipliée un certain nombre de fois par elle-même, produise la première. On voit que l'un de ces problêmes est l'inverse de l'autre. Ils ne demandent, pour être résolus, qu'une application ou une extension très-facile des principes que nous avons établis pour la multiplication & la division des quantités, tant rationnelles que radicales. Mais afin qu'il ne reste aux Commençants aucune difficulté sur toute cette théorie, je crois devoir la développer en détail.

106. Puisque suivant la régle que nous avons don-

née (30) pour la multiplication des signes, $+\times+$; & $-\times-$ donnent également $+$, & que $+\times-$, ou $-\times+$, donne $-$, il s'ensuit que,

1°. Le quarré de $+a$, c'est-à-dire, $+a\times+a$, & celui de $-a$, c'est-à-dire, $-a\times-a$, sont également $+aa$.

2°. Le cube de $+a$, c'est-à-dire, $+aa\times+a$ est $+a^3$; mais celui de $-a$, c'est-à-dire, $+aa\times-a$ est $-a^3$.

3°. La quatrième puissance de $+a$, c'est-à-dire, $+a^3\times+a$ est $+a^4$, & celle de $-a$, c'est-à-dire, $-a^3\times-a$, sont également $+a^4$.

4°. La cinquième puissance de $+a$, c'est à-dire, $+a^4\times+a$ est $+a^5$; mais celle de $-a$, c'est-à-dire, $+a^4\times-a$, est $-a^5$.

&c.

107. CONCLUONS de-là en général que toutes les puissances *paires* sont positives, soit que la quantité génératrice, ou la racine, ait le signe $+$ ou le signe $-$; mais que les puissances *impaires* sont toujours de même signe que la racine, c'est-à-dire, positives, si la racine est positive, & négatives, si la racine est négative.

108. ON a vû (41) que pour élever un monome au quarré, ou au cube, ou à la quatrième puissance, ou à la cinquième puissance, &c, il faut doubler, ou tripler, ou quadrupler, ou quintupler, &c, les exposants des lettres qui entrent dans ce monome. Il est clair en même temps, par ce qui a été dit (33) sur la multiplication

des coéfficients, que si les quantités littérales ont des coéfficients autres que l'unité, ces nombres doivent être élevés au quarré, ou au cube, ou à la quatrième puissance, &c. Ainsi, en ayant égard à la régle des signes (107) nous formerons sans peine les puissances de toutes sortes de monomes, rationnels ou radicaux, comme on le voit par les exemples suivants.

Exemples pour les quantités rationnelles.

Le quarré de $+ab$, ou de $+a^1b^1$, est $+a^2b^2$; le quarré de $-5a^2b^3$ est $+25a^4b^6$.

Le cube de $+2a^2bc$ est $+8a^6b^3c^3$; le cube de $-4a^3b^2c$ est $-64a^9b^6c^3$.

La quatrième puissance de $-4a^2b^3$ est $+256a^8b^{12}$.

La cinquième puissance de la même quantité $-4a^2b^3$ est $-1024a^{10}b^{15}$.

La puissance n^{me} de $+a^mb^r$ est $a^{nm}b^{nr}$, les lettres n, m, r, représentant des nombres entiers positifs.

Exemples pour les quantités radicales.

Le quarré de $+\sqrt{ab}$, ou de $+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, est $+a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{2}{2}}$, ou a^1b^1, ou $+ab$; le quarré de $+\sqrt[3]{a^2b}$, ou de $+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, est $+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, ou $+\sqrt[3]{a^4b^2}$; le quarré de $-8\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$, ou de $-8a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{4}{5}}$, est $+64a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{6}{5}}c^{\frac{8}{5}}$, ou $+64\sqrt[5]{a^4b^6c^8}$.

Le cube de $-\sqrt[3]{ab}$, ou de $-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, est $-a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{3}}$, ou $-ab$; le cube de $-5\sqrt{a^4b^5}$, ou de $-5a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{5}{2}}$, est $-125a^{\frac{12}{2}}b^{\frac{15}{2}}$, ou $-125\sqrt{a^{12}b^{15}}$.

La quatrième puissance de la même quantité $-5\sqrt{a^4b^5}$ est $+625a^{\frac{16}{2}}b^{\frac{20}{2}}$, ou $+625\sqrt{a^{16}b^{20}}$.

La cinquième puissance de $-6\sqrt[4]{a^2bc}$, ou de $-6a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}$, est $-7776a^{\frac{10}{4}}b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}$, ou $-7776\sqrt[4]{a^{10}b^5c^5}$.

La puissance n^{me} de $\sqrt[p]{a^mb^r}$, ou de $a^{\frac{m}{p}}b^{\frac{r}{p}}$, est $a^{\frac{nm}{p}}b^{\frac{nr}{p}}$, ou $\sqrt[p]{a^{nm}b^{nr}}$, les lettres n, p, m, r, exprimant des nombres entiers positifs.

109. LA formation des puissances des fractions qui ont pour termes des monomes, s'exécute de la même manière. Car on éleve une fraction à une puissance quelconque, en élevant ses deux termes à cette puissance. Ainsi, le quarré de $+\frac{a}{b}$ est $+\frac{a^2}{b^2}$; le cube de $-\frac{5a}{6b}$ est $-\frac{125a^3}{216b^3}$; le quarré de $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, ou, ce qui revient au même (93), de $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, est $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$, ou $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$, ou $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$; la puissance n^{me} de la quantité $\sqrt[t]{\frac{a^mb^r}{c^pd^q}}$, ($n$, t, m, r, p, q étant des nombres entiers positifs), ou de $\frac{\sqrt[t]{a^mb^r}}{\sqrt[t]{c^pd^q}}$, ou de $\frac{a^{\frac{m}{t}}b^{\frac{r}{t}}}{c^{\frac{p}{t}}b^{\frac{q}{t}}}$, est $\frac{a^{\frac{nm}{t}}b^{\frac{nr}{t}}}{c^{\frac{np}{t}}d^{\frac{nq}{t}}}$, ou $\frac{\sqrt[t]{a^{nm}b^{nr}}}{\sqrt[t]{c^{np}d^{nq}}}$, ou $\sqrt[t]{\frac{a^{nm}b^{nr}}{c^{np}d^{nq}}}$.

110. L'EXTRACTION des racines étant l'opération inverſe de l'élévation aux puiſſances, il eſt clair,

1°. Par rapport au ſigne qui doit affecter une racine, que ce ſigne peut être (107) indifféremment + ou —, s'il s'agit de tirer une racine *paire*; mais qu'il eſt *unique* & le même que celui de la quantité dont il s'agit d'extraire la racine, ſi cette racine eſt *impaire*.

2°. Par rapport aux coéfficients, que les racines de ces nombres doivent être tirées ſuivant les régles de l'Arithmétique.

3°. Par rapport aux expoſants, qu'il faut prendre la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou la cinquième partie, &c, des expoſants des lettres qui compoſent une quantité monome, ſelon qu'on veut tirer la racine quarrée, ou cube, ou quatrième, ou cinquième, &c, de cette quantité.

111. IL eſt eſſentiel d'obſerver que les puiſſances paires étant toujours affectées (107) du ſigne +, quel que ſoit celui de la racine; une quantité dont on propoſe d'extraire une racine *paire*, doit néceſſairement être affectée du ſigne +, ſi l'on veut qu'elle ait une racine réelle. Les racines paires des quantités négatives ſont donc impoſſibles ou *imaginaires*. Ainſi, les expreſſions ſuivantes $\sqrt{-aa}$, $\sqrt[4]{-a^2b^2}$, $\sqrt[6]{-8a^2}$, ſont des racines imaginaires. Quoique ces ſortes de racines ne repréſentent rien d'exiſtant, elles peuvent néanmoins être ſoumiſes aux mêmes régles de calcul, que les quantités réelles, parce que l'Algébre opére ſur les quantités inconnues

comme ſur les quantités connues, & que ſouvent on ne voit qu'à la fin d'un calcul s'il y entre ou non des quantités imaginaires. Si dans le réſultat d'une opération, il ſe trouve de telles quantités, cela ſignifie que la queſtion qui a donné lieu à ce réſultat, renferme quelqu'abſurdité dans ſes conditions. Si les facteurs d'un produit contiennent des racines imaginaires, & que cependant le produit n'en contienne pas, comme cela arrive quelquefois : alors les imaginaires ſe détruiſent mutuellement; en ſorte que, ſi l'on peut s'exprimer ainſi, l'*imaginarité* qui entre dans l'un des éléments de la queſtion eſt anéantie par l'imaginarité qui entre dans un autre élément. Tout cela ſera pleinement éclairci dans la ſuite.

112. APPLIQUONS ces principes à l'extraction des racines de quelques quantités monomes. Ces quantités peuvent être rationnelles, ou être déja affectées de ſignes radicaux ou d'expoſants fractionnaires.

Exemples pour les quantités rationnelles.

La racine quarrée de $+a^2$ eſt $+a$ ou $-a$, ce qu'on exprime ainſi $\sqrt{a^2} = \pm a$; la racine quarrée de $+25a^4b^6$ eſt $\pm 5a^2b^3$.

La racine cube de $-a^3$ eſt $-a$; celle de $+343a^6b^9$ eſt $+7a^2b^3$.

La racine quatrième de $+a^4$ eſt $\pm a$; celle de $+81a^8b^{12}$ eſt $\pm 3a^2b^3$.

La racine cinquième de $-a^5$ eſt $-a$; celle de $+32a^5b^{10}$ eſt $+2ab^2$.

On voit que dans tous ces exemples, les expoſants des quantités dont il a fallu tirer la racine ont été diviſibles par l'expoſant ou l'indice de cette racine, & qu'on a eu par conſéquent des nombres entiers pour quotients. Voici des exemples où la diviſion ne peut pas ſe faire exactement, & où par conſéquent la racine ne peut que s'indiquer, du moins en partie.

La racine quarrée de $+a$ ou de a^1 eſt $\pm a^{\frac{1}{2}}$, ou $\pm\sqrt{a}$; celle de a^3 eſt $\pm a^{\frac{3}{2}}$, ou $\pm a \,.\, a^{\frac{1}{2}}$, ou $\pm a\sqrt{a}$.

La racine cube de $-a^5b^7$ eſt $-a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}$, ou $-ab^2 . a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, ou $-ab^2\sqrt[3]{a^2b}$.

Exemples pour les quantités radicales.

La racine quarrée de $+\sqrt{a}$, ou de $+a^{\frac{1}{2}}$, eſt $\pm a^{\frac{1}{4}}$; celle de $+25\sqrt[3]{a^2b}$, ou de $+25\,a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, eſt $\pm 5a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{1}{6}}$, ou $\pm 5\sqrt[6]{a^2b}$.

La racine cube de $-\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$, ou de $-a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{4}{5}}$, eſt $-a^{\frac{2}{15}}b^{\frac{3}{15}}c^{\frac{4}{15}}$, ou $-\sqrt[15]{a^2b^3c^4}$.

La racine quatrième de $+\sqrt[7]{a^2bc}$, ou de $+a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{7}}c^{\frac{1}{7}}$, eſt $\pm a^{\frac{2}{28}}b^{\frac{1}{28}}c^{\frac{1}{28}}$, ou $\pm\sqrt[28]{a^2bc}$.

Exemples pour les Fractions.

La racine quarrée de la fraction $+\frac{a^2}{b^4}$ eſt $\pm$

$\frac{a}{b^2}$; celle de la fraction $+\frac{25a^2b^2}{64m^4n^6}$, eſt $\pm$ $\frac{5ab}{8m^2n^3}$.

La racine cube de la fraction $+\frac{27a^3b}{h^{10}}$ eſt $+$ $\frac{3a\sqrt[3]{b}}{h^3\sqrt[3]{h}}$.

La racine quarrée de la fraction radicale $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[7]{b}}$ eſt $\pm\frac{\sqrt[10]{a}}{\sqrt[14]{b}}$.

La racine cube de $+\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, ou de $+\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$, eſt $+\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{b}}$, ou $+\sqrt[12]{\frac{a}{b}}$.

Il eſt clair que dans tous les cas, les extractions des racines des fractions n'ont pas d'autres difficultés que les extractions des racines des quantités entières, puiſque l'opération ſe réduit à tirer ſéparément la racine du numérateur, & celle du dénominateur.

113. SOUVENT on rencontre des quantités affectées de ſignes radicaux, & décompoſables en facteurs, dont quelques-uns peuvent être délivrés du ſigne radical. Alors ces quantités peuvent être miſes ſous une forme plus ſimple, par un moyen que nous avons déja indiqué. Soit, par exemple, la quantité $\sqrt{50a^2b^3}$: j'obſerve que le coéfficient 50 peut être décompoſé en deux facteurs 25 & 2, dont le premier eſt un quarré

quarré parfait, & que la quantité littérale a^2b^3 peut être décomposée en ces deux facteurs a^2b^2 & b, dont le premier est aussi un quarré parfait. Ainsi, en tirant les racines des quarrés parfaits, & laissant les autres facteurs sous le radical, on transformera la quantité proposée $\sqrt{50a^2b^3}$ en celle-ci : $5ab\sqrt{2b}$.

De même, la quantité $\sqrt[3]{[a^3b+a^3c]}$ peut être écrite ainsi $a\sqrt[3]{[b+c]}$, en observant que a^3b+a^3c est décomposable en ces deux facteurs a^3 & $b+c$, dont le premier a pour racine cube, a, & laissant sous le signe radical l'autre facteur $b+c$, qui n'est pas un cube.

La quantité $\sqrt[4]{[405a^5+162a^4b]}$ peut être écrite sous cette forme, $3a\sqrt[4]{[5a+2b]}$, en observant que $405a^5+162a^4b$ est décomposable en ces deux facteurs $81a^4$ & $5a+2b$, dont le premier a pour racine quatrième, $3a$, & laissant sous le signe radical l'autre facteur dont on ne peut qu'indiquer la racine quatrième.

La racine imaginaire $\sqrt{-aa}$ peut être écrite sous cette forme, $a\sqrt{-1}$, en observant que $-aa$ peut se décomposer en ces deux facteurs $+aa$ & -1, dont le premier est le quarré de a, & le second, qui n'est point un quarré, doit être laissé sous le radical.

114. IL est clair que réciproquement une quantité écrite au-devant d'un signe radical, peut être transportée sous ce signe, en l'élevant à la puissance désignée par l'indice du même signe. Ainsi, $a\sqrt{b}$ est la même chose que $\sqrt{a^2b}$; $2a\sqrt[3]{m}$ est la même chose que $\sqrt[3]{8a^3m}$.

115. APRÈS avoir ainsi enseigné la manière de former les puissances, & d'extraire les racines des monomes; proposons-nous le même objet pour les polynomes.

Soit d'abord le binome * $a+b$, dont il s'agisse de former les puissances. On formera le quarré, en multipliant $a+b$ par $a+b$; le cube, en multipliant le quarré, par $a+b$; la quatrième puissance, en multipliant le cube, par $a+b$; ainsi de suite. On voit ici ces opérations.

$$\begin{array}{ll}
 & a+b, \\
 & a+b, \\
\hline
 & a^2+ab, \\
 & \quad +ab+b^2, \\
\hline
\text{Quarré} & a^2+2ab+b^2, \\
 & a+b, \\
\hline
 & a^3+2a^2b+ab^2, \\
 & \quad +a^2b+2ab^2+b^3, \\
\hline
\text{Cube} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\
 & a+b, \\
\hline
 & a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3, \\
 & \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4, \\
\hline
4^e \text{ puiss.} & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, \\
\hline
 & \&c. \\
\hline
\end{array}$$

* Un polynome qui n'a que deux termes, s'appelle *binome*;

116. DE ces calculs résultent les Théorêmes suivants.

I. *Le quarré d'un binome contient, 1°. le quarré de la première partie de ce binome. 2°. Le double du produit de la première partie multipliée par la seconde. 3°. Le quarré de la seconde.*

II. *Le cube d'un binome contient, 1°. le cube de la première partie de ce binome. 2°. Trois fois le quarré de la première partie, multiplié par la seconde. 3°. Trois fois le quarré de la seconde, multiplié par la première. 4°. Le cube de la seconde.*

III. *La quatrième puissance d'un binome contient, 1°. la quatrième puissance de la première partie de ce binome. 2°. Quatre fois le cube de la première partie, multiplié par la seconde. 3°. Six fois le quarré de la première, multiplié par le quarré de la seconde. 4°. Quatre fois le cube de la seconde, multiplié par la première. 5°. La quatrième puissance de la seconde.*

&c.

117. IL est évident, comme dans l'article 106, que toutes les puissances paires des deux binomes $a+b$ & $-a-b$, qui ont chacun le même signe à leurs deux parties, sont exactement les mêmes; mais que les puissances impaires ont à tous leurs termes le même signe que celui des parties du binome générateur. Voici, pour plus de clarté, les deux cas exprimés

---

celui qui en a trois s'appelle *trinome*; &c. Cela est clair par l'étymologie.

dans une même *Formule*, c'eſt-à-dire, dans un même calcul général.

Le quarré de $\pm a \pm b$, eſt $+aa+2ab+bb$.

Le cube de $\pm a \pm b$, eſt $\pm a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$.

La quatrième puiſſance de $\pm a \pm b$, eſt $+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

La cinquième puiſſance de $\pm a \pm b$, eſt $\pm a^5 \pm 5a^4b \pm 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 \pm 5ab^4 \pm b^5$.

&c.

118. Si les deux termes du binome n'avoient pas le même ſigne, comme cela arrive, par exemple, dans le binome $+a-b$,

Le quarré ſeroit $+a^2-2ab+b^2$;

Le cube, $+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

La quatrième puiſſance, $+a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

La cinquième puiſſance, $+a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$;

&c.

Par où l'on voit que tous les termes où la partie $-b$ ſe trouve élevée à une puiſſance impaire, ſont négatifs, & que les autres ſont poſitifs.

119. Les puiſſances des *trinomes*, des *quadrinomes*, &c, ſe forment par les mêmes moyens. Soit, par exemple, le trinome $a+b+c$. Je prens une quantité ſimple d, pour repréſenter la ſomme $+b+c$ des deux derniers termes de ce trinome; c'eſt-à-dire, que je fais $+b+c=d$: alors la queſtion eſt de former les

puissances du binome $a+d$. Quand ces puissances auront été trouvées, comme on vient de l'expliquer, on substituera à la place des puissances de d, les puissances pareilles du binome $+b+c$.

Veut-on, par exemple, élever $a+b+c$ au quarré? D'abord, le quarré de $a+d$ est $a^2+2ad+d^2$: mettons dans ce quarré, à la place de d, sa valeur $+b+c$, & à la place de $+d^2$, sa valeur $+b^2+2bc+c^2$; nous aurons $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$ pour le quarré de $a+b+c$. On procédera semblablement pour les puissances supérieures.

De même, s'il s'agissoit de former les puissances du quadrinome $a+b+c+d$, on supposeroit $+b+c+d=e$; & après avoir formé les puissances du binome $a+e$, on substitueroit à la place des puissances de e, les puissances semblables du trinome $+b+c+d$, qui se trouvent, comme on vient de voir.

On réduira toujours ainsi la formation des puissances d'un polynome qui a un nombre quelconque de termes, à la formation des puissances d'un polynome qui a un terme de moins. Et, en allant de proche en proche, le problême ne consistera jamais qu'à élever un binome à une puissance proposée.

120. Les puissances des fractions qui ont des termes complexes, se forment en élevant numérateur & dénominateur, au quarré, au cube, à la quatrième puissance, &c. Ainsi, par exemple, le quarré de la fraction $\frac{a+b}{2m+3n}$ est $\frac{a^2+2ab+b^2}{4m^2+12mn+9n^2}$.

121. PASSONS à l'extraction des racines des polynomes ; & pour mettre la plus grande clarté dans cette recherche, allons séparément d'un cas à l'autre, en commençant par l'extraction de la racine quarrée. Cette opération se fera facilement, si l'on considere la maniere dont se forme le quarré d'un binome (116 Théor. I.), & qu'on détermine, suivant l'ordre inverse, les parties de la racine, lorsqu'on a celles du quarré. Le procédé est, au fond, le même que pour l'extraction des racines quarrées des nombres. Il deviendra clair par des exemples.

EXEMPLE I.

Extraire la racine quarrée du polynome $4a^2 - 4ab + b^2$?

J'ordonne ce polynome par rapport à la lettre a, & je le dispose comme on voit ici.

Quarré supposé.	racine.
$4a^2 - 4ab + b^2$,	$2a - b$
$-4a^2$	$4a$
1er reste $-4ab + b^2$	
$+4ab - b^2$	
2e reste 0	

Cela posé, 1°. la racine du premier terme $4a^2$ est $\pm 2a$. Je me contente, pour simplifier l'opération, d'écrire cette racine avec le signe supérieur sous-entendu. Je quarre $2a$, & j'écris le quarré, avec un signe contraire, ſous le premier terme de la quantité propoſée, pour pouvoir faire la réduction. Cette réduction faite, il reſte $-4ab+b^2$.

2°. Je double la racine $2a$, ce qui me donne $4a$; quantité par laquelle je diviſe le premier terme $-4ab$ du reſte précédent ; il vient au quotient $-b$ que j'écris à la ſuite du premier terme $2a$ de la racine. Je fais le produit de $4a$ par $-b$, & le quarré de $-b$; j'écris la ſomme de ces deux produits, avec des ſignes contraires, ſous le premier reſte $-4ab+b^2$. La réduction faite, il ne reſte rien. D'où je conclus que $2a-b$ eſt la racine exacte du polynome propoſé.

On voit qu'au lieu de $2a-b$, on pourroit prendre également pour racine, $-2a+b$, qui a des ſignes contraires à ceux de la première.

EXEMPLE II.

Extraire la racine du polynome $9a^2-12ab-6ac+4bc+4b^2+c^2$, *qui eſt ordonné par rapport à la lettre a ?*

Je diſpoſe les quantités, & j'opère ſur elles, comme il eſt exprimé ici,

Quarré ſuppoſé. { racine.

$$\left\{\begin{array}{l} 9a^2-12ab+4b^2+4bc+c^2, \\ \quad\;\, -6ac \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 3a-2b-c \\ \hline 6a \\ \hline 6a-4b. \end{array}\right.$$

$$-9a^2$$

$$1^{\text{er}}\ \text{reste} \begin{cases} -12ab+4b^2+4bc+c^2\,; \\ -6ac \end{cases}$$

$$+12ab-4b^2,$$

$$2^{\text{e}}\ \text{reste} \quad -6ac+4bc+c^2,$$

$$+6ac-4bc-c^2,$$

$$3^{\text{e}}\ \text{reste} \quad 0$$

1°. Je tire la racine du premier terme $9a^2$; elle eſt $\pm 3a$, mais je ne prens que le ſigne ſupérieur. J'écris le quarré de cette racine, avec un ſigne contraire, ſous le polynome propoſé. La réduction faite, on a pour premier reſte $-12ab-6ac+4b^2+4bc+c^2$.

2°. Je double la racine trouvée $3a$; & par ce double $6a$, je diviſe le premier terme $-12ab$ du reſte précédent; le quotient eſt $-2b$, que j'écris à la ſuite de $3a$. Je fais le produit de $6a$ par $-2b$, & le quarré de $-2b$; j'écris la ſomme de ces deux produits, avec des ſignes contraires, ſous le premier reſte. La réduction faite, on a le ſecond reſte $-6ac+4bc+c^2$.

3°. Je double la racine $3a-2b$, ce qui donne $6a-4b$. Par le premier terme $6a$ de cette quantité, je diviſe le premier terme $-6ac$ du ſecond reſte; il vient au quotient $-c$ que j'écris à la ſuite de $3a-2b$. Je multiplie le diviſeur $6a-4b$ par $-c$, & je fais le quarré de $-c$; j'écris la ſomme de ces deux produits, avec des ſignes contraires, ſous le ſecond reſte. La réduction faite, il ne reſte rien. Ainſi, $3a-2b-c$ eſt la racine exacte du polynome propoſé.

On peut prendre également pour racine $-3a+$

$2b + c$, quantité qui a des signes contraires à ceux de $3a - 2b - c$.

122. Il arrive souvent qu'un polynome, dont on propose d'extraire la racine quarrée, n'est pas un quarré parfait. Alors on ne peut pas en tirer la racine exacte ; mais on peut exprimer cette racine par une suite infinie de termes.

Exemple.

Extraire la racine quarrée approchée du polynome $a^2 + b^2$, qui n'est pas un quarré parfait ?

Quarré supposé.

$$a^2 + b^2,$$
$$-a^2$$
$$1^{er} \text{ reste } + b^2$$
$$-b^2 - \frac{b^4}{4a^2},$$
$$2^e \text{ reste } - \frac{b^4}{4a^2},$$
$$+ \frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6},$$
$$3^e \text{ reste } + \frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6},$$
$$- \frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{16a^6} + \frac{b^{10}}{64a^8} - \frac{b^{12}}{256a^{10}},$$
$$4^e \text{ reste } - \frac{5b^8}{64a^6} + \frac{b^{10}}{64a^8} - \frac{b^{12}}{256a^{10}}.$$

&c.

racine.

$$\left\{ a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \text{\&c.} \right\}$$
$$2a$$
$$2a + \frac{b^2}{a},$$
$$2a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{4a^3},$$

&c.

1°. Je prens la racine quarrée du premier terme a^2 du polynome proposé ; elle est a, en s'en tenant toujours au signe $+$. J'en fais le quarré que j'écris, avec un signe contraire, sous le polynome. La réduction faite, on a le premier reste $+b^2$.

2°. Je double a ; & par ce double $2a$, je divise b^2 ; le quotient indiqué est $+\frac{b^2}{2a}$, que j'écris à la suite de la première partie a de la racine. Je multiplie le diviseur par le quotient ; au produit j'ajoute le quarré de $\frac{b^2}{2a}$; ensuite j'écris la somme, avec des signes contraires, sous le premier reste. La réduction faite, on a $-\frac{b^4}{4a^2}$ pour second reste.

3°. Je double la partie trouvée $a+\frac{b^2}{2a}$ de la racine ; & par le premier terme $2a$ de ce double $2a+\frac{b^2}{a}$, je divise le second reste ; il vient au quotient $-\frac{b^4}{8a^3}$ que j'écris ; je multiplie le diviseur par le quotient ; au produit, j'ajoute le quarré de $-\frac{b^4}{8a^3}$; ensuite j'écris la somme, avec des signes contraires, sous le second reste. La réduction faite, on a $+\frac{b^6}{8a^4}-\frac{b^8}{64a^6}$, pour troisième reste.

4°. Je double la partie $a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}$; & par le premier terme $2a$ de ce double $2a + \frac{b^2}{a} - \frac{b^4}{4a^3}$, je diviſe le premier terme du troiſième reſte; il vient au quotient $+ \frac{b^6}{16a^5}$; je multiplie le diviſeur par le quotient; au produit, j'ajoute le quarré de $\frac{b^6}{16a^5}$; enſuite j'écris la ſomme, avec des ſignes contraires, ſous le troiſième reſte. La réduction faite, on a $-\frac{5b^8}{64a^6} + \frac{b^{10}}{64a^8} - \frac{b^{12}}{256a^{10}}$ pour quatrième reſte.

On voit qu'en continuant toujours à opérer de même, il viendra à chaque opération un nouveau terme pour la racine. Elle eſt donc exprimée par la ſuite infinie,

$$(A) \quad a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \&c.$$

En changeant les ſignes de tous les termes de cette ſuite, on en auroit une autre qui ſeroit également la racine de $a^2 + b^2$.

123. IL eſt évident que la ſuite (A) ſera convergente pourvu qu'on ait $a > b$; & qu'elle le ſera d'autant plus, que a ſurpaſſera davantage b.

Pour montrer l'uſage de cette ſuite, ſuppoſons qu'on ait le nombre 150 dont on veuille extraire la racine quarrée, au moins par approximation. Je conſidère ce nombre comme la ſomme des deux nombres 144

& 6, dont le premier eſt le quarré de 12. Nous aurons $a^2 = 144$, $b^2 = 6$. En ſubſtituant ces valeurs dans la ſuite précédente, elle deviendra

$$12 + \frac{6}{24} - \frac{36}{8 \times 1728} + \frac{216}{16 \times 248832} - \&c.$$

On voit que cette ſuite eſt extrêmement convergente, & qu'il ſuffira de prendre ſes trois premiers termes pour avoir la valeur approchée de toute la ſuite, ou de la racine de 150. Les deux premiers termes, qui ont le ſigne +, étant ajoutés enſemble, donnent $12 + \frac{1}{4}$ pour ſomme, dont retranchant la fraction $\frac{36}{8 \times 1728}$, ou $\frac{1}{384}$ qui eſt précédée du ſigne —, on aura pour réſultat des trois termes en queſtion, $12 + \frac{95}{384}$, ou (en réduiſant la fraction $\frac{95}{384}$ en parties décimales), 12,247391 qui diffère à peine de $\frac{1}{100000}$, de la vraie racine. C'eſt de quoi on peut s'aſſurer, en tirant la racine quarrée de 150, par la méthode approchée que nous avons donnée (Arith. 144).

Si on s'étoit contenté d'employer ſeulement les deux premiers termes de la ſuite, c'eſt-à-dire, $a + \frac{b^2}{2a}$, on auroit trouvé 12,25 pour la racine quarrée approchée de 150.

Faiſons encore une application de la même ſuite (A). Soit le nombre 345789, dont il faut trouver la racine quarrée, au moins approchée. Je commence par tirer, ſuivant les régles de l'Arithmétique, la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre 345789. Ce quarré est 345744, & sa racine est 588; le reste de l'opération est 45. Ainsi, $345789 = 345744 + 45$; & on a $a^2 = 345744$, $b^2 = 45$, $a = 588$. Donc, en prenant seulement les deux premiers termes de la suite, on aura pour la racine approchée, $588 + \frac{45}{2 \times 588}$, ou $588 + \frac{45}{1176}$, ou 588,0382, qui ne diffère pas de la vraie racine, de $\frac{1}{10000}$.

124. On doit faire ici une remarque analogue à celle de l'article 72. Si dans le binome $a^2 + b^2$, on avoit $b^2 > a^2$, il faudroit regarder b^2 comme le premier terme de ce binome; & en déterminant d'ailleurs les parties de la racine, comme dans l'article 122, au lieu de la suite (A) on auroit la suite

$$(B) \quad b + \frac{a^2}{2b} - \frac{a^4}{8b^3} + \frac{a^6}{16b^5} - \&c\,;$$

qui est convergente.

125. Si on avoit $a^2 = b^2$, alors l'une ou l'autre suite donneroit également,

$$a + \frac{a}{2} - \frac{a}{8} + \frac{a}{16} - \&c,$$

ou bien,

$$a \times \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \&c\right);$$

suite qui converge encore, mais avec plus de lenteur que les deux précédentes.

126. Si, au lieu du binome a^2+b^2, on avoit tout autre binome, tel que $m \pm n$, on ſuppoſeroit $m=a^2$, $\pm n=b^2$, & ſubſtituant pour a^2 & b^2 ces valeurs, dans la ſuite (A) lorſque $m>n$, on trouveroit que la racine quarrée de $m \pm n$ eſt exprimée par la ſuite,

$$\sqrt{m} \pm \frac{n}{2\sqrt{m}} - \frac{n^2}{8m\sqrt{m}} \pm \frac{n^3}{16m^2\sqrt{m}} - \&c;$$

ou bien,

$$m^{\frac{1}{2}} \pm \frac{n}{2m^{\frac{1}{2}}} - \frac{n^2}{8m^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{n^3}{16m^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

Il eſt clair que ſi on avoit $n>m$, le binome dont il s'agit d'extraire la racine quarrée, ne pourroit être que $m+n$, ou $n-m$, & non pas $m-n$, parce que cette dernière quantité étant négative, ſa racine quarrée eſt imaginaire (111). Les deux premiers cas reviennent au précédent, en changeant m en n.

127. La même méthode s'applique à l'extraction de la racine quarrée approchée d'un trinome, ou d'un quadrinome, &c. Soit, par exemple, le trinome $f+g+h$, dont il faut exprimer la racine quarrée en ſuite infinie. Je conſidére ce trinome comme compoſé des deux parties f & $(g+h)$. Ainſi, en prenant une ſeule lettre q pour repréſenter la ſeconde partie, la queſtion eſt réduite à exprimer en ſuite infinie la racine quarrée du binome $f+q$; ce qui ſe fait, comme nous venons de l'expliquer.

De même, ſi on avoit le quadrinome $f+g+h+i$, on feroit $g+h+i=q$, & il ne s'agiroit plus que de tirer la racine quarrée du binome $f+q$. Ainsi de suite pour les polynomes d'un plus grand nombre de termes.

128. LES racines quarrées des fractions qui ont des termes complexes, se trouvent en tirant la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur, soit exactement, soit par le moyen des suites infinies.

129. NOUS avons vû (113) que certains monomes affectés du signe radical peuvent en être délivrés en partie. Il en est de même pour quelques polynomes. Qu'on ait, par exemple, la quantité radicale du second degré $\sqrt{[3a^3c-6a^2bc+3ab^2c]}$. J'observe que le polynome $3a^3c-6a^2bc+3ab^2c$ est composé de ces deux facteurs $aa-2ab+bb$, & $3ac$, dont le premier est le quarré de $a-b$; d'ou il suit qu'en tirant la racine de ce quarré, la quantité radicale pourra être écrite ainsi, $(a-b)\sqrt{3ac}$. De même, la quantité radicale $\sqrt{[8a^2m-24abm+18b^2m-4a^2n+12abn-9b^2n]}$ peut être écrite ainsi, $(2a-3b)\sqrt{[2m-n]}$, en observant que le polynome $8a^2m-24abm+$&c, est composé de ces deux facteurs $4a^2-12ab+9b^2$ & $2m-n$, dont le premier est le quarré de $2a-3b$.

130. RÉCIPROQUEMENT, une quantité rationnelle complexe écrite au-devant d'un signe radical du second degré, peut être transportée sous ce signe, en élevant cette quantité au quarré. Ainsi, $(a+b)\sqrt{m}$

eſt la même choſe que $\sqrt{[(a^2+2ab+b^2)m]}$ ou $\sqrt{[a^2m+2abm+b^2m]}$.

131. Les extractions des racines cubes des polynomes n'ont pas plus de difficulté que celles des racines quarrées.

En réfléchiſſant ſur la manière dont ſe forme le cube d'un binome (116, Théor. II), & déterminant, ſuivant l'ordre inverſe, les parties de la racine, lorſqu'on a celles du cube, on trouvera la racine cube exacte de tout cube parfait, ou la racine approchée, par le moyen des ſuites infinies, quand la quantité regardée comme un cube, ne ſera pas un cube parfait. Cela va s'éclaircir par des exemples.

Exemple I.

Extraire la racine cube du polynome $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$?

J'ordonne cette quantité par rapport à la lettre a; on voit ici le résultat de l'opération.

Cube ſuppoſé.	racine cube.
$27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$.	$3a-2b$
$-27a^3$	$27a^2$
1[er] reſte $-54a^2b+36ab^2-8b^3$,	
$+54a^2b-36ab^2+8b^3$,	
2[e] reſte 0	

Développons tout au long le procédé de l'opération indiquée.

1°. J'extrais

1°. J'extrais la racine cube du premier terme $27a^3$, elle est $3a$ que j'écris. Ensuite, ayant écrit le cube de cette partie, avec un signe contraire, sous le polynome proposé, je fais la réduction; ce qui me donne pour premier reste, $-54a^2b+36ab^2-8b^3$.

2°. Je fais le quarré de la partie $3a$, & je le triple, ce qui me donne $27a^2$, quantité par laquelle je divise le premier terme $-54a^2b$ du premier reste; il vient au quotient $-2b$, que j'écris à la racine. Ensuite, je fais premièrement, le produit de $27a^2$ par $-2b$; il est $-54a^2b$: secondement, le produit du triple du quarré de $-2b$, par $3a$; il est $+36ab^2$: troisièmement, le cube de $-2b$; il est $-8b^3$. Puis ayant écrit la somme de ces trois produits, avec des signes contraires, sous le premier reste, je fais la réduction; & il ne reste rien. Ainsi, la racine cube exacte de la quantité proposée est $3a-2b$.

EXEMPLE II.

Extraire la racine cube du polynome $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3+27a^2c-36abc+12b^2c+9ac^2-6bc^2+c^3$?

Ayant ordonné ce polynome, par rapport à a, l'opération se fait comme il est indiqué ici.

Cube supposé.	racine cube.
$\left\{\begin{array}{l} 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3 \\ \quad + 27a^2c - 36abc + 12b^2c \\ \qquad\qquad + 9ac^2 - 6bc^2 + c^3. \end{array}\right.$	$3a - 2b + c$
	$27a^2$
$-27a^3$	$27a^2 - 36ab + 12b^2$

$$\text{1}^{\text{er}}\ \text{reste}\ \left\{\begin{array}{l} -54a^2b + 36ab^2 - 8b^3, \\ +27a^2c - 36abc + 12b^2c \\ \qquad\quad + 9ac^2 - 6bc^2 + c^3. \end{array}\right.$$

$$+54a^2b - 36ab^2 + 8b^3,$$

$$\text{2}^{\text{e}}\ \text{reste}\ \left\{\begin{array}{l} +27a^2c - 36abc + 12b^2c \\ \qquad\quad + 9ac^2 - 6bc^2 + c^3, \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} -27a^2c + 36abc - 12b^2c \\ \qquad\quad - 9ac^2 + 6bc^2 - c^3, \end{array}$$

$$\text{3}^{\text{e}}\ \text{reste}\qquad 0$$

Les deux premiers termes de la racine se trouvent par un calcul qui est exactement le même que celui de l'exemple précédent. Mais, pour épargner tout embarras aux Commençants, je vais faire ici l'opération en son entier.

1°. J'extrais la racine cube du premier terme $27a^3$; elle est $3a$, que j'écris. J'en fais le cube, & j'écris ce cube, avec un signe contraire, sous le polynome; & la réduction étant faite, j'ai le premier reste écrit ci-dessus.

2°. Je fais le quarré de $3a$, & je le triple; ce qui me donne $27a^2$, quantité par laquelle je divise le premier terme $-54a^2b$ du premier reste; le quotient eſt $-2b$ que j'écris à la ſuite de $3a$. Je fais trois produits; ſavoir, premièrement, celui de $27a^2$ par $-2b$; ſecondement, celui du triple du quarré de $-2b$, par $3a$; troiſièmement, le cube de $-2b$. Ces trois quantités étant ajoutées enſemble, j'écris la ſomme, avec des ſignes contraires, ſous le premier reſte, & je fais la réduction. De toutes ces opérations, réſulte le ſecond reſte qu'on voit ci-deſſus.

3°. Je conſidére la partie $3a-2b$, comme ne formant qu'un même tout; j'en fais le quarré, & je le triple; ce qui me donne $27a^2-36ab+12b^2$. Par le premier terme $27a^2$ de cette quantité, je diviſe le premier terme $27a^2c$ du ſecond reſte; le quotient eſt $+c$, que j'écris à la ſuite de la première partie $(3a-2b)$ de la racine. Enſuite je fais trois produits; ſavoir, premièrement, celui de $27a^2-36ab+12b^2$, par c; ſecondement, celui du triple du quarré de c, par $3a-2b$; troiſièmement, le cube de c. Et après avoir écrit la ſomme de ces trois quantités, avec des ſignes contraires, ſous le ſecond reſte, je fais la réduction, & j'ai o pour reſte. D'où je conclus que la racine exacte du polynome propoſé eſt $3a-2b+c$.

132. VENONS à l'extraction des racines cubes, par le moyen des ſuites infinies.

EXEMPLE.

Extraire, par le moyen d'une suite infinie, la racine cube de a^3+b^3, qui n'est pas un cube parfait?

Cube supposé.

$$a^3+b^3,$$
$$-a^3,$$

1er reste $+b^3,$

$$-b^3-\frac{b^6}{3a^3}-\frac{b^9}{27a^6},$$

2e reste $-\frac{b^6}{3a^3}-\frac{b^9}{27a^6},$

$$+\frac{b^6}{3a^3}+\frac{2b^9}{9a^6}-\frac{b^{15}}{81a^{12}}+\frac{b^{18}}{729a^{15}},$$

3e reste $+\frac{5b^9}{27a^6}-\frac{b^{15}}{81a^{12}}+\frac{b^{18}}{729a^{15}},$

$$-\frac{5b^9}{27a^6}-\&c,$$

4e reste $-\frac{10b^{12}}{81a^9}-\&c.$

. . . .

&c.

racine cube.

$$a+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}+\frac{5b^9}{81a^8}-\&c.$$

$$3a^2$$

$$3a^2+\frac{2b^3}{a}+\frac{b^6}{3a^4},$$

$$3a^2+\frac{2b^3}{a}-\frac{b^6}{3a^4}-\frac{2b^9}{9a^7}+\frac{b^{12}}{27a^{10}},$$

&c.

1°. J'extrais la racine cube de la première partie a^3 du cube supposé ; elle est a, que j'écris. Je fais le cube de a, & après l'avoir écrit, avec un signe contraire, sous a^3+b^3, je fais la réduction, & j'ai pour premier reste $+b^3$.

2°. Je triple le quarré de a, & j'ai $3a^2$, quantité par laquelle je divise $+b^3$; le quotient est $+\frac{b^3}{3a^2}$, que j'écris à la racine. Ensuite je fais trois produits ; savoir, premièrement, celui de $+3a^2$ par $+\frac{b^3}{3a^2}$; secondement, celui du triple du quarré de $\frac{b^3}{3a^2}$, par a ; troisièmement, le cube de $\frac{b^3}{3a^2}$. Et après avoir écrit la somme de ces trois produits, avec des signes contraires, sous le premier reste, je fais la réduction ; ce qui donne le second reste $-\frac{b^6}{3a^3}-\frac{b^9}{27a^6}$.

3°. Je triple le quarré de $a+\frac{b^3}{3a^2}$; ce qui donne $3a^2+\frac{2b^3}{a}+\frac{b^6}{3a^4}$. Par le premier terme de cette quantité, je divise le premier terme $-\frac{b^6}{3a^3}$ du reste précédent ; le quotient est $-\frac{b^6}{9a^5}$, que j'écris à la racine. Ensuite, je fais trois produits ; savoir, premièrement, celui de $3a^2+\frac{2b^3}{a}+$

$\frac{b^6}{3a^4}$, par $-\frac{b^6}{9a^5}$; ſecondement, celui de $a+\frac{b^3}{3a^2}$ par le triple du quarré de $-\frac{b^6}{9a^5}$; troiſièmement, le cube de $-\frac{b^6}{9a^5}$. Et après avoir écrit la ſomme de ces trois produits, avec des ſignes contraires, ſous le ſecond reſte, j'ai, après la réduction, le troiſième reſte écrit ci-deſſus.

4°. Je triple le quarré de $a+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}$; & j'ai $3a^2+\frac{2b^3}{a}-\frac{b^6}{3a^4}-\frac{2b^9}{9a^7}+\frac{b^{12}}{27a^{10}}$. Par le premier terme de cette quantité, je diviſe le premier terme du reſte précédent; ce qui donne le quotient $+\frac{5b^9}{81a^8}$, que j'écris à la racine. Enſuite je fais trois produits; ſavoir, premièrement, celui du diviſeur $3a^2+\frac{2b^3}{a}-$ &c, par $+\frac{5b^9}{81a^8}$; ſecondement, celui du triple du quarré de $+\frac{5b^9}{81a^8}$, par $a+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}$; troiſièmement, le cube de $+\frac{5b^9}{81a^8}$. Et après avoir écrit la ſomme de ces trois produits, avec des ſignes contraires, ſous le troiſième reſte, j'ai un quatrième reſte.

En continuant à opérer toujours de même, on trouvera, pour la racine, de nouveaux termes, qu'on écrira à la ſuite des précédents. La racine cube de a^3+b^3 ſera donc exprimée par cette ſuite infinie,

$$(A)\ a+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}+\frac{5b^9}{81a^8}-\&c,$$

qui eſt convergente, lorſque $a>b$.

133. Si $a<b$, il faudra regarder b^3 comme la première partie du cube ſuppoſé; & alors la racine cube ſera exprimée par la ſuite,

$$(B)\ b+\frac{a^3}{3b^2}-\frac{a^6}{9b^5}+\frac{5a^9}{81b^8}-\&c,$$

qui eſt convergente.

134. Lorsque $a=b$, l'une ou l'autre ſuite devient,

$$a\times(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}-\&c).$$

135. Qu'on ait un binome quelconque, tel que $m+n$, dans lequel m & n peuvent être des quantités poſitives ou négatives; on en extraira la racine cube par approximation, en ſuppoſant $a^3=m$, ou $a=m^{\frac{1}{3}}$, $b^3=n$, ou $b=n^{\frac{1}{3}}$, & ſubſtituant ces valeurs de a & de b, dans l'une ou l'autre ſuite (A) ou (B).

De même, ſi on avoit le trinome $f+g+h$, on ſuppoſeroit $a^3=f+g$, ou $a=(f+g)^{\frac{1}{3}}$, $b^3=h$, ou $b=h^{\frac{1}{3}}$, & on ſubſtitueroit les valeurs de a & de b dans les mêmes ſuites. On opérera ſemblablement pour l'extraction des racines cubes des polynomes qui ont un plus grand nombre de termes.

136. Les racines cubes des fractions qui ont des termes complexes, se trouvent en tirant la racine cube du numérateur & celle du dénominateur, soit exactement, soit par le moyen des suites infinies.

137. LORSQU'UNE quantité complexe affectée d'un radical cube est décomposable en facteurs, dont l'un est un cube complexe parfait ; ce cube peut être supprimé sous le signe radical, en écrivant sa racine au-devant du même signe. Ainsi, la quantité $\sqrt[3]{[2a^4 - 6a^3b + 6a^2b^2 - 2ab^3 - a^3c + 3a^2bc - 3ab^2c + b^3c]}$, peut être écrite ainsi $(a-b)\sqrt[3]{[2a-c]}$; car la quantité $2a^4 - 6a^3b + 6a^2b^2$ — &c, est composée des deux facteurs $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, & $2a - c$, dont le premier est le cube de $a - b$.

138. RÉCIPROQUEMENT, une quantité complexe écrite au-devant d'un signe radical du troisième degré, peut être transportée sous ce signe, en l'élevant au cube. Ainsi, $(a-b)\sqrt[3]{m}$ est la même chose que $\sqrt[3]{[ma^3 - 3ma^2b + 3mab^2 - mb^3]}$.

139. NOUS pourrions également, en décomposant toujours les puissances dans un ordre opposé à celui suivant lequel nous avons vû (116) qu'elles se forment, donner des régles particulières pour extraire les racines quatrième, cinquième, sixième, &c, d'une quantité complexe; mais je ne pousserai pas plus loin ces détails, qui sans être difficiles, demandent d'assez longs

calculs, parce que je donnerai dans la ſuite une méthode générale & facile pour élever une quantité complexe à une puiſſance quelconque, entière ou rompue, poſitive ou négative ; ce qui comprendra la formation générale des puiſſances, & l'extraction des racines, tant pour les quantités entières que pour les fractions.

140. JE m'abſtiens encore de parler ici de l'extraction des racines des quantités en parties rationnelles, en parties radicales. Comme cette théorie eſt principalement utile pour la réſolution complette de certaines équations, & que d'ailleurs elle eſt un peu abſtraite, elle trouvera d'autant plus naturellement ſa place ci-deſſous, qu'il eſt temps de délaſſer nos Lecteurs de la ſécheresſe des calculs que nous avons faits jusqu'ici, en leur montrant l'uſage de ces calculs dans des queſtions curieuſes & utiles. C'eſt ce qu'on va voir dans la théorie des équations.

CHAPITRE VIII.

Des Equations en général, & de celles du premier degré en particulier.

141. Si deux quantités, ſimples ou compoſées, ſont égales entr'elles, l'expreſſion ſymbolique d'une telle égalité eſt ce qu'on appelle une *équation*. Par exemple, l'expreſſion $9+3=7+5$, eſt une équation. De même, $a+b=c+d$, $x^2+bx=cd$, ſont des équations.

Les deux parties de l'équation, ſéparées par le ſigne $=$, en ſont les *membres*. Le membre de la gauche eſt le *premier*; celui de la droite, le *ſecond*. Chaque membre peut être compoſé d'un ou de pluſieurs termes.

142. Les équations ſervent à exprimer d'une manière abrégée les raiſonnemens qu'on eſt obligé de faire pour réſoudre une queſtion. Elles en ſont, pour ainſi dire, la traduction algébrique. Or, parmi les quantités que l'on compare ainſi enſemble, les unes ſont *connues*, les autres *inconnues*. Ordinairement on repréſente les premières, par les premières lettres a, b, c, d &c, de l'alphabet, & les ſecondes, par les dernières lettres t, x, y, z; mais cela eſt arbitraire. On fait d'ailleurs exactement les mêmes opé-

rations de calcul sur les unes & sur les autres. L'objet final d'une équation qui contient une inconnue est toujours de faire connoître cette quantité, ou, comme on dit, de *dégager l'inconnue*. Cet art s'appelle encore *la résolution des équations*.

143. On distingue deux sortes de problêmes ; les problêmes *déterminés*, & les problêmes *indéterminés*. Les premiers sont ceux dont les conditions exprimées en langage algébrique mènent à une équation finale qui ne contient qu'une seule inconnue ; & cette équation s'appelle en conséquence *équation déterminée*. Les problêmes indéterminés mènent à une équation qui contient plusieurs inconnues, & qui s'appelle *équation indéterminée*.

144. Les équations, déterminées ou indéterminées, sont de différents degrés, c'est-à-dire, du premier degré, ou du second, ou du troisième, ou du quatrième, &c, selon que la plus haute puissance de l'inconnue, ou de l'une des inconnues dans un terme, ou que le produit de plusieurs inconnues, mêlées ensemble dans un terme, est d'une dimension, ou de deux dimensions, ou de trois, ou de quatre, &c. Ainsi, x étant l'inconnue, l'équation $ax+bc=cd$, est du premier degré, parce que l'inconnue n'y est que d'une dimension. L'équation $ax^2+bcx=m^3+n^3$, est du second degré, parce que dans le terme ax^2, l'inconnue forme deux dimensions, x^2 étant la même chose que xx. L'équation $x^3+bx^2+c^2x=m^3$, est du troisième degré, parce que le

terme x^3, eſt de trois dimenſions, formées de la ſeule inconnue x. Ainſi de ſuite. Toutes ces équations ſont déterminées. Prenons pour exemple d'une équation indéterminée, celle-ci, $ax + xy + by = cd$, dans laquelle x & y ſont les inconnues; cette équation eſt du ſecond degré, parce que le terme xy, qui contient le produit des deux inconnues, eſt de deux dimenſions. Les équations indéterminées $ax^3 + b^2xy + b^3y = m^4$, $ax^2 + xy^2 + by^2 = h^3$, ſont du troiſième degré, parce que dans le terme ax^3 de la première, l'inconnue étant élevée à la troiſième puiſſance, forme trois dimenſions, & que dans la ſeconde, les inconnues x & y forment auſſi trois dimenſions dans le terme xy^2. Ainſi de ſuite.

Les quantités connues & données n'entrent jamais pour rien dans l'eſtimation du degré d'une équation; il ſe régle ſeulement d'après les inconnues, comme nous venons de l'expliquer.

145. MON objet étant d'expoſer la théorie générale de la réſolution des équations, je commence par celles du premier degré, & je partage les problêmes qui s'y rapportent, en deux claſſes. L'une comprend les problêmes déterminés; l'autre les problêmes indéterminés, & ceux qui étant indéterminés en général, peuvent devenir déterminés, lorſqu'on aſtreint les inconnues à certaines conditions.

SECTION I.

Des Problêmes déterminés du premier degré.

146. TOUT problême déterminé mène, comme nous l'avons dit, à une équation déterminée. Supposons donc qu'en satisfaisant à toutes les conditions d'une question, on soit parvenu à une équation du premier degré, & qu'il s'agisse de la résoudre. L'art de remplir cet objet consiste entièrement à faire en sorte que l'inconnue soit seule dans un membre, tandis que les autres quantités, supposées connues, sont dans l'autre membre; car alors l'inconnue est évidemment dégagée, puisqu'elle se trouve égale à un résultat de quantités toutes connues. Or, il est toujours possible d'amener l'équation à cette forme, soit en ajoutant à chaque membre, ou en retranchant de chacun d'eux, une même quantité; soit en multipliant ou en divisant chaque membre par une même quantité; soit en les élevant l'un & l'autre à une même puissance, &c. Ces différentes opérations produisent toujours des équations : car il est clair que tous les changements semblables qu'on peut faire subir à deux quantités égales, ne peuvent produire que des quantités encore égales entr'elles. Cela va s'entendre à fond par des exemples.

147. QU'ON ait l'équation $x - a = b + c$, dans laquelle tout est connu, à l'exception de x. Il est évi-

dent que si la quantité x étoit seule dans un membre; on la connoîtroit, puisqu'elle seroit égale à un résultat d'autres quantités qui sont toutes données. Or, pour avoir x toute seule dans le premier membre, on n'a qu'à ajouter de part & d'autre $+a$: car $+a$ détruira $-a$ dans le premier membre; & on aura $x=b+c+a$.

148. SOIT l'équation $x+a=b+c$. En retranchant de chaque membre, la même quantité $+a$, j'aurai l'inconnue x seule dans le premier membre; car $-a$ détruira $+a$ dans ce membre. L'équation deviendra donc $x=b+c-a$; & l'on connoîtra ainsi x, puisque les quantités a, b, c sont données.

149. ON voit par les opérations que nous venons de faire sur les deux exemples précédents, qu'en ajoutant à chaque membre, ou en en retranchant une même quantité, cette quantité disparoît du membre où elle se trouvoit d'abord, pour se reproduire dans l'autre membre, avec un signe contraire. On appelle cela *transposer un terme.* Cette opération, qui revient très-souvent, laisse toujours subsister l'égalité; car, par les axiomes, si l'on a deux quantités égales, & qu'on leur ajoute ou qu'on en retranche une même quantité, on aura encore des résultats égaux.

150. SOIT l'équation $\frac{x}{a}+\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$. La première chose que je dois faire pour parvenir à dégager l'inconnue x, est de la débarrasser du diviseur a qui l'affecte. Or, pour cela, je multiplie tous les termes

de l'équation par a; ce qui ne détruit pas l'égalité du premier membre avec le ſecond, & ce qui me donne $x + \frac{ab}{c} = \frac{ad}{e}$. Enſuite je tranſpoſe le terme $\frac{ab}{c}$, & j'ai $x = \frac{ad}{e} - \frac{ab}{c}$.

151. Il en ſeroit de même, ſi le diviſeur de x étoit complexe, comme, par exemple, ſi on avoit l'équation $\frac{x}{a+b-c} + \frac{h}{g} = \frac{f}{m}$. D'abord, en indiquant ſimplement la multiplication de tous les termes de l'équation par le diviſeur $a+b-c$, on auroit $x + \frac{h(a+b-c)}{g} = \frac{f(a+b-c)}{m}$. Enſuite, en tranſpoſant le terme $\frac{h(a+b-c)}{g}$, il viendroit $x = \frac{f(a+b-c)}{m} - \frac{h(a+b-c)}{g}$, ou bien, en effectuant les multiplications indiquées,

$$x = \frac{af+bf-cf}{m} - \frac{(ah+bh-ch)}{g},$$

ou bien encore, en réduiſant les deux fractions au même dénominateur, $x = \frac{afg+bfg-cfg}{gm} - \left(\frac{ahm+bhm-chm}{gm}\right)$, ou enfin . . . .

$$x = \frac{afg+bfg-cfg-ahm-bhm+chm}{gm}.$$

152. Soit l'équation $\frac{ax}{b} + \frac{bc}{d} = \frac{ex}{f} +$

$\frac{bg}{m}$. Je fais disparoître les fractions, en multipliant successivement chaque terme par chaque dénominateur b, d, f, m. Par-là, j'ai, premièrement, $ax + \frac{b^2c}{d} = \frac{bex}{f} + \frac{b^2g}{m}$; secondement, $adx + b^2c = \frac{bdex}{f} + \frac{b^2dg}{m}$; troisièmement, $adfx + b^2cf = bdex + \frac{b^2dfg}{m}$; quatrièmement, $adfmx + b^2cfm = bdemx + b^2dfg$. Etant parvenu à ce dernier résultat, je mets dans le premier membre tous les termes qui contiennent x, & tous les autres dans le second. Cela se fait en transposant les deux termes b^2cfm & $bdemx$. J'ai donc ainsi, $adfmx - bdemx = b^2dfg - b^2cfm$, ou bien, $x(adfm - bdem) = b^2dfg - b^2cfm$. Maintenant, en divisant tout par la quantité $adfm - bdem$, qui multiplie x, j'aurai l'inconnue x toute seule dans le premier membre, en cette sorte $x = \frac{b^2dfg - b^2cfm}{adfm - bdem}$.

153. Si on avoit une équation de cette espèce, $\sqrt{x} + \sqrt{c} = \sqrt{[m+n]}$; en transposant d'abord $\sqrt{c}$, on auroit $\sqrt{x} = \sqrt{[m+n]} - \sqrt{c}$. Ensuite élevant tout au quarré, on auroit $x = (\sqrt{[m+n]} - \sqrt{c})^2$.

154. Ces principes généraux posés, je vais donner la solution de différens problêmes du premier degré, qui contiendront un plus ample développement des régles

régles précédentes, & qui montreront la manière d'appliquer l'Algébre à des questions qu'il seroit quelquefois impossible de résoudre par toute autre voie.

PROBLEME I.

155. *TROUVER un nombre qui étant ajouté à sa moitié & à son tiers, donne* 110 *pour somme ?*

Traduisons cette question en langage algébrique. Soit x le nombre cherché ; sa moitié sera $\frac{x}{2}$, & son tiers, $\frac{x}{3}$. Ajoutant ces trois quantités ensemble, on aura pour somme, $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$. Or, par hypothèse, cette somme doit étre égale à 110. On aura donc l'équation $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=110$.

Pour parvenir à dégager l'inconnue x, je fais disparoître les fractions, en multipliant successivement tous les termes par les dénominateurs 2 & 3. Je trouve ainsi d'abord, $2x+x+\frac{2x}{3}=220$, puis $6x+3x+2x=660$, ou bien, $11x=660$. Divisant tout par 11, j'aurai $x=60$. En effet, en ajoutant à 60 sa moitié 30, & son tiers 20, on aura 110 pour somme. C. Q. F. T*.

* Cette expression abrégée *C. Q. F. T.* signifie *Ce qu'il falloit trouver.*

PROBLEME II.

156. *PARTAGER 600# entre quatre perſonnes, de manière que leurs parts forment une progreſſion arithmétique dont la différence eſt 4# ?*

Soit x la première ou la plus petite part ; la ſeconde ſera $x+4$; la troiſième, $x+4+4$, ou $x+8$; la quatrième, $x+8+4$, ou $x+12$. Ajoutant enſemble ces quatre parts, leur ſomme ſera $x+x+x+x+4+8+12$, ou $4x+24$. Or, (hyp.) cette ſomme doit être égale à 600#. On aura donc l'équation, $4x+24=600$.

En tranſpoſant 24, on a $4x=600-24=576$. Diviſant tout par 4, on aura $x=\frac{576}{4}=144$. La part de la première perſonne eſt donc 144# ; celle de la ſeconde, 148# ; celle de la troiſième, 152# ; & celle de la quatrième, 156#. C. Q. F. T.

PROBLEME III.

157. *PARTAGER 968# entre cinq perſonnes, de manière que leurs parts forment une progreſſion géométrique dont la raiſon eſt 3 ?*

Soit x la première ou la plus petite part. Il eſt clair que la ſeconde part devant contenir trois fois la première, la troiſième, trois fois la ſeconde, &c ; il eſt clair, dis-je, que la ſeconde part ſera exprimée par $3x$, la troiſième par $9x$, la quatrième par $27x$, & la cinquième par $81x$. La ſomme des cinq parts eſt par conſéquent $x+3x+9x+27x+81x$.

c'est à dire, $121\,x$. Or, (hyp.) cette somme doit être égale à $968^{\#}$. Ainsi, on aura l'équation, $121x = 968$.

Divisant tout par 121, on trouvera $x = 8$. La première part est donc $8^{\#}$, la seconde, $24^{\#}$, la troisième, $72^{\#}$, la quatrième, $216^{\#}$, la cinquième, $648^{\#}$. C. Q. F. T.

PROBLEME IV.

158. *Quel âge avons-nous l'un & l'autre, demande un fils à son pere ? Le pere répond, votre âge est actuellement le tiers du mien, & il y a six ans qu'il en étoit le quart : trouvez l'âge de chacun ?*

Soit, en prenant l'année pour unité, x l'âge actuel du pere : l'âge actuel du fils sera $\frac{x}{3}$. Il y a six ans que l'âge du pere étoit $x-6$, & que par conséquent l'âge du fils étoit $\frac{x}{3}-6$. Or, (hyp.) l'âge du pere étoit alors quadruple de celui du fils. Ainsi, on a l'équation, $x-6=4\left(\frac{x}{3}-6\right)$, ou bien, $x-6=\frac{4x}{3}-24$.

Multipliant tout par 3, pour faire disparoître la fraction, on aura $3x-18=4x-72$, ou bien, (en transposant les deux termes $3x$ & -72), $72-18=4x-3x$, c'est-à-dire, $54=x$. Ainsi, le pere a actuellement 54 ans, & le fils 18 ans. C. Q. F. T.

PROBLEME V.

159. *Un ouvrier s'est engagé pour 60 jours, à condition qu'on lui donneroit 15 sols chaque jour qu'il*

travailleroit, & qu'il donneroit 5 sols chaque jour qu'il ne travailleroit pas : au bout de 60 jours, il reçoit $24^{\#}$. Combien de jours a-t-il travaillé ?

Soit x le nombre cherché de jours ; & par conséquent $60-x$, le nombre de jours que l'ouvrier n'a pas travaillé. En exprimant en livres le gain & la perte, il est clair que comme 15 sols sont les trois quarts d'une livre, & 5 sols le quart ; le gain que fait l'ouvrier pendant le nombre de jours x est $\frac{3}{4}x$, & que la perte qu'il fait pendant le nombre de jours $60-x$ est $\frac{1}{4}(60-x)$. Or, (hyp.), le gain moins la perte est $24^{\#}$. Ainsi, on a l'équation, $\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}(60-x)=24$, ou bien, $\frac{3}{4}x-15+\frac{1}{4}x=24$, ou bien, . . . $x-15=24$.

Donc, en transposant -15, on aura $x=39$. L'ouvrier a donc travaillé 39 jours, & il a été 21 jours sans rien faire. C. Q. F. T.

PROBLEME VI.

160. *DEUX Couriers partent d'un même lieu, 9 heures l'un après l'autre : le premier fait 2 lieues par heure, & le second 3 lieues par heure ; on demande au bout de quel temps le second joindra le premier ?*

Soit, en prenant l'heure pour unité, t le nombre d'heures que le second Courier a marché depuis le moment de son départ jusqu'à celui où il atteint le premier. Il est évident que le nombre d'heures que le premier Courier a marché depuis le moment de son départ, jusqu'à celui où il est atteint par le second, sera $t+9$. D'un autre côté, puisque le premier Courier fait 2 lieues en 1 heure, & que le second fait 3 lieues en 1 heure, si l'on fait ces deux proportions,

$1 : t+9 :: 2$ lieues : un quatrième terme,
$1 : t :: 3$ lieues : un quatrième terme,

les deux quatrièmes termes $2(t+9)$, $3t$, exprimeront évidemment les nombres de lieues parcourues par les deux Couriers. Or, comme les deux Couriers partent d'un même lieu, & vont dans le même sens, ils parcourent des espaces égaux depuis le point de départ jusqu'au point de rencontre. D'où il suit qu'on aura l'équation $3t=2(t+9)$, ou bien $3t=2t+18$, c'est-à-dire, $t=18$. Ainsi, le second Courier, 18 heures après son départ, joindra le premier. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

161. Si on veut connoître le nombre de lieues que chacun des Couriers a faites, lorsqu'ils se rencontrent, on le trouvera, en considérant que puisque le second Courier fait 3 lieues par heure, il aura fait 3 fois 18 lieues, ou 54 lieues en 18 heures. Ainsi, le point de rencontre est distant du point de départ, de 54 lieues.

PROBLEME VII.

162. *Supposons maintenant, pour proposer la même question plus généralement, que les deux Couriers ne partent pas du même lieu, mais que le premier parte d'un lieu plus avancé vers le but où ils tendent l'un &*

l'autre, d'un nombre de lieues exprimé par a ; *qu'il parte avant le ſecond, un nombre d'heures exprimé par* h ; *que le premier faſſe le nombre* m *de lieues pendant le nombre* n *d'heures, & le ſecond, le nombre* p *de lieues pendant le nombre* q *d'heures : on demande au bout de quel temps le ſecond joindra le premier ?*

Soit t le nombre d'heures que le ſecond Courier a marché depuis le moment de ſon départ, juſqu'à celui où il atteint le premier. Puiſque le premier Courier part avant le ſecond, un nombre d'heures exprimé par h, il eſt clair que $t+h$ exprimera le temps que marche le premier Courier, avant que d'être atteint par le ſecond. De plus, en faiſant ces deux proportions,

$n : m :: t+h :$ un quatrième terme,
$q : p :: t :$ un quatrième terme,

les deux quatrièmes termes $\frac{m(t+h)}{n}$, $\frac{pt}{q}$, exprimeront les eſpaces parcourus par le premier & le ſecond Courier, depuis les points de leurs départs, juſqu'au point où ils ſe rencontrent. Or, comme le premier Courier a le chemin a d'avance ſur le ſecond, il eſt clair que l'eſpace $\frac{pt}{q}$ parcouru par le ſecond Courier, doit être égal à la ſomme faite de la diſtance a & de l'eſpace $\frac{m(t+h)}{n}$. On aura donc l'équation, $\frac{pt}{q} = a + \frac{m(t+h)}{n}$, ou bien, $\frac{pt}{q} = a + \frac{mt+mh}{n}$.

Faisons disparoître les fractions ; nous aurons d'abord $pt = qa + \frac{qmt + qmh}{n}$, puis $npt = qan + qmt + qmh$. Mettons dans un même membre tous les termes où l'inconnue t se trouve, & tous les autres dans l'autre membre ; nous aurons $npt - qmt = qan + qmh$, ou bien $t(np - qm) = qan + qmh$. Divisant tout par $np - qm$, on aura $t = \frac{qan + qmh}{np - qm}$. C. Q. F. T.

Cette équation est une formule générale dans laquelle il ne s'agira plus que de substituer à la place des quantités a, h, m, n, p, q, leurs valeurs numériques, pour avoir les solutions de toutes les questions particulières qu'on peut proposer sur ce sujet. Par exemple, pour tirer de cette formule la solution de la question précédente, il faudra supposer que la quantité a devient nulle ou zero, ce qui s'exprime ainsi, $a = 0$; $h = 9$ heures ; $m = 2$ lieues ; $n = 1$ heure ; $p = 3$ lieues ; $q = 1$ heure. Alors on aura $qan = 0$; $qmh = 1 \times 2 \times 9 = 18$; $np = 1 \times 3 = 3$; $qm = 1 \times 2 = 2$. Par conséquent $t = \frac{18}{3 - 2} = 18$, comme ci-dessus.

COROLLAIRE.

163. SI on veut avoir les expressions générales des espaces que les deux Couriers parcourent depuis leurs points de départs jusqu'au point de rencontre, on observera que l'espace parcouru par le premier

Courier étant $\frac{m(t+h)}{n}$, & l'eſpace parcouru par le ſecond étant $\frac{pt}{q}$; ſi l'on met dans ces expreſſions, pour t ſa valeur $\frac{qan+qmh}{np-qm}$, on aura, en quantités toutes connues,

$$\text{premier eſpace} = \frac{qam+phm}{np-qm},$$

$$\text{ſecond eſpace} = \frac{pan+pmh}{np-qm}.$$

Dans l'hypothèſe du problême précédent, on a $a=0$; $h=9$ heures; $m=2$ lieues; $n=1$ heure; $p=3$ lieues; $q=1$ heure. Subſtituant ces valeurs dans les expreſſions générales que nous venons de trouver pour les eſpaces, ces expreſſions ſe réduiront l'une & l'autre à 54; en ſorte que les deux Couriers auront fait chacun 54 lieues lorſqu'ils ſe rencontreront.

164. Nous avons réſolu les queſtions précédentes, ſans employer, pour en exprimer les conditions, plus d'une inconnue. Mais ſouvent on a beſoin, ou du moins il eſt plus commode d'employer pluſieurs inconnues. Alors on forme, s'il eſt poſſible, autant d'équations qu'il y a d'inconnues : ces équations combinées enſemble ſervent à chaſſer ou à *éliminer* ſucceſſivement toutes les inconnues moins une ; & on parvient à une équation finale qui ne contient plus qu'une inconnue, & qui ſe réſoud, comme nous l'avons expliqué. Des exemples vont faire entendre cela clairement.

PROBLEME VIII.

165. *Trouver deux nombres dont la somme soit* a, *& la différence* d?

Soient x le plus grand des deux nombres cherchés, y le plus petit. On aura, suivant les conditions du problême, les deux équations, $x+y=a$, $x-y=d$.

Tirons de chacune d'elles la valeur de l'une des inconnues, de y, par exemple. La première donnera $y=a-x$; la seconde, $y=x-d$. Or, $y=y$. Par conséquent on aura aussi $a-x=x-d$, équation qui ne contient plus que la seule inconnue x, & de laquelle on tire $x=\frac{a+d}{2}$. Mettons cette valeur de x dans l'une des équations primordiales, par exemple, dans l'équation $y=a-x$: nous aurons $y=a-\left(\frac{a+d}{2}\right)=\frac{a-d}{2}$.

Il est évident qu'on auroit trouvé pour y la même valeur, en mettant pour x sa valeur dans l'autre équation primordiale $y=x-d$, puisque les deux quantités $a-x$ & $x-d$ sont égales entr'elles.

Ces valeurs de x & de y font voir qu'*en général le plus grand des deux nombres est égal à la moitié de leur somme, plus la moitié de leur différence, & que le plus petit est égal à la moitié de leur somme, moins la moitié de leur différence.* C. Q. F. T.

Supposons, par exemple, que la somme a soit 60,

& que la différence d ſoit 12, on aura $x=36$; $y=24$.

REMARQUE.

166. LA méthode que nous venons d'employer pour dégager les deux inconnues x & y eſt générale; mais on peut ſouvent parvenir au même but d'une manière plus abrégée, ſoit en ajoutant enſemble les équations, ſoit en retranchant l'une de l'autre. Ainſi, par exemple, ayant les deux équations, $x+y=a$, $x-y=d$; ſi on les ajoute enſemble, on aura tout d'un coup $2x=a+d$, ou $x=\frac{a+d}{2}$; & ſi l'on retranche la ſeconde de la première, on aura $2y=a-d$, ou $y=\frac{a-d}{2}$.

PROBLEME IX.

167. *FAIRE, avec deux matières dont on connoît les poids ſous un même volume* donné, un corps dont le poids & le volume ſoient donnés?*

Nommons m le volume du corps mixte; p ſon poids; q & r reſpectivement ce que peſent les deux matières compoſantes, ſous le même volume n; x & y les volumes de ces matières, qui forment le volume m. On aura d'abord l'équation, $x+y=m$. De plus, puiſque q eſt le poids du volume n de la première

* On appelle *volume* d'un corps, l'eſpace que ce corps occupe, c'eſt-à dire, le nombre de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c, qui compoſent ſa grandeur apparente.

matière, & r le poids du volume égal n de la ſeconde, il eſt clair, 1°. que le poids du volume x ſera le quatrième terme d'une proportion dont n, q, x, ſont les trois premiers, & que par conſéquent ce poids ſera exprimé par $\frac{qx}{n}$. 2°. Que pareillement le poids du volume y ſera exprimé par $\frac{ry}{n}$. Or (hyp.) la ſomme des deux poids $\frac{qx}{n}$, $\frac{ry}{n}$ doit être égale à p. Ainſi, on aura cette ſeconde équation $\frac{qx}{n} + \frac{ry}{n} = p$.

Tirons de chacune de ces deux équations la valeur d'une même inconnue, par exemple, de y. La première donne $y = m - x$; la ſeconde, $y = \frac{np - qx}{r}$. Or, $y = y$. Donc, on aura l'équation, $m - x = \frac{pn - qx}{r}$, qui ne contient plus que la ſeule inconnue x. Multipliant tout par r, on aura $mr - rx = pn - qx$; tranſpoſant, il vient $mr - pn = rx - qx$; ou $mr - pn = x(r - q)$. Donc, en diviſant tout par $r - q$, $x = \frac{mr - pn}{r - q}$. Mettons cette valeur de x dans l'une des équations primordiales, par exemple, dans l'équation $y = m - x$; nous aurons $y = m - \left(\frac{mr - pn}{r - q}\right) = \frac{pn - mq}{r - q}$. C. Q. F. T.

Pour faire une application de ces valeurs générales de x & de y, ſuppoſons que le corps mixte ſoit compoſé d'or & d'argent; que ſon volume ſoit de 3 pouces cubes ; ſon poids de 30 onces; le poids du pouce cube d'or, de $12\frac{2}{3}$ onces ; celui du pouce cube d'argent, de $6\frac{8}{9}$ onces. On aura donc $m=3$ pouces cubes; $p=30$ onces ; $n=1$ pouce cube ; $q=12\frac{2}{3}$ onces $=\frac{38}{3}$ onces ; $r=6\frac{8}{9}$ onces $=\frac{62}{9}$ onces. Subſtituant ces valeurs dans les équations générales $x=\frac{mr-pn}{r-q}$, $y=\frac{pn-mq}{r-q}$, elles deviendront $x=\frac{21}{13}$, $y=\frac{18}{13}$. Par conſéquent, le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or, & $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

REMARQUE.

168. Nous aurions pû dégager nos deux inconnues x & y, par le moyen indiqué (166); mais cela auroit demandé une préparation qu'il eſt bon d'expliquer ici. On imitera le même procédé dans les autres cas. Ayant d'abord trouvé les deux équations fondamentales, $x+y=m$; & $\frac{qx+ry}{n}=p$, ou bien $qx+ry=np$: ſi l'on veut commencer par éliminer y, on multipliera tous les termes de la premiere par r, afin d'avoir dans les deux équations un terme commun ry. Par ce moyen, elle deviendra $rx+ry=rm$, dont retranchant, membre du membre correſpondant, la ſeconde équation $qx+ry=np$, il vient $rx-qx=rm-np$, ou $x(r-q)=rm-np$, ou enfin $x=\frac{rm-np}{r-q}$.

Si on veut éliminer x par le même moyen, on multipliera par q tous les termes de l'équation $x+y=m$, & on aura $qx+qy=qm$, dont retranchant l'équation $qx+ry=np$, il vient $qy-ry=qm-np$, ou $y(r-q)=np-qm$, ou $y=\frac{np-qm}{r-q}$.

PROBLEME X.

169. *TROIS Joueurs ont fait des gains tels que la somme du premier gain & de la moitié des deux autres est* a ; *la somme du second & du tiers des deux autres est* b ; *la somme du troisième & du quart des deux autres est* c : *on demande quel est le gain de chaque Joueur ?*

Soient x, y, z les trois gains cherchés. On aura, suivant les conditions du problême, les trois équations, $x+\frac{y+z}{2}=a$, $y+\frac{x+z}{3}=b$, . . . $z+\frac{x+y}{4}=c$.

Je tire de chacune d'elles une valeur de z, & j'ai $z=2a-2x-y$, $z=3b-3y-x$, $z=\frac{4c-x-y}{4}$.

Egalant la première valeur de z à la seconde & à la troisième, je forme les deux équations,

$$2a-2x-y=3b-3y-x,$$

$$2a-2x-y=\frac{4c-x-y}{4},$$

qui ne contiennent plus que deux inconnues x & y. Tirons de chacune d'elles, la valeur de y. La première donne $y = \frac{3b - 2a + x}{2}$; la seconde, $y = \frac{8a - 7x - 4c}{3}$. Ainsi, on aura l'équation, $\frac{3b - 2a + x}{2} = \frac{8a - 7x - 4c}{3}$, qui ne contient que la seule inconnue x, & de laquelle on tire, $x = \frac{22a - 8c - 9b}{17}$.

Mettons cette valeur de x dans l'équation $y = \frac{3b - 2a + x}{2}$, nous trouverons $y = \frac{21b - 6a - 4c}{17}$.

Enfin, mettons les valeurs de x & de y dans l'équation $z = 2a - 2x - y$, nous trouverons $z = \frac{20c - 3b - 4a}{17}$.

Les trois gains x, y, z sont donc exprimés en quantités toutes connues, & sont par conséquent connus. C. Q. F. T.

Supposons, pour faire une première application de ces formules, $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$. On trouvera $x = \frac{45}{17}$, $y = \frac{31}{17}$, $z = \frac{15}{17}$. Le premier gain sera donc exprimé par la fraction $\frac{45}{17}$, le second par la fraction $\frac{31}{17}$, & le troisième par la fraction $\frac{15}{17}$. Ces fractions expriment des parties d'écu, ou de livre, ou de sol, &c, selon qu'on prend pour unité, l'écu, ou la livre, ou le sol, &c.

Pour second exemple, supposons $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. On trouvera $x = -\frac{20}{17}$, $y = \frac{24}{17}$, $z = \frac{50}{17}$. En ce cas, la valeur de x étant négative, cela ſignifie (18) qu'il faut prendre x dans un ſens oppoſé à celui qu'on lui a attribué dans le procédé du calcul. Ainſi, au lieu de ſuppoſer que le premier Joueur a fait un *gain*, il faut ſuppoſer qu'il a fait une *perte*. Cette perte eſt exprimée par $\frac{20}{17}$, tandis que les gains des deux autres Joueurs ſont exprimés reſpectivement par $\frac{24}{17}$ & $\frac{50}{17}$. En effet, une perte de $\frac{20}{17}$, & la moitié de la ſomme des deux gains $\frac{24}{17}$, $\frac{50}{17}$, ne font que 1 de gain effectif, comme cela doit être en vertu de la première équation $x+\frac{y+z}{2}=a$, ou $x+\frac{y+z}{2}=1$. On prouvera de même, que les conditions des deux autres équations $y+\frac{x+z}{3}=b=2$, $z+\frac{x+y}{4}=c=3$, ſont remplies par les valeurs $x=-\frac{20}{17}$, $y=\frac{24}{17}$, $z=\frac{50}{17}$.

Si, en établiſſant les équations fondamentales du problême, au lieu de ſuppoſer que x, y, z expriment trois gains ou trois quantités de même genre que a, b, c, on avoit ſuppoſé que x exprime une perte, tandis que y & z expriment des gains ou des quantités de même genre que a, b, c; il eſt évident qu'on auroit eu les trois équations $-x+\frac{y+z}{2}=a$, $y+\frac{z-x}{3}=b$, $z+\frac{y-x}{4}=c$; d'où l'on tire

$$x = \frac{8c + 9b - 22a}{17}, \; y = \frac{21b - 6a - 4c}{17};$$

$$z = \frac{20c - 3b - 4a}{17}.$$

Alors, en ſuppoſant $a=1$, $b=2$, $c=3$, on trouveroit $x=\frac{20}{17}$, $y=\frac{24}{17}$, $z=\frac{50}{17}$. La valeur de x ſe produit maintenant ſous une forme poſitive, parce qu'en établiſſant les équations générales, on a ſuppoſé que x exprimoit une perte, & qu'on a achevé le calcul conſéquemment à cette ſuppoſition. Mais ſi on vouloit ſe ſervir de ces mêmes équations pour réſoudre le cas où l'on auroit $a=4$, $b=3$, $c=2$, on trouveroit $x=-\frac{45}{17}$, $y=\frac{31}{17}$, $z=\frac{15}{17}$. La valeur de x eſt maintenant négative; & cela ſignifie que x doit être priſe dans un ſens contraire à celui qu'on lui a attribué dans les nouvelles équations, c'eſt-à-dire, que cette quantité doit être regardée comme un gain, & non pas comme une perte.

170. La remarque que nous venons de faire ſur la maniére dont les inconnues doivent être enviſagées, ſelon qu'elles ſe préſentent avec le ſigne + ou avec le ſigne —, n'eſt pas particuliére à l'exemple qui l'a fait naître; elle eſt vraie généralement. Voici donc une maxime univerſelle & très-importante dans l'Algébre. Lorſque vous avez une queſtion à réſoudre, & que par l'énoncé de ſes termes, vous ne voyez pas ſi la quantité que vous cherchez doit être poſitive ou négative, c'eſt-à-dire, ſi cette quantité doit être priſe ou dans le ſens de celles qui ſont regardées comme poſitives, ou dans le ſens de celles qui ſont regardées comme négatives;

gatives ; ne vous en mettez pas en peine, regardez l'inconnue comme positive; & achevez toutes les parties de votre calcul conséquemment à cette supposition : si dans l'équation finale, la valeur de l'inconnue est positive, cela fait voir que votre supposition étoit légitime ; si au contraire la valeur de l'inconnue est négative, cela signifie que l'inconnue doit être prise dans un sens contraire à celui que vous lui avez attribué dans le procédé du calcul. Le même raisonnement auroit lieu dans un ordre inverse, si l'on avoit regardé l'inconnue comme négative. Le calcul redresse dans tous les cas les fausses suppositions qu'on peut avoir faites, en établissant ses éléments ; & c'est-là un des plus précieux avantages de l'Algébre.

171. Il en est, au même égard, des quantités connues, comme des inconnues. Si dans les applications particulières qu'on peut faire d'une équation qui exprime généralement les conditions d'un problême, on regarde comme négatives des quantités connues a, b, c, &c, qui ont été regardées comme positives dans le calcul, cela signifiera que ces quantités doivent être prises dans des sens contraires à ceux qu'on leur a d'abord attribués. Reprenons, par exemple, le problême de l'article 162; & voyons comment on peut tirer de l'équation générale $t = \frac{qan + qmh}{np - qm}$ qu'il nous a fournie, la solution du problême suivant : *Deux Couriers qui vont à la rencontre l'un de l'autre, partent, l'un de Paris, l'autre de Lyon ;*

le Courier de Paris fait 3 lieues en 1 heure ; celui de Lyon 2 lieues en 1 heure : on demande au bout de quel temps ils se rencontreront, en supposant que le Courier de Lyon parte 6 heures avant celui de Paris, & que l'intervalle de chemin compris entre Paris & Lyon soit de 100 lieues ?

Regardons le Courier de Paris comme le premier, & celui de Lyon comme le second. D'abord, la lettre a que nous avons prise dans l'article 162, pour représenter la distance des points de départ des deux Couriers, nous représentera ici la distance de Paris à Lyon. Ainsi, nous avons $a = 100$ lieues. Le temps t que marche le second Courier, étant pris positivement, on doit prendre h négativement, parce que dans la solution générale, on a supposé que le premier Courier partoit le premier, au lieu qu'ici c'est le second qui part le premier. Nous aurons donc $h = -6$ heures. De même, l'espace p que parcourt le second Courier pendant le temps q, étant pris positivement, l'espace m que parcourt le premier Courier, pendant le temps n, doit être pris négativement, parce que dans la solution générale, on a supposé que le premier Courier s'éloignoit, au lieu qu'ici on suppose qu'il va au-devant du second. Quant aux deux temps q & n, ils doivent être pris l'un & l'autre positivement, parce qu'ils s'écoulent dans le même sens, pendant que les Couriers marchent, ou que l'un peut être regardé comme faisant partie de l'autre. Nous aurons donc $p = 2$ lieues ; $m = -3$ lieues ; $q = 1$ heure ; $n = 1$ heure. Substituant toutes ces valeurs numériques à la place des valeurs littérales correſpondantes dans la formule $t = \frac{qan + qmh}{np - qm}$, elle deviendra $t = \frac{1 \times 100 \times 1 + 1 \times - 3 \times - 6}{1 \times 2 - 1 \times - 3} = \frac{100 + 18}{2 + 3} = \frac{118}{5} = 23\frac{3}{5}$. Ainſi, le Courier de Lyon, 23 heures & $\frac{3}{5}$ après ſon départ, rencontrera celui de Paris.

L'eſpace $\frac{pan + pmh}{np - qm}$, parcouru par le même Courier depuis Lyon juſqu'au point de rencontre, ſera $\frac{2 \times 100 \times 1 + 2 \times - 3 \times - 6}{1 \times 2 - 1 \times - 3} = \frac{236}{5}$, c'eſt-à dire, 47 lieues $\frac{1}{5}$; & par conſéquent l'eſpace parcouru par le premier Courier, depuis Paris juſqu'au point de rencontre, ſera 52 lieues & $\frac{4}{5}$.

On peut s'aſſurer de la juſteſſe de tous ces réſultats, en réſolvant directement, de la manière ſuivante, le problême dont il eſt queſtion.

Nommons toujours t le temps que marche le Courier de Lyon, avant que de rencontrer celui de Paris. Le Courier de Lyon, qui fait 2 lieues par heure, parcourra, pendant le temps t, un eſpace $= 2t$; le Courier de Paris, qui fait 3 lieues par heure, & qui part 6 heures après celui de Lyon, parcourra, pendant le tems $t - 6$, un eſpace $= 3(t - 6)$. Or, la ſomme de ces deux eſpaces n'eſt autre choſe que l'eſpace total compris entre Paris & Lyon. Ainſi, on aura l'équation, $2t + 3(t - 6) = 100$; d'où l'on tire $t = 23$ heures $\frac{3}{5}$, comme ci-deſſus. L'eſpace $2t$, parcouru par le Courier de Lyon, eſt par conſéquent

47 lieues $\frac{1}{5}$; & l'eſpace parcouru par celui de Paris, 52 lieues $\frac{4}{5}$.

Ajoutons encore quelques problêmes, pour exercer de plus en plus les Commençants à l'uſage de l'Algébre.

PROBLÈME XI.

172. *Deux troupeaux de Bœufs, qu'on lâche dans deux prés, étant ſuppoſés manger, en des temps donnés, & les herbes qui y étoient au premier inſtant, & les herbes qui y croiſſent uniformément, pendant que les Bœufs paiſſent : on demande combien il faudra de Bœufs pour manger, ſuivant les mêmes conditions, les herbes d'un troiſième pré ?*

Nommons le nombre des Bœufs du premier troupeau qui mange le premier pré . . . . *a*,
l'étendue de ce pré . . . . *b*,
le temps pendant lequel toutes les herbes crûes & à croître en ſont mangées . . . . *c*;

le nombre des Bœufs du ſecond troupeau qui mange le ſecond pré . . . . *d*,
l'étendue de ce pré . . . . *e*,
le temps pendant lequel toutes les herbes en ſont mangées . . . . *f*;

le nombre inconnu des Bœufs du troiſième troupeau qui mange le troiſième pré . . . . *x*,
l'étendue de ce pré . . . . *g*,
le temps pendant lequel toutes les herbes en ſont mangées . . . . *h*,

De plus, imaginons que chaque troupeau de Bœufs est partagé en deux bandes, dont l'une mange l'herbe contenue au premier instant dans chaque pré, & l'autre mange l'herbe qui croît pendant que les Bœufs paissent. Nommons,

Pour le 1^er^ troupeau, la 1^re^ bande....... y,
& par conséquent la seconde.......... $a-y$;
Pour le 2^e^ troupeau, la 1^re^ bande.......... z,
& par conséquent la seconde.......... $d-z$;
Pour le 3^e^ troupeau, la 1^re^ bande......... u,
& par conséquent la seconde.......... $x-u$.

Nous avons quatre inconnues, x, y, z, u à déterminer. Toutes les autres quantités a, b, c, d, e, f, g, h, sont supposées connues.

Cela posé, 1°. il est clair que les premières bandes y, z, u de Bœufs, sont entr'elles comme les étendues des prés, divisées par les temps correspondants, car il faut d'autant plus de Bœufs pour manger une quantité constante & donnée d'herbe contenue dans un pré, que ce pré a plus d'étendue, & que le temps employé à manger la quantité en question, est plus court. On aura donc ces deux proportions, $y : z :: \frac{b}{c} : \frac{e}{f}$, $y : u :: \frac{b}{c} : \frac{g}{h}$, lesquelles donnent, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, les deux équations, $cey = bfz$, $cgy = bhu$.

2°. Les secondes bandes $a-y$, $d-z$, $x-u$, qui mangent les herbes qui croissent pendant que les

Bœufs paissent, sont entr'elles simplement comme les étendues des prés ; les temps n'entrent pour rien dans ce rapport. Car, par hypothèse, les herbes dont il s'agit croissent en quantités égales, en temps égaux, dans les trois prés ; & elles sont mangées en quantités égales, en temps égaux, puisqu'elles sont mangées à mesure qu'elles croissent. D'où il s'ensuit que les quantités totales de ces mêmes herbes sont proportionnelles aux nombres de Bœufs qui les mangent ; & comme elles sont aussi évidemment proportionnelles aux étendues des prés, on a ces deux proportions $a - y : d - z :: b : e$, $a - y : x - u :: b : g$, lesquelles donnent les deux équations, $ae - ey = bd - bz$, $ag - gy = bx - bu$.

Les deux premières équations donnent $z = \frac{cey}{bf}$ $u = \frac{cgy}{bh}$. Mettons pour z sa valeur dans la troisième ; nous trouverons $y = \frac{afe - bdf}{fe - ce}$, & par conséquent, $u = \frac{cg(afe - bdf)}{bh(fe - ce)}$, $z = \frac{ce(afe - bdf)}{bf(fe - ce)}$.

Mettons les valeurs de y & de u dans la quatrième équation $ag - gy = bx - bu$; nous trouverons $x = \frac{acefg + bdfgh - acegh - bcdfg}{bh(fe - ce)}$, ou bien $x = \ldots\ldots$ $\frac{aceg(f - h) + bdfg(h - c)}{beh(f - c)}$. C. Q. F. T.

Supposons, par exemple, que le premier pré ait

4 arpents * d'étendue, le ſecond 5, le troiſième 6; qu'il faille 8 Bœufs pour manger en 7 ſemaines les herbes du premier, 9 Bœufs pour manger en 8 ſemaines les herbes du ſecond; & que les herbes du troiſième pré doivent être mangées en 12 ſemaines. Nous aurons, conſéquemment à ces ſuppoſitions, $a=8$, $b=4$, $c=7$, $d=9$, $e=5$, $f=8$, $g=6$, $h=12$. En ſubſtituant toutes ces valeurs dans la valeur générale de x, on trouvera $x=8$. Ainſi, il faudra 8 Bœufs pour manger les herbes du troïſième pré.

PROBLEME XII.

173. *Connoiſſant, dans une progreſſion arithmétique, trois de ces cinq choſes, le premier terme, le dernier, la différence, le nombre des termes, la ſomme de tous les termes: trouver les deux autres?*

Je ſuppoſe, pour abréger, que la progreſſion ſoit croiſſante, ou que la différence ſoit additive. On appliquera ſans peine les formules que nous allons trouver, au cas où la progreſſion ſeroit décroiſſante; il ne faudra pour cela que prendre négativement la lettre qui exprimera la différence.

Nommons, le premier terme . . . . a,

le dernier . . . . u,

* L'arpent, ſuivant l'Ordonnance de 1669, pour les Eaux & Forêts, a 100 perches de longueur ſur 1 perche de largeur, la perche étant ſuppoſée de 22 pieds; ce qui compoſe une ſuperficie de 100 perches quarrées, ou de $1344\frac{4}{9}$ toiſes quarrées. On ne ſuit pas par-tout cette meſure.

la différence . . . . d,
le nombre des termes . . . . n,
la somme de tous les termes . . . . s.

Suivant ce qui a été démontré (Arith. 194 & 201), on a ces équations,

$$(A) \quad u = a + d(n - 1),$$

$$(B) \quad s = (a + u) \times \frac{n}{2}.$$

Cela posé, 1°. si l'on connoît a, u, n, on aura immédiatement la valeur de l'inconnue s par l'équation (B) ; & on tirera de l'équation (A), $d = \frac{u - a}{n - 1}$, valeur de la seconde inconnue d.

2°. Si l'on connoît a, d, n, on aura immédiatement la valeur de l'inconnue u par l'équation (A) ; & substituant cette valeur de u dans l'équation (B), on aura, $s = \frac{(2a + dn - d)n}{2}$, valeur de la seconde inconnue s.

3°. Si l'on connoît u, d, n, on aura, par l'équation (A), $a = u - dn + d$.

Mettant cette valeur de a dans l'équation (B), on aura, $s = \frac{(2u - dn + d)n}{2}$.

D'où l'on voit que les deux inconnues a & s sont dégagées.

4°. Si l'on connoît a, u, d, on connoîtra n par l'équation (A) ; car cette équation donne $n = \frac{u - a + d}{d}$.

Mettant cette valeur de n dans l'équation (B), on aura, $s = \frac{(a+u).(u-a+d)}{2d}$.

5°. Si l'on connoît a, n, s, on aura par l'équation (B), $u = \frac{2s-an}{n}$.

Mettant cette valeur de u dans l'équation (A), on aura, $\frac{2s-an}{n} = a + d(n-1)$, & par conséquent, en dégageant l'inconnue d, $d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$.

6°. Si l'on connoît u, n, s, on aura, par l'équation (B), $a = \frac{2s-un}{n}$.

Mettant cette valeur de a dans l'équation (A), on aura, $u = \frac{2s-un}{n} + d(n-1)$; d'où l'on tire, $d = \frac{2un-2s}{n(n-1)}$.

7°. Si l'on connoît a, u, s, on aura, par l'équation (B), $n = \frac{2s}{a+u}$.

Substituant cette valeur de n dans l'équation (A), & dégageant l'inconnue d, on trouvera $d = \frac{(u-a).(u+a)}{2s-a-u}$.

8°. Si l'on connoît n, d, s, on aura, en mettant dans l'équation (B), pour u sa valeur tirée de l'équation (A), $s = \frac{(2a+dn-d)n}{2}$; d'où l'on tire l'inconnue $a = \frac{2s-dn^2+dn}{2n}$.

Mettant cette valeur de a dans l'équation (A); on aura l'autre inconnue u par l'équation, $u = \frac{2s - dn^2 + dn}{2n} + dn - d$, ou bien, $u = \frac{2s + dn^2 - dn}{2n}$.

Les cas où les inconnues ſeroient le nombre des termes, & l'un ou l'autre extrême, meneroient à une équation du ſecond degré, que nous apprendrons à réſoudre dans la ſuite.

Je laiſſe au Lecteur le ſoin de faire des applications numériques de ces formules.

PROBLEME XIII.

174. *Connoissant, dans une progreſſion géométrique, trois de ces cinq choſes, le premier terme, le dernier, la raiſon, le nombre des termes, la ſomme de tous les termes: trouver les deux autres?*

J'entens, par la raiſon de la progreſſion, le quotient du premier terme diviſé par le ſecond. Ainſi, lorſque la progreſſion eſt décroiſſante, la raiſon eſt plus grande que l'unité; au contraire, la raiſon eſt plus petite que l'unité, quand la progreſſion eſt croiſſante.

Nommons, le premier terme . . . . a,
le dernier . . . . u,
la raiſon . . . . q,
le nombre des termes . . . . n,
la ſomme de tous les termes . . . . s.

On a d'abord (Arithmétique, 228) l'équation,

$$\text{(A)} \quad u = \frac{a}{q^{n-1}}.$$

De plus, en obſervant que le ſecond terme $= \frac{a}{q}$, on a (Arith. 235) la proportion, $a - \frac{a}{q} : a :: a - u : s - u$. D'ou l'on tire, par l'égalité du produit des extrêmes avec celui des moyens : $\left(a - \frac{a}{q}\right) \times (s - u) = a(a - u)$, ou bien,

$$\text{(B)} \quad sq - s = qa - u.$$

Cela poſé, 1°. ſi l'on connoît a, u, n, on aura par l'équation (A), $q^{n-1} = \frac{a}{u}$; donc en tirant la racine $n-1$ de chaque membre, $q = \frac{\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u}}$;

ou bien, $q = \frac{a^{\frac{1}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}}}$.

Subſtituant cette valeur de q dans l'équation (B), on aura $s\left(\frac{a^{\frac{1}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}}} - 1\right) = a \times \frac{a^{\frac{1}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}}} - u$, ou bien, en multipliant tout par $u^{\frac{1}{n-1}}$, $s\left(a^{\frac{1}{n-1}} - u^{\frac{1}{n-1}}\right) = a^{1+\frac{1}{n-1}} - u^{1+\frac{1}{n-1}}$, ou bien encore,

$s\left(a^{\frac{1}{n-1}} - u^{\frac{1}{n-1}}\right) = a^{\frac{n}{n-1}} - u^{\frac{n}{n-1}}$; ce qui donne

$s = \dfrac{a^{\frac{n}{n-1}} - u^{\frac{n}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}} - u^{\frac{1}{n-1}}}$, ou bien, $s = \ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt[n-1]{a^n} - \sqrt[n-1]{u^n}}{\sqrt[n-1]{a} - \sqrt[n-1]{u}}.$$

Les deux inconnues q & s ſont donc dégagées.

2°. Si l'on connoît a, q, n, on aura d'abord u immédiatement par l'équation (A) ; & en ſubſtituant cette valeur dans l'équation (B), on aura, $s(q-1) = qa - \dfrac{a}{q^{n-1}}$, ou bien, $s(q-1) = \dfrac{a(q^n-1)}{q^{n-1}}$; & par conſéquent, $s = \dfrac{a(q^n-1)}{(q-1)q^{n-1}}$.

3°. Si l'on connoît u, q, n, on aura par l'équation (A), $a = uq^{n-1}$. Mettant cette valeur de a dans l'équation (B), on aura $s(q-1) = uq^n - u$, & par conſéquent, $s = \dfrac{u(q^n-1)}{q-1}$.

4°. Si l'on connoît a, u, q, on aura immédiatement l'inconnue s, par l'équation (B) qui donne $s = \dfrac{qa-u}{q-1}$.

Mais, à l'égard de l'autre inconnue n, on ne pourra la trouver qu'en employant les logarithmes, de la manière ſuivante.

Puiſqu'on a $u = \frac{a}{q^{n-1}}$, ou bien $u . q^{n-1} = a$, on aura auſſi, en prenant les logarithmes de chaque membre, $\log.(u.q^{n-1}) = \log.a$. Or (Arith. 265), le logarithme d'un produit, tel que $u.q^{n-1}$, eſt égal à la ſomme des logarithmes de ſes facteurs. Ainſi, $\log.(u.q^{n-1})$ eſt la même choſe que $\log.u + \log.q^{n-1}$. De plus, (Arith. 267), $\log.q^{n-1}$ eſt la même choſe que $(n-1)\log.q$. Nous aurons donc, $\log.u + (n-1)\log.q = \log.a$, ou bien $(n-1).\log.q = \log.a - \log.u$; & par conſéquent, $n - 1 = \frac{\log.a - \log.u}{\log.q}$, & $n = \frac{\log.a - \log.u}{\log.q} + 1$; ou bien enfin, $n = \frac{\log.a - \log.u + \log.q}{\log.q}$.

L'inconnue n eſt donc dégagée, puiſque tout eſt connu dans le ſecond membre.

5°. Si l'on connoît a, u, s, on aura par l'équation (A), $q^{n-1} = \frac{a}{u}$. Et par l'équation (B), $q = \frac{s-u}{s-a}$; & par conſéquent, $q^{n-1} = \frac{(s-u)^{n-1}}{(s-a)^{n-1}}$.

Egalant entr'elles les deux valeurs de q^{n-1}, on aura, $\frac{a}{u} = \frac{(s-u)^{n-1}}{(s-a)^{n-1}}$, & par conſéquent, $a(s-a)^{n-1} = u(s-u)^{n-1}$.

Donc, en prenant les logarithmes, on aura $\log.[a(s-a)^{n-1}] = \log.[u(s-u)^{n-1}]$, ou bien, $\log.a +$

$(n-1)\log.(s-a)=\log.u+(n-1)\log.(s-u)$; ou bien, $(n-1)\big(\log.(s-u)-\log.(s-a)\big)=\log.a-\log.u$. Par conséquent, $n-1=\ldots$ $\dfrac{\log.a-\log.u}{\log.(s-u)-\log.(s-a)}$. Donc enfin, $n=1+\dfrac{\log.a-\log.u}{\log.(s-u)-\log.(s-a)}$.

Les deux inconnues q & n sont donc dégagées, puisqu'elles sont exprimées l'une & l'autre en grandeurs toutes connues.

6°. Si l'on connoît n, q, s, on mettra, dans l'équation (B), à la place de u sa valeur $\dfrac{a}{q^{n-1}}$ tirée de l'équation (A). Par-là, on aura $sq-s=qa-\dfrac{a}{q^{n-1}}$, ou bien, $sq^n-sq^{n-1}=a(q^n-1)$, & par conséquent $a=\dfrac{sq^n-sq^{n-1}}{q^n-1}$.

Mettant cette valeur de a dans l'équation (A), on aura, $u=\dfrac{sq^n-sq^{n-1}}{q^{n-1}(q^n-1)}$.

7°. Si l'on connoît a, q, s, on aura u immédiatement par l'équation (B) qui donne, $u=qa-qs+s$.

Mettant cette valeur de u dans l'équation (A), on aura, $qa-qs+s=\dfrac{a}{q^{n-1}}$, ou bien, $q^{n-1}=\dfrac{a}{qa-qs+s}$.

Donc en prenant les logarithmes de chaque membre, $\log. q^{n-1} = \log. \frac{a}{qa - qs + s}$, ou bien; $(n-1)\log. q = \log. a - \log.(qa - qs + s)$, ou bien, $n - 1 = \frac{\log. a - \log.(qa - qs + s)}{\log. q}$. Donc enfin, $n = 1 + \frac{\log. a - \log.(qa - qs + s)}{\log. q}$.

8°. Si l'on connoît u, q, s, on aura a immédiatement par l'équation (B) qui donne, $a = \frac{sq - s + u}{q}$.

Mettant cette valeur de a dans l'équation (A), on trouvera $q^{n-1} = \frac{sq - s + u}{qu}$; d'où l'on tire, en opérant comme dans le cas précédent, $n = 1 + \frac{\log.(sq - s + u) - \log. qu}{\log. q}$.

Les deux cas où l'on connoîtroit a, n, s, ou bien u, n, s, menent en général à des équations d'un degré ſupérieur au premier, leſquelles ne peuvent par conſéquent être réſolues ici.

Nos Lecteurs pourront faire, dans la vue de s'exercer, des applications numériques de ces formules.

SCHOLIE.

175. IL eſt facile d'imaginer & de réſoudre de nouveaux Problêmes, à l'imitation des précédents. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail à ce ſujet. Je finis par quelques obſervations qui ſont une ſuite de ce qui précéde.

176. QUELQUEFOIS on a en apparence autant d'équations que d'inconnues, & cependant le Problême est indéterminé. Cela arrive lorsque des conditions qui paroissent différentes ne sont réellement que la même qui se reproduit sous une autre forme. Supposons, par exemple, qu'on propose cette question: *Trouver deux nombres tels que le quart de leur somme fasse 48, & que la moitié plus le quart de leur somme fasse 144?* En nommant x le premier nombre cherché, y le second, on aura ces deux équations $\frac{x+y}{4}=48$, $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})(x+y)=144$. La première donne $x=192-y$, & la seconde donne également $x=192-y$. Ces deux valeurs de x sont les mêmes. Par conséquent la question n'a réellement qu'une seule condition, & ne fournit réellement qu'une *seule* équation. En effet, avec un peu d'attention, on s'apperçoit qu'en disant que le quart de $(x+y)$ est 48, c'est dire en d'autres termes que la moitié plus le quart, ou les trois quarts, de $(x+y)$, sont le triple de 48, ou bien 144. Dans ces sortes de cas, le calcul fait connoître de lui-même si les conditions exprimées sont réellement différentes, ou reviennent au même. Car si elles sont différentes, il donne des équations différentes pour une même inconnue; si elles sont les mêmes, il donne des équations identiques pour une même inconnue, comme dans l'exemple précédent, où l'on est parvenu à ces deux équations identiques, $x=192-y$, $x=192-y$.

177. AU contraire, les conditions d'une question donnent quelquefois plus d'équations qu'on n'a d'in-

c onnues

connues à déterminer. Alors, pour que la queſtion ſoit poſſible, & ne renferme aucune abſurdité, il faut que les quantités connues ayent entr'elles une relation telle que toutes les équations puiſſent avoir lieu à-la-fois. Par exemple, ſuppoſons que les conditions d'un problême, exprimées algébriquement, nous donnent ces trois équations, $ax+by=c$, $dx+ey=g$, $hx-my=n$, les quantités $a, b, c, d, e, g, h, m, n$, étant connues, x & y deux inconnues.

Les deux premières équations comparées enſemble, donnent $x=\frac{ce-bg}{ae-bd}$, $y=\frac{ag-cd}{ae-bd}$.

La première & la troiſième comparées enſemble, donnent, $x=\frac{mc+bn}{ma+bh}$, $y=\frac{hc-an}{ma+bh}$.

Si donc les conditions du problême ne renferment aucune incompatibilité, il faut que les deux valeurs de x ſoient égales entr'elles, ou que les deux valeurs de y ſoient égales entr'elles ; c'eſt-à-dire, il faut qu'on ait $\frac{ce-bg}{ae-bd}=\frac{mc+bn}{ma+bh}$, $\frac{ag-cd}{ae-bd}=\frac{hc-an}{am+hb}$.

Ces deux dernières équations n'expriment réellement qu'une ſeule & même condition ; car lorſqu'après avoir égalé entr'elles les deux valeurs de x, on égale enſuite les deux valeurs de y, cette ſeconde opération revient à la première, puiſque les valeurs de y dépendent de celles de x, ou réciproquement. En effet les deux équations dont il s'agit ſe réduiſent l'une & l'autre à celle-ci, $hce-bgh-mag=aen-bdn-cdm$, qui exprime par conséquent la relation que les quantités connues doivent avoir entr'elles pour que la question proposée soit possible. Si cette équation n'avoit pas lieu, la question seroit impossible. On trouveroit cette même équation de condition, si en cherchant les valeurs de x & de y, on comparoit la première équation primordiale avec la troisième, puis la seconde avec la troisième, au lieu de comparer successivement, comme on a fait, la première avec les deux autres.

178. Il y a des questions qui ne donnent pas plus d'équations que d'inconnues, & qui cependant sont impossibles. Le calcul fait connoître cette impossibilité ; car alors, dans le résultat numérique, on trouve que deux nombres différents devroient être égaux entr'eux ; ce qui est absurde. Par exemple, supposons qu'un problême mène à ces deux équations, $2x+3y=20$, $4x+6y=30$: la première donne $y=\frac{20-2x}{3}$, & la seconde $y=\frac{30-4x}{6}$. On auroit donc $\frac{20-2x}{3}=\frac{30-4x}{6}$, ou bien $120-12x=90-12x$, ou bien $120=90$; ce qui est absurde. Le problême qui donne lieu à un tel résultat, renferme donc des contradictions dans ses termes, & n'est par conséquent susceptible d'aucune solution.

SECTION II.

Des Problêmes indéterminés du premier degré.

179. Si l'énoncé d'une question contient plus d'inconnues qu'on n'a de conditions à exprimer; alors, après avoir formé toutes les équations que ces conditions donnent, & après avoir éliminé les inconnues autant qu'il est possible, on arrive à une équation finale qui contient au moins deux inconnues. Ces deux inconnues ne peuvent être déterminées qu'en prenant l'une arbitrairement, ou suivant certaines conditions, & déterminant l'autre en conséquence. Le problême est donc indéterminé & susceptible de plusieurs solutions. Le nombre de ces solutions peut être limité, lorsqu'on impose quelque loi pour les inconnues, comme, par exemple, qu'elles soient des nombres entiers. Nous ne pouvons mieux faire entendre les régles pour résoudre cette classe de problêmes, qu'en les mêlant avec des exemples qui en montrent l'usage & l'esprit.

PROBLEME I.

180. *Trouver deux nombres, dont la somme augmentée d'un nombre donné* m, *soit quadruple de leur différence augmentée d'un nombre aussi donné* n?

Soient x & y les deux nombres cherchés, on aura l'équation $x+y+m=4(x-y+n)$, qui exprime toutes les conditions de la question, & qui contient deux inconnues. On ne peut donc parvenir à connoître ces deux quantités qu'en regardant l'une comme donnée.

Soient, par exemple, $m=4$, $n=5$; & prenons $x=2$. On aura l'équation déterminée $2+y+4=4(2-y+5)$, laquelle donne $y=\frac{22}{5}=4\frac{2}{5}$.

Si m étant toujours 4, & n, 5, on supposoit $x=3$, on trouveroit $y=\frac{25}{5}=5$.

Ainsi des autres suppositions.

On voit qu'en considérant x comme donnée, il ne s'agit plus que de résoudre une équation déterminée pour avoir y. Il en seroit de même, si l'on commençoit par se donner y, & qu'il fallût trouver x.

Il est clair qu'en supposant que x & y peuvent être indifféremment des nombres entiers ou rompus, positifs ou négatifs, le problême admet une infinité de solutions. Mais le nombre des solutions est limité, lorsqu'on exige que x & y soient des nombres entiers positifs. Nous donnerons ci-dessous la méthode générale pour résoudre ces sortes de questions.

PROBLEME II.

181. *Faire 360 sols en 22 pièces, les premières de 24 sols, les secondes, de 12 sols, & les troisièmes de 6 sols?*

Soient respectivement x, y, z les nombres de pièces de 24 sols, de 12 sols & de 6 sols. On aura d'abord l'équation, $x+y+z=22$. De plus, il est évident que le nombre x de piéces de 24 sols, donne $24x$ sols ; celui y des piéces de 12 sols, $12y$ sols ; celui z des piéces de 6 sols, $6z$ sols. Or, la somme de ces trois nombres de sols doit être 360. On a donc cette seconde équation, $24x+12y+6z=360$.

Comme toutes les conditions de la question sont exprimées, & que nous avons trois inconnues & deux équations seulement ; nous ne pouvons pas parvenir immédiatement à des valeurs déterminées de x, y, z. Mais si nous nous donnons l'une des trois inconnues, les autres seront nécessairement déterminées.

En effet, si nous prenons, par exemple, z dans la première équation ; nous aurons $z=22-x-y$; & substituant cette valeur dans la seconde équation, il viendra $24x+12y+132-6x-6y=360$; d'où l'on tire $y=38-3x$. Mettant cette valeur de y dans l'équation $z=22-x-y$, on trouvera, $z=2x-16$.

D'où il suit qu'en donnant différentes valeurs à x, on aura les valeurs correspondantes de y & de z. Or, suivant les conditions de la question, les nombres x, y, z, doivent être entiers, puisqu'il ne peut pas entrer de *demi*-piéce ou de *quart* de piéce, &c, dans la somme 360 sols. De plus, pour que ces mêmes nombres soient positifs, il faut que $38-3x$ & $2x-16$ ne soient pas moindres que 1. La première condition exige que x, qui doit être un nombre entier, ne surpasse pas 12 ; & la seconde, que x vaille tout au moins ~~plus~~ 8. Les valeurs qu'on peut donner à x, sont donc comprises entre les limites 12 & 8. Les valeurs correspondantes de y & de z se trouveront par les équations qui précédent.

Soit, par exemple, $x=12$, on aura $y=2$; $z=8$.

Soit $x=11$, on aura $y=5$, $z=6$.

Soit $x=10$, on aura $y=8$, $z=4$.

Soit $x=9$, on aura $y=11$, $z=2$.

Soit $x=8$, on aura $y=14$, $z=0$.

La dernière ſolution doit être rejettée, puiſqu'elle exclut les piéces de 6 ſols. Si on l'admettoit, on n'auroit que des piéces de 24 ſols & de 12 ſols, pour former la ſomme 360 ſols.

Ainſi, la ſomme 360 ſols étant compoſée de piéces de 24 ſols, de 12 ſols & de 6 ſols, le problême n'a que quatre ſolutions.

Ces mêmes ſolutions auroient pu être trouvées, en commençant par déterminer y ou z la première, au lieu de commencer par x, comme nous avons fait. Car ſi l'on veut, par exemple, commencer par déterminer z, on aura, en vertu de la première équation fondamentale, $x=22-y-z$. Mettant cette valeur dans la ſeconde équation fondamentale, on aura $528-24y-24z+12y+6z=360$. Donc $y=14-\frac{3z}{2}$. Et (à cauſe de $x=22-y-z$), $x=8+\frac{z}{2}$.

Il eſt clair, par ces deux dernières équations, qu'en prenant z poſitivement, x ſera toujours poſitif; & que y le ſera auſſi, pourvu que $14-\frac{3z}{2}$ vaille tout au moins 1, ou que $28 - 3z$ vaille tout au moins 2. Cette dernière condition exige que z ne surpasse pas 8. De plus, pour que y & x soient des nombres entiers, il faut que z soit 2, ou un multiple de 2.

Supposons d'abord $z = 0$, on aura $y = 14$, $x = 8$. Cette solution est la même que la dernière des précédentes, que nous avons vû qui doit être rejettée, si l'on veut qu'il entre des piéces de 6 sols dans la somme 360 sols.

Soit $z = 2$, on aura $y = 11$, $x = 9$.

Soit $z = 4$, on aura $y = 8$, $x = 10$.

Soit $z = 6$, on aura $y = 5$, $x = 11$.

Soit $z = 8$, on aura $y = 2$, $x = 12$.

On a donc les mêmes solutions que ci-dessus; & on les trouveroit également en commençant par déterminer y.

Le probléme auroit un plus grand nombre de solutions, s'il étoit permis de prendre pour l'un ou deux des nombres x, y, z, des valeurs négatives. Alors ces valeurs désigneroient que les nombres dont elles seroient les expressions, devroient être pris dans un sens contraire à celui qui leur est attribué par l'énoncé de la question. Supposons, par exemple, $x = 15$, on aura $y = -7$, $z = 14$. La valeur négative de y signifie qu'il faut *retrancher* 7 piéces de 12 sols; de sorte que si les quantités 360 sols, x, z, représentent des *gains*, la quantité y représentera une *perte*. Ainsi, on formera le nombre 360 sols en 22 gains effectifs, en employant 15 gains de 24 sols, 14 gains de 6 sols, & 7 pertes de 12 sols. La même remarque s'applique aux autres combinaiſons qui donnent quelques valeurs négatives. C. Q. F. T.

182. Il eſt facile en général de déterminer les limites entre leſquelles les inconnues doivent être renfermées, afin que ces inconnues ſoient poſitives, ou ſatisfaſſent à d'autres conditions équivalentes. Examinons quelques cas généraux de cette nature.

Soit l'équation $y = \frac{ax + c}{b}$, entre les deux inconnues x & y, & les données a, b, c. Il eſt évident qu'en prenant x poſitivement, y ſera auſſi poſitive, ſi, 1°. a, b, c ſont toutes trois poſitives, ou toutes trois négatives; ſi, 2°. a & b étant poſitives, & c négative, on a $x > \frac{c}{a}$; ſi, 3°. c & b étant poſitives, & a négative, on a $x < \frac{c}{a}$.

183. Qu'on ait l'équation $ax + by + cz = d$, entre les trois inconnues x, y, z, & les données a, b, c, d; & qu'il s'agiſſe de déterminer les limites de x, y, z, de manière qu'aucune de ces quantités ne puiſſe être moindre que 1. En dégageant x, on a $x = \frac{d - by - cz}{a}$. Donc, puiſque y & z ne doivent être ni l'une, ni l'autre moindres que 1, x ne peut pas être plus grande que $\frac{d - b - c}{a}$, & les données doivent être telles que $\frac{d - b - c}{a}$ ſoit une quantité poſitive. On trouvera pareillement que y ne peut pas être plus grande que

$\frac{d-a-c}{b}$, ni z plus grande que $\frac{d-a-b}{c}$; les quantités $\frac{d-a-c}{b}$, $\frac{d-a-b}{c}$ étant l'une & l'autre positives.

184. SOIT encore la même équation $ax+by+cz=d$; & qu'on demande les limites entre lesquelles la somme $x+y+z$ des trois inconnues doit être renfermée, pour qu'aucune de ces quantités ne soit moindre que 1. Je suppose $x+y+z=s$. Ensuite,

1°. Si l'on met pour x sa valeur $s-y-z$ dans l'équation proposée, on aura $as-ay-az+by+cz=d$, & par conséquent, $s=\frac{d+(a-b)y+(a-c)z}{a}$.

Donc, puisque y & z ne peuvent être ni l'une ni l'autre moindres que 1, la première limite de s est donnée par l'équation, $s=\frac{d+a-b+a-c}{a}$, quantité qui doit être positive.

2°. En mettant pour y sa valeur $s-x-z$ dans l'équation générale, on aura $ax+bs-bx-bz+cz=d$; & par conséquent, $s=\frac{d+(b-a)x+(b-c)z}{b}$.

Donc, puisque x & z ne peuvent être ni l'une ni l'autre moindres que 1, la seconde limite de s est donnée par l'équation, $s=\frac{d+b-a+b-c}{b}$, quantité qui doit être positive.

3°. En mettant pour z sa valeur $s-x-y$ dans l'équation générale, on aura $ax+by+cs-cx-cy=d$,

& par conséquent, $s = \frac{d+(c-a)x+(c-b)y}{c}$.

D'où l'on tire, pour troisième limite de s, $s = \frac{d+c-a+c-b}{c}$, quantité positive.

Ces limites de s étant trouvées, il est clair que toutes les valeurs qu'on pourra donner à s dans l'intervalle de la plus grande limite à la plus petite, satisferont aux conditions du problême.

Par exemple, soient $a=8$, $b=9$, $c=4$, $d=88$; en sorte que l'équation générale $ax+by+$ &c devienne $8x+9y+4z=88$. On trouvera que la première limite de s est $11\frac{3}{8}$; la seconde, $10\frac{4}{9}$, la troisième, $19\frac{3}{4}$. Ainsi, la plus petite valeur qu'on puisse donner à s est $10\frac{4}{9}$, & la plus grande, $19\frac{3}{4}$.

185. Il est plus difficile de déterminer la valeur qu'il convient de donner, en nombre entier positif, à une inconnue, pour qu'une autre inconnue soit aussi un nombre entier positif, lorsqu'on exige que ces nombres soient les plus petits qu'il est possible.

Je suppose qu'on ait l'équation générale $y = \frac{mx \pm p}{n}$, m, n, p étant des nombres entiers positifs; & qu'il soit question de déterminer le plus petit nombre entier positif qu'on puisse prendre pour x, de manière qu'on ait aussi pour y le plus petit nombre entier positif. Ce problême demande plusieurs discussions, pour être résolu dans toute son étendue.

186. D'abord, il est évident que si m étoit divi-

ſible par n, $\frac{p}{n}$ étant une fraction, ou contenant une fraction, le problême ſeroit impoſſible. Car quelque valeur entière qu'on donnât à x, on auroit toujours une fraction dans la valeur de y, puiſque l'entier $\frac{mx}{n}$, joint avec la fraction contenue dans $\frac{p}{n}$, formeroit un réſultat qui contiendroit toujours une fraction.

187. En ſecond lieu, j'obſerve que le cas où les nombres m & p ſeroient l'un & l'autre diviſibles par n, ne doit pas être cenſé faire partie du problême en queſtion. Car alors notre équation ſe réduit à cette forme $y = qx \pm r$, q & r étant des nombres entiers; équation à laquelle il eſt ſi facile de ſatisfaire, en prenant pour x & y les plus petits nombres entiers poſitifs, que cela n'a pas beſoin d'explication.

188. Un autre cas qui n'a aucune difficulté, c'eſt celui où p ſeulement ſeroit diviſible par n. Car alors en nommant k le quotient de cette diviſion, on auroit $y = \frac{mx}{n} \pm k$, équation dans laquelle les deux nombres m & n peuvent être toujours cenſés premiers entr'eux, puiſque s'ils avoient des diviſeurs communs, on n'auroit qu'à diviſer les deux termes de la fraction $\frac{m}{n}$ par ces diviſeurs. Or 1°. lorſque k eſt précédé du ſigne $+$, ou qu'on a $y = \frac{mx}{n} + k$, ſi l'on fait $x = 0$, on aura $y = k$; ſolution qui ſatisfait à l'équation propoſée, en

regardant zero comme le plus petit ou la limite de tous les nombres entiers positifs. On satisfera d'une infinité d'autres manieres à la même équation, en prenant pour x le nombre n & tous les multiples de n.

2°. Lorsqu'on a $y = \frac{mx}{n} - k$, on ne peut pas faire $x = 0$, autrement y seroit un nombre négatif; mais on satisfera à l'équation, en prenant pour x, ou n, ou un multiple quelconque de n, tel que le nombre $\left(\frac{mx}{n} - k\right)$ soit positif.

189. Le problême qu'il s'agit de résoudre, suppose donc que ni m, ni p n'étant divisibles par n, il faille trouver pour x le plus petit nombre entier positif qui ait la propriété de rendre l'assemblage $mx \pm p$ un entier positif divisible par n. De plus, je suppose que la fraction $\frac{mx \pm p}{n}$ soit réduite à ses moindres termes. On verra dans la suite comment, ce cas étant résolu, on peut déterminer toutes les autres valeurs de x & de y. Commençons par établir, en forme de lemme, une proposition qui va servir de base à toute cette théorie.

190. *Deux nombres premiers entr'eux ont toujours deux multiples qui ne different l'un de l'autre que de 1.*

En effet, soient en général les deux nombres A & B premiers entr'eux, & supposons $B > A$. Je décompose ces deux nombres, comme si je voulois chercher, par la méthode de l'article 103, leur plus grand commun diviſeur. Ainſi, je ſuppoſe, comme dans cet article, qu'en diviſant le plus grand nombre B par le plus petit A, on ait a pour quotient, & α pour reſte ; qu'en diviſant A par α, on ait b pour quotient, & β pour reſte ; qu'en diviſant α par β, on ait c pour quotient, & γ pour reſte ; ainſi de ſuite. Or, puiſque dans toute diviſion, le reſte eſt évidemment égal au dividende, moins le produit du diviſeur par le quotient, il eſt clair qu'on aura,

I. $\alpha = B - Aa.$

On aura ſemblablement, $\beta = A - \alpha b$, $\gamma = \alpha - \beta c$, $\delta = \beta - \gamma d$, &c.

Si l'on élimine ſucceſſivement α, β, γ, &c, de ces trois dernières équations, en mettant pour chacune de ces lettres ſa valeur donnée par l'équation précédente, on trouvera,

II. $\beta = A(ab + 1) - Bb$,
III. $\gamma = B(bc + 1) - A(abc + a + c)$,
IV. $\delta = A(abcd + ab + ad + cd + 1) - B(bcd + b + d)$,
&c.

Cela poſé, comme les deux nombres A & B ſont premiers entr'eux, il eſt évident qu'en pouſſant auſſi loin qu'il eſt poſſible les diviſions de B par A, de A par α, de α par β, &c, on arrivera néceſſairement à un reſte qui vaudra 1. Par conſéquent, ſi l'on nomme en général f le multiplicateur de A, g celui de B, dans les équations I, II, III, IV, &c, ces mêmes équations donneront, pour déterminer les deux multiples cherchés, l'équation (M), lorſque le nombre des diviſions eſt *impair*, & l'équation (N), lorſque le nombre des diviſions eſt *pair*.

$$(M) \quad 1 = Bg - Af,$$
$$(N) \quad 1 = Af - Bg.$$

J'appelle les équations (M) & (N) *équations de condition*.

Suppoſons, pour faire une application de ces formules, $A = 13$, $B = 61$. On trouvera $a = 4$, $\alpha = 9$, $b = 1$, $\beta = 4$, $c = 2$, $\gamma = 1$. Il faut donc faire trois diviſions pour arriver à l'équation de condition. Ainſi, cette équation ſe rapporte à la formule (M); & l'on a, en vertu de l'équation III, $g = bc + 1 = 2 + 1 = 3$, $f = abc + a + c = 8 + 4 + 2 = 14$. Les deux multiples cherchés, Bg & Af, ſont donc 61×3 & 13×14, c'eſt-à-dire, 183 & 182, nombres qui ne différent, comme on voit, que de 1.

On doit obſerver que ſi deux nombres A & B n'étoient pas premiers entr'eux, ils ne pourroient pas avoir des multiples qui ne différaſſent que de 1. Car ſoient $A = kC$, $B = kD$, k étant le plus grand diviſeur commun de A & de B, C & D leurs facteurs non communs. Si l'on ſuppoſoit qu'en multipliant A ou kC par le nombre entier E, & B ou kD par le nombre entier F, on pût avoir $EkC - FkD = 1$; on auroit $EC - FD = \frac{1}{k}$. D'où il s'enſuivroit que la différence des deux produits EC, FD, qui ſont des nombres entiers, seroit une fraction $\frac{1}{k}$, k étant > 1 ; ce qui est impossible.

Cela posé, venons à notre problême.

PROBLEME III.

191. *ETANT donnée l'équation* $y = \frac{mx \pm p}{n}$ *dans laquelle la fraction* $\frac{mx \pm p}{n}$ *est supposée réduite à ses moindres termes, &* p *non divisible par* n *: on propose de satisfaire à cette équation, en prenant pour* x *&* y *les plus petits nombres entiers positifs qu'il est possible ?*

Je commence par observer que si les nombres m & n ne sont pas premiers entr'eux, le problême sera impossible. Car si ces nombres ont un diviseur commun k, & qu'on ait $m = kh$, $n = kl$, h & l étant des nombres entiers, il faudroit que la fraction $\frac{khx \pm p}{kl}$ fût un nombre entier que je nomme i. On auroit donc $khx \pm p = kli$, & par conséquent $hx \pm \frac{p}{k} = li$. Or, le premier terme hx est un nombre entier ; le second membre li est aussi un nombre entier. Donc le terme $\pm \frac{p}{k}$, seroit un nombre entier ; ce qui ne peut pas être, puisque la fraction $\frac{mx \pm p}{n}$ eſt cenſée réduite à ſes moindres termes.

Les deux nombres m & n étant donc ſuppoſés premiers entr'eux, je cherche, par la méthode de l'article précédent, deux multiples de m & de n, qui ne different l'un de l'autre que de 1. Il peut arriver que l'équation de condition ſoit *impaire* ou *paire*, & que la quantité p ſoit précédée du ſigne $+$ ou du ſigne $-$; ce qui fait quatre cas qui pourroient ſe réduire à deux en changeant x en y & réciproquement, mais que je crois devoir traiter directement, & ſous le premier point de vue.

Avant que d'entrer dans ce détail, on doit obſerver en général que A étant ſuppoſé plus petit que B, dans les formules de l'article précédent, il faut, des deux quantités m, n, prendre la plus petite pour A, l'autre pour B, dans l'équation de condition, & ſuppoſer toujours, dans cette même équation, que f eſt le multiplicateur de la plus petite des deux quantités propoſées, g celui de la plus grande.

I. CAS. *L'équation de condition étant impaire, & p affecté du ſigne* $+$.

1°. Soit $m < n$. L'équation (M) de condition, deviendra (en mettant m pour A, n pour B), $1 = ng - mf$.

Cette équation donne (en multipliant tout par p); $p = png - pmf$. Subſtituons cette valeur de p dans l'équation

l'équation $y = \frac{mx+p}{n}$; nous aurons $y = \ldots\ldots$
$\frac{mx+png-pmf}{n} = pg + \frac{m(x-fp)}{n}$. Ainsi d'abord pour que y soit un entier, il faut que $\frac{m(x-fp)}{n}$ en soit un, ou (à cause que m & n sont premiers entr'eux), il faut que $x-fp$ soit exactement divisible par n. Soit q le quotient de la partie constante fp divisée par n, & r le reste de cette division : on aura $fp = nq + r$; & par conséquent $y = pg - mq +$ $m \times \frac{x-r}{n}$. Maintenant, les nombres x & y seront les moindres entiers positifs, si l'on suppose $\frac{x-r}{n} = 0$, ou $x = r = fp - nq$. Car le nombre $\frac{x-r}{n}$ ou son multiple $x-r$ étant zero, ou le moindre entier positif possible, x sera aussi le moindre entier positif possible. On ne peut pas, dans la vue de diminuer y, supposer $\frac{x-r}{n}$ égal à un nombre négatif $-h$, parce que cela donneroit $x = r - nh$, nombre négatif, n étant $> r$. Mais la valeur $x = r$, qui est le moindre entier positif qu'on puisse prendre pour x, donne $y = pg - mq$, nombre qui est le moindre entier possible ; & qui est de plus positif, puisqu'en mettant pour q sa valeur $\frac{pf-r}{n}$, on a $y = \frac{p(ng-mf)+mr}{n}$, ou bien (à cause de $ng -$

$mf = 1$), $y = \frac{p + mr}{n}$ quantité évidemment positive. C. Q. F. 1°. T.

2°. Soit $m > n$. L'équation (M) de condition deviendra (en mettant n pour A, m pour B), $1 = mg - nf$.

Cette équation donne $p = pmg - pnf$. Donc $y = \frac{mx + p}{n} = \frac{mx + pmg - pnf}{n} = m \times \frac{(x + pg)}{n} - pf$. Soit q le quotient de la partie constante pg divisée par n, & r le reste de cette division ; en sorte que $pg = nq + r$. On aura $y = m\left(\frac{x + r}{n}\right) + mq - pf$. D'où l'on voit que $\frac{x + r}{n}$ doit être le moindre entier positif possible. On ne peut pas supposer $\frac{x + r}{n} = 0$, ni que $\frac{x + r}{n}$ soit un nombre négatif, parce que dans l'une & l'autre supposition x seroit négatif ; mais en supposant $\frac{x + r}{n} = 1$, qui est le moindre entier positif au dessus de zero, on aura $x = n - r = n - pg + nq$, qui est évidemment un nombre positif (n étant $> r$), & le moindre qu'on puisse prendre pour x. Mettant pour $\frac{x + r}{n}$ sa valeur 1 dans la dernière expression de y, on aura $y = m + mq - pf$, qui est le moindre entier possible, & qui est de plus positif, puisqu'en mettant pour q

ſa valeur $\frac{pg-r}{n}$, on a $y=\frac{p(mg-nf)+m(n-r)}{n}=\frac{p+m(n-r)}{n}$, quantité dont toutes les parties ſont poſitives, n étant $>r$. C. Q. F. 2°. T.

II. CAS. *L'équation de condition étant impaire, &* p *affecté du ſigne* —.

1°. Soit $m<n$. L'équation (M) de condition deviendra (en mettant m pour A, n pour B), $1=ng-mf$, ou bien $p=png-pmf$.

On aura donc $y=\frac{mx-p}{n}=\frac{mx-png+pmf}{n}=m\left(\frac{x+pf}{n}\right)-pg$. Soit q le quotient de pf diviſé par n, r le reſte; en ſorte que $pf=nq+r$. On aura $y=m\left(\frac{x+r}{n}\right)+mq-pg$. Je fais $\frac{x+r}{n}=1$; ou $x=n-r=n-pf+nq$, & par conſéquent $y=m+mq-pg$. Ces valeurs de x & de y ſatisfont au problême. C. Q. F. 1°. T.

2°. Soit $m>n$. L'équation (M) de condition devient (en mettant n pour A, m pour B), $1=mg-nf$, ou $p=pmg-pnf$.

Donc $y=\frac{mx-p}{n}=m\left(\frac{x-pg}{n}\right)+pf$. Soit q le quotient de pg diviſé par n, r le reſte, & par conſéquent $pg=nq+r$. On aura $y=m\left(\frac{x-r}{n}\right)-mq+pf$. Je fais $\frac{x-r}{n}=0$, ou $x=r=pg-nq$; ce qui donne $y=pf-mq$. C. Q. F. 2°. T.

III. CAS. *L'équation de condition étant paire, & p affecté du signe* $+$.

1°. Soit $m<n$. L'équation (N) de condition devient (en mettant m pour A, n pour B), $1=mf-ng$, ou $p=pmf-png$.

Donc $y=\frac{mx+p}{n}=m\left(\frac{x+pf}{n}\right)-pg$. Soit q le quotient de pf divisé par n, r le reste, & par conséquent $pf=nq+r$. On aura $y=m\left(\frac{x+r}{n}\right)+mq-pg$. Je fais $\frac{x+r}{n}=1$, ou $x=n-r=n-pf+nq$; ce qui donne $y=m+mq-pg$. C. Q. F. 1°. T.

2°. Soit $m>n$. L'équation (N) de condition devient (en mettant n pour A, m pour B), $1=nf-mg$, ou $p=pnf-pmg$.

Donc $y=\frac{mx+p}{n}=m\left(\frac{x-pg}{n}\right)+pf$. Soit q le quotient de pg divisé par n, r le reste; & par conséquent $pg=nq+r$. On aura $y=m\left(\frac{x-r}{n}\right)-mq+pf$. Je fais $\frac{x-r}{n}=0$, ou $x=r=pg-nq$; ce qui donne $y=pf-mq$. C. Q. F. 2°. T.

IV. CAS. *L'équation de condition étant paire, & p affecté du signe* $-$.

1°. Soit $m<n$. L'équation (N) de condition devient (en mettant m pour A, n pour B), $1=mf-ng$, ou $p=pmf-png$.

Donc $y = \frac{mx - p}{n} = m\left(\frac{x - pf}{n}\right) + pg$. Soit q le quotient de pf divisé par n, r le reste ; & par conséquent $pf = nq + r$. On aura $y = m\left(\frac{x - r}{n}\right) - mq + pg$. Je fais $\frac{x - r}{n} = 0$, ou $x = r = pf - nq$; ce qui donne $y = pg - mq$. C. Q. F. 1°. T.

2°. Soit $m > n$. L'équation (N) de condition devient (en mettant n pour A, m pour B), $1 = nf - mg$, ou $p = pnf - pmg$.

Donc $y = \frac{mx - p}{n} = m\left(\frac{x + pg}{n}\right) - pf$. Soit q le quotient de pg divisé par n, r le reste, & par conséquent $pg = nq + r$. On aura $y = m\left(\frac{x + r}{n}\right) + mq - pf$. Je fais $\frac{x + r}{n} = 1$, ou $x = n - r = n - pg + nq$; ce qui donne $y = m + mq - pf$. C. Q. F. 2°. T.

Ainsi notre problême est résolu dans toutes ses parties. Les raisons des opérations pour les trois derniers cas se trouvent comme pour le premier.

PROBLEME IV.

192. *Trouver le moindre nombre entier qui divisé par 53, donne 47 de reste ; & qui divisé par 15, donne 2 de reste ?*

En nommant u le nombre cherché, x le premier quotient, y le second : on aura les deux équations $u = 53x + 47$, $u = 15y + 2$, & par conséquent

$53x + 47 = 15y + 2$; d'où l'on tire $y = \frac{53x + 45}{15}$.

Il est clair que si l'on détermine x & y à être les moindres entiers positifs qu'il soit possible, le nombre résultant pour u sera aussi le moindre entier positif possible.

Comme 45 est divisible par 15 & donne 3 pour quotient, on a $y = \frac{53x}{15} + 3$, équation qui se rapporte à la formule générale $y = \frac{mx}{n} + k$ de l'article 188. Si l'on fait $x = 0$, on aura $y = 3$, & par conséquent $u = 47$. Ce nombre est le moindre entier qui satisfasse aux conditions du problême.

Si l'on fait $x = 15$, on trouvera $u = 842$, nombre qui divisé par 53, donne 47 de reste, & qui divisé par 15, donne 2 de reste ; si l'on fait $x = 2 \times 15$, on trouvera $u = 1637$, nombre qui satisfait aux mêmes conditions. Ainsi de suite. C. Q. F. T.

PROBLEME V.

193. *TROUVER le moindre nombre entier qui, divisé par 15, donne 7 de reste, & qui, divisé par 23, donne 11 de reste ?*

Soient u le nombre cherché, x le premier quotient, y le second. Il est clair qu'on aura les deux équations $u = 15x + 7$, $u = 23y + 11$, & par conséquent, $15x + 7 = 23y + 11$, ou bien $y = \frac{15x - 4}{23}$.

On voit que cette équation ſe rapporte à la formule générale $y = \frac{mx - p}{n}$ de l'article 191, les nombres 15 & 23 étant premiers entr'eux, & 4 n'étant pas diviſible par 23. Il eſt donc queſtion de déterminer x & y à être les moindres entiers poſitifs qu'il eſt poſſible, puiſqu'alors la valeur de u ſera auſſi le moindre entier poſitif poſſible.

Nous avons ici $m = 15$, $n = 23$, $a = 1$, $\alpha = 8$, $b = 1$, $\beta = 7$, $c = 1$, $\gamma = 1$, $p = 4$. D'où l'on voit que l'équation de condition eſt donnée par l'équation III de l'article 190. Et comme $m < n$, & que le nombre p eſt précédé du ſigne —, il s'enſuit que la fraction $\frac{15x - 4}{23}$ ſe rapporte au II cas, nº. 1 du problême précédent. Donc, à cauſe que l'équation III citée donne $g = bc + 1 = 2$, $f = abc + a + c = 1 + 1 + 1 = 3$, $fp = 3 \times 4 = 12$, $q = 0$; on aura, $x = n - fp + nq = 23 - 12 = 11$, & $y = \frac{15x - 4}{23} = 7$.

Mettons la valeur de x dans l'équation $u = 15x + 7$, & nous aurons $u = 172$, qui eſt le nombre cherché. Effectivement, ſi l'on diviſe 172 par 15, la diviſion ne ſe fait qu'avec le reſte 7; & ſi l'on diviſe le même nombre par 23, la diviſion ne ſe fait qu'avec le reſte 11. C. Q. F. T.

PROBLEME VI.

194. *TROUVER le plus petit nombre qui, divisé par 28 & 19, laisse 8 & 10 pour restes?*

Soient u le nombre cherché, x le premier quotient, y le second. On aura les deux équations, $u = 28x + 8$, $u = 19y + 10$; & par conséquent, $y = \frac{28x - 2}{19}$, qui se rapporte à la formule générale $y = \frac{mx - p}{n}$ de l'article 191.

Nous avons ici $m = 28$, $n = 19$, & par conséquent $m > n$; $a = 1$, $\alpha = 9$, $b = 2$, $\beta = 1$, $p = 2$, & cette dernière quantité est précédée du signe —. Ainsi l'équation de condition est donnée par l'équation II de l'article 190; & la fraction $\frac{28x - 2}{19}$ se rapporte au IV cas, n°. 2 du problême III. Donc, à cause de $f = ab + 1 = 3$, $g = b = 2$, $fp = 6$, $gp = 4$, $q = 0$; on aura $x = n - gp + nq = 19 - 4 = 15$, $y = \frac{28x - 2}{19} = 22$.

Mettons pour x sa valeur 15 dans l'équation $u = 28x + 8$, & nous aurons $u = 428$, nombre cherché. En effet, si l'on divise ce nombre par 28, on a le reste 8; & si on le divise par 19 on a le reste 10. C. Q. F. T.

Ce problême sert, dans le Calendrier, à trouver la période victorienne, lorsque le cycle solaire est 8, & le cycle lunaire, 10.

PROBLEME VII.

195. *TROUVER le plus petit nombre qui, divisé par 28, 19, 13 laisse 8, 10, 7 pour restes correspondants?*

Je cherche comme dans le problême précédent, le nombre qui satisfait aux deux premières conditions du problême, c'est-à-dire, le nombre qui, divisé par 28 & 19, laisse 8 & 10 pour restes. Ce nombre est 428.

Cela posé, il s'agit encore de satisfaire à la troisième condition du problême, sans déroger aux deux autres. Pour cela, j'observe que si au nombre 428, on ajoute un nombre qui soit exactement divisible par 28 & 19, la somme étant divisée par 28 & 19, donnera toujours également 8 & 10 pour restes. Or, tout nombre exactement divisible par 28 & 19, peut être représenté par $28\times19\times t$, t étant un nombre entier. La troisième condition du problême sera donc remplie si l'on prend pour t le plus petit nombre entier qui soit tel que la somme $28\times19\times t+428$ étant divisée par 13, donne 7 de reste. Soit nommé z le quotient de cette division; nous aurons l'équation, $28\times19\times t+428=13z+7$, ou bien $z=\frac{532t+421}{13}$.

Reste donc à prendre pour t le moindre nombre entier qui donne pour z un nombre entier.

On a ici $m=532$, $n=13$, $m>n$, $a=40$, $\alpha=12$, $b=1$, $\beta=1$, $p=421$. D'où l'on voit que la fraction $\frac{532t+421}{13}$ se rapporte au III cas, n°. 2 du problême III. L'équation de condition étant la II de l'article 190, on a $f=ab+1=41$, $g=b=1$, $gp=421$, $q=32$. Par conséquent $t=gp-nq=5$; $z=fp-mq=237$; $532t+428=3088$.

Ce dernier nombre 3088 est celui qu'on cherchoit. Il remplit en effet toutes les conditions du problême. Car, en le divisant par 28, on a 110 pour quotient, & 8 de reste; en le divisant par 19, on a 162 pour quotient, & 10 de reste; en le divisant par 13, on a 237 pour quotient, & 7 de reste. C. Q. F. T.

PROBLEME VIII.

196. *CONNOISSANT les premières valeurs des nombres* x *&* y, *qui satisfont à l'équation générale* $ny \mp mx = p$ *: trouver les autres valeurs, qui peuvent satisfaire à la même équation?*

1°. Soit $ny-mx=p$. Je suppose que $x+a$ & $y+b$ représentent les secondes valeurs de x & de y. On aura l'équation $n(y+b)-m(x+a)=p$, ou bien, $ny+nb-mx-ma=p$, de laquelle retranchant l'équation $ny-mx=p$, résulte $nb-ma=0$, ou $nb=ma$, & par conséquent $a:b::n:m$.

De même, si l'on suppose que $x+a+c$, $y+b+d$ soient les troisièmes valeurs de x & de y, on aura $n(y+b+d)-m(x+a+c)=p$, dont retranchant $n(y+b)-m(x+a)=p$, reste $nd-mc=0$, & par conséquent $c:d::n:m$. Ainsi de suite.

Cela posé, comme on veut avoir toutes les valeurs possibles de x & de y, qui peuvent satisfaire à l'équation proposée, les accroissements a, b, c, d, &c, doivent être les moindres qu'il est possible. Or, puisqu'on a cette suite de proportions, $a:b::n:m$, $c:d::n:m$, &c ; il est clair que la condition dont il s'agit, sera remplie, si l'on fait chacun des accroissements, a, c, &c, égal à n, & chacun des accroissements b, d, &c, égal à m; les nombres n & m étant supposés premiers entr'eux. D'où il suit que les différentes valeurs de x composent une progression arithmétique croissante dont la différence est n, coéfficient de y; & que les différentes valeurs de y composent une progression arithmétique aussi croissante, dont la différence est m, coéfficient de x. La première progression est donc, $\div x . x+n . x+2n . x+3n$, &c; la seconde $\div y . y+m . y+2m . y+3m$. &c. C. Q. F. 1°. T.

2°. Soit $ny+mx=p$. En supposant que les secondes valeurs de x & de y sont $x+a$, $y+b$; que les troisièmes valeurs sont $x+a+c$, $y+b+d$; ainsi de suite : on trouvera par la même méthode que ci-dessus, $nb+ma=0$; $nd+mc=0$; &c. Ce qui donne les proportions $a:-b::n:m$, ou $-a:b::n:m$, $c:-d::n:m$, ou $-c:d::n:m$, &c. D'où l'on voit que les nombres n & m étant supposés premiers entr'eux, il faut pour avoir toutes les valeurs possibles de x & de y, faire chacune des quantités a, c, &c, égale à n, & chacune des quantités b, d, &c, égale à m. Ainsi, comme parmi les premières quantités a, c, &c, l'une est positive, tandis que sa correspondante, parmi les quantités b, d, &c, est négative ; ou bien, réciproquement : il s'ensuit que les valeurs de x composent une progression arithmétique croissante dont la différence est n, tandis que les valeurs correspondantes de y composent une progression arithmétique décroissante dont la différence est m ; ou bien, que les valeurs de x composent une progression arithmétique décroissante dont la différence est n, tandis que les valeurs de y composent une progression arithmétique croissante, dont la différence est m. Les deux premières progressions sont donc,

$$\div x . x + n . x + 2n . x + 3n . \&c,$$
$$\div y . y - m . y - 2m . y - 3m . \&c;$$

& les deux dernières,

$$\div x . x - n . x - 2n . x - 3n . \&c,$$
$$\div y . y + m . y + 2m . y + 3m . \&c.$$

C. Q. F. 2°. T.

Faisons quelques applications de ces formules.

PROBLEME IX.

197. *TROUVER en combien de manières on peut faire 50 sols, avec des piéces de 2 sols, & des piéces de 18 deniers, ou de $\frac{3}{4}$ de sol ?*

Soient x le nombre de piéces de 2 ſols, y celui des piéces de $\frac{3}{2}$ ſol. On aura l'équation, $2x+\frac{3}{2}y=50$; ou bien, $4x+3y=100$, ou $y=\frac{100-4x}{3}$, ou enfin $y=33-\left(\frac{4x-1}{3}\right)$.

Or, (191, II cas, n°. 2,) le plus petit nombre entier poſitif qu'on puiſſe prendre pour x, afin que la fraction $\frac{4x-1}{3}$ en ſoit auſſi un, eſt 1; & la valeur de cette fraction eſt pareillement 1. Ainſi, à cauſe de $y=33-\left(\frac{4x-1}{3}\right)$, la valeur correſpondante de y ſera 32. Ces deux premières valeurs de x & de y étant trouvées, on déterminera toutes les autres par le ſecond cas du problême précédent. Les valeurs de x forment une progreſſion arithmétique croiſſante dont le premier terme eſt 1, & la différence, 3, coéfficient de y dans l'équation $4x+3y=100$; tandis que les valeurs correſpondantes de y forment une progreſſion arithmétique décroiſſante, dont le premier terme eſt 32, & la différence 4, coéfficient de x dans la même équation $4x+3y=100$. Ou bien les valeurs de x forment une progreſſion arithmétique décroiſſante, dont le premier terme eſt 1, la différence 3, tandis que les valeurs correſpondantes de y forment une progreſſion arithmétique croiſſante dont le premier terme eſt 32, & la différence 4. Voici ces deux ſyſtêmes de progreſſions,

$$\left\{\begin{array}{l} \div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . \&c \\ \div 32 . 28 . 24 . 20 . 16 . 12 . \&c \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \div 1 . -2 . -5 . -8 . -11 . -14 . \&c \\ \div 32 . 36 . 40 . 44 . 48 . 52 . \&c \end{array}\right\}$$

Ces deux ſyſtêmes ſatisfont au problême, & peuvent être également employés.

Lorſque de deux valeurs de x & de y, qui ſe combinent enſemble, l'une eſt poſitive, l'autre négative, elles doivent être priſes en ſens contraires. L'une exprimera, ſi l'on veut, un *gain*, & l'autre une *perte*. Par exemple, ſi l'on prend dans le ſecond ſyſtême le quatrième terme de chaque progreſſion, on formera 50 ſols de gain effectif, avec 44 gains de $\frac{1}{2}$ ſol, & 8 pertes de 2 ſols. En effet, $50 = 44 \times \frac{1}{2} - 8 \times 2$. C. Q. F. T.

PROBLEME X.

198. *TROUVER tous les nombres qui étant diviſés par 15, donnent 7 de reſte, & qui étant diviſés par 23, donnent 11 de reſte?*

Soient, comme dans l'article 193, u le plus petit nombre qui ſatisfait aux conditions du problême, & $u = 15x + 7$, $u = 23y + 11$.

Nous avons trouvé, dans l'article cité, que les deux plus petits nombres qu'on puiſſe prendre pour x & y, pour ſatisfaire à l'équation $15x + 7 = 23y + 11$, ſont 11 & 7, & qu'alors le nombre u eſt 172. Cela poſé, la même équation $15x + 7 = 23y + 11$, ou $23y - 15x = -4$, ſe rapporte au premier cas du problême VIII. Ainſi les valeurs de x forment une progreſſion arithmétique croiſſante dont le premier terme eſt 11, la différence, 23 ; & les valeurs de y forment une progreſſion arithmétique auſſi croiſſante, dont le premier terme eſt 7, la différence, 15. Voici ces deux progreſſions :

$$\text{Pour } x,\ \div\ 11 \cdot 34 \cdot 57 \cdot 80 \cdot 103 \cdot \&c,$$
$$\text{Pour } y,\ \div\ 7 \cdot 22 \cdot 37 \cdot 52 \cdot 67 \cdot \&c.$$

Les valeurs de x & de y étant trouvées, on aura celles de u par l'équation $u = 15x + 7$, ou $u = 23y + 11$. La première valeur de u eſt 172 ; la ſeconde, $172 + 15 \times 23$; la troiſième, $172 + 15 \times 23 + 15 \times 23$; la quatrième, $172 + 15 \times 23 + 15 \times 23 + 15 \times 23$, &c. Ainſi ces différentes valeurs compoſent une progreſſion arithmétique croiſſante, dont le premier terme eſt 172, & la différence 23×15, ou 345. Voici cette progreſſion, $\div\ 172 \cdot 517 \cdot 862 \cdot 1207 \cdot 1552 \cdot$ &c. C. Q. F. T.

On appliquera facilement la même méthode aux problêmes des articles 194, 195, & aux autres queſtions de pareille nature.

Cette théorie des équations indéterminées du premier degré, a été traitée par pluſieurs Auteurs, en particulier par Diophante & Bachet de Meziriac, ſon Commentateur, par MM. Saunderſon & Maclaurin, dans leurs Eléments d'Algébre, & par M. Labottiere, dans un excellent Mémoire imprimé parmi les piéces préſentées à l'Académie Royale des Sciences, tome IV,

CHAPITRE IX.

Des Equations du second degré.

SECTION I.

Des Problêmes déterminés du second degré.

199. TOUTE équation déterminée du second degré peut être réduite à cette forme,

$$x^2+ax=b,$$

a & b étant des quantités connues, x l'inconnue.

En effet, qu'on ait, par exemple, l'équation $mx^2+n^2x+p^3=q^3-fgh$, dans laquelle tout est connu, à l'exception de x. On commencera par transposer le terme $+p^3$, & ensuite on divisera tout par m, coéfficient du quarré de l'inconnue. Par-là on aura,

$$x^2+\frac{n^2x}{m}=\frac{q^3-fgh-p^3}{m},$$

équation qui se réduit à la forme $x^2+ax=b$, en faisant $\frac{n^2}{m}=a$, $\frac{q^3-fgh-p^3}{n}=b$.

Si

Si on avoit l'équation $mx^2 - kx^2 - l^2x + pqx + h^3 - frq = 0$, on l'écriroit d'abord ainsi :

$$(m-k)\,x^2 + (pq-l^2)\,x = frq - h^3.$$

Ensuite on diviseroit tout par $m-k$; & on auroit,

$$x^2 + \frac{(pq-l^2)}{m-k}.\ x = \frac{frq-h^3}{m-k},$$ équation qui se réduit à la forme $x^2 + ax = b$, en faisant $\frac{pq-l^2}{m-k} = a$, $\frac{frq-h^3}{m-k} = b$.

Ainsi des autres.

La résolution des équations du second degré consiste donc à savoir dégager l'inconnue dans l'équation $x^2 + ax = b$, qui est telle que tous les termes où l'inconnue se trouve, sont dans le premier membre, tandis que tous les autres représentés par b sont dans le second.

200. LES quantités a & b pouvant être quelconques, si l'on suppose en premier lieu, que $a = 0$, le terme ax s'évanouira ; & on aura simplement $x^2 = b$. Donc, en tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $x = \pm\sqrt{b}$, & par conséquent l'inconnue x sera déterminée. Je mets le double signe $\pm$ au-devant de $\sqrt{b}$, parce que, comme nous l'avons vu, l'une & l'autre quantité $+\sqrt{b}$, & $-\sqrt{b}$, étant multipliée par elle-même, donne également b, ou x^2.

Remarquez qu'on pourroit mettre aussi le double signe au-devant de x ; mais cela ne produiroit pas de résultat nouveau. Car si on prend $+x = \pm\sqrt{b}$, cette équation eſt la même choſe que $x = \pm \sqrt{b}$; & ſi l'on prend $-x = \pm \sqrt{b}$, on aura, en changeant tous les ſignes, $x = \mp \sqrt{b}$; ce qui revient encore au premier réſultat.

201. En ſecond lieu, ſi a n'étant plus zero, b étoit zero, ou qu'on eût $x^2 + ax = 0$; l'équation s'abaiſſeroit au premier degré. Car elle deviendroit $x(x+a) = 0$. D'où l'on tire, ou $x = 0$, ou $x + a = 0$, c'eſt-à-dire, $x = -a$.

On voit qu'il y a deux manières de ſatisfaire à l'équation $xx + ax = 0$, ſavoir, ou en ſuppoſant $x = 0$, ou en ſuppoſant $x = -a$. En effet, l'équation $xx + ax = 0$, peut être regardée comme formée du facteur $x = 0$, par la quantité $x + a$, ou du facteur $x + a = 0$, par la quantité x. Les conditions du problême qui donneroit une telle équation, détermineroient quelle eſt la valeur de x, qu'il faut prendre.

202. Les deux cas précédents ne ſont que particuliers, & n'ont demandé, pour être réſolus, aucune nouvelle régle. Propoſons-nous maintenant de réſoudre l'équation générale $x^2 + ax = b$, en ſuppoſant que a & b ſont des quantités réelles, poſitives ou négatives. Pour y parvenir, nous nous rappellerons que le quarré d'un binome tel que $x + h$, eſt $x^2 + 2hx + h^2$; & comparant terme à terme ce quarré avec le premier membre de l'équation propoſée, c'eſt-à-dire, faiſant $x^2 = x^2$, $2hx = ax$, ou $h = \frac{a}{2}$, nous verrons que ce même membre deviendra un quarré parfait, ſi on

lui ajoute h^2 ou $\frac{a^2}{4}$. Or, comme l'égalité doit toujours ſubſiſter, il faudra ajouter également cette quantité $\frac{a^2}{4}$ au ſecond membre. Par-là, au lieu de l'équation $x^2 + ax = b$, on aura l'équation $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$, dont le premier membre eſt un quarré parfait, celui de $x + \frac{a}{2}$. Ainſi, tirant la racine quarrée de ce membre, & indiquant celle du ſecond, on aura l'équation, $x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{[b + \frac{a^2}{4}]}$, où l'inconnue x n'eſt plus qu'au premier degré ; en ſorte que tranſpoſant le terme $\frac{a}{2}$, on aura, $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{[b + \frac{a^2}{4}]}$; & l'inconnue ſera dégagée.

203. Il eſt clair, qu'à cauſe du double ſigne qui affecte le radical, l'inconnue x a deux valeurs ; c'eſt-à-dire, qu'on ſatisfera également à l'équation propoſée $xx + ax = b$, ou qu'on en rendra les deux membres identiques, ſoit en ſuppoſant $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{[b + \frac{a^2}{4}]}$, ſoit en ſuppoſant $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{[b + \frac{a^2}{4}]}$.

Cette même concluſion peut être préſentée autrement. Soient, pour abréger, m la première valeur de x, n la ſeconde. L'équation $xx + ax = b$, ou $xx + ax - b = 0$, eſt la même choſe que $(x - m) \times$

$(x-n)=0$, ou $xx-(m+n)x+mn=0$, & peut être regardée comme composée du facteur $x-m=0$, par la quantité $x-n$, ou du facteur $x-n=0$, par la quantité $x-m$.

204. TELLE est donc la méthode générale pour résoudre les équations du second degré. 1°. Mettez tous les termes qui contiennent l'inconnue x dans un membre, en les ordonnant par rapport à x, & les termes connus dans l'autre membre. 2°. Délivrez le quarré x^2 de son coéfficient, s'il en a un autre que l'unité ; ce qui se fait en divisant tous les termes de l'équation par ce coéfficient. 3°. Ajoutez de part & d'autre le quarré de la moitié du coéfficient de x ; ce qui rend le premier membre un quarré parfait. 4°. Enfin tirez la racine quarrée des deux membres ; ce qui abaisse l'inconnue au premier degré.

205. ON remarquera que si dans la formule $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left[b+\frac{a^2}{4}\right]}$, qui exprime la double valeur de x, résultante de l'équation $xx+ax=b$, la partie radicale s'évanouit, (ce qui arrive lorsque b est une quantité négative & qu'on a $b=-\frac{a^2}{4}$), les deux valeurs de x se réduisent à $x=-\frac{a}{2}$. D'où l'on voit que x n'a qu'une racine ou une seule valeur, ou que si elle a deux racines, elles sont égales entr'elles. En effet l'équation $xx+ax=b$, devient

dans le cas préſent, $xx+ax=-\frac{a^2}{4}$, ou $xx+ax+\frac{a^2}{4}=0$, ou $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=0$, ou..... $\left(x+\frac{a}{2}\right)\times\left(x+\frac{a}{2}\right)=0$.

PROBLEME I.

206. *TROUVER un nombre tel qu'étant ajouté trois fois à ſon quarré, la ſomme faſſe 108 ?*

Soit x le nombre cherché : on aura l'équation, $x^2+3x=108$.

Ajoutons de part & d'autre le quarré de $\frac{3}{2}$, c'eſt-à-dire le quarré de la moitié du coéfficient du terme qui contient x; nous aurons $x^2+3x+\frac{9}{4}=108+\frac{9}{4}$, équation dont le premier membre eſt le quarré de $x+\frac{3}{2}$. Tirant donc la racine de chaque membre, on aura $x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{[108+\frac{9}{4}]}$, ou bien, en réduiſant toute la quantité radicale au même dénominateur, & effectuant l'addition, $x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{441}{4}}$. Or, la fraction $\frac{441}{4}$ a pour racine exacte $\frac{21}{2}$. Ainſi, on aura $x+\frac{3}{2}=\pm\frac{21}{2}$. D'où l'on tire ces deux valeurs $x=9$, $x=-12$. Ces deux valeurs réſolvent également le problême. Car ſi au quarré du nombre poſitif 9, qui eſt 81, on ajoute le triple du même nombre, qui eſt 27, la ſomme ſera 108; & ſi au quarré du nombre négatif -12, qui eſt 144, on ajoute le triple du même nombre, qui eſt -36, la ſomme ſera $144-36$, ou 108. C. Q. F. T.

On voit par cet exemple un avantage de l'Algébre ; c'eſt qu'une même équation donne non-ſeulement la ſolution du problême particulier qu'on cherche à réſoudre en la formant, mais encore la ſolution de tous les problêmes qui ont des conditions ſemblables. Ainſi, en propoſant le problême précédent, on a pu n'avoir en vue que de trouver un nombre poſitif qui en remplît les conditions ; mais l'équation $x^2+3x=108$, fait voir qu'on peut remplir également ces conditions, en employant un nombre négatif.

PROBLEME II.

207. *Partager le nombre 24 en deux parties, telles que leur produit ſoit 135 ?*

Soit x la première partie de 24, & par conſéquent $24-x$ la ſeconde. On aura l'équation, $x(24-x)=135$, ou $x^2-24x=-135$.

Ajoutons de part & d'autre le quarré de 12, moitié du coéfficient de x ; nous aurons $x^2-24x+144=144-135=9$. Tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $x-12=\pm\sqrt{9}=\pm 3$; ce qui donne pour x ces deux valeurs, $x=15$, $x=9$. Dans le premier cas, les deux parties du nombre 24, ſont 15 & 9, & dans le ſecond, elles ſont 9 & 15. Les deux cas ſe réduiſent par conſéquent à un ſeul. C. Q. F. T.

PROBLEME III.

208. *Un tonneau plein de liqueur, a trois orifices* A, B, C ; *il peut ſe vuider par les trois orifices en-*

semble, en 6 heures ; par l'orifice B *seul, il se vuideroit dans les trois quarts du tems qu'il mettroit à se vuider par* A *seul ; & par* C, *dans un tems qui est plus grand de 5 heures que le tems par* B. *On demande en combien de tems le tonneau se videra par chacune de ces ouvertures séparément ?*

La vitesse des écoulements est supposée uniforme, & toujours la même dans tous les cas.

Représentons par T la totalité de la liqueur contenue dans le tonneau ; & nommons x le nombre d'heures que le tonneau mettra à se vuider par l'orifice A seul. Le tems par B seul sera $\frac{3}{4}x$, & le tems par C seul sera $\frac{3}{4}x+5$. Or, il est clair qu'en divisant T par chacun de ces tems, les quotients exprimeront les quantités de liqueur qui sortiroient, pendant 1 heure, par chacune des trois ouvertures proposées. Donc la quantité de liqueur qui sort, pendant 1 heure, par ces trois ouvertures à-la-fois, est $\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}$; & la quantité qui sort, pendant 6 heures, par ces trois mêmes ouvertures, est $6\left(\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}\right)$. Or, par hypothèse cette dernière quantité est T. Ainsi on a l'équation, $6\left(\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}\right)=T$, ou bien, (en divisant tout par T), $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x+5}\right)=1$, ou (en observant que $\frac{1}{x}=\frac{3}{3x}$;

que $\frac{1}{\frac{3}{4}x} = \frac{4}{3x}$; que $\frac{1}{\frac{3}{4}x+5} = \frac{4}{3x+20}$);

$$6\left(\frac{7}{3x} + \frac{4}{3x+20}\right) = 1.$$

Faisant disparoître les fractions, & réduisant, on trouvera, $x^2 - \frac{46}{3}x = \frac{840}{9}$.

Ajoutant de part & d'autre le quarré de $\frac{23}{3}$, on aura $x^2 - \frac{46}{3}x + \frac{529}{9} = \frac{1369}{9}$.

Tirant la racine quarrée de part & d'autre, on aura $x - \frac{23}{3} = \pm \frac{37}{3}$, c'est-à-dire, $x = 20$, ou $x = -\frac{14}{3}$.

Si on prend la première valeur de x, le tems par B, qui est $\frac{3}{4}x$, sera 15, & le tems par C, qui est $\frac{3}{4}x+5$, sera 20. Ainsi les trois tems cherchés seront 20 heures, 15 heures, 20 heures.

Si on employe la seconde valeur $x = -\frac{14}{3}$, le tems par B sera $-\frac{7}{2}$, & le tems par C, $+\frac{3}{2}$. Alors les deux premiers tems étant négatifs, ils doivent être pris dans un sens contraire à celui qui leur est attribué par l'énoncé du problême. Ainsi, au lieu de supposer que pendant ces deux tems, le tonneau *perd* de l'eau, il faut supposer qu'il en *reçoit*. La conséquence qu'on doit tirer de cette solution, est que si le tonneau se vuide en 6 heures, en recevant de l'eau par les deux ouvertures A & B, tandis qu'il en perd par l'ouverture C; il s'emplira, en $\frac{14}{3}$ d'heure par l'ouverture A seule ; il s'emplira pareillement, en $\frac{7}{2}$ d'heure par l'ouverture B; & il se désemplira au contraire, en $\frac{3}{2}$ d'heure, par l'ouverture *C* seule. C. Q. F. T.

PROBLEME IV.

209. *TROUVER, sur la ligne qui joint deux bougies, le point où elles éclairent également ?*

Il eſt démontré en Optique, & nous ſuppoſons ici cette démonſtration, que les clartés répandues par un corps lumineux, à différentes diſtances de ce corps, ſont entr'elles comme les quarrés inverſes de ces diſtances ; c'eſt-à-dire, que le même corps éclaire *quatre* fois moins, lorſqu'on s'en éloigne *deux* fois davantage ; *neuf* fois moins, lorſqu'on s'en éloigne *trois* fois davantage ; &c. Ainſi, en général, ſi à une diſtance donnée a, la clarté eſt c ; à une autre diſtance quelconque x, la clarté ſera le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers ſont x^2, a^2, c ; & par conſéquent cette ſeconde clarté aura pour expreſſion $\frac{ca^2}{x^2}$.

Cela poſé, je nomme b la diſtance des deux bougies, x la diſtance de l'une d'elles au point cherché ; & par conſéquent $b-x$ la diſtance de l'autre au même point. De plus, je repréſente par c la clarté que la première bougie répand ſur un plan ou un tableau qui en eſt éloigné de la quantité a, & par d la clarté que la ſeconde bougie répand ſur le même tableau qui en eſt éloigné de la même quantité a. Il eſt évident, par le principe d'Optique, que je viens de citer, qu'à la diſtance x, la clarté de la première bougie ſera $\frac{ca^2}{x^2}$; & qu'à la diſtance $b-x$, la clarté de la ſeconde bougie ſera $\frac{da^2}{(b-x)^2}$. Or, ſuivant les conditions du problême, ces deux clartés doivent être égales entr'elles. On aura donc l'équation, $\frac{ca^2}{x^2}=\frac{da^2}{(b-x)^2}$, ou bien, en effectuant le quarré indiqué $(b-x)^2$, faiſant diſparoître les fractions, & ordonnant par rapport à x, $(c-d)x^2-2bcx=-cb^2$, ou bien encore, $x^2-\frac{2bc}{c-d}x=-\frac{cb^2}{c-d}$.

Ajoutons de part & d'autre le quarré de $\frac{bc}{c-d}$, moitié du multiplicateur ou du coéfficient de x ; nous aurons $x^2-\frac{2bc}{c-d}x+\frac{b^2c^2}{(c-d)^2}=\frac{b^2c^2}{(c-d)^2}-\frac{cb^2}{c-d}$, ou bien, en réduiſant tout le ſecond membre au même dénominateur, $x^2-\frac{2bc}{c-d}x+\frac{b^2c^2}{(c-d)^2}=\frac{b^2cd}{(c-d)^2}$.

Tirons la racine quarrée de part & d'autre ; nous aurons $x-\frac{bc}{c-d}=\pm\frac{b\sqrt{cd}}{c-d}$.

Donc, $x=\frac{bc\pm b\sqrt{cd}}{c-d}$, & $b-x=-\frac{b(d\pm\sqrt{cd})}{c-d}$. C. Q. F. T.

Nous allons développer en détail cette ſolution générale, dans les Corollaires ſuivants.

COROLLAIRES.

210. I. EN premier lieu, ſoit $c > d$, & par conſéquent $c > \sqrt{cd}$, $d < \sqrt{cd}$. La première valeur de x, c'eſt-à-dire, $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}$, qui eſt évidemment une quantité poſitive, fait voir que le point demandé tombe au-delà de la ſeconde bougie; car on a $c + \sqrt{cd} > c - d$, & par conſéquent x ou $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d} > b$. La valeur de $b - x$, qui repond à ce cas, eſt $-\frac{b(d+\sqrt{cd})}{c-d}$, quantité négative; ce qui montre également que le point demandé eſt placé au-delà de la ſeconde bougie, puiſque cette quantité doit être priſe dans un ſens contraire à celui qu'on lui a attribué en établiſſant l'équation fondamentale du problême.

La ſeconde valeur de x, c'eſt-à dire, $\frac{b(c-\sqrt{cd})}{c-d}$, eſt encore poſitive; mais alors on a $\frac{b(c-\sqrt{cd})}{c-d} < b$, & par conſéquent le point demandé tombe entre les deux bougies. La valeur de $b - x$, qui répond à ce cas, eſt $\frac{b(\sqrt{cd}-d)}{c-d}$ quantité poſitive, comme cela doit être.

On voit, par ce détail, qu'en ſuppoſant $c > d$, le problême a deux ſolutions, & que le point demandé peut être placé au-delà de la bougie la plus foible, ou entre les deux bougies.

Suppoſons, pour appliquer ces formules à un exemple, $\frac{c}{d} = 4$, ou $c = 4d$, $b = 30$ pieds. On trouvera, pour première ſolution, $x = 60$ pieds, $b - x = -30$ pieds; & pour ſeconde ſolution, $x = 20$ pieds, $b - x = 10$ pieds.

II. En ſecond lieu, ſoit $c < d$, & par conſéquent $c < \sqrt{cd}$, $d > \sqrt{cd}$. On trouvera, $x = -\frac{b(c \pm \sqrt{cd})}{d - c}$, $b - x = \frac{b(d \pm \sqrt{cd})}{d - c}$, valeurs qui donneront deux ſolutions pareilles à celle du cas précédent.

III. Enfin ſoit $c = d$. Alors nos formules deviendront, $x = \frac{b(c \pm c)}{0}$, $b - x = -\frac{b(d \pm d)}{0}$.

Chacune des deux premières valeurs eſt infinie. Car une quantité finie, telle que $2c$ ou $2d$, étant diviſée par 0, donne un quotient infini; puiſqu'un diviſeur 0, ou infiniment petit, eſt contenu une infinité de fois dans un dividende fini. Le point demandé eſt donc alors infiniment éloigné de chaque bougie. Et comme la diſtance des deux bougies eſt finie, & peut par conſéquent être regardée comme nulle par rapport à la diſtance dont on vient de parler, il s'enſuit que le point également éclairé par les deux bougies peut être cenſé placé à la même diſtance de chacune d'elles, diſtance qui eſt infinie.

Si l'on employe les deux ſecondes valeurs, on aura $x=\frac{0}{0}$, $b-x=\frac{0}{0}$.

Ces expreſſions ſont indéterminées ; & elles ne donnent pas, *à priori*, la valeur du quotient $\frac{0}{0}$. Mais on la trouvera en réſolvant directement le problême. Pour cela reprenons les deux expreſſions générales des clartés répandues par les deux bougies, aux diſtances x & $b-x$. Ces expreſſions ſont $\frac{ca^2}{x^2}$, $\frac{da^2}{(b-x)^2}$, ou bien, à cauſe de $c=d$; $\frac{ca^2}{x^2}$, $\frac{ca^2}{(b-x)^2}$; & on a l'équation, $\frac{ca^2}{x^2}=\frac{ca^2}{(b-x)^2}$, ou bien, $(b-x)^2=x^2$, ou bien, $b-x=x$; ce qui donne $x=\frac{b}{2}$, & fait voir que le point cherché eſt alors placé entre les deux bougies, à égales diſtances de l'une & de l'autre. Il eſt évident, en effet, ſans aucun calcul, que le milieu de la ligne qui joint deux bougies égales eſt également éclairé par chacune d'elles.

PROBLEME V.

211. *CONNOISSANT la ſomme de deux nombres, & celle de leurs quarrés ; trouver ces deux nombres ?*

Soient x & y les deux nombres cherchés, a leur ſomme, bb la ſomme de leurs quarrés. On aura les deux équations, $x+y=a$, $xx+yy=bb$.

La première donne $y=a-x$, & $yy=aa-2ax+xx$. Subſtituant cette valeur de yy dans la ſeconde, on aura $xx+aa-2ax+xx=bb$, ou bien $2xx-2ax=bb-aa$, ou bien, $x^2-ax=\frac{bb-aa}{2}$; d'où l'on tire, $x=\frac{a\pm\sqrt{[2bb-aa]}}{2}$; & (à cauſe de $y=a-x$), $y=\frac{a\mp\sqrt{[2bb-aa]}}{2}$. C. Q. F. T.

Suppoſons, par exemple, $a=7$, $b=5$. On aura $x=\frac{7\pm 1}{2}$, $y=\frac{7\mp 1}{2}$; c'eſt-à-dire, $x=4$, $y=3$, ou bien $x=3$, $y=4$.

Pour ſecond exemple, ſuppoſons $a=20$, $b=12$, ou $bb=144$. On aura $x=10\pm\sqrt{-28}$, $y=10\mp\sqrt{-28}$. Or, la partie radicale $\pm\sqrt{-28}$ eſt imaginaire, puiſqu'il eſt impoſſible (107 & 111) qu'un quarré ſoit affecté du ſigne —, & que par conſéquent la racine quarrée d'une quantité négative eſt un être de raiſon. Cette partie radicale, jointe avec le nombre 10, rend le tout imaginaire. Ainſi, les deux valeurs de x ou de y ſont imaginaires. Il eſt donc impoſſible, ou il eſt abſurde de ſuppoſer que la ſomme de deux nombres faſſe 20, & la ſomme de leurs quarrés 144. Cette abſurdité, qui ne ſaute pas aux yeux, eſt miſe en évidence par le calcul; & c'eſt-là un avantage précieux de l'Algébre. Elle ne ſe borne pas à donner la ſolution d'une queſtion, dans les cas où cette queſtion eſt poſſible; elle fait encore connoître les cas où une queſtion eſt impoſſible; car alors la traduction algébrique du problême mene à des réſultats abſurdes.

On demandera peut-être comment, dans le présent exemple, la valeur de x étant imaginaire, le second membre de l'équation $xx - 20x = -128$, qu'on trouve alors, eſt néanmoins une quantité réelle ?

Cela arrive, parce que les parties imaginaires qui entrent dans le premier membre, ſe détruiſent mutuellement par l'oppoſition des ſignes qui les affectent. En effet, puiſque $x = 10 \pm \sqrt{-28}$, on aura $x^2 = 100 - 28 \pm 20\sqrt{-28}$, $-20x = -200 \mp 20\sqrt{-28}$; & par conſéquent $x^2 - 20x = 100 - 28 - 200 \pm 20\sqrt{-28} \mp 20\sqrt{-28}$; ce qui ſe réduit à -128. La même remarque a lieu pour y.

On voit en même-tems par-là que les racines imaginaires vont toujours *deux à deux*. Car la racine quarrée indiquée de -28 eſt également $\pm\sqrt{-28}$; le double ſigne indique deux racines.

PROBLEME VI.

212. *PARMI les cinq choſes que l'on peut conſidérer dans une progreſſion arithmétique ; trouver le nombre des termes & l'un ou l'autre extrême, lorſqu'on connoît les trois autres choſes ?*

Reprenons les dénominations de l'article 173. On aura toujours les deux équations générales, $u = a + d(n-1)$, $s = (a+u)\frac{n}{2}$ entre les cinq quantités a, d, n, u, s qu'on peut conſidérer dans une progreſſion arithmétique. Or ſuppoſons que tout le reſte étant connu, il faille trouver n & a.

La première équation donne $a = u - d(n-1)$. Mettant cette valeur dans la ſeconde, on aura $s = \left(2u - d(n-1)\right)\frac{n}{2}$, ou bien, $n^2 - \frac{(d+2u)n}{d} = -\frac{2s}{d}$; d'où l'on tire, $n = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{d+2u \pm \sqrt{[(d+2u)^2 - 8ds]}}{2d}$, & par conſéquent, $a = \frac{d \mp \sqrt{[(d+2u)^2 - 8ds]}}{2}$.

La quantité radicale étant ſuppoſée réelle, ou $(d+2u)^2 > 8ds$, les deux valeurs de n ſeront poſitives & inégales; mais la première valeur de a ſera négative, ſi l'on a $d < \sqrt{[(d+2u)^2 - 8ds]}$; & la ſeconde, toujours poſitive. Lorſque la quantité radicale s'évanouit, n & a n'ont chacun qu'une ſeule valeur.

Suppoſons, par exemple, $d = 2$, $u = 14$, $s = 54$. En prenant les premières valeurs de n & de a, on trouvera $n = 9$, $a = -2$; en ſorte que la progreſſion eſt alors $\div -2.0.2.4.6.8.10.12.14$. Et ſi l'on prend les deux ſecondes valeurs de n & de a, on trouvera $n = 6$, $a = 4$; & la progreſſion ſera $\div 4.6.8.10.12.14$.

On trouveroit ſemblablement n & u, tout le reſte étant connu. C. Q. F. T.

PROBLEME VII.

213. *CONNOISSANT la ſomme de trois nombres en progreſſion géométrique, & la ſomme de leurs quarrés; trouver ces trois nombres?*

Soient

Soient x, y, z les trois nombres cherchés ; a leur somme ; bb celle de leurs quarrés. On aura, par les conditions du problême, les trois équations suivantes, dont la troisième est fondée sur la proportion continue $\div x : y . z$, qui a lieu entre les trois nombres ; $x+y+z=a$, $xx+yy+zz=bb$, $xz=yy$.

Tirons de la première, $z=a-x-y$, & mettons cette valeur dans les deux autres ; nous trouverons ces deux-ci, $2xx+2yy+aa-2ax-2ay+2xy=bb$, $ax-xx-xy=yy$, qui ne contiennent plus que les deux inconnues x & y. Je tire de chacune de ces deux équations une valeur de x. La première me donne, $xx-(a-y)x=\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2}$, & par conséquent $x=\frac{a-y}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2}+\frac{(a-y)^2}{4}\right]}$. La seconde me donne, $xx-(a-y)x=-yy$, & par conséquent $x=\frac{a-y}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{(a-y)^2}{4}-yy\right]}$. Or, $x=x$. Ainsi on aura, en effaçant la quantité $\frac{a-y}{2}$, qui est la même dans les deux membres, $\pm\sqrt{\left[\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2}+\frac{(a-y)^2}{4}\right]}=\pm\sqrt{\left[\frac{(a-y)^2}{4}-yy\right]}$.

Elevant chaque membre au quarré, faisant les réductions, & dégageant y, on trouvera, $y=\frac{aa-bb}{2a}$.

Mettons cette valeur de y dans l'équation $x = \frac{a-y}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(a-y)^2}{4} - y^2\right]}$; nous trouverons, $x = \frac{aa+bb \pm \sqrt{[10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4]}}{4a}$.

Enfin, substituons les valeurs de x & de y dans l'équation $z = a - x - y$; & nous aurons, $z = \frac{aa+bb \mp \sqrt{[10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4]}}{4a}$. C. Q. F. T.

On auroit pû parvenir aux mêmes valeurs de y, x, z d'une manière plus simple. Car, si après avoir trouvé les deux équations,

$$2xx + 2yy + aa - 2ax - 2ay + 2xy = bb,$$
$$ax - xx - xy = yy,$$

on multiplie la seconde par 2, qu'on l'ajoute avec la première, & qu'on efface les termes qui se détruisent par l'opposition des signes, on trouvera, $y = \frac{aa-bb}{2a}$. Le reste du calcul s'achève comme tout-à-l'heure.

214. Je finis cette théorie des équations déterminées du second degré, par une observation essentielle, qui s'y rapporte ; c'est qu'il y a dans les degrés supérieurs au second, une classe très-étendue d'équations qui se résolvent par la méthode du second degré. Ces équations peuvent être comprises sous la forme générale, $ax^{2m} + bx^m = c$, a, b, c étant des quantités connues, x l'inconnue, m un nombre entier positif. L'exposant de x dans le premier terme est double, comme on voit, de l'exposant de la même lettre dans le second terme.

En effet, si l'on suppose $x_m = z$, (z étant une nouvelle inconnue), l'équation précédente se transformera en celle-ci, $az^2 + bz = c$, ou bien, $z^2 + \frac{b}{a}z = \frac{c}{a}$, équation du second degré, de laquelle on tire, $z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left[\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right]}$. L'inconnue z étant ainsi dégagée, on aura aussi x, en tirant la racine m de z, puisque $x = z^{\frac{1}{m}}$.

Supposons, par exemple, $m = 2$, ou qu'on ait l'équation du quatrième degré, $ax^4 + bx^2 = c$; on fera $xx = z$, & on aura, z ou $xx = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left[\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right]}$. Tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $x = \pm \sqrt{\left[-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)}\right]}$.

Pour second exemple, soit $m = 3$, ou qu'on ait l'équation du sixième degré, $ax^6 + bx^3 = c$; on fera $x^3 = z$, & on aura z ou $x^3 = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left[\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right]}$. Tirant la racine cube de chaque membre, on aura, $x = \sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)}\right]}$.

SECTION II.

Des Problêmes indéterminés du ſecond degré.

215. Le ſujet dont il eſt ici queſtion, offre un vaſte champ de problêmes curieux & utiles. Nous ne le parcourrons pas dans toute ſon étendue. Cela nous meneroit trop loin. Nous nous contenterons de donner les principes de cette branche de l'analyſe, & nous les éclaircirons par des applications à des exemples. Les Auteurs les plus célèbres, qui ont écrit ſur cette matière, ſont Diophante, qui a inventé le premier ces ſortes de problêmes, Meziriac, ſon Commentateur, Fermat, le P. Preſtet, Ozanam, Saunderſon, Maclaurin, M. Euler, & M. de la Grange.

Voyez en particulier le ſecond tome de l'Algébre de M. Euler, & les excellentes additions que M. de la Grange y a faites.

PROBLEME I.

216. *Trouver deux nombres dont la ſomme ſoit à celle de leurs quarrés, en raiſon conſtante de* m *à* n?

Soient x & y les deux nombres cherchés. On aura la proportion $x+y : xx+yy :: m : n$, & par conſéquent l'équation, $nx+ny=mxx+myy$, qui eſt indéterminée du ſecond degré. Si l'on ſe donne l'une des inconnues, on n'aura plus beſoin, pour trouver l'autre, que de réſoudre une équation déterminée. C. Q. F. T.

217. LES problêmes de cette classe n'ont aucune difficulté, lorsque les quantités cherchées peuvent être positives ou négatives, entières ou rompues, rationnelles ou radicales. Ainsi, par exemple, dans le problême précédent, si l'on suppose $\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$, $y=1$, on aura $xx-4x=3$; d'où l'on tire $x=2\pm\sqrt{7}$. Si l'on suppose $\frac{m}{n}=\frac{1}{8}$, $y=5$, on trouvera $x=4\pm\sqrt{31}$. Ainsi des autres suppositions. Mais si on demandoit que les nombres x & y fussent tous les deux rationnels, c'est-à-dire, entiers ou fractionnaires sans radicaux, on auroit besoin de nouvelles régles pour résoudre la question d'une manière certaine, & non par le simple tâtonnement. Ces régles consistent en général à exprimer les inconnues du problême par le moyen des quantités données qu'il contient, & d'une nouvelle inconnue qu'il faut choisir tellement que dans les équations qu'on forme ainsi, les inconnues qu'on cherche ne soient élevées qu'à la première puissance, & qu'il ne s'agisse par conséquent, pour les déterminer, que de résoudre une équation du premier degré. Rendons cela clair par des exemples.

PROBLEME II.

218. *RÉSOUDRE le Problême précédent en nombres rationnels?*

Je prens une nouvelle inconnue z, telle que l'on ait $y=zx$; & ce qui me dirige dans ce choix, c'est qu'en mettant cette valeur de y dans l'équation $nx + ny = mxx + myy$, du problême, je pourrai divifer tous les termes par x ; & par-là je n'aurai plus que des équations du premier degré à réfoudre. En effet, la fubftitution dont je viens de parler, donne $nx + nxz = mxx + mx^2z^2$, ou bien, en divifant tout par x, $n + nz = mx + mxz^2$; d'où l'on tire $x = \frac{n+nz}{m+mz^2}$;

& (à caufe de $y = xz$), $y = \frac{nz + nz^2}{m + mz^2}$.

Ces valeurs de x & de y font voir qu'en prenant pour z tel nombre rationnel qu'on voudra, x & y feront auffi des nombres rationnels. C. Q. F. T.

Suppofons, par exemple, $m = 1$, $n = 2$, $z = 1$; on trouvera $x = 2$, $y = 2$.

Soient $m = 1$, $n = 4$, $z = 2$; on trouvera $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{24}{5}$.

Soient $m = 1$, $n = 3$, $z = 4$; on trouvera $x = \frac{15}{17}$, $y = \frac{60}{17}$.

PROBLEME III.

219. *PARTAGER un quarré donné en deux autres quarrés ?*

Soient aa le quarré donné, x & y les racines des deux quarrés cherchés. On aura l'équation, $xx + yy = aa$. Je prens une nouvelle inconnue z, telle que l'on ait $y = a - zx$, ou $y = zx - a$, afin qu'élevant chaque membre au quarré, & puis fubftituant pour yy fa valeur dans l'équation fondamentale, les termes qui contiennent aa dans chaque membre, se détruisent mutuellement, & qu'en conséquence l'équation s'abaisse au premier degré. Effectivement, par la substitution de $aa - 2azx + z^2x^2$ à la place de y^2, on a $xx + aa - 2azx + z^2x^2 = aa$; & par conséquent en effaçant aa de part & d'autre, $xx - 2azx + z^2x^2 = 0$, ou encore, $x(x - 2az + z^2x) = 0$.

De-là on tire, 1°. $x = 0$, & conséquemment $y = a$; cette solution satisfait au problême. 2°. $x = \frac{2az}{1+z^2}$; donc si l'on a pris $y = a - zx$, on aura $y = \frac{a(1-z^2)}{1+z^2}$; & si l'on a pris $y = zx - a$, on aura $y = \frac{a(z^2-1)}{1+z^2}$. Cette solution donne, pour x & y, des nombres rationnels, & c'est véritablement celle qu'on cherchoit. C.Q.F.T.

Soit, par exemple, $aa = 25$, ou $a = 5$, & prenons $z = 3$: on trouvera d'abord $x = 3$; & mettant pour z & a leurs valeurs dans l'équation $y = \frac{a(z^2-1)}{1+z^2}$, on aura $y = 4$.

Soient $a = 6$, $z = 2$: on trouvera $x = \frac{24}{5}$, $y = \frac{18}{5}$;

PROBLEME IV.

220. *TROUVER deux quarrés dont la différence soit égale à un quarré donné?*

Soient aa le quarré donné, x & y les racines des quarrés cherchés. On aura (en supposant $y > x$), $yy - xx = aa$. Je fais $y = a + zx$, & par conséquent

$yy = aa + 2az x + z^2 x^2$. Ainsi l'équation précédente devient, en effaçant ce qui se détruit, $2azx + z^2x^2 - x^2 = 0$, ou bien, $x(2az + z^2x - x) = 0$.

D'où l'on tire, 1°. $x = 0$, $y = a$. 2°. $x = \frac{2az}{1 - z^2}$, $y = \frac{a(1 + z^2)}{1 - z^2}$. On voit qu'il faut prendre pour z des nombres moindres que 1, si l'on veut que les nombres x & y soient positifs. C. Q. F. T.

Soit $a = 4$, & prenons $z = \frac{1}{3}$: on trouvera $x = 3$, $y = 5$.

PROBLEME V.

221. *Trouver deux nombres tels qu'en ajoutant le quarré de l'un avec le produit du quarré de l'autre, par un nombre donné* b, *la somme soit égale à un quarré donné* aa?

Soient x & y les deux nombres cherchés. On aura l'équation, $xx + by^2 = aa$. Je fais $x = a - zy$, ou $x = zy - a$; & par conséquent $xx = aa - 2azy + z^2y^2$. Mettant cette valeur dans l'équation précédente, & effaçant ce qui se détruit, on aura, $y(z^2y - 2az + by) = 0$. D'où l'on tire, 1°. $y = 0$, & conséquemment $x = a$. 2°. $y = \frac{2az}{b + z^2}$, & conséquemment $x = \pm \frac{a(b - z^2)}{b + z^2}$. En prenant pour z tel nombre rationnel qu'on voudra, on aura aussi pour x & y des nombres rationnels. C. Q. F. T.

Si l'on prend b négativement, les formules précédentes donneront la solution du problême où l'on demanderoit deux quarrés tels qu'en retranchant de l'un le produit de l'autre par un nombre donné, le reste fût égal à un quarré donné.

PROBLEME VI.

222. *TROUVER deux nombres tels qu'en retranchant du quarré de l'un, le produit du quarré de l'autre par le quarré d'un nombre donné* b, *le reste soit égal à un nombre donné* a ?

Soient x & y les deux nombres cherchés. On aura l'équation, $xx - b^2y^2 = a$. Je fais $x = z - by$, & par conséquent $xx = zz - 2bzy + b^2y^2$. Mettant cette valeur dans l'équation précédente, & effaçant ce qui se détruit, on aura, $zz - 2bzy = a$. Donc $y = \frac{zz - a}{2bz}$, & $x = \frac{zz + a}{2z}$. C. Q. F. T.

PROBLEME VII.

223. *Partager la somme de deux quarrés en deux autres quarrés ?*

Soient aa & bb les deux quarrés donnés, xx & yy les deux quarrés cherchés. On aura, $xx + yy = aa + bb$. Je prens deux nouveaux nombres z & u, tels que l'on ait $x = a - z$, $y = zu - b$, & par conséquent $xx = aa - 2az + zz$, $yy = z^2u^2 - 2bzu + bb$. Mettant ces valeurs de xx & de yy dans l'équation fondamentale, & effaçant ce qui se détruit, on aura,

$-2az + zz + z^2u^2 - 2bzu = 0.$

D'où l'on tire, 1°. $z = 0$; ce qui donneroit $x = a$,

$y = -b$. 2°. $z = \frac{2a + 2bu}{1 + uu}$. Donc $x = \frac{auu - a - 2bu}{1 + uu}$,

& $y = \frac{2au + bu^2 - b}{1 + uu}$. Donc, en prenant pour u un nombre rationnel quelconque, on aura auſſi pour x & y des nombres rationnels. C. Q. F. T.

PROBLEME VIII.

224. *Etant donnée l'équation générale du ſecond degré* $at^2 + btx + cx^2 + dt + ex + f = 0$, *dans laquelle* a, b, c, d, e, f, *ſont des entiers donnés*, t & x, *des nombres inconnus : on propoſe de ſatisfaire à cette équation en prenant pour* t *&* x *des nombres rationnels?*

Je tire de l'équation propoſée la valeur de l'une des inconnues, de t par exemple ; & j'ai $t = - \ldots \frac{(bx + d) \pm \sqrt{[(bx + d)^2 - 4a(cx^2 + ex + f)]}}{2a}$.

Il eſt évident que x étant ſuppoſé un nombre rationnel, t en ſera auſſi un, ſi l'on parvient à faire en ſorte que la quantité affectée du ſigne radical devienne un quarré parfait, dont on puiſſe par conſéquent tirer la racine quarrée. Or cette quantité développée eſt $b^2x^2 + 2bdx + dd - 4acx^2 - 4aex - 4af$. Faiſons, pour abréger, les quantités données $b^2 - 4ac = g$, $2bd - 4ae = h$, $dd - 4af = k$. Nous aurons la transformée $t = - \frac{(bx + d) \pm \sqrt{[gx^2 + hx + k]}}{2a}$; & la queſtion ſera de ſatisfaire à l'équation $yy = gx^2 + hx + k$, en prenant pour x & y des nombres rationnels.

Il peut arriver que les quantités g, h, k ayent entr'elles des relations telles qu'il ſoit impoſſible qu'en prenant pour x un nombre rationnel, y en ſoit auſſi un ; mais voici du moins un grand nombre de cas où cette condition peut être remplie.

1°. Soit $k=0$, & par conſéquent $yy=gx^2+hx$. En faiſant $gx^2+hx=x^2z^2$, on aura $x=\frac{h}{z^2-g}$ nombre rationnel, & $y=\frac{hz}{z^2-g}$ nombre également rationnel. On pourra toujours prendre le nombre arbitraire z, tel que x & y ſoient des nombres poſitifs.

2°. Soit g un quarré parfait que je nomme mm, h & k étant tout ce qu'on voudra : on aura $yy=mmxx+hx+k$. Je fais $\sqrt{[mmxx+hx+k]}=mx+z$; d'où l'on tire $x=\frac{zz-k}{h-2mz}$, nombre rationnel, & $y=\frac{m(zz-k)}{h-2mz}+z=\frac{hz-mzz-mk}{h-2mz}$, nombre également rationnel.

3°. Soit k un quarré parfait que je nomme nn, g & h étant tout ce qu'on voudra. On aura $yy=gx^2+hx+nn$. Je fais $\sqrt{[gx^2+hx+nn]}=xz+n$; d'où l'on tire $x=\frac{h-2nz}{z^2-g}$, nombre rationnel, & $y=\frac{hz-gn-nzz}{z^2-g}$ nombre également rationnel.

4°. Les valeurs de x & de y ſont aſſignables en nombres rationnels, lorſque h^2-4kg eſt un quarré parfait. En effet, cherchons en général les deux facteurs de la quantité gx^2+hx+k, en la regardant comme le premier membre d'une équation du second degré qui a zero pour second membre. Nous trouverons $x = -\frac{h}{2g} \pm \frac{\sqrt{(h^2 - 4kg)}}{2g}$; & par conséquent

$$gx^2 + hx + k = \left(gx + \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{(h^2 - 4kg)}}{2}\right) \times \left(x + \frac{h}{2g} + \frac{\sqrt{(h^2 - 4kg)}}{2g}\right),$$

comme cela est d'ailleurs aisé à vérifier par la multiplication. D'où l'on voit que $h^2 - 4kg$ étant supposé un quarré que je nomme pp, & faisant pour abréger $\frac{h}{2g} - \frac{p}{2g} = q$, $\frac{h}{2g} + \frac{p}{2g} = r$, on aura $gx^2 + hx + k = (gx + gq) \times (x + r)$, expression dans laquelle il n'entre que des nombres rationnels. Maintenant, je fais $\sqrt{(gx^2 + hx + k)}$, ou $\sqrt{[(gx + gq).(x + r)]} = z(gx + gq)$; ce qui donne $(gx + gq).(x + r) = z^2(gx + gq)^2$, ou $x + r = z^2(gx + gq)$, & par conséquent $x = \frac{zzgq - r}{1 - gzz}$, nombre rationnel. Donc $y = z(gx + gq) = \ldots\ldots$ $\frac{gqz - grz}{1 - gzz}$, nombre également rationnel.

5°. On peut assigner x & y en nombres rationnels, lorsque la quantité $gx^2 + hx + k$ peut être regardée comme la somme d'un quarré & d'un produit composé de facteurs rationnels; c'est-à-dire lorsqu'elle est réductible à cette forme $(mx + l)^2 + (\alpha x + \beta).(\delta x + \varepsilon)$. Car alors, en faisant $\sqrt{(gx^2 + hx + k)}$ ou $\sqrt{[(mx + l)^2 + (\alpha x + \beta).(\delta x + \varepsilon)]} = mx + l$

$+z(\alpha x+\beta)$, on a $(mx+l)^2+(\alpha x+\beta).(\delta x+\varepsilon)=(mx+l)^2+2(mx+l)z(\alpha x+\beta)+z^2(\alpha x+\beta)^2$; d'où l'on tire $x=\frac{2lz+\beta zz-\varepsilon}{\delta-2mz-\alpha zz}$ nombre rationnel. On aura également pour y un nombre rationnel, puiſque $y=mx+l+z(\alpha x+\beta)$. C. Q. F. T.

Nos Lecteurs s'exerceront à appliquer ces formules générales à des exemples particuliers.

PROBLEME IX.

225. *Un homme achete deux ſortes de vins, l'un du prix* a *par pinte, l'autre du prix* b *; il paye pour le tout un prix exprimé par un quarré inconnu, auquel ajoutant un nombre donné* d*, la ſomme eſt un nombre quarré dont la racine eſt le nombre total des pintes : on demande combien il y a de pintes du prix* a*, & combien du prix* b *?*

Nommons t le nombre total des pintes, u le nombre des pintes du prix b, & par conſéquent $t-u$ celui des pintes du prix a. Il eſt clair que le prix des pintes dont chacune vaut b, eſt bu ; & celui des pintes dont chacune vaut a, eſt $at-au$. Soit xx le quarré inconnu qui exprime le prix total. On aura d'abord l'équation, $xx=bu+at-au$.

Mais d'un autre côté, on a $\sqrt{[xx+d]}=t$, ou bien, $xx=tt-d$.

Donc, en égalant entr'elles les deux valeurs de xx, on aura, $bu+at-au=tt-d$, & par conſéquent (en ſuppoſant $a > b$), $u = \frac{at - (tt - d)}{a - b}$, $t - u = \frac{tt - d - bt}{a - b}$.

Comme $tt - d$ doit être un nombre quarré, j'exprime ſa racine par $z - t$, ou par $t - z$; ce qui me donne $tt - 2tz + zz = tt - d$, & par conſéquent $t = \frac{zz + d}{2z}$. Ainſi, en prenant pour z un nombre rationnel, on aura auſſi pour t un nombre rationnel. Mais il faut obſerver que ce choix doit être fait de manière que u & $t - u$ ſoient des nombres poſitifs. La première condition exige qu'on ait $\frac{at - (tt - d)}{a - b} > 0$, ou, en multipliant chaque membre par $a - b$, $at - (tt - d) > 0$, ou $tt - d - at < 0$, ou $tt - at < d$, ou $tt - at + \frac{aa}{4} < d + \frac{aa}{4}$, ou en tirant la racine quarrée de part & d'autre, $t - \frac{a}{2} < \sqrt{\left[d + \frac{aa}{4}\right]}$, ou enfin, $t < \frac{a}{2} + \sqrt{\left[d + \frac{aa}{4}\right]}$.

La ſeconde condition exige qu'on ait $\frac{tt - d - bt}{a - b} > 0$, ou $tt - d - bt > 0$, ou $tt - bt > d$, ou $tt - bt + \frac{bb}{4} > d + \frac{bb}{4}$, ou, en tirant la racine quarrée de part & d'autre, $t - \frac{b}{2} > \sqrt{\left[d + \frac{bb}{4}\right]}$, ou enfin, $t > \frac{b}{2} + \sqrt{\left[d + \frac{bb}{4}\right]}$.

Ainſi, il faut prendre t, ou $\frac{zz+d}{2z}$, entre les deux limites qu'on vient d'aſſigner. Ayant t, on ſubſtituera ſa valeur dans les expreſſions de u & de $t-u$; & on aura les nombres de pinte des deux ſortes de vins. C. Q. F. T.

Suppoſons, par exemple, $a=8$, $b=5$, $d=60$. On trouvera que z eſt entre 22, 78 & 18, 90. Si l'on fait $z=20$, on aura $t=\frac{23}{2}$, $u=\frac{79}{12}$, $t-u=\frac{59}{12}$.

CHAPITRE X.

Des Equations du troiſième degré.

226. NOUS ne traiterons que des équations déterminées du troiſième degré. On peut propoſer, pour ce degré, des problêmes indéterminés, analogues à ceux que nous venons de réſoudre pour le ſecond. Mais cette théorie eſt encore peu avancée; & c'eſt pour cela que je me diſpenſe d'en parler.

227. TOUTES les équations déterminées du troiſième degré peuvent être repréſentées par la formule générale,

$$t^3+at^2+bt+c=0,$$

dans laquelle t eſt l'inconnue, a, b, c, des quantités données, réelles, positives ou négatives, qui peuvent être simples, ou composées d'autres quantités données.

228. SUPPOSONS d'abord que a & b soient zero. L'équation précédente deviendra $t^3+c=0$, ou $t^3=-c$. Tirant la racine cube de chaque membre, on aura $t=\sqrt[3]{-c}$. Cette formule contient la résolution des équations du troisième degré, qui manquent de second & de troisième terme.

229. IL semble, au premier coup d'œil, que l'équation $t^3=-c$, n'a que la racine qu'on vient de trouver. Mais elle en a encore deux autres. Car si l'on fait, pour abréger un peu les expressions, $c=m^3$, & par conséquent $\sqrt[3]{-c}=-m$; qu'ensuite on divise l'équation $t^3+m^3=0$, par $t+m$: on trouvera pour quotient l'équation du second degré, $tt-mt+m^2=0$, laquelle donne, $t=\frac{m}{2}\pm\sqrt{-\frac{3m^2}{4}}$.

Ces deux dernières valeurs de t sont imaginaires. L'équation $t^3+c=0$, donne donc pour t trois valeurs, dont une seule est réelle.

230. SOIT simplement $c=0$. La formule générale deviendra $t^3+at^2+bt=0$, ou bien $t(t^2+at+b)=0$. En sorte qu'elle pourra être regardée comme le produit de la quantité t^2+at+b par la racine $t=0$, ou comme le produit de la quantité t par l'équation du second degré t^2+at+

$=0.$

$b=0$. Or cette équation donne, $t=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{aa}{4}-b\right]}$.

Ces racines sont toutes les deux réelles, lorsque b est une quantité négative, & lorsque b étant une quantité positive, on a $\frac{aa}{4}>b$; ou toutes les deux imaginaires, lorsque b est une quantité positive, & qu'on a $\frac{aa}{4}<b$. Ces deux mêmes racines sont réelles, égales entr'elles, & représentées par $-\frac{1}{2}a$, lorsque b est positive, & qu'on a $\frac{aa}{4}=b$.

On voit par-là que l'équation proposée $t^3+at^2+bt=0$, a trois racines, dont l'une est zero, & les deux autres sont réelles ou imaginaires, comme nous venons de l'expliquer.

231. IL n'y a que les deux cas précédents qui puissent être résolus avec cette facilité. Voici maintenant la méthode pour résoudre l'équation $t^3+at^2+bt+c=0$, prise dans toute sa généralité, c'est-à-dire, en supposant qu'aucune des quantités a, b, c n'est zero. Mais auparavant, voyons si on ne peut pas transformer l'équation dont il s'agit en une autre qui ait un terme de moins, & qui étant par conséquent plus simple, doit être naturellement plus facile à traiter.

232. QU'ON prenne une nouvelle inconnue x, & une quantité indéterminée m, telles que l'on ait

$t = x + m$, & par conséquent $t^2 = x^2 + 2mx + m^2$; $t^3 = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3$. En ſubſtituant ces valeurs de t, t^2, t^3, dans notre équation, & ordonnant tout, par rapport à x; nous aurons la transformée,

$$x^3 \begin{matrix} +3m \\ +a \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} +3m^2 \\ +2am \\ +b \end{matrix} \right\} x \begin{matrix} +m^3 \\ +am^2 \\ +bm \\ +c \end{matrix} \right\} = 0.$$

Or, comme dans cette nouvelle équation la quantité m eſt arbitraire, il eſt clair que nous pouvons la prendre de maniere que l'un des trois derniers termes s'évanouiſſe. Si nous voulons faire évanouir le ſecond terme, nous aurons $(3m + a)x^2 = 0$, & comme x n'eſt pas zero, il s'enſuit que le facteur $3m + a = 0$; ce qui donne $m = -\frac{a}{3}$.

Si nous voulons faire évanouir le troiſième terme, nous aurons $(3m^2 + 2am + b)x = 0$, c'eſt-à-dire, $3m^2 + 2am + b = 0$. D'où l'on voit que pour déterminer m, il faut réſoudre une équation du ſecond degré.

Si nous voulions faire évanouir le quatrième terme nous aurions $m^3 + am^2 + bm + c = 0$. Ainſi, pour déterminer m, il faudroit réſoudre une équation du troiſième degré, qui a tous ſes termes; problême qui eſt de même nature que celui dont nous ſommes occupés.

Nous ne pouvons donc ici faire évanouir que le ſecond ou le troiſième terme. Faiſons évanouir le ſecond, c'eſt-à-dire, faiſons $m = -\frac{a}{3}$; car cette préparation eſt celle qui produit les calculs les plus ſimples : nous aurons la transformée,

$$x^3 \left. \begin{matrix} -\frac{a^2}{3} \\ +b \end{matrix} \right\} x + \left. \begin{matrix} \frac{2a^3}{27} \\ -\frac{ab}{3} \\ +c \end{matrix} \right\} = 0;$$

ou bien (en ſuppoſant, pour abréger les expreſſions, $-\frac{a^2}{3} + b = p$, $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = q$), $x^3 + px + q = 0$, équation qu'on apprendra à réſoudre dans un moment.

233. Nous prendrons auparavant occaſion d'obſerver que la même ſubſtitution de $x + m$ à la place de t, peut ſervir à faire diſparoître tel terme qu'on voudra d'une équation d'un degré quelconque.

En effet, ſi on a, par exemple, l'équation générale du quatrième degré $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$; en y ſubſtituant $x + m$ au lieu de t, on aura la transformée,

$$x^4 \left. \begin{matrix} +4m \\ +a \end{matrix} \right\} x^3 \left. \begin{matrix} +6m^2 \\ +3am \\ +b \end{matrix} \right\} x^2 \left. \begin{matrix} +4m^3 \\ +3am^2 \\ +2bm \\ +c \end{matrix} \right\} x \left. \begin{matrix} +m^4 \\ +am^3 \\ +bm^2 \\ +cm \\ +d \end{matrix} \right\} = 0;$$

dans laquelle faiſant $4m + a = 0$, ou $m = -\frac{a}{4}$;

on aura une équation du quatrième degré, qui n'aura point de second terme. Le troisième terme s'évanouira, en faisant $6m^2+3am+b=0$, c'est-à-dire, par la résolution d'une équation du second degré. Le quatrième s'évanouiroit, en faisant $4m^3+3am^2+2bm+c=0$, c'est à dire, par la resolution d'une équation du troisième degré. Le cinquième s'évanouiroit, en faisant $m^4+am^3+bm^2+cm+d=0$, c'est à-dire, par la résolution d'une équation du quatrième degré.

De même, dans une équation générale du cinquième degré $t^5+at^4+bt^3+ct^2+dt+e=0$, si l'on fait $t=x+m$, on aura la transformée,

$$x^5 \left.\begin{matrix}+5m\\+a\end{matrix}\right\} x^4 + \&c = 0,$$

dont le second terme s'évanouira par l'équation du premier degré $5m+a=0$, ou $m=-\frac{a}{5}$; le troisième s'évanouira par une équation du second degré; &c.

En général, qu'on ait une équation d'un degré quelconque n, représentée par $t^n+at^{n-1}+bt^{n-2}+\&c=0$; en faisant $t=x+m$, on aura une transformée dont le second terme s'évanouira par l'équation du premier degré $nm+a=0$, ou $m=-\frac{a}{n}$; les termes suivants s'évanouiront par des équations du second, du troisième, &c degrés.

234. JE reviens à l'équation $x^3+px+q=0$.

Il eſt évident que lorſque j'aurai trouvé la valeur de x, laquelle contiendra dans ſon expreſſion, les lettres p & q, j'aurai auſſi la valeur de t, exprimée en a, b, c; puiſqu'il ne faudra pour cela que mettre pour p ſa valeur $b - \frac{a^2}{3}$, pour q ſa valeur $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$; & enſuite retrancher de l'expreſſion de x, la quantité $\frac{a}{3}$, à cauſe de l'équation $t = x + m = x - \frac{a}{3}$. Si la valeur de x eſt réelle, celle de t le ſera auſſi : ſi la valeur de x eſt imaginaire, celle de t le ſera également, puiſqu'en retranchant d'une quantité imaginaire, une quantité réelle, on ne peut avoir qu'un reſte imaginaire. Le problême que nous avons à réſoudre conſiſte donc à trouver les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

235. AYANT écrit cette équation ſous la forme $x^3 = -px - q$, je prens une nouvelle inconnue z; j'ajoute à chaque membre la quantité $3x^2z + 3xz^2 + z^3$; ce qui donne

$$(M) \quad x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + z^3 = 3zx^2 + \left.\begin{matrix} 3z^2 \\ -p \end{matrix}\right\} x + \begin{matrix} z^3 \\ -q, \end{matrix}$$

équation dont le premier membre eſt le cube du binome $x + z$. Or comme l'inconnue z eſt arbitraire, nous pouvons ſuppoſer que cette inconnue eſt telle que la partie $3zx^2 + (3z^2 - p)x$ du ſecond membre s'évanouiſſe ; c'eſt-à-dire, forme l'équation partielle $3zx^2 + (3z^2 - p)x = 0$, ou $3zx + 3z^2 -$

$p=0$; d'où l'on tire $x+z=\frac{p}{3z}$, & $(x+z)^3=\frac{p^3}{27z^3}$. Mais d'un autre côté l'équation (M) donne (en négligeant la partie $3zx^2+(3z^2-p)x$ du second membre, laquelle eſt zero), $(x+z)^3=z^3-q$. Egalant entr'elles les deux valeurs de $(x+z)^3$, on aura $\frac{p^3}{27z^3}=z^3-q$, ou bien $z^6-qz^3=\frac{p^3}{27}$, équation qui ſe réſoud (214) par la méthode du ſecond degré, & qui donne $z^3=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$; ou bien, en tirant la racine cube, $z=\sqrt[3]{\left[\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$.

Subſtituons pour z & z^3 leurs valeurs dans l'équation $x+z=\sqrt[3]{(z^3-q)}$, ou $x=\sqrt[3]{(z^3-q)}-z$; nous aurons $x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}-\sqrt[3]{\left[\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$, ou bien (en prenant ſimplement les ſignes ſupérieurs qui affectent le radical quarré, attendu que les ſignes inférieurs donneroient le même réſultat qu'eux pour la valeur de x; & obſervant que $-\sqrt[3]{A}$ eſt la même choſe que $\sqrt[3]{-A}$),

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}.$$

Cette expreſſion eſt l'une des racines de l'équation $x^3+px+q=0$.

236. Nous obſerverons en paſſant qu'il peut arriver que les quantités compriſes ſous les ſignes radicaux cubes, ſoient des cubes parfaits ; & que par conſéquent la valeur de x puiſſe être délivrée de ces ſignes. Nous donnerons dans la ſuite le moyen d'exécuter cette opération, lorſqu'elle eſt poſſible. Je reviens.

237. Notre équation $x^3+px+q=0$, a encore deux racines qu'il s'agit de trouver. Pour y parvenir d'une manière commode, repréſentons les deux quantités radicales cubes, qui entrent dans la valeur de la racine trouvée, par les deux lettres g & h, c'eſt-à-dire, ſuppoſons,

$$g=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}.$$

$$h=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}.$$

En multipliant enſemble ces deux équations, & en conſidérant qu'un produit tel que $(A+B)\times(A-B)=AA-BB$, on verra tout d'un coup que $gh=\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}=-\frac{p}{3}$. Ainſi $p=-3gh$.

En élevant chacune de ces deux mêmes équations au cube, puis les ajoutant enſemble, on aura $g^3+h^3=-q$, ou $q=-g^3-h^3$.

Mettons les valeurs que nous venons de trouver

O iv

pour p & q, dans l'équation $x^3+px+q=0$; elle deviendra, $x^3-3ghx-g^3-h^3=0$.

Cela posé, puisqu'on a $x=g+h$, ou $x-g-h=0$, si l'on divise l'équation $x^3-3ghx-$&c, par $x-g-h$, on trouvera pour quotient l'équation du second degré, $xx+(g+h)x+g^2+h^2-gh=0$, laquelle donne, $x=\frac{-(g+h)}{2}\pm\ldots\ldots$ $\frac{\sqrt{[-3g^2-3h^2+6gh]}}{2}$, ou bien $x=\frac{-(g+h)}{2}$ $\pm\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}$.

Ainsi les trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$, ou de la transformée $x^3-3ghx-g^3-h^3=0$, sont,

$$x=g+h,\ x=\frac{-(g+h)}{2}+\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2},$$

$$x=\frac{-(g+h)}{2}-\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}.$$

238. Il est visible que la première racine est réelle, & que les deux autres sont imaginaires, lorsque g & h sont des quantités réelles. Or, g & h sont réelles, lorsque la quantité radicale $\sqrt{\left[\frac{qq}{4}+\frac{p^3}{27}\right]}$, est réelle; & cette quantité est réelle dans deux cas.

1°. Lorsque p est positif, parce qu'alors le cube $\frac{p^3}{27}$ est aussi positif, & qu'en ajoutant ce cube avec le quarré $\frac{qq}{4}$ qui est toujours positif, quand même la quantité q seroit négative, on a une somme positive dont la racine quarrée est par conséquent réelle.

2°. Lorsque p étant négatif, ou lorsque l'équation ayant cette forme $x^3 - px \pm q = 0$, on a $\frac{qq}{4} > \frac{p^3}{27}$, parce que la quantité radicale du second degré, qui est maintenant $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$, est encore réelle.

Ainsi concluons, 1°. que toutes les équations du troisième degré, qui ont cette forme, $x^3 + px \pm q = 0$, ont une seule racine réelle, & que les deux autres sont imaginaires.

2°. Que les équations de cette forme $x^3 - px \pm q = 0$, sont encore dans le même cas, pourvu que l'on ait $\frac{qq}{4} > \frac{p^3}{27}$.

239. Si dans l'hypothèse que le terme px est précédé du signe —, ou que l'équation est de cette forme, $x^3 - px \pm q = 0$, on a $\frac{qq}{4} = \frac{p^3}{27}$; la quantité radicale $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$ disparoît, & on a $g = h$. D'où il suit que le terme $\frac{(g-h)\sqrt{-3}}{2}$ s'évanouit, soit qu'on le prenne en + ou en —. Par conséquent les trois racines de l'équation sont réelles, & de plus les deux dernières sont égales entr'elles. Ces trois racines, pour le cas où le dernier terme q est affecté du signe +, sont $x = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, $x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, $x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$; & pour le cas où le

dernier terme q est affecté du signe $-$, les racines sont $x = 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, $x = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, $x = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

240. SUPPOSONS toujours l'équation $x^3 - px \pm q = 0$, mais qu'on ait maintenant $\frac{qq}{4} < \frac{p^3}{27}$. Alors la quantité radicale $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$ devient imaginaire; les deux quantités g & h sont aussi imaginaires, séparément, puisque chacune d'elles renferme dans son expression une partie imaginaire qui rend le tout imaginaire. Cependant, on ne doit pas conclure pour cela qu'aucune des racines de l'équation soit imaginaire; elles sont au contraire toutes les trois réelles. Voici l'un des moyens par lesquels on s'en est convaincu.

241. REPRÉSENTONS, pour abréger le calcul, la quantité radicale imaginaire, $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$, ou $\sqrt{\left[\left(\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}\right) \times -1\right]}$, par $\sqrt{-kk}$, ou $k\sqrt{-1}$, k étant une quantité réelle $= \sqrt{\left[\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}\right]}$; représentons de plus le dernier terme $\pm q$, de l'équation, par $2f$, en nous souvenant que quand q sera précédé du signe $-$, tous les termes où $f^{\frac{1}{3}}$ se trouve élevé à des puissances impaires, devront changer de signes. On aura (237), $g = \sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]}$,

$h = \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]}$. Par conséquent les trois racines de l'équation seront,

$$x = \sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]} + \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]},$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]} + \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]}\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]} - \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]}\right),$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]} + \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]}\right)$$
$$- \frac{\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]} - \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]}\right).$$

242. CELA posé, tirons par la méthode de l'article 132, les racines cubes des deux binomes $-f + k\sqrt{-1}$, $-f - k\sqrt{-1}$, en suites infinies; nous trouverons, en regardant $-f$ comme le premier terme de chacun de ces binomes, ou en supposant $f > k$,

$$\text{(A)}\ \sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]} = -f^{\frac{1}{3}} + \frac{f^{-\frac{2}{3}}k\sqrt{-1}}{3} - \frac{f^{-\frac{5}{3}}k^2}{9} - \frac{5f^{-\frac{8}{3}}k^3\sqrt{-1}}{81} + \frac{10f^{-\frac{11}{3}}k^4}{243} + \frac{22f^{-\frac{14}{3}}k^5\sqrt{-1}}{729} - \frac{154f^{-\frac{17}{3}}k^6}{6561} - \&c;$$

$$\text{(B)}\ \sqrt[3]{[-f - k\sqrt{-1}]} = -f^{\frac{1}{3}} - \frac{f^{-\frac{2}{3}}k\sqrt{-1}}{3} - \frac{f^{-\frac{5}{3}}k^2}{9} + \frac{5f^{-\frac{8}{3}}k^3\sqrt{-1}}{81} + \frac{10f^{-\frac{11}{3}}k^4}{243} - \frac{22f^{-\frac{14}{3}}k^5\sqrt{-1}}{729} - \frac{154f^{-\frac{17}{3}}k^6}{6561} + \&c.$$

Donc, en ajoutant enſemble ces deux équations membre à membre, pour avoir la première racine, & obſervant que dans le ſecond membre les termes qui contiennent $\sqrt{-1}$, ſe détruiſent par l'oppoſition des ſignes, on aura

$$x = -2f^{\frac{1}{3}} - \frac{2f^{-\frac{5}{3}}k^2}{9} + \frac{20f^{-\frac{11}{3}}k^4}{243} - \frac{308f^{-\frac{17}{3}}k^6}{6561} + \&c,$$

expreſſion dans laquelle il n'entre point d'imaginaires; & qui eſt par conſéquent réelle. Cette expreſſion eſt la même choſe que celle-ci,

$$x = \frac{2f}{\sqrt[3]{f^2}} \times \left[-1 - \frac{k^2}{9f^2} + \frac{10k^4}{243f^4} - \frac{154k^6}{6561f^6} + \&c\right],$$

qui eſt d'un uſage commode dans la pratique.

243. POUR trouver les deux autres racines, multiplions chacune des équations (A) & (B), par $\sqrt{-3}$; & obſervons que pour le produit particulier $(\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-3})$, on doit prendre $-\sqrt{3}$; car ſi l'on a un produit tel que $(\sqrt{-A}) \times (\sqrt{-B})$, il eſt clair qu'à cauſe de $\sqrt{-A} = \sqrt{A}.\sqrt{-1}$, de $\sqrt{-B} = \sqrt{B}.\sqrt{-1}$, de $\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{AB}$, & de $(\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = -1$, on a $(\sqrt{-A}) \times (\sqrt{-B}) = -\sqrt{AB}$. On trouvera les deux équations,

(C) $(\sqrt{-3}) \times \sqrt[3]{[-f + k\sqrt{-1}]} = -f^{\frac{1}{3}}\sqrt{-3}$

$$-\frac{f^{-\frac{2}{3}}k\sqrt{3}}{3}-\frac{f^{-\frac{5}{3}}k^2\sqrt{-3}}{9}+\frac{5f^{-\frac{8}{3}}k^3\sqrt{3}}{81}$$
$$+\frac{10f^{-\frac{11}{3}}k^4\sqrt{-3}}{243}-\frac{22f^{-\frac{14}{3}}k^5\sqrt{3}}{729}-$$
$$\frac{154f^{-\frac{17}{3}}k^6\sqrt{-3}}{6561}+\&c;$$

$$\text{(D)}\quad(\sqrt{-3})\times\sqrt[3]{[-f-k\sqrt{-1}]}=-f^{\frac{1}{3}}\sqrt{-3}$$
$$+\frac{f^{-\frac{2}{3}}k\sqrt{3}}{3}-\frac{f^{-\frac{5}{3}}k^2\sqrt{-3}}{9}-\frac{5f^{-\frac{8}{3}}k^3\sqrt{3}}{81}$$
$$+\frac{10f^{-\frac{11}{3}}k^4\sqrt{-3}}{243}+\frac{22f^{-\frac{14}{3}}k^5\sqrt{3}}{729}-$$
$$\frac{154f^{-\frac{17}{3}}k^6\sqrt{-3}}{6561}-\&c.$$

Retranchant l'équation (D) de l'équation (C); on aura,

$$\text{(E)}\quad(\sqrt{-3})\times\left(\sqrt[3]{[-f+k\sqrt{-1}]}-\sqrt[3]{[-f-k\sqrt{-1}]}\right)$$
$$=-\frac{2f^{-\frac{2}{3}}k\sqrt{3}}{3}+\frac{10f^{-\frac{8}{3}}k^3\sqrt{3}}{81}-$$
$$\frac{44f^{-\frac{14}{3}}k^5\sqrt{3}}{729}+\&c,$$

équation dans le second membre de laquelle il n'entre point d'imaginaires.

Maintenant, ramassons toutes les parties qui doivent former les valeurs des deux racines cherchées; nous aurons pour ces racines,

$$x = -\tfrac{1}{2}\left(-2f^{\frac{1}{3}} - \frac{2f^{-\frac{5}{3}}k^2}{9} + \frac{20f^{-\frac{11}{3}}k^4}{243} - \frac{308f^{-\frac{17}{3}}k^6}{6561} + \&c\right) + \tfrac{1}{2}\left(-\frac{2f^{-\frac{2}{3}}k\sqrt{3}}{3} + \frac{10f^{-\frac{8}{3}}k^3\sqrt{3}}{81} - \frac{44f^{-\frac{14}{3}}k^5\sqrt{3}}{729} + \&c\right);$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\left(-2f^{\frac{1}{3}} - \frac{2f^{-\frac{5}{3}}k^2}{9} + \frac{20f^{-\frac{11}{3}}k^4}{243} - \frac{308f^{-\frac{17}{3}}k^6}{6561} + \&c\right) - \tfrac{1}{2}\left(-\frac{2f^{-\frac{2}{3}}k\sqrt{3}}{3} + \frac{10f^{-\frac{8}{3}}k^3\sqrt{3}}{81} - \frac{44f^{-\frac{14}{3}}k^5\sqrt{3}}{729} + \&c\right);$$

expreſſions dans leſquelles il n'y a point d'imaginaires. On peut mettre ces expreſſions ſous des formes analogues à celles qu'on a données à la première racine.

On voit que les trois valeurs de x ſont exprimées par des ſuites infinies. Mais ces ſuites étant convergentes, parce qu'on a ſuppoſé $f > k$; ſi l'on prend un certain nombre de leurs premiers termes, on aura les racines de l'équation, d'une manière approchée.

244. Si on avoit $k > f$, il faudroit, en tirant la racine cube du binome $-f \pm k\sqrt{-1}$, comme il a été preſcrit (132), regarder le terme $\pm k\sqrt{-1}$, comme le premier. Alors, en faiſant des calculs entièrement ſemblables à ceux des trois derniers articles; &

considérant que $(k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}} \times (-1)^{\frac{1}{6}} = k^{\frac{1}{3}}\sqrt{(-1)^{\frac{1}{3}}} = k^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}$; que $(k\sqrt{-1})^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{-1})^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}} \times (-1)^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{-1} = k^{\frac{2}{3}} \times -1 = -k^{\frac{2}{3}}$; que $(k\sqrt{-1})^{\frac{5}{3}} = k^{\frac{5}{3}} \times (\sqrt{-1})^{\frac{5}{3}} = k^{\frac{5}{3}} \times (\sqrt{-1})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt{-1} = -k^{\frac{5}{3}}\sqrt{-1}$; que $(k\sqrt{-1})^{\frac{8}{3}} = k^{\frac{8}{3}}(\sqrt{-1})^{\frac{8}{3}} = k^{\frac{8}{3}} \times (\sqrt{-1})^{\frac{5}{3}} \times \sqrt{-1} = k^{\frac{8}{3}} \times (-\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = k^{\frac{8}{3}}$; &c : on trouvera que les trois racines sont exprimées comme il suit,

$$x = +\frac{2k^{-\frac{2}{3}}f}{3} - \frac{10k^{-\frac{8}{3}}f^3}{81} + \frac{44k^{-\frac{14}{3}}f^5}{729} - \text{\&c};$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\left(+\frac{2k^{-\frac{2}{3}}f}{3} - \frac{10k^{-\frac{8}{3}}f^3}{81} + \frac{44k^{-\frac{14}{3}}f^5}{729} - \text{\&c}\right) + \tfrac{1}{2}\left(-2k^{\frac{1}{3}}\sqrt{3} + \frac{2k^{-\frac{5}{3}}f^2\sqrt{3}}{9} - \frac{20k^{-\frac{11}{3}}f^4\sqrt{3}}{243} + \frac{308k^{-\frac{17}{3}}f^6\sqrt{3}}{6561} - \text{\&c}\right);$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\left(+\frac{2k^{-\frac{2}{3}}f}{3} - \frac{10k^{-\frac{8}{3}}f^3}{81} + \frac{44k^{-\frac{14}{3}}f^5}{729} - \text{\&c}\right) - \tfrac{1}{2}\left(-2k^{\frac{1}{3}}\sqrt{3} + \right.$$

$$\frac{2k^{-\frac{5}{3}}f^2\sqrt{3}}{9} - \frac{20k^{-\frac{11}{3}}f^3\sqrt{3}}{243} + \frac{308k^{-\frac{17}{3}}f^6\sqrt{3}}{6561}$$

$-$ &c);

ſuites convergentes, & compoſées de parties réelles.

Si on avoit $k=f$, les ſuites, priſes de l'une ou de l'autre manière, convergeroient encore, mais plus lentement.

245. CONCLUONS des quatre derniers articles, que ſi dans l'équation $x^3 - px \pm q = 0$, on a $\frac{p^3}{27} > \frac{qq}{4}$; les trois racines ſont réelles & inégales entr'elles. La forme ſous laquelle elles ſe préſentent d'abord contient des imaginaires; mais, en développant leurs expreſſions, les parties imaginaires s'anéantiſſent réciproquement par l'oppoſition des ſignes; & le réſultat de chaque aſſemblage forme une quantité réelle. On n'a pas encore pu exprimer *en général* ces racines par des formules finies qui ne contiennent point d'imaginaires; & c'eſt ce qui a fait donner à ce cas le nom de *cas irréductible du troiſième degré*.

246. JE mets à la concluſion de l'article précédent la condition *en général*, parce qu'il y a des équations particulieres de la forme $x^3 - px \pm q = 0$, où l'on a $\frac{p^3}{27} > \frac{qq}{4}$, & où cependant les racines peuvent être repréſentées par des expreſſions finies, débarraſſées d'imaginaires. Cela arrive lorſque les parties de la racine,

racine, comprises sous les radicaux cubes, sont des cubes parfaits. Alors, en tirant les racines, les parties imaginaires se détruisent par l'opposition des signes. On trouvera (Chap. XVII) la méthode pour extraire ces sortes de racines. Le cas irréductible, proprement dit, a lieu lorsque les trois racines de l'équation sont réelles, inégales & incommensurables.

247. On voit que la théorie précédente embrasse la résolution des équations du troisième degré dans tous les cas qui peuvent se présenter. Elle s'étend encore aux équations de la forme $u^{3n}+au^{2n}+bu^{n}+c=0$. Car, en faisant $u^{n}=t$, on a la transformée $t^{3}+at^{2}+bt+c=0$, qui est du troisième degré. Connoissant t, on connoîtra aussi u, puisque $u=t^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{t}$.

Il ne nous reste plus qu'à faire l'application de cette théorie à quelques exemples.

PROBLEME I.

248. *Un homme place 900# dans un commerce ; au bout de trois ans il retire 1089# : on demande à combien pour 100 se monte le gain qu'il a fait ?*

Soit u le gain cherché. Il est clair que le gain rapporté par les 900# au bout de la première année, sera le quatrième terme d'une proportion dont 100, u, & 900 sont les trois premiers. Ce gain sera donc exprimé par $\frac{900\times u}{100}$; & par conséquent la somme qui revient à notre Commerçant, à la fin de la première année, est

P

$900 + \frac{900 \times u}{100}$, ou $900 \times \frac{100+u}{100}$. Semblablement; la ſomme qui lui revient au bout de la ſeconde année, eſt $\left(900 \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100}$; celle qui lui revient au bout de la troiſième année eſt $\left(\left(900 \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100}$. Or, par hypothèſe, cette dernière ſomme doit être 1089. Ainſi on a l'équation, $\left(\left(900 \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100} = 1089$, qui ſe réduit à $(100+u)^3 = 1210000$. Donc, ſi l'on ſuppoſe $100+u=t$, on aura $t^3 = 1210000$, équation qui ſe rapporte à celle de l'article 228, en faiſant $c = -1210000$. Tirons la racine cube de part & d'autre; nous aurons $t = 106, 56$, à très-peu de choſe près. Donc, $u = 6, 56$, ſenſiblement. Si l'on évalue (Arith. 103) la fraction décimale 0, 56, en ſols & deniers, on trouvera qu'elle vaut $11^{ſ}\ 2^{d.}\ \frac{2}{5}$. Ainſi le gain que le Commerçant a fait, ſe monte, pour $100^{\#}$, à $6^{\#}\ 11^{ſ}\ 2^{d.}\ \frac{2}{5}$, à peu de choſe près. C. Q. F. T.

PROBLEME II.

249. *Un homme place* $900^{\#}$ *dans un commerce; au bout de trois ans il retire une quantité d'argent telle qu'en l'ajoutant avec celle qui lui reviendroit à la fin de la première année, on auroit* $2400^{\#}$ *pour ſomme : trouver à combien pour* 100 *ſe monte le gain qu'il a fait?*

Soit u le gain cherché. En raiſonnant comme dans le problême précédent, on voit que la quantité d'argent, due au Commerçant, à la fin de la première année, eſt $\frac{900\times(100+u)}{100}$; & que la quantité due à la fin de la troiſième année, eſt $\frac{900\times(100+u)^3}{1000000}$. Ainſi on aura, par les conditions du problême, $\frac{900\times(100+u)^3}{1000000}+\frac{900\times(100+u)}{100}=2400$.

Soit $100+u=x$. On aura, après les réductions, $x^3+10000x-\frac{8000000}{3}=0$, équation qui ſe rapporte à la formule $x^3+px+q=0$, de l'article 234, en faiſant $p=10000$, $q=-\frac{8000000}{3}$. Et comme la quantité p eſt ici poſitive, il s'enſuit (238) que l'équation n'a qu'une ſeule racine réelle, & que les deux autres ſont imaginaires. En ſubſtituant à la place de p & q, leurs valeurs numériques dans l'expreſſion générale de x, trouvée à la fin de l'article 235, on aura pour la racine réelle cherchée,

$$x=\sqrt[3]{\left[\frac{4000000}{3}+\frac{1000000}{3}\sqrt{\frac{49}{3}}\right]}$$
$$+\sqrt[3]{\left[\frac{4000000}{3}-\frac{1000000}{3}\sqrt{\frac{49}{3}}\right]}.$$

Or, la racine quarrée de la fraction $\frac{49}{3}$ eſt 4,0414, à peu de choſe près. La première partie de x ſera donc

$\sqrt[3]{\frac{8041400}{3}}$, c'eſt-à-dire, 138, 915, à peu de choſe près ; & la ſeconde ſera $\sqrt[3]{-\frac{41400}{3}}$, c'eſt-à-dire, —23,986, à peu près. Donc, $x = 114,929$, ſenſiblement. Ainſi, à cauſe de $100 + u = x$, on aura $u = 14,929$. Evaluant la fraction décimale 0,929 en ſols & deniers, on trouvera qu'elle vaut 18ſ 6d. $\frac{24}{25}$. Par conſéquent enfin, le gain que le Commerçant a fait ſe monte, pour 100#, à 14# 18ſ 6d. $\frac{24}{25}$, ſenſiblement. C. Q. F. T.

PROBLEME III.

250. *TROUVER un nombre dont le cube ajouté avec le produit du même nombre par 45, donne 100 pour ſomme ?*

Soit x le nombre cherché. On aura l'équation $x^3 + 45x = 100$, ou bien, $x^3 + 45x - 100 = 0$, qui ſe rapporte à la formule $x^3 + px + q = 0$, en faiſant $p = 45$, $q = -100$. Cette équation (238) a une racine réelle, & les deux autres imaginaires. En la ſoumettant à la formule générale de l'article 235, & mettant à la place des quantités littérales leurs valeurs numériques, on trouvera,

$$x = \sqrt[3]{[50 + 5\sqrt{235}]} + \sqrt[3]{[50 - 5\sqrt{235}]}.$$

C. Q. F. T.

PROBLEME IV.

251. *LES conditions d'un problême ayant mené à l'équation* $t^3 + 12t^2 + 60t + 103 = 0$; *il s'agit de la réſoudre, ou de trouver l'inconnue* t ?

Je commence par faire disparoître (232) le second terme de cette équation, en faisant $t=x-4$. Par-là, j'ai la transformée $x^3+12x-9=0$, qui se rapporte à la formule $x^3+px-q=0$, p étant $=12$, $q=9$. Cette équation n'a qu'une racine réelle, qui est (235),

$$x=\sqrt[3]{\left[\frac{9+\sqrt{337}}{2}\right]}+\sqrt[3]{\left[\frac{9-\sqrt{337}}{2}\right]}.$$

Retranchant 4 de cette racine, on aura la valeur de t. C. Q. F. T.

PROBLEME V.

252. *Résoudre l'équation* $t^3+6t^2-18t+10=0$?

Commençons par faire évanouir le second terme de cette équation, en supposant $t=x-2$; nous aurons la transformée $x^3-30x+62=0$, qui se rapporte à la formule $x^3-px+q=0$. Et comme on a ici $\frac{qq}{4}<\frac{p^3}{27}$, il s'ensuit (240), que les trois racines de l'équation sont réelles. Je cherche la valeur de l'une d'elles par la formule approchée de l'article 242. Cette formule est,

$$x=\frac{2f}{\sqrt{f^2}}\times\left(-1-\frac{k^2}{9f^2}+\frac{10k^4}{243f^4}-\frac{154k^6}{6561f^6}+\&c\right).$$

Or, nous avons ici $f=\frac{q}{2}=31$, $f^2=961$, $k^2=39$. D'où l'on voit que la formule converge rapidement. Ainsi, on peut se contenter de prendre ses trois premiers termes ; & alors on aura, après quelques réductions, $x = \frac{-486f^4 - 54k^2f^2 + 20k^4}{243f^3\sqrt{f^2}}$, c'eſt-à-dire, en mettant à la place des grandeurs littérales leurs valeurs numériques, $x = -6,311$.

Les deux autres racines de l'équation peuvent ſe trouver par les formules de l'article 243. Mais il eſt plus commode dans la pratique de faire ſervir à cette recherche la racine déja trouvée ; opération qui conſiſte à diviſer l'équation $x^3 - 30x + 62 = 0$, par $x + 6,311$. Par-là, on trouve le quotient $xx - 6,311x + 9,828721$, & le reſte $0,029058231$, qui eſt aſſez petit pour pouvoir être négligé. On aura donc, à peu près,

$$xx - 6,311x + 9,828721 = 0,$$

équation du ſecond degré, qui donne ſenſiblement ces deux racines $x = 2,7971$, $x = 3,5139$. Ainſi, les trois valeurs de t ſont, à peu de choſe près, $t = -8,311$, $t = 0,7971$, $t = 1,5139$. C.Q.F.T.

CHAPITRE XI.

Des Equations du quatrième degré.

253. Les équations déterminées du quatrième degré, dont il est seulement ici question, peuvent être représentées par la formule générale,

$$t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0,$$

t étant l'inconnue, a, b, c, d des quantités données, & réelles, positives ou négatives.

254. Qu'on ait d'abord tout-à-la-fois, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$: cette formule deviendra $t^4 + d = 0$, ou $t^4 = -d = d \times -1$. Tirant la racine quarrée de part & d'autre, on aura $tt = \pm \sqrt{d} . \sqrt{-1}$; ce qui donne pour tt deux valeurs ou racines imaginaires. Chacune de ces valeurs donne, en tirant encore la racine quarrée, deux valeurs imaginaires pour t. Ainsi l'équation $t^4 + d = 0$ a quatre racines qui sont toutes imaginaires. Il est en effet évident que la quatrième puissance d'une quantité réelle, positive ou négative, étant toujours positive, il n'est pas possible que cette quatrième puissance, ajoutée avec une quantité positive, puisse former une somme égale à zero.

Si le terme d étoit précédé du signe $-$; c'est-à-dire, si on avoit l'équation $t^4 - d = 0$, ou $t^4 = d$; on trouveroit d'abord, en tirant la racine quarrée, $tt =$

$\pm\sqrt{d}$; ce qui donne pour tt deux valeurs réelles. La première de ces valeurs donne, pour t, deux valeurs réelles, l'une positive, l'autre négative; mais la seconde donne pour t deux valeurs imaginaires. Ainsi, l'équation $t^4-d=0$, a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, & deux racines imaginaires. Soit, par exemple, $d=16$. Les deux racines réelles de t sont 2 & -2; & les deux racines imaginaires sont $+2\sqrt{-1}$, & $-2\sqrt{-1}$.

255. SOIT simplement $d=0$. Notre formule générale devient, $t(t^3+at^2+bt+c)=0$. D'où l'on tire, ou $t=0$, ou $t^3+at^2+bt+c=0$. Et comme cette dernière équation, qui est du troisième degré, & qui se résoud par les méthodes expliquées dans le Chapitre précédent, a nécessairement une racine réelle, tandis que les deux autres peuvent être réelles ou imaginaires; il s'ensuit que l'équation $t^4+at^3+bt^2+ct=0$, a une racine $=0$, une seconde racine qui est réelle, & deux autres qui peuvent être réelles ou imaginaires.

256. SOIENT $a=0$, $c=0$. La formule générale deviendra, $t^4+bt^2+d=0$, équation qui se résoud (214) par la méthode du second degré, & qui donne d'abord $t^2=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{bb}{4}-d\right]}$, puis $t=\pm\sqrt{\left[-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{bb}{4}-d\right)}\right]}$. Ainsi l'équation $t^4+bt^2+d=0$, a quatre racines qui sont,

$$t=+\sqrt{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{bb}{4}-d\right)}\right]},$$

$$t=-\sqrt{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{bb}{4}-d\right)}\right]},$$
$$t=+\sqrt{\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{bb}{4}-d\right)}\right]},$$
$$t=-\sqrt{\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{bb}{4}-d\right)}\right]}.$$

Or, 1°. si b & d sont des quantités positives, & qu'on ait $\frac{bb}{4}<d$; il est clair que les quatre racines sont imaginaires. Elles le seroient également, si b & d étant toujours positives, on avoit $\frac{bb}{4}>d$, parce que $\frac{b}{2}>\sqrt{\left(\frac{bb}{4}-d\right)}$.

2°. Si b & d sont toutes deux négatives, l'expression radicale intérieure devient $\sqrt{\left(\frac{bb}{4}+d\right)}$; & on a $\frac{b}{2}<\sqrt{\left(\frac{bb}{4}+d\right)}$. Les deux premières racines sont réelles, & les deux autres sont imaginaires.

3°. Si b est positive, & d négative, les deux premières racines sont réelles, les deux autres sont imaginaires.

4°. Si b est négative, & d positive, & qu'on ait $\frac{bb}{4}>d$, les quatre racines sont réelles; mais si on avoit $\frac{bb}{4}<d$, elles seroient toutes quatre imaginaires.

257. Il n'y a que les trois cas particuliers compris dans les trois articles précédents qui puissent ainsi être

résolus, sans le secours d'aucune nouvelle régle. Je viens à la résolution de l'équation générale $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, sans supposer qu'aucune des quantités a, b, c, d soit zero.

D'abord, je commence par faire évanouir (233) le second terme de cette équation ; non que cette préparation soit absolument nécessaire, comme nous le ferons observer ci-dessous ; mais parce qu'elle simplifie les calculs. Ainsi je suppose $t = x - \frac{a}{4}$; ce qui change l'équation $t^4 + at^3 + \&c$, en celle-ci,

$$(A) \quad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

en prenant $p = \frac{-3a^2}{8} + b$, $q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$,

$$r = \frac{-3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d.$$

La question est donc de trouver les racines de l'équation (A). Car si après les avoir trouvées, on retranche de chacune d'elles la quantité constante $\frac{a}{4}$, on aura aussi les valeurs de t, à cause de $t = x - \frac{a}{4}$. Il est clair que les valeurs de t seront réelles ou imaginaires, selon que celles de x seront réelles ou imaginaires.

258. METTONS l'équation (A) sous cette forme $x^4 = -px^2 - qx - r$. Ensuite ajoutons de part & d'autre la quantité $2x^2z + z^2$ (z étant une nouvelle inconnue) ; nous aurons,

(B) $x^4+2x^2z+z^2=(2z-p)x^2-qx+z^2-r$, équation dont le premier membre eſt le quarré du binome x^2+z. Comme l'inconnue z eſt arbitraire, nous pouvons faire en ſorte que le ſecond membre de l'équation (B) devienne auſſi un quarré ; il faudra pour cela qu'on ait $-qx=2x\sqrt{(2z-p)}\times\sqrt{(z^2-r)}$; car ſi l'on regarde le trinome quelconque $A+B+C$, comme un quarré; l'un des termes, par exemple B doit être $=2\sqrt{AC}$. L'équation partielle $-qx=2x\sqrt{(2z-p)}\cdot\sqrt{(z^2-r)}$ donne, (en diviſant tout par x, ſuppoſant $2z-p=s$, ou $z=\frac{p+s}{2}$, faiſant diſparoître les radicaux, & ordonnant par rapport à s),

$$(C)\quad s^3+2ps^2+(pp-4r)s-qq=0,$$

équation que je nomme *auxiliaire*, & qui n'étant que du troiſième degré, donnera la valeur de s, par les méthodes du Chapitre précédent. Ainſi nous pouvons regarder s comme connue.

259. MAINTENANT, le trinome $(2z-p)x^2-qx+(z^2-r)$ qui forme le ſecond membre de l'équation (B) étant aſſujetti à la condition d'être un quarré, en vertu de l'équation $-qx=2x\sqrt{(2z-p)}\times\sqrt{(z^2-r)}$; & la racine de ce quarré étant $\pm(x\sqrt{(2z-p)}+\sqrt{(z^2-r)})$, ou bien $\pm\left(x\sqrt{(2z-p)}-\frac{q}{2\sqrt{(2z-p)}}\right)$: l'équation (B) donnera, (en tirant la racine quarrée de chaque membre), $x^2+z=\pm$

$\left(x\sqrt{(2z-p)}-\frac{q}{2\sqrt{(2z-p)}}\right)$, ou bien (en mettant pour z sa valeur $\frac{p+s}{2}$), $x^2+\frac{p+s}{2}=\pm\left(x\sqrt{s}-\frac{q}{2\sqrt{s}}\right)$, équation qui renferme ces deux-ci:

$$x^2-x\sqrt{s}=-\frac{p}{2}-\frac{s}{2}-\frac{q}{2\sqrt{s}},$$
$$x^2+x\sqrt{s}=-\frac{p}{2}-\frac{s}{2}+\frac{q}{2\sqrt{s}}.$$

Résolvant ces deux équations qui sont du second degré, & qui donnent chacune deux valeurs de x, on aura les quatre valeurs de x,

$$x=\frac{\sqrt{s}}{2}+\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}-\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]},$$
$$x=\frac{\sqrt{s}}{2}-\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}-\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]};$$
$$x=-\frac{\sqrt{s}}{2}+\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}+\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]},$$
$$x=-\frac{\sqrt{s}}{2}-\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}+\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]};$$

valeurs qui sont les quatre racines de l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$.

260. Ces racines contenant deux à deux les mêmes parties radicales du second degré; il est évident que si la première racine est réelle ou imaginaire, la seconde sera également réelle ou imaginaire; & que si pareillement la troisième racine est réelle ou imaginaire, la quatrième sera aussi réelle ou imaginaire.

Ainſi, en général, dans toute équation du quatrième degré, les quatre racines ſont réelles ou imaginaires, ou deux ſont réelles, tandis que les deux autres ſont imaginaires. Il n'y a pas d'autre combinaiſon poſſible à cet égard.

261. LA même méthode peut ſervir à réſoudre les équations du quatrième degré, ſans faire évanouir le ſecond terme. Car ſoit l'équation générale $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$; & qu'on la mette ſous cette forme, $t^4 + at^3 = -bt^2 - ct - d$.

En ajoutant de part & d'autre $\frac{a^2t^2}{4} + 2t^2z + atz + z^2$, on aura l'équation $\left(t^2 + \frac{at}{2} + z\right)^2 = \left(2z + \frac{a^2}{4} - b\right)t^2 + (az - c)t + z^2 - d$, dont le ſecond membre devient un quarré parfait, en faiſant

$$\frac{az - c}{2\sqrt{\left(2z + \frac{a^2}{4} - b\right)}} = \sqrt{(zz - d)}.$$ Ce qui produit une équation auxiliaire analogue à l'équation (C). Mais, pour la ſimplicité des réſultats, je continuerai de ſuppoſer que l'équation a été d'abord délivrée de ſon ſecond terme.

262. REVENONS donc aux formules de l'art. 259. Il ſe préſente à ce ſujet une difficulté. Comme l'équation auxiliaire (C) qui donne la valeur de s, eſt du troiſième degré, & qu'elle a par conſéquent trois racines; on demandera quelle eſt celle de ces trois

valeurs, qu'il convient d'employer dans les quatre valeurs de x? Je répons qu'on peut employer indifféremment celle qu'on voudra, & qu'on obtiendra dans tous les cas les mêmes valeurs pour x. Mais cela a besoin d'être démontré.

263. D'ABORD, il y a un moyen bien simple dans la spéculation, de s'assurer si en effet les trois racines de s donnent les mêmes valeurs pour x; c'est de chercher, par les méthodes du Chapitre précédent, les trois valeurs de s, de les substituer ensuite successivement dans chacune des quatre valeurs de x, & d'examiner si les douze valeurs qui résulteront pour x, ne se réduiront pas à quatre. Mais ce moyen paroît comme impraticable, par la longueur des calculs qu'il exige. En voici un autre plus expéditif qui conduit au même but.

264. PRENONS trois nouvelles lettres l, m, n, telles que l'on ait, $l=\frac{\sqrt{s}}{2}$, $m=\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}-\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]}$, $n=\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}+\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]}$.

Les quatre valeurs de x seront en conséquence, $x=l+m$, $x=l-m$, $x=-l+n$, $x=-l-n$. Ainsi, si l'on multiplie ensemble les quatre quantités $x-l-m$, $x-l+m$, $x+l-n$, $x+l+n$, & qu'on égale le produit à zero, on formera l'équation,

$$\text{(D)}\quad x^4 \left.\begin{array}{l} -2l^2 \\ -m^2 \\ -n^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} -2lm^2 \\ +2ln^2 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +l^4 \\ -l^2m^2 \\ -l^2n^2 \\ +m^2n^2 \end{array}\right\} = 0,$$

qui doit être la même que l'équation proposée, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Donc, en égalant entr'elles ces deux équations terme à terme, on aura, $p = -2l^2 - m^2 - n^2$, $q = -2lm^2 + 2ln^2$, $r = l^4 - l^2m^2 - l^2n^2 + m^2n^2$.

Substituons ces valeurs de p, q, r dans l'équation auxiliaire (C); elle deviendra,

$$\text{(E)}\quad s^3 \left.\begin{array}{l} -4l^2 \\ -2m^2 \\ -2n^2 \end{array}\right\} s^2 \left.\begin{array}{l} +8l^2m^2 \\ +8l^2n^2 \\ +m^4 \\ +n^4 \\ -2m^2n^2 \end{array}\right\} s - 4l^2(n^2 - m^2)^2 = 0.$$

Cela posé, feignons qu'on ait une équation du troisième degré, résultante du produit $(s - M) \times (s - N) \times (s - P) = 0$, M, N, P étant les trois racines de cette équation. En effectuant les multiplications indiquées, on trouvera

$$\text{(F)}\quad s^3 - (M + N + P)s^2 + (MN + MP + NP)s - MNP = 0.$$

Faisons coïncider cette équation avec l'équation (E), c'est-à-dire, faisons en sorte que ces deux équations soient identiquement les mêmes terme à terme. Il faut pour cela que le dernier terme $4l^2(n^2 - m^2)^2$, de l'équation (E), soit décomposable en trois facteurs qu'on puiſſe prendre pour M, N, P ; en ſorte que ſubſtituant ces valeurs de M, N, P dans le ſecond & le troiſième terme de l'équation (F), ces termes deviennent reſpectivement le ſecond & le troiſième terme de l'équation (E). Or ſi l'on décompoſe* la quantité $4l^2(n^2 - m^2)^2$ en ces trois facteurs $4l^2$, $(n+m)^2$, $(n-m)^2$, & qu'on prenne $M = 4l^2$, $N = (n+m)^2$, $P = (n-m)^2$, la condition dont je viens de parler ſera remplie ; car en ſubſtituant ces valeurs de M, N, P dans l'équation (F), elle devient identiquement terme à terme l'équation (E). Ainſi l'équation (E) a les trois racines $s = 4l^2$, $s = (n+m)^2$, $s = (n-m)^2$.

Maintenant, qu'on ſubſtitue celle qu'on voudra de ces trois valeurs dans les quatre valeurs de x ; on trouvera que ces quatre valeurs ſe réduiſent toujours à $x = l+m$, $x = l-m$, $x = -l+n$, $x = -l-n$. C'eſt un calcul aiſé à faire. Il ſuit delà que ſi en allant dans un ordre inverſe, on commence par déterminer les trois valeurs de s, & qu'on faſſe ſucceſſivement uſage de chacune d'elles dans les racines de x, on obtiendra dans tous les cas les mêmes expreſſions pour ces racines.

265. Nous avons obſervé (260) que les racines d'une équation du quatrième degré ſont toutes réelles, ou toutes imaginaires, ou deux réelles & deux imaginaires.

* La même quantité peut être décompoſée autrement ; mais nous choiſiſſons les facteurs propres à faire coïncider les équations (E) & (F).

naires. Voyons à quels caractères on peut distinguer ces différents cas.

Puisque le dernier terme de l'équation auxiliaire (C) $s^3 + 2ps^2 + (pp - 4r)s - qq = 0$, est toujours négatif ($qq$ étant toujours positif soit qu'on prenne q en $+$ ou $-$) ; il s'ensuit que cette équation a, généralement, au moins une racine réelle positive. Car, ou ses trois racines sont réelles, ou l'une seulement est réelle, tandis que les deux autres sont imaginaires ; il n'y a pas d'autre combinaison possible, comme on le voit par le Chapitre précédent. Or,

1°. Lorsque les trois racines de l'équation (C) sont réelles, elle ne peut se rapporter ni à la forme $(s+\alpha) \times (s+\beta) \times (s+\gamma) = 0$, où les trois racines sont négatives, ni à la forme $(s-\alpha) \times (s-\beta) \times (s+\gamma) = 0$, où il y a deux racines positives & une négative ; puisque, dans l'un & l'autre cas, le dernier terme $\alpha\beta\gamma$ de l'équation est positif ; mais elle se rapporte soit à la forme $(s-\alpha) \times (s-\beta) \times (s-\gamma) = 0$, qui contient trois racines positives, soit à la forme $(s+\alpha) \times (s+\beta) \times (s-\gamma) = 0$, qui contient deux racines négatives & une positive ; car dans l'un & l'autre cas, le dernier terme est $-\alpha\beta\gamma$. Il n'y a pas d'autres combinaisons pour les racines réelles. Ainsi en supposant que les trois racines de l'équation (C) soient réelles, elles sont toutes les trois positives, ou il y en a une positive, & deux négatives.

2°. Lorsque l'équation (C) a deux racines imaginaires, elle peut être regardée comme le produit d'une équation du premier degré par une équation du ſecond dont les racines ſont imaginaires, & qu'on peut repréſenter par $s^2 + \beta s + \gamma = 0$, la quantité γ étant eſſentiellement poſitive & plus grande que $\frac{\beta^2}{4}$. Alors elle ne peut pas ſe rapporter à la forme $(s^2 + \beta s + \gamma) \times (s + \alpha) = 0$, qui contient, outre les deux racines imaginaires, une racine négative, puiſque le dernier terme $\gamma\alpha$ ſeroit poſitif ; mais elle ſe rapporte à la forme $(s^2 + \beta s + \gamma) \times (s - \alpha) = 0$, qui contient, avec les deux racines imaginaires, une racine poſitive, & dont le dernier terme $-\gamma\alpha$ eſt négatif.

Concluons de ce détail que l'équation (C) contient toujours au moins une racine poſitive.

266. Ces principes poſés, puiſque les racines de l'équation $x^4 + px^2 +$ &c, ſont toujours les mêmes, quelle que ſoit la valeur de s, qu'on ſubſtitue dans leurs expreſſions (264) ; prenons la valeur poſitive de s, afin que $\sqrt{s}$ ſoit une quantité réelle. Il eſt clair que les racines de l'équation $x^4 + px^2 +$ &c, ſeront réelles ou imaginaires, ſoit en totalité, ſoit en partie, quand les quantités radicales $\sqrt{\left[-\frac{s}{4} - \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{s}}\right]}$, $\sqrt{\left[-\frac{s}{4} - \frac{p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{s}}\right]}$ ſeront réelles ou imaginaires. Ainſi ces mêmes racines peuvent être rapportées généralement à l'un des ſyſtêmes ſuivans, où g, h, k ſont des quantités réelles.

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l} x=+g+h \\ x=+g-h \\ x=-g+k \\ x=-g-k \end{array}\right\}\text{quatre racines réelles.}$$

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{l} x=+g+h\sqrt{-1} \\ x=+g-h\sqrt{-1} \\ x=-g+k\sqrt{-1} \\ x=-g-k\sqrt{-1} \end{array}\right\}\text{quatre racines imaginaires.}$$

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{l} x=+g+h, \\ x=+g-h, \\ x=-g+k\sqrt{-1}, \\ x=-g-k\sqrt{-1}, \end{array}\right\}\text{deux racines réelles, \& deux racines imaginaires.}$$

$$\text{IV.}\left\{\begin{array}{l} x=+g+h\sqrt{-1}, \\ x=+g-h\sqrt{-1}, \\ x=-g+k, \\ x=-g-k, \end{array}\right\}\text{encore deux racines réelles, \& deux imaginaires.}$$

267. DANS le premier ſyſtême où les quatre racines ſont réelles, les quantités que nous avons nommées l, m, n dans l'article 264, ſont g, h, k reſpectivement ; & on voit que l'équation (E) a ſes trois racines réelles. Ainſi l'équation (C) ou (E) ſe rapporte alors en général (240), au cas irréductible. Concluons dans l'ordre inverſe qu'une équation du quatrième degré, dont toutes les racines ſont réelles, ne peut être réſolue généralement, qu'à l'aide d'une équation du troiſième, qui tombe dans le cas irréductible, ou dont les racines ne ſont aſſignables ſous une forme réelle & finie, que dans certains cas particuliers.

268. DANS le ſecond ſyſtême où les quatre racines de x ſont imaginaires, on a $l=g$, $m=h\sqrt{-1}$, $n=k\sqrt{-1}$. Donc $l^2=g^2$, $m^2=-h^2$, $lm^2=-gh^2$, $n^2=-k^2$, $ln^2=-gk^2$, $mn=-hk$. En ſubſtituant pour l^2, m^2, n^2, m^2n^2, lm^2, ln^2, leurs valeurs, dans l'équation (D), on aura une équation, telle que le multiplicateur de x^2, celui de x, & le dernier terme de l'équation, ſont des quantités réelles : condition qui doit toujours avoir lieu, parce qu'on ſuppoſe que dans l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$, les quantités p, q, r ſont réelles. De plus, les trois valeurs qui réſultent alors pour s, en vertu de l'équation (E), ſont auſſi des quantités réelles. Ainſi l'équation (C) tombe encore en général dans le cas irréductible. Par conſéquent, une équation du quatrième degré, dont les racines ſont imaginaires, demande pour ſa réſolution générale une équation du troiſième degré, qui appartient au cas irréductible.

269. DANS le troiſième & le quatrième ſyſtême, où l'équation x^4+px^2+ &c, a deux racines réelles, & deux racines imaginaires ; on a $l=g$, $m=h$, $n=k\sqrt{-1}$, $l^2=g^2$, $m^2=h^2$, $n^2=-k^2$, $mn=hk\sqrt{-1}$, $m^2n^2=-h^2k^2$, $lm^2=gh^2$, $ln^2=-gk^2$; ou bien, $l=g$, $m=h\sqrt{-1}$, $n=k$, $l^2=g^2$, $m^2=-h^2$, $n^2=k^2$, $mn=kh\sqrt{-1}$, $m^2n^2=-k^2h^2$, $lm^2=-gh^2$, $ln^2=gk^2$. En ſubſtituant pour l^2, m^2, n^2, m^2n^2, lm^2, ln^2, leurs valeurs dans l'équation (D), on trouvera, pour l'un & l'autre cas, que les valeurs de p, q, r ſont des quantités réelles. Mais des trois valeurs de s, données par l'équation (E), une

ſeule eſt réelle; les deux autres ſont imaginaires. Ainſi une équation du quatrième degré, qui a deux racines réelles & deux racines imaginaires, eſt réſoluble à l'aide d'une équation du troiſième degré, qui a une ſeule racine réelle, exprimable en termes finis (235).

270. LES deux cas où les racines de l'équation ſont toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, produiſant également en général une équation auxiliaire qui ſe rapporte au cas irréductible; il nous reſte encore à déterminer quelque caractere particulier qui apprenne à diſtinguer ces deux cas l'un de l'autre.

Reprenons dans cette vue les trois valeurs de s, données par l'équation (E), leſquelles ſont (264), $s=4l^2$, $s=(n+m)^2$, $s=(n-m)^2$. Or,

1°. Lorſque les quatre racines de l'équation x^4+px^2+&c, ſont réelles, on a $l=g$, $m=h$, $n=k$. Donc alors les trois racines de l'équation (E) ou (C) ſont poſitives.

2°. Suppoſons que les quatre racines de l'équation x^4+px^2+ &c, ſoient imaginaires; & par conſéquent $l=g$, $m=h\sqrt{-1}$, $n=k\sqrt{-1}$. Alors on a $s=4g^2$, $s=-h^2-2kh-k^2=-(h+k)^2$, $s=-h^2+2kh-k^2=-(h-k)^2$. Ainſi l'équation (E) ou (C) n'a qu'une ſeule racine poſitive, & les deux autres ſont négatives.

Nous apprendrons dans la ſuite à diſtinguer par la combinaiſon des ſignes des termes d'une équation quelconque qui ne contient que des racines réelles, combien elle en contient de poſitives ou de négatives.

271. Les expressions générales que nous avons trouvées (259) des quatre racines de l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, comprennent tous les cas possibles, c'est-à-dire qu'elles donneront les racines de l'équation, quelques valeurs qu'on attribue aux quantités p, q, r. Supposons par exemple $q = 0$; ce qui revient au cas de l'article 256. Alors l'équation auxiliaire (C) donne $s = 0$; & comme (258) on a toujours en général $-\frac{q}{2\sqrt{s}} = \sqrt{\left[\left(\frac{p+s}{2}\right)^2 - r\right]}$: il s'ensuit que les quatre valeurs de x seront

$$x = +\sqrt{\left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - r\right)}\right]},$$

$$x = -\sqrt{\left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - r\right)}\right]},$$

$$x = +\sqrt{\left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - r\right)}\right]},$$

$$x = -\sqrt{\left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - r\right)}\right]},$$

formules qui reviennent à celles de l'article 256.

272. Examinons encore un cas particulier. Supposons que la quantité radicale $\sqrt{\left[-\frac{s}{4} - \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{s}}\right]}$, ou $\sqrt{\left[-\frac{s}{4} - \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{p+s}{2}\right)^2 - r\right)}\right]}$, s'évanouisse. Les deux premières racines de l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, deviendront éga-

les; & on aura par hypothèse, $\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\left(\frac{p+s}{2}\right)^2-r\right)}\right]}=0$, ou bien (en quarrant, transposant, quarrant & dégageant s), $s = \ldots \frac{-2p \pm \sqrt{(4pp+48r)}}{3}$. On trouveroit la même équation, si l'on supposoit que la quantité radicale $\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}+\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]}$ qui entre dans les deux dernières racines de x fût zero. Ainsi les valeurs de s, indiquées par le double signe, serviront pour les deux cas. Mais d'un autre côté, la valeur de s qu'on tirera de l'équation auxiliaire (C), a toujours lieu. Il faut donc que cette valeur coïncide avec celle qui résulte de l'hypothèse que l'une ou l'autre des deux quantités radicales proposées s'évanouisse; ce qui produira entre p, q, r une équation de condition qui contiendra la relation que ces quantités doivent avoir entr'elles, pour que l'hypothèse dont il s'agit soit admissible.

Nous donnerons dans la suite une méthode facile pour trouver les racines égales qui peuvent être contenues dans une équation d'un degré quelconque.

273. REVENONS à la résolution générale des équations du quatrième degré, & réduisons-la briévement en maximes pour la commodité de la pratique.

Lorsque vous avez à résoudre une équation du quatrième degré, telle que $x^4+px^2+qx+r=0$, qui n'a point de second terme, ou qui provient d'une équation dont on a commencé à faire évanouir le ſecond terme au moyen de la transformation indiquée (233):

1°. Formez l'équation auxiliaire (C) $s^3 + 2ps^2 + (pp - 4r)s - qq = 0$, laquelle a toujours au moins une racine poſitive (265).

2°. Chaſſez le ſecond terme de cette équation, en ſuppoſant $s = u - \frac{2p}{3}$; ce qui vous donnera une transformée de cette eſpece $u^3 + p'u + q' = 0$, dans laquelle on a $p' = -\frac{p^2}{3} - 4r$, $q' = -\frac{2p^3}{27} + \frac{8pr}{3} - q^2$.

Si cette équation n'a qu'une ſeule racine réelle, ce qui arrive (238) lorſque p' eſt une quantité poſitive, ou lorſque p' étant négative, on a $\frac{p'^3}{27} < \frac{q'q'}{4}$: l'équation propoſée $x4 + px^2 +$ &c a deux racines réelles & deux racines imaginaires.

Si la même équation en u a ſes trois racines réelles, ce qui arrive (239 & 240) lorſque p' eſt une quantité négative & qu'on a de plus $\frac{p'^3}{27} \geqq \frac{q'q'}{4}$: les racines de l'équation $x^4 + px^2 +$ &c ſont toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires. Le premier cas a lieu lorſque les trois racines de l'équation en s ſont poſitives, & le ſecond, lorſque l'une ſeulement des racines de la même équation eſt poſitive, & les deux autres négatives.

3°. Déterminez l'une des trois racines positives de l'équation en s, ou la seule racine positive de la même équation. En représentant cette racine par $+s$, prenez

$$x=\frac{\sqrt{s}}{2}+\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}-\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]},$$

$$x=\frac{\sqrt{s}}{2}-\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}-\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]};$$

$$x=-\frac{\sqrt{s}}{2}+\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}+\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]},$$

$$x=-\frac{\sqrt{s}}{2}-\sqrt{\left[-\frac{s}{4}-\frac{p}{2}+\frac{q}{2\sqrt{s}}\right]}.$$

Ces formules seront les quatre racines de l'équation proposée $x^4+px^2+qx+r=0$. Faisons-en quelques applications.

PROBLEME I.

274. *Résoudre l'équation* $t^4+4t^3+3t^2+3=0$?

Je commence par délivrer l'équation de son second terme, en supposant $t=x-1$; ce qui me donne la transformée $x^4-3x^2+2x+3=0$.

On a donc $p=-3$, $q=2$, $r=3$; & l'équation en s est $s^3-6s^2-3s-4=0$.

L'équation en u est $u^3-15u-26=0$.

Cette équation n'a (238) qu'une seule racine réelle; & par conséquent l'équation x^4-3x^2+&c, a deux racines réelles & deux racines imaginaires. La valeur réelle de u est (235),

$$u=\sqrt[3]{[13+\sqrt{44}]}+\sqrt[3]{[13-\sqrt{44}]}.$$

Donc, à cauſe de $s=u+2$, nous aurons, $\sqrt{s}=\sqrt{[2+\sqrt[3]{(13+\sqrt{44})}+\sqrt[3]{(13-\sqrt{44})}]}$.

Subſtituant cette valeur de $\sqrt{s}$ dans les quatre expreſſions générales de x, données à la fin de l'article précédent, on aura les quatre racines de l'équation x^4-3x^2+ &c. On trouvera par le calcul, ce qu'on ſait déja, que deux de ces racines ſont réelles, & que les deux autres ſont imaginaires. Connoiſſant les valeurs de x, on aura auſſi celles de t, puiſque $t=x-1$. On voit que des quatre valeurs de t, deux ſont réelles, & les deux autres imaginaires.

Comme en exécutant littéralement les opérations que je viens d'indiquer, les expreſſions qu'on obtiendroit pour x & t, ſeroient fort chargées de radicaux, & que dans la pratique du calcul, les quantités radicales doivent être évaluées en nombres rationnels qui en approchent; mettons d'abord la valeur de u ſous une forme rationnelle. La quantité $\sqrt{44}$, ou $2\sqrt{11}=6,6332$, à peu de choſe près. Donc $13+\sqrt{44}=19,6332$, dont la racine cube eſt à peu près $2,6978$; & $13-\sqrt{44}=6,3668$, dont la racine cube eſt à peu près, $1,8534$. Ainſi on aura $u=\sqrt{6,5512}=2,5596$, ſenſiblement. Par conſéquent les quatre valeurs de x ſeront,

$$x=+1,2798+\sqrt{-0,5285},$$
$$x=+1,2798-\sqrt{-0,5285},$$
$$x=-1,2798+\sqrt{0,2529},$$
$$x=-1,2798-\sqrt{0,2529}.$$

Les deux premières racines ſont imaginaires, & les deux autres ſont réelles. L'une de ces deux dernières eſt $-0,777$, l'autre $-1,7826$.

En retranchant 1 de chacune des valeurs de x, on aura les valeurs de t. Ainſi les deux valeurs réelles de t ſont, à peu de choſe près, $t=-1,777$, $t=-2,7826$. C. Q. F. T.

PROBLEME II.

275. *RÉSOUDRE l'équation* $x^4-12x^2-8x+2=0$?

Cette équation eſt délivrée de ſon ſecond terme; & on a $p=-12$, $q=-8$, $r=2$. L'équation en s eſt, $s^3-24s^2+136s-64=0$. L'équation en u eſt, $u^3-56u=0$. D'où l'on tire ces trois racines réelles, $u=0$, $u=+\sqrt{56}$, $u=-\sqrt{56}$.

Ainſi les racines de l'équation propoſée x^4-12x^2- &c, ſont toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. C'eſt le premier cas qui a lieu, parce que les trois valeurs de s ſont poſitives, à cauſe de $s=u+8$. Employons la première valeur de u, c'eſt-à-dire, prenons $u=0$; nous aurons $s=u+8=8$, & $\sqrt{s}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Subſtituant cette valeur de s dans les expreſſions générales de x, de l'article 273, on aura, pour les quatre racines de notre équation,

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{\left[4+\frac{\sqrt{8}}{2}\right]},$$

$$x=\sqrt{2}-\sqrt{\left[4+\frac{\sqrt{8}}{2}\right]},$$

$$x = -\sqrt{2} + \sqrt{\left[4 - \frac{\sqrt{8}}{2}\right]}.$$

$$x = -\sqrt{2} - \sqrt{\left[4 - \frac{\sqrt{8}}{2}\right]}.$$

C. Q. F. T.

Dans cet exemple, le dernier terme de l'équation en u s'eſt évanoui fortuitement. Mais en général ſi cette équation a ſon dernier terme, & qu'elle ait toujours ſes trois racines réelles, on trouvera ces racines, au moins par approximation, à l'aide des articles 242, 243 & 244.

PROBLEME III.

276. *RÉSOUDRE l'équation* $x^4 - 6x^2 + 4x + 23 = 0$?

Cette équation n'a point de ſecond terme; & on a $p = -6$, $q = 4$, $r = 23$. L'équation en s eſt $s^3 - 12s^2 - 56s - 16 = 0$. L'équation en u eſt $u^3 - 104u - 368 = 0$.

Cette équation a ſes trois racines réelles (240). Par conſéquent les racines de l'équation propoſée $x^4 - 6x^2 +$ &c, ſont toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. C'eſt le ſecond cas qui a lieu, parce que l'équation en s n'a qu'une valeur poſitive & deux négatives. Le problême qui auroit conduit à l'équation $x^4 - 6x^2 +$ &c, renfermeroit donc des abſurdités dans ſes conditions. Je me diſpenſe d'écrire les valeurs de x, parce que ces valeurs, imaginaires, ſont fort chargées de radicaux.

CHAPITRE XII.

Considérations générales sur la nature des Equations de tous les degrés.

277. QUELQUES efforts qu'on ait faits pour perfectionner l'Algébre, on n'a pu parvenir jusqu'ici à résoudre généralement que les équations des quatre premiers degrés ; encore même, la méthode pour les équations du troisième & du quatrième degré a-t-elle l'inconvénient de ne pas donner les racines sous une forme finie, lorsque l'équation du troisième degré, qu'il faut résoudre, comme objet principal ou secondaire, appartient proprement au cas irréductible. J'ai cru devoir expliquer d'abord, & sans interruption, cette branche de l'Algébre, parce qu'elle peut être regardée, en quelque sorte, comme un tout à part. Voici maintenant des recherches générales sur la nature des équations de tous les degrés. Ces recherches nous frayeront le chemin pour résoudre un grand nombre d'équations particulières d'un ordre quelconque.

278. SOIT, entre l'inconnue x & les données a, b, c, d, l'équation $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\times(x-d)=0$; c'est-à-dire, en effectuant les multi-

plications, & ordonnant le produit final par rapport à x,

$$x^4 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\\-d\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix}+abcd\end{matrix}\right\} = 0.$$

Il eſt clair que le ſecond membre de cette équation peut être zero de quatre manières différentes ; ſavoir, en ſuppoſant, ou $x = a$, ou $x = b$, ou $x = c$, ou $x = d$. Car dans tous les cas, on aura zero pour l'un des quatre facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$. Or, zero multipliant une quantité quelconque donne zero pour produit. Si l'on mettoit pour x toute autre valeur e ; alors aucun des facteurs $e - a$, $e - b$, $e - c$, $e - d$, n'étant zero, leur produit ne ſeroit pas non plus zero. Il y a donc dans l'équation propoſée quatre racines ou valeurs pour x ; & ce qui caractériſe ces racines, c'eſt qu'en ſubſtituant ſucceſſivement chacune d'elles à la place de x, la totalité des termes de l'équation s'évanouit par l'oppoſition des ſignes + & —.

L'équation précédente n'eſt que du quatrième degré; mais on voit bien que la même remarque s'applique à toutes ſortes d'équations ; c'eſt-à-dire, qu'en général une équation d'un degré quelconque a autant de racines qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnue, & que chaque racine a la propriété de rendre, par ſa ſubſtitution à la place de l'inconnue, l'aſſemblage de tous les termes de l'équation égal à zero.

Je n'ai pas beſoin de faire obſerver qu'on ne peut pas ſuppoſer tout-à-la-fois pour les racines d'une équation, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, &c; mais que ces équations particulières ont lieu ſeulement dans le ſens disjonctif. Elles ſont compriſes, comme facteurs, dans une même équation, parce que l'Algébre, comme nous l'avons déja obſervé (206), donne, par une même formule, non-ſeulement la ſolution du problême particulier qu'on peut s'être propoſé, mais encore la ſolution de tous les problêmes qui ont des conditions ſemblables. Les différentes racines de l'équation ſatisfont à chaque condition. Ces racines peuvent différer entr'elles, par la quantité & par la manière d'être.

Quelquefois on dit que les racines d'une équation ſont $x = a$, $x = b$, $x = c$, &c, ce qui donne $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, &c ; mais cette manière de parler eſt une abréviation qu'il faut entendre dans le ſens que je viens d'expliquer.

279. DANS l'équation qui précéde, toutes les racines ſont poſitives. L'équation ſuivante $(x + a) \times (x + b) \times (x + c) \times (x + d) = 0$, c'eſt-à-dire,

$$x^4 \left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+cd\\+bd\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\right\} x + abcd \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} = 0,$$

a toutes ſes racines négatives. Ces racines ſont $x = -a$, $x = -b$, $x = -c$, $x = -d$; équations qu'il faut toujours entendre dans le ſens disjonctif.

280. Il y a des équations qui ont leurs racines en partie poſitives, en partie négatives. Telle eſt l'équation,

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - a \\ \quad - b \\ \quad + c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2 + ab \\ \quad - ac \\ \quad - bc \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + abc \\ \\ \end{array}\right\} = 0,$$

qui a deux racines poſitives, ſavoir, $x = a$, $x = b$, & une racine négative, ſavoir $x = -c$.

281. Les équations précédentes ont été regardées comme formées d'équations du premier degré ; & alors chacune d'elles contient autant de ces équations compoſantes qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon degré. On peut auſſi regarder une équation qui paſſe le ſecond degré, comme compoſée d'une ou de pluſieurs équations du ſecond degré, ou du troiſiéme, &c, combinées, s'il eſt néceſſaire, avec des équations du premier ; de maniére que le produit de toutes ces équations compoſantes forme une équation du même degré que la propoſée, & qui coïncide entiérement avec elle. En effet, lorſque l'on compoſe une équation par la multiplication ſucceſſive de pluſieurs équations du premier degré, on forme des équations du ſecond degré ou du troiſiéme, &c, qu'on peut par conſéquent prendre pour des facteurs de la propoſée.

282. Il peut arriver qu'une équation contienne des racines

racines imaginaires, & alors il s'en trouve auſſi dans ſes équations compoſantes. Ces ſortes de racines vont toujours deux à deux, parce qu'on peut les regarder comme contenant dans leur expreſſion au moins un radical *pair* placé au-devant d'une quantité négative, & qu'un tel radical porte eſſentiellement le double ſigne $\pm$. Soit, par exemple, l'équation $x^4 - (2a - 2c) x^3 + (aa + bb - 4ac + cc + dd) x^2 + (2aac + 2bbc - 2acc - 2add) x + (aa + bb).(cc + dd) = 0$, que l'on peut regarder comme compoſée des deux équations du ſecond degré, $xx - 2ax + aa + bb = 0$, $xx + 2cx + cc + dd = 0$. Chacune de ces équations compoſantes contient deux racines imaginaires. En effet, la première $xx - 2ax + aa + bb = 0$, donne $x = a \pm b\sqrt{-1}$; & la ſeconde $xx + 2cx + cc + dd = 0$, donne $x = -c \pm d\sqrt{-1}$.

On voit que dans l'équation réſultante du produit de ces deux équations les coéfficients des puiſſances de l'inconnue, & le dernier terme de l'équation, ſont des quantités réelles; les imaginaires diſparoiſſent par voie d'addition & de multiplication. Il en ſera de même dans l'équation $(x - a).(x + b).(xx + 2cx + cc + dd)$, qui eſt formée de deux équations du premier degré & d'une équation du ſecond dont les racines ſont imaginaires; ainſi des autres.

283. QUELLE que ſoit l'eſpèce des racines d'une équation, on voit en général que l'équation étant ordonnée par rapport à l'inconnue, & le premier terme étant poſitif & ſans autre coéfficient que l'unité,

1°. Le premier terme de l'équation n'eſt autre choſe que l'inconnue élevée à la puiſſance exprimée par le nombre des racines.

2°. Le ſecond terme contient l'inconnue élevée à une puiſſance moindre d'une unité, avec un coéfficient égal à la ſomme des racines priſes avec des ſignes contraires.

3°. Le troiſième terme contient l'inconnue élevée à une puiſſance encore moindre d'une unité, avec un coéfficient égal à la ſomme de tous les produits qu'on peut former, en multipliant toutes les racines deux à deux.

4°. Le quatrième terme contient l'inconnue élevée à une puiſſance encore moindre d'une unité, avec un coéfficient égal à la ſomme des produits qu'on peut faire en multipliant trois à trois toutes les racines priſes avec des ſignes contraires.

Ainſi de ſuite. Le dernier terme eſt le produit de toutes les racines priſes avec des ſignes contraires.

Tout cela eſt évident à l'inſpection des équations données pour exemples dans les articles 278, 279, 280, 282.

284. On voit auſſi par-là que le nombre des termes d'une équation complette ſurpaſſe de l'unité l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnue, ou le nombre des racines. J'appelle *équation complette* une équation qui a tous ſes termes; car il peut arriver qu'une équation ſoit privée d'un terme, ou de pluſieurs termes: par exemple, l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, n'a point de ſecond terme : l'équation $x^3 + r = 0$, n'a ni ſecond, ni troiſième terme.

On met quelquefois l'aſtérique * pour tenir la place d'un terme qui manque.

Quant aux conditions qui privent une équation d'un terme ou de pluſieurs termes, elles ſe préſentent d'elles-mêmes après ce que nous venons de dire. Une équation n'a point de ſecond terme, lorſque toutes ſes racines étant ſuppoſées réelles, les unes ſont poſitives, les autres négatives, & que la ſomme des racines poſitives eſt égale à la ſomme des racines négatives. Ainſi, par exemple, l'équation de l'article 280 n'aura point de ſecond terme, ſi l'on a $a+b=c$. Une équation dont toutes les racines ſont imaginaires, n'aura point de ſecond terme, ſi la ſomme des quantités réelles qui entrent dans les expreſſions des racines, eſt en partie poſitive, en partie négative, & que le réſultat ſe réduiſe à zero : les parties imaginaires ſe détruiſent mutuellement par l'addition dans chaque paire de racines. Ainſi la première équation de l'article 282 n'aura point de ſecond terme, ſi l'on a $-2a+2c=0$, ou $a=c$. La ſeconde équation du même article, laquelle a ſes racines en partie réelles, en partie imaginaires, n'aura point de ſecond terme, ſi l'on a $b-a+2c=0$, ou $a-b=2c$.

Une équation n'aura point de troiſième terme, ſi la ſomme des produits des racines priſes à deux eſt en partie poſitive, en partie négative, & que le réſultat ſoit égal à zero ; &c.

285. ON trouve ſans peine, au moyen du même article 283, la ſomme des puiſſances quelconques des racines d'une équation. Car ſoit l'équation du degré

quelconque m, $x^m + fx^{m-1} + gx^{m-2} + hx^{m-3} +$ &c $= 0$; & nommons a, b, c, &c, ſes racines. Cela poſé,

1°. La ſomme des premières puiſſances des racines, c'eſt-à-dire, la ſomme des racines mêmes, ou $a + b + c +$ &c $= -f$, puiſque le coéfficient de l'inconnue dans le ſecond terme eſt égal à la ſomme des racines priſes avec des ſignes contraires.

2°. La ſomme des quarrés des racines, c'eſt-à-dire, $a^2 + b^2 + c^2 +$ &c $= f^2 - 2g$. Car ſi l'on fait (115 & 119) le quarré du polynome $a + b + c +$ &c, on trouvera que ce quarré contient la ſomme des quarrés des termes a, b, c, &c, plus le double de la ſomme des produits que l'on forme, en multipliant enſemble deux à deux toutes les racines a, b, c, &c ; c'eſt-à-dire qu'on aura $(a + b + c +$ &c$)^2 = a^2 + b^2 + c^2 +$ &c $+ 2(ab + ac + bc +$ &c$)$. Or on a $(a + b + c +$ &c$)^2 = f^2$, & $ab + ac + bc +$ &c $= g$. Ainſi on aura $f^2 = a^2 + b^2 + c^2 +$ &c $+ 2g$, & par conſéquent $a^2 + b^2 + c^2 +$ &c $= f^2 - 2g$.

3°. La ſomme des cubes des racines, c'eſt-à-dire, $a^3 + b^3 + c^3 +$ &c $= -f^3 + 3fg - 3h$. Car ſi l'on fait le cube de $a + b + c +$ &c, on trouvera $(a + b + c +$ &c$)^3 = a^3 + b^3 + c^3 +$ &c $+ 3(a + b + c) \times (ab + ac + bc) - 3abc$. Or, on a $(a + b + c +$ &c$)^3 = -f^3$, $(a + b + c) \times (ab + ac + bc) = -fg$, $abc = -h$. Nous aurons donc $-f^3 = a^3 + b^3 + c^3 +$ &c $- 3fg + 3h$; & par conſéquent $a^3 + b^3 + c^3 +$ &c $= -f^3 + 3fg - 3h$.

CHAPITRE XIII.

Digression où l'on montre l'usage de la théorie établie dans le Chapitre précédent, pour élever un polynome à une puissance quelconque.

286. AVANT que de pousser plus loin ces recherches sur la nature des équations, je profiterai de l'occasion qui se présente de trouver & de démontrer facilement la formule pour élever un polynome à une puissance quelconque. C'est cette formule qui a été promise dans l'article 139.

287. SOIT, en premier lieu, le binome $x+a$ qu'il s'agit d'élever à une puissance exprimée par le nombre m entier & positif.

La question se réduit à former un produit dans lequel $x+a$ entre, comme facteur, autant de fois qu'il y a d'unités dans m. Ce produit indiqué est $(x+a)\times(x+a)\times(x+a)\times\ldots\ldots$ Il peut être regardé comme une équation dont tous les termes sont placés d'un même côté, & dont toutes les racines, en prenant x pour l'inconnue, sont égales & représentées chacune par $-a$. Ainsi (283),

1°. Le premier terme du produit précédent développé sera x^m.

2°. Le ſecond terme ſera max^{m-1}. Car une équation, dont les racines, au nombre de m, ſont $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, &c, a pour ſecond terme $(a+b+c+d+$ &c,$)$ x^{m-1}. Donc, puiſqu'on a ici $a=b=c=d=$&c, au lieu de $a+b+c+d+$ &c, il faut répéter a autant de fois qu'il y a d'unités dans m; ce qui donnera max^{m-1} pour le terme dont il s'agit.

3°. Le troiſième terme ſera $\frac{m.(m-1)}{2}a^2x^{m-2}$. Car lorſque les racines d'une équation ſont $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, &c, le troiſième terme eſt $(ab+ac+ad+cd+$ &c$)$ x^{m-2}; en ſorte que le coéfficient de x^{m-2} eſt la ſomme des produits des racines priſes deux à deux. Donc, ſi chacune de ces racines eſt $-a$, chacun des produits cités ſera a^2; & il faudra le répéter autant de fois qu'on peut former de mots de deux lettres, en combinant enſemble deux à deux un nombre m de lettres, ſans faire entrer plus d'une fois la même lettre dans un même mot, & en ne conſervant qu'un ſeul mot de tous ceux qui contiennent les mêmes lettres. Or, ſi l'on généraliſe ce qui a été dit à ce ſujet (Arith. 296), on verra que ce nombre de mots eſt $\frac{m.(m-1)}{2}$. Ainſi, le troiſième terme cherché eſt $\frac{m.(m-1)}{2}a^2x^{m-2}$.

4°. Le quatrième terme eſt $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1\times2\times3}a^3x^{m-3}$. Car les racines d'une équation étant $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, &c, le quatrième terme eſt $(abc+acd+bcd+$&c$)$ x^{m-3}. Donc ici, chacun des produits abc, acd, bcd, &c, devenant a^3, il faut, pour avoir leur somme, répéter a^3 autant de fois qu'on peut former de mots de trois lettres, en combinant ensemble trois à trois un nombre m de lettres, sans faire entrer plus d'une fois la même lettre dans un même mot, & en ne conservant qu'un mot de tous ceux qui contiennent les mêmes lettres. Or, par l'article cité de l'Arithmétique, ce nombre de mots est $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1\times 2\times 3}$. Ainsi, le terme cherché est $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1\times 2\times 3}a^3x^{m-3}$.

On trouvera semblablement que le cinquième terme est $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^4x^{m-4}$; que le sixième est $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}a^5x^{m-5}$; ainsi de suite jusqu'au dernier qui est a^m.

Par conséquent, on aura,

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1\times 2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1).(m-2)}{1\times 2\times 3}a^3x^{m-3} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^4x^{m-4} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}a^5x^{m-5} + \&c.$$

Cette suite s'interrompt, lorsque la lettre m est égale à l'un des nombres dont elle est accompagnée, parce que dès ce moment tous les termes ont un facteur qui est zero.

Soit, par exemple, $m=5$; c'est-à-dire, qu'il s'agisse d'élever le binome $x+a$ à la cinquième puissance. On aura $x^m = x^5$; $max^{m-1} = 5ax^4$; $\frac{m.(m-1)}{1 \times 2} a^2 x^{m-2} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} a^2 x^3 = 10 a^2 x^3$; $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1 \times 2 \times 3} a^3 x^{m-3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} a^3 x^2 = 10 a^3 x^2$; $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^4 x^{m-4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^4 x = 5a^4 x$; $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} a^5 x^{m-5} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} a^5 x^0 = a^5$. Les termes suivants sont zero. Ainsi on a $(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

288. Si le binome qu'il s'agit d'élever à la puissance m, étoit $x-a$, il faudroit mettre dans la formule précédente, le signe — au-devant de tous les termes où a est élevée à des puissances impaires. Par-là, on auroit,

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1 \times 2} a^2 x^{m-2} - \frac{m(m-1).(m-2)}{1 \times 2 \times 3} a^3 x^{m-3} + \&c.$$

289. On élevera, par la même méthode, un polynome quelconque à une puissance m. Soit, par exemple, le trinome $a+b+c$. En faisant d'abord $b+c=p$, on aura $(a+b+c)^m = (x+p)^m = x^m + mpx^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1 \times 2} p^2 x^{m-2} + \ldots$

$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1\times2\times3}p^3x^{m-3}+$ &c. Ensuite il ne s'agira plus que de substituer pour p sa valeur $b+c$, pour p^2 sa valeur $(b+c)^2$, pour p^3 sa valeur $(b+c)^3$, &c; toutes ces valeurs se trouvent par la même formule.

290. En second lieu, qu'il s'agisse d'élever le binome $x+a$ à la puissance fractionnaire $\frac{m}{n}$, m & n étant des nombres entiers positifs.

Pour abréger le calcul, au lieu de $x+a$, j'écris $x\left(1+\frac{a}{x}\right)$, & je fais $\frac{a}{x}=b$; ce qui donne $(x+a)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}(1+b)^{\frac{m}{n}}$. La question est donc de développer la quantité $(1+b)^{\frac{m}{n}}$; car ensuite il ne s'agira plus que de multiplier tous ses termes par $x^{\frac{m}{n}}$; & de mettre, pour b & ses puissances, $\frac{a}{x}$ & ses puissances. Or, je dis, qu'en faisant encore, pour abréger, $\frac{m}{n}=q$, on aura l'équation,

$$\text{(A)}\quad (1+b)^q=1+qb+\frac{q.(q-1)}{1\times2}b^2+\frac{q(q-1).(q-2)}{1\times2\times3}b^3+\frac{q(q-1).(q-2).(q-3)}{1\times2\times3\times4}b^4+\text{\&c};$$

Formule qui est de la même espèce que celle de l'article 287.

Il eſt clair que cette propoſition ſera démontrée, ou que l'équation précédente ſera vraie, ſi l'on fait voir qu'en élevant chaque membre de cette équation à la même puiſſance n, on aura des réſultats identiques. Or,

1°. En élevant $(1+b)^q$ à la puiſſance n, on a $(1+b)^{nq}=(1+b)^m$; & par l'article 287, on a l'équation,

$$\text{(B)} \quad (1+b)^m = 1 + mb + \frac{m.(m-1)}{1\times 2} b^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1\times 2\times 3} b^3 + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4} b^4 + \&c.$$

2°. Pour élever le ſecond membre de l'équation (A) à la puiſſance n, je repréſente par p la ſomme des termes qui ſuivent le premier 1 dans ce membre; & j'ai,

$$\text{(C)} \quad (1+p)^n = 1 + np + \frac{n.(n-1)}{1\times 2} p^2 + \frac{n(n-1).(n-2)}{1\times 2\times 3} p^3 + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1\times 2\times 3\times 4} p^4 + \&c.$$

Maintenant, puiſqu'on a par hypothèſe,

$$p = qb + \frac{q.(q-1)}{1\times 2} b^2 + \frac{q.(q-1).(q-2)}{1\times 2\times 3} b^3 + \frac{q.(q-1).(q-2).(q-3)}{1\times 2\times 3\times 4} b^4 + \&c,$$

on aura, en ordonnant toujours par rapport à b,

$$p^2 = \quad q^2b^2 + q^2(q-1)b^3 + \frac{q^2(q-1)^2}{4}b^4 + \&c.$$

$$p^3 = \quad + q^3b^3 + \frac{3q^3(q-1)}{2}b^4 + \&c.$$

$$p^4 = \quad + q^4b^4 + \&c.$$

&c.

Subſtituons dans le ſecond membre de l'équation (C), à la place de p, p^2, p^3, &c, leurs valeurs ; ce membre deviendra,

$$1 + nqb + \frac{nq(q-1)}{1\times 2} \atop + \frac{n.(n-1)q^2}{1\times 2} \left\{ b^2 + \begin{matrix} \dfrac{nq.(q-1)(q-2)}{1\times 2\times 3} \\ + \dfrac{n.(n-1)q^2(q-1)}{1\times 2} \\ + \dfrac{n.(n-1)(n-2)q^3}{1\times 2\times 3} \end{matrix} \right\} b^3 + \&c.$$

Or, le coéfficient de b, c'eſt-à-dire, $nq = m$; le coéfficient de b^2, c'eſt-à-dire, $\frac{nq(q-1) + n.(n-1)q^2}{1\times 2}$ $= \frac{n^2q^2 - nq}{1\times 2} = \frac{m^2 - m}{1\times 2} = \frac{m.(m-1)}{1\times 2}$; le coéfficient de b^3, c'eſt-à-dire, $\frac{nq.(q-1).(q-2)}{1\times 2\times 3} +$ $\frac{n.(n-1)q^2.(q-1)}{1\times 2} + \frac{n.(n-1).(n-2)q^3}{1\times 2\times 3} =$ $\frac{nq}{1\times 2\times 3}\Big((q-1).(q-2) + 3q.(n-1)(q-1) +$ $q^2(n-1).(n-2)\Big) = \frac{nq}{1\times 2\times 3}\Big(n^2q^2 - 3nq + 2\Big)$

$$= \frac{nq}{1 \times 2 \times 3} \left((nq - 1) \cdot (nq - 2) \right) = \ldots \ldots \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \times 2 \times 3}.$$

On trouvera de même, en pouſſant le calcul plus loin, que le coéfficient de b^4 ſera .... $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$; que celui de b^5 ſera $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$; ainſi de ſuite. D'où l'on voit que le ſecond membre de l'équation (C) eſt le même que le ſecond membre de l'équation (B). Donc l'équation (A) eſt démontrée. Ainſi, nous aurons, en multipliant chacun de ſes membres par $x^{\frac{m}{n}}$, chaſſant b par le moyen de ſa valeur $\frac{a}{x}$, & q par le moyen de ſa valeur $\frac{m}{n}$,

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a x^{\frac{m}{n}-1} + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1 \times 2} a^2 x^{\frac{m}{n}-2} + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1 \times 2 \times 3} a^3 x^{\frac{m}{n}-3} + \&c.$$

Cette formule ſert à tirer la racine quelconque d'un binome. Car, par exemple, ſi on demande la racine cube du binome $x+a$, on obſervera que cette racine étant la même chose que $(x+a)^{\frac{1}{3}}$, la question est d'élever le binome $x+a$ à la puissance $\frac{1}{3}$. Il faut donc supposer, dans la formule précédente, $m=1$, $n=3$; & on trouve $(x+a)^{\frac{1}{3}} =$

$$x^{\frac{1}{3}} + \frac{ax^{-\frac{2}{3}}}{3} - \frac{a^2x^{-\frac{5}{3}}}{9} + \frac{5a^3x^{-\frac{8}{3}}}{81} - \frac{10a^4x^{-\frac{11}{3}}}{243} + \&c.$$

On doit observer que des deux termes du binome $x+a$, il faut regarder comme le premier celui qui est le plus grand, afin d'avoir des suites convergentes.

291. Si le binome qu'on doit élever à la puissance $\frac{m}{n}$, étoit $x-a$, il faudroit changer, dans la formule précédente, les signes de tous les termes où a est élevée à des puissances impaires.

292. La même formule sert, en procédant comme dans l'article 289, à élever un polynome quelconque à la puissance $\frac{m}{n}$.

Par exemple, soit le trinome $cc+2cd+dd$, qu'il faut élever à la puissance $\frac{1}{2}$, ou, ce qui revient au même, dont il faut extraire la racine quarrée. Je fais $cc=x$, $2cd+dd=a$, $m=1$, $n=2$. On aura d'abord $(x+a)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{ax^{-\frac{1}{2}}}{2} -$

$$\frac{a^2x^{-\frac{3}{2}}}{8} + \frac{a^3x^{-\frac{5}{2}}}{16} - \frac{5a^4x^{-\frac{5}{2}}}{128} + \frac{7a^5x^{-\frac{9}{2}}}{256} -$$
$- \&c.$

Subſtituons, dans le ſecond membre, pour x ſa valeur c^2, pour a ſa valeur $2cd + dd$, pour a^2 ſa valeur $4c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$, pour a^3 ſa valeur $8c^3d^3 + 12c^2d^4 + 6cd^5 + d^6$, nous aurons,

$$\begin{array}{rcl}
x^{\frac{1}{2}} & = & c \\
+ \dfrac{ax^{-\frac{1}{2}}}{2} & = & d + \dfrac{d^2}{2c} \\
- \dfrac{a^2x^{-\frac{3}{2}}}{8} & = & - \dfrac{d^2}{2c} - \dfrac{d^3}{2c^2} - \dfrac{d^4}{8c^3} \\
+ \dfrac{a^3x^{-\frac{5}{2}}}{16} & = & + \dfrac{d^3}{2c^2} + \dfrac{3d^4}{4c^3} + \dfrac{3d^5}{8c^4} + \dfrac{d^6}{16c^5} \\
- \dfrac{5a^4x^{-\frac{7}{2}}}{128} & = & - \dfrac{5d^4}{8c^3} - \dfrac{5d^5}{4c^4} - \dfrac{15d^6}{16c^5} - \&c. \\
\&c. & = & \&c.
\end{array}$$

En ajoutant enſemble toutes les parties du ſecond membre, on trouvera que ce membre ſe réduit à $c + d$, parce que la partie reſtante $\frac{d^2}{2c}$ du ſecond terme eſt détruite par la partie $-\frac{d^2}{2c}$ du troiſième terme ; que ce qui reſte de ce terme eſt détruit par une partie du quatrième ; que ce qui reſte du quatrième, eſt détruit par une partie du cinquième ; ainſi de ſuite. En ſorte que la puiſſance $\frac{1}{2}$ de $cc +$

$2cd + dd$ eſt ſimplement $c + d$. En effet, il eſt clair que la racine quarrée de $cc + 2cd + dd$ eſt $c + d$.

293. ENFIN, ſuppoſons qu'il faille élever le binome $x + a$ à la puiſſance fractionnaire négative $-\frac{m}{n}$.

La quantité $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$ eſt la même choſe (75) que $\frac{1}{(x+a)^{\frac{m}{n}}}$, ou $\frac{1}{x^q(1+b)^q}$, en prenant, pour abréger le calcul, $\frac{a}{x} = b$, $\frac{m}{n} = q$. Cela poſé, je dis d'abord qu'on aura l'équation,

(D) $\frac{1}{(1+b)^q}$, ou $(1+b)^{-q} = 1 + (-q)b + \frac{(-q).(-q-1)}{1 \times 2}b^2 + \frac{(-q).(-q-1).(-q-2)}{1 \times 2 \times 3}b^3 + \frac{(-q).(-q-1).(-q-2).(-q-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}b^4 +$ &c.

Cette équation ſera démontrée, ſi l'on fait voir qu'en multipliant chaque membre par $(1+b)^q$, le ſecond membre ſe réduit à 1, puiſque le premier eſt alors 1. Or, on a $(1+b)^q = 1 + qb + \frac{q.(q-1)}{1 \times 2}b^2 + \frac{q.(q-1).(q-2)}{1 \times 2 \times 3}b^3 +$ &c.

Multipliant le ſecond membre de cette équation par celui de l'équation (D), & ordonnant, par rapport à b, on trouvera que le produit,

$$1 \left.\begin{matrix}+q\\-q\end{matrix}\right\} b + \left.\begin{matrix}\frac{q(q-1)}{1\times2}\\ -q^2\\ +\frac{q.(q+1)}{2}\end{matrix}\right\} b^2 + \left.\begin{matrix}\frac{q(q-1)(q-2)}{1\times2\times3}\\ -\frac{q^2(q-1)}{1\times2}\\ +\frac{q^2(q+1)}{1\times2}\\ -\frac{q(q+1)(q+2)}{1\times2\times3}\end{matrix}\right\} b^3 + \&c,$$

se réduit à 1, parce que chacun des coéfficients de b, de b^2, de b^3, de b^4, &c, est égal à zero. Ainsi l'équation (D) est vraie. Multipliant chaque membre de cette équation par $\frac{1}{x^q}$, ou par x^{-q}, & chassant q par le moyen de sa valeur $\frac{m}{n}$, b par le moyen de sa valeur $\frac{a}{x}$, on trouvera,

$$(x+a)^{-\frac{m}{n}} = x^{-\frac{m}{n}} + \left(-\frac{m}{n}\right) a x^{-\frac{m}{n}-1} +$$

$$\frac{\left(-\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{m}{n}-1\right)}{1\times2} a^2 x^{-\frac{m}{n}-2} + \ldots$$

$$\frac{\left(-\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{m}{n}-1\right)\left(-\frac{m}{n}-2\right)}{1\times2\times3} a^3 x^{-\frac{m}{n}-3}$$

$+$ &c,

Formule qu'on employe pour élever un binome à une puissance quelconque négative, ou, ce qui revient au même, pour extraire une racine quelconque de l'unité divisée par un binome.

Soit;

Soit, par exemple, $m=1$, $n=3$. Il s'agit donc d'élever $x=a$ à la puissance $-\frac{1}{3}$, ou d'extraire la racine cube de $\frac{1}{x+a}$. On trouve que cette racine cube, ou $(x+a)^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}} - \ldots\ldots$ $\frac{ax^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{2a^2x^{-\frac{7}{3}}}{9} - \frac{14a^3x^{-\frac{10}{3}}}{81} + \&c.$

Soit $m=1$, $n=1$, on aura $(x+a)^{-1} = x^{-1} - ax^{-2} + a^2x^{-3} - a^3x^{-4} + \&c.$

Si on demandoit la racine cube de la fraction $\frac{f}{x+a}$; cette racine indiquée seroit d'abord $f^{\frac{1}{3}}(x+a)^{-\frac{1}{3}}$. Ainsi, après avoir formé la suite qui est la valeur de $(x+a)^{-\frac{1}{3}}$, on multiplieroit chacun de ses termes par la racine cube de f.

S'il falloit extraire la racine cube de $\frac{f+g}{x+a}$; cette racine indiquée seroit d'abord $(f+g)^{\frac{1}{3}} \times (x+a)^{-\frac{1}{3}}$; ensuite, après avoir élevé $f+g$ à la puissance $\frac{1}{3}$ par la formule de l'article 290, on multiplieroit la suite qui en proviendroit, par la suite qui exprime la valeur de $(x+a)^{-\frac{1}{3}}$.

Tout cela s'applique avec la même facilité aux polynomes qui ont plus de deux termes.

CHAPITRE XIV.

Continuation des Recherches ſur la nature des Equations ; méthodes pour trouver les diviſeurs commenſurables qu'elles peuvent contenir.

293. TOUTE équation a autant de racines (278) qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnue. Ces racines ſont ſuſceptibles de différentes formes ; nous avons déja obſervé qu'on n'a point encore de méthode pour les trouver généralement, ſi ce n'eſt pour les quatre premiers degrés. Mais il y a dans tous les degrés des équations qui peuvent être décompoſées en d'autres équations du premier degré, ou du ſecond, ou du troiſième, &c. Notre objet préſent eſt de découvrir ces équations compoſantes qu'on appelle *diviſeurs rationnels* ou *commenſurables*, parce qu'il n'y entre point de radicaux. Leurs dimenſions s'eſtiment, à l'ordinaire, par celles de l'inconnue qu'elles renferment. Cela doit s'entendre également, & pour les équations littérales, c'eſt-à-dire, pour les équations qui, outre l'inconnue, contiennent encore d'autres lettres, & pour les équations numériques, c'eſt-à-dire, pour les équations qui ne contiennent pas d'autre lettre que l'inconnue.

On ſent l'utilité de cette recherche. Car ſi une équation eſt entièrement décompoſable en diviſeurs d'une dimenſion, on aura immédiatement toutes ſes racines. Si elle eſt décompoſable en diviſeurs de deux dimenſions, il ne s'agira plus, pour avoir les racines, que de réſoudre des équations du ſecond degré. Si, en diviſeurs de trois dimenſions, on aura les racines en réſolvant des équations du troiſième degré, &c.

294. SOIT en général une quantité A compoſée, ſuivant une loi quelconque, de tant d'autres quantités a, b, c, d, &c, qu'on voudra. Si cette quantité eſt telle qu'en mettant, par exemple, a pour b, ou en faiſant $b=a$, on ait $A=0$: je dis que A ſera diviſible par $a-b$. Car ſuppoſons qu'en diviſant A par $a-b$, on ait Q pour quotient, & R pour reſte. On aura, par les premiers principes de la diviſion, $A=Q(a-b)+R$. Or, par hypothèſe, lorſque $a=b$, on a $A=0$; & on a auſſi alors $Q(a-b)=0$. Donc $R=0$. Ce principe ſert à trouver très-aiſément, en pluſieurs cas, les diviſeurs rationnels d'une quantité. En voici quelques applications.

EXEMPLE I.

Reconnoître ſi la quantité ou l'équation $4p^3-3b^2p-4a^3+3ab^2=0$, *a des diviſeurs rationnels ?*

On voit, avec la plus légère attention, que ſi l'on fait $p=a$, tous les termes de cette quantité ſe détruiſent mutuellement. Ainſi, elle eſt diviſible par $p-a$. Donc, en effectuant cette diviſion, & regardant p comme l'inconnue, l'équation $4p^3-3b^2p-$

$4a^3 + 3ab^2 = 0$, ſe décompoſera en ces deux-ci, $p - a = 0$, $4p^2 + 4ap + 4a^2 - 3b^2 = 0$, dont l'une eſt du premier degré, l'autre du ſecond.

On trouvera ſemblablement que $4p^3 + 3p - 2 = (2p - 1) \times (2p^2 + p + 2)$; que $4p^3 + 6p - 10 = (p - 1) \times (4p^2 + 4p + 10)$; que $4p^3 + 3p - 7 = (p - 1) \times (4p^2 + 4p + 7)$; que $4p^3 - 6p + 2 = (p - 1) \times (4p^2 + 4p - 2)$.

EXEMPLE II.

Reconnoître ſi la quantité $2l^6 - 2l^2m^2n^2 - l^4m^2 - l^4n^2 + m^4n^2 + m^2n^4$, *a des diviſeurs rationnels ?*

J'obſerve qu'en ſuppoſant $l^2 = mn$, cette quantité s'évanouiroit. D'où je conclus qu'elle eſt diviſible par $l^2 - mn$, ou par $-l^2 + mn$. Je vois pareillement qu'en faiſant $l^2 = -mn$, notre quantité s'évanouiroit. D'où je conclus qu'elle eſt encore diviſible par $l^2 + mn$, ou par $-l^2 - mn$. Si l'on effectue ſucceſſivement ces deux diviſions, on trouvera le troiſième facteur $2l^2 - m^2 - n^2$. En ſorte que la quantité propoſée $2l^6 - 2l^2m^2n^2 - l^4m^2 - l^4n^2 + m^4n^2 + m^2n^4 = (-l^2 + mn) \times (-l^2 - mn) \times (2l^2 - m^2 - n^2)$.

EXEMPLE III.

Reconnoître ſi l'équation $x^4 - 2cfx^3 + 2cfga^2x - g^2a^4 = 0$, *a des diviſeurs rationnels ?*

J'obſerve qu'en faiſant $x^2 = ga^2$, le premier terme de cette équation eſt détruit par le quatrième, & le ſecond par le troiſième. Donc elle eſt diviſible par $x^2 - ga^2$; & par conſéquent elle eſt décompoſable en ces deux équations du second degré, $x^2 - ga^2 = 0$, $x^2 - 2cfx + ga^2 = 0$.

On verra l'usage de cette décomposition dans l'Hydrodynamique, articles 197, 199, 201.

EXEMPLE IV.

Reconnoître si l'équation $2y^4 + 2x^4 - 2xy^3 - 2yx^3 - 2a^2xy + a^2y^2 + a^2x^2 - 3by^3 + 3bxy^2 + 3byx^2 - 3bx^3 = 0$, *dont on fera usage* (Hydrod. 203), *a des diviseurs rationnels?*

On voit, au premier coup d'œil, qu'en faisant $y = x$, tous les termes de cette équation se détruisent mutuellement. Donc elle est divisible par $y - x$; & le quotient est $2y^3 - 3by^2 + a^2y - 2x^3 + 3bx^2 - a^2x = 0$. Ce quotient est lui-même divisible par $y - x$, puisqu'il s'évanouit en faisant $y = x$; & le nouveau quotient est l'équation du second degré $2yy + 2xy + 2x^2 + a^2 - 3by - 3bx = 0$. Ainsi l'équation proposée se décompose en ces trois facteurs $y - x = 0$, $y - x = 0$, $2yy + 2xy + 2x^2 + a^2 - 3by - 3bx = 0$. Les deux premiers multipliés ensemble, produisent l'équation du second degré, $yy - 2xy + xx = 0$.

295. LA méthode précédente, appliquée à la recherche des diviseurs commensurables d'une dimension, contenus dans une équation, peut être envisagée sous un point de vûe qui tient plus immédiatement à la nature des équations, & qu'il est à propos d'expliquer. Voici ce que je veux dire.

Puisque le dernier terme d'une équation qui est ordonnée par rapport à l'inconnue, & qui a zero pour ſecond membre, n'eſt autre choſe (283) que le produit de toutes les racines ; & que le caractère d'une racine eſt (278) qu'en la ſubſtituant à la place de l'inconnue, la totalité des termes de l'équation s'évanouit : il s'enſuit que ſi parmi les diviſeurs du dernier terme, il s'en trouve qui ayent ce caractère, ils ſeront des racines de l'équation. Ainſi l'équation ſera diviſible par l'inconnue plus ou moins chacun des diviſeurs qui aura la propriété dont je viens de parler. Soit, par exemple, l'équation $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$, dont le dernier terme abc a les trois diviſeurs a, b, c. Je vois qu'en ſubſtituant ſucceſſivement chacun de ces diviſeurs à la place de l'inconnue, la ſomme de tous les termes s'évanouit. D'où je conclus que chacun d'eux eſt une valeur ou racine de l'inconnue ; & que par conſéquent l'équation peut être regardée comme compoſée des trois facteurs ou diviſeurs d'une dimenſion, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$.

Soit, pour ſecond exemple, l'équation $x^3 - (a - b - c)x^2 + (bc - ab - ac)x - abc = 0$, dont le dernier terme abc a les trois diviſeurs a, b, c. En ſubſtituant d'abord a pour x, la ſomme de tous les termes devient zero ; & par conſéquent $x - a = 0$, eſt l'un des diviſeurs de l'équation. Si l'on ſubſtitue enſuite b pour x, la ſomme de tous les termes ne s'évanouit pas ; mais en ſubſtituant $-b$ pour x, elle s'évanouit ; & par conſéquent $x + b = 0$, eſt un ſecond diviſeur de l'équation. On trouvera ſemblablement que $x + c = 0$, en eſt un troiſième diviſeur.

Il est clair par-là, qu'on trouvera toujours les diviseurs d'une dimension contenus dans une équation, si l'on cherche tous les diviseurs du dernier terme, & si l'on choisit ceux de ces diviseurs, qui étant substitués, soit en +, soit en —, à la place de l'inconnue, font disparoître tous les termes de l'équation.

296. DANS les équations numériques, le nombre des diviseurs du dernier terme est quelquefois très-considérable. Il n'est jamais difficile de les trouver tous. Néanmoins cette recherche doit être faite par ordre, si l'on ne veut pas s'exposer au risque d'oublier quelques diviseurs qui pourroient être précisément ceux qui ont la condition mentionnée. Voici le procédé qu'il convient de suivre, appliqué à un exemple. Soit le nombre 120, dont on demande tous les diviseurs. Je divise d'abord successivement 120 par tous les nombres premiers 1, 2, 3, 5, &c, qu'il peut contenir; & j'observe de diviser par un même nombre, tant que la chose est possible. Or, en divisant 120 par 1, le quotient est 120. Divisant ce premier quotient par 2, le second quotient est 60. Divisant ce nombre encore par 2, le troisième quotient est 30. Divisant ce nombre encore par 2, le quatrième quotient est 15, qui n'est pas divisible par 2. Divisant donc 15 par 3, le cinquième quotient est 5. Divisant ce nombre par 5, le sixième quotient est 1. La division par les nombres premiers n'est plus possible. Ainsi les nombres premiers qui divisent 120, sont,

1, 2, 2, 2, 3, 5.

Cela posé, il est clair, par la manière dont les quotiens dérivent les uns des autres, que si l'on multiplie les diviseurs trouvés, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, on aura encore des nombres qui diviseront 120. Ces nombres sont, (en n'écrivant qu'une seule fois ceux qui sont les mêmes), 2.4.6.8.10.12.15.20.24.30.40. 60.120.

Ainsi, tous les diviseurs de 120, sont, 1.2.3.4. 5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.60.120.

297. CELA posé, faisons quelques applications de la méthode de l'article 295 à des équations numériques.

EXEMPLE I.

On demande si l'équation $x^3 + 5x^2 - 44x + 60 = 0$, *a des diviseurs commensurables ?*

Tous les diviseurs du dernier terme 60 sont, 1. 2.3.4.5.6.10.12.15.20.30.60. Je trouve d'abord qu'en faisant $x = 2$, tous les termes de l'équation se détruisent. Donc l'équation est divisible par $x - 2 = 0$. En second lieu, je trouve qu'en faisant $x = 3$, tous les termes s'évanouissent encore. Donc l'équation est divisible par $x - 3 = 0$. En troisième lieu, je trouve qu'en faisant $x = -10$, tous les termes se détruisent. Donc l'équation est divisible par $x + 10 = 0$. Elle peut donc être regardée comme le produit des trois équations du premier degré, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 10 = 0$.

EXEMPLE II.

On demande si l'équation $x^4 - 5x^3 - 24x^2 + 100x + 48 = 0$, *a des diviseurs commensurables ?*

Tous les diviſeurs du dernier terme 48 ſont 1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 8 . 12 . 16 . 24 . 48. Or, je trouve, 1°. qu'en faiſant $x=4$, tous les termes ſe détruiſent. Donc l'équation eſt diviſible par $x-4=0$. En ſecond lieu, je trouve qu'en faiſant $x=6$, tous les termes ſe détruiſent encore. Donc l'équation eſt diviſible par $x-6=0$. Il n'y a point d'autre diviſeur de 48, qui opère la deſtruction des termes de l'équation. Elle n'a donc pour diviſeurs d'une dimenſion, que $x-4=0$, $x-6=0$. Si on la diviſe ſucceſſivement par ces deux diviſeurs, on trouvera pour quotient l'équation du ſecond degré $xx+5x+2=0$. L'équation propoſée peut donc être regardée comme le produit des trois équations $x-4=0$, $x-6=0$, $xx+5x+2=0$.

298. On voit qu'en pratiquant littéralement la méthode dont il s'agit, on eſt obligé quelquefois de faire beaucoup de calculs pour parvenir à reconnoître, parmi les diviſeurs du dernier terme d'une équation numérique, ceux qui ont la propriété de faire évanouir, par leur ſubſtitution à la place de l'inconnue, tous les termes de l'équation. Voici d'abord un moyen d'abréger conſidérablement ces calculs. C'eſt à Neuton qu'on en eſt redevable.

Soit, pour nous faire entendre ſans peine, l'équation $t^3+at^2+bt+c=0$. Il eſt clair qu'en ſuppoſant $t=x+m$, le dernier terme de la transformée en x, ſera m^3+am^2+bm+c. Donc ſi l'on fait ſucceſſivement $m=1$, $m=0$, $m=-1$, valeurs qui décroiſſent en progreſſion arithmétique, le dernier terme en queſtion aura pour valeurs correſpondantes $1+a+b+c$, c, $-1+a-b+c$. Or, dans le premier cas, les valeurs de x ſeront quelques-uns des diviſeurs du dernier terme $1+a+b+c$; dans le ſecond cas, les valeurs de x ou de t ſeront quelques-uns des diviſeurs du dernier terme c ; dans le troiſième cas, les valeurs de x ſeront quelques-uns des diviſeurs du dernier terme $-1+a-b+c$. Donc, puiſque ces valeurs forment une progreſſion arithmétique, il s'enſuit que les ſeuls diviſeurs de c, qui peuvent, par leur ſubſtitution à la place de t, faire évanouir tous les termes de l'équation, doivent être moyens proportionnels arithmétiques entre quelques-uns des diviſeurs de la quantité $1+a+b+c$, & quelques-uns des diviſeurs de la quantité $-1+a-b+c$. Il eſt inutile de ſoumettre les autres diviſeurs de c à l'examen. Appliquons cela à des exemples.

EXEMPLE I.

On demande ſi l'équation $t^3-5t^2-18t+72=0$, *a des diviſeurs commenſurables ?*

Je forme le dernier terme de la transformée qui vient en x, lorſqu'on ſuppoſe $t=x+1$. Ce dernier terme n'eſt autre choſe que la propoſée, en mettant 1 pour t; il eſt par conſéquent $1-5-18+72=50$. Je forme pareillement le dernier terme de la transformée qui vient en x, lorſqu'on ſuppoſe $t=x-1$. Ce dernier terme n'eſt encore autre choſe que l'équation propoſée, en mettant -1 pour t ; il eſt par conſéquent $-1-5+18+72=84$. Je diſpoſe, dans une même colonne verticale, le dernier terme 50 de la première transformée, le dernier terme 72 de l'équation proposée, & le dernier terme 84 de la seconde transformée. A côté de ces trois termes, j'écris tous leurs diviſeurs qui forment trois bandes horiſontales. L'opération figurée ſe voit ici.

50	1.2.5.10.25.50
72	1.2.3.4.6.8.9.12.18.24.36.72
84	1.2.3.4.6.7.12.14.21.28.42.84

Cela poſé, j'examine parmi les progreſſions arithmétiques que les bandes des diviſeurs peuvent fournir, celles dont le terme moyen étant mis, ſoit en +, ſoit en —, à la place de t, fait évanouir tous les termes de l'équation. Or, en premier lieu, les trois diviſeurs 1, 2, 3, pris dans les trois bandes en queſtion, forment une progreſſion arithmétique; mais ſoit qu'on mette en + ou en —, le terme moyen 2, à la place de t, la ſomme des termes de l'équation ne devient pas zero. Ainſi l'équation n'eſt pas diviſible par $t \mp 2 = 0$.

Les trois diviſeurs 2, 3, 4 forment une progreſſion arithmétique; & en mettant + 3 pour t, tous les termes de l'équation ſe détruiſent. Donc l'équation eſt diviſible par $t - 3 = 0$.

Les trois diviſeurs 5, 4, 3 forment une progreſſion arithmétique; & en mettant — 4 pour t, tous les termes de l'équation ſe détruiſent. Donc l'équation eſt diviſible par $t+4=0$.

Les trois diviſeurs 5, 6, 7 forment une progreſſion arithmétique ; & en mettant $+6$ pour t, tous les termes de l'équation ſe détruiſent. Donc l'équation eſt diviſible par $t-6=0$.

Comme l'équation propoſée eſt du troiſième degré, & qu'elle n'a par conſéquent que trois racines, les trois diviſeurs trouvés ſont les ſeuls qu'elle contient. Il eſt donc inutile d'en chercher d'autres, puiſqu'on eſt aſſuré d'avance qu'on n'en trouveroit pas.

EXEMPLE II.

On demande ſi l'équation $t^5-12t^4+5t^3-61t^2+22t-120=0$, *a des diviſeurs commenſurables?*

Le procédé eſt le même que dans l'exemple précédent. Le dernier terme de la transformée qui viendroit en x, en faiſant $t=x+1$, eſt l'équation propoſée, en y mettant 1 pour t ; il eſt par conſéquent $1-12+5-61+22-120=-165$. Le dernier terme de la transformée qui viendroit en x, en ſuppoſant $t=x-1$, eſt l'équation propoſée, en y mettant -1 pour t ; il eſt par conſéquent $-1-12-5-61-22-120=-221$. J'écris dans une même colonne verticale le dernier terme 165 de la première transformée, le dernier terme 120 de la propoſée, & le dernier terme 221 de la ſeconde transformée. A côté de ces trois nombres, j'écris tous leurs diviſeurs qui forment trois bandes horiſontales. Le tout comme on voit ici.

165	1.3.5.11.15.33.55.165
120	1.2.3.4.5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.60.120
221	1.13.17.221

Cela posé, les trois diviseurs 3, 8, 13, pris dans les trois bandes horisontales, forment une progression arithmétique ; mais soit qu'on mette $+8$ ou -8, à la place de t, l'équation ne s'évanouit pas. Ainsi elle n'est pas divisible par $t \mp 8 = 0$.

Les trois diviseurs 3, 10, 17 sont en progression arithmétique ; mais cette combinaison ne produit rien encore.

Les trois diviseurs 11, 12, 13 sont en progression arithmétique ; & en mettant $+12$ à la place de t, l'équation s'évanouit. Donc elle est divisible par $t - 12 = 0$. Elle n'a pas d'autre diviseur commensurable.

299. Si on avoit une équation telle que $6t^3 - 5t^2 + 6t - 35 = 0$, où le premier terme a un coéfficient autre que l'unité, on en trouveroit ainsi les diviseurs commensurables.

Soit l'équation $ft^3 + at^2 + bt + c = 0$, qui a le coéfficient quelconque f à son premier terme. Représentons par $nt + p$ l'un des diviseurs d'une dimension de cette équation. Il est évident d'abord que le coéfficient n doit diviser le coéfficient f du premier terme de l'équation. Il n'est pas moins clair que si l'on fait successivement $t = 1$, $t = 0$, $t = -1$, les quantités dans lesquelles l'équation proposée se changera, devront être divisibles par les quantités dans lesquelles le diviseur $nt+p$ se changera. Or, ces trois dernières quantités sont $n+p$, p, $-n+p$; & elles forment, comme on voit, une progression arithmétique, dont la différence est n. Ainsi, le diviseur $nt+p$ doit être tel que si dans l'équation proposée on fait successivement $t=1$, $t=0$, $t=-1$, & qu'on cherche, parmi les diviseurs des quantités que ces trois suppositions donnent, ceux qui forment une progression arithmétique dont la différence est l'un des diviseurs du coéfficient f : cette même différence, prise en $+$ ou en $-$, soit le coéfficient du premier terme du diviseur, & que l'autre terme p du diviseur, soit le moyen de la progression, pris en $+$ ou en $-$. De toutes les quantités $nt+p$, celles qui ont la condition dont il s'agit, sont les seules qui puissent diviser l'équation.

EXEMPLE.

On demande si l'équation $6t^3-5t^2-6t-35=0$*, a des diviseurs commensurables ?*

En supposant successivement $t=1$, $t=0$, $t=-1$, la quantité $6t^3-5t^2-6t-35$, devient respectivement -40, -35, -40. Je mets les trois nombres 40, 35, 40 dans une même colonne verticale, & à côté leurs diviseurs en bandes horisontales.

40	1 . 2 . 4 . 5 . 8 . 10 . 20 . 40
35	1 . 5 . 7 . 35
40	1 . 2 . 4 . 5 . 8 . 10 . 20 . 40

Cela poſé, je vois qu'en prenant dans les trois bandes horiſontales les trois nombres 10, 7, 4, ces nombres forment une progreſſion arithmétique dont la différence eſt 3, diviſeur de 6. Si donc l'équation propoſée eſt dans le cas d'avoir un diviſeur commenſurable d'une dimenſion, ce diviſeur ſera $3t+7$, ou $-3t-7$, ou $3t-7$, ou $-3t+7$. La troiſième & la quatrième combinaiſon ſont vraies ; je veux dire que l'équation propoſée eſt diviſible par $\pm(3t-7)$; le quotient eſt $\pm(2t^2+3t+5)=0$. Elle n'a pas d'autres diviſeurs commenſurables.

300. CHERCHONS maintenant les diviſeurs de deux dimenſions. Et, pour fixer les idées, ſoit l'équation $ft^4+at^3+bt^2+ct+d=0$, qui eſt ſuppoſée ne point contenir de diviſeur d'une dimenſion. Si elle a des diviſeurs de deux dimenſions, ils ſeront de cette forme nt^2+pt+q ; & d'abord il faudra que n ſoit un diviſeur de f coéfficient du premier terme de l'équation. De plus, ſi l'on fait ſucceſſivement $t=g$, $t=g-m$, $t=g-2m$, &c, valeurs qui forment une progreſſion arithmétique ; les quantités dans leſquelles l'équation propoſée ſe changera, devront être diviſibles par les quantités dans leſquelles le diviſeur nt^2+pt+q ſe changera. Or, ce diviſeur devient dans les ſuppoſitions dont il s'agit,

$$ng^2+pg+q,$$
$$n(g-m)^2+p(g-m)+q,$$
$$n(g-2m)^2+p(g-2m)+q,$$
&c.

Ces quantités ne ſont point en progreſſion arithmétique, comme pour les diviſeurs d'une dimenſion; mais ſi on en retranche les produits du nombre n par les quarrés des termes de la progreſſion arithmétique qui contient les valeurs ſuppoſées de t, on aura les reſtes,

$ng^2 + pg + q - ng^2$, ou $pg + q$,
$n(g-m)^2 + p(g-m) + q - n(g-m)^2$, ou $p(g-m)+q$,
$n(g-2m)^2 + p(g-m) + q - n(g-2m)^2$, ou $p(g-2m)+q$,
&c,

qui forment une progreſſion arithmétique décroiſſante dont la différence eſt pm.

Soient, pour avoir la plus ſimple des progreſſions arithmétiques pour les valeurs ſuppoſées de t, $g=1$, $m=1$: le diviſeur nt^2+pt+q deviendra ſucceſſivement $n+p+q$, q, $n-p+q$; & les reſtes dont on a parlé, ſeront $p+q$, q, $-p+q$. Voici donc à quoi ſe réduit tout le calcul qu'il faut faire pour trouver les diviſeurs de deux dimenſions. Cherchez les diviſeurs des quantités dans leſquelles ſe change l'équation en faiſant ſucceſſivement $t=1$, $t=0$, $t=-1$; prenez parmi ces diviſeurs ceux qui ſont tels que ſi on en retranche les produits du nombre n diviſeur de f, par les nombres 1, 0, 1, les reſtes forment des progreſſions arithmétiques : ces progreſſions donneront les valeurs de p & de q, lorſque l'équation propoſée ſera dans le cas d'avoir des diviſeurs de deux dimenſions.

EXEMPLE.

On demande ſi l'équation $6t^4 + 11t + 15t^2 - 4t + 14 = 0$, *a des diviſeurs de deux dimenſions?*

En

En faiſant ſucceſſivement $t=1$, $t=0$, $t=-1$, le premier membre de l'équation devient 42, 14, 28. Je mets ces nombres dans une même colonne verticale, & à côté j'écris leurs diviſeurs.

42	1.2.3.6.7.14.21.42
14	1.2.7.14
28	1.2.4.7.14.28

J'obſerve que ſi je prens dans les trois bandes horiſontales les trois diviſeurs 14, 7, 4, & que j'en retranche reſpectivement les trois produits 2×1, 2×0, 2×1, dans leſquels 2 eſt l'un des diviſeurs du coéfficient du premier terme de l'équation ; les trois reſtes 12, 7, 2 formeront une progreſſion arithmétique dont la différence eſt 5. Cette différence doit être le nombre p ; & par conſéquent le nombre q ſera 7. Je forme donc la quantité $2t^2 + 5t + 7$; & j'eſſaye ſi cette quantité diviſe l'équation. Elle la diviſe en effet. D'où je conclus que $2t^2 + 5t + 7$ eſt un diviſeur de deux dimenſions de l'équation propoſée. Cette équation a pour autre diviſeur de deux dimenſions, $3t^2 - 2t + 2$, diviſeur qu'on peut trouver directement comme le précédent.

301. LA même méthode s'étend aux diviſeurs de trois dimenſions, de quatre dimenſions, &c. On parviendra toujours à former des progreſſions arithmétiques dont les termes ſerviront à trouver les coéffi-

cients des termes du diviſeur de l'équation. Je me contente d'indiquer ces calculs qui ſont un peu longs & qui ſe font d'ailleurs à l'imitation des précédents.

302. Nous n'avons conſidéré dans les articles précédents que des équations numériques. Mais on peut trouver ſemblablement les diviſeurs d'une dimenſion, de deux dimenſions, &c, pour les équations littérales qui ſont homogènes, & qui ne contiennent que deux lettres. Car ſoit, par exemple, l'équation $6t^3 - 5at^2 - 6a^2t - 35a^3 = 0$, qui eſt homogène, & où il n'y a que les deux lettres t & a. Je fais $a = 1$; & par-là j'ai l'équation numérique $6t^3 - 5t^2 - 6t - 35 = 0$, qui a $3t - 7$ pour diviſeur d'une dimenſion, & $2t^2 + 3t + 5$ pour diviſeur de deux dimenſions. Ces diviſeurs doivent être homogènes, ainſi que l'équation propoſée ; ils deviendront tels, en ſuppléant les dimenſions qui manquent, par le moyen de la lettre a & de ſes puiſſances. Par-là, le premier diviſeur eſt $3t - 7a$, & le ſecond eſt $2t^2 + 3at + 5a^2$.

303. La même méthode pourroit encore être appliquée aux équations littérales qui contiennent plus de deux lettres. Mais alors les calculs deviendroient pénibles par leur longueur, ſans être difficiles. On me diſpenſera de les expliquer. D'ailleurs, dans la pratique de l'Algébre, toutes les équations ſe réduiſent à la fin à des équations numériques. Car l'objet d'un problême particulier eſt de faire trouver une inconnue, toutes les autres quantités étant données, & par conſéquent exprimables par des nombres.

304. Je passe à une autre méthode pour trouver les diviseurs rationnels ; & je commence par ceux d'une dimension.

Soit l'équation $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$, qui est supposée contenir un diviseur d'une dimension. Cette équation étant du quatrième degré, je puis la regarder comme le produit de l'équation du troisième degré $t^3+At^2+Bt+C=0$, par l'équation du premier $t+D=0$; A, B, C, D étant des indéterminées qui se trouveront en identifiant terme à terme l'équation résultante $(t^3+At^2+Bt+C)\times(t+D)=0$, ou $t^4+(A+D)t^3+(B+DA)t^2+(C+DB)t+CD=0$, avec l'équation proposée $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$. Je fais donc $t^4=t^4$, $(A+D)t^3=at^3$, $(B+DA)t^2=bt^2$, $(C+DB)t=ct$, $CD=d$; ou simplement $A+D=a$, $B+DA=b$, $C+DB=c$, $CD=d$. Ces quatre dernières équations contiennent tout ce qu'il faut pour déterminer les quatre inconnues A, B, C, D, dans la supposition que D étant une quantité rationnelle, l'équation proposée soit divisible par l'équation du premier degré $x+D=0$.

En effet, nous voyons par l'équation $CD=d$, que les deux quantités C & D doivent être diviseurs de d, puisque leur produit CD est d. Ainsi décomposons la quantité d en tous ses facteurs ; & supposant que D soit un de ces facteurs, C le produit de tous les autres, examinons si ce facteur D a les conditions requises pour qu'on ait les trois autres équations $C+DB=c$, $B+DA=b$, $A+D=a$. L'équation $C+DB=c$, donne $B = \frac{c - C}{D}$, quantité connue, puiſque c eſt donné, & que C, D ſont des facteurs connus de d. L'équation $B + DA = b$, donne $A = \frac{b - B}{D}$ quantité pareillement connue ; & enfin l'équation $A + D = a$, donne $A = a - D$. D'où l'on voit qu'on a deux valeurs pour A. Ces deux valeurs doivent être identiques, pour que l'équation $t^4 + at^3 +$ &c, ſoit diviſible en effet par $t + D = 0$. Si cette identité n'a pas lieu, on éprouvera un autre diviſeur ; & ſi par toutes ces épreuves, on ne trouve pas les deux mêmes valeurs pour A, on conclura que l'équation $t^4 + at^3 +$ &c, n'a pas de diviſeur commenſurable d'une dimenſion.

On doit éprouver les diviſeurs D, en les prenant poſitivement ou négativement.

Il eſt clair que ſi $t + D$ eſt en effet diviſeur de $t^4 + at^3 +$ &c, on connoîtra, par les opérations qu'on a faites pour éprouver D, les quantités A, B, C, & par conſéquent les coéfficients des termes de l'équation du troiſième degré $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$, qui eſt l'une des compoſantes de l'équation du quatrième, $t^4 + at^3 +$ &c.

Si l'équation $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$, eſt ſuppoſée contenir un diviſeur d'une dimenſion, on le trouvera en regardant cette équation comme le produit d'une équation du ſecond degré par une équation du premier. Si une équation du cinquième degré contient un diviſeur d'une dimenſion, on le trouvera en regardant cette équation comme composée d'une équation du quatrième degré & d'une équation du premier, &c.

On voit assez que la méthode précédente s'applique non-seulement aux équations numériques, mais encore aux équations littérales, d'un nombre quelconque de lettres.

EXEMPLE.

Connoissant dans une progression géométrique la somme de tous les termes, leur nombre, & l'un des extrêmes, par exemple le premier; trouver la raison & le dernier terme?

Cette question est une espèce de supplément à l'article 174.

En reprenant les dénominations & les deux équations (A) & (B) de l'article cité, on trouvera, par la combinaison de ces deux équations, les deux suivantes,

$$(C) \quad q^n - \frac{s}{s-a} q^{n-1} + \frac{a}{s-a} = 0,$$

$$(D) \quad u(u-s)^{n-1} - a(a-s)^{n-1} = 0.$$

Dans la première, q est l'inconnue, & dans la seconde c'est u qui est l'inconnue. On trouve leurs diviseurs commensurables, si elles en ont, à-peu près de la même manière. Je vais donc tenter seulement de résoudre la première, sous ce point de vue, en mettant pour a, n, s, des nombres particuliers. On observera qu'ayant déterminé q, on aura aussi u, en vertu de l'équation (A).

Supposons une progression géométrique, composée de quatre termes, dont le premier soit 375, & la somme 468. On aura donc $n=4$, $a=375$, $s=468$;

& l'équation (*C*) deviendra $q^4 - \frac{468}{93} q^3 + \frac{375}{93} = 0$; ou $q^4 - \frac{156}{31} q^3 + \frac{125}{31} = 0$, ou bien encore $31 q^4 - 156 q^3 + 125 = 0$. Comme le coéfficient du premier terme de cette équation diffère de l'unité, elle n'eſt pas traitable immédiatement par la méthode précédente où l'on a ſuppoſé que le coéfficient du premier terme de l'équation formulaire étoit 1. Il eſt vrai que cette méthode peut s'appliquer facilement au cas où le coéfficient en queſtion ſeroit autre que 1; mais on peut toujours transformer l'équation en une autre où le coéfficient ſoit 1; & c'eſt ce que nous allons faire ici. Pour cela, j'obſerve que ſi l'on a en général l'équation $q^n + \frac{gq^{n-1}}{f} + \frac{hq^{n-2}}{f} + \ldots\ldots\ldots + \frac{M}{f} = 0$, & qu'on faſſe $q = \frac{t}{f}$, on aura la transformée $t^n + gt^{n-1} + fht^{n-2} + \ldots\ldots + f^{n-1}.M = 0$, qui a la condition requiſe. En appliquant cette équation au cas préſent, nous avons $n = 4$, $f = 31$, $g = -156$, $h = 0$, $M = 125$; & la queſtion eſt de trouver l'un des diviſeurs d'une dimenſion de l'équation $t^4 - 156 t^3 + 125 \times (31)^3 = 0$. Cette équation ſe rapporte à la formule $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, en faiſant $a = -156$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 156 \times (31)^3$.

Tous les diviſeurs du dernier terme $125 \times (31)^3$ ſont $1, 5, 31, 5 \times 5, 5 \times 31, 5 \times (31)^2, 5 \times (31)^3$, $5 \times 5 \times 31$, $5^2 \times (31)^2$, $5^2 \times (31)^3$, $(31)^2$, $(31)^3$,

$5^3\times(31)^3$. Essayons par ordre ces diviseurs. D'abord le diviseur 1 ne réussit pas, soit qu'on le prenne en $+$ ou en $-$; c'est-à-dire que l'équation n'est pas divisible par $t\pm 1$. On peut s'en assurer par la méthode du présent article ; mais il sera plus court d'employer pour cela la méthode de l'article 297, parce que toutes les puissances de 1 étant 1, on voit, presque sans calcul, si la totalité des termes de l'équation se réduit à zero. En supposant $D=5$, nous aurions $C=\frac{d}{D}=25\times(31)^3$, $B=\frac{c-C}{D}=-5\times(31)^2$, $A=\frac{b-B}{D}=1(31)^2$, & $A=a-D=-161$. Comme les deux valeurs de A ne sont pas les mêmes, on doit conclure que l'équation n'est pas divisible par $t+5$. Pareillement le diviseur 5 pris en $-$ ne réussit pas, ou l'équation n'est pas divisible par $t-5$. Le diviseur 31, pris en $-$ réussiroit, mais il ne satisferoit pas aux conditions de la question, comme nous le verrons tout-à-l'heure. Le diviseur 5×5, pris en $+$ ou $-$, doit être rejetté. Le diviseur 5×31, qui ne réussit pas en $+$, réussit en $-$. En effet, D étant $=-5\times31$, on a $C=\frac{d}{D}=-25\times(31)^2$, $B=\frac{c-C}{D}=-5\times31$, $A=\frac{b-B}{D}=-1$, & $A=a-D=-1$. D'où l'on voit que les deux valeurs de A sont les mêmes. Ainsi l'équation $t^4-156\,t^3+125\times(31)^3=0$, est divisible par $t-5\times31=0$; & on a pour quotient l'équation $t^3+At^2+Bt+C=0$, ou (en mettant pour A, B, C, leurs valeurs), $t^3 - t^2 - 5 \times 31 t - 25 \times (31)^2 = 0$.

Le diviſeur d'une dimenſion $t - 5 \times 31 = 0$, donne $t = 5 \times 31$. Donc, à cauſe de $q = \frac{t}{31}$, on aura $q = 5$. Ainſi la raiſon de la progreſſion propoſée eſt 5; & le dernier terme u, qui a pour valeur $\frac{375}{(5)^3}$, eſt 3.

L'équation $t^3 - t^2 - 5 \times 31 t - 25 \times (31)^2 = 0$ eſt diviſible par $t - 31 = 0$, & le quotient eſt $t^2 + 30 t + 25 \times 31 = 0$, d'où l'on tire $t = -15 \pm 5\sqrt{-22}$, valeurs imaginaires & à rejetter. La valeur réelle $t = 31$ doit être auſſi rejettée, parce qu'elle donneroit $q = 1$, chaque terme de la ſuite $= 375$, $s = 4 \times 375$, & non pas $s = 468$.

305. LES diviſeurs commenſurables de deux dimenſions, de trois dimenſions, &c, contenus dans une équation, peuvent ſe trouver d'une maniere ſemblable, en feignant que cette équation eſt le produit d'une équation du ſecond degré, du troiſième degré, &c, par une autre équation d'un degré convenable pour que le produit en queſtion ſoit du même degré que la propoſée. Cherchons ainſi, par exemple, les diviſeurs de deux dimenſions.

Soit l'équation $t^4 + a t^3 + b t^2 + c t + d = 0$, dont il faut trouver les diviſeurs commenſurables de deux dimenſions, ſi elle en a de tels. Je feins que cette équation eſt le produit des deux équations du ſecond degré, $t^2 + m t + n = 0$, $t^2 + p t + q = 0$. Ces deux équations multipliées enſemble me donnent,

$$t^4\begin{array}{l}+m\\+p\end{array}\left\{\begin{array}{l}t^3+n\\+mp\\+q\end{array}\right\}\begin{array}{l}t^2+np\\+mq\end{array}\left\{\begin{array}{l}t+nq\\ \end{array}\right\}=0,$$

dont les termes doivent être les mêmes que ceux de la proposée. Ainsi, n & q doivent être des diviseurs du dernier terme d de la proposée. Nous pouvons regarder l'une de ces deux lettres n, q, comme donnée. Donnons-nous n, par exemple. Nous avons $m+p=a$, $n+mp+q=b$, $np+mq=c$. La première & la troisième de ces équations donnent $m=a-p$, $m=\frac{c-np}{q}=$ (en mettant pour q sa valeur $\frac{d}{n}$), $\frac{cn-n^2p}{d}$. Egalant les deux valeurs de m, on aura $a-p=\frac{cn-n^2p}{d}$. Donc $p=\frac{ad-nc}{d-n^2}$, & $m=\frac{nc-an^2}{d-n^2}$ Mais, d'un autre côté, en vertu de la seconde équation $n+mp+q=b$, on doit avoir, en mettant pour m & q leurs valeurs trouvées,

$$\text{(A)}\qquad n+\frac{(nc-an^2)\times(ad-nc)}{(d-n^2)^2}+\frac{d}{n}=b.$$

Cette équation exprime la relation qui doit exister entre les quantités a, b, c, d, n, pour que l'équation proposée ait les diviseurs qu'on lui a attribués.

EXEMPLE.

On demande si l'équation $t^4+5t^3+14t^2+19t+15=0$, *a des diviseurs de deux dimensions ?*

Cette équation peut être regardée comme un cas particulier de l'équation générale $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, en faiſant $a = 5$, $b = 14$, $c = 19$, $d = 15$. Les diviſeurs du dernier terme 15 ſont 1, 3, 5, 15. Si l'on ſuppoſe $n = 1$, l'équation de condition (A) ne ſera pas vraie. Mais ſi l'on ſuppoſe $n = 3$, l'équation (A) ſera vraie ; & on aura $m = 2$, $p = 3$, $q = 5$. Donc l'équation propoſée contient les deux diviſeurs de deux dimenſions, $t^2 + 2t + 3 = 0$, $t^2 + 3t + 5 = 0$.

CHAPITRE XV.

Des Equations qui contiennent des racines égales.

306. Il y a des équations qui contiennent pluſieurs racines égales & de même ſigne. Par exemple, l'équation $(t - a) \times (t - a) \times (t - b) \times (t + c) = 0$, a ſes deux premières racines égales & poſitives. La méthode pour trouver directement & ſéparément ces ſortes de racines eſt fondée ſur quelques nouveaux principes que nous allons établir.

307. Si on développe la puiſſance n d'un binome $h + t$, c'eſt-à-dire $(h + t)^n$, & qu'on la multiplie terme à terme par la progreſſion arithmétique 0, 1,

2, 3, 4, &c : le produit ſera $= nt(h+t)^{n-1}$; comme il eſt clair par le calcul ſuivant,

$$(h+t)^n = h^n + nh^{n-1}t + \frac{n(n-1)h^{n-2}t^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1.2.3} + \&c,$$

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \&c,$$

$$\text{produit} = \quad nh^{n-1}t + \frac{n(n-1)h^{n-2}t^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1.2} + \&c,$$

$$= nt\left(h^{n-1} + (n-1)h^{n-2}t + \frac{(n-1)(n-2)h^{n-3}t^2}{1.2} + \&c\right),$$

$$= nt(h+t)^{n-1}.$$

308. DE-LA il ſuit que ſi l'on multiplie la puiſſance $(h+t)^n$ développée, par la progreſſon $0k$, k, $2k$, $3k$, $4k$, &c ; le produit ſera $= knt(h+t)^{n-1}$. Car multiplier par $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, &c, c'eſt multiplier d'abord par 0, 1, 2, 3, &c, ce qui donne $nt(h+t)^{n-1}$; & multiplier enſuite le tout par k, ce qui donne $knt(h+t)^{n-1}$.

Si on avoit $M(h+t)^n$, (M étant un facteur quelconque), & qu'après avoir développé la puiſſance $(h+t)^n$, on multipliât par la progreſſion arithmétique $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, &c : le produit ſeroit $Mknt(h+t)^{n-1}$, comme il eſt évident.

309. IL ſuit du même article 307, que ſi l'on a $M(h+t)^n$, & qu'après avoir développé la puiſſance $(h+t)^n$, on multiplie par la progreſſion arithmétique quelconque m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, &c : le produit ſera $= (Mmh + Mmt + Mknt).(h+t)^{n-1}$. En effet, multiplier par la progreſſion m, $m+k$,

$m+2k$, $m+3k$, &c, c'est multiplier d'abord par m, ce qui donne $Mm(h+t)^n = (Mmh+Mmt).(h+t)^{n-1}$; & ensuite par la progression $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, &c, ce qui donne $Mknt(h+t)^{n-1}$. Donc le produit total $=(Mmh+Mmt+Mknt).(h+t)^{n-1}$.

310. CELA posé, si l'on multiplie les termes d'une quation qui contient des racines égales, par ceux d'une progression arithmétique quelconque; le produit sera une équation qui contiendra les mêmes racines égales, moins une.

En effet, soit l'équation $0 = a + bt + ct^2 + dt^3 +$ &c, (t étant l'inconnue, a, b, c, &c, des quantités données), laquelle est censée contenir un nombre n de racines égales que je représente chacune par $-h$, & par conséquent être divisible par $(h+t)^n$. Cette équation peut contenir de plus un nombre quelconque d'autres racines. Il est clair que nous pouvons l'écrire ainsi: $0=(h+t)^n \times (p+qt+rt^2+st^3+$ &c$)$, en supposant que le facteur $p+qt+rt^2+$ &c, dans lequel p, q, r, &c, sont des quantités données, représente le quotient que l'on trouveroit si l'on divisoit l'équation proposée par $(h+t)^n$. Donc, en effectuant la multiplication indiquée, nous aurons: $0=p(h+t)^n + qt(h+t)^n + rt^2(h+t)^n + st^3(h+t)^n +$ &c, ou bien en développant la puissance $(h+t)^n$, & ordonnant par rapport à t,

$$0=\left\{\begin{array}{lllll} ph^n + pnh^{n-1}t + \frac{pn(n-1)h^{n-1}t^2}{1.2} & + \frac{pn(n-1)(n-2)h^{n-2}t^3}{1.2.3} & + \&c \\ \quad + qh^n t + qnh^{n-1}t^2 & + \frac{qn(n-1)h^{n-2}t^3}{1.2} & + \&c \\ \qquad + rh^n t^2 & + rnh^{n-1}t^3 & + \&c \\ & \quad + sh^n t^3 & + \&c. \end{array}\right.$$

Maintenant, écrivons ſous ces ſuites la progreſſion arithmétique

$$m, \quad m + k, \quad m + 2k, \quad m + 3k, \quad \&c;$$

& multiplions chaque bande horiſontale par la progreſſion arithmétique correſpondante ; c'eſt-à-dire la première bande, par la progreſſion arithmétique entière $m, m+k, m+2k, m+3k$, &c ; la ſeconde, par la progreſſion $m+k, m+2k, m+3k$, &c ; la troiſième, par la progreſſion $m+2k, m+3k$, &c; ainſi de ſuite. Il eſt évident que par-là on aura multiplié l'équation propoſée par la progreſſion arithmétique m, $m+k, m+2k, m+3k$, &c ; puiſque la première colonne verticale eſt multipliée par m; la ſeconde colonne verticale, par $m+k$; la troiſiéme colonne verticale par $m+2k$; &c. Or avant la multiplication de chaque bande horiſontale par la progreſſion arithmétique correſpondante, cette bande étoit diviſible par $(h+t)^n$. Donc (309) après la multiplication, chaque bande ſera diviſible par $(h+t)^{n-1}$; & par conſéquent l'équation réſultante de cette multiplication ſera auſſi diviſible par $(h+t)^{n-1}$. Ainſi on aura une équation qui contiendra les mêmes racines égales moins une, que l'équation propoſée.

311. Il peut ſe faire qu'une équation contienne plusieurs racines égales de différentes eſpeces. Telle eſt, par exemple, l'équation $(t-a)^2 \times (t-b)^2 \times (t-c) = 0$, qui, outre la racine c, a deux racines dont chacune vaut a, & deux racines dont chacune vaut b. Suppoſons en général qu'une équation dont t eſt l'inconnue contienne tout-à-la-fois un nombre n de racines égales repréſentées chacune par $-h$; un nombre e de racines égales repréſentées chacune par $-f$; un nombre g de racines égales repréſentées chacune par $-l$; &c. Si l'on multiplie les termes de cette équation par ceux d'une progreſſion arithmétique quelconque, le produit ſera une équation qui contiendra les mêmes racines égales, moins une de chaque eſpece, ou qui ſera diviſible par $(h+t)^{n-1} \times (f+t)^{e-1} \times (l+t)^{g-1} \times$ &c. Car ſi l'on ſuppoſe que l'équation générale de l'article précédent contienne les puiſſances $(h+t)^n$, $(f+t)^e$, $(l+t)^g$, &c; & qu'on regarde ſucceſſivement le produit de toutes ces puiſſances, moins une, comme fondu dans le facteur $p+qt+rt^2+st^3+$&c; on verra qu'en multipliant par les termes d'une progreſſion arithmétique, on aura une équation qui ſera diviſible, ou par $(h+t)^{n-1}$, ou par $(f+t)^{e-1}$, ou par $(l+t)^{g-1}$, &c. D'où il ſuit que cette même équation ſera diviſible par le produit $(h+t)^{n-1} \times (f+t)^{e-1} \times (l+t)^{g-1} \times$ &c.

312. Nous ſommes maintenant en état de juger ſi une équation propoſée contient des racines égales, & de déterminer ces racines. Pour cela, après avoir ordonné l'équation par rapport à l'inconnue, nous la

multiplierons terme à terme par une progreſſion arithmétique. Si l'équation n'étoit pas complette, il faudroit commencer par la completter, en imaginant que les puiſſances de l'inconnue, qui manquent, ſont multipliées par zero. Ainſi, pour l'équation $o = c + at^2 + t^5$, qui n'a ni ſecond, ni quatrième, ni cinquième terme, on écriroit $o = c \pm ot + at^2 \pm ot^3 \pm ot^4 + t^5$. Le choix de la progreſſion arithmétique eſt arbitraire; mais, pour plus de ſimplicité dans les réſultats, il faut prendre la plus ſimple des progreſſions arithmétiques, qui eſt 0, 1, 2, 3, 4, &c. En effectuant la multiplication que nous venons d'indiquer, on aura une nouvelle équation que j'appelle *ſecondaire*, & qui contient les racines égales, moins une, de l'équation principale, ſuppoſé qu'effectivement l'équation principale contienne de telles racines. On cherchera, par la méthode de l'article 95, le plus grand commun diviſeur de ces deux équations ordonnées par rapport à l'inconnue. Si elles n'ont point d'équation pour diviſeur commun, on conclura que l'équation principale ne contient pas pluſieurs racines égales. Si elles ont un tel diviſeur, l'équation principale aura quelques racines égales; & voici les différents cas qui pourront arriver.

1°. Si le plus grand diviſeur commun eſt une équation du premier degré, l'équation principale a deux racines égales dont chacune eſt ce même diviſeur.

2°. Si le plus grand commun diviſeur eſt une équation du ſecond degré, on décompoſera ce diviſeur en ſes racines; & ſi elles ſont égales, l'équation principale a trois racines égales dont chacune eſt l'une des racines du diviſeur : ſi les racines du diviſeur ſont inégales, l'équation principale a deux racines égales d'une eſpece & deux racines égales d'une autre eſpece : l'une des racines égales de la première eſpece eſt l'une des racines du diviſeur, & l'une des racines égales de la ſeconde eſpece eſt l'autre racine du diviſeur.

3°. Si le plus grand diviſeur commun eſt une équation du troiſième degré, on cherchera ſes trois racines; ſi ces trois racines ſont égales, l'équation principale contient quatre racines, égales chacune à l'une des trois racines du diviſeur : ſi deux racines ſeulement du diviſeur ſont égales, l'équation principale contient trois racines égales d'une eſpece, leſquelles ſont chacune l'une des deux racines égales du diviſeur, & deux racines égales d'une ſeconde eſpece, leſquelles ſont chacune la troiſième racine du diviſeur : ſi les trois racines du diviſeur ſont inégales, l'équation principale contient deux racines égales d'une première eſpece, leſquelles ſont chacune la première racine du diviſeur; deux racines égales d'une ſeconde eſpece, leſquelles ſont chacune la ſeconde racine du diviſeur ; & deux racines égales d'une troiſième eſpece, leſquelles ſont chacune la troiſième racine du diviſeur.

Ainſi de ſuite. Venons à des exemples.

EXEMPLE I.

On demande ſi l'équation $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$, *a des racines égales ?*

Je multiplie cette équation terme à terme par la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, 0; ce qui produit l'équation l'équation ſecondaire $3t^3 - 2t^2 - 8t = 0$, ou bien, (en diviſant tout par la racine $t = 0$), $3t^2 - 2t - 8 = 0$. Je cherche le plus grand diviſeur commun à l'équation principale & à l'équation ſecondaire. Ce diviſeur eſt $t - 2$. D'où il ſuit que l'équation propoſée a deux racines égales exprimées par $t = 2$, $t = 2$. De ces deux racines réſulte l'équation $(t - 2) \times (t - 2) = 0$, ou $t^2 - 4t + 4 = 0$, par laquelle diviſant l'équation donnée $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$, on a pour quotient $t + 3 = 0$. Ainſi les trois racines de l'équation $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$, ſont $t = 2$, $t = 2$, $t = -3$.

EXEMPLE II.

On demande ſi l'équation $t^4 - 3t^3 - 6t^2 + 28t - 24 = 0$, *a des racines égales ?*

Je multiplie cette équation par la progreſſion arithmétique 4, 3, 2, 1, 0, ce qui donne l'équation ſecondaire $4t^3 - 9t^2 - 12t + 28 = 0$. Enſuite je cherche le plus grand diviſeur commun à l'équation principale & à l'équation ſecondaire. Ce diviſeur eſt l'équation du ſecond degré $t^2 - 4t + 4 = 0$, qui contient les deux racines égales $t = 2$, $t = 2$. D'où je conclus que l'équation propoſée a trois racines égales, dont chacune vaut 2. De ces trois racines réſulte l'équation $(t - 2) \times (t - 2) \times (t - 2) = 0$, ou $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$, par laquelle diviſant l'équation $t^4 - 3t^3 - 6t^2 + 28t - 24 = 0$, on a pour quotient $t + 3$. Ainſi les quatre racines de l'équation propoſée ſont $t = 2$, $t = 2$, $t = 2$, $t = -3$.

EXEMPLE III.

On demande si l'équation $t^4 - 10t^3 + 37t^2 - 60t + 36 = 0$, *a des racines égales ?*

Ayant multiplié cette équation par la progression arithmétique 4, 3, 2, 1, 0, ce qui donne l'équation secondaire $4t^3 - 30t^2 + 74t - 60 = 0$; je cherche le plus grand diviseur commun à cette équation & à l'équation principale. Ce diviseur est l'équation du second degré $t^2 - 5t + 6 = 0$, laquelle donne les deux racines inégales $t = 2$, $t = 3$. D'où je conclus que l'équation proposée $t^4 - 10t^3 + 37t^2 - 60t + 36 = 0$, a deux racines égales, dont chacune vaut 2, & deux racines égales dont chacune vaut 3. En effet, cette équation n'est autre chose que $(t-2)^2 \times (t-3)^2 = 0$.

EXEMPLE IV.

On demande si l'équation $t^5 - 13t^4 + 67t^3 - 171t^2 + 216t - 108 = 0$, *a des racines égales ?*

Formons à l'ordinaire l'équation secondaire $5t^4 - 52t^3 + 201t^2 - 342t + 216 = 0$, en multipliant l'équation proposée par la progression arithmétique 5, 4, 3, 2, 1, 0. Cherchons le plus grand diviseur commun à l'équation principale & à l'équation secondaire. Ce diviseur est l'équation du troisième degré $t^3 - 8t^2 + 21t - 18 = 0$. Or on trouve, toujours par les mêmes moyens, que cette équation contient les deux racines égales $t = 3$, $t = 3$, & la troisiéme racine $t = 2$. Ainsi l'équation proposée $t^5 - 13t^4 +$

$67t^3 - 171t^2 + 216t - 108 = 0$, a trois racines égales dont chacune vaut 3, & deux racines égales dont chacune vaut 2. En effet, cette équation n'eſt autre choſe que $(t-3)^3 \times (t-2)^2 = 0$.

CHAPITRE XVI.

Diverſes opérations & remarques ſur les racines d'une équation quelconque.

313. LA claſſe des équations qui contiennent des diviſeurs commenſurables ou des racines égales eſt fort étendue. Ainſi nos Lecteurs ne ſauroient ſe rendre trop familieres les méthodes que nous avons données pour trouver les racines dans ces ſortes de rencontres. Mais il y a un grand nombre d'équations qui ne s'y rapportent pas. Alors, paſſé les quatre premiers degrés, on ne peut réſoudre exactement les équations que dans certains cas particuliers; on eſt obligé le plus ſouvent de ſe contenter de ſolutions approchées, comme nous l'expliquerons ci-deſſous. Ici je me propoſe de faire quelques opérations & quelques remarques ſur les racines d'une équation, ſans qu'il ſoit néceſſaire de les connoître. Toutes ces préparations ont une utilité prochaine ou éloignée pour parvenir à trouver en effet les racines, ſinon exactement, du moins par approximation.

314. LES racines d'une équation peuvent être diminuées ou augmentées d'une quantité quelconque, en ſubſtituant à la place de l'inconnue une autre inconnue plus ou moins cette quantité. Soit, par exemple, l'équation $t^3 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$; ſi l'on ſuppoſe $t = x \pm m$, on aura la transformée

$$x^4 \begin{matrix} \pm 4m \\ + a \end{matrix} \left\{ x^3 \begin{matrix} + 6m^2 \\ \pm 3am \\ + b \end{matrix} \right\} x^2 \begin{matrix} \pm 4m^3 \\ + 3am^2 \\ \pm 2bm \\ + c \end{matrix} \left\{ x \begin{matrix} + m^4 \\ \pm am^3 \\ + bm^2 \\ \pm cm \\ + d \end{matrix} \right\} = 0,$$

dont les racines ſeront plus petites ou plus grandes que celles de l'équation propoſée, de la quantité m.

315. CETTE même transformation ſert à délivrer une équation de l'un de ſes termes, comme nous l'avons déja vu (232 & 233).

316. ON peut transformer une équation en une autre dont les racines ſoient égales aux racines de la première, multipliées par une quantité donnée. Soit, par exemple, l'équation $t^3 + at^2 + bt + c = 0$: ſi l'on fait $ft = x$, ou $t = \frac{x}{f}$, on aura la transformée $\frac{x^3}{f^3} + \frac{ax^2}{f^2} + \frac{bx}{f} + c = 0$, ou bien $x^3 + fax^2 + f^2bx + f^3c = 0$, dont les racines ſont les produits des racines de la propoſée, multipliées par la quantité f.

317. DE-LA ſuit le moyen de changer une équation qui contient des quantités fractionnaires en une autre

qui n'en contienne pas. Qu'on ait par exemple l'équation $t^3 + \frac{at^2}{g} + \frac{bt}{h} + \frac{d}{k} = 0$: multipliez tout par le produit des dénominateurs ; vous aurez $ghkt^3 + hkat^2 + gkbt + ghd = 0$; ensuite faites $ghkt = x$, ou $t = \frac{x}{ghk}$, vous aurez la transformée $x^3 + hkax^2 + g^2hk^2bx + g^3h^3k^2d = 0$, où il n'y a point de fractions.

318. La même transformation peut servir à faire disparoître en certains cas les quantités radicales qui affectent quelques termes d'une équation. Soit, par exemple, $t^3 + at^2\sqrt{k} + bt + c\sqrt{k} = 0$: faites $t\sqrt{k} = x$; vous aurez la transformée $x^3 + akx^2 + bkx + ck^2 = 0$, où il n'y a point de quantité radicale.

319. Semblablement, on peut transformer une équation en une autre dont les racines soient égales aux quotients des racines de la première, divisées par une quantité donnée. Soit, par exemple, l'équation $t^3 + at^2 + bt + c = 0$: faites $\frac{t}{f} = x$; vous aurez la transformée $x^3 + \frac{ax^2}{f} + \frac{bx}{f^2} + \frac{c}{f^3} = 0$, dont les racines sont égales à celles de la proposée, divisées par la quantité f.

Il est clair qu'on peut transformer, par les mêmes moyens, une équation en une autre dont les racines soient à celles de la proposée, dans tel rapport qu'on voudra.

320. Une équation qui a des racines positives peut

être transformée en une autre qui ait des racines négatives de même valeur : & réciproquement. Il ne faut pour cela que changer les ſignes des termes alternatifs à compter du ſecond incluſivement. Par exemple, ſi au lieu de l'équation $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$, qui a les trois racines poſitives $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$, on écrit $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = 0$; cette dernière équation aura les trois racines négatives $x = -1$, $x = -2$, $x = -5$. De même, ſi au lieu de l'équation $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$, qui a les deux racines poſitives $x = 1$, $x = 2$, & la racine négative $x = -5$, on écrit $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$; cette dernière équation aura les deux racines négatives $x = -1$, $x = -2$, & la racine poſitive $x = 5$.

En général qu'on ait les deux équations $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d) \times \&c = 0$, $(x+a) \times (x+b) \times (x+c) \times (x+d) \times \&c = 0$, dont les racines ſont les mêmes aux ſignes près. Si l'on développe ces équations, on verra (283) qu'elles doivent avoir différens ſignes au ſecond terme ; le même ſigne au troiſième ; différents ſignes au quatrième ; le même ſigne au cinquième ; &c.

Si une équation n'avoit pas tous ſes termes, il faudroit commencer par ſuppléer les termes abſents, par zero, pour pouvoir y appliquer la régle en queſtion.

321. TOUTE équation d'un degré impair a, au moins, une racine réelle. En effet, ces ſortes d'équations peuvent être repréſentées en général par $x^{2m+1} + ax^{2m} + bx^{2m-1} + \&c = Q$, x étant l'inconnue, a, b, Q, &c, des quantités réelles & données. Or,

cette équation doit être vraie, quelques variations qui puissent arriver à x & à Q, tout le reste demeurant le même. Soit d'abord $x = 0$, on aura aussi $Q = 0$. Supposons ensuite que x augmente continuellement depuis 0 jusqu'à l'infinie ; il est clair que Q augmentera aussi continuellement depuis 0 jusqu'à l'infini. De plus, lorsque x devient infinie, le premier terme x^{2m+1} de l'équation est infini par rapport à tous ceux qui le suivent dans le premier membre ; & par conséquent ceux-ci peuvent être négligés. Donc, en nous servant du caractère ∞, pour représenter les quantités infinies, quantités qui peuvent d'ailleurs différer les unes des autres en grandeurs, de toutes les manières possibles ; nous aurons alors $x^{2m+1} = \infty$. D'où l'on tire $x = \sqrt[2m+1]{+\infty}$, quantité infinie, réelle & positive ; car toute racine impaire d'une quantité réelle & positive est également réelle & positive. Faisons x négative, & imaginons qu'elle finisse par devenir infinie négative ; la quantité Q deviendra aussi infinie négative ; & pour lors, on aura $-x^{2m+1} = \infty$, ou $x^{2m+1} = -\infty$. D'où l'on tire $x = \sqrt[2m+1]{-\infty}$, quantité infinie, réelle & négative ; car une racine impaire d'une quantité réelle & négative est aussi réelle & négative. Maintenant, puisqu'aux équations $Q = 0$, $Q = \infty$, $Q = -\infty$, répondent respectivement les équations $x = 0$, $x = \infty$, $x = -\infty$; il s'ensuit que toutes les valeurs possibles d'une même x sont comprises entre ces deux limites réelles, l'infini positif & l'infini négatif; & qu'en allant d'une limite à l'autre, x paſſe par le zero. Or, ſuivant une loi qui s'obſerve conſtamment dans la nature, une quantité qui augmente ou qui diminue continuellement, paſſe par tous les degrés poſſibles d'augmentation ou de diminution. Donc la quantité x, en augmentant continuellement depuis l'infini négatif, juſqu'à l'infini poſitif, ou en diminuant continuellement depuis l'infini poſitif juſqu'à l'infini négatif, aura néceſſairement toutes les valeurs réelles poſſibles, compriſes entre ces deux limites réelles, puiſqu'elle paſſe par le zero qui peut être regardé tout-à-la-fois comme la plus petite des valeurs poſitives & des valeurs négatives. Donc, ſi l'on attribue à Q une valeur réelle & finie ; ce qui remet l'équation propoſée ſous ſa première forme, $x^{2m+1} + ax^{2m} + bx^{2m-1} + \&c = Q$; la valeur correſpondante de x ſera auſſi réelle & finie. Donc, dans toute équation d'un degré impair, il y a, au moins, une racine réelle, qui peut d'ailleurs être poſitive ou négative, ſuivant la relation des quantités données a, b, Q, &c.

322. LORSQUE toutes les racines d'une équation ſont réelles & poſitives, les termes de cette équation ont alternativement le ſigne + & le ſigne —. C'eſt ce qu'on voit par l'équation de l'article 278, & ce qu'on trouvera dans toutes les équations de même eſpèce.

323. UNE équation dont toutes les racines ſont réelles & négatives, a le ſigne + à tous ſes termes. L'équation de l'article 279 en eſt un exemple.

324. Si une équation a toujours ses racines réelles, mais que les unes soient positives, les autres négatives, il y aura autant de racines positives que de *variations* de signes, & autant de racines négatives, que de *permanences* de signes, en prenant ces variations & ces permanences, d'un terme au terme suivant, dans toute l'étendue de l'équation. Car soit, par exemple, l'équation de l'article 280, laquelle a deux racines positives, & une négative. Il peut arriver que l'on ait $c > a + b$, ou $c < a + b$. Dans le premier cas, le second terme est positif : le troisième est négatif, parce qu'ayant $c > a + b$, on aura $ac + bc > (a + b)^2 > ab$. Et comme le dernier terme est positif, on voit que du premier au second, il y a une permanence de signes; que du second au troisième, il y a une variation de signes; & que du troisième au quatrième, il y a encore une variation de signes. Ainsi il y a, en tout, deux variations de signes, & une permanence de signes; c'est-à-dire, autant de variations que de racines positives, & autant de permanences que de racines négatives.

Dans le second cas, le second terme de l'équation est négatif; & le troisième pourra être positif ou négatif. Si ce terme est positif, il y aura du premier au second une variation de signes; du second au troisième, encore une variation; & du troisième au quatrième, une permanence de signes; ce qui fait en tout deux variations & une permanence. Si le troisième terme est négatif, il y aura une variation de signes du premier au second; une permanence du second au troisième; & une variation du troisième au quatrième; ce qui fait encore deux variations & une permanence. Le nombre des variations de signes est donc, dans ce cas comme dans le premier, le même que celui des racines positives ; & le nombre des permanences, le même que celui des racines négatives.

325. DE-LA, il suit que si l'on sait, d'une manière quelconque, qu'une équation ne contient que des racines réelles ; on connoîtra combien il y en a de positives, & combien de négatives. Par exemple, si j'ai l'équation,

$$x^5 + 3x^4 - 23x^3 - 27x^2 + 166x - 120 = 0,$$

& que je sois supposé savoir que toutes ses racines sont réelles ; je conclurai qu'elle a trois racines positives, & deux négatives, parce qu'il y a trois variations & deux permanences de signes. En effet, cette équation contient les trois racines positives, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & les deux racines négatives, $x = -4$, $x = -5$.

Si une équation manquoit d'un terme ou de plusieurs termes, il faudroit, pour pouvoir employer la régle précédente, suppléer ces termes par zero, qu'on peut imaginer précédé du signe $+$ ou du signe $-$. Soit, par exemple, l'équation $x^5 - 20x^3 + 30x^2 + 19x - 30 = 0$, dont je sais que toutes les racines sont réelles, & qui n'a point de second terme. Je l'écris ainsi, $x^5 \pm 0x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 19x - 30 = 0$; & j'observe que soit qu'on prenne le second terme $0x^4$ en $+$ ou en $-$, il y a dans toute l'étendue de l'équation, trois variations & deux permanences de ſignes. D'où je conclus que l'équation a trois racines poſitives, & deux négatives. En effet, cette équation contient les trois racines poſitives, $x=1$, $x=2$, $x=3$, & les deux racines négatives $x=-1$, $x=-5$.

326. On doit bien obſerver que la régle en queſtion, dont Deſcartes eſt l'inventeur, n'a lieu que pour les équations dont toutes les racines ſont réelles. Car, par exemple, ſi on concluoit que l'équation $xx+2x+5=0$, a ſes deux racines négatives, parce que tous ſes termes ſont poſitifs, on ſe tromperoit, les deux racines de l'équation étant imaginaires.

CHAPITRE XVII.

Des changements de forme qu'on peut faire subir aux racines de certaines équations, ou en général à quelques quantités radicales.

327. ON a vu (chap. X & XI) que les formules générales pour la résolution des équations du troisième & du quatrième degré, contiennent différents signes radicaux. Les uns affectent des quantités purement rationnelles ou commensurables * ; les autres, des quantités en partie rationnelles, en partie radicales ou incommensurables. Les premiers disparoissent, lorsque les quantités qu'ils précédent, sont des puissances parfaites de même exposant que l'indice de la

* Les expressions *quantité rationnelle*, *quantité commensurable*, sont synonymes, de même que les expressions *quantité radicale*, *quantité incommensurable*. Les quantités rationnelles ont toujours avec l'unité un rapport assignable ou mesurable ; par exemple, la fraction $\frac{3}{4}$ est à l'unité, comme 3 est à 4. Mais les vraies quantités radicales n'ont, avec l'unité, aucun rapport qu'on puisse assigner rigoureusement en nombres finis ; par exemple, on ne peut pas déterminer exactement en nombre fini la racine quarrée de 2.

racine ; car alors la racine ſe tire par les méthodes du Chapitre VII. Les ſeconds peuvent diſparoître auſſi en certains cas. Il y a de même dans les degrés ſupérieurs au quatrième des claſſes d'équations dont les racines affectées de radicaux peuvent être ramenées à des formes plus ſimples. Je me propoſe ici d'expliquer la méthode pour faire ces transformations, lorſqu'elles ſont poſſibles. Commençons par les expreſſions où il n'entre que des radicaux du ſecond degré.

328. JE ſuppoſe, pour indiquer d'abord clairement l'objet de cette recherche par un exemple, qu'on ait à réſoudre l'équation du quatrième degré,

$$x^4-(10a^2-2b^2)x^2+9a^4+6a^2b^2+b^4=0,$$

qui ſe traite par la méthode du ſecond degré. En opérant comme il a été preſcrit (214), on trouvera les quatre racines,

$$x=\pm\sqrt{[5aa-bb\pm 4a\sqrt{(aa-bb)}]}.$$

La quantité $aa-bb$ n'eſt pas un quarré parfait ; & par conſéquent $\sqrt{(aa-bb)}$ eſt une vraie quantité incommenſurable. Mais la quantité $5aa-bb\pm 4a\sqrt{(aa-bb)}$, en partie commenſurable, en partie incommenſurable, eſt un quarré parfait, celui de $2a\pm\sqrt{(aa-bb)}$. Ainſi les quatre valeurs de x ſe ſimplifient & deviennent,

$$x=\pm(2a\pm\sqrt{(aa-bb)}).$$

329. IL n'a été beſoin que d'un peu d'habitude dans le calcul, pour réduire la première expreſſion de x à celle qu'on vient de trouver. Mais il y a beaucoup

de cas qui n'offrent pas la même facilité que l'exemple précédent, pour reconnoître si une quantité en partie commensurable, en partie incommensurable, est ou non un quarré parfait. Il est donc essentiel d'avoir une méthode sûre pour extraire, lorsque la chose est possible, les racines de ces sortes de quantités. La voici.

330. REPRÉSENTONS par $A \pm \sqrt{B}$ les quantités en partie commensurables, en partie incommensurables dont il est ici question, A étant la partie rationnelle, $\sqrt{B}$ la partie radicale du second degré. Quelle que soit la racine quarrée de $A \pm \sqrt{B}$, il est évident qu'elle ne peut contenir que des radicaux du second degré; autrement elle produiroit des radicaux d'une autre espéce dans $A \pm \sqrt{B}$. Ainsi, en supposant que p & q sont des quantités rationnelles, la racine ne peut avoir que la forme $p \pm \sqrt{q}$, qui ne contient qu'un seul radical du second degré; ou la forme $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$, qui contient deux radicaux du second degré. Attribuons-lui la forme $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$, qui est la plus générale, & qui comprend d'ailleurs la première, lorsque p est un quarré parfait. En élevant $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ au quarré, nous aurons $p + q \pm 2\sqrt{pq}$, quantité qui doit être égale à $A \pm \sqrt{B}$. Et comme les quantités p, q sont arbitraires, nous pouvons égaler la partie rationnelle $p + q$ à la partie rationnelle A, & la partie radicale $\pm 2\sqrt{pq}$ à la partie radicale $\pm \sqrt{B}$; ce qui nous donnera les deux équations $p + q = A$, $2\sqrt{pq} = \sqrt{B}$, ou $4pq = B$.

Tirant de la seconde, $q = \frac{B}{4p}$; & mettant cette valeur dans la première, on trouvera $p^2 - Ap = -\frac{B}{4}$. D'où l'on tire (202), en regardant p comme l'inconnue, $p = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2}$. Donc $q = A - p = \frac{A \mp \sqrt{(A^2 - B)}}{2}$. On aura par conséquent,

$$\sqrt{p} = \pm \sqrt{\left[\frac{A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]},$$

$$\sqrt{q} = \pm \sqrt{\left[\frac{A \mp \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]}.$$

La racine quarrée de $A + \sqrt{B}$, c'est-à-dire; $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, sera donc exprimée ainsi,

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \pm \left(\sqrt{\left[\frac{A \pm \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]} + \sqrt{\left[\frac{A \mp \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]}\right),$$

expression dans laquelle il suffit de prendre les signes supérieurs de la quantité radicale $\sqrt{(A^2 - B)}$, attendu que les inférieurs produiroient le même résultat. On aura par conséquent,

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \pm \left(\sqrt{\left[\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]} + \sqrt{\left[\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]}\right).$$

De même, la racine quarrée de $A - \sqrt{B}$, c'est-à-dire, $\sqrt{p} - \sqrt{q}$, sera exprimée ainsi,

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \pm \left(\sqrt{\left[\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]} - \sqrt{\left[\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right]}\right).$$

331. MAINTENANT, toutes les fois que la quantité proposée $A \pm \sqrt{B}$ sera un quarré parfait, la partie $\sqrt{(A^2 - B)}$ deviendra rationnelle. Car $A^2 - B = (p+q)^2 - 4pq = p^2 + q^2 - 2pq = (p-q)^2$; & par conséquent $\sqrt{(A^2 - B)} = p - q$, quantité rationnelle. Tel est donc le caractère auquel on reconnoîtra si $A \pm \sqrt{B}$ est un quarré parfait. Cette quantité est un quarré parfait, lorsque $A^2 - B$ en est un; & la racine de ce dernier quarré se trouve par la méthode de l'article 121; ensuite les formules de l'article précédent donnent la racine de $A \pm \sqrt{B}$. Au contraire, on conclura que $A \pm \sqrt{B}$ n'est pas un quarré parfait, si l'on trouve que $A^2 - B$ n'en est pas un. Eclaircissons cela par des exemples.

EXEMPLE I.

Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité $5a^2 - b^2 \pm 4a\sqrt{(aa - bb)}$?

On voit que cet exemple est celui de l'article 328.

Nous avons ici $A = 5a^2 - b^2$, $\sqrt{B} = 4a\sqrt{(aa - bb)}$, $A^2 - B = 25a^4 - 10a^2b^2 + b^4 - 16a^4 + 16a^2b^2 = 9a^4 + 6a^2b^2 + b^4$. Et comme cette dernière quantité est un quarré parfait, celui de $3a^2 + b^2$; nous aurons $p = \frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2} = \frac{5a^2 - b^2 + 3a^2 + b^2}{2} = 4a^2$; & $\sqrt{p} = \pm 2a$. Ensuite, on aura $q = \frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2} = \frac{5a^2 - b^2 - (3a^2 + b^2)}{2} = aa - bb$; & $\sqrt{q} = \pm \sqrt{(aa - bb)}$. Ainsi la racine

cine quarrée de la quantité proposée $5a^2 - b^2 \pm 4a\sqrt{(aa - bb)}$, est $\pm\left(2a \pm \sqrt{(aa - bb)}\right)$, comme on l'a trouvée ci-dessus.

EXEMPLE II.

Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité numérique $28 + 10\sqrt{3}$?

Nous avons ici $A = 28$, $\sqrt{B} = 10\sqrt{3}$, $A^2 - B = 784 - 300 = 484$ dont la racine quarrée est 22. Ainsi $p = \frac{28 + 22}{2} = 25$, & $\sqrt{p} = \pm 5$; $q = \frac{28 - 22}{2} = 3$, & $\sqrt{q} = \pm\sqrt{3}$. La racine quarrée de la quantité proposée est donc $5 + \sqrt{3}$; ou $-5 - \sqrt{3}$.

EXEMPLE III.

Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité $ab + 4c^2 - d^2 + 2\sqrt{(4abc^2 - abd^2)}$?

Nous avons ici $A = ab + 4c^2 - d^2$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{(4abc^2 - abd^2)}$; $A^2 - B = a^2b^2 - 8abc^2 + 16c^4 + 2abd^2 - 8c^2d^2 + d^4$, dont la racine quarrée est $ab - 4c^2 + d^2$. Donc $p = \frac{ab + 4c^2 - d^2}{2} + \frac{ab - 4c^2 + d^2}{2} = ab$; & $\sqrt{p} = \pm\sqrt{ab}$; & $q = \frac{ab + 4c^2 - d^2 - (ab - 4c^2 + d^2)}{2} = 4c^2 - d^2$; $\sqrt{q} = \pm\sqrt{(4c^2 - d^2)}$. Ainsi la racine de la quantité proposée est $\pm\left(\sqrt{ab} + \sqrt{(4c^2 - d^2)}\right)$; somme de deux quantités radicales, priſe poſitivement ou négativement.

EXEMPLE IV.

Extraire, s'il eſt poſſible, la racine quarrée de la quantité $3a^2 - b^2 + 4b\sqrt{(5a^2 - c^2)}$?

Nous avons ici $A = 3a^2 - b^2$, $\sqrt{B} = 4b\sqrt{(5a^2 - c^2)}$; $A^2 - B = 9a^4 - 86a^2b^2 + b^4 + 16b^2c^2$, qui n'eſt pas un quarré parfait. D'où il ſuit que la quantité propoſée n'en eſt pas un non plus, & que par conſéquent l'extraction de la racine ne peut ſe faire que par approximation.

332. LA même méthode s'applique à l'extraction des racines quarrées des quantités qui contiennent, avec la partie rationnelle, pluſieurs radicaux du ſecond degré. Mais il faut obſerver, par rapport à ces quantités, que ſi l'on fait le quarré d'un trinome $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, qui contient deux radicaux, ou d'un trinome $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, qui contient trois radicaux; ce quarré contiendra, dans l'un & l'autre cas, une partie rationnelle, & trois parties radicales. D'où il ſuit que la quantité dont il s'agit d'extraire la racine quarrée, doit contenir trois radicaux, ſi la racine, ſuppoſée trinome, en doit contenir deux ou trois. On verra de même que le quarré doit contenir ſix radicaux, lorſque la racine, ſuppoſée quadrinome, en contient trois ou quatre; &c.

333. CELA obſervé, qu'il s'agiſſe, par exemple, d'extraire la racine de la quantité $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} +$

$\sqrt{D}$, qui contient une partie rationnelle, & trois parties radicales du ſecond degré. Je ſuppoſe, pour la plus grande généralité, que la racine ſoit le trinome $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, dont les trois parties ſont radicales. En faiſant le quarré de cette racine, on aura $p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$. Donc, en égalant la partie rationnelle $p+q+r$ à A, & chacune des parties radicales, $2\sqrt{pq}$, $2\sqrt{pr}$, $2\sqrt{qr}$, à chacune des parties radicales $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$, on aura, $p+q+r=A$, $2\sqrt{pq}=\sqrt{B}$, ou $q=\frac{B}{4p}$, $2\sqrt{pr}=\sqrt{C}$, ou $r=\frac{C}{4p}$, $2\sqrt{qr}=\sqrt{D}$, ou $r=\frac{D}{4q}$.

Subſtituons, dans la première équation, à la place de q & r leurs valeurs données par la ſeconde & la troiſième ; nous aurons, $p+\frac{B}{4p}+\frac{C}{4p}=A$; d'où l'on tire, $p=\frac{A+\sqrt{[A^2-B-C]}}{2}$.

Si $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ eſt un quarré parfait, la quantité $\sqrt{[A^2-B-C]}$ deviendra rationnelle. Car $A^2-B-C=(p+q+r)^2-4pq-4pr=pp+qq+rr-2pq-2pr+2qr=(p-q-r)^2$; & par conſéquent $\sqrt{(A^2-B-C)}=p-q-r$. Connoiſſant p, on aura q, par l'équation $q=\frac{B}{4p}$, & r par l'équation $r=\frac{C}{4p}$. Mais comme r a encore une valeur, ſavoir $r=\frac{D}{4q}$, il faudra qu'après

Tres peu élégant. Il vaut mieux resoudre
$2\sqrt{pq}=B$
$2\sqrt{pr}=C$
$2\sqrt{qr}=D$
et verifier
$pq+r=A$

avoir déterminé p, q, r, ainsi qu'on vient de le dire; on ait l'équation de condition $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, pour que l'extraction de la racine soit possible.

EXEMPLE I.

Extraire, s'il est possible, la racine de la quantité $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$.

En supposant $A = 10$, $\sqrt{B} = \sqrt{24}$, $\sqrt{C} = \sqrt{40}$, $\sqrt{D} = \sqrt{60}$, on trouveroit $A^2 - B - C = 36$, dont la racine quarrée est 6; & par conséquent, $p = \frac{A + \sqrt{(A^2 - B - C)}}{2} = \frac{10 + 6}{2} = 8$, $q = \frac{B}{4p} = \frac{3}{4}$, $r = \frac{C}{4p} = \frac{5}{4}$. Mais comme l'équation $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, ou $5 = 80$, n'est pas vraie; on doit conclure que les nombres trouvés pour p, q, r ne peuvent pas être les véritables. Supposons $A = 10$; $\sqrt{B} = \sqrt{40}$, $\sqrt{C} = \sqrt{60}$, $\sqrt{D} = \sqrt{24}$; nous aurons $A^2 - B - C = 0$, & par conséquent $p = \frac{10}{2} = 5$, $q = 2$, $r = 3$. Et comme l'équation $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, ou $3 = 3$, est vraie, il s'ensuit que les trois nombres 5, 2, 3 satisfont à toutes les conditions qui doivent avoir lieu pour p, q, r. Donc la racine quarrée, $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, de la quantité proposée $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$, est $\pm(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

EXEMPLE II.

Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité $28+\sqrt{320}+\sqrt{448}+\sqrt{140}$?

Soient $A=28$, $\sqrt{B}=\sqrt{320}$, $\sqrt{C}=\sqrt{448}$, $\sqrt{D}=\sqrt{140}$; nous aurons $A^2-B-C=16$, dont la racine quarrée est 4. Donc $p=\frac{A+\sqrt{(A^2-B-C)}}{2}$

$$=\frac{28+4}{2}=16,\ q=\frac{B}{4p}=5,\ r=\frac{C}{4p}=7.$$

Et comme l'équation $\frac{C}{4p}=\frac{D}{4q}$, ou $28=28$, est vraie; il s'ensuit que les trois nombres $16, 5, 7$, trouvés pour p, q, r, sont les véritables. Par conséquent, la racine quarrée, $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, de la quantité proposée $28+\sqrt{320}+\sqrt{448}+\sqrt{140}$, est $\pm(4+\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

On opérera semblablement pour les quantités de pareille nature, lorsque les racines quarrées doivent être quadrinomes, quintinomes, &c.

334. S'IL étoit question d'extraire la racine quarrée d'une quantité qui ne contînt que des quantités radicales du second degré, & point de partie rationnelle; cette extraction s'exécuteroit, lorsqu'elle est possible, par les mêmes principes.

En effet, soit le binome $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, où il n'entre que des parties radicales, dont il faut extraire la racine quarrée. On voit aisément que cette racine doit avoir la forme $\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}$, où les deux quantités p & q ſont affectées du même facteur radical $\sqrt{r}$; afin qu'en la quarrant, on ait ſimplement deux parties radicales correſpondantes à $\sqrt{A}$ & à $\sqrt{B}$. Si on lui attribuoit la forme $\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{s})}$, où les facteurs radicaux de p & de q ſont différents, on auroit au quarré plus de deux parties radicales. Il n'exiſte, pour la racine, point d'autre forme que la première, pour produire un quarré ſemblable à $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. Je ſuppoſe donc que $\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}$ ſoit la racine quarrée cherchée ; j'en fais le quarré, & je le compare avec $\sqrt{A}+\sqrt{B}$; ce qui me donne les deux équations,

$$(p+q)\sqrt{r}=\sqrt{A}\text{, ou }(p+q)^2 r=A,$$
$$2\sqrt{pqr}=\sqrt{B}\text{, ou }4pqr=B.$$

Retranchant la ſeconde égalité de la première, on trouvera,

$$(p-q)^2 r=A-B.$$

D'où l'on voit que ſi $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ eſt dans le cas d'avoir une racine quarrée, $A-B$ eſt multiple d'un quarré. La dernière équation donne $(p-q)\sqrt{r}=\sqrt{(A-B)}$. Ajoutant celle-ci avec la première, puis la retranchant de la première, on aura,

$$p\sqrt{r}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A-B)}}{2},$$

$$q\sqrt{r}=\frac{\sqrt{A}-\sqrt{(A-B)}}{2}.$$

Donc la racine cherchée $\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}=$ $\sqrt{\left[\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A-B)}}{2}\right]}+\sqrt{\left[\frac{\sqrt{A}-\sqrt{(A-B)}}{2}\right]}$.

EXEMPLE.

Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité $8\sqrt{2}+2\sqrt{30}$ *?*

Nous avons $\sqrt{A}=8\sqrt{2}$, $\sqrt{B}=2\sqrt{30}$; $A=128$, $B=120$, $A-B=8$, qui est le produit du quarré 4 par le nombre 2. Donc $\frac{\sqrt{A}+\sqrt{(A-B)}}{2}=4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$, & $\frac{\sqrt{A}-\sqrt{(A-B)}}{2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. La racine cherchée est donc $\sqrt{(5\sqrt{2})}+\sqrt{(3\sqrt{2})}$.

335. LA même méthode a également lieu pour l'extraction des racines quarrées des quantités en partie réelles, en partie imaginaires. Car soit le binome $F+\sqrt{-G}$, dans lequel F est une quantité réelle, positive ou négative, ou même zero, G une quantité réelle positive, afin que $\sqrt{-G}$ soit imaginaire. En mettant dans l'expression générale de la racine quarrée de $A+\sqrt{B}$, trouvée (330), F pour A, & $-G$ pour B, on trouvera,

$$\sqrt{[F+\sqrt{-G}]}=\pm\left(\sqrt{\left[\frac{F+\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}+\sqrt{\left[\frac{F-\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}\right).$$

Pour que $F+\sqrt{-G}$ soit un quarré, il faut que F^2+G en soit un.

EXEMPLE I.

Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de $\sqrt{-64}$, *ou de* $8\sqrt{-1}$?

Nous avons ici $F=0$, $\sqrt{-G}=8\sqrt{-1}$; donc $G=64$, $F^2+G=64$ dont la racine quarrée est 8. La racine quarrée cherchée est donc $\pm(2+2\sqrt{-1})=\pm 2(1+\sqrt{-1})$.

EXEMPLE II.

Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de $16-30\sqrt{-1}$?

Nous avons ici $F=16$, $\sqrt{-G}=30\sqrt{-1}$. Donc $F^2=256$, $G=900$, $F^2+G=1156$ dont la racine quarrée est 34. Donc $\sqrt{[16-30\sqrt{-1}]}=\pm(5-3\sqrt{-1})$.

336. ON voit par les deux exemples précédents, & il en sera de même dans tous les cas pareils, que lorsque $F+\sqrt{-G}$ est un quarré, sa racine est toujours de cette forme $a+b\sqrt{-1}$, a & b étant des quantités réelles. On peut semblablement, lorsque $F+\sqrt{-G}$ n'est pas un quarré parfait, indiquer sa racine par $a+b\sqrt{-1}$.

Car, que $F+\sqrt{-G}$ soit ou non un quarré; que même F & G soient des quantités radicales quelconques, réelles, avec cette restriction seulement que G soit positive; la racine quarrée de $F+\sqrt{-G}$ peut s'exprimer généralement par $\pm\left(\sqrt{\left[\frac{F+\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}+\sqrt{\left[\frac{F-\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}\right)$, puisqu'en élevant cette dernière quantité au quarré, on trouve $F + \sqrt{-G}$. Or $\sqrt{(F^2 + G)}$ étant toujours une quantité réelle plus grande que F, il est évident que soit qu'on suppose F positive ou négative, la première partie $\sqrt{\left[\frac{F+\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}$ de la racine proposée est toujours une quantité réelle qu'on peut représenter par a; & que la seconde partie $\sqrt{\left[\frac{F-\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}$, qui est imaginaire, & qui peut s'écrire ainsi, $\sqrt{\left[\frac{\sqrt{(F^2+G)}-F}{2}\right]} \times \sqrt{-1}$, peut s'exprimer par $b\sqrt{-1}$, en faisant $\sqrt{\left[\frac{\sqrt{(F^2+G)}-F}{2}\right]} = b$, quantité réelle.

337. IL suit de-là que si l'on tire la racine quarrée de $F + \sqrt{-G}$; puis la racine quarrée de la racine quarrée précédente; ainsi de suite: on aura toujours pour chaque racine une quantité qu'on pourra représenter par $a + b\sqrt{-1}$. Car d'abord nous venons de voir que $\sqrt{[F + \sqrt{-G}]}$ se rapporte à la forme $a + b\sqrt{-1}$, ou $a + \sqrt{-b^2}$. Par la même raison, la racine quarrée de cette racine quarrée est toujours une quantité de pareille espèce; ainsi de suite.

On doit observer que si $a + b\sqrt{-1}$ est la racine quarrée de $F + \sqrt{-G}$, on aura $a - b\sqrt{-1}$ pour celle de $F - \sqrt{-G}$. Ainsi des autres.

338. TOUTE racine *paire* d'une quantité négative $-C$, est réductible à la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Car, 1°. $\sqrt{-C} = \sqrt{C}.\sqrt{-1}$, qui se rapporte à la forme $a+b\sqrt{-1}$, en faisant $a=0$, $b=\sqrt{C}$. De plus, si dans l'article 336, on fait $F=0$, $G=C$, on trouvera que $\sqrt{[\sqrt{-C}]}$, ou, ce qui est la même chose (110 & 112), $\sqrt[4]{-C}=\sqrt[4]{\frac{C}{4}}$. $(1+\sqrt{-1})$ qui se rapporte à $a+b\sqrt{-1}$, en supposant $a=b=\sqrt[4]{\frac{C}{4}}$. Faisant ensuite dans le même article 336, $F=\sqrt[4]{\frac{C}{4}}$, $\sqrt{-G}=\sqrt[4]{\frac{C}{4}}.\sqrt{-1}$, on trouvera que $\sqrt{[\sqrt[4]{-C}]}$, ou, ce qui est la même chose, $\sqrt[8]{-C}$ est encore réductible à la forme $a+b\sqrt{-1}$. Ainsi de suite pour toutes les racines paires dont les indices sont l'un des termes de la progression géométrique $\div 2:4:8:16:32:$&c.

2°. La racine sixième de $-C$ étant la même chose (110 & 112) que la racine quarrée de la racine cube de $-C$; & $\sqrt[3]{-C}$ étant $=-\sqrt[3]{C}$, si l'on suppose, pour abréger un peu, $\sqrt[3]{C}=D$, on aura $\sqrt[6]{-C}=\sqrt{-D}=\sqrt{D}.\sqrt{-1}$. Ce qui rappelle ce cas au précédent, & fait voir qu'on peut comprendre, sous la forme $a+b\sqrt{-1}$, toutes les racines paires de $-C$, dont les indices sont l'un des termes de la progression géométrique $\div 6:12:24:48:$ &c.

3°. De même, $\sqrt[10]{-C}$ étant la même chose que $\sqrt{[\sqrt[5]{-C}]}$; & $\sqrt[5]{-C}$ étant $=-\sqrt[5]{C}$; si l'on fait $\sqrt[5]{C}=E$, on aura $\sqrt[10]{-C}=\sqrt{-E}$. D'où l'on voit encore que ce cas se rappelle au premier, & qu'on pourra toujours mettre sous la forme $a+b\sqrt{-1}$ toutes les racines paires de $-C$, dont les indices ſont l'un des termes de la progreſſion géométrique $\div$ 10:20:40:80: &c.

Ainſi de ſuite. Il eſt évident que les progreſſions indiquées comprennent, par leur réunion, tous les nombres pairs.

Je paſſe aux extractions des racines cubes.

339. SUPPOSONS, pour commencer encore par un exemple, qu'en réſolvant une équation du troiſième degré par la méthode de l'article 235, on ſoit parvenu à cette valeur pour x,

$$x = \sqrt[3]{[4a^3 - 3ab^2 + (4a^2 - b^2)\sqrt{(aa - bb)}]} + \sqrt[3]{[4a^3 - 3ab^2 - (4a^2 - b^2)\sqrt{(aa - bb)}]}:$$

l'habitude du calcul pourra faire connoître que la quantité $4a^3 - 3ab^2 \pm (4a^2 - b^2)\sqrt{(aa - bb)}$ eſt un cube parfait, celui de $a \pm \sqrt{(aa - bb)}$, & que par conſéquent la valeur de x ſe réduit ſimplement à $x = 2a$. Mais voici une méthode ſûre pour extraire la racine cube dans ces ſortes de cas.

340. REPRÉSENTONS par $A + \sqrt{B}$, la quantité dont il faut extraire la racine cube, A étant la partie rationnelle, $\sqrt{B}$ une quantité radicale du ſecond degré. J'obſerve,

1°. Que la racine cube cherchée ne peut pas contenir plus d'un radical du ſecond degré; car le cube d'une quantité telle que $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, contiendroit des radicaux à tous ſes termes, & par conſéquent le cube ſuppoſé $A + \sqrt{B}$, contiendroit plus d'un radical du ſecond degré; ce qui eſt contraire à l'hypothèſe.

2°. Que la racine peut contenir, avec un radical du second degré, un radical du troisième degré, pourvu que ce dernier radical soit commun à tous ses termes. En effet, le cube d'une quantité telle que $k\sqrt[3]{m}+\sqrt{h}.\sqrt[3]{m}$ est $k^3m+3k^2m\sqrt{h}+3khm+mh\sqrt{h}$; & ce cube a, comme on voit, de même que $A+\sqrt{B}$, une partie rationnelle, savoir $k^3m+3khm$, & une partie radicale du second degré, savoir $(3k^2m+mh)\sqrt{h}$. La racine cherchée ne peut pas avoir d'autres espèces de formes.

341. JE suppose que la racine cube de $A+\sqrt{B}$ soit $p+\sqrt{q}$, p étant une quantité rationnelle, $\sqrt{q}$ une quantité radicale du second degré. Les conditions qui doivent avoir lieu pour que cette supposition soit vraie, nous feront connoître en même-tems les cas où les deux parties de la racine doivent être affectées d'un radical cube.

On observera que si la quantité dont on demande la racine cube, étoit $A-\sqrt{B}$, il faudroit prendre pour racine, $p-\sqrt{q}$. Mais, pour abréger, je me contente de considérer $A+\sqrt{B}$.

342. EN élevant $p+\sqrt{q}$ au cube, & en égalant la partie rationnelle de ce cube à A, & la partie radicale à $\sqrt{B}$, on aura ces deux équations, $A=p^3+3pq$, $\sqrt{B}=(3p^2+q)\sqrt{q}$, qui étant élevées au quarré, donneront deux nouvelles équations dont la différence est,

$$A^2-B=p^6-3p^4q+3p^2q^2-q^3=(p^2-q)^3.$$

Donc, en tirant la racine cube de chaque membre, on aura $\sqrt[3]{[A^2 - B]} = p^2 - q$. Ainſi lorſque $A + \sqrt{B}$ eſt un cube, & que ſa racine eſt de la forme $p + \sqrt{q}$, la quantité $A^2 - B$ eſt un cube parfait, celui de $p^2 - q$.

Nommons, pour abréger, n la quantité donnée $\sqrt[3]{[A^2 - B]}$ que je ſuppoſe rationnelle. On aura $q = p^2 - n$. Subſtituant cette valeur de q dans l'équation $A = p^3 + 3pq$, on trouvera l'équation de condition,

$$(M) \qquad 4p^3 - 3np - A = 0,$$

qui donnera pour p une valeur rationnelle, dans l'hypothèſe propoſée. La ſeule difficulté eſt donc de ſavoir décompoſer cette équation en ſes facteurs rationnels, ſi elle en a effectivement. C'eſt à quoi on parviendra, ou par l'uſage du calcul, ou par les méthodes que nous avons expliquées (Chap. XIV). Quand on aura p, on aura q, par l'équation $q = p^2 - n$.

343. LORSQUE $A^2 - B$ n'eſt pas un cube, & que cependant la quantité propoſée $A + \sqrt{B}$ en eſt un, la racine cube de cette quantité contient dans ſes deux termes un radical du troiſième degré. Pour trouver alors cette racine, je multiplie & je diviſe $A + \sqrt{B}$, par un facteur indéterminé l; ce qui me donne $A + \sqrt{B} = \frac{lA + l\sqrt{B}}{l}$, & $\sqrt[3]{[A + \sqrt{B}]} = \frac{\sqrt[3]{[lA + l\sqrt{B}]}}{\sqrt[3]{l}}$. Maintenant, ſi dans les formules de l'article précédent, on met lA pour A, $l\sqrt{B}$ pour $\sqrt{B}$, il eſt clair que le numérateur $\sqrt[3]{[lA +}$

$l\sqrt{B}$] fera de la forme $p+\sqrt{q}$, pourvu que $l^2A^2-l^2B$ foit un cube parfait. Or, il eft toujours poffible de déterminer l de manière que $l^2(A^2-B)$ foit un cube parfait, puifque le pis aller eft de prendre $l=A^2-B$. Ainfi, dans ce cas, la racine cube de $A+\sqrt{B}$ eft $\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt[3]{l}}$, ou $\frac{p\sqrt[3]{l^2}+\sqrt{q}.\sqrt[3]{l^2}}{l}$, expreffion qui fe réduit à la forme $k\sqrt[3]{m}+\sqrt{h}.\sqrt[3]{m}$, propofée (340, n°. 2), en faifant $\frac{p}{l}=k$, $q=hl^2$, $l^2=m$. Quand on aura donc trouvé, par la méthode de l'article précédent, la racine cube de $lA+l\sqrt{B}$, il faudra divifer cette racine par $\sqrt[3]{l}$, pour avoir celle de $A+\sqrt{B}$.

Il eft clair que tous ces calculs s'appliqueront également aux quantités en partie rationnelles, en partie imaginaires, en regardant B comme une quantité négative.

Eclairciffons tout cela par quelques exemples.

EXEMPLE I.

Extraire, s'il eft poffible, la racine cube de la quantité $4a^3-3ab^2+(4a^2-b^2)\sqrt{[a^2-b^2]}$?

Nous avons ici $A=4a^3-3ab^2$, $\sqrt{B}=(4a^2-b^2)\sqrt{(a^2-b^2)}$; $A^2-B=b^6$, dont la racine cube eft $b^2=n$. Ainfi l'équation (M) devient $4p^3-3b^2p-4a^3+3ab^2=0$; & on voit, au premier coup d'œil, qu'elle eft divifible par $p-a=0$. Donc $p=a$; & à caufe de $q=p^2-n$, $q=aa-bb$. Ainfi la racine cube de la quantité proposée est de la forme $p+\sqrt{q}$; & cette racine est $a+\sqrt{(aa-bb)}$.

On trouvera semblablement que la racine cube de $4a^3-3ab^2-(4a^2-b^2)\sqrt{[aa-bb]}$, est $a-\sqrt{[aa-bb]}$.

Les deux cas réunis comprennent l'exemple de l'article 339.

EXEMPLE II.

Extraire, s'il est possible, la racine cube de la quantité numérique $2+\sqrt{5}$?

Nous avons ici $A=2$, $\sqrt{B}=\sqrt{5}$; $A^2-B=4-5=-1$, dont la racine cube est $-1=n$. Par conséquent l'équation (M) devient $4p^3+3p-2=0$; & elle est divisible par $2p-1=0$. Donc $p=\frac{1}{2}$, & $q=p^2-n=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$. Ainsi la racine cube de la quantité proposée est de la forme $p+\sqrt{q}$; & cette racine est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

EXEMPLE III.

Extraire, s'il est possible, la racine cube de la quantité $5+3\sqrt{3}$?

Nous avons ici $A=5$, $\sqrt{B}=3\sqrt{3}$; $A^2-B=-2$, qui n'est pas un cube parfait. Ainsi cet exemple se rapporte à l'article 343. En supposant le facteur $l=2$, on aura $\sqrt[3]{[(A^2-B)l^2]}=\sqrt[3]{-8}=-2=n$. Mettons dans l'équation (M) pour n cette valeur, & pour A, le produit lA, ou 2×5; nous aurons $4p^3+6p-10=0$, équation divisible par $p-1=0$. Donc $p=1$, & $q=p^2-n=3$; La racine cube de $lA+l\sqrt{B}$, ou de $10+6\sqrt{3}$, eſt donc de la forme $p+\sqrt{q}$; & cette racine eſt $1+\sqrt{3}$. Par conſéquent la racine cube de la quantité propoſée $A+\sqrt{B}$, ou $5+3\sqrt{3}$, eſt $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

EXEMPLE IV.

Reconnoître ſi dans l'équation $x^3+3x-14=0$, *qui n'a* (238) *qu'une ſeule racine réelle, la valeur de* x *ne peut pas être débarraſſée des ſignes radicaux ?*

En réſolvant cette équation par la méthode de l'article 235, on trouve,

$$x=\sqrt[3]{[7+\sqrt{50}]}+\sqrt[3]{[7-\sqrt{50}]}.$$

La queſtion eſt donc de tirer, s'il eſt poſſible, la racine cube de $7+\sqrt{50}$, & celle de $7-\sqrt{50}$. Or, pour la première quantité, nous avons $A=7$, $\sqrt{B}=\sqrt{50}$; $A^2-B=-1$, dont la racine cube eſt $-1=n$. Donc l'équation (M) devient $4p^3+3p-7=0$; & elle eſt diviſible par $p-1=0$. Donc $p=1$, & $q=p^2-n=2$. La racine cube de $7+\sqrt{50}$ eſt donc de la forme $p+\sqrt{q}$; & cette racine eſt $1+\sqrt{2}$.

On trouvera ſemblablement que la racine cube de $7-\sqrt{50}$ eſt $1-\sqrt{2}$. Ainſi la valeur de x ſe réduit ſimplement à $x=2$.

Cet exemple peut ſervir d'éclairciſſement à l'article 236.

EXEMPLE

EXEMPLE V.

Reconnoître si l'équation $x^3-6x+4=0$, *qui semble* (245) *appartenir au cas irréductible, n'auroit pas des racines exprimables sous une forme finie?*

En résolvant cette équation par la méthode de l'article 235, on trouve,

$$x=\sqrt[3]{[-2+2\sqrt{-1}]}+\sqrt[3]{[-2-2\sqrt{-1}]}.$$

Il s'agit donc de tirer, s'il est possible, la racine cube de $-2+2\sqrt{-1}$, & celle de $-2-2\sqrt{-1}$. Or, pour la première quantité, nous avons $A=-2$, $\sqrt{B}=2\sqrt{-1}$; $A^2-B=4+4=8$, dont la racine cube est $2=n$. Donc l'équation (M) devient $4p^3-6p+2=0$; & elle est divisible par $p-1=0$. Donc $p=1$, & $q=p^2-n=-1$. La racine cube de $-2+2\sqrt{-1}$ est donc de la forme $p+\sqrt{q}$; & cette racine est $1+\sqrt{-1}$.

On trouvera de même que la racine cube de $-2-2\sqrt{-1}$ est $1-\sqrt{-1}$. Ainsi la valeur de x se réduit simplement à 2, valeur réelle; les quantités imaginaires qu'elle renfermoit sous sa première forme, se détruisant mutuellement par l'opposition des signes. Si l'on divise l'équation proposée $x^3-6x+4=0$, par $x-2$, on trouvera l'équation du second degré $x^2+2x-2=0$, laquelle donne pour x ces deux autres valeurs réelles, $x=-1+\sqrt{3}$, $x=-1-\sqrt{3}$.

Cet exemple peut servir d'éclaircissement à l'article 246.

344. Si on proposoit d'extraire la racine cube d'une quantité composée de deux parties radicales du second degré, telle qu'est $\sqrt{C}+\sqrt{D}$; on multiplieroit & on diviseroit tout par le cube de l'une des parties, par exemple, par celui de $\sqrt{C}$; ce qui donneroit $\sqrt{C}+\sqrt{D}=\frac{C^2+\sqrt{C^3D}}{\sqrt{C^3}}$. Or, dans cette fraction, le numérateur se rapporte à la forme $A+\sqrt{B}$, en faisant $C^2=A$, $\sqrt{C^3D}=\sqrt{B}$; & ce même numérateur sera un cube, si $\sqrt{C}+\sqrt{D}$ en est un, puisque $C^2+\sqrt{C^3D}$ est le produit de $\sqrt{C}+\sqrt{D}$, par une quantité élevée au cube. Ainsi on aura la racine cube de $\sqrt{C}+\sqrt{D}$, en tirant, s'il est possible, celle de $C^2+\sqrt{C^3D}$, & en la divisant par la racine cube de $\sqrt{C^3}$, c'est-à-dire, par $\sqrt{C}$.

345. Qu'on ait la quantité $F+\sqrt{-G}$, en partie réelle, en partie imaginaire. Lorsque cette quantité est un cube parfait, on trouve par la méthode des articles 342 & 343, que sa racine cube est toujours de cette forme, $a+b\sqrt{-1}$, a & b étant des quantités réelles. Maintenant, je dis en général que lors même que $F+\sqrt{-G}$ n'est pas un cube, on peut néanmoins indiquer sa racine cube par la formule $a+b\sqrt{-1}$.

Car représentons la racine cube dont il s'agit par $r+s$, la partie s contenant un radical du second degré, tandis que r n'en contient point, & les deux parties r & s pouvant contenir d'ailleurs chacune un même radical du troisième degré. Ces formes sont les seules qui soient compatibles avec l'espèce de la quantité $F+\sqrt{-G}$. En faisant le cube de $r+s$, & en égalant à F la partie de ce cube, qui contient la lettre r & le quarré de s, & à $\sqrt{-G}$, la partie où s est élevée à une puissance impaire, on aura ces deux équations, $F=r^3+3rs^2$, $\sqrt{-G}=(3r^2+s^2)s$; ou $G=-(3r^2+s^2)^2s^2$, qui étant combinées ensemble, donneront nécessairement pour r & s des valeurs telles qu'en élevant $r+s$ au cube, on aura $F+\sqrt{-G}$, puisqu'elles sont fondées sur l'hypothèse que $r+s$ est la racine cube de $F+\sqrt{-G}$. Or, en opérant sur ces deux équations, comme dans l'article 342, on trouvera d'abord $r^2-s^2=\sqrt{[F^2+G]}$, quantité réelle que je nomme n, pour abréger. Ensuite on aura, en r, une équation analogue à l'équation (M), savoir, $4r^3-3nr-F=0$, ou bien $r^3-\frac{3nr}{4}-\frac{F}{4}=0$. Dans cette dernière équation, qui est du troisième degré, les trois valeurs de r sont réelles (245). Ainsi,

1°. L'on peut représenter l'une d'elles par a.

2°. L'équation $G=-(3r^2+s^2)^2s^2$ donne $s^2=\frac{-G}{(3r^2+s^2)^2}$. Mettant dans le dénominateur, à la place de s^2 sa valeur r^2-n, on aura $s^2=\frac{-G}{(4r^2-n)^2}$; quantité qui est nécessairement négative, puisque G est positive, & que le quarré $(4r^2-n)^2$ est aussi une quantité positive. Donc s est une quantité imaginaire, qui a pour expression $\frac{\sqrt{G}}{4r^2-n}\times\sqrt{-1}$;

& qui ſe rapporte à la forme $b\sqrt{-1}$, en faiſant $b = \frac{\sqrt{G}}{4r^2 - n}$, quantité réelle.

346. Il ſuit de-là que ſi l'on tire de la quantité $F + \sqrt{-G}$ une racine *paire*, dont l'indice ſoit compris dans la progreſſion géométrique $\div 6 : 12 : 24 : 48 :$ &c ; cette racine ſera toujours réductible à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Car tirant d'abord la racine cube de $F + \sqrt{-G}$, on aura une quantité de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Tirant enſuite la racine quarrée de cette quantité, puis la racine quarrée de la racine quarrée précédente ; ainſi de ſuite : on aura continuellement des expreſſions de la même forme $a + b\sqrt{-1}$.

347. En imitant les méthodes que nous avons données pour les racines ſeconde & troiſième, on parviendra à tirer, lorſque la choſe eſt poſſible, les racines quatrième, cinquième, ſixième, ſeptième, &c, du binome $A + \sqrt{B}$. Car ſuppoſons en général que $p + \sqrt{q}$ ſoit la racine n de $A + \sqrt{B}$, c'eſt-à-dire qu'on ait $p + \sqrt{q} = (A + \sqrt{B})^{\frac{1}{n}}$, ou $(p + \sqrt{q})^n = A + \sqrt{B}$. Si l'on développe la puiſſance $(p + \sqrt{q})^n$, on aura $(p + \sqrt{q})^n = p^n + np^{n-1}\sqrt{q} + \frac{n(n-1)}{1.2} p^{n-2} q + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^{n-3} q\sqrt{q} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} p^{n-4} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} p^{n-5} q^2 \sqrt{q} +$ &c.

Donc, en égalant A à la somme des termes qui ne contiennent pas $\sqrt{q}$, & $\sqrt{B}$ à la somme des termes qui contiennent $\sqrt{q}$, on formera ces deux équations,

$$A = p^n + \frac{n(n-1)}{1.2} p^{n-2} q + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} p^{n-4} q^2$$
$$+ \&c,$$

$$\sqrt{B} = np^{n-1} \sqrt{q} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^{n-3} q \sqrt{q}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} p^{n-5} q^2 \sqrt{q} + \&c.$$

Quarrons chacune de ces deux équations, & retranchons la seconde de la première; nous trouverons, toutes réductions faites,

$$A^2 - B = p^{2n} - np^{2n-2} q + \frac{n(n-1)}{1.2} p^{2n-4} q^2 -$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^{2n-6} q^3 + \&c;$$

c'est-à-dire, $A^2 - B = (p^2 - q)^n$, ou $p^2 - q = (A^2 - B)^{\frac{1}{n}}$. D'où l'on voit qu'afin de pouvoir tirer la racine n de $A + \sqrt{B}$, il faut qu'on puisse tirer la racine n de $A^2 - B$. Soit k cette racine, en sorte qu'on ait $p^2 - q = k$, ou $q = p^2 - k$. En substituant cette valeur de q dans l'expression que nous avons trouvée pour A, on aura une équation du degré n, où il n'y aura plus que p d'inconnue, & dont on fera le même usage qu'on a fait ci-dessus de l'équation (M) dans les articles 342 & 343.

Nous observerons en passant qu'on auroit pû trouver d'une manière plus simple l'équation $A^2 - B =$

$(p^2 - q)^n$. Car puiſqu'on a $(p + \sqrt{q})^n = A + \sqrt{B}$, on aura ſemblablement $(p - \sqrt{q})^n = A - \sqrt{B}$. Multipliant enſemble ces deux équations, il vient $(p^2 - q)^n = A^2 - B$.

348. LA racine cinquième, la racine ſeptième, &c, de la quantité $F + \sqrt{-G}$, en partie réelle, en partie imaginaire, eſt toujours réductible à la forme $a + b\sqrt{-1}$. Car, en repréſentant cette racine par $r + s$, où s ſeulement contient un radical du ſecond degré, tandis que r & s peuvent contenir l'une & l'autre un radical du cinquième ou du ſeptième degré, &c ; puis opérant préciſément comme dans l'article 345, on trouvera, en r, une équation du cinquième ou du ſeptième degré, laquelle donnera toujours pour r une valeur réelle, parce que toute équation d'un degré impair a, au moins, une valeur réelle (321). Cette valeur réelle de r peut être repréſentée par a. Enſuite on trouvera que s^2 eſt une quantité négative, & que par conſéquent s eſt une quantité imaginaire qui peut s'exprimer par $b\sqrt{-1}$.

349. DE-LA & de l'article 337, il ſuit qu'on aura toujours des quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$, en tirant de $F + \sqrt{-G}$, une racine dont l'indice eſt compris dans les progreſſions géométriques ſuivantes,

$$\div 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : \&c,$$
$$\div 7 : 14 : 28 : 56 : 112 : \&c,$$
$$\div 9 : 18 : 36 : 72 : 144 : \&c,$$
$$\&c.$$

350. IL ſeroit facile d'étendre les mêmes méthodes

à l'extraction des racines des quantités de la forme $A+\sqrt[m]{B}$, l'exposant m du radical étant d'un degré quelconque. Mais je ne pousserai pas plus loin ces recherches.

351. REVENONS & terminons ce Chapitre par une remarque importante sur la forme générale des racines imaginaires.

Nous avons démontré, 1°. que toute racine paire d'une quantité négative quelconque peut être représentée par $a+b\sqrt{-1}$, a & b étant des quantités réelles.

2°. Que la racine quelconque d'une expression en partie réelle, en partie imaginaire en vertu d'un radical pair placé au-devant d'une quantité négative, est également réductible à la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Ainsi, en supposant que les quantités imaginaires qui proviennent de la résolution d'une équation, sont des racines paires de quantités négatives, ou des racines quelconques de quantités en partie réelles, en partie imaginaires à cause d'un radical pair placé au-devant d'une quantité négative; les expressions des quantités dont il s'agit, sont toujours réductibles à la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Soit, par exemple, l'équation $x^8-2gx^4+3gg=0$. On trouvera d'abord (214) $x^4-g=\pm\sqrt{-2gg}=\pm g\sqrt{-2}$. Ensuite on aura $x=\pm\sqrt[4]{[g\pm g\sqrt{-2}]}$, expressions qu'on réduira à la forme $a+b\sqrt{-1}$, par la méthode de l'article 337.

Soit l'équation $x^6-2gx^3+3g^2=0$. On trouvera d'abord (214), $x^3-g=\pm g\sqrt{-2}$; ensuite $x=\sqrt[3]{[g\pm g\sqrt{-2}]}$, valeurs qu'on réduira à la forme $a+b\sqrt{-1}$, par la méthode de l'article 345.

Il eſt clair que l'expreſſion $a+b\sqrt{-1}$ peut toujours être regardée comme provenant d'une équation du ſecond degré. Car, ſoit l'inconnue $y=a+b\sqrt{-1}$, ou plutôt $y=a\pm b\sqrt{-1}$, attendu que tout radical du ſecond degré porte toujours devant lui le double ſigne $\pm$; nous aurons $y-a=\pm b\sqrt{-1}$. Donc, en quarrant chaque membre, & mettant tout d'un même côté, on aura $yy-2ay+aa+bb=0$.

M. d'Alembert eſt le premier qui ait démontré (Mém. de l'Acad. de Berlin, an. 1746), que toute quantité imaginaire peut s'exprimer par $a+b\sqrt{-1}$. Sa démonſtration, fondée ſur le calcul intégral, s'étend aux imaginaires exponentielles. Mais on n'avoit pas encore obſervé que pour les équations algébriques, les deux théorêmes précédents pouvoient ſe démontrer par des principes tirés de la choſe même.

CHAPITRE XVIII.

Méthodes pour résoudre, par approximation, les Equations numériques de tous les degrés.

352. NOUS avons fait connoître les principaux moyens qu'on a imaginés jusqu'ici pour résoudre exactement les équations. Il ne reste aucune difficulté pour celles qui ont des diviseurs commensurables, ou des racines égales. La méthode que nous avons donnée (258 & 259) pour les équations du quatrième degré, peut être appliquée à certaines équations des degrés supérieurs. L'art de cette méthode, consiste à disposer l'équation, de manière qu'en ajoutant à chaque membre une même quantité indéterminée, on ait de part & d'autre des quarrés parfaits. Cela est possible en plusieurs cas; & on parvient à des équations de condition qu'il est toujours facile de vérifier par les méthodes précédentes. Nos Lecteurs pourront s'exercer sur ce sujet qu'il suffit de leur indiquer.

Lorsqu'on a épuisé tous les moyens de résoudre exactement une équation; si aucun d'eux n'a réussi, il reste au moins la ressource de pouvoir la résoudre d'une manière aussi approchée qu'on voudra, pourvu qu'on ait la patience de pouſſer le calcul auſſi loin qu'il eſt néceſſaire. C'eſt ce qu'on verra dans un moment. Commençons par établir quelques principes.

353. Si une équation d'un degré quelconque eſt telle qu'en ſubſtituant ſucceſſivement à la place de l'inconnue deux nombres différents, on ait des réſultats de ſignes contraires : cette équation aura toujours, au moins, une racine réelle, laquelle ſera compriſe entre les deux nombres dont il s'agit. Car ſoient x l'inconnue, a, b, c, &c, ſes racines, g & h les deux nombres qui étant ſubſtitués pour x, produiſent des réſultats de ſignes contraires. L'équation ſera réductible à cette forme,

$$(x-a).(x-b).(x-c).\ldots\ldots=0.$$

Cela poſé, qu'on mette ſucceſſivement g & h à la place de x, on aura les deux quantités,

$$(g-a).(g-b).(g-c).\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(h-a).(h-b).(h-c).\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui, par hypothèſe, ſont de ſignes contraires. Donc il faut néceſſairement que deux facteurs correſpondants, par exemple, $g-a$ & $h-a$ ſoient de ſignes contraires. Ainſi l'une des valeurs de x eſt compriſe entre les deux nombres g & h; elle eſt plus petite que le plus grand de ces deux nombres, & plus grande que le plus petit. Cette même valeur eſt donc réelle, puiſqu'elle eſt compriſe entre des nombres réels.

354. Il ſuit de-là que ſi les deux nombres g & h ne différent entr'eux que de l'unité, la valeur qu'on

obtiendra pour x, en mettant g ou h à la place de cette inconnue, ne différera pas d'une unité de la vraie valeur de x.

355. TOUTE équation dont le dernier terme eſt négatif, le premier étant poſitif, a néceſſairement, au moins, une racine réelle poſitive. Car ſoit l'équation générale $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots - M = 0$. Si l'on fait $x = 0$, on aura le réſultat négatif $-M$; & ſi l'on fait $x = \infty$, on aura le réſultat poſitif $+\infty$. Ainſi, on a ici $g = 0$, $h = \infty$. Donc la valeur de x eſt compriſe entre 0 & ∞; elle eſt par conſéquent l'un des nombres réels poſitifs compris entre ces deux limites.

356. L'EXPOSANT n étant ſuppoſé impair, ſi le dernier terme de l'équation étoit poſitif, cette équation auroit, au moins, une racine réelle négative. Car alors (284) le nombre des termes de l'équation eſt pair; & ſi l'on change les ſignes de ſes termes pris de deux en deux à compter depuis le ſecond incluſivement juſqu'au dernier, les racines poſitives deviendront négatives, & les négatives, poſitives (320). Or, par ce changement de ſignes, le dernier terme de l'équation devient négatif. Donc la nouvelle équation a, au moins, une racine poſitive, & par conſéquent l'équation primitive a, au moins, une racine négative correſpondante.

357. UNE équation d'un degré pair, dont le dernier terme eſt négatif, a, au moins, deux racines réelles, l'une poſitive, l'autre négative. Car d'abord

elle a une racine réelle poſitive (355). Enſuite, ſi l'on change les ſignes de ſes termes pris de deux en deux, à compter depuis le ſecond, juſqu'au dernier, pour changer les racines poſitives en négatives, & les négatives en poſitives ; on aura une équation dont le dernier terme demeurera le même en tout que celui de la propoſée. Donc cette nouvelle équation aura, au moins, une racine réelle poſitive ; & par conſéquent la racine correſpondante de l'équation propoſée ſera réelle & négative.

358. Il peut ſe faire qu'une équation ne donne jamais de réſultats de ſignes contraires, quelques nombres qu'on ſubſtitue à la place de l'inconnue. Cela arrive,

1°. Lorſque l'équation contient ſeulement des racine égales deux à deux, quatre à quatre, &c. Ainſi, par exemple, l'équation $(x-a)^2 \times (x-b)^4 \ldots\ldots = 0$, conſervera évidemment toujours le même ſigne, quelques valeurs qu'on attribue à x.

2°. Lorſque l'équation contient ſeulement des racines imaginaires. Telle eſt l'équation $(x+a+b\sqrt{-1}).(x+a-b\sqrt{-1}).(x-c+d\sqrt{-1}).(x-c-d\sqrt{-1})\ldots\ldots=0$, qui aura toujours le même ſigne, quelque valeur qu'on donne à x. Sur quoi il faut ſe rappeller que les imaginaires vont toujours deux à deux, & que les deux racines qui compoſent une même paire, ne différent jamais que par le ſigne de la partie imaginaire.

3°. Lorſque l'équation contient tout-à-la-fois des racines égales deux à deux, quatre à quatre, &c, &

des racines imaginaires. Telle eſt l'équation $(x-a)^2 . (x-b)^4 . (x+c+d\sqrt{-1}) . (x+c-d\sqrt{-1})=0$.

Concluons de-là que toute équation qui donne des réſultats de ſignes contraires, en mettant à la place de l'inconnue des nombres réels, différents, ne tombe dans aucun des trois cas précédents.

359. CES principes poſés, qu'il s'agiſſe de réſoudre une équation quelconque. On commencera par examiner ſi cette équation ne contient pas des racines égales; ces racines, lorſqu'il y en a, ſe trouvent directement par l'article 312; & on parvient à une équation d'un degré inférieur qui ne contient plus de racines égales. On examinera encore ſi l'équation réduite n'a pas de diviſeurs commenſurables d'une dimenſion; ces diviſeurs ſe trouvent par les méthodes du Chap. XIV. Au moyen de ces recherches préliminaires, on n'aura plus à réſoudre que des équations qui contiennent des racines réelles inégales & incommenſurables, ou des racines imaginaires, ou des racines en partie réelles inégales & incommenſurables, en partie imaginaires. Je ſuppoſe donc que les équations qu'il faut ici réſoudre par approximation, ſont de cette nature.

360. CONSIDÉRONS, par exemple, l'équation $x^3 + 5x + 7 = 0$, qui n'a ni racines égales, ni diviſeurs commenſurables. Cette équation étant d'un degré impair, je ſuis aſſuré d'avance (321) qu'elle a, au moins, une racine réelle, & que par conſéquent je ne puis pas manquer d'obtenir des réſultats de ſignes

contraires, en mettant ſucceſſivement pour x des nombres différents. Je fais donc ſucceſſivement $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, &c; puis $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, &c; ce qui me donne différents réſultats pour la totalité des termes de l'équation. J'écris les ſuppoſitions & les réſultats comme on voit ici.

Suppoſitions.	*Réſultats.*	*Suppoſitions.*	*Réſultats.*
$x=0$	$+7$	$x=0$	$+7$
$x=1$	$+13$	$x=-1$	$+1$
$x=2$	$+25$	$x=-2$	-11
&c.	&c.		

Toutes les ſuppoſitions qu'on peut faire, en mettant pour x des nombres poſitifs, donnent des réſultats poſitifs. La valeur de x ne peut donc pas être compriſe parmi les nombres poſitifs; & il faut la chercher parmi les nombres négatifs. On voit par le tableau précédent, qu'elle eſt compriſe entre les deux nombres -1 & -2. Reſte à la trouver d'une maniére plus préciſe.

361. LA transformation de l'article 316 nous fournit un moyen bien ſimple de parvenir à ce but. Changeons l'équation propoſée en une autre qui ait des racines un certain nombre de fois plus grandes; par exemple, 100 fois plus grandes. Il ne faut, pour

cela, (en nommant y l'inconnue de la transformée, & mettant la proposée sous la forme $x^3+0x^2+5x+7=0$, où le second terme qui manquoit est suppléé par o), que substituer y^3 pour x^3, $100y^2\times 0$, pour $0x^2$, $10000y\times 5$ pour $5x$, 1000000×7, pour 7. Par-là, on aura la transformée $y^3+50000y+7000000=0$. Cela posé, puisque $y=100x$, & que la valeur de x est comprise entre -1 & -2, il est clair d'abord que la valeur de y sera comprise entre -100 & -200. Mais il faut resserrer cet intervalle. La supposition de $y=-100$, donne, pour la totalité des termes de la transformée, un résultat positif, & la supposition de $y=-200$, donne un résultat négatif. Faisons, en prenant la moyenne arithmétique entre -100 & -200, $y=-150$; nous aurons un résultat négatif. Ainsi la valeur de y est comprise entre -100 & -150. Faisons $y=-120$; nous aurons encore un résultat négatif. Soit $y=-110$; on trouve un résultat positif. Donc la valeur de y est comprise entre -110 & -120. Soit $y=-115$; il vient un résultat négatif. Soit $y=-112$; le résultat est encore négatif. Soit $y=-111$, le résultat est positif. Par conséquent la valeur de y est comprise entre -111 & -112. Donc, à cause de $x=\frac{y}{100}$, la valeur de x est comprise entre $-1,11$ & $-1,12$. Soit donc qu'on prenne $-1,11$, ou $-1,12$ pour x, on est sûr d'avoir x, à moins de $\frac{1}{100}$ près.

362. Si l'on prend pour x la moyenne arithmé-

tique entre $-1,11$ & $-1,12$, c'eſt-à-dire $-1,115$; & qu'on diviſe l'équation propoſée $x^3+5x+7=0$, par $x+1,115=0$, on trouvera le quotient $x^2-1,115x+6,243225$, & le reſte $0,038804125$. Donc, en négligeant ce reſte, on aura l'équation du ſecond degré, $x^2-1,115x+6,243225=0$. Cette équation a ſes deux racines imaginaires. Mais ſi elles étoient réelles, elles ſe trouveroient d'une maniére approchée, par la même méthode.

363. Nous obſerverons, au ſujet de ces ſortes d'équations, dont les coéfficients contiennent des parties décimales, qu'elles peuvent être transformées en d'autres, dont les coéfficients ne contiennent que des entiers. Car ſoit, par exemple, l'équation $x^3+5,745x^2+6,7847x+9,7428=0$. Le coéfficient du ſecond terme contenant trois figures décimales, je change l'équation en une autre dont les racines ſoient 1000 fois plus grandes. Pour cela, j'écris y^3 pour x^3, $1000y^2$ pour x^2, $1000000y$ pour x, $1000000000 \times 9,7428$ pour $9,7428$; ce qui me donne la transformée $y^3+5745y^2+6784700y+9742800000=0$, où il n'y a point de parties décimales.

Les équations dont les coéfficients contiennent des parties décimales, ſe préſentent ſouvent dans la pratique de l'Algébre. Elles peuvent réſulter d'équations qu'on a délivrées d'abord d'une racine, comme dans l'exemple de l'article précédent. On en trouve auſſi lorſque les coéfficients des termes de l'équation ſont des radicaux; par exemple, ſi on propoſoit de réſoudre l'équation $x^3+x^2\sqrt{13}+x\sqrt[3]{77}+49=0$, il faudroit ſaudroit commencer par évaluer d'une manière approchée les quantités $\sqrt{13}$, $\sqrt[3]{77}$, en y employant les parties décimales ; & par conſéquent les coéfficients de l'équation contiendroient de telles parties.

364. ON voit que par la méthode de l'article 361 on parviendra toujours à trouver, d'une manière approchée, toutes les racines réelles d'une équation quelconque. Cette méthode exige d'aſſez longs calculs, lorſqu'on veut pouſſer l'approximation un peu loin. Mais elle peut du moins ſervir à trouver très-commodément, à moins de $\frac{1}{10}$ près, la valeur de l'inconnue. Enſuite il y a d'autres méthodes pour approcher plus promptement & plus exactement de la vraie valeur qu'on cherche. Cela a beſoin d'une explication détaillée.

365. SOIT toujours notre même équation $x^3 + 5x + 7 = 0$. Je la change en une autre dont les racines ſoient 10 fois plus grandes ; la transformée eſt $y^3 + 500y + 7000 = 0$. Je détermine deux nombres qui ne diffèrent que de 1, & entre leſquels ſoit compriſe la valeur de y. Pour parvenir à les trouver facilement, & ſans faire beaucoup de tentatives inutiles, je me ſers d'abord de l'équation propoſée qui eſt plus ſimple que la transformée ; je trouve, comme dans l'article 360, que la valeur de x eſt entre -1 & -2. D'où je conclus que celle de y eſt entre -10 & -20. Reſſerrons cet intervalle. La ſuppoſition de $y = -10$ donne, pour la totalité des termes de la transformée, un réſultat poſitif ; & la ſuppoſition de

$y = -20$ donne un résultat négatif. Faisons $y = -15$; nous aurons un résultat négatif. Donc la valeur de y est entre -10 & -15. Soit $y = -12$; on aura encore un résultat négatif. Donc la valeur de y est entre -10 & -12. Soit $y = -11$; on aura un résultat positif. Donc la valeur de y est entre -11 & -12 ; & celle de x entre $-1,1$ & $-1,2$.

366. CONNOISSANT ainsi, à moins de $\frac{1}{10}$ près, la valeur de x ; la méthode suivante, due à Neuton, va nous donner, par un calcul très-expéditif, la valeur de x, d'une manière aussi approchée qu'on voudra.

Qu'on prenne $x = -1,1 + z$, z étant ce qu'il faudroit joindre à $-1,1$, pour avoir exactement x. Qu'au moyen de cette valeur, on élimine x de l'équation proposée $x^3 + 5x + 7 = 0$; on aura la transformée $z^3 - 3,3z^2 + 8,63z + 0,169 = 0$. Or, comme la quantité z est au-dessous de $\frac{1}{10}$, & que par conséquent son quarré est au-dessous de $\frac{1}{100}$, son cube au-dessous de $\frac{1}{1000}$: il est clair que les deux termes qui contiennent z^3 & z^2, sont beaucoup plus petits que les autres ; & qu'ils peuvent être négligés. Nous aurons en conséquence $8,63z + 0,169 = 0$; ce qui donne $z = -\frac{0,169}{8,63} = -\frac{169}{8630} = -0,019$, à peu près. Donc $x = -1,1 + z = -1,119$, à peu près.

367. L'APPROXIMATION peut être poussée beaucoup plus loin par divers moyens qui dépendent tous de la même méthode. D'abord nous pouvons écrire l'équation générale en z, sous cette forme $z =$

$\frac{-0{,}169}{z^2 - 3{,}3z + 8{,}63}$. Substituant dans le dénominateur, à la place de z, sa première valeur approchée $-0{,}019$, & à la place de z^2 sa valeur pareillement approchée $0{,}000361$, on aura, $z = \frac{-0{,}169}{8{,}693061} = -0{,}0194$, à peu près. Donc $x = -1{,}1194$, à peu de chose près.

368. La même équation générale en z peut être résolue, sans négliger d'autre terme que z^3. Par-là, on a l'équation du second degré, $-3{,}3z^2 + 8{,}63z + 0{,}169 = 0$, laquelle donne $z = -0{,}0195$, à peu près. Donc $x = -1{,}1195$, à peu près.

369. Enfin, de la même manière qu'on s'est servi (366) de la première valeur $-1{,}1$, approchée de x, pour trouver la seconde valeur $-1{,}119$ qui est plus exacte ; nous pouvons nous servir de celle-ci pour en trouver une troisième encore plus exacte. Supposons donc $x = -1{,}119 + u$; & mettons cette valeur dans l'équation proposée $x^3 + 5x + 7 = 0$. Et comme les termes qui contiendront u^3 & u^2 peuvent être rejettés sans scrupule, dispensons-nous d'écrire ces termes, pour nous épargner des calculs inutiles. La transformée en u sera donc simplement, $8{,}756483u + 0{,}003831842 = 0$. D'où l'on tire à peu près $u = -0{,}00044$. Donc $x = -1{,}11944$, à peu près.

Il est clair que par le moyen de cette troisième valeur approchée de x, on peut en trouver une quatrième encore plus approchée ; ainsi de suite.

370. PROPOSONS-NOUS, pour second exemple, l'équation du quatrième degré $x^4 + 4x^2 + 5x - 47 = 0$. Comme dans cette équation le dernier terme est négatif, nous sommes assurés d'avance (357) qu'elle a, au moins, deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative. Supposons successivement $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, puis $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$; nous aurons la table qu'on voit ici.

Suppositions.	*Résultats.*	*Suppositions.*	*Résultats.*
0	-47	0	-47
$+1$	-37	-1	-47
$+2$	-5	-2	-25
$+3$	$+85$	-3	$+55$

Ainsi la valeur positive de x est entre $+2$ & $+3$; & la négative est entre -2 & -3. Contentons-nous de chercher la valeur positive; la valeur négative se trouvera de la même manière.

Je transforme l'équation proposée $x^4 + 4x^2 + 5x - 47 = 0$, en une autre dont les racines soient 10 fois plus grandes; cette transformée est $y^4 + 400y^2 + 5000y - 470000 = 0$. La table précédente me fait voir qu'à cause de $y = 10x$, la valeur positive de y est comprise entre 20 & 30. Soit $y = 25$; la totalité des termes de la transformée donnera un résultat positif. Ainsi la valeur de y est comprise entre

20 & 25. Soit $y=22$; on aura encore un résultat positif. Donc la valeur de y est entre 20 & 22. Soit $y=21$; on aura encore un résultat positif. Ainsi la valeur de y est entre 20 & 21 ; & par conséquent la valeur de x est entre 2 & 2, 1. Comme je vois par les calculs qu'il m'a fallu faire pour arriver à cette conclusion, que x est plus près de 2, 1 que de 2, je suppose, pour trouver plus promptement la valeur approchée de x, $x=2,1+z$, z étant une quantité qu'on voit d'avance qui sera négative. En substituant dans l'équation proposée $x^4+4x^2+5x-47=0$, à la place de x sa valeur, & négligeant les termes qui contiendront z^4, z^3, z^2, on aura la transformée $58,844z+0,5881=0$. D'où l'on tire, à peu de chose près, $z=-0,0099$. Donc $x=2,0901$, à peu près.

Il est facile de pousser plus loin l'approximation par les moyens indiqués dans les articles 367, 368, 369.

371. QU'ON ait en général l'équation $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots\ldots=0$. Soit, à moins de $\frac{1}{10}$ près, g l'une des valeurs de x. On supposera $x=g+z$; & on aura, en rejettant les termes qui contiendroient des puissances de z, supérieures à la première, la transformée,

$$\left.\begin{array}{ll} g^n & +\; ng^{n-1} \\ +ag^{n-1} & +\; a(n-1)g^{n-2} \\ +bg^{n-2} & +\; b(n-2)g^{n-3} \\ +\&c. & +\; \&c. \end{array}\right\} z+\ldots\ldots=0.$$

D'où l'on tirera la valeur approchée de z. Soit

h cette valeur ; on ſuppoſera $x=g+h+u$, & on aura une transformée pareille à la précédente, laquelle donnera la valeur de u. Ainſi de ſuite. Par-là, on approchera continuellement & de plus en plus de la vraie valeur de x.

Les valeurs approchées de toutes les autres racines réelles & inégales, contenues dans l'équation, ſe trouveront ſucceſſivement par des procédés ſemblables.

372. LA même méthode peut ſervir à trouver à peu près les expreſſions des racines imaginaires.

En effet, ſoit l'équation $x^2+3x+7=0$, dont les racines ſont imaginaires. Je feins qu'elle provient de l'équation $(x+p+q\sqrt{-1})\times(x+p-q\sqrt{-1})=0$, ou $x^2+2px+pp+qq=0$, p & q étant des quantités réelles qu'il faut déterminer, du moins à peu près. Or, l'équation propoſée & l'équation feinte devant être identiques, on aura $2p=3$, $pp+qq=7$. Nous connoiſſons d'abord p, puiſque ſa valeur eſt $\frac{3}{2}$ ou 1, 5. Mettons, dans l'équation $pp+qq=7$, à la place de p ſa valeur ; nous aurons $qq=7-\frac{9}{4}=\frac{19}{4}$, ou bien $q^2-\frac{19}{4}=0$. Cette équation a (357) deux racines réelles, l'une poſitive, l'autre négative. Cherchons ſeulement la racine poſitive ; car le procédé eſt le même pour la racine négative. La valeur de q eſt entre 2 & 3. Je change l'équation en une autre dont les racines ſoient 10 fois plus grandes ; la transformée eſt $y^2-\frac{1900}{4}=0$; & la valeur de y eſt entre 20 & 30. Soit $y=25$; on aura un réſultat poſitif ; & par conſéquent la valeur de y eſt compriſe entre 20 & 25. Soit $y = 22$, on aura encore un résultat poſitif. Donc la valeur de y eſt entre 20 & 22. Soit $y = 21$, on aura un résultat négatif. Ainſi la valeur de y eſt entre 21 & 22. Celle de q eſt donc compriſe entre 2, 1 & 2, 2. Je fais $q = 2,1 + z$; ce qui change l'équation $q^2 - \frac{19}{4} = 0$, en $z^2 + 4,2z - 0,34 = 0$. Donc, en négligeant z^2, on aura $4,2z - 0,34 = 0$; ce qui donne, à peu près, $z = 0,0809$. Donc $q = 2,1809$, à peu près. On pouſſera plus loin, ſi l'on veut, l'approximation. L'équation propoſée $x^2 + 3x + 7 = 0$, peut donc être regardée comme ayant ſenſiblement les deux racines, $x = -1,5 + 2,1809\sqrt{-1}$, $x = -1,5 - 2,1809\sqrt{-1}$.

On procédera ſemblablement dans les cas plus compoſés. Quel que ſoit le degré d'une équation qui contient des racines imaginaires, ces racines vont toujours deux à deux, & peuvent être regardées comme produites par des équations du ſecond degré. Elles ſont donc toujours réductibles à la forme qu'on a attribuée aux racines de l'équation précédente. Ainſi, en feignant qu'une équation dont les racines ſont imaginaires, eſt le produit de pluſieurs paires de racines imaginaires, ſemblables à celles de l'exemple précédent, & comparant terme à terme l'équation propoſée avec l'équation feinte, on aura pluſieurs équations qui ſerviront à éliminer tous les coéfficients inconnus des racines feintes, à l'exception d'un ſeul qui ſe trouvera dans une équation finale, laquelle aura au moins une racine réelle. On prendra cette racine pour la valeur du coéfficient dont on vient de parler; ensuite, en remontant aux autres équations des coéfficients, on parviendra à les déterminer tous. Il est clair que leurs valeurs seront des quantités réelles, & que les racines de l'équation ne sont imaginaires que parce que les coéfficients des équations feintes sont multipliés, en partie, par $\sqrt{-1}$.

CHAPITRE XIX.

Résolution approchée des équations littérales : divers usages des suites directes & inverses.

373. TOUT ce que nous avons dit dans le Chapitre précédent ne regarde que les équations numériques. Comme on a quelquefois besoin d'avoir, sous une forme générale, les racines d'une équation littérale, voyons la manière d'approcher de ces racines, lorsqu'on ne peut pas les trouver exactement.

374. D'ABORD, si on a une équation littérale, telle que $x^4 + 5a^2x^2 + 7a^3x + 11a^4 = 0$, qui est homogène, & qui ne contient que l'inconnue x & la lettre a : on supposera $a = 1$, & par-là on aura l'équation numérique $x^4 + 5x^2 + 7x + 11 = 0$. Ayant trouvé les racines de cette équation, on les multipliera par a,

& on aura celles de la proposée. On opérera de même pour toutes les équations littérales de pareille espéce.

On doit observer que si une équation où il ne paroît que deux lettres n'étoit pas homogène, elle seroit censée contenir trois lettres, parce que les termes où les dimensions sont les moindres doivent être censés multipliés par une lettre que l'on a regardée comme l'unité, & qui est sous-entendue.

375. SOIT l'équation homogène & à trois lettres,

$$x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0.$$

Les deux quantités a & b doivent être regardées comme inégales; car si on avoit $a = b$, l'une ou l'autre de ces lettres pourroit être chassée de l'équation, qui ne contiendroit plus alors que deux lettres.

Supposons d'abord $a > b$. Si la quantité b étoit infiniment petite, ou zero, tous les termes de l'équation, qui contiennent b, s'évanouiroient par rapport aux autres, & on auroit $x^3 + a^2x - 2a^3 = 0$. Or, dans ces sortes d'équations qui ne contiennent que deux lettres, on peut toujours trouver, par les moyens que nous avons donnés, la valeur exacte ou approchée de x, & on fera, en général, de cette valeur l'usage que nous allons expliquer pour le présent exemple. L'équation $x^3 + a^2x - 2a^3 = 0$, est divisible par $x - a = 0$; ce qui donne $x = a$. Cette valeur seroit vraie en rigueur si l'équation $x^3 + a^2x - 2a^3 = 0$, étoit vraie en rigueur; mais cette équation n'est qu'approchée, parce que b n'est pas zero, mais seulement une quantité fort petite. Une seconde opération va nous donner une valeur plus approchée de x.

Soit $x = a + y$, y étant une quantité fort petite qu'il faut ajouter à a, pour avoir la valeur exacte de x. Si au moyen de cette valeur de x, nous éliminons x de l'équation proposée $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$; nous aurons, toutes réductions faites, la transformée,

$$y^3 + 3ay^2 + \left.\begin{matrix} 4a^2 \\ +ab \end{matrix}\right\} y + \left.\begin{matrix} a^2b \\ -b^3 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Or, puisque y & b sont des quantités fort petites par raport à a, nous pouvons négliger tous les termes qui contiennent y^3, y^2, b^3, & le produit by. Ainsi nous aurons l'équation approchée, $4a^2y + a^2b = 0$, laquelle donne $y = -\frac{b}{4}$; donc $x = a - \frac{b}{4}$, seconde valeur approchée de x. Soit rigoureusement $y = -\frac{b}{4} + z$, z étant une quantité fort petite par rapport à $\frac{b}{4}$; l'équation en y se changera en celle-ci,

$$z^3 \left.\begin{array}{l} -\frac{3b}{4} \\ +3a \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} +\frac{3b^2}{16} \\ -\frac{ab}{2} \\ +4a^2 \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{l} -\frac{65b^3}{64} \\ -\frac{ab^2}{16} \end{array}\right\} = 0.$$

Et comme z est fort petite par rapport à b, & que b est fort petite par rapport à a, nous pouvons négliger tous les termes qui contiennent z^3, z^2 b^2z; ce qui nous donnera d'abord $-\frac{abz}{2} + 4a^2z -$

$\frac{65b^3}{64} - \frac{ab^2}{16} = 0$. Dans cette équation, le premier terme eſt fort petit, par rapport au ſecond; & le troiſième eſt fort petit, par rapport au quatrième. Nous pouvons donc prendre ſimplement, pour déterminer z, $4a^2z - \frac{ab^2}{16} = 0$; ce qui donne $z = \frac{b^2}{64a}$. Donc $x = a + y = a - \frac{b}{4} + z = a - \frac{b}{4} + \frac{b^2}{64a}$, troiſième valeur approchée de x. En continuant à opérer toujours de même, on trouvera que la valeur de x eſt exprimée par la ſuite infinie,

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{b^2}{64a} + \frac{131b^3}{512a^2} + \frac{509b^4}{16384a^3} - \&c.$$

Cette ſuite eſt convergente, parce qu'on a ſuppoſé $a > b$; & elle convergera d'autant plus rapidement, que a ſera plus grand par rapport à b.

Suppoſons, en ſecond lieu, $b > a$. L'équation propoſée $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$, deviendra (en négligeant tous les termes où a ſe trouve), $x^3 - b^3 = 0$; d'où l'on tire $x = b$, première valeur approchée de x. Soit $x = b + t$, t étant une quantité fort petite par rapport à b, & qu'il faut ajouter à b, pour avoir la valeur exacte de x; l'équation propoſée ſe changera en celle-ci,

$$t^3 + 3bt^2 + \left.\begin{matrix} 3b^2 \\ +a^2 \\ +ab \end{matrix}\right\} t \left.\begin{matrix} +a^2b \\ +ab^2 \\ -2a^3 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Donc, en négligeant les termes qui contiennent t^3, t^2, a^2t, at, a^2, a^3, on aura $3b^2t+ab^2=0$, ou bien $t=-\frac{a}{3}$. Donc $x=b-\frac{a}{3}$, ſeconde valeur approchée de x.

Soit $t=-\frac{a}{3}+u$; l'équation en t deviendra,

$$u^3 \left.\begin{matrix}+3b\\-a\end{matrix}\right\} u^2 \left.\begin{matrix}-ab\\+\frac{4a^2}{3}\\+3b^2\end{matrix}\right\} u \left.\begin{matrix}-\frac{64}{27}a^3\\+a^2b\end{matrix}\right\}=0.$$

Donc, en négligeant d'abord les termes qui contiennent u^3 & u^2, on aura $-abu+\frac{4a^2u}{3}+3b^2u-\frac{64a^3}{27}+a^2b=0$. Dans cette équation, les deux premiers termes ſont très-petits par rapport au troiſième, & le quatrième eſt très-petit par rapport au cinquième. Donc, pour déterminer u, nous pouvons nous contenter de ſuppoſer $3b^2u+a^2b=0$; ce qui donne $u=-\frac{a^2}{3b}$. Donc, $t=-\frac{a}{3}+u=-\frac{a}{3}-\frac{a^2}{3b}$, à peu près. Ainſi, à cauſe de $x=b+t$, on aura $b-\frac{a}{3}-\frac{a^2}{3b}$, pour troiſième valeur approchée de x. En continuant à opérer toujours de même, on trouvera que la valeur de x eſt exprimée par la ſuite infinie,

$$x=b-\frac{a}{3}-\frac{a^2}{3b}+\frac{a^3}{81b^2}-\&c,$$

laquelle eſt convergente.

376. LES deux suites précédentes peuvent être calculées d'une manière un peu plus abrégée. Pour cela, on observera que le premier terme de la première est a, & que les autres contiennent b, b^2, b^3, &c, quantités qui vont toujours en diminuant, parce que b peut être regardée comme une fraction par rapport à a, & que les puissances entières & positives d'une fraction, vont toujours en diminuant à mesure que l'exposant augmente. Semblablement, le premier terme de la seconde suite est b, & les autres contiennent a, a^2, a^3, &c, quantités qui vont en diminuant, parce qu'ici on suppose $b > a$.

377. CELA posé, je feins qu'on ait, pour la première suite,

$$x = A + Bb + Cb^2 + Db^3 + \&c,$$

A, B, C, D, &c, étant des coéfficients inconnus, & qu'il s'agit de déterminer. Au moyen de cette valeur de x, l'équation proposée $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$, donne, en ordonnant le second membre par rapport à b,

$$\begin{array}{rl}
x^3 = & +A^3 + 3A^2B.b + 3AB^2.b^2 + B^3.b^3 + \&c. \\
& \qquad\qquad\qquad + 3A^2C.b^2 + 3A^2D.b^3 + \&c. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 6ABC.b^3 + \&c. \\
+a^2x = & +a^2A + a^2B.b + a^2C.b^2 + a^2D.b^3 + \&c. \\
+abx = & \qquad\quad + aA.b + aB.b^2 + aC.b^3 + \&c. \\
-2a^3 = & -2a^3 \\
-b^3 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 1b^3.
\end{array}$$

Et comme on a $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$, il s'enſuit que la ſomme de toutes les ſuites qui compoſent le ſecond membre de l'expreſſion précédente, doit auſſi être égale à zero. Or, cela demande que chaque terme particulier de cette ſomme devienne zero. Car, puiſqu'en ſuppoſant b infiniment petite, un terme, pris à volonté, eſt infiniment petit par rapport à ceux qui le précédent, & infiniment grand par rapport à ceux qui le ſuivent : aucun terme ne peut être détruit ni par ceux qui le précédent, ni par ceux qui le ſuivent ; & par conſéquent la totalité des termes ne feroit pas zero, ſi chacun d'eux en particulier n'étoit pas zero. On aura donc, pour déterminer A, B, C, D, &c, les équations particulières,

$$A^3 + a^2A - 2a^3 = 0,$$
$$(3A^2.B + a^2B + aA)b = 0,$$
$$(3AB^2 + 3A^2C + a^2C + aB)b^2 = 0,$$
$$(B^3 + 3A^2.D + 6ABC + a^2D + aC - 1)b^3 = 0,$$
&c.

La première donne $A = a$; la ſeconde donne (en diviſant tout par b, & mettant pour A ſa valeur), $3a^2B + a^2B + a^2 = 0$, & par conſéquent $B = -\frac{1}{4}$. La troiſième donne (en chaſſant b^2, A, B), $\frac{3}{16}a + 4a^2C - \frac{a}{4} = 0$, & par conſéquent $C = \frac{1}{64a}$. La quatrième donne ſemblablement $D = \frac{131}{512a^2}$, &c. Subſtituons ces valeurs de A, B, C, D, &c, dans la ſuite feinte ; & nous aurons

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{b^2}{64a} + \frac{131\,b^3}{512\,a^2} - \&c,$$

qui est la première suite cherchée.

De même, pour la seconde, je feins qu'on ait

$$x = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \&c.$$

Et par conséquent, en ordonnant le second membre par rapport à a,

$$\begin{array}{llllll}
x^3 = & +A^3 & +3A^2B.a & +3AB^2.a^2 & +B^3\,.\,a^3 & +\&c. \\
 & & & +3A^2C.a^2 & +3A^2D.a^3 & +\&c. \\
 & & & & +6ABC.a^3 & +\&c. \\
+a^2x = & & & +Aa^2 & +B.a^3 & +\&c. \\
+abx = & & +Aba & +Bba^2 & +C.ba^3 & +\&c. \\
-2a^3 = & & & & -2.a^3 & \\
-b^3 = & -b^3. & & & &
\end{array}$$

Donc, à cause de $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$, le second membre de l'expression précédente sera aussi zero. De plus, chacun des termes en particulier de cette expression sera zero. Ainsi on aura les équations,

$$A^3 - b^3 = 0,$$
$$(3A^2B + Ab)a = 0,$$
$$(3AB^2 + 3A^2C + A + Bb)a^2 = 0,$$
$$(B^3 + 3A^2D + 6ABC + B + Cb - 2)a^3 = 0,$$
&c.

lesquelles donnent $A = b$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{1}{3b}$, $D = \frac{1}{81b^2}$, &c. Donc, en mettant pour

A, *B*, *C*, *D*, &c, leurs valeurs, la ſuite feinte deviendra,

$$x = b - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{3b} + \frac{a^3}{81b^2} - \&c,$$

comme ci-deſſus.

378. Les équations qui contiennent plus de trois lettres, peuvent ſe traiter, à peu près, de la même maniere. Toute la difficulté qu'on éprouve à former les ſuites qui doivent exprimer les valeurs de l'inconnue, conſiſte à choiſir, parmi les termes de l'équation, ceux qui ſont plus grands que les autres, & qui déterminent en conſéquence la loi ſuivant laquelle la ſérie doit deſcendre. Neuton a donné, pour cela, une régle fort commode, qu'on appelle ordinairement *le parallélogramme de Neuton*. Elle eſt expliquée de la maniere la plus claire & la plus détaillée dans un excellent Ouvrage de M. Cramer, qui a pour titre: *Introduction à l'Analyſe des lignes courbes Algébriques*, *Gen.* 1750. Nos Lecteurs pourront y étudier plus à fond cette théorie, lorſqu'ils auront acquis les autres connoiſſances néceſſaires pour entendre la Géométrie des Courbes.

379. La méthode des *coëfficients indéterminés*, que nous avons employée dans l'article 377, ſert en une infinité d'occaſions, à transformer des quantités en ſéries. C'eſt ce qu'il eſt à propos d'expliquer par quelques exemples.

Soit la quantité $\frac{1}{a+x}$ à transformer en une ſérie,

rie qui marche suivant les puissances de x qu'on suppose moindre que a. Je feins qu'on ait,

$$\frac{1}{a+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$$

Donc, en multipliant tout par $a+x$, ordonnant par rapport à x, & mettant tous les termes dans le second membre, on aura,

$$o=\left\{\begin{matrix}+aA+aB\\ \quad\ +A\\ -1\end{matrix}\right.\!\!\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}aC\\ +B\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}aD\\ +C\end{matrix}\right\}x^3+\&c.$$

Egalons à zero chacune des parties du second membre; nous aurons $aA-1=0$, $(aB+A)x=0$, $(aC+B)x^2=0$, $(aD+C)x^3=0$, &c : équations qui donnent $A=\frac{1}{a}$, $B=-\frac{A}{a}=-\frac{1}{a^2}$, $C=-\frac{B}{a}=+\frac{1}{a^3}$, $D=-\frac{C}{a}=-\frac{1}{a^4}$, &c. Ainsi on aura,

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\&c,$$

comme on le trouve par la division (68).

380. SOIT la quantité $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ à développer en série; x étant $<a$. Cette opération peut se faire par la méthode de l'article 122, ou par la formule du binome (290); mais on peut parvenir au même but au moyen des coéfficients indéterminés. Je feins, pour cela, qu'on ait,

$$(a+x)^{\frac{1}{2}}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$$

Donc, en quarrant chaque membre, ordonnant par rappórt à x, & mettant tout dans lè ſecond membre, on aura

$$0=\left\{\begin{matrix}+A^2+2AB\\-a\end{matrix}\right.\left.\begin{matrix}\\-1\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}2AC\\+B^2\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}2AD\\+2BC\end{matrix}\right\}x^3+\&c.$$

D'où l'on tire $A^2-a=0$, $(2AB-1)x=0$, $(2AC+B^2)x^2=0$, $(2AD+2BC)x^3=0$, &c; équations qui donnent $A=\sqrt{a}$, $B=\frac{1}{2\sqrt{a}}$, $C=-\frac{1}{8a\sqrt{a}}$, $D=-\frac{1}{16a^2\sqrt{a}}$, &c. Donc,

$$(a+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\frac{x}{2\sqrt{a}}-\frac{x^2}{8a\sqrt{a}}+\frac{x^3}{16a^2\sqrt{a}}-\&c.$$

381. Qu'on ait la quantité $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ à transformer en ſérie, x étant plus petite que chacune des autres quantités a, b, c, d. Cette opération pourroit ſe faire en développant ſucceſſivement le numérateur & le dénominateur en ſéries, & diviſant enſuite la premiere ſérie par la ſeconde. Mais on parviendra beaucoup plus facilement & plus promptement au même but, par la méthode des coéfficients indéterminés. Je feins donc qu'on ait,

$$\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\&c.$$

Quarrant chaque membre, puis multipliant tout par le dénominateur résultant $b+cx+dx^2$, mettant tout dans le second membre ordonné par rapport à x, on trouvera,

$$0=\left\{\begin{matrix} A^2b+2ABb \\ +A^2c \\ \\ \\ -a \quad -1 \end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix} 2ACb \\ +B^2b \\ +2ABc \\ +A^2d \\ \end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix} 2BCb \\ +2ADb \\ +B^2c \\ +2ACc \\ +2ABd \end{matrix}\right\}x^3+\&c$$

D'où l'on tire $A^2b-a=0$, $(2ABb+A^2c-1)x=0$, $(2ACb+B^2b+2ABc+A^2d)x^2=0$, $(2BCb+2ADb+B^2c+2ACc+2ABd)x^3=0$, &c ; équations qui donnent $A=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $B=\frac{b-ac}{2b\sqrt{ab}}$, $C=-\frac{(b-ac)^2}{8ab^2\sqrt{ab}}-\frac{c(b-ac)}{2b^2\sqrt{ab}}-\frac{ad}{2b\sqrt{ab}}$, $D=\frac{(b-ac)}{4ab^2}\times\left(\frac{(b-ac)^2}{4ab\sqrt{ab}}+\frac{c(b-ac)}{2b\sqrt{ab}}-\frac{ad}{\sqrt{ab}}\right)+\left(\frac{b-ac}{4b^2a}\right)\times\left(\frac{bc+3ac^2}{2b\sqrt{ab}}\right)+\frac{acd}{2b^2\sqrt{ab}}$, &c. Substituant ces valeurs de A, B, C, D, &c, dans la série feinte, on aura l'expression de $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ en grandeurs toutes données.

On imitera les mêmes procédés dans les autres cas.

382. CETTE même méthode est très-commode pour résoudre les problêmes qui dépendent du *retour*

des ſuites. Voici, dans un exemple, ce qu'on entend par cette expreſſion. Suppoſons que la valeur de x ſoit donnée par la ſuite $x = a + by + cy^2 + dy^3 +$ &c; l'opération par laquelle on forme une ſuite inverſe, qui donne la valeur de y en x, eſt ce qu'on appelle un *retour de ſuite.* Le calcul s'exécute ainſi.

383. La ſuite propoſée $x = a + by + cy^2 + dy^3 +$ &c, étant ſuppoſée convergente, il eſt clair que la quantité y doit être fort petite. Donc, ſi l'on ſuppoſe $x - a = z$, & par conſéquent $z = by + cy^2 + dy^3 +$ &c, la quantité z ſera auſſi très-petite. La première valeur approchée de z eſt donnée par l'équation $z = by$; d'où l'on tire $y = \frac{z}{b}$. Ainſi le premier terme de la ſérie, qui doit donner y en z, eſt $\frac{z}{b}$, & les autres termes contiendront z^2, z^3, z^4, &c; ce qui produira une ſérie convergente. Je feins qu'on ait,

$$y = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{\&c.}$$

Et par conſéquent, en ordonnant par rapport à z,

$$\begin{array}{rl}
by = & + bAz + bBz^2 + bCz^3 + \text{\&c},\\
+ cy^2 = & + cA^2z^2 + 2cABz^3 + \text{\&c},\\
+ dy^3 = & + dA^3z^3 + \text{\&c},\\
\text{\&c} = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{\&c},\\
- z = & - z.
\end{array}$$

Or on a $by + cy^2 + dy^3 +$ &c $- z = 0$. Donc le ſecond membre de l'expreſſion précédente ſera auſſi

$=0$. Donc, en égalant ſéparément à zero, chaque terme de ce membre, on aura $(bA-1)z=0$, ou $A=\frac{1}{b}$; $(bB+cA^2)z^2=0$, ou $B=-\frac{c}{b^3}$; $(bC+2cAB+dA^3)z^3=0$, ou $C=\frac{2c^2-bd}{b^5}$; &c. Ainſi la ſérie feinte devient,

$$y=\frac{z}{b}-\frac{cz^2}{b^3}+\frac{(2c^2-bd)z^3}{b^5}-\&c.$$

ou bien, en chaſſant z,

$$y=\frac{x-a}{b}-\frac{c(x-a)^2}{b^3}+\frac{(2c^2-bd)(x-a)^3}{b^5}$$
$-\&c$,

ſérie convergente.

384. QU'ON ait en général $x+ax^2+bx^3+dx^4+\&c=gy+hy^2+iy^3+ky^4+\&c$, équation dont les deux membre ſont ſuppoſés des ſéries convergentes ; & qu'il s'agiſſe, par exemple, de trouver la valeur de y en x. Les deux ſéries étant ſuppoſées convergentes, il eſt clair que x & y doivent être des quantités fort petites. Donc pour former le premier terme de la ſérie cherchée, on aura l'équation $x=gy$, & par conſéquent $y=\frac{x}{g}$. Cela poſé, je feins qu'on ait,

$$y=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\&c.$$

Et par conſéquent, en ſubſtituant pour y, y^2, y^3, &c, leurs valeurs, mettant toute l'équation $x+$

$ax^2 + bx^3 + dx^4 + \&c = gy + hy^2 + iy^3 + \&c$ dans le second membre, & ordonnant, par rapport à x, on aura,

$$\begin{array}{llllll}
gy & = gAx & + gBx^2 & + gCx^3 & + \&c, \\
+ hy^2 & = & + hA^2x^2 & + 2hABx^3 & + \&c, \\
+ iy^3 & = & & + iA^3x^3 & + \&c, \\
+ \&c & = & \&c & & \\
- x & = - x & & & \\
- ax^2 & = \ldots\ldots & - ax^2 & & \\
- bx^3 & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & - bx^3 & \\
- \&c & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & - \&c.
\end{array}$$

Or, dans cette expression, la somme de toutes les parties de la gauche est égale à zero; & par conséquent la somme de toutes les parties de la droite, doit aussi être égale à zero. Donc, en égalant séparément à zero, les facteurs de x, de x^2, de x^3, &c, on aura $gA - 1 = 0$, ou $A = \frac{1}{g}$; $gB + hA^2 - a = 0$, ou $B = \frac{a - hA^2}{g} = \frac{ag^2 - h}{g^3}$; $gC + 2hAB + iA^3 - b = 0$, ou $C = \frac{b - iA^3 - 2hAB}{g} = \frac{bg^4 - ig - 2h(ag^2 - h)}{g^5}$; &c. Ainsi on aura

$$y = \frac{x}{g} + \frac{(ag^2 - h)x^2}{g^3} + \frac{(bg^4 - ig - 2h(ag^2 - h))x^3}{g^5} + \&c,$$

série convergente.

385. TOUTES les féries que nous avons confidérées dans les articles précédents, ont été regardées comme convergentes, parce que l'objet qu'on a dû fe propofer, en les formant, ayant été de faire trouver par approximation une quantité qu'on ne peut avoir exactement, ou d'une manière commode, fous fa forme naturelle; il faut, pour cela, que les termes de la férie aillent en décroiffant, afin qu'il fuffife d'en prendre un certain nombre du commencement, pour avoir, à peu de chofe près, la quantité qu'on cherche.

CHAPITRE XX.

De l'Elimination dans les Equations de tous les degrés; De l'évanouiffement des Radicaux.

386. LORSQU'UN problême a plufieurs conditions, & que ces conditions font exprimées par autant d'équations particulières, les inconnues peuvent être éliminées fucceffivement, & on parvient à une équation où il n'y a plus qu'une feule inconnue. Nous en avons vu plufieurs exemples. Mais comme ces exemples ne regardoient que les premiers degrés, & que les équations où les inconnues fe trouvent, font

quelquefois fort élevées, je crois devoir expliquer ici briévement la manière de faire l'élimination pour toutes ſortes d'équations. J'ai remis à traiter cette théorie à part, pour ne pas interrompre d'autres recherches par des calculs généraux qui n'y auroient pas eu un rapport immédiat. Les mêmes principes nous ſerviront à faire diſparoître les radicaux. Allons par ordre, en commençant par les cas les plus ſimples.

387. Si on a pluſieurs équations, & autant d'inconnues qui n'y montent qu'au premier degré : l'équation finale, c'eſt-à-dire, l'équation où il n'y aura plus qu'une ſeule inconnue mêlée avec des quantités données, ſera toujours du premier degré. Cette équation peut ſe trouver, en tirant des équations propoſées, différentes valeurs d'une même inconnue, & comparant ſucceſſivement ces valeurs, comme nous l'avons pratiqué dans l'article 169 & ailleurs. Mais on parviendra beaucoup plus promptement au même but, ſi l'on employe la méthode indiquée (168). Voici le procédé du calcul.

388. Soient, premièrement, entre les deux inconnues x & y, & les données a, b, c, &c, les deux équations générales du premier degré,

$$ax + by + c = 0,$$
$$dx + ey + f = 0.$$

Pour éliminer l'une des deux inconnues, par exemple y, je multiplie tous les termes de la première équation par e, coéfficient de y dans la seconde, & tous les termes de la seconde par b, coéfficient de y dans la première, ce qui me donne,

$$eax + eby + ec = 0,$$
$$bdx + bey + bf = 0.$$

Retranchant la seconde de ces équations, de la première, on aura $eax - bdx + ec - bf = 0$, équation où il n'y a plus que x d'inconnue & d'où l'on tire, $x = \frac{bf - ce}{ae - bd}$.

La valeur de y se trouve, ou en substituant cette valeur de x dans l'une des deux équations primitives, ou en multipliant la première de ces équations par d, la seconde par a, & retranchant l'une des équations résultantes, de l'autre. On a de l'une ou de l'autre manière, $y = \frac{cd - af}{ae - bd}$.

Ces formules donneront la solution de tous les problêmes du premier degré, qui contiennent deux inconnues, en mettant pour a, b, c, &c, les valeurs individuelles qui résultent des conditions de chaque problême particulier.

389. En second lieu, soient entre les trois inconnues x, y, z, & les quantités données a, b, c, &c, les trois équations générales,

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$ex + fy + gz + h = 0,$$
$$ix + ky + lz + m = 0.$$

Pour éliminer d'abord z, je multiplie successivement la première par g, la seconde par c; puis la première par l, & la troisième par c; ce qui produit les quatre équations,

$$gax + gby + gcz + gd = 0,$$
$$cex + cfy + cgz + ch = 0;$$
$$lax + lby + lcz + ld = 0,$$
$$cix + cky + clz + cm = 0.$$

Retranchant la seconde de ces équations, de la première; & la quatrième, de la troisième, on aura les deux équations,

$$(ga - ce)x + (gb - cf)y + gd - ch = 0,$$
$$(la - ci)x + (lb - ck)y + ld - cm = 0,$$

qui ne contiennent que les deux inconnues x & y, & qui se rapportent par conséquent à l'article précédent. On aura donc ici les valeurs de x & y, en mettant dans celles de l'article précédent, $ga - ce$ pour a, $gb - cf$ pour b, $la - ci$ pour d, $lb - ck$ pour e, $gd - ch$ pour c, $ld - cm$ pour f. Ainsi,

$$x = \frac{(ch - gd)(lb - ck) - (gb - cf)(cm - ld)}{(ga - ce)(lb - ck) - (gb - cf)(la - ci)},$$
$$y = \frac{(ga - ce)(cm - ld) - (ch - gd)(la - ci)}{(ga - ce)(lb - ck) - (gb - cf)(la - ci)}.$$

Ces expressions deviennent, en effectuant les multiplications indiquées, & réduisant,

$$x = \frac{bhl - chk + dgk - gbm + cfm - dfl}{cek - gak + afl - bel + big - cfi},$$

$$y = \frac{gam - cem + chi - ahl + del - gid}{cek - gak + afl - bel + bgi - cfi}.$$

Subſtituant ces valeurs de x & de y dans l'une des trois équations primitives, on aura une équation où il n'y aura plus que z d'inconnue, & d'où l'on tirera,

$$z = \frac{ahk - dek + dfi - afm + bem - bih}{cek - agk + afl - bel + big - cfi}.$$

A l'aide de ces formules générales, on aura, par de ſimples ſubſtitutions, la ſolution de tous les problêmes du premier degré, qui contiennent trois inconnues.

390. Il eſt clair qu'en opérant toujours de la même manière, on parviendra à déterminer toutes les inconnues, quel que ſoit leur nombre & celui des équations, toujours du premier degré, qui les contiennent. Si l'on a quatre inconnues & quatre équations, on commencera par éliminer l'une des inconnues ; ce qui réduira ce cas au précédent.

Si l'on a cinq inconnues & cinq équations, on éliminera l'une des inconnues, & on réduira le problême au cas précédent. Ainſi de ſuite. Ces formules dérivent les unes des autres ſuivant une loi facile à reconnoître.

391. Soient maintenant entre les deux inconnues x & y, & les données a, b, c, &c, les deux équations ſuivantes, dont l'une eſt la plus générale du premier degré, l'autre la plus générale du ſecond,

$$ax + by + c = 0,$$
$$dx^2 + ex + fy^2 + gy + hxy + i = 0.$$

On parviendra tout d'un coup à une équation où il n'y aura que x d'inconnue, en tirant de la première la valeur de y, & la ſubſtituant dans la ſeconde. Ce calcul donne,

$$dx^2 + ex + f\left(\frac{-c-ax}{b}\right)^2 + (g+hx)\left(\frac{-c-ax}{b}\right) + i = 0,$$

équation déterminée du ſecond degré, d'où l'on tirera la valeur de x. Subſtituant enſuite cette valeur dans la première équation primitive, on aura auſſi la valeur de y.

392. L'ÉQUATION finale, ſoit en x, ſoit en y, peut être trouvée par une autre méthode qui nous ſervira dans les cas ſuivants. Je ſuppoſe, pour abréger le calcul, $ax + c = A$, $g + hx = B$, $dx^2 + ex + i = C$: nos deux équations primitives deviennent donc,

$$by + A = 0,$$
$$fy^2 + By + C = 0.$$

Je multiplie la première par C, la ſeconde par A; je retranche le premier produit du ſecond, & je trouve, en diviſant le reſte par y à cauſe de l'égalité à zero,

$$Afy + AB - Cb = 0.$$

Je multiplie cette équation par b; & je multiplie l'équation $by + A = 0$, par Af; je retranche les deux équations résultantes l'une de l'autre ; ce qui produit l'équation,

$$A^2 f - b(AB - Cb) = 0,$$

dans laquelle il n'y a point de y. Mettant pour A, B, C, leurs valeurs, on aura,

$$f(ax+c)^2 - b(ax+c)(g+hx) + b^2(dx^2+ex+i) = 0.$$

On trouveroit de même l'équation finale en y.

393. QU'ON ait les deux équations générales du second degré,

$$ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy + f = 0,$$
$$gx^2 + hx + iy^2 + ky + lxy + m = 0.$$

Pour éliminer y, je suppose $d + ex = A$, $ax^2 + bx + f = B$, $k + lx = D$, $gx^2 + hx + m = E$; & j'ai les deux équations,

$$cy^2 + Ay + B = 0,$$
$$iy^2 + Dy + E = 0.$$

Cela posé, 1°. je multiplie la première par i, la seconde par c, & je retranche le second produit du premier, ce qui me donne,

$$(Ai - Dc)\,y + Bi - Ec = 0,$$

première équation où y n'est plus qu'au premier degré.

2°. Je multiplie la première des deux mêmes équations par E, la seconde par B ; je retranche le second produit du premier ; ce qui me donne, en divisant tout par y,

$$(Ec - Bi)\,y + AE - BD = 0,$$

seconde équation où y n'est qu'au premier degré. Nous avons donc deux équations où y n'est qu'au premier degré. Ainsi, éliminant cette inconnue, par leur moyen, on aura,

$$(Bi - Ec)^2 + (Ai - Dc)(AE - BD) = 0.$$

Mettant pour A, B, D, E, leurs valeurs, on aura,

$$(iax^2 + xbi + if - cgx^2 - chx - cm)^2 + \big(id + iex - ck - clx\big)\big((d + ex)(gx^2 + hx + m) - (ax^2 + bx + f)(k + lx)\big) = 0,$$

équation déterminée du quatrième degré.

On trouveroit de même l'équation finale en y.

394. SUPPOSONS qu'on ait les deux équations,

$$my^3 + ny^2 + py + q = 0,$$
$$My^3 + Ny^2 + Py + Q = 0,$$

dans lesquelles m, n, p, q, M, N, P, Q sont des quantités composées, comme on voudra, de l'inconnue x & de données, ou, pour nous exprimer suivant l'usage, des *fonctions* quelconques de x. Il s'agit d'éliminer y. Pour cela, je traite y^3, comme une inconnue d'une seule dimension. Ainsi je multiplie la première équation par M, la seconde par m; & je retranche le second produit du premier; ce qui me donne,

$$(Mn - mN)y^2 + (Mp - mP)y + Mq - mQ = 0,$$

première équation où la plus haute puissance de y ne monte qu'au second degré.

Je multiplie encore la première des deux équations proposées par Q, la seconde par q ; je retranche le second produit du premier ; ce qui me donne, en divisant le reste par y,

$$(Qm - qM)y^2 + (Qn - qN)y + Qp - qP = 0,$$

seconde équation où la plus haute puissance de y ne monte qu'au second degré.

Au moyen des deux dernières équations, on parviendra, comme dans l'article précédent, à faire disparoître entiérement y. Soient, pour abréger le calcul, $Mn - mN = \alpha$, $Mp - mP = \beta$, $Mq - mQ = \gamma$, $Qn - qN = \delta$, $Qp - qP = \lambda$. On trouvera,

$$(-\beta\lambda + \gamma\delta)(\gamma\beta + \alpha\delta) + (\gamma^2 + \alpha\lambda)^2 = 0,$$

équation où il n'y a point de y. Cette équation est la même chose que

$$\gamma^4 + 2\gamma^2\alpha\lambda + \alpha\lambda(\alpha\lambda - \beta\delta) - \beta^2\gamma\lambda + \beta\delta\gamma^2 + \alpha\delta^2\gamma = 0;$$

Et comme $\alpha\lambda - \beta\delta = (Mn - mN).(Qp - qP) - (Mp - mP).(Qn - qN) = (mQ - Mq).(Pn - pN) = -\gamma(Pn - pN)$, elle deviendra encore,

$$\gamma^4 + 2\gamma^2\alpha\lambda - \alpha\lambda\gamma(Pn - pN) - \beta^2\gamma\lambda + \beta\delta\gamma^2 + \alpha\delta^2\gamma = 0.$$

Alors elle est divisible par γ qui affecte tous ses termes ; & ce facteur lui est inutile, c'est-à-dire qu'on ne peut pas supposer pour équation finale $\gamma = 0$; car cela donneroit $Mq = mQ$, supposition particulière qui altéreroit la généralité des deux équations primitives.

La vraie équation résultante de l'élimination de y est donc,

$$\gamma^3 + 2\gamma\alpha\lambda - \alpha\lambda(Pn - pN) - 6^2\lambda + 6\delta\gamma + \alpha\delta^2 = 0.$$

Pour faire une application de ces formules, soient les deux équations,

$$xy^3 + by + x^3 + a = 0,$$
$$y^3 + cy + bx^2 + h = 0.$$

Nous avons, dans ce cas, $m = x$, $n = 0$, $p = b$, $q = x^3 + a$, $M = 1$, $N = 0$, $P = c$, $Q = bx^2 + h$, $\alpha = 0$, $6 = b - cx$, $\gamma = x^3 + a - x(bx^2 + h)$, $\delta = 0$, $\lambda = b(bx^2 + h) - c(x^3 + a)$. Donc l'équation finale est $\gamma^3 - 6^2\lambda = 0$, c'est-à-dire,

$$\left(x^3 + a - x(bx^2 + h)\right)^3 - (b - cx)^2 . \left(b(bx^2 + h) - c(x^3 + a)\right) = 0,$$

où il n'y a point de y.

395. SOIENT les deux équations générales,

$$my^4 + ny^3 + py^2 + qy + r = 0,$$
$$My^4 + Ny^3 + Py^2 + Qy + R = 0,$$

dans lesquelles la plus haute puissance de y est de quatre dimensions. On commencera par éliminer y^4 en multipliant la première par M, la seconde par m, & retranchant le second produit du premier ; ce qui donne,

$$(Mn - mN)y^3 + (Mp - mP)y^2 + (Mq - mQ)y + Mr - mR = 0,$$

première équation où la plus haute puissance de y n'est que de trois dimensions,

Ensuite

Enſuite on multipliera la première équation primitive par R, la ſeconde par r, & on retranchera le ſecond produit du premier ; ce qui donne,

$$(Rm - rM)y^3 + (Rn - rN)y^2 + (Rp - rP)y + Rq - rQ = 0,$$

ſeconde équation où la plus haute puiſſance de y n'eſt que de trois dimenſions. On a donc deux équations qui ne contiennent plus que y^3, & les puiſſances inférieures de y, & qui ſe traitent par conſéquent comme celles de l'article précédent.

On procédera ſemblablement, lorſque dans les deux équations primitives, la plus haute puiſſance de y ſera de plus de quatre dimenſions.

396. Si, dans l'équation finale, il ſe trouve des facteurs inutiles, comme cela arrive quelquefois ; ces ſortes de facteurs peuvent ſouvent ſe reconnoître ſans peine, en employant des abréviations de calcul pareilles à celles qui nous ont ſervi à trouver (394) l'équation finale réſultante de l'élimination de y. Du moins ils peuvent toujours être déterminés, en décompoſant, par les méthodes du Chapitre XIV, l'équation finale en ſes diviſeurs commenſurables. Enſuite l'examen des conditions du problême qu'on cherche à réſoudre apprendra à diſcerner, parmi les diviſeurs, ceux qui doivent être utiles d'avec ceux qui doivent être rejettés.

397. La même méthode s'applique à l'élimination des inconnues lorſqu'il y en a plus de deux, quels que ſoient les degrés des équations qui les contiennent.

Car ſi on a les trois inconnues x, y, z, & trois équations, il eſt clair qu'avec la première & la ſeconde équation on peut former une équation qui ne contienne plus que deux des trois inconnues, par exemple x & y. De même, en combinant la première équation avec la troiſième, on pourra former encore une équation qui ne contiendra que x & y. Ainſi on aura deux équations qui ne contiendront plus que les deux inconnues x & y : ce qui rappelle le problême aux cas précédents.

Si on avoit quatre inconnues & quatre équations, en combinant ſucceſſivement la première équation avec les trois autres, on formeroit trois équations où il n'y auroit que trois inconnues ; ce qui rappelle ce cas au précédent.

Ainſi de ſuite.

Je paſſe à l'évanouiſſement des radicaux.

398. SUPPOSONS que la valeur d'une inconnue ſoit donnée par une expreſſion radicale ; que, par exemple, on ait $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{(c^3 + d^3)}$, & qu'on veuille ſavoir quelle ſeroit l'équation qui auroit produit l'expreſſion propoſée ; la queſtion eſt de trouver une équation en x, laquelle ne contienne point de radicaux. Voici la manière de réſoudre ces ſortes de problêmes.

399. D'ABORD, ſi une expreſſion ne contient qu'un radical ; par exemple, ſi on a $x = \sqrt[3]{ab^2}$, on fera évanouir le radical, en élevant chaque membre au cube ; ce qui donnera $x^3 = ab^2$, qui eſt une équation

du troisième degré, de laquelle résulte l'expression proposée.

Si on avoit $x = a + \sqrt[3]{[c^3 + b^2 \sqrt{cd}]}$, on commenceroit par transposer a; & on auroit $x - a = \sqrt[3]{[c^3 + b^2 \sqrt{cd}]}$. Elevant chaque membre au cube, on auroit $(x-a)^3 = c^3 + b^2 \sqrt{cd}$. Transposant c^3, on auroit $(x-a)^3 - c^3 = b^2 \sqrt{cd}$. Elevant chaque membre au quarré, on auroit enfin,

$$\left((x-a)^3 - c^3\right)^2 = b^4 cd,$$

équation du sixième degré, de laquelle résulte l'expression proposée.

Si on avoit à dégager l'inconnue x d'une équation de cette espèce,

$$x = m + \sqrt[3]{[ab^2 + c^2 \sqrt{(dx + \sqrt{ghkx})}]},$$

1°. On commenceroit par transposer m, & élevant tout au cube, on auroit,

$$(x-m)^3 = ab^2 + c^2 \sqrt{(dx + \sqrt{ghkx})}.$$

2°. On transposeroit ab^2, & élevant tout au quarré, on auroit,

$$\left((x-m)^3 - ab^2\right)^2 = c^4 dx + c^4 \sqrt{ghkx}.$$

3°. On transposeroit $c^4 dx$, & élevant tout au quarré, on auroit,

$$\left(\left((x-m)^3 - ab^2\right)^2 - c^4 dx\right)^2 = c^8 ghkx,$$

équation du douzième degré qu'il faudroit résoudre pour avoir x.

On opérera de même dans les autres cas pareils.

400. LORSQUE dans une expreſſion il ſe trouve pluſieurs radicaux qui ſe ſuivent par voie d'addition ou de ſouſtraction, comme cela arrive dans l'exemple de l'article 398 ; il eſt un peu plus difficile de faire évanouir tous les radicaux. Cette opération peut s'exécuter ainſi en général.

Mettez à la place de chaque radical, une nouvelle inconnue, & vous aurez une équation où il n'y aura point de radical : vous aurez de plus autant d'équations à deux termes, qu'il y avoit de radicaux ; & en élevant chacune de ces équations à la puiſſance de même indice que le radical qui s'y trouve, vous aurez encore des équations où il n'y aura point de radicaux. Eliminez ſucceſſivement toutes les inconnues miſes à la place des radicaux, & vous aurez une équation finale qui ſera celle qu'on demandoit.

Ainſi, par exemple, ayant l'expreſſion $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{[c^3 + d^3]}$, je fais $y = \sqrt[3]{ab^2}$, $z = \sqrt[3]{[c^3 + d^3]}$; & par conſéquent,

$$x - y - z = 0,$$
$$y^3 - ab^2 = 0,$$
$$z^3 - c^3 - d^3 = 0.$$

Au moyen de ces équations, j'élimine ſucceſſivement y & z. La première donne $z = x - y$, & par conſéquent $z^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$. Subſtituant cette valeur dans la troiſième, on aura, entre x & y, les deux équations,

$$y^3 - ab^2 = 0,$$
$$-y^3 + 3xy^2 - 3x^2y + x^3 - c^3 - d^3 = 0,$$

ou bien (en faisant, pour abréger le calcul, $ab^2 = A$, $3x = B$, $3x^2 = C$, $x^3 - c^3 - d^3 = D$),

$$y^3 - A = 0,$$
$$-y^3 + By^2 - Cy + D = 0.$$

La question n'est donc plus que d'éliminer y de ces deux équations; cela s'exécute par les moyens exposés ci-dessus, & on trouve,

$$(D - A)^3 + 3ACB(D - A) - AC^3 - A^2B^3 = 0,$$

c'est-à-dire, en remettant pour A, B, C, D, leurs valeurs,

$$(x^3 - c^3 - d^3 - ab^2)^3 + 27ab^2x^3(x^3 - c^3 - d^3 - ab^2) - 27ab^2x^6 - 27a^2b^4x^3 = 0,$$

équation du neuvième degré, de laquelle résulte la valeur proposée de x.

CHAPITRE XXI.

Sommation de différentes Suites de nombres.

401. LA ſommation des ſuites, c'eſt-à-dire, l'art de trouver, d'après la loi ſuivant laquelle ſe forme une ſuite compoſée d'un nombre fini ou infini de termes, une expreſſion finie qui revienne au réſultat qu'on obtiendroit, ſi l'on ajoutoit actuellement enſemble tous les termes de la ſuite, eſt un objet très important dans l'analyſe. Car les ſuites ſe préſentent, ou peuvent être introduites dans une infinité de recherches; & ſi on les ſavoit ſommer en général, il n'y a preſque point de problêmes qu'on ne réſolût en rigueur. Malheureuſement, le nombre des ſuites qu'on ſait ſommer, eſt aſſez petit; & on eſt réduit, pour l'ordinaire, à tâcher de les rendre convergentes, afin que l'aſſemblage de leurs premiers termes ſuffiſe pour en repréſenter ſenſiblement la totalité. Les ſuites que je vais conſidérer ici ont l'avantage de pouvoir être ſommées, & de s'appliquer utilement à quelques recherches, comme on le verra dans les Traités qui ſuivront celui-ci.

402. PARMI les ſuites ſommables, on rencontre d'abord les progreſſions arithmétique & géométrique.

Nous avons vû (173) qu'en nommant a le premier terme d'une progreſſion arithmétique, d la différence additive ou ſouſtractive, n le nombre des termes, S leur ſomme, on a,

$$S = \frac{(2a + dn - d)n}{2}.$$

Par où l'on voit qu'on a, ſous une forme très-ſimple, la ſomme de toute la progreſſion, quels que ſoient ſon premier terme, la différence, & le nombre des termes; quantités qui réglent la loi ou la marche ſuivant laquelle la progreſſion ſe développe.

403. SEMBLABLEMENT, nous avons vû (174) qu'en nommant a le premier terme d'une progreſſion géométrique, q la raiſon ou le quotient du premier terme diviſé par le ſecond, n le nombre des termes, S leur ſomme, on a,

$$S = \frac{aq^n - a}{(q-1)q^{n-1}} = \frac{aq}{q-1} - \frac{a}{(q-1)q^{n-1}}.$$

Dans cette formule, la raiſon q eſt plus ou moins grande que l'unité, ſelon que la progreſſion eſt décroiſſante ou croiſſante.

Lorſque la progreſſion décroît à l'infini, la ſeconde partie de la valeur de S s'évanouit par rapport à la première, parce qu'alors q étant > 1, & le nombre n devenant infini, le produit $(q-1)q^{n-1}$ devient infini; ce qui rend la fraction $\frac{a}{(q-1)q^{n-1}}$ infiniment petite. Ainſi on a ſimplement alors, $S = \frac{aq}{q-1}$.

404. LA progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini a une propriété qui mérite d'être remarquée; c'eſt que ſi l'on retranche ſucceſſivement de la ſomme totale, le premier terme, les deux premiers termes, les trois premiers termes, &c : la ſomme totale & les reſtes de ces ſouſtractions, formeront une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, qui aura même raiſon que la progreſſion propoſée, & qui ſe ſommera par conſéquent de la même manière. Car le premier terme de la progreſſion propoſée étant ſuppoſé repréſenté par a, & la raiſon par q; le ſecond terme eſt $\frac{a}{q}$, le troiſième, $\frac{a}{q^2}$, le quatrième, $\frac{a}{q^3}$, ainſi de ſuite; & ſuivant la dernière formule de l'article précédent, la ſomme eſt $\frac{aq}{q-1}$. Donc, la ſomme moins le premier terme eſt $\frac{aq}{q-1} - a$, c'eſt-à-dire, $\frac{a}{q-1}$; la ſomme moins les deux premiers termes, ou, ce qui revient au même, l'expreſſion précédente, moins le ſecond terme, eſt $\frac{a}{q-1} - \frac{a}{q}$, c'eſt-à-dire, $\frac{a}{q(q-1)}$; la ſomme moins les trois premiers termes, ou l'expreſſion précédente moins le troiſième terme, eſt $\frac{a}{q(q-1)} - \frac{a}{q^2}$, c'eſt-à-dire, $\frac{a}{q^2(q-1)}$; la ſomme moins les quatre premiers termes, ou l'expreſſion précédente moins le quatrième terme eſt

$\frac{a}{q^2(q-1)} - \frac{a}{q^3}$, ou $\frac{a}{q^3(q-1)}$; &c. Or, il eſt clair que les différentes quantités $\frac{aq}{q-1}$, $\frac{a}{q-1}$, $\frac{a}{q(q-1)}$, $\frac{a}{q^2(q-1)}$, $\frac{a}{q^3(q-1)}$, &c, compoſent une progreſſion décroiſſante à l'infini, dont le premier terme eſt $\frac{aq}{q-1}$, & la raiſon q. Donc la ſomme de tous les termes de cette progreſſion eſt $\frac{aq}{q-1} \times \frac{q}{q-1}$, ou $\frac{aq^2}{(q-1)^2}$; & on voit qu'elle eſt à celle $\frac{aq}{q-1}$ de la progreſſion propoſée, dans le rapport de q à $q-1$.

405. ON peut ſommer également les ſuites des puiſſances des nombres *naturels*, celles des nombres *figurés*, des nombres *polygones*, & d'autres ſuites qui dérivent de celles-là. C'eſt ce que nous allons faire voir avec quelque détail, lorſque nous aurons donné les définitions néceſſaires.

La ſuite des nombres naturels eſt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c; les puiſſances de ces nombres en ſont les quarrés, les cubes, &c.

Les nombres figurés, qu'on appelle encore *nombres de différents ordres*, ſe forment comme on le voit ici.

Nombres	Conſtants ou du 1^{er} ordre...	1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.
	Naturels ou du 2^{e} ordre...	1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.
	Triangulaires ou du 3^{e} ordre.	1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.
	Pyramidaux ou du 4^{e} ordre.	1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.
	&c.	

Tous les termes de la première bande horiſontale ſont égaux. Chaque terme d'une autre bande horiſontale quelconque eſt la ſomme de tous les termes correſpondants de la bande précédente. Ainſi, par exemple, le troiſième terme 3 de la ſeconde bande eſt égal à la ſomme $1 + 1 + 1$ des trois premiers termes de la bande des nombres conſtants ; le cinquième terme 15 de la bande des nombres triangulaires eſt égal à la ſomme $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ des cinq premiers termes de la bande des nombres naturels ; &c.

Les nombres polygones ſe forment en ajoutant ſucceſſivement enſemble les termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique qui commence par 1 ; & ils s'appellent triangulaires, quarrés, pentagones, &c, ſuivant que la différence de la progreſſion arithmétique eſt 1, ou 2, ou 3, ou 4, &c.

Progreſſions arith.	*Diff.*	*Polygones.*
÷ 1.2.3.4.5.6.&c	1	1, 3, 6, 10, 15, &c. triang.
÷ 1.3.5.7.9.11.&c	2	1, 4, 9, 16, &c. quarrés.
÷ 1.4.7.10.13.16.&c	3	1, 5, 12, 22, &c. pentagones.
&c.	&c.	&c.

Je viens aux ſommations annoncées.

406. D'ABORD, la ſuite 1, 2, 3, 4, 5, &c, des nombres naturels, ou de leurs premières puiſſances,

étant une progression arithmétique dont la différence est 1, on aura (402), en nommant toujours n le nombre des termes, S la somme, $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

407. POUR trouver la somme des quarrés, des cubes, &c, de la manière la plus générale, prenons une suite de quantités f, g, h, i, k, &c, qui forment une progression arithmétique dont la différence soit d. A cause des équations $g = f + d$, $h = g + d$, $i = h + d$, $k = i + d$, &c, que donne la propriété de la progression arithmétique, on aura les Tables suivantes d'équations.

I.	II
$g^2 = f^2 + 2fd + d^2$	$g^2 - f^2 = 2fd + d^2$
$h^2 = g^2 + 2gd + d^2$	$h^2 - g^2 = 2gd + d^2$
$i^2 = h^2 + 2hd + d^2$	$i^2 - h^2 = 2hd + d^2$
$k^2 = i^2 + 2id + d^2$	$k^2 - i^2 = 2id + d^2$
&c.	&c.

III.	IV.
$g^3 = f^3 + 3f^2d + 3fd^2 + d^3$	$g^3 - f^3 = 3f^2d + 3fd^2 + d^3$
$h^3 = g^3 + 3g^2d + 3gd^2 + d^3$	$h^3 - g^3 = 3g^2d + 3gd^2 + d^3$
$i^3 = h^3 + 3h^2d + 3hd^2 + d^3$	$i^3 - h^3 = 3h^2d + 3hd^2 + d^3$
$k^3 = i^3 + 3i^2d + 3id^2 + d^3$	$k^3 - i^3 = 3i^2d + 3id^2 + d^3$
&c.	&c.

V.	VI.
$g^4 = f^4 + 4f^3d + 6f^2d^2 + 4fd^3 + d^4$	$g^4 - f^4 = 4f^3d + 6f^2d^2 + 4fd^3 + d^4$
$h^4 = g^4 + 4g^3d + 6g^2d^2 + 4gd^3 + d^4$	$h^4 - g^4 = 4g^3d + 6g^2d^2 + 4gd^3 + d^4$
$i^4 = h^4 + 4h^3d + 6h^2d^2 + 4hd^3 + d^4$	$i^4 - h^4 = 4h^3d + 6h^2d^2 + 4hd^3 + d^4$
$k^4 = i^4 + 4i^3d + 6i^2d^2 + 4id^3 + d^4$	$k^4 - i^4 = 4i^3d + 6i^2d^2 + 4id^3 + d^4$
&c.	&c.

408. Cela posé, premièrement, en ajoutant ensemble les équations de la Table II, on aura $k^2 - f^2 = 2d(f+g+h+i) + 4d^2$. Par la manière dont cette équation se forme, on voit que si l'on nomme S la somme de tous les termes de la progression arithmétique proposée, n leur nombre, p le dernier terme ; on aura $p^2 - f^2 = 2d(S-p) + d^2(n-1)$. D'où l'on tire,

$$S = \frac{p^2 - f^2 - d^2(n-1) + 2pd}{2d}.$$

Cette formule devient celle de l'article 406, en supposant $f=1$, $d=1$, & observant que $p=n$.

409. En second lieu, si l'on ajoute ensemble les équations de la Table IV, on aura $k^3 - f^3 = 3d(f^2+g^2+h^2+i^2) + 3d^2(f+g+h+i) + 4d^3$. Donc, en nommant p le dernier terme de la progression proposée, n le nombre total des termes, S leur somme, S' celle de leurs quarrés ; on aura $p^3 - f^3 = 3d(S'-p^2) + 3d^2(S-p) + d^3(n-1)$, ou bien, en mettant pour S sa valeur trouvée ci-dessus, $p^3 - f^3 = 3d(S'-p^2) - 3d^2p + \frac{3d}{2}\left(p^2 - f^2 - d^2(n-1) + 2pd\right) + d^3(n-1)$. D'où l'on tire,

$$S' = \frac{2p^3 - 2f^3 + 3dp^2 + 3df^2 + d^3(n-1)}{6d}.$$

Lorsqu'on voudra appliquer cette formule à la sommation des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, &c; il faudra ſuppoſer $f=1$, $d=1$, $p=n$; & alors la formule précédente deviendra

$$S'=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

410. DE même, en ajoutant enſemble les équations de la Table VI, on aura $k^4-f^4=4d(f^3+g^3+h^3+i^3)+6d^2(f^2+g^2+h^2+i^2)+4d^3(f+g+h+i)+4d^4$. Donc, ſi l'on nomme p le dernier terme de la progreſſion propoſée, n le nombre total de ſes termes, S leur ſomme, S' celle de leurs quarrés, S'' celle de leurs cubes ; on aura $p^4-f^4=4d(S''-p^3)+6d^2(S'-p^2)+4d^3(S-p)+d^4(n-1)$. Mettant pour S & S' leurs valeurs générales trouvées ci-deſſus, & dégageant S'', on aura,

$$S''=\frac{p^4-f^4+2dp^3+d^2p^2+2df^3-d^2f^2}{4d}.$$

Pour appliquer cette formule à la ſuite des cubes 1, 8, 27, 64, 125, &c, il faut ſuppoſer $f=1$, $d=1$, $p=n$, & alors on a,

$$S''=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4},$$

On trouvera ſemblablement les ſommes des quatrièmes puiſſances, des cinquièmes puiſſances, &c, des termes de la progreſſion arithmétique propoſée. On voit que les ſommes ſupérieures dépendent des inférieures. Il eſt facile, en employant la formule que nous avons donnée (287) pour élever un binome à une puiſſance quelconque, de comprendre toutes ces ſommes dans des formules générales.

411. LES ſuites des nombres figurés & des nombres polygones ſe ſomment par les mêmes moyens. L'art de ces ſommations conſiſte à décompoſer les ſuites dont il s'agit, en d'autres qui ſe ſomment chacune en particulier, au moyen de celles qui précédent. Il ſuffira d'expliquer cela pour les nombres triangulaires & les nombres pyramidaux; nos Lecteurs opéreront d'une manière ſemblable pour les autres cas.

412. EN nommant S la ſomme des nombres triangulaires, n le nombre des termes, on a,

$$S = 1+3+6+10+15+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous pouvons regarder cette ſuite comme compoſée des ſuites ſuivantes, ajoutées enſemble terme à terme, leſquelles ſont toutes la ſuite des nombres naturels avancée ſucceſſivement d'un rang vers la droite:

$$\begin{array}{l} A=1+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+n \\ B=\bullet\quad 1+2+3+4+5+\ldots\ldots+n-1, \\ C=\bullet\quad \bullet+1+2+3+4+\ldots\ldots+n-2, \\ D=\bullet\quad \bullet\quad \bullet+1+2+3+\ldots\ldots+n-3. \end{array}$$

&c.

La ſomme de la ſuite A eſt $\frac{nn+n}{2}$; & on aura également, par la même formule, les ſommes des ſuites B, C, D, &c, en mettant ſucceſſivement $n-1$, $n-2$ $n-3$, &c, à la place de n. Ainſi

$B = \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$; $C = \frac{(n-2)^2+(n-2)}{2}$,

$D = \frac{(n-3)^2+(n-3)}{2}$; &c. Donc, en ajoutant ensemble toutes ces ſommes particulières, & faiſant deux claſſes de termes correſpondants, on aura $S = \frac{1}{2}(n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2+\ldots+1)+\frac{1}{2}(n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1)$. Or, des deux ſuites qui entrent dans cette expreſſion, la première $n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ (409) ; & la ſeconde $n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)\ldots\ldots+1 = \frac{nn+n}{2}$ (406). Donc $S = \frac{2n^3+3n^2+n}{12} + \frac{nn+n}{4} = \frac{n^3+3n^2+2n}{1\times2\times3}$.

413. POUR les nombres pyramidaux, on a

$$S = 1+4+10+20+35+\ldots+\frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$

Cette ſuite peut être regardée comme compoſée des ſuites ſuivantes, leſquelles ſont toutes la ſuite des nombres triangulaires avancée ſucceſſivement d'un rang vers la droite :

$$A = 1+3+6+10+15+\ldots+\frac{nn+n}{2},$$

$$B = \bullet\ 1+3+6+10+\ldots+\frac{(n-1)^2+n-1}{2},$$

$$C = \bullet\ \bullet+1+3+6+\ldots+\frac{(n-2)^2+n-2}{2},$$

$$D = \bullet\ \bullet\ \bullet+1+3+\ldots+\frac{(n-3)^2+n-3}{2},$$

&c.

Or, en vertu de l'article précédent, $A = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$, $B = \frac{(n-1)^3+3(n-1)^2+2(n-1)}{6}$, $C = \frac{(n-2)^3+3(n-2)^2+2(n-2)}{6}$, $D = \frac{(n-3)^3+3(n-3)^2+2(n-3)}{6}$, &c. Donc, en ajoutant ensemble toutes ces sommes particulières, & faisant trois classes de termes correspondants, on aura $S = \frac{1}{6}\left(n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+(n-3)^3+\ldots+1\right)+\frac{1}{2}\left(n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2+\ldots+1\right)+\frac{1}{3}\left(n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1\right)$. Or, des trois suites qui entrent dans cette expression, la première $n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+(n-3)^3+\ldots+1 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$ (410); la seconde $n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2+\ldots+1 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ (409); la troisième $n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1 = \frac{nn+n}{2}$ (406). Donc $S = \frac{n^4+2n^3+n^2}{24}+\frac{2n^3+3n^2+n}{12}+\frac{nn+n}{6} = \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{1\times2\times3\times4}$.

414. PROPOSONS-NOUS maintenant de sommer quelques suites qui dérivent des précédentes. Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver la somme d'une suite de fractions, dont les numérateurs soient comme les nombres

nombres des différents ordres, & les dénominateurs en progression géométrique. Ce problême comprend plusieurs cas ; j'en vais parcourir deux.

415. *Sommer la suite* $S = \frac{m}{q} + \frac{2m}{q^2} + \frac{3m}{q^3} + \frac{4m}{q^4} + \ldots\ldots \frac{nm}{q^n}$, *composée de fractions dont les numérateurs sont comme la suite des nombres naturels* 1, 2, 3, 4, &c, *& les dénominateurs croissent en progression géométrique*, q *étant* > 1 ?

Je regarde cette suite comme composée des suites suivantes qui forment des progressions géométriques qui ont toutes la même raison q, & le même dernier terme $\frac{m}{q^n}$:

$$A = \frac{m}{q} + \frac{m}{q^2} + \frac{m}{q^3} + \frac{m}{q^4} + \ldots + \frac{m}{q^n},$$
$$B = \quad . \quad \frac{m}{q^2} + \frac{m}{q^3} + \frac{m}{q^4} + \ldots + \frac{m}{q^n},$$
$$C = \quad . \quad . \quad + \frac{m}{q^3} + \frac{m}{q^4} + \ldots + \frac{m}{q^n},$$
$$D = \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{m}{q^4} + \ldots + \frac{m}{q^n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{m}{q^n}.$$

Or, (174), en nommant a le premier terme d'une progression géométrique, u le dernier, q la raison, s la somme, on a $s = \frac{qa - u}{q - 1}$. Pour appliquer cette formule à la sommation des progressions géométriques A, B, C, D, &c, il faut prendre constamment $u=\frac{m}{q^n}$, & faire successivement $a=\frac{m}{q}$, $a=\frac{m}{q^2}$, $a=\frac{m}{q^3}$, &c. Par-là, on aura $A=\frac{m}{q-1}-\frac{m}{(q-1)q^n}$, $B=\frac{m}{q(q-1)}-\frac{m}{(q-1)q^n}$, $C=\frac{m}{q^2(q-1)}-\frac{m}{(q-1)q^n}$, $D=\frac{m}{q^3(q-1)}-\frac{m}{(q-1)q^n}$, &c. Donc $A+B+C+D+$&c, ou $S=\frac{m}{q-1}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}\right)-\frac{m}{(q-1)q^n}\times(1+1+1+1+\ldots\ldots+1)$. Or, des deux suites qui entrent dans cette expression, la première $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+$ &c, est une progression géométrique, dont la somme est $\frac{1}{q-1}\left(q-\frac{1}{q^{n-1}}\right)$; la seconde $1+1+1+1+\ldots\ldots+1=n$. Donc enfin

$$S=\frac{m}{(q-1)^2}\left(q-\frac{1}{q^{n-1}}\right)-\frac{mn}{(q-1)q^n}.$$

Lorsque la suite S est poussée à l'infini, il faut, dans la formule $s=\frac{aq-u}{q-1}$, faire u ou $\frac{m}{q^n}=0$; alors on a $A=\frac{m}{q-1}$, $B=\frac{m}{q(q-1)}$, $C=\ldots$

$\frac{m}{q^2(q-1)}$, $D=\frac{m}{q^3(q-1)}$, &c; & par conséquent $S=\frac{mq}{(q-1)^2}$.

416. *Sommer la suite* $S=\frac{m}{q}+\frac{3m}{q^2}+\frac{6m}{q^3}+\frac{10m}{q^4}+\ldots\ldots+\frac{m(nn+n)}{2}$, *les numérateurs des fractions croissant comme la suite des nombres triangulaires, & les dénominateurs croissant en progression géométrique?*

Je regarde cette suite comme composée des progressions géométriques suivantes :

$$A=\frac{m}{q}+\frac{m}{q^2}+\frac{m}{q^3}+\frac{m}{q^4}+\ldots\ldots+\frac{m}{q^n},$$

$$B=\ .\ +\frac{2m}{q^2}+\frac{2m}{q^3}+\frac{2m}{q^4}+\ldots\ldots+\frac{2m}{q^n},$$

$$C=\ .\quad .\ +\frac{3m}{q^3}+\frac{3m}{q^4}+\ldots\ldots+\frac{3m}{q^n},$$

$$D=\ .\quad .\quad .\ +\frac{4m}{q^4}+\ldots\ldots+\frac{4m}{q^n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{nm}{q^n}.$$

Or, il suit de l'article précédent, qu'on a $A=\frac{m}{q-1}-\frac{m}{(q-1)q^n}$, $B=\frac{2m}{q(q-1)}-\frac{2m}{(q-1)q^n}$, $C=\frac{3m}{q^2(q-1)}-\frac{3m}{(q-1)q^n}$,

$D = \frac{4m}{q^3(q-1)} - \frac{4m}{(q-1)q^n}$, &c. Donc $A + B + C + D +$ &c, ou $S = \frac{mq}{q-1}\left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{q^n}\right) - \frac{m}{(q-1)q^n} \times (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + n)$. Or, des deux ſuites qui entrent dans cette expreſſion, la première $\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{4}{q^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{q^n}$, eſt celle de l'article précédent, en faiſant $m = 1$; elle a par conſéquent pour ſomme $\frac{1}{(q-1)^2}\left(q - \frac{1}{q^{n-1}}\right) - \frac{n}{(q-1)q^n}$; la ſeconde $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + n = \frac{nn+n}{2}$. Donc enfin,

$$S = \frac{mq}{q-1}\left(\frac{q}{(q-1)^2} - \frac{1}{(q-1)^2 q^{n-1}} - \frac{n}{(q-1)q^n}\right) - \frac{m(nn+n)}{2(q-1)q^n}.$$

Lorſque la ſuite S eſt pouſſée à l'infini, on a ſimplement $S = \frac{mq^2}{(q-1)^3}$.

CHAPITRE XXII.

Des Suites Récurrentes.

417. Les ſuites récurrentes ſont ainſi nommées en général, parce que ſi l'on prend à volonté les premiers termes, les termes ſuivants ſe forment, ſemblablement, chacun par l'addition ou la ſouſtraction d'un même nombre de termes précédents affectés de coéfficients donnés; & qu'il faut par conſéquent, pour continuer la ſuite, *recourir* ſans ceſſe aux termes déja trouvés. Par exemple, la ſuite 5, 20, 80, 320, 1280, &c, eſt récurrente, parce qu'ayant pris à volonté le premier terme 5, le ſecond eſt égal au premier multiplié par le nombre donné 4; le troiſième eſt égal au ſecond multiplié par le même nombre 4; ainſi de ſuite. De même, la ſuite 1, 4, 23, 127, 704, 3901, &c, eſt récurrente, parce qu'ayant pris à volonté les deux premiers termes 1, 4, le troiſième eſt égal à la ſomme faite du premier multiplié par le coéfficient donné 3, & du ſecond multiplié par le coéfficient donné 5, c'eſt-à-dire que $23 = 1 \times 3 + 4 \times 5$; le quatrième ſe forme ſemblablement du ſecond & du troiſième, c'eſt-à-dire que $127 = 4 \times 3 + 23 \times 5$; de même, le cinquième $704 = 23 \times 3 + 127 \times 5$; ainſi de ſuite. La ſuite 1, 3, 5, 20, 106, 566, &c,

eſt auſſi récurrente, parce qu'ayant pris à volonté les trois premiers termes 1, 3, 5, le quatrième eſt égal à la ſomme faite du premier multiplié par le coéfficient donné 2, du ſecond multiplié par le coéfficient donné -4, & du troiſième multiplié par le coéfficient donné 6, c'eſt-à-dire que $20 = 1 \times 2 + 3 \times -4 + 5 \times 6$; le cinquième ſe forme de même du ſecond, du troiſième & du quatrième, c'eſt-à-dire que $106 = 3 \times 2 + 5 \times -4 + 20 \times 6$; ainſi de ſuite.

On appelle *échelle de relation*, l'aſſemblage des coéfficients donnés qui ſervent à former la ſuite. Cette échelle peut avoir un nombre quelconque de termes. Dans la première ſuite propoſée, l'échelle de relation eſt ſimplement 4, elle n'a qu'un ſeul terme. Dans la ſeconde ſuite, l'échelle de relation eſt $3 + 5$; elle a deux termes. Dans la troiſième ſuite, l'échelle de relation eſt $2 - 4 + 6$; elle a trois termes, &c.

Le dernier terme de la ſuite ſe nomme *terme général*; il eſt une certaine fonction des premiers termes générateurs de la ſuite, de l'échelle de relation, & du nombre des termes. Cette fonction doit être telle qu'en nommant n le nombre des termes, & faiſant ſucceſſivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, &c, le terme général devienne ſucceſſivement chacun des termes de la ſuite.

418. La claſſe des ſuites récurrentes comprend pluſieurs autres ſuites, comme autant de cas particuliers. Par exemple, une progreſſion géométrique quelconque peut être regardée comme une ſuite récurrente dont l'échelle de relation aura tant de termes

qu'on voudra. En effet, ſuppoſons que la ſuite a, b, c, d, e, f, repréſente une progreſſion géométrique dont chaque terme ſoit au terme ſuivant comme 1 eſt à m. Il eſt clair,

1°. Que cette progreſſion peut être regardée comme une ſuite récurrente dont l'échelle de relation eſt m.

2°. Puiſque $b = ma$, $c = mb$, $d = mc$, &c, on aura $b - ma = 0$; ou en multipliant tout par le nombre arbitraire k, $bk - mak = 0$. Donc $c = mb + bk - mak$, ou $c = (m+k)\,b - mka$. On trouvera de même $d = (m+k)\,c - mkb$, $e = (m+k)\,d - mkc$, &c. Donc la progreſſion propoſée peut être regardée comme une ſuite récurrente dont l'échelle de relation, compoſée de deux termes, eſt $(m+k) - mk$. Cette échelle eſt ſuſceptible de pluſieurs variations, puiſque le nombre k a été pris arbitrairement.

3°. A cauſe de $c = (m+k)\,b - mak$, nous aurons, en multipliant tout par le nombre arbitraire h, & mettant tout d'un même côté, $ch - (mh + kh)\,b + makh = 0$. Et comme $d = (m+k)\,c - mbk$, nous aurons, en joignant au ſecond membre de cette équation l'équation précédente, $d = (m+k+h)\,c - (mk + mh + hk)\,b + mkha$. On trouvera de même $e = (m+k+h)\,d - (mk + mh + kh)\,c + mkhb$; ainſi de ſuite. Donc la progreſſion propoſée peut être regardée comme une ſuite récurrente dont l'échelle de relation, compoſée de trois termes, eſt $(m+k+h) - (mk + mh + kh) + mkh$.

&c.

419. Qu'on ait une fraction telle que $\frac{M}{a+bx+cx^2}$, dont le dénominateur est complexe, le numérateur étant tout ce qu'on voudra; & qu'on la développe, par la méthode de l'article 379, en une suite infinie qui marche suivant les puissances de x; les coéfficients des termes de cette suite composeront une suite récurrente dont l'échelle de relation est $-\frac{c}{a} - \frac{b}{a}$. En effet, feignons qu'on ait,

$$\frac{1}{a+bx+cx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c;$$

& par conséquent,

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} +aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \&c, \\ \qquad\quad + bAx + bBx^2 + bCx^3 + bDx^4 + \&c, \\ \qquad\qquad\qquad + cAx^2 + cBx^3 + cCx^4 + \&c, \\ \&c. \\ -1 \end{array} \right.$$

Nous aurons d'abord, pour déterminer les deux premiers coéfficients A & B, les deux équations $aA - 1 = 0$, $aB + bA = 0$; ensuite, pour déterminer les autres coéfficients C, D, E, &c, nous aurons $aC + bB + cA = 0$, ou $C = -\frac{Ac}{a} - \frac{Bb}{a}$, $aD + bC + cB = 0$, ou $D = -\frac{Bc}{a} - \frac{Cb}{a}$, $aE + bD + cC = 0$, ou $E = -\frac{Cc}{a} - \frac{Db}{a}$, &c. D'où l'on voit que C dérive de A & de B, comme D dérive de B & de C, comme E dérive de C & de D, &c. Ainſi les coéfficients A, B, C, D, E, &c, compoſent une ſuite récurrente dont l'échelle de relation eſt $-\frac{c}{a}-\frac{b}{a}$.

Il en eſt de même de toutes les fractions de pareille eſpece.

420. Les ſuites récurrentes ſe ſomment en général. D'abord, lorſque l'échelle de relation n'a qu'un ſeul terme, la ſuite eſt une progreſſion géométrique ; elle peut, par conſéquent, être ſommée par le moyen de l'article 403.

421. Soit a, b, c, d, e, f, g, une ſuite récurrente, dont l'échelle de relation, compoſée de deux termes, ſoit $p+q$. Nous aurons $c=ap+bq$, $d=bp+cq$, $e=cp+dq$, $f=dp+eq$, $g=ep+fq$. Donc $c+d+e+f+g=p(a+b+c+d+e)+q(b+c+d+e+f)$. Or, en nommant S la ſomme de tous les termes de la ſuite, on a $c+d+e+f+g=S-a-b$, $a+b+c+d+e=S-f-g$, $b+c+d+e+f=S-a-g$. On aura donc $S-a-b=p(S-f-g)+q(S-a-g)$. D'où l'on tire,

$$S=\frac{pf+pg+qa+qg-a-b}{p+q-1}.$$

D'où l'on voit qu'on aura la ſomme de la ſuite, en connoiſſant les deux premiers termes, les deux derniers, & l'échelle de relation.

On trouveroit de même la ſomme, ſi l'échelle de relation avoit trois termes ; & que l'on connût les trois premiers termes de la ſuite, les trois derniers, & l'échelle de relation. Ainſi de ſuite.

422. LES derniers termes de la ſuite peuvent être éliminés de la valeur de S. Il faut, pour cela, connoître le nombre n des termes, & former le terme général. Je me contenterai de réſoudre ce problême pour les ſuites récurrentes dont l'échelle de relation n'a que deux termes. Il ſera facile d'étendre la ſolution aux ſuites récurrentes plus compoſées.

423. JE ſuppoſe donc, comme tout-à-l'heure, que a, b, c, d, &c, ſoit une ſuite récurrente dont l'échelle de relation eſt $p+q$, & le nombre des termes, n. Toute progreſſion géométrique pouvant être conſidérée (418) comme une ſuite récurrente particulière, cette propriété va nous faire découvrir, d'une manière fort ſimple, le terme général de la ſuite récurrente propoſée qui embraſſe toutes les ſuites récurrentes dont l'échelle de relation a deux termes. En effet, feignons d'abord qu'on ait les deux progreſſions,

$$\div A\lambda : A\lambda^2 : A\lambda^3 : A\lambda^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A\lambda^n$$
$$\div B\pi : B\pi^2 : B\pi^3 : B\pi^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B\pi^n,$$

qui ont chacune le nombre n de termes, & dont la premiere a pour terme général $A\lambda^n$, & la ſeconde a auſſi pour terme général $B\pi^n$. Enſuite ſuppoſons que le terme général de notre ſuite récurrente ſoit la ſomme des deux termes généraux des deux progreſſions, c'eſt-à-dire $A\lambda^n + B\pi^n$. Cette ſuppoſition ſera permiſe &

vraie, si nous trouvons pour les quatre inconnues A, B, λ, π, des valeurs telles qu'en faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, &c : le terme général $(A\lambda^n + B\pi^n)$ se change successivement en chacun des termes de la suite récurrente proposée. Or 1°. la supposition de $n=1$ donne pour terme général $(A\lambda + B\pi)$; & en égalant cette quantité à a, on aura $A\lambda + B\pi = a$, première équation.

2°. La supposition de $n=2$, donne pour terme général $(A\lambda^2 + B\pi^2$; & en égalant cette quantité à b, on aura $A\lambda^2 + B\pi^2 = b$, seconde équation.

3°. & 4°. On voit directement, ou par l'article 418, n°. 2, qu'on peut faire $A\lambda^n = (\lambda + \pi) A\lambda^{n-1} - \lambda\pi A\lambda^{n-2}$, & $B\pi^n = (\pi + \lambda) B\pi^{n-1} - \pi\lambda B\pi^{n-2}$. Ainsi $A\lambda^n + B\pi^n = (\lambda + \pi)(A\lambda^{n-1} + B\pi^{n-1}) - \lambda\pi(A\lambda^{n-2} + B\pi^{n-2})$. D'où il suit que le terme général $(A\lambda^n + B\pi^n)$ forme une suite récurrente dont l'échelle de relation est $-\lambda\pi + (\lambda + \pi)$. Nous aurons donc les deux autres équations $-\lambda\pi = p$, troisième équation; $\lambda + \pi = q$, quatrième équation.

Par conséquent on a tout ce qu'il faut pour déterminer les quatre inconnues A, B, λ, π. La troisième & la quatrième équation combinées ensemble, donnent

$$\lambda = \frac{q + \sqrt{(4p + q^2)}}{2}, \quad \pi = \frac{q - \sqrt{(4p + q^2)}}{2}.$$

Les deux premières équations combinées ensemble donnent d'abord, $A = \dfrac{b - a\pi}{\lambda^2 - \lambda\pi}$, $B = \dfrac{b - a\lambda}{\pi^2 - \lambda\pi}$.

Substituant pour λ & π leurs valeurs, & représentant, pour abréger, la quantité radicale $\sqrt{(4p + q^2)}$, par M, on aura, $A = \frac{2b - aq + aM}{M^2 + qM}$, $B = \frac{2b - aq - aM}{M^2 - qM}$.

Le terme général ſera donc exprimé en grandeurs toutes connues. A l'aide de ce terme, on aura les expreſſions des derniers termes de la ſuite ; & par conſéquent on pourra repréſenter la ſomme S, par le moyen des deux premiers termes de la ſuite, de l'échelle de relation, & du nombre des termes.

424. On voit que les quatre quantités A, B, λ, π ſeront réelles, inégales, tant que la quantité radicale M ſera réelle & au-deſſus de zero. Si M étoit imaginaire, ce qui arrive lorſque p eſt négative, & qu'on a de plus $4p > q^2$; alors les valeurs de A, B, λ, π, ſont imaginaires. En effet, ſuppoſons en ce cas $M = m\sqrt{-1}$, & pour abréger un peu, $2b - aq = l$: on aura, $\lambda = \frac{q + m\sqrt{-1}}{2}$, $\pi = \frac{q - m\sqrt{-1}}{2}$,

$$A = \frac{l + am\sqrt{-1}}{-m^2 + qm\sqrt{-1}},\quad B = \frac{l - am\sqrt{-1}}{-m^2 - qm\sqrt{-1}}.$$

Néanmoins l'expreſſion $(A\lambda^n + B\pi^n)$ du terme général eſt encore réelle ; car cette expreſſion devient,

$$\left[\left(\frac{l + am\sqrt{-1}}{-m^2 + qm\sqrt{-1}}\right) \times \left(\frac{q + m\sqrt{-1}}{2}\right)^n + \left(\frac{l - am\sqrt{-1}}{-m^2 - qm\sqrt{-1}}\right) \times \left(\frac{q - m\sqrt{-1}}{2}\right)^n\right],$$

ou bien, en réduiſant les valeurs de A & de B au même dénominateur,

$$\left[\frac{(l+am\sqrt{-1})(-m^2-qm\sqrt{-1})}{m^4+q^2m^2}\left(\frac{q+m\sqrt{-1}}{2}\right)^n\right.$$
$$\left.+\frac{(l-am\sqrt{-1})(-m^2+qm\sqrt{-1})}{m^4+q^2m^2}\left(\frac{q-m\sqrt{-1}}{2}\right)^n\right].$$

Or, si l'on fait successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c, & qu'après avoir formé les puissances de $\frac{q+m\sqrt{-1}}{2}$, & de $\frac{q-m\sqrt{-1}}{2}$, on effectue les multiplications indiquées ; on trouvera que tous les termes qui contiennent des imaginaires, se détruisent mutuellement par l'opposition des signes, & que par conséquent l'expression dont il s'agit est réelle. On peut donc encore, en ce cas, déterminer le terme général par les formules de l'article précédent.

425. SI la quantité M étoit $=0$, c'est-à-dire, si p étant supposée négative, on avoit $4p=q^2$; on auroit $2\lambda=q$, $2\pi=q$, $A=\infty$, $B=\infty$. L'expression supposée pour le terme général seroit donc infinie. Or, le terme général doit être une quantité finie & variable, pour pouvoir représenter successivement tous les termes de la suite. Ainsi on ne peut pas, dans ce cas particulier, lui attribuer la forme $(A\lambda^n+B\pi^n)$. Mais il faudra supposer alors que le terme général est $(A\lambda^n+nB\lambda^n)$, somme des deux termes généraux des deux progressions,

$\div A\lambda : A\lambda^2 : A\lambda^3 : A\lambda^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A\lambda^n$,
$\div nB\lambda : nB\lambda^2 : nB\lambda^3 : nB\lambda^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots nB\lambda^n$.

Car d'abord, en faisant $n=1$, puis $n=2$, on aura les deux équations $A\lambda+B\lambda=a$, $A\lambda^2+$

$2B\lambda^2 = b$. De plus, on aura $A\lambda^n + nB\lambda^n = 2\lambda(A\lambda^{n-1} + (n-1)B\lambda^{n-1}) - \lambda^2(A\lambda^{n-2} + (n-2)B\lambda^{n-2})$. Ainsi, si l'on fait successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, &c, le terme $(A+Bn)\lambda^n$ formera une suite récurrente dont l'échelle de relation est $-\lambda^2 + 2\lambda$. On aura donc, en observant qu'ici dans l'échelle de relation $p+q$, le terme p doit être précédé du signe $-$, ces deux autres équations $-\lambda^2 = -p$, $2\lambda = q$, lesquelles donnent l'une & l'autre, $\lambda = \frac{q}{2}$, à cause de $4p = q^2$. Mettant la valeur de λ dans les deux premières équations, on trouvera $A = \frac{4aq - 4b}{q^2}$, $B = \frac{4b - 2aq}{q^2}$. Le terme général sera donc exprimable en grandeurs réelles, finies & entiérement connues.

Ceux qui voudront approfondir davantage la théorie des suites récurrentes, pourront consulter ce qu'en ont écrit MM. Moivre, Euler, le Pere Ricatti, &c.

CHAPITRE XXIII.

Des Quantités Logarithmiques & Exponentielles.

426. ON a vu dans l'Arithmétique que la théorie des logarithmes est fondée sur la correspondance des deux progressions arithmétique & géométrique. Cette correspondance est telle qu'on pourroit choisir arbitrairement l'une & l'autre progression, & dresser en conséquence une infinité de Tables qui auroient toutes les mêmes usages, à peu-près, que les Tables ordinaires de logarithmes. Mais, pour la simplicité & la facilité des calculs, on a imaginé que tous les nombres se formoient des puissances entières ou rompues d'un même nombre fondamental ; & on a regardé les exposants de ce nombre comme les logarithmes des nombres qu'il produit par ses puissances successives. Par exemple, on a pris le nombre fondamental 10, & d'abord ayant formé la progression géométrique $\div 10^0 : (10)^1 : (10)^2 : (10)^3 : (10)^4 :$ &c, on a regardé les exposants 0, 1, 2, 3, 4, &c, comme les logarithmes des nombres correspondants 1, 10, 100, 1000, 10000, &c, qui se forment en élevant successivement 10 aux puissances 0, 1, 2, 3, 4, &c. De même, un nombre quelconque, non compris dans la

progreſſion propoſée, par exemple, le nombre 3 a été conſidéré comme une puiſſance fractionnaire de 10, c'eſt-à-dire qu'on a poſé l'équation $3 = 10^{\varpi}$, ϖ étant l'expoſant ou l'indice d'une certaine racine de 10, qui rend cette équation vraie en effet ; & cet expoſant ϖ eſt le logarithme de 3.

On appelle *baſe des logarithmes*, ou *baſe logarithmique*, le nombre fondamental qui, par ſes puiſſances ſucceſſives, produit tous les nombres que l'on conſidere. Dans les tables ordinaires de logarithmes, la baſe eſt le nombre 10.

427. SOIT en général le nombre a, plus grand que l'unité, la baſe d'un ſyſtême de logarithmes, & donnons-lui l'expoſant variable z ; de manière que l'expreſſion a^z repréſente tous les nombres poſſibles, en attribuant ſucceſſivement différentes valeurs à l'expoſant z. Il eſt clair,

1°. Que le logarithme de l'unité ſera toujours zero, quelle que ſoit la baſe a. Car en général (60), $a^0 = 1$.

2°. Que le logarithme de la baſe a ſera 1, puiſque (34), a eſt la même choſe que a^1.

3°. Que tous les nombres au-deſſus de 1 auront pour logarithmes des nombres poſitifs. Ainſi, par exemple, en ſuppoſant $a = 10$, le nombre 1000, ou $(10)^3$, a pour logarithme le nombre poſitif 3.

4°. Que tous les nombres au-deſſous de 1 auront pour logarithmes des nombres négatifs. Car, par exemple, en ſuppoſant $a = 10$, le nombre $\frac{1}{1000}$, ou $(10)^{-3}$, a pour logarithme le nombre négatif -3.

428. La même hypothèse subsistant toujours, soient deux nombres N & N', auxquels répondent respectivement les deux logarithmes p & p'. On aura donc $N = a^p$, $N' = a^{p'}$; & par conséquent $N \times N' = a^p \times a^{p'} = a^{p+p'}$. D'où l'on voit que dans tout système de logarithmes, le logarithme $p + p'$ d'un produit $N \times N'$, composé de deux facteurs, est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.

429. Il suit de-là que si l'on a tant de nombres A, B, C, D, qu'on voudra, on aura (en se servant de la lettre initiale l pour désigner un logarithme),

1°. $l.(A \times B \times C \times D) = l.A + l.B + l.C + l.D$. Car supposons $A \times B = N$; nous aurons $l.(A \times B \times C \times D) = l.(N \times C \times D)$. Soit encore $N \times C = N'$; on aura $l.(A \times B \times C \times D) = l.(N' \times D) = l.N' + l.D$. Or, $l.N' = l.(N \times C) = l.N + l.C$, & $l.N = l.(A \times B) = l.A + l.B$. Donc enfin $l.(A \times B \times C \times D) = l.A + l.B + l.C + l.D$. Ainsi le logarithme d'un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.

Donc 2°. Si $A = B = C = D$, on aura $l.(A \times A \times A \times A)$ ou $l.A^4 = 4\,l.A$. En général $l.A^n = n\,l.A$. Par où l'on voit que connoissant le logarithme d'un nombre A, on connoîtra le logarithme d'une puissance quelconque n entière ou rompue de ce nombre, ou bien réciproquement que connoissant le logarithme de la puissance A^n, on connoîtra le logarithme du nombre A.

430. Du même principe, il ſuit que $l. \frac{A}{B} = l. A -$ $l. B$. Car ſoit $\frac{A}{B} = Q$, & par conſéquent $A = B \times Q$: on aura $l. A = l. (B \times Q) = l. B + l. Q$. Donc $l. Q$, ou $l. \frac{A}{B} = l. A - l. B$. Ainſi le logarithme d'une fraction eſt égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur.

Ces propriétés générales renferment tout le fond des uſages qu'on fait des Tables des logarithmes.

431. SUPPOSONS maintenant deux ſyſtêmes de logarithmes dont les baſes ſoient reſpectivement a & b: ſoit un même nombre N qui ait p pour logarithme dans le premier ſyſtême, & q pour le logarithme dans le ſecond. Nous aurons donc les équations $N = a^p$, $N = b^q$. Ainſi $a^p = b^q$, & $b = a^{\frac{p}{q}}$. D'où l'on voit que les nombres a & b étant conſtants & donnés, la fraction exponentielle $\frac{p}{q}$ aura toujours la même valeur, quel que ſoit le nombre N.

432. DE-LA il ſuit que ſi l'on connoît les logarithmes de tous les nombres, pour la baſe a, on trouvera, par une ſimple proportion, les logarithmes de tous les nombres pour la baſe b. Car ſuppoſons, par exemple, $a = 10$, $b = 7$: la valeur de la fraction $\frac{p}{q}$ étant toujours la même, quel que ſoit le nombre dont on conſidére les logarithmes pour les deux ſyſ-

têmes, il eſt clair que ſi pour un nombre particulier on trouve la valeur de cette fraction, on connoîtra en général ſes deux termes p & q lorſque l'un d'eux ſera donné. Or, le nombre 7 nous préſente tout de ſuite la valeur de la fraction $\frac{p}{q}$: car, pour la baſe a, ou 10, le logarithme de 7 eſt 0,845098, & pour la baſe b, ou 7, le logarithme de 7 eſt 1, expoſant de 7^1. Ainſi $\frac{p}{q} = \frac{0,845098}{1}$. Donc $q = \frac{p}{0,845098} = p \times 1,18329$. Telle eſt la valeur générale de q dans l'hypothèſe propoſée. Si donc on cherche le logarithme d'un nombre quelconque dans les Tables ordinaires, qui ont 10 pour baſe logarithmique ; qu'enſuite on multiplie ce logarithme par le nombre conſtant 1,18329 : le produit ſera le logarithme du nombre propoſé, pour un ſyſtême de logarithmes, dont la baſe ſeroit 7.

433. NOUS avons indiqué (Arithm. 259) une méthode pour calculer les logarithmes des nombres qui ne ſont pas compris dans la progreſſion géométrique fondamentale ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : &c. Cette méthode exige de très-longs calculs. En voici une autre incomparablement plus ſimple, fondée ſur les propriétés des ſuites. Elle eſt tirée, à très-peu de choſe près, d'un excellent Ouvrage de M. Euler, qui a pour titre : *Introductio in analyſin infinitorum*, imprimé à Lauſane en 1748.

434. SOIT a la baſe logarithmique, N un nombre

quelconque dont le logarithme eſt ϖ: on aura $N=a^{\varpi}$, & $\varpi=l.N$. Si l'expoſant ϖ étoit zero, on auroit $N=1$. Donc ſi ϖ eſt peu au-deſſus de 0, N ſera peu au-deſſus de 1. Suppoſons donc que ϖ étant une quantité très-petite, on ait $N=1+k\varpi$, expreſſion dans laquelle k eſt un coéfficient indéterminé que j'appelle *nombre régulateur*, parce qu'il régle ou détermine l'eſpéce des logarithmes que l'on conſidére, comme on le verra ci-deſſous. Nous aurons $\varpi=l.(1+k\varpi)$, & $m\varpi=l.(1+k\varpi)^m$, quel que ſoit l'expoſant m. Et comme, à meſure que l'expoſant m ſurpaſſera l'unité, la quantité $(1+k\varpi)^m$ augmentera continuellement, & qu'elle aura par conſéquent pour logarithmes des nombres finis qui augmenteront auſſi continuellement : il faut que m ſoit un nombre infini; ſans quoi le produit $m\varpi$ ne pourroit pas devenir fini, à cauſe du facteur infiniment petit π qu'il renferme.

435. CELA poſé, imaginons qu'on ait $(1+k\varpi)^m = 1+x$; & par conſéquent $1+k\varpi=(1+x)^{\frac{1}{m}}$, $k\varpi=(1+x)^{\frac{1}{m}}-1$, $m\varpi=l.(1+x)$, $\frac{k}{m}=\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{l.(1+x)}$, $l.(1+x)=\frac{m}{k}(1+x)^{\frac{1}{m}}-\frac{m}{k}$. Or (290), $(1+x)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1x}{m}-\frac{1(m-1)x^2}{m\times 2m}$ $+\frac{1(m-1)(2m-1)x^3}{m\times 2m\times 3m}-\frac{1(m-1)(2m-1)(3m-1)x^4}{m\times 2m\times 3m\times 4m}$ $+$ &c. Donc,

$$l.(1+x)=\frac{1}{k}\left(x-\frac{1(m-1)x^2}{2m}+\frac{1(m-1)(2m-1)x^3}{2m\times 3m}-\frac{1(m-1)(2m-1)(3m-1)x^4}{2m\times 3m\times 4m}\right.$$
$$\left.+\&c\right).$$

Donc en ſuppoſant m infini, & obſervant qu'alors $m-1=m$, $2m-1=2m$, $3m-1=3m$, &c, attendu que l'unité doit être conſidérée comme une quantité nulle par rapport au nombre infini m: on aura,

$$l.(1+x)=\frac{1}{k}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c\right).$$

Faiſant x négative, on aura ſemblablement,

$$l.(1-x)=\frac{1}{k}\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\&c\right).$$

Donc, en retranchant cette équation de la précédente, on aura,

$$l.(1+x)-l.(1-x)=\frac{2}{k}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\right.$$
$$\left.+\&c\right).$$

Or, $l.(1+x)-l.(1-x)=l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; on aura donc,

$$\text{(A)}\quad l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{k}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\right.$$
$$\left.\frac{x^7}{7}+\&c\right).$$

Cette équation va nous donner toutes les choſes dont on a beſoin pour calculer les Tables de logarithmes.

436. PUISQUE dans cette équation, il y a deux quantités indéterminées, ſavoir, le nombre régulateur k, & l'inconnue x; ſi nous prenons l'une d'elles à volonté, nous connoîtrons auſſi l'autre. Suppoſons d'abord, $\frac{1+x}{1-x}=a$, & par conſéquent $x=\frac{a-1}{a+1}$. A cauſe de $l.\ a=1$, l'équation (A) deviendra,

$$1=\frac{2}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\&c\right).$$

D'où l'on tire,

$$(B)\quad k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\&c\right).$$

Ainſi la baſe a étant donnée, on connoîtra le nombre régulateur k, par une ſérie qui eſt toujours convergente.

437. RÉCIPROQUEMENT, le nombre k étant donné, on peut calculer la baſe a. Cette opération s'exécute par le retour des ſuites. Suppoſons $\frac{a-1}{a+1}=y$, & feignons qu'on ait,

$$y=Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+Ek^5+\&c.$$

En mettant dans l'équation (B), pour y, y^3, y^5, &c, leurs valeurs réſultantes de celle-ci, & tranſpoſant tout d'un même côté, on trouvera (382), $A=\frac{1}{2}$, $B=0$, $C=-\frac{1}{24}$, $D=0$, $E=\frac{1}{240}$, &c. Donc,

$$(C) \quad y = k\left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{24} + \frac{k^4}{240} - \&c\right),$$

ſérie qui ſera convergente, pourvu que k ſoit un petit nombre. Connoiſſant y, on aura auſſi a, puiſque $a = \frac{1+y}{1-y}$.

Si on vouloit avoir immédiatement a par une ſuite infinie, on convertiroit (381) la fraction $\frac{1+y}{1-y}$ en une ſuite infinie qui marchât ſuivant les puiſſances de y, & on trouveroit $\frac{1+y}{1-y} = 1 + 2y + 2y^2 + 2y^3 + 2y^4 + \&c$. Donc, en ſubſtituant dans le ſecond membre, pour y, y^2, y^3, y^4, &c, leurs valeurs réſultantes de la ſuite (C), on trouveroit,

$$\frac{1+y}{1-y}, \text{ ou } a = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2 \times 3} + \&c.$$

Mais cette ſérie a l'inconvénient de ne converger qu'en prenant pour k un nombre < 1, ou qui du moins avoiſine extrêmement l'unité.

438. Les deux quantités a & k étant ainſi liées par une dépendance réciproque, auſſi-tôt que l'une ſera donnée, nous connoîtrons l'autre. Si vous prenez, par exemple, $a = 10$, vous trouverez $k = 2{,}302585$; & ſi vous prenez $k = 1$, vous trouverez $a = 2{,}718282$. La première ſuppoſition eſt celle des Tables ordinaires, où la baſe logarithmique eſt 10. La ſeconde ſuppoſition donne des logarithmes qu'on appelle *hy-*

perboliques, parce qu'ils servent à determiner la superficie d'une courbe qu'on nomme *hyperbole*.

439. En supposant le nombre régulateur $k=1$, l'équation (A) qui se rapporte alors au systême des logarithmes hyperboliques, devient,

$$l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\&c.$$

D'où l'on voit qu'en prenant x convenablement, on pourra trouver le logarithme hyperbolique de la quantité $\frac{1+x}{1-x}$, par une série très-convergente. Prenez, par exemple, successivement, $\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{1}$, $\frac{1+x}{1-x}=\frac{3}{2}$, $\frac{1+x}{1-x}=\frac{4}{3}$, & en général $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n}{n-1}$: vous aurez $x=\frac{1}{2n-1}$, & $l.\left(\frac{n}{n-1}\right)=\frac{2}{2n-1}\times$ $\left(1+\frac{1}{3(2n-1)^2}+\frac{1}{5(2n-1)^4}+\frac{1}{7(2n-1)^6}+\&c\right)$, série très-convergente, dont il suffira par conséquent de prendre un certain nombre de termes du commencement, pour avoir, à très-peu de chose près, le logarithme hyperbolique de la fraction $\frac{1}{n-1}$.

440. Rien n'est plus facile maintenant que de calculer les logarithmes hyperboliques de tous les nombres possibles. Car d'abord (427) le logarithme de 1 est 0. Le logarithme du nombre 2 se trouve par la formule précédente, en supposant $n=2$. Les loga-

rithmes des fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, se trouvent par la même formule, en faisant successivement $n=3$, $n=4$, $n=5$, &c. Cela posé, il faut (430), pour avoir le logarithme du nombre 3, ajouter au logarithme de la fraction $\frac{3}{2}$, le logarithme du dénominateur 2; pour avoir le logarithme du nombre 4, ajouter au logarithme de la fraction $\frac{4}{3}$, celui du dénominateur 3; ainsi de suite.

441. Les logarithmes hyperboliques étant ainsi trouvés, les logarithmes des Tables ordinaires s'en tireront par un calcul très-expéditif. Car prenons un nombre quelconque dont le logarithme hyperbolique soit q, & le logarithme des Tables soit p. La valeur de la fraction $\frac{p}{q}$ sera toujours la même (431), quel que soit le nombre en question. En supposant que ce nombre soit 10, son logarithme hyperbolique, calculé par la formule de l'article précédent, est 2,302585; & son logarithme, pour la base logarithmique des Tables ordinaires, est 1. Nous aurons donc $\frac{p}{q} = \frac{1}{2,302585}$, fraction constante. Donc $p = \frac{q}{2,302585} = q \times 0,434294$. Ainsi, pour avoir les logarithmes des Tables ordinaires, il faut multiplier chacun des logarithmes hyperboliques, par la quantité constante 0,434294. Cette quantité s'appelle le *module* des Tables.

Réciproquement pour réduire les logarithmes hyperboliques aux logarithmes des Tables ordinaires, il faudra multiplier ceux-ci par 2,302585.

On fait un fréquent usage des logarithmes hyperboliques dans le calcul intégral : ils se réduiront en logarithmes ordinaires par le moyen que nous venons d'indiquer.

442. APRÈS avoir enseigné la manière de trouver le logarithme d'un nombre donné, il nous reste encore à résoudre le problême inverse, c'est-à dire, à trouver le nombre lorsque le logarithme est donné.

On a trouvé (435), $l.(1+x)=\frac{1}{k}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}+\&c\right)$. Supposons $l.(1+x)=h$, & feignons qu'on ait,

$$x=Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4+\&c.$$

En mettant dans l'équation précédente, pour x, x^2, x^3, &c, leurs valeurs qui résultent de celle-ci, & transposant tout d'un même côté, on trouvera (384), $A=k$, $B=\frac{k^2}{1\times2}$, $C=\frac{k^3}{1\times2\times3}$, $D=\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}$, &c. Donc,

$$x=kh+\frac{k^2h^2}{2}+\frac{k^3h^3}{6}+\frac{k^4h^4}{24}+\&c.$$

Ainsi, en faisant le nombre $1+x=n$, on aura, $n=1+k(l.\,n)+\frac{k^2(l.\,n)^2}{2}+\frac{k^3(l.\,n)^3}{6}+\frac{k^4(l.\,n.)^4}{24}+\&c.$

Si, pour rapporter cette formule aux logarithmes hyperboliques, on fait $k=1$, on aura,

$$n=1+l.n+\frac{(l.n)^2}{2}+\frac{(l.n)^3}{6}+\frac{(l.n)^4}{24}+ \&c.$$

Si on veut déterminer, au moyen de cette dernière suite, la base des logarithmes hyperboliques, c'est-à-dire, le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, il faudra faire $l.n=1$; & alors on aura,

$$n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+ \&c.$$

D'où l'on tire $n=2{,}718282$, à peu près.

FIN.

EXTRAIT des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 30 Août 1773.

MESSIEURS D'ALEMBERT, & VANDERMONDE, qui avoient été nommés par l'Académie pour examiner un Ouvrage intitulé : *Traité élémentaire d'Algèbre*, par M. l'Abbé BOSSUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne d'être imprimé sous son Privilége. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 30 Août 1773.

GRANDJEAN DE FOUCHY,

Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

THÉORIE ABRÉGÉE

DES NOMBRES PREMIERS;

Par M. DE LA PLACE, *de l'Académie Royale des Sciences.*

LA théorie des nombres mérite toute l'attention des Géometres, par la finesse & par la profondeur des combinaisons qu'elle exige. Fermat, l'un des plus grands Mathématiciens que la France ait produits, l'a cultivée avec le plus heureux succès dans le dernier siecle. Il nous a laissé plusieurs beaux Théoremes sur les nombres, dont il avoit les démonstrations, & il promettoit de les donner dans un grand ouvrage qu'il avoit annoncé sur cette matière ; mais soit que la mort l'ait surpris avant qu'il ait pû le mettre au jour, soit que d'autres occupations l'en ayent empêché, cet ouvrage n'a jamais paru, & dans tout ce qui nous reste des écrits de cet illustre Auteur, on ne voit aucune trace de ces démonstrations. Elles ont été restituées en grande partie par MM. Euler & de la Grange : leurs savantes recherches sur cet objet & sur l'analyse indéterminée, répandues dans les Mémoires de Berlin & de Pétersbourg, sont une partie précieuse de ces Mémoires. Si la démonstration de quelques-uns des Théorêmes énoncés par Fermat s'est jusqu'ici refusée à leurs efforts, ils nous ont mis ſur la voie d'y parvenir, & il eſt très-vraiſemblable qu'en ſuivant la route qu'ils ont tracée, les Géometres de ce ſiecle n'auront rien à envier ſur cette matière aux Géometres du ſiecle paſſé.

Comme cette théorie eſt encore peu connue, & que d'ailleurs elle eſt éparſe dans un grand nombre de volumes, je me propoſe ici d'en raſſembler les principaux réſultats. Les bornes de cet écrit m'obligent d'en ſupprimer un grand nombre de très-curieux, & de me reſtreindre à la théorie des nombres premiers. Je vais faire en ſorte de la préſenter de la manière la plus ſimple & la plus générale qu'il me ſera poſſible.

I. ON appelle *nombre premier* tout nombre qui n'a d'autres diviſeurs que lui-même & l'unité ; tels ſont les nombres 1, 2, 3, 5, 7, &c. Ainſi tous les nombres premiers ſont impairs, excepté 2 ; car tout nombre pair eſt diviſible par 2.

Un nombre qui n'eſt pas *premier* eſt compoſé du produit des nombres premiers multipliés les uns par les autres, ou par eux-mêmes ; en ſorte que ſi p, p', p'' &c, repréſentent des nombres premiers quelconques, & μ, μ', μ'' &c, des nombres entiers poſitifs : tout nombre compoſé eſt compris dans la formule générale, $p^{\mu}. p'^{\mu'}. p''^{\mu''}$ &c.

L'exiſtence des nombres premiers eſt indépendante de tout ſyſtême de numération ; les Géometres ſe ſont beaucoup exercés à chercher la loi qu'ils obſervent dans la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c ; mais on n'a pu y parvenir encore.

Les nombres premiers ſont en nombre infini. Pour le démontrer, ſuppoſons que cela ne ſoit pas, qu'il n'y ait par conſéquent qu'un nombre fini de nombres premiers, & que p ſoit le plus grand de ces nombres; ſoient p', p'', p''', &c, tous les nombres premiers inférieurs; ſi l'on ajoute l'unité au produit $1.2.3.5\ldots.p''.p'.p$, de tous les nombres premiers, on aura $1.2.3.5\ldots.p'.p+1$, ce nombre étant plus grand que p, ſera par l'hypothèſe un nombre composé; il ſera donc diviſible par un nombre premier plus grand que l'unité. Or cela ne peut être, car le produit $1.2.3\ldots p'.p$, étant diviſible par ce nombre premier, il eſt clair que $1.2.3\ldots.p'.p+1$, diviſé par ce même nombre, doit laiſſer l'unité pour reſte de la diviſion; on voit donc que l'hypothèſe d'un nombre fini de nombres premiers implique contradiction.

Mais s'il exiſte un nombre infini de nombres premiers, il en exiſte infiniment moins que de nombres compoſés; car les nombres premiers & leurs différentes puiſſances pouvant être combinées par la voie de la multiplication d'une infinité de manières différentes, il eſt viſible que le rapport des nombres compoſés aux nombres premiers eſt infiniment grand.

Voici maintenant une petite table qui embraſſe tous les nombres premiers au-deſſous de 500; ſi l'on en deſire une plus étendue, on pourra conſulter le tome treizième de l'Encyclopédie, à la fin.

Table des nombres premiers au-dessous de 500.

1	2	3	5	7	11
13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59
61	67	71	73	79	83
89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149
151	157	163	167	173	179
181	191	193	197	199	211
223	227	229	233	239	241
251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313
317	331	337	347	349	353
359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431
433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499

Si l'on n'a pas réussi à déterminer la loi des nombres premiers, on a du moins trouvé plusieurs beaux Théorêmes sur ces nombres ; nous allons démontrer ici les plus remarquables, mais pour cela il est nécessaire d'établir quelques propositions préliminaires sur les diviseurs des nombres, & sur les différences finies. Nous observerons ici que dans les calculs suivants, les lettres désigneront des nombres entiers positifs ou négatifs.

II. DEUX ou plusieurs nombres sont premiers entr'eux, lorsqu'ils n'ont d'autre commun diviseur que l'unité ; tels sont entr'eux 8 & 15, ou 9, 18 & 20.

$\frac{a}{b}$ étant un nombre entier, ou ce qui revient au même, a étant divisible par b; si p est un nombre premier qui divise a, sans diviser b, p divisera le quotient de a par b ; car soit m ce quotient, on aura, $a = mb$, donc p divisant a, divisera $m b$, & puisqu'il ne divise point b, il divisera m.

m étant premier à n, à p, à q, &c, n étant pareillement premier à p, à q, &c, p l'étant encore à q, &c, & ainsi de suite ; si chacun des nombres m, n, p, q, &c, divise le nombre a, leur produit $mnpq$ &c, divisera pareillement ce nombre ; car a étant divisible par m, si l'on nomme a' le quotient de la division, on aura $a = ma'$; donc n divisant a, divisera ma', & puisqu'il est premier à m, il divisera a' ; soit a'' le quotient de la division, on aura $a' = na''$; donc $a = ma' = mna''$; donc p, divisant a, divisera mna'', & puisqu'il est premier à m & à n, il divisera a''. Soit a''', le quotient de la division, on aura $a'' = pa'''$; donc $a = mna'' = mnp.a'''$, & ainsi de suite, d'où l'on voit que a est divisible par le produit mnp &c, des nombres m, n, p, &c.

p & q étant deux nombres premiers entr'eux, l'équation $a = pu + qz$. est toujours résoluble en prenant

nant pour les indéterminées u & z, des nombres entiers positifs ou négatifs. (Traité précéd. n°. 191).

III. x & y étant premiers entr'eux, supposons que p soit un diviseur de x^2+ay^2, a étant un nombre quelconque entier positif ou négatif ; si l'on nomme q le quotient de la division, on aura $pq=x^2+ay^2$; or y & q sont premiers entr'eux, car s'ils avoient un commun diviseur β, il est clair que le premier membre de l'équation $pq-ay^2=x^2$ étant divisible par β, le second membre x^2 le seroit pareillement, x^2 & y^2 seroient donc divisibles par β, ce qui ne peut être, x & y étant premiers entr'eux ; il suit delà (art. précéd.) que l'équation $x=qy'+ny$ est possible en nombres entiers, en regardant ici y' & n comme indéterminées ; substituant donc au lieu de x cette valeur dans l'équation $pq=x^2+ay^2$, on aura $pq=q^2y'^2+2\,qnyy'+(n^2+a).y^2$; donc $p=qy'^2+2nyy'+\left(\frac{n^2+a}{q}\right).y^2$; ou $p-qy'^2-2\,nyy'=\left(\frac{n^2+a}{q}\right).y^2$; le premier membre de cette équation étant un nombre entier ; le second doit pareillement l'être : ainsi $(n^2+a).y^2$ est divisible par q ; or y & q étant premiers entr'eux, il est clair que cette division n'est pas possible à moins que q ne divise n^2+a ; soit donc l le quotient de cette division, on aura $p=qy'^2+2\,nyy'+ly^2$.

On peut observer dans cette équation, 1°. que y & y' sont premiers entr'eux ; car s'ils avoient un commun diviseur β, le second membre de l'équation $x=qy'+ny$ étant divisible par β, le premier membre x seroit pareillement divisible par ce nombre ; donc y & x seroient divisibles l'un & l'autre par $\mathfrak{C}$, ce qui ne peut être, ces deux nombres étant premiers entr'eux ; 2°. que $lq - n^2 = a$, puisqu'on a $l = \frac{n^2 + a}{q}$.

Si dans l'équation $p = qy'^2 + 2nyy' + ly^2$, le coéfficient $2n$ du terme du milieu du second membre est plus grand que l'un ou l'autre des coéfficients extrêmes q ou l, par exemple, que l, en faisant abstraction des signes, c'est-à-dire, en prenant n & l positivement ; soit $y = y'' + my'$, & l'on aura $p = ly''^2 + (2ml + 2n).y'y'' + (m^2l + 2nm + q)y'^2$. Or il est toujours possible de prendre m de manière, qu'abstraction faite des signes, le coéfficient $2ml + 2n$ du terme du milieu soit moindre ou non plus grand que l ; car en divisant $2n$ par l, autant que cela est possible, si l'on nomme h le quotient de la division, & r le reste, r étant moindre que l, on aura $2n = hl + r$, donc $2n - hl = r$; si h est un nombre pair, on fera $m = -\frac{h}{2}$, & l'on aura $2ml + 2n = -hl + 2n = r$, quantité qui, abstraction faite du signe, est moindre que l ; si h est impair, on fera $m = -\frac{h+1}{2}$, & l'on aura $2ml + 2n = -hl - l + 2n = r - l$, quantité non plus grande que l, si r & l sont de même signe, mais s'ils sont de signes contraires, on fera $m = -\frac{h-1}{2}$, & l'on aura $2ml + 2n = -hl + l + 2n = r + l$; or $r + l$, abstraction faite du signe, est moindre ou non plus grand que l, lorſque r & l ſont de ſignes contraires ; on peut donc toujours réduire $2ml + 2n$ à être moindre ou non plus grand que l, abſtraction faite des ſignes. Soit donc $2ml + 2n = 2n'$, & $m^2l + 2nm + q = q'$, on aura $p = ly''^2 + 2n'.yy' + q'y'^2$. On peut obſerver dans cette équation ; 1°. que $2n'$ étant moindre ou non plus grand que l, abſtraction faite des ſignes, eſt moindre que $2n$, & par conſéquent que n' eſt moindre que n ; 2°. que $lq' - n'^2 = l(m^2l + 2nm + q) - (ml + n)^2 = lq - n^2 = a$; 3°. que y' & y'' ſont premiers entr'eux, car s'ils avoient un commun diviſeur ζ, il eſt clair qu'à cauſe de $y = y'' + my'$, y & y' ſeroient diviſibles par ζ, ce qui ne peut être, ces deux nombres étant premiers entr'eux.

Si dans l'équation $p = ly''^2 + 2n'y'y'' + q'.y'^2$, $2n'$ eſt plus grand que q', abſtraction faite des ſignes, on prouvera par un raiſonnement ſemblable qu'on peut changer cette expreſſion p dans celle ci $p = l'y''^2 + 2n''y''y''' + q'.y'''^2$, dans laquelle 1°. n'' ſera moindre que n', abſtraction faite du ſigne ; 2°. on aura $l'q' - n''^2 = a$; 3°. y'' & y''' ſeront premiers entr'eux. On pourra continuer ce raiſonnement tant que le coéfficient du terme du milieu de l'expreſſion de p ſurpaſſera l'un ou l'autre des deux coéfficients extrêmes. Mais la ſuite des nombres entiers n, n', n'', &c, moindres les uns que les autres, abſtraction faite des ſignes, ne pouvant aller à l'infini, il eſt viſible qu'on arrivera à une valeur de p de cette forme $p = hs^2 + 2nsu + lu^2$, dans laquelle 1°. $2n$ ne ſera pas, abſtraction faite des ſignes, plus grand que h ni plus grand que l ; 2° on aura $hl - n^2 = a$;

3°. s & u seront premiers entr'eux, h, l & n étant d'ailleurs des nombres quelconques entiers positifs, ou négatifs, ou zero.

IV. Si dans la formule x^2+ay^2, a est positif, l'équation $hl-n^2=a$ ne peut subsister à moins que h & l ne soient de même signe ; de plus, h & l n'étant pas moindres l'un & l'autre que $2n$, hl ne sera pas moindre que $4n^2$; donc $hl-n^2$ sera égal ou plus grand que $3n^2$; or $hl-n^2=a$, donc a sera égal ou plus grand que $3n^2$, ou ce qui revient au même, $3n^2$ sera égal ou moindre que a ; partant n sera, abstraction faite du signe, égal ou moindre que $\sqrt{\frac{a}{3}}$. Cela posé,

Si $a=1$, on aura, abstraction faite du signe, n égal ou moindre que $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Donc n exprimant un nombre entier ou zero, on a $n=0$, & l'équation $p=hs^2+2nsu+lu^2$ devient $p=hs^2+lu^2$; mais l'équation $hl-n^2=a$ donne $hl=1$, donc $h=\pm 1$ & $l=\pm 1$, partant $p=hs^2+lu^2=\pm(s^2+u^2)$, ou $p=s^2+u^2$, en ne prenant pour p que des nombres positifs. Il suit de-là que tous les diviseurs de la somme x^2+y^2 de deux quarrés premiers entr'eux sont pareillement la somme de deux quarrés premiers entr'eux.

Si $a=2$, on aura, abstraction faite du signe, n égal ou moindre que $\sqrt{\frac{2}{3}}$; donc $n=0$, & par conséquent $p=hs^2+lu^2$; mais l'équation $hl-n^2=a$ donne $hl=2$: donc $h=\pm 1$; & $l=\pm 2$, ou $h=\pm 2$, & $l=\pm 1$, partant $p=\pm(s^2+2u^2)$, ou $p=\pm(2s^2+u^2)$: or ces deux formes de diviſeurs ſont viſiblement identiques. Ainſi en n'admettant pour p que des nombres poſitifs, on aura $p = s^2 + 2u^2$; d'où il ſuit que les diviſeurs des nombres de la forme $x^2 + 2y^2$ ſont de la même forme.

Si $a = 3$, on aura, abſtraction faite du ſigne, n égal ou moindre que $\sqrt{\frac{3}{3}}$, ou que l'unité; donc n eſt zero ou égal à ± 1. Dans le premier cas, on a $p = hs^2 + lu^2$, & l'équation $hl - n^2 = a$ donne $hl = 3$, donc $h = \pm 1$, & $l = \pm 3$, ou $h = \pm 3$, & $l = \pm 1$; partant $p = \pm (s^2 + 3u^2)$, ou $p = \pm (3s^2 + u^2)$: or ces deux formes ſont viſiblement identiques, d'où il ſuit qu'en ne prenant pour p que des nombres poſitifs, on aura $p = s^2 + 3u^2$.

Dans le ſecond cas, c'eſt-à-dire, ſi $n = \pm 1$, on a $p = hs^2 \pm 2su + lu^2$, & l'équation $hl - n^2 = a$ donne $hl = 4$, donc $h = \pm 1$, & $l = \pm 4$, ou $h = \pm 4$, & $l = \pm 1$, ou enfin $h = \pm 2$, & $l = \pm 2$; mais les équations $h = \pm 1$, & $l = \pm 4$, ou $l = \pm 1$, & $h = \pm 4$, donnent h ou l moindres que $2n$, abſtraction faite du ſigne; elles doivent donc être rejettées par l'art. précéd. De ſorte qu'on aura $h = \pm 2$, & $l = \pm 2$, mais alors p ſera un nombre pair, d'où il ſuit que tous les diviſeurs impairs de $x^2 + 3y^2$ ſont de la forme $s^2 + 3u^2$, c'eſt-à-dire de la même forme. En faiſant ſucceſſivement $a = 4$, $a = 5$, $a = 6$, &c. on trouvera de cette manière toutes les formes dont les diviſeurs de $x^2 + ay^2$ ſont ſuſceptibles dans ces différentes ſuppoſitions.

V. Si a eſt négatif & égal à $-b$, l'équation $hl -$

$n^2 = a$ donnera $-hl + n^2 = b$; or h & l n'étant pas moindres l'un & l'autre que $2n$, abſtraction faite des ſignes, hl ne ſera pas moindre que $4n^2$; donc ſuivant que hl ſera négatif ou poſitif, $-hl + n^2$ ſera poſitif ou négatif; or $-hl + n^2$ eſt égal à la quantité poſitive b; partant hl eſt négatif, d'où il ſuit que h & l ſont de ſignes contraires : donc $-hl + n^2$, & par conſéquent b, eſt égal ou plus grand que $5n^2$, partant, abſtraction faite des ſignes, n eſt égal ou moindre que $\sqrt{\frac{b}{5}}$.

On peut obſerver ici que les diviſeurs de $x^2 - by^2$ ſont préciſément les mêmes que ceux de $by^2 - x^2$, parce que toute quantité qui diviſe $x^2 - by^2$ diviſe pareillement $by^2 - x^2$, & que d'ailleurs les raiſonnements précédents ont également lieu, $x^2 - by^2$ étant poſitif ou négatif. Cela poſé, ſi $b = 1$, on aura, abſtraction faite du ſigne, n égal ou moindre que $\sqrt{\frac{1}{5}}$: donc $n = 0$, & $p = hs^2 + lu^2$; mais l'équation $-hl + n^2 = b$ donne $-hl = 1$, donc $h = \pm 1$, & $l = \mp 1$, partant $p = s^2 - u^2$, ou $p = u^2 - s^2$: or ces deux formes ſont viſiblement identiques ; ainſi les diviſeurs des nombres de la forme $x^2 - y^2$ ſont de la même forme.

Si $b = 2$, on aura, abſtraction faite du ſigne, n égal ou moindre que $\sqrt{\frac{2}{5}}$; donc $n = 0$, & $p = hs^2 + lu^2$; mais l'équation $-hl + n^2 = b$ donne $-hl = 2$: donc $h = \pm 1$, & $l = \mp 2$, ou $h = \pm 2$, & $l = \mp 1$; partant $p = \pm (s^2 - 2u^2)$, ou $p = \pm (2s^2 - u^2)$, ces deux formes ſont viſiblement identiques ; ainſi toutes les formes dont p eſt ſuſceptible ſont compriſes dans l'équation $p = \pm (s^2 - 2u^2)$, d'où l'on tire $p = s^2 - 2u^2$, & $p = 2u^2 - s^2$; mais il eſt aiſé de faire rentrer l'une dans l'autre ces deux formes de p, car ſi l'on fait $u' = s - u$, & $s' = 2u - s$, on aura $s = 2u' + s'$, & $u = s' + u'$: $s^2 - 2u^2$ deviendra donc $2u'^2 - s'^2$. Ainſi la forme $s^2 - 2u^2$ eſt réductible à celle-ci $2u^2 - s^2$; donc tous les diviſeurs des nombres de la forme $x^2 - 2y^2$, ou $2y^2 - x^2$ ſont de la forme $2u^2 - s^2$.

Nous ne pouſſerons pas plus loin la recherche des diviſeurs des nombres de la forme $x^2 + ay^2$; ceux qui deſireront un plus grand détail, pourront conſulter un très-beau Mémoire que M. de la Grange vient de faire imprimer dans le volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1773, & dont nous avons extrait l'ingénieuſe méthode que nous venons d'expoſer.

VI. Si l'on repréſente par y une fonction quelconque de x, par y' ce que devient cette fonction lorſque x croît d'une unité, par y'', y''', &c, ce qu'elle devient lorſque x croît de deux, de trois, &c, unités ; $y' - y$ ſera *la différence première finie*, ou ſimplement *la différence finie* de y, en ſorte que ſi l'on déſigne par la caractériſtique Δ la différence finie d'une quantité, on aura $\Delta . y = y' - y$.

Si l'on ſuppoſe dans les deux membres de cette équation, x croître d'une unité, elle ſe changera dans la ſuivante, $\Delta . y' = y'' - y'$, & ſi on la ſouſtrait de celle-ci, on aura $\Delta . y' - \Delta . y = y'' - 2y' + y$; $\Delta . y' - \Delta . y$ eſt, par ce qui vient d'être dit, la différence finie de $\Delta . y$: or la différence de la différence de y eſt ce qu'on nomme *différence ſeconde* ; déſignant donc par $\Delta^2 . y$

cette ſeconde différence, on aura $\Delta^2.y = y'' - 2y' + y$.

Si l'on ſuppoſe dans les deux membres de cette dernière équation, x croître d'une unité, on aura $\Delta^2.y' = y''' - 2y'' + y'$, & ſi on la ſouſtrait de celle-ci, on aura $\Delta^2.y' - \Delta^2.y = y''' - 3y'' + 3y' - y$; $\Delta^2.y' - \Delta\ .y$ eſt la différence finie de $\Delta^2.y$: or la différence de la différence ſeconde de y eſt ce qu'on nomme *différence troiſième ;* déſignant donc par $\Delta^3.y$, cette troiſième différence, on aura $\Delta^3.y = y''' - 3y'' + 3y' - y$.

Si l'on déſigne pareillement par $\Delta^4.y$ la différence de la différence troiſième, ou, ce qui revient au même, *la différence quatrième de y*, on aura $\Delta^4.y = \Delta^3.y' - \Delta^3.y$; $\Delta^5.y = \Delta^4.y' - \Delta^4.y$, &c; & il ſera par ce qui précéde, facile d'avoir les valeurs ſucceſſives de $\Delta^4.y$, $\Delta^5.y$, &c; car l'équation $\Delta^3.y = y''' - 3y'' + 3y' - y$ donne $\Delta^3.y' = y'''' - 3y''' + 3y'' - y'$; donc $\Delta^3.y' - \Delta^3.y = \Delta^4.y = y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y$; on aura ſemblablement les valeurs de $\Delta^5.y$, $\Delta^6.y$, &c.

Si l'on obſerve la loi de ces différentes valeurs, on voit que les coéfficients des y ſont ceux des termes du binome $1 - x$ élevé ſucceſſivement à la première, ſeconde, troiſième, &c puiſſances ; on s'en aſſurera d'une manière directe & rigoureuſe, en conſidérant d'un côté la manière dont ſe forment les termes du binome élevé à ſes différentes puiſſances, & de l'autre côté, celle dont ſe forment les termes des différences ſucceſſives de y ; en effet on a

$$(1-x)^1 = 1-x$$

$$(1-x)^2 = (1-x)(1-x) = \begin{array}{l} 1-x \\ -x+x^2 \end{array} = 1-2x+x^2$$

$$(1-x)^3 = (1-2x+x^2).(1-x) = \begin{array}{l} 1-2x+x^2 \\ -x+2x^2-x^3 \end{array} = 1-3x+3x^2-x^3$$

$$(1-x)^4 = (1-3x+3x^2-x^3).(1-x) = \begin{array}{l} 1-3x+3x^2-x^3 \\ -x+3x^2-3x^3+x^4 \end{array} = 1-4x+6x^2-4x^3+x^4$$

&c.

On a pareillement

$$\Delta.y = y' - y$$

$$\Delta^2.y = \Delta.y' - \Delta.y = \begin{array}{l} y'' - y' \\ -y' + y \end{array} = y'' - 2y' + y$$

$$\Delta^3.y = \Delta^2.y' - \Delta^2.y = \begin{array}{l} y''' - 2y'' + y' \\ -y'' + 2y' - y \end{array} = y''' - 3y'' + 3y' - y$$

$$\Delta^4.y = \Delta^3.y' - \Delta^3.y = \begin{array}{l} y'''' - 3y''' + 3y'' - y' \\ -y''' + 3y'' - 3y' + y \end{array} = y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y$$

&c;

ce qui montre évidemment que les coéfficients des y ſont formés de la même manière que ceux des termes du binome $1-x$, élevé à la puiſſance indiquée par le degré de la différence de y; on aura donc, en vertu de la loi connue des termes du binome,

$$\Delta^n y = y^n - n.y^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.y^{n-2} - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.y^{n-3} + \&c \quad (A);$$

où l'on doit obſerver que les quantités y^n, y^{n-1}, &c, ne déſignent point des puiſſances de y, mais ce que devient y, lorſqu'on y ſuppoſe x devenir $x+n$, $x+n-1$, &c.

Soit $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \&c \ldots\ldots +$ $fx+h$, n étant un nombre entier poſitif; la différence finie de $ax^n + bx^{n-1} + \&c$, eſt du degré $n-1$, par rapport à x, car cette différence eſt $a(x+1)^n - ax^n + b(x+1)^n - bx^n + \&c$; or on a $(x+1)^n = x^n + n.x^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.x^{n-2} + \&c$, $(x+1)^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \&c$; ſubſtituant donc, au lieu des puiſſances de $x+1$ leurs valeurs, la différence précédente deviendra,

$$nax^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.ax^{n-2} + \&c,$$
$$+ (n-1).bx^{n-2} + \&c;$$

quantité dans laquelle la plus haute puiſſance de x, eſt $n-1$.

Il ſuit de-là que la différence de cette première différence, ou la ſeconde différence de y, eſt du degré $n-2$ par rapport à x; & ſi l'on prend la différence de cette ſeconde différence, on aura pour la troiſième différence une quantité du degré $n-3$, & ainſi de ſuite; en ſorte que dans la différence $r^{ième}$ de $ax^n + bx^{n-1} + \&c$, la plus haute puiſſance de x eſt $n-r$; ſi $r=n$, on aura $n-r=0$, ce qui montre que dans la différence $n^{ième}$ de $ax^n + bx^{n-1} + \&c$, x ne ſe rencontre plus, & qu'ainſi cette différence eſt conſtante; les différences ſuivantes ſont par conſéquent égales à zero, & l'on a $\Delta^q.(ax^n + bx^{n-1} + \&c) = 0$, lorſque q eſt plus grand que n.

De-là il réſulte que $\Delta^n(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \&c) = \Delta^n.(ax^n)$, car on a $\Delta^n.(bx^{n-1} + cx^{n-2} + \&c) = 0$.

Maintenant, $\Delta(ax^n) = a(x+1)^n - ax^n = nax^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.ax^{n-2} + \&c$; or, si l'on prend la différence $(n-1)^{ième}$ de cette équation, on a $\Delta^n(ax^n) = \Delta^{n-1}.\left\{nax^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.ax^{n-2} + \&c\right\}$; mais on a $\Delta^{n-1}.\left\{\frac{n.(n-1)}{1.2}.ax^{n-2} + \&c\right\} = 0$; donc $\Delta^n(ax^n) = \Delta^{n-1}.(nax^{n-1})$.

Si dans cette équation on change a dans na, & n dans $n-1$, elle donnera $\Delta^{n-1}.(nax^{n-1}) = \Delta^{n-2}.[n.(n-1).ax^{n-2}]$; on aura semblablement, en changeant dans cette équation a dans na, & n dans $n-1$, $\Delta^{n-2}[n.(n-1).ax^{n-2}] = \Delta^{n-3}[n.(n-1).(n-2).ax^{n-3}]$; en changeant encore dans cette équation a dans na, & n dans $n-1$, on aura $\Delta^{n-3}.[n.(n-1).(n-2).a.x^{n-3}] = \Delta^{n-4}.[n.(n-1).(n-2).(n-3).a.x^{n-4}]$, & ainsi de suite ; on aura donc, en continuant ainsi, $\Delta^n.(ax^n) = \Delta.[n.(n-1).(n-2).....2.ax] = 1.2.3......na(x+1) - 1.2.3....nax = 1.2.3.....na$; donc

$$\Delta^n.[ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}...... + fx + h] = 1.2.3.....na ;$$

mais si l'on suppose $y = ax^n + bx^{n-1} + \&c$, l'équation (A) donne

$$\Delta^n.[ax^n + bx^{n-1} + \&c] = y^n - n.y^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.y^{n-2} - \&c.$$ Donc

(au sens du VI

$y^n - n.y^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.y^{n-2} - \&c = 1.2.3$
$\ldots\ldots na$ (B);

& cette équation a lieu quel que ſoit x.

Ces recherches ſur les diviſeurs des nombres & ſur les différences finies, étant poſées, nous allons entrer en matière.

VII. p *étant un nombre premier quelconque, ſi* a *n'eſt pas diviſible par* p, *la quantité* $a^{p-1} - 1$ *eſt diviſible par* p *quel que ſoit* a.

Il eſt facile de s'aſſurer de la vérité de ce théorême ſur des exemples particuliers. Soit, par exemple, $a = 3$, & $p = 5$, on aura $a^{p-1} - 1 = 3^4 - 1 = 80$; or, ce nombre eſt diviſible par 5. Soit encore $a = 8$, & $p = 3$, on aura $a^{p-1} = 8^2 - 1 = 63$; or, ce nombre peut ſe diviſer par 3; ſi l'on applique à tel autre exemple que l'on voudra ce théorême, on le trouvera toujours vrai, mais en voici une démonſtration rigoureuſe.

Suppoſons d'abord a moindre que p, on a $a^{p-1} = \frac{a^p}{a} = \frac{1}{a}.(a-1+1)^p = \frac{1}{a}.[(a-1)^p + p.(a-1)^{p-1} + \frac{p.(p-1)}{1.2}.(a-1)^{p-2} + \&c. \ldots \ldots + \frac{p.(p-1)\ldots\ldots.2}{1.2.3\ldots.p-1}.(a-1)+1]$. Les coéfficients p, $\frac{p.(p-1)}{1.2}$, $\frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3}$, &c, ſont, comme l'on ſait, des nombres entiers, & puiſque leurs numérateurs ſont diviſibles par p, leurs dénominateurs ne l'étant pas, chacun de ces coéfficients eſt (art. II) diviſible par p; donc tous les termes de la quantité $p.(a-1)^{p-1} + \frac{p.(p-1)}{1.2}.(a-1)^{p-2}$ $+ \&c.\ldots + \frac{p(p-1)\ldots 2}{1.2.3\ldots(p-1)}.(a-1)$, ſont diviſibles par p; & comme ces mêmes termes ſont diviſibles par $a-1$, on peut repréſenter cette quantité par $h.(a-1).p$, h étant un nombre entier : on aura ainſi $a^{p-1} = \frac{1}{a}.[(a-1)^p + 1 + hp(a-1)]$; donc $a^{p-1} - 1 = \frac{1}{a}.[(a-1)^p + 1 - a +$ $hp(a-1)] = \frac{a-1}{a}.[(a-1)^{p-1} - 1 + hp]$; le dénominateur a n'étant pas diviſible par p, cette valeur de $a^{p-1}-1$ ſera diviſible par p (art. II), ſi $(a-1)^{p-1} - 1 + hp$, eſt diviſible par p, & par conſéquent ſi $(a-1)^{p-1} - 1$, eſt zero, ou diviſible par p. Cela poſé,

Si $a=2$, on a $(a-1)^{p-1}-1 = 1^{p-1}-1 = 0$, donc $2^{p-1}-1$ eſt diviſible par p.

Si $a=3$, on a $(a-1)^{p-1}-1 = 2^{p-1}-1$; or on vient de voir que cette quantité eſt diviſible par p, donc auſſi $3^{p-1}-1$ eſt diviſible par p.

Si $a=4$, on a $(a-1)^{p-1}-1 = 3^{p-1}-1$; or cette quantité eſt diviſible par p, donc auſſi $4^{p-1}-1$, eſt diviſible par p; en ſuivant ce raiſonnement on prouvera que la formule $a^{p-1}-1$ eſt diviſible par

p depuis la ſuppoſition de $a=1$, juſqu'à celle de $a=p-1$.

Suppoſons maintenant a plus grand que p, & non diviſible par ce nombre ; que l'on diviſe a par p autant que cela eſt poſſible ; ſoit n le quotient de la diviſion & q le reſte, on aura $a=np+q$, q étant moindre que p ; on aura donc $a^{p-1}-1=(np+q)^{p-1}-1=-1+q^{p-1}+(p-1).q^{p-2}np+\ldots\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}q^{p-3}.n^2p^2+$ &c. Or nous venons de voir que $q^{p-1}-1$, eſt toujours diviſible par p ; de plus les termes $(p-1).q^{p-2}.np$, $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}.q^{p-3}.n^2p^2$ &c, ſont tous diviſibles par p ; donc $(np+q)^{p-1}-1$ eſt diviſible par p ; ainſi la quantité $a^{p-1}-1$ eſt diviſible par p, quel que ſoit a, pourvu que ce nombre ne ſoit pas un multiple de p. Ce théorême ceſſe d'avoir lieu lorſque a eſt diviſible par p, parce qu'alors a^{p-1}, étant diviſible par p, il eſt clair que p ne peut diviſer $a^{p-1}-1$.

Il ſuit de-là que a & b n'étant pas diviſibles par p, la quantité $a^{p-1}-b^{p-1}$, eſt diviſible par p ; car $a^{p-1}-1$ étant diviſible par p, ainſi que $b^{p-1}-1$; la différence $a^{p-1}-b^{p-1}$ de ces deux quantités eſt pareillement diviſible par ce nombre.

VIII. On peut généraliſer encore le théorême précédent, & l'étendre aux nombres compoſés. Car, ſoit n un nombre quelconque dont p, p', p'', &c, ſoient les facteurs premiers ; ſoit, de plus, a un nombre quelconque premier à n, *la quantité* $a^{n.\frac{p-1}{p}.\frac{p'-1}{p'}.\&c} - 1$, *eſt toujours diviſible par* n.

Pour démontrer ce théorême, ſoient μ, μ', μ'', &c, les expoſants des puiſſances auxquelles les facteurs p, p', p'', &c, ſont élevés dans n, on aura $n = p^{\mu}.p'^{\mu'}.p''^{\mu''}.\&c$, & $a^{n.\frac{p-1}{p}.\frac{p'-1}{p'}.\&c} - 1 = \ldots\ldots,$ $a^{p^{\mu-1}.(p-1).p'^{\mu'-1}.(p'-1).\&c} - 1$; cette quantité eſt diviſible par $a^{p^{\mu-1}.(p-1)} - 1$; car, ſi l'on fait $a^{p^{\mu-1}(p-1)} = x$, & que l'on déſigne par r, le nombre $p'^{\mu'-1}.(p'-1).p''^{\mu''-1}.(p''-1).\&c$, on aura $a^{p^{\mu}.(p-1).p'^{\mu'-1}.(p'-1)\,\&c} - 1 = x^r - 1$; or cette quantité eſt diviſible par $x - 1$, comme il eſt facile de s'en aſſurer, le quotient de la diviſion étant $x^{r-1} + x^{r-2} + x^{r-3} + \&c$; donc $a^{p^{\mu-1}.(p-1).p'^{\mu'-1}.(p'-1).\&c} - 1$, a pour facteur $a^{p^{\mu-1}.(p-1)} - 1$; or, ce facteur eſt diviſible par p^{μ}; en effet, $a^{p-1} - 1$, étant diviſible par p (art. précéd.), ſi l'on nomme h le quotient de la diviſion, on aura $a^{p-1} - 1 = hp$, donc $a^{p-1} = 1 + hp$, & $a^{p.(p-1)} = (1 + hp)^p = 1 + p.hp + \frac{p.(p-1)}{1.2}.h^2p^2 + \&c$, partant $a^{p.(p-1)} - 1 = p.hp + \frac{p.(p-1)}{1.2}.h^2p^2 + \&c$; or le ſecond membre de cette équation eſt diviſible par p^2 ; donc $a^{p.(p-1)} - 1$ eſt diviſible par p^2. Soit h' le quotient de la diviſion, on aura $a^{p(p-1)} - 1 = h'p^2$; donc $a^{p.(p-1)} = 1 + h'p^2$, & $a^{p^2.(p-1)} = (1 + h'p^2)^p = 1 +$

$p . h'p^2 + \frac{p.(p-1)}{1.2} . h'^2p^4 +$ &c, partant $a^{p^2(p-1)} - 1 = p . h'p^2 + \frac{p\ (p-1)}{1.2} . h'^2p^4 +$ &c; or le ſecond membre de cette équation eſt diviſible par p^3; donc $a^{p^2(p-1)} - 1$, eſt diviſible par p^3. Soit h'' le quotient de la diviſion, on aura $a^{p^2.(p-1)} = 1 + h''p^3$; donc $a^{p^3(p-1)} = (1 + h''p^3)^p = 1 + p . h''p^3 +$ &c; partant $a^{p^3.(p-1)} - 1 = p . h''p^3 +$ &c; or le ſecond membre de cette équation eſt diviſible par p^4; donc $a^{p^3.(p-1)} - 1$ eſt diviſible par p^4. En ſuivant ce raiſonnement, on voit que $a^{p^{\mu-1}(p-1)} - 1$, eſt diviſible par p^{μ}; or nous avons vu que $a^{p^{\mu-1}(p-1)} - 1$ diviſe $a^{n.\frac{(p-1)}{p}.\frac{(p'-1)}{p'}.\&c} - 1$; donc cette dernière quantité eſt diviſible par p^{μ}. On prouvera de même qu'elle eſt diviſible par $p'^{\mu'}$, $p''^{\mu''}$, &c; donc (art. II.) elle eſt diviſible par le produit $p^{\mu} . p'^{\mu'} . p''^{\mu''}$. &c, ou ce qui revient au même par le nombre n.

Donc ſi a & b ſont premiers à n, $a^{n.\frac{p-1}{p}.\frac{p'-1}{p'}.\&c} - b^{n.\frac{p-1}{p}.\frac{p'-1}{p'}.\&c}$ eſt diviſible par n.

IX. p *étant un nombre premier, le produit* 1 . 2 . 3 . . . (p − 1) *augmenté de l'unité, eſt toujours diviſible par* p.

Pour le démontrer, nous obſerverons que ſi dans l'équation (B) de l'art. VI, on change n en $p - 1$, & que l'on y ſuppoſe $y = x^{p-1} - 1$, & $a = 1$, elle donnera,

[(x +

$$[(x+p-1)^{p-1}-1]-(p-1).[(x+p-2)^{p-1}-1]+\frac{(p-1).(p-2)}{1.2}.[(x+p-3)^{p-1}-1]-\&c+[x^{p-1}-1]=1.2.3.....(p-1).$$

Cette équation ayant lieu quel que ſoit x, ſi l'on fait $x=1$, on aura

$$[p^{p-1}-1]-(p-1).[(p-1)^{p-1}-1]+\frac{(p-1).(p-2)}{1.2}.[(p-2)^{p-1}-1]...-(p-1).[2^{p-1}-1]+[1^{p-1}-1]=1.2.3.....(p-1).$$

Donc $p^{p-1}-(p-1)[(p-1)^{p-1}-1]+\&c=1.2.3......(p-1)+1$; or le premier membre de cette équation eſt diviſible par p, puiſque les quantités $(p-1)^{p-1}-1$, $(p-2)^{p-1}-1$, &c, ſont diviſibles par p; donc le ſecond membre $1.2.3....(p-1)+1$, eſt pareillement diviſible par p.

Les théorêmes précédents conviennent à tous les nombres premiers : nous allons préſentement en donner quelques-uns qui dépendent de la forme de ces nombres.

X. *Tout nombre premier de la forme* $4n+1$, *eſt la ſomme de deux quarrés.*

Avant que de démontrer ce théorême, nous obſerverons que la forme $4n+1$ eſt très-générale, parce que tout nombre premier eſt impair excepté 2; or, tout nombre impair eſt de la forme $4n+1$, ou $4n-1$, comme il eſt facile de s'en aſſurer. Cela poſé,

Repréſentons par $4n+1$ le nombre premier compris dans cette forme; pour démontrer qu'il eſt la

somme de deux quarrés, il suffit de faire voir qu'il divise la somme de deux quarrés premiers entr'eux : car nous avons vu (art. IV.) qu'un pareil diviseur étoit lui-même la somme de deux quarrés ; or, en vertu du théorême de l'article VII, $a^{4n}-1$ est divisible par $4n+1$, lorsque a n'est pas un multiple de $4n+1$; d'ailleurs $a^{4n}-1=(a^{2n}+1).(a^{2n}-1)$, donc $4n+1$ étant un nombre premier, doit diviser l'un ou l'autre des deux facteurs $a^{2n}+1$ & $a^{2n}-1$; mais il existe une valeur de a moindre que $4n+1$, & telle que $a^{2n}-1$ n'est pas divisible par $4n+1$; car, si cela n'étoit pas, la quantité $[(2n+1)^{2n}-1]-2n.$
$$[(2n)^{2n}-1]+\frac{2n.(2n-1)}{1.2}.[(2n-1)^{2n}-1]$$
$-$ &c. . . . . . . $-2n.[2^{2n}-1]+[1^{2n}-1]$ seroit divisible par $4n+1$, puisque ce nombre diviseroit toutes les quantités $(2n+1)^{2n}-1$, $(2n)^{2n}-1$, $(2n-1)^{2n}-1$, &c ; maintenant l'équation (B) de l'art. VI donne en y changeant n en $2n$, y en $x^{2n}-1$, & supposant $a=1$,

$$(x+2n)^{2n}-1-2n[(x+2n-1)^{2n}-1]+\&c$$
$$+(x^{2n}-1)=1.2.3.\ldots.2n;$$

cette équation ayant lieu quel que soit x, si l'on fait $x=1$ on aura,

$$[(2n+1)^{2n}-1]-2n[(2n)^{2n}-1]+\frac{2n.(2n-1)}{1.2}.$$
$$[(2n-1)^{2n}-1]-\&c=1.2.3.\ldots.2n.$$

Si le premier membre de cette équation étoit divisible par $4n+1$, le second le seroit pareillement;

& comme cela n'eſt pas, il doit néceſſairement exiſter une valeur de a moindre que $4n+1$, & telle que pour cette valeur, $a^{2n}-1$ n'eſt point diviſible par $4n+1$; ce nombre doit donc alors diviſer $a^{2n}+1$; & comme cette quantité eſt la ſomme de deux quarrés premiers entr'eux, il en réſulte que $4n+1$ eſt lui-même la ſomme de deux quarrés.

XI. *Tout nombre premier de la forme* $8m+1$ *eſt la ſomme d'un quarré & du double d'un quarré.*

Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir qu'il diviſe une quantité de la forme x^2+2y^2, x & y étant premiers entr'eux; car nous avons vu (art. IV.) qu'un pareil diviſeur étoit compris dans la même forme. Suppoſons maintenant que $8m+1$ ſoit un nombre premier, ſi l'on fait $n=2m$, il ſe changera en $4n+1$; or nous venons de voir qu'il exiſte un nombre a tel que $a^{2n}+1$ eſt diviſible par $4n+1$; donc alors $a^{4m}+1$ eſt diviſible par $8m+1$; mais $a^{4m}+1$ eſt égal à $(a^{2m}-1)^2+2(a^m)^2$, c'eſt-à-dire, à un quarré & au double d'un quarré; il ne s'agit donc plus que de faire voir que les racines $a^{2m}-1$ & a^m de ces quarrés ſont premieres entr'elles. Pour cela, ſoit β un diviſeur quelconque de a^m autre que l'unité, il eſt clair que a^{2m} ſera diviſible par β; donc $a^{2m}-1$ ne peut être diviſé par ce nombre; ainſi les deux quantités $a^{2m}-1$ & a^m n'ont aucun diviſeur commun autre que l'unité; donc $8m+1$ eſt égal à un quarré plus au double d'un quarré.

XII. *Tout nombre premier de la forme* $6n+1$ *eſt égal à un quarré, plus au triple d'un quarré.*

Il suffit, pour démontrer ce théorême, de faire voir que le nombre premier $6n+1$ divise un nombre de cette forme, x^2+3y^2, x & y étant premiers entr'eux, car nous avons vu (art. IV.) qu'un pareil diviseur, lorsqu'il étoit impair, (& $6n+1$ l'est nécessairement) étoit compris dans la même forme ; or a étant un nombre quelconque moindre que $6n+1$, le théorême de l'art. VII, donne $a^{6n}-1$, divisible par $6n+1$; mais $a^{6n}-1=(a^{2n}-1)[a^{4n}+a^{n}+1]$, donc $6n+1$ étant un nombre premier, doit diviser l'un ou l'autre des deux facteurs, $a^{2n}-1$, ou $a^{4n}+a^{2n}+1$: or il est aisé de prouver, comme dans l'art X, qu'il existe un nombre a moindre que $6n+1$, & tel que $a^{2n}-1$ n'est point divisible par $6n+1$: donc alors $6n+1$ divise $a^{4n}+a^{2n}+1=(a^{2n}-1)^2+3(a^{n})^2$; de plus, $a^{2n}-1$ & a^{2n} sont premiers entr'eux ; donc $6n+1$ divise un nombre de la forme x^2+3y^2, x & y étant premiers entr'eux, par conséquent il est de la même forme.

XIII. Les trois théorêmes précédents sont dûs à Fermat, & M. Euler les a démontrés dans les Mémoires de Pétersbourg. Fermat assure encore que *tout nombre premier de la forme* 8n+3 *est la somme d'un quarré & du double d'un quarré*. M. Euler paroît avoir inutilement cherché la démonstration de ce théorême, (voyez les Mémoires de Pétersbourg, années 1757 & 1760), & jusqu'ici personne que je sache ne l'a donnée : en voici une fort simple.

$8n+3$ étant un nombre premier, $2^{8n+2}-1$ est, (art. VII.) divisible par ce nombre ; or $2^{8n+2}-1=$

$(2^{4n+1}+1).[2^{4n+1}-1]$; donc $8n+3$ divise l'un ou l'autre des deux facteurs $2^{4n+1}+1$, ou $2^{4n+1}-1$: s'il divisoit le facteur $2^{4n+1}-1$, ou $2.(2^{2n})^2-1^2$, il seroit par l'art. V, de la forme $2u^2-s^2$; supposons conséquemment que l'on ait $8n+3=2u^2-s^2$, s sera nécessairement impair: soit donc $s=2h+1$, on aura $s^2=4h^2+4h+1=4h.(h+1)+1$; or $h.(h+1)$ est un nombre pair, parce que si h est impair, $h+1$ est pair, & réciproquement. Soit donc $h.(h+1)=2l$, on aura $s^2=8l+1$. Maintenant u est pair ou impair; dans le premier cas, soit $u=2i$, on aura $u^2=4ii$ & $2u^2=8ii$, l'équation $8n+3=2u^2-s^2$ donnera donc $8n+3=8(ii-l)-1$, d'où l'on tire $8n+4=8(ii-l)$, & $2n+1=2(ii-l)$, équation impossible, le premier membre étant pair & le second impair.

Dans le second cas, c'est-à-dire si u est impair, soit $u=2i+1$, donc $uu=4i^2+4i+1$ & $2u^2=8i^2+8i+2$; l'équation $8n+3=2u^2-s^2$ donnera conséquemment $8n+3=8(i^2+i-l)+1$, d'où l'on tire $4n+1=4(i^2+i-l)$, équation pareillement impossible. Donc $8n+3$ ne peut être de la forme $2u^2-s^2$, partant il ne peut diviser $2^{4n+1}-1$; il divise conséquemment $2^{4n+1}+1=2(2^{2n})^2+1$; donc (art. IV.) il est de la forme (x^2+2y^2).

a peu près evident en posant, $u=4\lambda\pm u'$ $s=4\mu\pm s'$ considerer $2u'^2-s'^2$ et ramener tous les cas possibles qui se reduisent à $2u'^2-1$ $u'=0,1,2$

XIV. On peut démontrer par un raisonnement analogue cet autre théorême, savoir que *tout nombre premier de la forme* $8n-1$ *est de la forme* $2u^2-s^2$; car $2^{8n-2}-1$ étant (art. VII.) divisible par le nombre premier $8n-1$, ce nombre doit diviser l'un ou l'autre des deux facteurs, $2^{4n-1}+1$, ou $2^{4n-1}-1$; or $2^{4n-1}+1$ étant égal à $2.(2^{2n-1})^2+1$, si $8n-1$ divisoit ce facteur, il seroit (art. IV.) de la forme s^2+2u^2: soit donc $8n-1=s^2+2u^2$, s est nécessairement impair, & son quarré, par ce qui précéde, est de la forme $8l+1$: soit $s^2=8l+1$, si u est pair & égal à $2i$, on aura $s^2+2u^2=8(ii+l)+1$, donc $8n-1=8ii+8l+1$, d'où l'on tire $4n=4ii+4l+1$, équation impossible. Si u est impair & égal à $2i+1$, on aura $s^2+2u^2=8ii+8i+8l+3$, donc $8n-1=8ii+8l+8i+3$; partant $2n=2ii+2i+2l+1$, équation pareillement impossible: donc $8n-1$ ne peut être de la forme s^2+2u^2, il ne peut conséquemment diviser $2^{4n-1}+1$ donc il divise $2^{4n-1}-1=2.(2^{2n-1})^2-1$; partant (art. V.) il est de la forme $2u^2-s^2$.

Imiter la note du recto

FIN.

De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande. 1776.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Fautes.		Corrections.
7	27	implicitiment	*lisez*	implicitement
140	3	*au numérateur au lieu de* u	*mettez*	u^n
145	18	$ma + bn$	*lisez*	$ma + bh$
149	27	tout au plus		tout au moins
203 & 204	22 / 3, 4, 5, 7	$- 4kg^2$		$-4kg$
204		*après le signe* + *qui finit la page*	*ajoutez*	l
211	17	$6m$	*lisez*	$6m^2$
214	6	$z - q$		$z^3 - q$
222	1	10		20
223	10	*au lieu du premier* f^5	*mettez*	f^3
ibid.	13 & 16	*affectez de l'exposant* $\frac{1}{3}$ *les lettres* k *qui n'en ont pas*		
257	23	*avant le mot* qui	*mettez*	$= 0$
330	24	$\sqrt{C}$	*lisez*	$\sqrt[5]{C}$
333	8	p^2		p^3
334	7	$\sqrt{m}$		$\sqrt[5]{m}$
363	22	$3bt$		$3b^2t$
374	18	$\frac{ag^2 - h}{g}$		$\frac{ag^2 - h}{g^3}$
408	13	cAx		cAx^2
409	22	$p + q - t$		$p + q - 1$
429	24	$p^{u} \cdot p^{u}$		$p^{u} \cdot p'^{u'}$
435	5	yy'		$y'y''$
ibid.	18	$l'y''$		$l'y''^2$
440	17	$6y'$		$6y''$
443	*avant-dernière*	$nyn^n - 1$		$ny^n - 1$

ÉCLAIRCISSEMENT.

Pag. 326, *lig.* 20, *après le mot* quarré *ajoutez* De plus *A* doit être même multiple d'un autre quarré.

Pag. 327, *ligne* 5, *après l'équation* $A = 128$, *ajoutez* qui est le produit du quarré 64 par le nombre 2.