10

3.10

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL,
Qui comprend
L'ARITHMETIQUE,
L'ALGEBRE, L'ANALYSE,
Et les principes de toutes les Sciences qui ont la Grandeur pour objet.

Par le R. P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

Cinquiéme Edition revuë & augmentée.

Grailleran

A PARIS,
Chez PIERRE WITTE, rue Saint Jacques, à l'Ange Gardien.

M. DCCXXXI.

PREFACE.

LES Peres de l'Eglise jugeoient l'études des Lettres humaines si nécessaire, qu'ils régarderent la défense que Julien l'Apostat fit aux Chrêtiens de les étudier, comme un stratagême du démon, semblable à celui dont se servirent les Philistins pour ôter aux Israëlites les moyens de se défendre, en les empêchant de faire aucun ouvrage de fer. Les Mathematiques tenant donc entre les Sciences humaines un des premiers rangs, l'on ne peut pas, sous prétexte de pieté, en défendre l'étude à la Jeunesse. Elles sont nommées Mathematiques, nom qui veut dire Discipline, parce que l'on n'apprend rien de plus considerable dans les Ecoles, & qu'elles renferment tant de choses qu'il n'y a point de Profession à qui elles ne puissent être utile. L'Arithmetique, l'Algebre, la Geometrie, l'Astronomie, la Chronologie, la Geographie, la Gnomonique, l'Arpentage, l'Architecture, les Fortifications, la Marine, la Musique, la Perspective, la Dioptrique, la Captoptrique, les Méchaniques, plusieurs Traitez de Physique, en sont les parties. Elles sont les Elemens de presque toutes les Sciences; & les Arts ne se peuvent passer de leur secours. De sorte que puisqu'il faut reconnoître avec les Peres de l'Eglise la nécessité d'appliquer les jeunes gens aux Lettres humaines, il n'y a que ceux qui ignorent les Mathematiques, qui puissent dire que ce seroit leur faire perdre le temps que de les leur faire étudier: Vû que l'Histoire Ecclesiastique donne de si grandes loüanges aux Peres de l'Eglise qui ne les ont pas ignorées. Mais ceux qui en jugent si mal, ne le font sans doute que par un bon zéle, parce qu'ils croyent qu'elles ne peuvent être utiles: Ainsi il est juste qu'on leur fasse voir dans la Préface de cet Ouvrage, par lequel on prétend ouvrir un Cours de Mathematiques, l'utilité qu'on peut rétirer de l'étude qu'on conseille ici.

Tout le monde réconnoît que l'on ne remporte que très-peu de fruit des Colleges, & que l'on y passe le temps à apprendre des choſes, particulierement dans la Philoſophie, dont il n'eſt pas même permis de faire uſage parmi les honnêtes gens, comme ſont une infinité de Queſtions de chicane. Il eſt vrai que l'on dit que ces choſes ont leur utilité, en ce qu'elles font l'eſprit, & qu'elles le rendent ſubtil, étendu, & capable de raiſonner. Mais ſi c'eſt cette ouverture & cette étenduë d'eſprit, & cette diſpoſition à bien raiſonner, que l'on regarde dans les premieres études des jeunes gens, comme on le doit faire ; l'étude des Mathematiques devroit être plus ordinaire qu'elle ne l'eſt : quand il ne ſeroit pas vrai d'ailleurs qu'il n'y a aucune Profeſſion à laquelle elle ne ſoient utiles. Car enfin perſonne ne doute que la Philoſophie, comme on l'enſeigne, ne ſoit pleine de Queſtions douteuſes, de Sophiſmes, de mauvais raiſonnemens, & qu'ainſi elle ne peut fournir que des modelles très-imparfaits de clarté, de netteté & d'exactitude. Ce que l'on ne peut pas dire des Mathematiques, qui n'admettent aucun principe dont la verité ne ſoit manifeſte. Elles ne ſe contentent pas de probabilitez : elles démontrent toutes les propoſitions dont la verité eſt un peu cachée, ne ſe ſervant point de paroles ambiguës, ni de vaines ſubtilitez, mais de paroles claires, de raiſonnemens ſolides & exempts de toute erreur ; ainſi elles ſont bien plus propres à exercer & à former l'eſprit que la philoſophie. Ceux qui ont vû pluſieurs excellens Originaux, ſçavent bien mieux juger d'un tableau. Ceux auſſi qui ſont accoûtumez à des principes clairs & à des démonſtrations exactes, jugent bien mieux de la clarté & de l'exactitude d'un raiſonnement. Dans les Mathematiques l'on tire d'un principe connu mille choſes inconnuës par un enchaînement merveilleux de pluſieurs propoſitions, ce qui rend encore l'eſprit perçant ; & comme ſouvent on y trouve des démonſtrations qu'on ne peut entendre qu'en enviſageant la verité de cent autres démonſtrations dont elles dépendent, l'étude que l'on fait de cette Science étend l'eſprit, en l'habituant à comprendre d'une ſeule vûë pluſieurs choſes.

Ainſi, qu'on conſidere ſi on veut les études de la Jeuneſſe, ou comme de ſimples occupations dont il faut remplir le vuide de leurs premieres années, afin que le vice ne s'en empare pas ; ou comme des préparations à des études plus ſerieuſes :

il eſt conſtant que cette conſideration doit porter les perſonnes qui ont du zele pour l'éducation de la Jeuneſſe, à faire qu'on enſeigne avec plus de ſoin les Mathematiques, qu'on n'a l'a pas fait depuis quelques ſiécles. Autrefois on y appliquoit d'abord les jeunes gens. Les Philoſophes ſuppoſoient que ceux qui entroient dans leurs Ecoles n'ignoroient pas ces Sciences, comme il paroît par cette inſcription qui étoit ſur la porte de leurs Academies : *Que ceux qui ne ſçavent pas la Geometrie n'entrent point ici.* Platon montre très-bien que non-ſeulement elles ſont utiles pour acquerir les Sciences, mais qu'elles peuvent encore ſervir à former les mœurs. Un des grands principes de corruption de tous les hommes, eſt cette forte inclination qu'ils ont pour les choſes ſenſibles, qui fait que rien ne leur plaît que ce qui flate leurs ſens; qu'ils ne récherchent & qu'ils ne s'appliquent qu'à ce qui fait ſur eux des impreſſions agréables. Ainſi comme la Geometrie ſépare des corps qu'elle conſidere, toutes les qualitez ſenſibles, & qu'elle ne leur laiſſe rien de ce qui peut plaire à la concupiſcence, quand on peut forcer un eſprit, & obtenir qu'il s'applique à l'étudier, on le détache des ſens, & on lui fait connoître & aimer d'autres plaiſirs que ceux qui ſe goûtent par leur moyen, ce qui eſt de la derniere importance.

Il faut avoüer néanmoins que ceux qui ſont Mathematiciens, ne ſont pas toûjours exacts dans les raiſonnemens qu'ils font ſur d'autres matieres que les Mathematiques, & qu'ils n'ont pas moins d'amour pour les plaiſirs ſenſibles, que ceux qui ignorent ces Sciences. C'eſt pour cela qu'on n'a preſque fait aucune attention à ce fruit que l'on peut retirer des Mathematiques, & qu'on ne les a régardées que comme des Sciences curieuſes, ou utiles ſeulement à ceux qui embraſſent de certaines Profeſſions; en un mot c'eſt ce qui a fait qu'on les a négligées. Mais il ne faut pas juger de leur utilité par le peu d'uſage qu'en ont fait ceux dont nous parlons, pour n'avoir pas aſſez conſideré que la fin de toutes nos études doit être de nous former l'eſprit & le cœur; & que l'eſprit de l'homme n'eſt pas fait pour les Mathematiques, mais que les Mathematiques ſont faites pour lui. C'eſt ſans doute un défaut très-conſiderable, & pour l'éviter & tirer toute l'utilité que peut produire l'étude des Mathematiques, il faut que ceux qui enſeignent ces Sciences faſſent faire à leurs Diſciples toutes les réflexions néceſſaires. Ils doivent leur aprendre à bien diſcerner le vrai d'avec le faux, à bien appercevoir ce que c'eſt qu'un raiſonnement juſte par la comparaiſon des choſes claires & des démonſtrations certaines qu'ils leur propoſent ; leur faire remarquer cette belle Methode que l'on ſuit dans les Mathematiques pour réſoudre une difficulté ; ce ſoin que l'on a de définir tous les termes obſcurs, afin d'éloigner toutes les diſputes de mots, & cette adreſſe à tirer de ce qui eſt connu des choſes ſi cachées & ſi difficiles. Il faut qu'en même temps ils leur faſſent eſtimer & aimer toutes ces choſes, qui ſurprennent l'eſprit, & qui lui ſont agréables, quand il n'eſt pas rebuté par les difficultez. Enfin, pour me ſervir d'une expreſſion de S. Grégoire Thaumaturge, ils doivent former dans l'eſprit des jeunes gens comme une digue aſſurée contre l'erreur, les fortifiant & les accoûtumant à ne donner leur conſentement qu'à ce qui eſt évident ; & détachant leur cœur des plaiſirs ſenſibles, leur en faiſant goûter de plus purs. Il n'y a perſonne qui ait quelque connoiſſance des Mathematiques qui n'en ſoit charmé. La verité y paroît ſans nuage, au lieu que dans les autres Sciences elle y eſt cachée ſous d'épaiſſes ténébres. Elles doivent donc plaire à nôtre eſprit; car il n'eſt pas ſi fort corrompu par le menſonge, qu'il ne lui reſte une forte inclination pour la verité. Il n'y a rien qu'il aime davantage, comme dit S. Auguſtin : *Quid fortiùs deſiderat anima quàm veritatem?*

Si les Mathematiques ne donnent pas tout le plaiſir dont elles ſont capables, & ſi elles n'attirent par toutes les perſonnes ſtudieuſes, c'eſt que les épines dont elles ſont environnées rébutent, parce qu'on fuit la peine & le travail. Mais ce n'eſt pas un juſte ſujet de les négliger. Premierement ces épines, c'eſt-à-dire, la difficulté qu'il y a à comprendre les veritez qu'elles propoſent, n'en eſt pas tellement inſéparable, qu'on ne puiſſe dire que ſi les Mathematiques ſont difficiles, c'eſt en partie la faute de ceux qui les ont traité; car il ſemble que ceux qui ont écrit dans les ſiécles précédens, ne ſe ſoient mis en peine que de convaincre l'eſprit, ſans penſer à l'éclairer. Ce n'eſt pas qu'on puiſſe rendre ces Sciences auſſi aiſées que l'Hiſtoire, que la Poëſie, & que la Rhetorique, où il n'eſt beſoin pour devenir ſçavant que d'avoir des yeux & des oreilles, dont les Mathematiques demandent en quelque façon qu'on ſe défaſſe & que l'on applique ſeulement ſon eſprit ; ce qui eſt difficile, parce que comme nous ſommes faits aujourd'hui, nous ſentons plus volontiers que nous ne concevons ; les operations des ſens étant accompagnées de quelque plaiſir ſenſible qui ne ſe trouve point dans les conceptions ſpirituelles. Mais cela ne doit pas éloigner de l'étude des Mathematiques, il les faut même employer pour vaincre cette délicateſſe, qui fait que l'on ne ſe donne qu'à ce qui eſt facile & peut cauſer un plaiſir ſenſible. Car comme nous devons de bonne heure endurcir nôtre corps au travail, & le rendre capable de ſupporter de grandes fatigues, il faut auſſi faire nôtre eſprit aux travaux ſpirituels, l'accoûtumant à concevoir les choſes difficiles, à y donner une entiere attention, à ſuivre le fil d'un raiſonnement pour long qu'il ſoit, & à ne pas ſe rebuter de la multiplicité des choſes qu'il faut conſiderer pour appercevoir la verité ou la fauſſeté d'une propoſition. Ceux qui ne ſont accoûtumez qu'à des études ſenſibles, comme à la Poëſie, deviennent ſi tendres & ſi délicats qu'ils ne ſont pas capables de la moindre application. Ils ne ſçavent ce que c'eſt que faire uſage de leur eſprit, & un raiſonnement de cinq à ſix lignes un peu ſpirituel, leur caſſe la tête.

Il ne faut donc pas eſperer que l'on puiſſe traiter les Mathematiques d'une maniere agréable à ces perſonnes. On peut bien leur faire voir & toucher les figures; mais il n'y a que le pur eſprit qui apperçoive leurs proprietez; ce qui ne ſe peut faire ſans attention. Cependant ſi on ne peut pas rendre les Mathematiques aſſez aiſées pour qu'on les apprenne en joüant, on peut diminuer le travail de cette application qu'il leur faut donner; & c'eſt à quoi l'on n'avoit pas travaillé. Je ne veux pas dire que les démonſtrations qu'on voit dans les Ouvrages des Anciens, manquent du côté de la verité, puiſqu'elles ſont certaines; mais elles péchent contre la netteté & la clarté, étant trop longues & trop embaraſſées. Outre cela, ce qui empêche que les Ouvrages de ces grand Hommes, qui méritent d'ailleurs tant de loüanges, n'éclairent auſſi vivement l'eſprit, qu'ils le convainquent fortement ; c'eſt qu'ils ſe contentent ſeulement de placer les propoſitions qu'ils font, de ſorte que celles qu'ils employent pour une démonſtration, ſe trouvent devant cette démonſtration. Ils ne ſe ſont point aſſujettis à un ordre qui pût conduire le Lecteur de ce qu'il connoît à ce qu'il ne connoiſſoit pas, ſans autre travail que celui d'une attention médiocre. Ce qui arrive infailliblement lorſque les propoſitions ſont rangées naturellement ſelon qu'elles ſe doivent ſuivre les unes les autres : qu'on ne propoſe en chaque lieu que ce qui appartient à la matiere qui s'y traite, & qu'enfin on cherche les voyes les plus courtes ; car on ſe laſſe dans les plus beaux chemins quand ils ſont trop longs. Outre qu'un ouvrage n'eſt pas propre à former l'eſprit, lorſqu'il n'y a point d'ordre, qui eſt ce qu'on cherche, & ce qu'on doit trouver dans les Mathematiques. S. Auguſtin nous donne une regle qui nous empêcheroit de tomber dans l'erreur auſſi ſouvent que nous le faiſons, ſi nous la ſuivions. Prenez garde, dit-il, de croire ſçavoir une choſe, ſi vous ne la connoiſſez auſſi clairement que vous ſçavez que ces nombres, un, deux, trois, quatre, ajoûtez dans une ſomme, font dix. Un Ouvrage de Mathematique doit donc être ſi exact, & pour la clarté, & pour l'ordre, qu'il ſerve de modelle pour celui que l'on doit ſuivre dans toutes les Sciences : de ſorte que l'eſprit s'accoûtume dans cette étude à s'appliquer aux choſes qu'il doit examiner à diſcerner la verité, à la déduire des principes dont elle dépend, d'une maniere ſuivie. C'eſt une choſe d'un prix infini, & le fruit le plus précieux que nous puiſſions recueillir de nos premieres études.

Toutes ces conſiderations ſur l'utilité que la Jeuneſſe peut retirer de l'étude des Mathematiques, m'ont porté à travailler à cet Ouvrage, que j'ai tâché de rendre facile, afin qu'il pût donner une entrée dans ces Sciences, & qu'il fût propre à former l'eſprit ; ce qui a été mon principal deſſein. Pour ce qui eſt de la facilité, je ſçai par experience que pour peu qu'on s'y applique on le peut entendre, & que les jeunes gens avec le ſecours d'un Maître, n'y trouveront rien au-deſſus de la capacité de leur eſprit. Je ne propoſe d'abord que des proprietez de la Grandeur, ſi connuës que perſonne ne les peut ignorer. Je commence par les nombres, qui sont la chose que l'esprit connoît le plus clairement. Les Démonstrations sont courtes ; & c'est à quoi j'ai travaillé, parce que je sçai que l'esprit des jeunes gens ne peut pas demeurer long-temps attentif, & par consequent qu'il ne peut concevoir les démonstrations les plus claires lorsqu'elles sont un peu longues. C'est aussi ce qui m'a fait rechercher celles qui sont générales, qui étant une fois conçûës répandent une grande lumiere dans ce qui suit ; de sorte qu'en un mot & sans obscurité on peut proposer & prouver plusieurs veritez importantes ; ce qui abrege beaucoup. Dans chaque Livre, il n'y a que deux ou trois démonstrations qui puissent arrêter : toutes les autres en sont des conséquences qui sautent aux yeux.

Ce Traité a pour objet la Grandeur en général. *Grandeur* est tout ce que l'on conçoit capable du plus ou du moins, c'est-à-dire, tout ce qui peut être augmenté par quelque addition. ou qui peut être diminué par quelque rétranchement. Ainsi, non-seulement l'on renferme sous le nom de Grandeur la longueur, la largeur, & la profondeur des corps ; mais encore le temps, la pesanteur, la vîtesse, le mouvement, les ſons, les autres qualitez dans leſquelles on peut diſtinguer pluſieurs degrez, & généralement toutes les choſes finies, capables du plus ou du moins. Par conſequent ſous ce nom de Grandeur, on comprend même les ſpirituelles qui ſont finies, puiſqu'on peut conſiderer dans leur perfections des degrez differens : qu'on les peut concevoir plus ou moins parfaites en elles-mêmes, ou par rapport à d'autres. L'objet des Mathematiques en général eſt la grandeur priſe de la maniere que nous venons de le dire. On en explique les parties dans les Traitez particuliers ; c'eſt pourquoi il eſt aſſez évident que c'eſt par un Traité de la Grandeur en général, que l'on doit ouvrir le cours des Etudes des Mathematiques, & que ce Traité doit être conſideré comme les Elemens de cette Science. J'ai crû que l'Ouvrage d'Euclide, qu'on appelle les Elemens de Geometrie, n'étoit point ſi propre à donner cette entrée, car outre qu'il n'y traite que d'une eſpece particuliere de la Grandeur, qui ſont les corps, dont les proprietez ſont plus composées & plus difficiles à connoître que celles de la Grandeur en général comme il n'y parle que de la mesure des corps, son ouvrage n'est pas si propre pour former l'esprit que celui que je propose. Il est vrai que les corps que l'on considere dans la Geometrie n'ont ni couleur, ni saveur, ni aucune autre qualité sensible qui puisse flatter les sens ; mais enfin ils forment des images, & il arrive tous les jours, que ceux qui sont accoûtumez aux démonstrations où l'on fait considerer quelque figure, ne sont pas capables de concevoir un raisonnement s'il n'est exprimé par des lignes, & qu'ils ne prennent pour de veritables démonstrations que celles que l'on peut rendre ainsi sensibles par des figures. L'imagination aussi bien que nos sens, est une grande source d'erreurs. Ceux qui n'ont jamais fait usage de leur esprit pur, & qui sont accoûtumez à ne concevoir que ce que l'imagination peut répresenter, sont peu disposez à entrer dans la connoissance des choses spirituelles. Aussi ne voyons-nous que trop souvent que les plus grands Geometres ne sont pas bons Metaphysiciens ; c'est-à-dire, qu'ils ne conçoivent pas ce qui appartient aux Etres spirituels, comme sont Dieu, les Anges, & l'ame de l'homme. Cet inconvenient ne se trouve point ici. Dans tout ce Traité de la Grandeur en général, il n'eſt beſoin en aucune maniere de ſe repreſenter des corps : il ne le faut pas même faire : puiſque ce qu'on dit de la Grandeur en général peut convenir à des choſes ſpirituelles, dans les perfections deſquelles l'on peut concevoir pluſieurs degrez, & qui par conſequent ſont capables d'augmentation ou de diminution, & de pluſieurs rapports & proportions. Ainſi l'étude de ce Traité détache davantage l'eſprit des choſes ſenſibles, que la Geomerie, & donne une plus grande diſpoſition pour concevoir les choſes ſpirituelles & abſtraites.

Les anciens Geometres, comme nous avons dit, ne ſe ſont point aſſujettis à garder un ordre naturel dans leurs Ouvrages, comme il paroît dans celui d'Euclide, qui ne ſemble propoſer les veritez qu'il enſeigne que comme elles ſe ſont preſentées fortuitement, puiſque celles qui appartiennent à des matieres differentes s'y trouvent mêlées ſans diſtinction. Cette confuſion ne ſe trouve point ici, tout y étant traité avec ordre & dans ſon lieu. L'on donne même dans le VII. Livre, les Regles de la Methode. C'eſt pourquoi j'eſpere que cet Ouvrage pourra contribuer à former l'esprit de ceux qui le liront ; qu'il leur servira d'un modelle de clarté par la certitude des Démonstrations qu'il contient, & de netteté par l'ordre qui y est gardé. L'on ne peut aussi rien concevoir de plus propre pour rendre l'esprit étendu ; car comme cet Ouvrage traite de la Grandeur en général, sous laquelle tous les êtres finis sont compris, il donne de vastes connoissances. La maniere de démontrer que l'on employe, est très-feconde, comme on le reconnoîtra : elle ouvre des moyens pour trouver uue infinité de démonstrations. Je desire que les jeunes gens prennent dans la lecture de cet Ouvrage l'habitude de concevoir & d'aimer les veritez qui sont au-dessus des sens. Il y a des Problêmes curieux, s'ils y prennent plaisir, ils reconnoîtront que l'on peut trouver du divertissement ailleurs que dans les choses materielles & sensibles. C'est une réflexion que les Maîtres leur doivent faire faire. Ils auront occasion de leur insinuer plusieurs autres veritez très-importantes ; car en leur faisant remarquer l'étenduë de l'esprit humain, qui paroît dans cette Science plus que dans aucune autre ; & leur montrant que ce ne ſont point les ſens ni l'imagination qui nous ont fait découvrir tant de veritez, ils les convaincront qu'il n'y a point d'hommes raiſonnable, qui puiſſe penſer qu'une ame materielle ſoit capable de tant de connoiſſances ſi certaines, ſi abſtraites, & ſéparées de toute matiere ; comme ſont particulierement celles que donne le ſixiéme Livre, où l'on traite des Grandeurs incommenſurables dont la valeur ne peut être exprimée par aucun nombre, & dont cependant l'eſprit découvre pluſieurs proprietez, perçant avec une ſubtilité merveilleuſe au travers des ténebres qui les cachent. Autrefois le Philoſophe Ariſtippe ayant apperçû ſur le rivage de l'Iſle de Rhode où la tempeſte l'avoit jetté, des figures de Geometrie ; Je vois, s'écria-t-il, qu'il y a des hommes dans ce lieu. *Veſtigia hominum agnoſco.* En liſant un Traité de la Grandeur en général, & en conſiderant les démonſtrations étenduës & fécondes qu'on y trouve, les veritez cachées qui y ſont expliquées, on a ſujet de s'écrier que l'eſprit de l'homme qui a trouvé toutes ces choſes, qui les conçoit & qui les explique, eſt bien élevé au-deſſus de la matiere, & de la condition des brutes ; réflexion utile pour connoître la dignité de l'ame, & pour ſe convaincre qu'elle eſt faite pour quelque choſe de grand. Mais ſi ce Traité fait voir l'étenduë de l'eſprit, il fait auſſi connoître ſes bornes ; car il y a des démonſtrations claires & convaincantes qu'uue grandeur finie eſt diviſible juſqu'à l'infini. Cette infinité eſt incompréhenſible : cependant on en fait connoître les proprietez, les rapports : ce qui démontre qu'il y a des veritez qui ſont également certaines & incomprehenſibles ; & que par conſequent les veritez que la Religion nous enſeigne ne doivent pas être ſuſpectes parce qu'on ne les comprend pas entierement. Ceux qui enſeigneront cet Ouvrage, pourront trouver occaſion de faire pluſieurs ſemblables réflexions, qui non-ſeulement ſeront utiles pour donner de grandes ouvertures dans les Sciences, mais encore pour redreſſer l'eſprit & le cœur de leurs Diſciples, qui eſt le principal but que doivent ſe propoſer les Maîtres.

C'eſt pour la troiſiéme fois que je retouche cet Ouvrage. Il n'eſt point néceſſaire que je marque en détail ce que cette derniere Edition peut avoir de particulier : il n'y a qu'à la comparer avec les précedentes. J'ai tâché de profiter des Livres qui ont paru depuis la ſeconde Edition, des Ecrits de pluſieurs Profeſſeurs habiles qui enſeignent actuellement dans Paris, & dont on ne peut ignorer ni le nom ni le merite. Sur les avis qu'on m'a donnez j'ai expliqué ce qui ne l'étoit pas aſſez. J'ai corrigé ce qui étoit défectueux. J'ai abregé, j'ai rétranché ce qui étoit moins néceſſaire. J'ai ajoûté bien des choſes en differens endroits ; & j'ai augmenté tout l'Ouvrage d'un huitiéme Livre. Je ne prétens pas pour cela qu'il ſoit parfait. Ce ſont des Elemens pour ceux qui commencent. Celui qui après les avoir lûs concevra le deſir d'en ſçavoir davantage, ſera capable d'entendre & de lire des ouvrages plus ſçavans.

B. Graillet
hujus Libri
possessor

AVIS

SUR CETTE NOUVELLE EDITION.

ON convient de l'utilité de l'étude des Mathematiques, & qu'il seroit avantageux aux jeunes gens d'y passer quelque temps. On convient aussi, & il faut l'avouër, qu'il y a d'autres études par rapport aux Emplois de la vie, encore plus pressantes, pour lesquelles on est obligé de ménager la capacité de leur esprit ; & qui ne laissent pas le loisir de lire de gros volumes, quoique clairs autant qu'on le puisse souhaiter. Mais ces Elemens aussi bien que ceux de Geometrie sont si courts, qu'un jeune homme peut fort aisément les lire avec attention, & s'y appliquer avec fruit, sans qu'il soit obligé pour cela de négliger ses autres études. Ils ouvrent une entrée facile dans toutes les Mathematiques à ceux qui veulent aprofondir ces Sciences ; & ils suffisent à ceux qui n'en veulent avoir qu'une connoissance générale, & seulement pour acquerir cette force d'esprit, ou cette habitude à raisonner juste, qu'on ne prend jamais bien ailleurs que chez les Mathematiciens. C'est ce qui a porté l'Auteur à les revoir avec tout le soin possible, toutes les fois qu'il a été ques-

tion de les réimprimer. L'avant-derniere Edition s'en fit en 1704, *beaucoup meilleure ſans contredit & plus exacte que toutes les précedentes. Depuis ce temps-là, l'Auteur a encore reçû de nouveaux avis, & lui-même a fait de nouvelles remarques, qu'on trouvera dans celle qu'on donne preſentement au Public. L'experience à fait connoître les endroits qui pourroient arreſter les jeunes gens, ou leur faire de la peine. On a donc retouché ces endroits-là: on les a éclaircis, & tout enſemble ce qui pouvoit paroître obſcur. Selon qu'il a été à propos, on s'eſt étendu ou reſſerré: de ſorte qu'avec un peu d'attention il n'y aura plus rien de difficile. On a fait divers changemens, beaucoup d'additions qu'on trouvera répanduës dans tout l'ouvrage. Si on a retranché, ce n'eſt que bien peu, encore étoit-ce des choſes aſſez inutiles & qui ne faiſoient rien qu'embaraſſer. Ainſi on voit que cette Edition eſt infiniment préferable à toutes les autres qui ont parû juſqu'ici, ſoit en France, ſoit dans les Païs étrangers. Ce ſera vrai-ſemblablement la derniere; & quand ce Livre ſe réimprimeroit, même du vivant de l'Auteur, on le verroit paroître dans l'état qu'il eſt preſentement, ſans qu'il y fût rien changé en aucune maniere:*

après

Après tout ce qu'on a fait, on n'a pas dessein d'y toucher davantage. Sur-tout on s'est appliqué avec un soin tout particulier à bien corriger les fautes d'impression qui se glissent si facilement dans les Ouvrages de la nature de celui-ci. On sçait la peine qu'elles font aux Commençans. Souvent un chifre, une seule lettre, un simple signe d'Algebre mis à la place d'un autre, les empêche d'entendre toute une démonstration. Cette démonstration sert quelquefois de preuve & de fondement à plusieurs autres propositions qu'on rencontre dans la suite, & qui par-là deviennent douteuses & incertaines, puisqu'elles dépendent d'une proposition qu'ils n'ont pû comprendre. Il n'y a jamais eu de Livres sans faute; mais sur tout la plûpart des Livres de Mathematiques en sont pleins. Dans toute autre matiere, ces fautes d'impression sont moins que rien, chacun y suplée aisément de soi-même; mais dans les Ouvrages de Mathematiques, elles sont d'une extrême consequence, & il n'y a gueres que les Maîtres qui soient capables de les corriger. On a donc tâché d'éviter ce défaut, en rendant cette Edition la plus correcte & la plus exacte qu'il a été possible. Pour cela on n'a rien épargné; on y a employé du temps, & il en a coûté de la peine.

Si après tous ces soins. il se trouve encore quelques fautes échapées par mégarde, on prie le Lecteur de vouloir bien les pardonner; il le doit faire d'autant plus volontiers qu'on a fait tout ce qu'on a pû pour n'y en laisser aucune. C'est particulierement pour les jeunes gens qu'on a d'abord composé cet Ouvrage, & c'est encore pour eux qu'on y a mis la derniere main; S'ils veulent bien se donner la peine de le lire, & qu'ils en profitent, on se tiendra trop recompensé de toutes les peines qu'on a eu avant que de le mettre en l'etat qu'il est, & tel qu'on le donne aujourd'hui.

TABLE DES SECTIONS ET CHAPITRES.

LIVRE PREMIER.

SECTION I. *La science de la Grandeur en général doit être regardée comme les Elemens de toutes les Mathematiques.*

CHAP. I. *Quel est le sujet de ce Traité de la Grandeur en général.* Page 1

CHAP. II. *Ce que c'est que la Grandeur. Elle est successive ou permanente, continuë ou discrete. Les nombres se peuvent appliquer à toute espece de Grandeur.* 4

CHAP. III. *Des signes ou notes avec lesquelles on peut exprimer les nombres, & toute Grandeur. Explication des autres Notes dont on se servira.* 6

CHAP. IV. *Des principes ou veritez connuës dont on peut tirer la connoissance des proprietez de la Grandeur.* 11

CHAP. V. *De la maniere de raisonner en Mathematique. Ce que c'est que* Démonstration. 14

CHAP. VI. *De proprietez de la Crandeur, qui sont les plus simples & les plus faciles à connoître.* 18

SECT. II. *Des quatre operations de l'Arithmetique, Ajoûter, Soustraire, Multiplier & Diviser sur des grandeurs marquées avec des chifres.*

CHAP. I. *Premiere operation, Addition.* 23
CHAP. II. *Seconde operation, Soustraction.* 30
CHAP. III. *Operation troisiéme Multiplication.* 38
CHAP. IV. *Quatriéme operation, Division.* 43
SECT. III. *Des quatre operations de l'Arithmetique, Ajoûter, Soustraire, Multiplier, & Diviser sur les Grandeurs marquées avec les lettres de l'Alphabet.*
CHAP. I. *L'Arithmetique avec des lettres, est ce qu'on appelle l'Algébre. Elle s'applique aux Grandeurs positives & negatives. Ce que c'est que ces Grandeurs.* 60
CHAP. II. *Moyen de faire les quatre premieres operations de l'Arithmetique sur les grandeurs qu'on marque avec une seule lettre; qu'on appelle pour cette raison Grandeurs* incomplexes *ou* simples. 67
De l'Addition. ibid.
De la Soustraction. 69
De la Multiplication. 70
De la Division. 71
CHAP. III. *Operation de l'Arithmetique sur les Grandeurs complexes ou composées.* 73
De l'Addition. ibid.
De la Soustration. 75
De la Multiplication. 79
De la Division. 89

LIVRE SECOND.

SECTION I. DEs *differentes Puissances ausquelles on peut élever une*

Grandeur, ſelon qu'on l'augmente par l'Addition, ou par la Multiplication.
CHAP. I. *Ce que c'eſt que Puiſſance d'une Grandeur.* 87
CHAP. II. *Explication ou définition des termes dont on ſe doit ſervir, & des differentes Puiſſances auſquelles une Grandeur peut être élevée.* 89
CHAP. III. *Maniere ancienne d'exprimer les Puiſſances. La nouvelle maniere eſt plus nette & plus aiſée.* 96
CHAP. IV. *De quelques autres eſpeces de Grandeurs que les differentes manieres d'ajoûter & de multiplier produiſent.* 99
SECT. II. *De la compoſition & de la nature des Puiſſances.*
CHAP. I. *Axiomes ou demandes touchant la compoſition & la nature des Puiſſances.* 102
CHAP. II. *Propoſitions touchant la compoſition des Puiſſances.* 105
SECT. III. *De la Reſolution des Puiſſances ou de l'extraction de leurs racines.*
CHAP. I. *Ce que c'eſt que Réſolution d'une Puiſſance, ou Extraction de ſa racine. Ce que c'eſt que Racine.* 109
CHAP. II. *De l'Extraction des Racines quarrées.* 112
CHAP. III. *De l'Extraction des Racines cubes.* 124
CHAP. IV. *De l'Extraction des Racines des autres puiſſances.* 133

LIVRE TROISIE'ME.

Des Raisons ou Rapports que les Grandeurs ont entr'elles.

SECTION I. DEs *Raisons ou Rapports en général.*

CHAP. I. *On donne une idée de ce que c'est que Raison & Proportion.* 137

CHAP. II. *Définition & Explication des termes dont on se doit servir.* 142

SECT. II. *De la Proportion & Progression Arithmetique.*

CHAP. I. *Methode pour connoître les proprietez de la Proportion & Progression Arithmetique.* 146

CHAP. II. *Propositions touchant les proprietez des Proportions & Progressions Arithmetiques.* 149

SECT. III. *Des Raisons, & des Proportions & Progressions Geometriques.*

CHAP. I. *On éclaircit la notion des Raisons.* 167

CHAP. II. *Explication des termes dont on se doit servir.* 170

CHAP. III. *Explication de quelques termes moins utiles.* 174

CHAP. IV. *Des Proprietez des Raisons & des Proportions Geometriques.* 177

CHAP. V. *Usages des Proportions dans les Regles de Trois, de Compagnie, & de Fausse position.* 193

CHAP. VI. *Des Progressions Geometriques.* 201

LIVRE QUATRIE'ME.

Des Raisons composées que les Puissances & toutes les Grandeurs de plusieurs dimentions peuvent avoir entr'elles.

SECTION I. DEs Raisons composées, & de leurs proprietez.

CHAP. I. On peut nombrer les Raisons, & faire sur elles toutes les operations de l'Arithmetique, aussi-bien que sur les nombres. 215

CHAP. II. Ce que c'est que Raison composée, Définitions & Axiomes touchant les Raisons composées. 220

CHAP. III. Theorêmes & Problêmes touchant les Raisons composées. 222

CHAP. IV. Des Regles de Trois & de Compagnie composées. 227

SECT. II. Des Raisons qu'ont entr'elles les Puissances & les Grandeurs de plusieurs dimensions. 231

LIVRE CINQUIE'ME.

Des Fractions, & des Operations Arithmetiques sur les Fractions & sur les Raisons.

SECTION I. PRéparations pour faire les operations de l'Arithmetique sur les Fractions & sur les Raisons.

CHAP. I. Les Fractions sont des manieres d'exprimer une Raison ; ainsi les Fractions sont des Raisons. 246

CHAP. II. *Définitions & explications des termes. Axiomes ou propositions évidentes touchant les Fractions.* 249

CHAP. III. *Préparations nécessaires pour faire les operations de l'Arithmetique sur les Fractions & Raisons.* 253

SECT. II. *Operations Arithmetiques sur les Fractions & sur les Raisons.* 269

CHAP. I. *De l'Addition, Soustraction, Multiplication, & Division des Fractions & des Raisons.* 270

CHAP. II. *Des autres Operations Arithmetiques sur les Fractions. Problêmes curieux.* 276

SECT. III. *Des differentes especes de nombres rompus.*

CHAP. I. *Des Fractions Décimales.* 283

CHAP. II. *De la Reduction des Mesures & des Monnoyes.* 289

CHAP. III. *De l'aproximation des Racines des Puissances imparfaites, ou de l'expression* (à peu près) *en nombres rompus, de ce qu'on ne peut pas exprimer avec des nombres entiers,* 293

LIVRE SIXIE'ME.

Des Grandeurs incommensurables.

SECTION I. *Ce que c'est que la commensurabilité & l'incommensurabilité des Grandeurs. Des nombres pairs, impairs, premiers, quarrez, cubes, &c.*

CHAP. I. *Ce que c'est que Grandeur incommensurable.* 299

CHAP. II. *Préparations pour connoître si les grandeurs sont commensurables ou incommensurables.* 303

SECT. II. *Regles pour connoître si des Grandeurs proposées sont commensurables ou incommensurables.* 312

SECT. III. *Des operations de l'Arithmetique sur les Grandeurs incommensurables.*

CHAP. I. *On peut faire toutes les Operations de l'Arithmetique sur les Grandeurs incommensurables. Préparations pour cela.* 323

CHAP. II. *Les quatre operations de l'Arithmetique sur les racines sourdes.* 330

CHAP. III. *Des Binomes & Multinomes.* 335

LIVRE SEPTIE'ME.

De la méthode pour résoudre une Question ou Problême.

CHAP. I. *IL y a deux differentes Méthodes de résoudre une Question ou Problême, qui sont la* Synthese *& l'*Analyse. *Dans celle-ci on suppose les choses telles qu'elles doivent être, selon que la question est proposée. Comment cela se peut faire ?* 340

CHAP. II. *L'Analyse suppose les choses faites comme on les propose dans une Question, & par le moyen de ce qu'on y connoît, elle égale les grandeurs inconnuës à celles qui sont connuës, ce qui s'appelle trouver des Equations. Regles pour cela.* 344

CHAP. III. *De la réduction d'une Equation à une telle expression, que la grandeur inconnuë qu'on cherche, se trouve seule dans un des membres de l'Equation.* 354

CHAP. IV. *Principes des Equations ou moyens de trouver de doubles expressions qui facilitent la resolution d'un Problême.* 361

CHAP. V. *Application des précédentes regles de l'Analyse à des Problêmes particuliers. Comment on résout ces Problêmes selon la methode ancienne par des Regles de deux fausses positions; où il est aussi parlé de la Regle d'Alliage. Quelles sont ces Regles?* 364

CHAP. VI. *Résolution de plusieurs Problêmes.* 374

CHAP. VII. *De la nature des Equations, de leurs differens degrez, & des préparations nécessaires pour les résoudre.* 399

CHAP. VIII. *De la résolution des Equations composées, ou moyen de résoudre les Problêmes du second, du troisiéme & du quatriéme degré.* 414

LIVRE HUITIE'ME.

Supplément des Elemens des Mathematiques

TRAITE' *DE la progression des nombres naturels & des nombres impairs. Les fondemens de l'Arithmetique des Infinis.*

CHAP. I. *Proprietez de la Progression des nombres naturels.* 429

CHAP. II. *Proprietez de la Progression des nombres impairs.* 436

CHAP. III. *Fondement de l'Arithmetique des infinis.* 438

TRAITE' *DEs progressions Arithmetiques & Geometriques jointes ensemble. De la composition & de l'usage des Logarithmes.*

CHAP. I. *Proprietez du Triangle Arithmetique, qui comprend celles des Progressions Arithmetiques & Geometriques.* 445

CHAP. II. *L'union de la Progression naturelle des nombres avec une Progression Geometrique, se nomme Logarithmes.* 448

CHAP. III. *De la composition des Tables des Logarithmes.* 451

CHAP. IV. *De l'usage des Tables des Logarithmes.* 455

TRAITE' *DE la proportion Harmonique.*

CHAP. I. *Ce que c'est que proportion Harmonique.* 461

CHAP. II. *Proprietez de la proportion Harmonique.* 465

TRAITE' *DEs Combinaisons & des changemens d'ordre.*

CHAP. I. *Ce que c'est que Combinaison. Comment on trouve les Combinaisons possibles de deux & de plusieurs choses.* 471

CHAP. II. *Les Combinaisons se font differemment, selon la fin pour laquelle on les fait.* 476

CHAP. III. *Des changemens d'ordre.* 482
CHAP. IV. *Moyens de trouver une Combinaison dont le rang est donné dans une suite de plusieurs Combinaisons; ou la Combinaison étant donnée, trouver son rang. Application de ces moyens à la periode Julienne.* 487

Fin de la Table.

JESUS-MARIA.

Permission du R. P. Superieur Général de la Congregation de l'Oratoire de JESUS.

NOUS ABEL-LOUIS DE SAINTE MARTHE, Prêtre Supérieur Général de la Congregation de l'Oratoire de JESUS-CHRIST Nôtre-Seigneur, suivant le Prvilege à nous donné par Lettres Patentes du Roy, en datte du 12 Decembre 1672. signé NOBLET, par lesquelles sont faites défenses à tous Imprimeurs & Libraires, & à tous autres, d'imprimer ni mettre au jour aucun des Livres composés par ceux de notre Congregation, sans notre expresse licence par écrit, à peine de confiscation des Exemplaires, & de mille livres d'amende: Permettons au sieur André Pralard, Libraire Imprimeur à Paris, de faire imprimer & exposer en vente un Livre intitulé, *Elemens des Mathematiques, ou Traité de la Grandeur, composé par le R. P.* LAMY, Prêtre de notre Congregation. DONNE' à Paris le premier Octobre 1687.
Signé, A. L. DE SAINTE-MARTHE.

ELEMENS

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE PREMIER.

PREMIERE SECTION.

La science de la Grandeur en general doit être regardée comme les Elemens de toutes les Mathematiques.

CHAPITRE PREMIER.

Quel est le sujet de ce Traité de la Grandeur en general.

MA principale vûë dans cet Ouvrage est d'ouvrir l'esprit, & de le rendre capable des Sciences. Je traite donc ces Elemens de Mathematiques de maniere, qu'ils servent de modele pour toute autre étude : car on pourra 1.

regarder ce qu'ils contiennent comme des exemples, qui rendent ſenſibles les regles qu'il faut ſuivre dans la recherche de la Verité; Pour cela, ceux qui liront mon Ouvrage, doivent ſe mettre en ma place, ne conſiderant pas qu'ils ont un Livre entre les mains, mais ſe regardant comme Auteurs, & comme ayant à trouver ce que ce Livre propoſe d'enſeigner. Je ne leur ſervirai que de guide; je ne fais point le perſonnage de Maître, je prépare l'eſprit de celui qui lit mes Ecrits de maniere, que de lui-même il peut, avec une mediocre attention, découvrir la verité des principes que j'expoſe, & appercevoir les conſequences qui en ſont les ſuites naturelles.

Je me comporterai donc ici comme ſi je ne ſçavois pas moi-même ce que c'eſt que les Mathematiques, ſi ce n'eſt que, ſelon qu'on parle de ce que les Mathematiciens peuvent faire, j'apperçois que l'objet general de toutes les mathematiques, c'eſt tout ce qui eſt Grand, ou la Grandeur conſiderée en general. Grandeur, c'eſt tout ce qui peut être augmenté ou être diminué: ce qui a des parties. Les Mathematiciens conſiderent les corps, ils font des figures, ils meſurent la terre, le mouvement des cieux; ils font des machines, ils ſont Architectes. En toutes ces choſes, la Grandeur eſt leur objet. Ce nom comprend toutes les choſes materielles & preſque toutes les ſpirituelles, non ſeulement les corps, mais encore les eſprits. Car les Anges peuvent faire une compagnie qui peut être augmentée ou diminuée. On conçoit qu'on y peut ajouter d'autres Anges, ou les en retrancher. Chaque Ange fait partie de cette compagnie.

Ce mot de *Grandeur* ne convient donc pas ſeulement aux corps qui ſont étendus en longueur, largeur & profondeur, mais encore au temps, au mouvement, aux ſons. Le temps a des parties : il peut être augmenté ou diminué : il eſt composé d'années, de mois, de ſemaines, de jours, d'heures, de minutes, &c. Le mouvement a auſſi des parties ou dégrez, ſelon leſquels il s'augmente ou ſe diminuë. Un corps ſe meut ou plus vite ou plus lentement qu'un autre, deux fois, trois fois, &c. Les oreilles apperçoivent des dégrez dans les ſons: un ſon eſt plus fort ou plus foible, il s'augmente ou il ſe diminuë. Generalement tout ce qui a des dégrez eſt renfermé dans l'idée de la Grandeur : ainſi les qualitez, les perfections, qui ont des dégrez ſelon leſquels elles s'augmentent ou elles ſe diminuënt, ſont des Grandeurs ; De ſorte que la ſcience de la Grandeur eſt une ſcience univerſelle, qui s'étend preſque à toutes choſes. Au moins elle comprend en general toutes les Mathematiques; C'eſt pourquoi on lui a donné le nom de *Mathematique Univerſelle*, & *de Clef des Mathematiques*. Certainement cette ſcience en eſt les élemens, c'eſt-à-dire l'entrée: elle en découvre les premiers principes: elle contient ce qu'il faut ſçavoir avant toute autre choſe, & ce qui étant bien connu donne une merveilleuſe facilité pour en apprendre toutes les parties. Ce mot *Element* étant pris pour les principes d'une ſcience, ce qui en donne une connoiſſance generale, en eſt les Elemens. S'il n'y a donc aucune partie des Mathematiques qui n'ait pour objet quelque Grandeur, ſans doute que la ſcience de la Grandeur en general en doit être regardée comme les Elemens. C'eſt donc par un Traité de la Grandeur en general qu'il en faut commencer l'étude.

CHAPITRE II.

Ce que c'est que la grandeur. Elle est successive ou permanente, continuë ou discrete. Les Nombres se peuvent appliquer à toute espece de Grandeurs.

2. GRandeur, c'est tout ce qui peut être augmenté ou diminué, ce qui a des parties. Tout ce qui est grand a des parties unies ou separées. La grandeur des corps est continuë ; leurs parties, de quelque maniere qu'on les considere, ou selon leur longeur, ou selon leur largeur, ou selon leur profondeur, sont unies. Toutes les autres grandeurs ont leurs parties separées ; car une compagnie d'esprits est composée d'esprits qui sont distinguez. Les parties du temps, du mouvement, des sons, ne sont pas liées les unes avec les autres : ce qui fait qu'on distingue la grandeur, ou *la quantité,* comme on parle dans les Ecoles, en *successive* & *permanente.* La successive est celle dont les parties se succedent les unes aux autres, ou existent les unes après les autres, comme le temps & le mouvement. La permanente est celle dont toutes les parties existent en même temps ; elle se subdivise en *discrete* & *continuë.* Les corps ont une quantité continuë, leurs parties sont liées. La quantité discrete est celle de toutes les choses qui sont grandes, dont les parties sont separées ; ce que marque ce mot, *discrete.*

La quantité discrete se nomme *Nombres*, & la science qui traite des nombres, *Arithmetique*, d'un mot grec *Arithmos*, qui signifie *nombre.* Les nombres ne sont proprement que des noms, qui expriment les parties que l'on conçoit dans ce qui a de la grandeur. Or quoique la quantité continuë ait ses parties unies, on peut au moins par la pensée conçevoir entr'elles de la distinction ; & ainsi on peut dire que la quantité discrete ou les nombres, comprennent la quantité continuë, & que ce que l'on enseigne de la quantité discrete ou des nombres, s'y peut appliquer. Les nombres sont composez de parties déterminées & indivisibles, ou plûtôt que l'on conçoit comme indivisibles ; & à la divisibilité desquelles on ne fait point attention. Car par exemple, lors qu'on veut mesurer une perche, & qu'on trouve qu'elle est égale à six pieds, on n'y considere que six parties, ne faisant point attention aux plus petites parties dans lesquelles chacune de ces six parties peut être divisée.

Les nombres ne sont donc que des noms, dont les hommes se servent pour exprimer la quantité determinée des parties qu'ils conçoivent dans une grandeur. *Un*, est un nom que l'on a donné à une grandeur qui est indivisible, ou que l'on considere sans avoir égard aux parties qu'elle peut contenir, mais seulement qu'on regarde comme pouvant faire partie de plusieurs autres grandeurs. Ainsi il n'est pas si difficile qu'on le veut faire croire, de donner une idée de *l'Unité*; parce que ce mot ne marque qu'une maniere de concevoir. *Deux*, est un nom qui signifie une partie d'une grandeur jointe à une autre partie; ainsi des autres nombres. On dit que *l'unité* n'est pas *nombre*, parce que l'on veut par ce mot marquer pluralité, ou multitude de deux ou plusieurs *unitez* ; c'est-à-dire de plusieurs choses que l'on conçoit chacune comme faisant partie d'un même tout ; & en tant que chacune s'appelle *une*, elle est regardée comme n'ayant point de parties.

Mais ſuivant l'idée que nous avons donné du *nombre*, qui ſans contredit eſt la plus naturelle de toutes, rien n'empêche qu'on n'y puiſſe comprendre l'*unité.*

Les nombres limitent donc en quelque maniere cette proprieté de preſque tout ce qui eſt grand, de pouvoir être diviſé à l'infini ; car un pied ſe diviſe en pluſieurs pouces, un pouce en pluſieurs lignes, une ligne en pluſieurs points, & ainſi à l'infini. Les nombres, dis-je, ſemblent borner & terminer cette diviſibilité ; car on n'appelle une grandeur *une*, que lors qu'on la conçoit comme dans la derniere diviſion, dont elle eſt capable. Neanmoins, comme on le verra dans la ſuite, on peut exprimer même par des nombres ſa diviſibilité, en diſant par exemple *la moitié* de cette grandeur, *le quart, le tiers*, &c. Les nombres qui expriment ces ſubdiviſions ſe nomment *nombres rompus ;* au lieu que ceux qui expriment les premieres diviſions s'appellent *nombres entiers.* Comme les nombres conviennent à toute ſorte de Grandeurs, la Grandeur en general n'eſt proprement qu'un Traité d'Arithmetique.

CHAPITRE III.

Des ſignes ou notes avec leſquels on peut exprimer les Nombres, & toute Grandeur. Explication des autres notes dont on ſe ſervira.

3. POUR abreger l'expreſſion d'un nombre & de toute ſorte de grandeurs, on ſe ſert de *ſignes* ou *notes.* L'on appelle *chifres* ces caracteres que l'on dit que les Arabes nous ont donné. Les voila, avec les noms dont ils tiennent la place, ou qu'ils

ſignifient. 1, *un.* 2, *deux.* 3, *trois.* 4, *quatre.* 5, *cinq.* 6, *ſix.* 7, *ſept.* 8, *huit.* 9, *neuf.*

Ces chifres déterminent la maniere dont on conſidere une ou pluſieurs grandeurs. Ils marquent qu'on y conſidere un certain nombre de parties; Par exemple ce caractere 3, marque que la grandeur à laquelle on l'applique, a trois parties, ou qu'elle eſt composée de trois grandeurs, chacune plus petite qu'elle, & qui ſont égales entr'elles, ou de même nature : comme trois pieds, trois pouces, trois ſols, trois livres, &c. Ainſi les chiffres ne ſont d'uſage que lorſque les grandeurs qu'il faut marquer ſont connuës, & par conſequent qu'on voit qu'elles ont tant de parties, ou qu'on y peut concevoir tant de parties. C'eſt ce qui fait qu'il eſt bon d'avoir d'autres ſignes ou notes que ces chiffres. On eſt accoutumé aux lettres de l'Alphabet, on ſe les repreſente facilement. Or quelques grandeurs qu'on puiſſe propoſer, on les peut marquer avec des lettres, appeller l'une *a*, l'autre *b*, l'autre *c*, &c. quoi qu'on ne ſçache pas encore leur valeur; car pour appeller l'une *b* & l'autre *a*, il n'eſt pas neceſſaire qu'on ſçache la quantité de parties qu'elles peuvent avoir au regard l'une de l'autre, au lieu que je ne les puis marquer avec des chiffres, & appeller l'une, par exemple 2, & l'autre 3, ſi je ne connois leur valeur au regard l'une de l'autre, que l'une eſt par exemple les deux tiers de l'autre. Ainſi les lettres ſont des notes plus generales. On s'en peut ſervir pour marquer les nombres, au lieu qu'on ne ſe peut ſervir de nombres ou chifres que pour marquer les grandeurs qu'on connoît.

Il ſemble que les hommes ayent d'abord commencé à compter ſur leurs doigts. L'on voit que preſque toutes les Nations, après avoir compté juſques à dix, autant que nous avons de doigts, recommencent. Les Hebreux & les Grecs après avoir marqué les nombres juſques à dix par les dix premieres lettres de leur Alphabet, la onziéme lettre eſt la marque de vingt, la ſuivante de trente, & ainſi de ſuite; & pour marquer les nombres qui ſe trouvent entre dix & vingt, entre vingt & trente, &c. comme quinze, ils joigent la cinquiéme lettre avec celle qui marque dix. Les Latins marquoient dix par un X, cinq par un V, l'unité par un I, deux par II, trois par III; & pour abreger ils ſe ſervoient du V & du X pour marquer de moindres quantitez, mettant devant autant de fois I que ces quantitez valent moins que V ou X: ainſi IV vaut quatre, & IX vaut neuf. Pour les grands nombres ils les marquoient par la premiere lettre de leur mot Latin. Ainſi C, par où commence ce mot *centum*, marque *cent*; & M, premiere lettre du mot *mille*, eſt la marque de *mille*. La lettre D, vaut *cinq cens*. On prétend que cette note étoit dans le commencement la moitié de cette note CIↃ, dont on ſe ſervoit pour marquer *mille*.

Je ne dis ceci qu'en paſſant, car cela ſe trouve expliqué ailleurs; & ce n'eſt que pour faire voir combien les chiffres ſont plus commodes. Les Arabes, de qui nous les avons reçus, ont ſuivi cette ancienne maniere de compter, en recommençant après qu'on eſt venu juſqu'à dix. Il eſt important de bien conſiderer que la valeur des chifres ne dépend pas ſeulement de leur figure, mais de leur diſpoſition. Lors que pluſieurs chifres ſont rangez de ſuite dans une même ligne, ceux qui ſont dans la premiere place, commençant à compter de droit à gauche, ne valent jamais plus qu'eux-mêmes. Ceux qui ſont dans la ſeconde place, valent dix fois davantage que dans la premiere : 1, par exemple, dans la premiere, ne vaut qu'une ſeule unité ; dans la ſeconde, il vaut une dixaine ; dans la troiſiéme, dix fois d'avantage, ſçavoir dix dizaine, ou une centaine ; dans la quatriéme, dix centaines, ou un mille ; dans la cinquiéme, dix fois mille, ou dixaines de mille ; dans la ſixiéme, dix dixaines de mille, c'eſt à dire cent mille ; dans la ſeptiéme, une dixaine de centaine de mille ou million ; dans la huitiéme, une dizaine de millions ; dans la neuviéme, une centaine de millions ; dans la diziéme, un milliard, ou billion ; dans la onziéme, une dizaine de milliards, dans la douziéme, une centaine de milliards ; ainſi de ſuite : en ſorte que la valeur d'un chifre eſt dix fois plus grande dans le rang ſuivant, que dans le precedent.

Pour augmenter ainſi la valeur de chaque chifre, on ſe ſert d'un ou de pluſieurs *zero,* ſelon que l'on veut faire valoir ce chifre. Les zero ſont faits ainſi, 0, en rempliſſant les premiers rangs, ils font voir que le chifre après lequel ils ſont placez eſt dans un rang plus reculé : comme ſi après 2, il y a deux zero en cette ſorte 200, ces deux zero feront voir que 2 eſt dans le troiſiéme rang, où il vaut deux cens : Ainſi quoique les zero ne ſignifient rien d'eux-mêmes, ils ne ſont pas inutiles, puiſqu'ils déterminent les rangs des chifres, ſelon leſquels leur valeur augmente ou diminuë par proportion décuple. Il a plû aux premiers Inventeurs de ces chifres d'établir cette proportion, ce qui étoit purement arbitraire.

Lorſqu'il y a pluſieurs chiffres ſur une même ligne, pour éviter la confuſion, on les coupe de trois en trois par tranches, ou ſeulement on laiſſe un petit eſpace vuide ; & chaque tranche, ou chaque *ternaire* a ſon nom. Le premier ternaire s'appelle unitez ; le ſecond, mille ; le troiſiéme, millions ; le quatriéme, milliards, ou billions ; le cinquiéme, trillions ; le ſixiéme, quatrillions. Et comme dans le premier ternaire on compte 1° nombre ou unitez, 2°. dizaine ; 3°. centaine, dans chaque autre ternaire, on dit de même, nombre, dixaine, centaine. Mais ſi c'eſt dans le troiſiéme ternaire, cela voudra dire nombre de millions, dizaine de millions, centaine de millions ; au lieu que dans le premier ternaire, quand on dit nombre, ou dizaine, ou centaine, on n'entend parler que d'unitez : tant d'unitez, tant de dizaines d'unitez, tant de centaines d'unitez.

Conſiderons avec ſoin la diſpoſition de ces chifres qui eſt très ſimple, & qui fait qu'avec neuf caracteres & les zero on peut exprimer quelque nombre que ce ſoit pour grand qu'il puiſſe être.

de quintillions.			de quatrillions.			de trillions			de billions.			de millions.			de mille.			d'unitez.		
centaine	dizaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dizaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dizaine	nombre	centaine	dizaine	nombre	centaine	dixaine	nombre
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	&c																			

Pour donner à un chifre la valeur qu'il doit avoir, il n'y a qu'à augmenter le nombre des zero qui le précedent. Quand on paſſe les quintillons, cela s'appelle ſextillions, ſeptillions ;

ainſi de ſuite. Ce ſont des mots que l'on invente, parce qu'on n'en a point d'autres.

Cette marque +, ſignifie *plus*. *A* + *B*, c'eſt *A plus B*.

Celle-ci —, ſignifie *moins*. *A* — *B*, c'eſt *A moins B*.

= C'eſt la marque de l'*Egalité*. *C* = *D*, ſignifie que *C* eſt égal à *D*. Au lieu de ce ſigne, on trouve en pluſieurs Livres celui-ci ✕ pour marque de l'Egalité.

× eſt le ſigne de la Multiplication. Il ſignifie proprement *par*. Pour dire qu'il faut concevoir *A* multiplié par *B*, on écrit *A* × *B*.

ſ̃. ou *ſupra*, c'eſt *ci-deſſus*.

L. *Livre*.

n. *nombre*. On met des nombres dans les marges de cet Ouvrage, qui ſervent à trouver les endroits où l'on renvoie. L. 2. n. 6. c'eſt-à dire, *livre ſecond*, *nombre ſix*.

Si ce qu'on allegue eſt du même Livre, on cite le nombre précedent qui eſt à la marge avec cette note ſ̃. Ainſi ſ̃. n. 5. c'eſt à dire, *ci-deſſus nombre cinquiéme*. Les autres notes qui ſont dans l'Ouvrage, ſont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en ſervir.

CHAPITRE IV.

Des principes ou veritez connuës dont on peut tirer la connoiſſance des proprietez de la Grandeur.

AVANT que de paſſer outre je dois examiner ſi je puis avoir quelque lumiere qui me guide dans les recherches que je ferai, & qui me faſſe diſtinguer la Verité, ſi je ſuis aſſez heureux pour la rencontrer, ou qui me redreſſe, ſi je me trompe. Je ſuis déja convaincu par pluſieurs ex- 4.

periences qu'on ne ſe trompe point, lorſqu'on ne donne ſon conſentement qu'à des choſes claires, que les choſes ſont ce qu'il nous paroît clairement qu'elles ſont. Je ſçai auſſi qu'il y a de certaines verités connuës de tout le monde, qui peuvent ſervir de flambeau, parce que toutes les choſes qui ont de la liaiſon avec elles, & qui ſont une même choſe, doivent être également certaines.

Par exemple, je ſçai qu'il ne ſe peut pas faire qu'*une choſe ſoit & qu'elle ne ſoit pas*; d'où je conclus qu'*une grandeur eſt égale à elle-même*; & de cette verité je conclus de rechef, qu'il ne ſe peut pas faire que *le tout ne ſoit pas égal à toutes ſes parties*; car le tout & toutes les parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe. Voilà un nombre de verités ſemblables qu'on nomme principes ou axiomes que je rangerai ici, & que je tâcherai de me rendre bien preſentes. Et comme il eſt important de s'accoutumer de bonne heure aux manieres de parler des Mathematiciens, & aux ſignes ou notes dont ils ſe ſervent, pour rendre leur diſcours plus court & plus exact, j'exprimerai ces axiomes avec ces notes & à leur maniere.

PRINCIPES GENERAUX, ou verités claires & connuës, à qui on donne le nom d'Axiomes.

PREMIER AXIOME.

Le Tout eſt plus grand que ſa partie.

Ainſi, ſi *A* & *B* ſont les parties de la Grandeur *X*, il faut que *X* ſoit plus grand que *A* & *B* pris ſéparément.

SECOND AXIOME.

Le Tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

Si *A* & *B* ſont toutes les parties de la grandeur *X*, il eſt évident que $A+B$, c'eſt à dire *A* avec *B*, eſt égal à *X*; ce qui exprime ainſi $A+B=X$.

TROISIE'ME AXIOME.

Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles.

Suppoſé que A ſoit égal à Z, & que B ſoit auſſi égal à Z, alors A & B ſont deux grandeurs égales. On exprime ainſi ce raiſonnement : ſi $A=Z$, & $B=Z$, ou ſi $A=Z=B$, donc $A=B$. Je me ſervirai ſouvent de cette expreſſion : qu'on y faſſe donc attention. On peut joindre à cet axiome celui-ci qui n'eſt pas moins évident : Si A eſt egal à B, toute grandeur plus grande ou plus petite que B, ſera plus grande ou plus petite que A.

QUATRIE'ME AXIOME.

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'égales, elles demeurent égales, ou les ſommes ſont égales.

Si $A=B$, ajoûtant à A & à B la même grandeur X, ils demeurent égaux ; $A+X=B+X$.

CINQUIE'ME AXIOME.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

Si $A=B$, donc $A-X=B-X$; c'eſt à dire que ſi A & B ſont deux grandeurs égales, A moins X eſt égal à B moins X.

SIXIE'ME AXIOME.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, elles reſteront inégales, l'une plus grande, ſi elle étoit plus grande, l'autre plus petite, ſi elle étoit plus petite.

Si X & Z ſont des grandeurs inégales & que A & B ſoient des grandeurs égales, $X+A$ & $Z+B$ ſeront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, ſelon ce qu'ils étoient auparavant.

SEPTIE'ME AXIOME.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux, l'un plus grand, ſi la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit, ſi la grandeur étoit plus petite.

C'est à dire, que si *X* & *Z* sont des grandeurs inégales, & *A* & *B* des grandeurs égales, *X—A* & *Z—B* seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce que *X* & *Z* étoient auparavant.

HUITIE'ME AXIOME.

Une grandeur qui a le signe + étant jointe avec elle-même ou avec son égale, qui a le signe —, est égale à rien.

C'est a dire, +*A*—*A* n'est rien. On sçait qu'un zero n'a point de valeur : on exprime donc ainsi cet Axiome: +*A*—*A*=0 : ôtant ce qu'on a mis, il ne reste rien.

NEUVIE'ME AXIOME.

Les choses qui sont moitié, ou tiers, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales ; inégales, si les grandeurs entieres sont inégales ; plus grandes, si les grandeurs entieres sont plus grandes ; plus petites, si les grandeurs entieres sont plus petites.

On pourroit proposer plusieurs autres semblables Axiomes, c'est à dire plusieurs autres veritez qu'on ne peut ignorer, & dont on ne dispute point.

CHAPITRE V.

De la maniere de raisonner en Mathematique. Ce que c'est que Demonstration.

5. TOUT ce qui est contraire à ces Axiomes, est faux, & tout ce qui a avec eux une liaison necessaire est vrai & certain : ainsi ce sont des sources de lumieres, comme je l'ai experimenté. Ce n'est pas neanmoins de ces seules veritez, qu'on peut tirer la connoissance entiere du sujet qu'on traite ; c'est encore de la notion claire qu'on a de ce sujet, c'est à dire de sa nature, ou de ce qu'on connoît

qu'il eſt. La veritable methode pour connoître une choſe, eſt de faire attention à ce qu'elle eſt. Sçavoir, c'eſt connoître ce que ſont les choſes. Toute connoiſſance eſt une veritable ſcience, lorſqu'on ne prétend ſçavoir que ce que l'on voit clairement dans l'idée de la choſe qu'on étudie. C'eſt à quoi pluſieurs n'ont pas aſſez pris garde. Ainſi je reconnois ici que pour avoir une veritable ſcience de la Grandeur, il faut conſiderer avec attention l'idée qu'on en a. Tout ce qui ſe tirera de cette idée ne ſera pas moins certain, que les conſequences des principes que nous venons de propoſer. Comme de l'idée qu'on a du corps de l'homme, l'on conclut, ſans erreur, que notre corps pour être parfait, doit avoir une tête, des pieds, des bras, & les autres parties.

Lorſqu'on a ſuppoſé que les choſes étoient faites de la maniere dont on convient, tout ce qui ſuit neceſſairement de cette ſuppoſition eſt une verité : comme ſi l'on convient que certaines regles ſont bonnes ; ſuppoſé qu'on les ait ſuivies, on ne peut rejetter les conſequences qui en ſont tirées. Nous verrons comme de la ſeule diſpoſition des chifres, telle qu'on l'a ſuppoſée, on en déduit pluſieurs conſequences, qu'on voit clairement dans l'idée qu'on a de cette diſpoſition.

Voila donc la methode qu'il me faut ſuivre, pour trouver la verité. Premierement je dois conſiderer avec attention l'idée des choſes que je voudrai connoître, c'eſt à dire conſiderer ce qu'elles ſont, ou quelle eſt leur nature, que je dois bien definir, en marquant préciſement la notion que j'en ai. La definition d'une choſe, c'eſt une propoſition qui explique ſa nature, ou ce qu'elle eſt. Il y a des définitions de mots, c'eſt à dire, des propoſitions qui déterminent l'idée d'un mot, &

qui en ôtent la confusion. Il est necessaire de définir les termes dont on se doit servir, car souvent ils sont équivoques ; & comme c'est, pour ainsi dire, au travers des noms que nous voyons les choses dont on nous parle, si les termes sont obscurs, on ne voit les choses que confusément. Lors qu'une définition est bonne, si c'est une définition de mot, elle marque précisément ce que ce mot signifie ; & si elle définit une chose, elle en doit donner une idée, où l'on apperçoive ce qu'elle est ; de sorte qu'en étudiant cette idée, on y découvre toutes les proprietez essentielles de cette chose.

Il y a des choses si claires & si faciles à faire, que personne ne les conteste, & qu'ainsi on accordera volontiers, comme par exemple. *Qu'un nombre peut être ajoûté à un autre nombre*, ou *qu'il en peut être retranché, s'il est plus petit*. C'est ce que les Mathematiciens appellent *Demandes*, c'est à dire des choses qu'on accorde, parce qu'on ne peut pas les contester. Comme la verité naît de la Verité, & qu'il y a peu de veritez steriles, il faut faire attention à tout ce qui est incontestable, & que tout le monde accorde, afin de voir ce qui s'en peut déduire.

Il faut sur toutes choses avoir présens à l'esprit ces principes generaux, ces veritez connuës dignes qu'on les croye, qu'on appelle pour cela *Axiomes* ; c'est ce que ce mot grec signifie. Elles servent comme de flambeau, & c'est par leur moyen qu'on reconnoît presque en toute occasion si on a trouvé la verité, ou si l'on s'est trompé. Nous avons proposé ci-dessus, ceux qui avoient plus de rapport au sujet que nous devons traiter. Ensuite on s'applique à resoudre les questions ou propositions que l'on peut faire sur le sujet qui se traite. Sil s'agit de connoître & de démontrer une verité de ſpeculation, la propoſition s'appelle *Theorême :* c'eſt un mot grec qui dit cela. S'il s'agit de faire quelque choſe, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire, cela s'appelle *Problême* ; ce mot grec ne ſignifie que propoſition.

Pour démontrer un Theorême, il faut quelquefois faire preceder une propoſition qui ſerve à la démonſtration qu'on veut faire, & qui ſoit comme une *anſe* par laquelle on peut attraper, & prendre la verité dont il s'agit. Dans toutes les Sciences, lorſqu'on cherche une verité importante, il faut examiner par quel endroit on la peut attaquer ; ce qu'il faudroit ſçavoir, ce qu'il faudroit avoir démontré pour la bien connoître, ou la faire connoître. Or, lorſqu'on propoſe une verité, dont on ne parle que pour faire connoître une autre verité, la propoſition que l'on fait s'appelle *Lemme*. C'eſt un mot grec, qui ſignifie proprement le titre ou l'argument qu'on met à la tête d'un Livre ou d'un Chapitre, qui fait connoître de quoi on doit traiter. On ne met un Lemme là où il eſt, que pour donner une entrée dans la propoſition qui ſuit.

On nomme *Corollaire* une propoſition, qui n'étant qu'une ſuite d'une propoſition precedente, contient une verité qui s'apperçoit auſſitôt qu'on a reconnu la verité de cette propoſition precedente.

Selon ce que je viens de dire, lorſque la verité d'une propoſition eſt évidente, je dois me contenter de l'énoncer par des termes clairs ; car la verité n'a beſoin pour preuve que d'elle-même ; la clarté eſt ſon caractere. Si une propoſition a beſoin de preuves, je ne puis la prouver qu'en faiſant voir qu'elle eſt une ſuite, ou d'un Axiome, ou de la définition, c'eſt-à-dire de la notion claire de la choſe, ou des ſuppoſitions qu'on a faites qui ſont inconteſtables, que tout le monde accorde, & qui ont été reçuës pour veritables, ou de ce qui a été démontré auparavant dans un *Lemme*, dans un *Theorême*, dans un *Problême*, dans un *Corollaire*, &c. Un raiſonnement fait avec cette exactitude, s'appelle *Demonſtration*.

CHAPITRE VI.

Des proprietez de la Grandeur, qui ſont les plus ſimples & les plus faciles à connoître.

6. CE que je viens de faire n'eſt que pour me diſpoſer à examiner ce que c'eſt que la Grandeur. Comme la methode avec laquelle je ferai cet examen, doit ſervir de modele pour toutes les autres études, je conſidererai premierement ce que moi-même je dois faire ici, qui eſt de faire une grande attention à ce que l'idée de la grandeur me preſente; car il eſt évident que dans ce que l'eſprit voit, auſſi-bien que dans ce que voyent les yeux du corps, on ne découvre ce que ſont les choſes qu'en les regardant de près, & avec ſoin. Je ne connois ce que c'eſt qu'une fleur, quelle eſt ſa figure & ſa couleur, qu'en la regardant attentivement; quelle eſt ſon odeur, qu'en flairant; quelle eſt ſa ſaveur, qu'en la goûtant. Auſſi pour connoître ce que c'eſt que la Grandeur, il faut que je ſois attentif à ce que me preſente ſon idée. Connoître, c'eſt voir ce que ſont les choſes. Quand j'étudie la Grandeur, c'eſt pour voir ce qu'elle eſt; elle eſt ce que repreſente ſon idée. Mais comme je ſçai que mon eſprit eſt fini, qu'il s'égare, qu'il ſe trompe; je dois conſiderer les choſes peu à peu & comme par

parties, afin de donner une attention entiere à tout ce que j'examinerai, n'examinant d'abord que ce qui eſt le plus ſimple.

J'ai vû que la Grandeur eſt ce qui peut s'augmenter ou être diminué ; d'où j'apperçois que c'eſt une proprieté de tout ce qui eſt grand, qu'on lui peut ajoûter une autre grandeur, & en retrancher celle-là, ou une autre qui lui eſt égale ou plus petite: ce qui convient generalement à tout ce qui eſt grand. Une compagnie d'eſprits peut s'augmenter par addition, & ſe diminuer par un retranchement ou ſouſtraction. On peut concevoir un Ange avec un autre Ange : ce qui eſt une addition ; & que d'une compagnie d'Anges on en retranche d'eux, trois, quatre Anges.

Multiplier une grandeur, c'eſt l'ajoûter à elle-même un certain nombre de fois. Multiplier cinq par ſix, c'eſt ajoûter cinq à ſoi-même, ſix fois. Ainſi c'eſt une proprieté de tout ce qui eſt grand, de pouvoir être multiplié. La diviſion n'eſt pareillement qu'un retranchement, ou ſouſtraction. Diviſer une grandeur par une autre, c'eſt retrancher celle-ci de la premiere autant de fois qu'elle y eſt contenuë. Diviſer une compagnie de ſoixante eſprits par vingt, c'eſt voir combien dans ſoixante il y a de fois vingt, & retrancher vingt de ſoixante autant qu'il y eſt de fois, c'eſt-à-dire trois.

Ces proprietez ſont faciles à connoître. L'idée de la Grandeur les preſente d'abord, ſans qu'on les recherche. Elles ſont extrémement ſimples ; mais pour cela on ne doit pas en faire peu de cas : car j'ai reconnu que les principes de toutes les choſes naturelles ſont très-ſimples, & que lors qu'on a une fois le principe, on a tout.

Il eſt manifeſte que toutes les choſes materielles ſont faites par des additions, & des multiplications; que les changemens qui leur arrivent, ſe font par des retranchemens & des diviſions. Mais il faut, avant que de paſſer outre, & de vouloir conſiderer en chaque grandeur comment elle eſt composée de parties ajoûtées & multipliées, & comment elle ſe peut reſoudre ou décompoſer par la ſouſtraction & par la diviſion, il faut, dis-je, examiner auparavant, comment tout cela ſe peut faire, c'eſt-à-dire comment on peut *ajoûter*, *ſouſtraire*, *multiplier*, & *diviſer*, qui ſont les quatre premieres & principales operations de toute l'Arithmetique.

Lorſque les Grandeurs ſont petites, ou qu'on les peut exprimer avec un ou deux caracteres, ces quatre operations ſont faciles : on voit tout d'un coup que 4 & 6 font 10; que de 10 ôtant 6 reſte 4; que ſi on multiplie 2 par 4, cela fait 8; combien de fois 2 eſt en 4, qu'il y eſt deux fois : il n'y a rien de plus évident, & par conſequent rien de plus facile. Mais il n'en eſt pas de même lorſque les nombres ſont grands; je n'apperçois pas tout d'un coup, comme je le faiſois dans les exemples propoſez, ce que fait 678 ajoûté avec 593; ni ce que produiroient ces deux nombres, ſi on les multiplioit l'un par l'autre; ni ce qu'il reſteroit de 678, après en avoir retranché 593; ni combien de fois ce dernier nombre 593, eſt dans 678.

Voilà en quoi conſiſte tout le ſecret *de l'Arithmetique*, ou *de l'Art de nombrer*: C'eſt de faire par parties, ce qu'on ne peut pas faire tout d'un coup; & c'eſt à quoi il faut faire une attention particuliere, non-ſeulement pour entendre ce que l'on traite ici, mais generalement pour toutes ſes autres études : car ce qui fait qu'on trouve de la difficulté, qu'on n'avance pas, & qu'on tombe dans l'erreur, c'eſt qu'on veut trop entreprendre. L'eſprit eſt borné. Quand il ne s'applique qu'à des choſes ſimples, il les comprend facilement; mais quand il y a pluſieurs choſes à voir, & qu'il ne les ſçait pas prendre les unes après les autres, il n'en prend aucune comme il faut. Or ce qu'on fait dans l'Arithmetique, donne un exemple de la methode qu'il faut ſuivre. Dans les quatre operations dont il eſt ici queſtion, l'on n'ajoûte jamais que deux grandeurs, dont chacune ne s'exprime que par un des neuf premiers nombres; on ne multiplie à la fois que deux chifres l'un par l'autre, dont chacun ne peut valoir plus de neuf. Il en eſt de même de la ſouſtraction, & de la diviſion, comme on le verra dans la ſuite.

Cela ſe fait par le moyen de cette diſpoſition des chifres, de laquelle j'ai parlé; car on range les grandeurs ou leurs ſignes, qui ſont des chifres, de maniere que les unitez ſoient ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, & enſuite on opere ſeparement ſur chaque chifre: de ſorte que l'on menage la capacité de l'eſprit; on ne l'accable point; & on lui fait faire les choſes les unes après les autres; ce que je repete afin qu'on y faſſe attention, & qu'on ſuive cet exemple dans toutes les recherches d'eſprit que l'on fera jamais.

Tout ce que l'on va donc dire touchant les quatre operations dont on a parlé, eſt extrémement facile. J'ai dit qu'on marque les grandeurs avec deux ſortes de ſignes, qui ſont les lettres & les chifres. Je conſidererai premierement comment on opere avec les chifres; car il n'y a rien dont les idées ſoient plus claires, que celles des nombres que les chifres marquent. Vous verrez qu'il ne s'agira que d'exprimer ſur le papier l'addition de deux chifres; par exemple de 6 & de 7, qui fait *treize*, qu'il eſt facile de marquer ſur le papier ; car *treize*, c'eſt une dizaine & trois unitez; ainſi il faut mettre 3 dans le premier rang, qui eſt celui des unitez, & 1 dans le ſecond rang, qui eſt celui des dizaines. Il en eſt de même des autres operations, dont je vais parler. Enſuite j'examinerai comment on peut faire les mêmes operations avec les lettres de l'Alphabet, qui marquant les choſes d'une maniere fort generale, ne font pas tant d'impreſſion : elles ne déterminent pas l'eſprit, qui ne conçoit point facilement les choſes quand elles ſont abſtraites. Quand je nomme *x* une certaine grandeur, je la répreſente d'une maniere generale, où un eſprit qui n'eſt pas accoutumé à ces manieres abſtraites, ne conçoit rien : il ne ſe peut rien imaginer qui l'arrête, qui le détermine ; au lieu que ſi je la déſigne par ce chifre 7, auſſi-tôt, ſelon la matiere dont il s'agit, il conçoit une grandeur qui a ou 7 pieds, ou 7 pouces. Si c'eſt d'une ſomme d'argent dont on parle, il s'imagine un nombre ou de piſtoles, ou d'écus, ou de livre, &c. Les choſes particulieres & individuelles ſe conçoivent plus aiſément ; parce qu'il n'y a qu'elles qu'on puiſſe ſentir ou imaginer. Ce n'eſt que par la pointe de l'eſprit, pour ainſi dire, qu'on atteint & qu'on conçoit les choſes generales. Comme il y a des choſes qui ne peuvent être ſenſibles, il eſt important de s'accoutumer à concevoir ce qui eſt abſtrait, c'eſt-à-dire ce qui eſt ſeparé de toute matiere. Mais auſſi puiſqu'il faut commencer par ce qui eſt plus facile, & que ſans contredit les chifres ſe conçoivent plus facilement que les lettres & notes d'Algebre, voyons premierement, comme l'on fait ces quatre premieres operations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs marquées avec des chifres.

SECTION SECONDE.

DES QUATRE OPERATIONS DE L'ARITHMETIQUE, AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER, ET DIVISER

Sur des Grandeurs marquées avec des Chifres.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIERE OPERATION.

ADDITION.

Définition de l'Addition.

L'Addition est une opérationpar laquelle, ayant ajoûté plusieurs nombres connus en une somme, on connoît la valeur de cette somme, qui étoit inconnuë. 7.

PROPOSITION PREMIERE.

Premier Problême.

Ajoûter plusieurs nombres donnez en une somme, & connoître quelle est cette somme. 8.

1°. Il faut disposer les nombres donnez de telle *ſorte, que les premiers chifres des uns ſoient ſous les premiers chifres des autres, les unitez ſous les unitez, les dizaines ſous les dizaines, les centaines ſous les centaines, &c. après cela, il faut ajoûter ces deux ſommes par parties, commençant cette addition par le premier rang de droit à gauche, afin que la ſomme s'augmentant on rejette les chifres dans les rangs ſuivans, où ils valent davantage.*

Exemple. Ces deux ſommes 432 & 245 ſont données ; on veut ſçavoir quelle eſt la valeur de ces deux nombres.

Je diſpoſe, comme il a été enſeigné, ces deux ſommes. Je mets ſous 2 qui vaut deux unitez, 5 qui vaut cinq unitez ; ſous 3 qui vaut trois dixaines, 4 qui vaut des dizaines ; & 2 qui vaut des centaines, ſous 4 qui vaut des centaines : enſuite commençant de droit à gauche, je dis 2 & 5 font 7 unitez que j'écris, ſous le rang des unitez. Venant au ſecond rang, je dis, 3 & 4 font 7 dixaines, que je mets ſous le rang des dizaines. Enfin dans le troiſiéme rang je dis, 4 & 2 font 6 centaines, lequel chifre je poſe ſous ce rang des centaines ; ainſi j'ai 677 qui eſt la ſomme cherchée, égale aux deux qu'on avoit propoſées pour être ajoûtées en une ſeule.

$$\begin{array}{r} 432 \\ 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 432 \\ 245 \\ \hline 677 \end{array}$$

2°. *Si l'addition des chifres d'un rang fait un plus grand nombre que celui qui ſe peut mettre dans ce rang, il ne faut placer ſous ce rang-là que ce qui lui appartient, & reſerver le reſte pour le rang ſuivant. Par exemple, ſi l'addition des chifres du premier rang fait* quatorze, *comme ce nombre vaut une dixaine & quatre unitez, & qu'on ne peut placer dans ce rang que des*

des unités, j'écris ſeulement 4 ſous ce rang, & je reſerve une dizaine pour le rang ſuivant.

Exemple. Ces deux ſommes 459 & 665, ſont données; on veut ſçavoir le nombre qu'elles font étant ajoutées en une ſomme. Je diſpoſe ces deux ſommes comme elles doivent être diſpoſées, dans la maniere que vous le voyez.

459
665

Je dis premierement, 9 & 5 font 14, j'écris donc 4 dans le premier rang, & je retiens une dizaine pour le ſecond. Après je dis, une dizaine que j'ai retenuë avec ces deux chifres 5 & 6, qui ſont dans le ſecond rang, fait douze dizaines, j'écris donc deux dizaines, poſant 2 dans le rang des dizaines, & je reſerve dix dizaines ou une centaine pour le troiſiéme rang. Venant à ce troiſiéme rang je dis, une centaine que j'ai retenuë avec 4 & 6, fait onze centaines, ce qui vaut un mille plus un cent; ce que j'exprime, poſant 1 dans le rang des centaines, & 1 mille dans le rang des mille: Et cela me donne cette ſomme,

459
665
——
1124

459
665
——
1124

3°. *Si l'addition des nombres, de quelque rang que ce ſoit, produit un nombre juſte de dizaines, par exemple, ou une, ou deux, ou trois, &c. on met ſeulement un zero ſous ce rang, & le chifre dans le rang ſuivant. Cette regle eſt une ſuite de la précédente.*

Exemple. Il faut ajoûter ces deux nombres 575 & 425: je les diſpoſe ſelon la premiere regle, après je dis, 5 & 5 font 10, je ne marque ſelon cette troiſiéme regle, qu'un zero ſous ce premier rang, & je reſerve 1 pour le ſuivant. Enſuite je dis, 1 avec 7, & 2 qui ſont dans le ſecond rang font 10; je ne dois donc marquer encore par la même regle qu'un zero sous ce rang, & reserver 1, qui avec 5, & 4 du rang suivant fait encore 10; ainsi je n'écris que zero sous ce rang, & je place 1 dans le rang suivant, qui est celui des mille. La somme de ces deux nombres est donc un mille.

575
425
1000

Autre Exemple. Soient ces deux nombres 5678, & 4625, donnés pour être ajoutés. 1°. Je les dispose comme il a été enseigné. 2°. J'ajoute les unités qui font 13, j'écris donc seulement 3 dans le rang des unités, & je reserve une dizaine pour le rang suivant.

5678
4625
10303

3°. Je viens à ajouter les dizaines, & je trouve neuf dizaines, qui avec celle que j'avois reservée font dix dixaines, c'est-à-dire une centaine que je ne puis placer dans ce deuxiéme rang, où je marque un zero pour faire voir seulement que le nombre suivant est le troisiéme rang.

4°. Je fais l'addition du troisiéme rang, où je trouve 12 centaines, qui avec celle que j'avois reservée font 13 centaines. Je n'en puis placer que trois dans ce troisiéme rang; je reserve donc les dix autres ou un mille pour le quatriéme rang qui est celui des mille.

5°. Je trouve dans le quatriéme rang neuf mille, ce qui fait avec celui que j'ai reservé une dizaine de mille que je marque dans le cinquiéme rang, après avoir mis un zero pour remplir la place du quatriéme, ce qui étant fait, je sçai que 5678 avec 4625. fait 10303.

IV. *Une addition de plusieurs zero ne produit qu'un zero, puisque plusieurs fois rien ne fait rien; ainsi ces additions se font fort vîte. Il ne faut qu'ajouter les autres chifres & mettre en-*

ſuite autant de zero qu'il eſt neceſſaire afin que ces chifres ſe trouvent dans le rang qui leur convient.

Exemple. Ces trois nombres 2000, 3000, 4000, ſont donnés pour être ajoutés. Il eſt facile de le faire ; car puiſque les zero ne ſervent qu'à occuper les premiers rangs, & faire paroître que les autres chifres qui ſont placés enſuite des zero, ſont dans un rang plus reculé, après avoir diſpoſé ces ſommes comme il a été dit, il ne faut qu'ajouter 2 avec 3, & avec 4, ce qui fait neuf, & après 9 marquer trois zero, ce qui fera neuf mille, ſomme que l'on cherchoit.

2000
3000
4000
———
9000

Exemple d'addition. Ces cinq nombres ſont donnés 4567, 7919, 3488, 5896, 7685, après les avoir diſpoſés ſelon la coutume.

1°. J'ajoute les unités qui ſont dans le premier rang où j'en trouve trente-cinq, qui valent trois dizaines plus cinq unités ; je marque donc ſeulement ſous le rang des unités 5.

2°. Dans le deuxiéme rang je trouve 32 dizaines, qui avec les trois dizaines que j'avois reſervées, valent trois centaines, plus cinq dizaines ; je reſerve pour le rang ſuivant 3 centaines, & je poſe dans celui-ci cinq dizaines.

4567
7919
3488
5896
7685
———
29555

3°. Dans le troiſiéme rang il y a 32 centaines, qui avec les trois que j'avois reſervées valent trois mille plus cinq cens ; j'écris dans ce rang des centaines cinq cens, & je reſerve trois mille pour le rang des mille.

4°. Dans le rang des mille il y a 26 mille qui avec les trois mille reſervés font deux dizaines de mille plus neuf mille ; je poſe les neuf mille dans ce rang, & dans le suivant deux dixaines de mille : si bien que ces cinq sommes valent 29555.

5. Quand les nombres sur lesquels on opere sont trop grands, ce qui arrive lorsqu'il y a plusieurs chifres sur une même ligne, il faut, pour éviter la confusion, partager les rangs de trois en trois sur une ligne ou par un petit espace vuide, comme nous l'avons dit s.n. 3. Mais quand on a plusieurs nombres à ajouter sur une même colonne, alors il est à propos pour ne pas s'embroüiller, de partager l'operation & de ne pas ajouter ces nombres tout à la fois. Par exemple s'il y avoit 30 nombres ou sommes différentes, on doit les partager par des lignes en plus ou moins de parties, selon qu'on a l'esprit plus ou moins fort, comme ici ayant 30 sommes il en faut faire si on veut six portions, & les transcrire ailleurs pour operer sur chacune séparément ; on ajoute ensuite ces sommes partiales en une totale qui comprendra les trente premieres sommes : ou bien à côté de chaque rang aussitôt qu'on a compté jusqu'à dix on met un point comme vous le voyez dans cet Exemple ; où après avoir disposé les sommes comme à l'ordinaire, ajoutant les nombres du premier rang, comme 9 & 8 font dix-sept, je mets à côté de huit un point, & je dis 7 & 3 font 10. Je marque donc un point à côté du 3. Ensuite je dis 6 & 7 font treize. Je marque donc encore un point à côté de 7, & je dis 3 & 8 font onze. Je marque un point à côté du 8, & 1 sous le premier rang. Je compte ces points qui sont quatre, qui me font connoître qu'il y a quatre dizaines de reservées pour le rang suivant. Je laisse le reste

4 5 3 8.9
6.7.5.3 8.
2 4 6 5.3.
1 8.7.9 6
5.6.4 6.7.
7 5 9.4 8.
2 8 8 7 9 1

de cette queſtion à réſoudre pour vous exercer. Vous voyez qu'on ne ſe peut pas broüiller, parce que l'on ne fait que de très-petites additions.

L'artifice de cette premiere opération ne conſiſte, ainſi que je l'ai dit, qu'en ces deux choſes, à faire les additions par parties, & à exprimer ſur le papier les additions partiales qu'on fait dans ſon eſprit. Il en ſera de même des trois autres operations ſuivantes. Je commence de haut en bas faiſant l'addition de chaque rang, ajoutant le nombre qui eſt deſſus avec celui qui eſt deſſous. On peut ſi on veut monter de bas en haut, ajoutant le nombre qui eſt deſſous avec celui qui eſt deſſus. C'eſt une même choſe. La preuve de l'addition ſe fait par la ſouſtraction, comme nous le verrons.
Elle en a une autre qu'on nomme la preuve de 9 : 10.
voilà en quoi elle conſiſte. Sans avoir égard au rang des chifres, dans les nombres propoſés, on les ajoute les uns aux autres, & on en rejette 9 autant qu'il ſe peut. On fait la même choſe dans la ſomme generale de tous ces nombres; & ſi après en avoir rejetté 9, il y a un même reſte, c'eſt une marque (équivoque comme on le verra) qu'on ne s'eſt pas trompé; ce qu'un Exemple fera comprendre. On veut ſçavoir ſi D eſt veritablement la ſomme des trois nombres A.B.C. Commençant par A, je dis : ces quatre chifres 3. 5. 8. 1. font 17, d'où ayant rejetté 9, le reſte eſt 8. Ce reſte avec ces trois chifres, 2.3.5. du nombre B font 18, d'où ayant rejetté 9 autant qu'on le peut, il ne reſte rien : on n'a point d'égard aux zero dans cette opération. Venant à C, ces trois chifres 6. 1.3. font 10. d'où ayant rejetté 9, il reſte 1. Or aſſemblant de même les chifres de D; 1, 1.9.4.4. on fait 19. d'où ayant rejetté 9. au-

A	3581
B	2350
C	6013
D	11944

tant qu'on le peut, il reste encore 1 ; *ainsi selon cette preuve* D *est effectivement l'addition des nombres* A.B.C. *Le fondement de cette preuve, c'est que les chifres de tout nombre dans lequel* 9 *est contenu exactement un certain nombre de fois, sans avoir égard à leur ordre, joints ensemble, font* 9 : *ainsi les chifres de ces nombres* 18. 27. 36. 45. 54. *&c. dans lesquels* 9 *est contenu exactement tant de fois, font tous* 9. *Il en est de même des grands nombres. Par exemple,* 108. 216. *où neuf est contenu tant de fois exactement. On n'a point d'égard aux zero : Dans* 108. *vous voyez que* 1 *&* 8 *font* 9, *comme dans* 216. *ces trois chifres* 2. 1. 6. *font aussi* 9. *Mais cette preuve n'est pas infaillible ; car la même chose arriveroit soit que* D *fût* 11944. *ou* 19144 : *il y a pourtant bien de la difference. Ainsi ce n'est que pour satisfaire la curiosité que je la propose.*

CHAPITRE II.

SECONDE OPERATION.

SOUSTRACTION.

Definition de la Soustraction.

31. *LA Soustraction est une opération par laquelle on ôte d'un plus grand nombre un plus petit, & l'on marque ce qui reste après cette Soustraction, lequel reste est la différence de ces nombres, comme il est évident : ayant ôté* 8 *de* 12, *le reste, qui est* 4 *est la différence de* 8 *& de* 12.

PROPOSITION SECONDE.

PROBLEME II.

Deux nombres étant donnés, soustraire le plus *petit du plus grand, & connoître ce qui reſte, ou la différence de ces deux nombres.*

1°. *Il faut placer le nombre qui eſt le plus petit ſous le plus grand ; les unités ſous les unités ; les dizaines ſous les dizaines, &c. Après commençant cette opération par le premier rang de droit à gauche, il faut retrancher le plus petit du plus grand & marquer ce qui reſte ; ſi ce ſont des unités qui reſtent, marquer ces unités ſous les unités, &c. & ce reſte ſera la différence qu'il y a entre les deux nombres donnés.* 124

EXEMPLE. Les deux nombres donnés ſont 869, & 234. Il faut retrancher le ſecond du premier. Je les diſpoſe comme il a été dit, 234 ſous 869. De 9 j'ôte 4, il reſte 5, que je marque ſous le premier rang ; enſuite je dis de 6 ôtez 3, il reſte 3, que j'écris ſous le deuxiéme rang. Enfin de 8 j'ôte deux : le reſte eſt 6, que j'écris ſous le troiſiéme rang. Ainſi après avoir ôté 234. de 869, il reſte 635, qui eſt la difference de 869 avec 234.

$$\begin{array}{r} 869 \\ 234 \\ \hline 635 \end{array}$$

2°. *Lorſque le chifre qu'on veut retrancher, eſt plus grand que celui de qui on veut le retrancher, il faut pour augmenter ce dernier, emprunter une dizaine dans le rang ſuivant.*

EXEMPLE. Les nombres 678 & 489 ſont donnés, il faut retrancher le plus petit du plus grand, je ne puis pas ôter 9 de 8, c'eſt pourquoi ſelon la regle, j'emprunte une dizaine du rang ſuivant, aulieu de 7 écrivant un 6, & après je dis, de 18 ôtant 9, il reſte 9, que je place dans ſon rang. Enſuite je viens au deuxiéme rang où eſt 6, duquel ne pouvant encore ſouſtraire 8, j'emprunte de la même maniere une dizaine du chifre ſui-

$$\begin{array}{r} 5\,6 \\ \cancel{6}\cancel{7}8 \\ 489 \\ \hline 189 \end{array}$$

vant, & je dis de 16 ôtant 8, il reste 8. Enfin venant au dernier chifre, qui ne vaut plus que 5, je retranche 4, & il reste 1 : ainsi de 678 retranchant 489, il reste 189, qui est la différence de ces deux sommes.

13. Au lieu de changer les chifres du nombre superieur, il n'y a qu'à augmenter ceux de dessous dans le nombre inferieur ; comme ayant ici emprunté une dizaine de 7 chifre suivant de droit à gauche pour l'ajouter à 8 qui précéde, au lieu d'effacer 7 & d'écrire 6 en sa place, il n'y a qu'à augmenter le chifre 8 du rang inferieur qui est dessous 7, disant, de 7 j'ôte 9, ce que ne pouvant faire sans emprunter encore du chifre suivant une dizaine, je dis de même, de 17 ôtant 9 reste 8, & ensuite au lieu de dire de 6 ôtant 4, je dis, de 6 ôtant 5, reste 1 : ce qui produit toujours la même chose. L'avantage de cette methode c'est qu'on n'efface pas les chifres. Elle est plus facile dans la pratique ; & je n'ai proposé la premiere que parce qu'elle est plus facile à entendre pour ceux qui commencent.

3°. *Quand il se trouve un zero dans le nombre qui est dessous, on met entre les nombres restans celui sous lequel le zero est placé, puisque d'un tel nombre n'ôtant rien, ce nombre doit rester tout entier.*

EXEMPLE. Soient donnés ces deux nombres 842, & 405, pour retrancher le plus petit du plus grand : après avoir placé 405 sous 842, je considere qu'on ne peut ôter 5 de 2, le plus grand nombre du plus petit ; j'emprunte donc du deuxiéme rang une dizaine, écrivant 3 au lieu de 4 ; & puis je dis de 12 ôtez 5, reste 7, ensuite de 3 ôtez zero, c'est-à-dire rien, reste le nombre entier, sous lequel zero est placé. Je mar-

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3 \\ 8\cancel{4}2 \\ 405 \\ \hline 437 \end{array}$$

que donc 3 au deuxiéme rang. Enfin de 8 je retranche 4, le reste est 4. De cette soustraction vient 437, qui est le reste de 842, dont on a retranché 405, ainsi 437 est la différence de ces deux nombres.

4°. *Quand le nombre qui doit être retranché est égal à celui de qui on le retranche, comme il ne reste rien, on met un zero qui en est la marque.*

Exemple. S'il falloit ôter 246 de 346: puisque 46 est égal à 46, selon la regle je mets deux zero, & retranchant 2 de 3, dont le reste est 1, l'operation me donne 100, qui est le nombre que je cherchois.

$$\begin{array}{r} 346 \\ 246 \\ \hline 100 \end{array}$$

5°. *Quand sous un zero il y a un zero, il faut mettre un zero pour conserver la valeur des caracteres qui suivent, & qui précédent.*

Exemple. Ces deux nombres sont donnés 800, & 200; je retranche simplement du chifre 8 le chifre 2, il reste 6, après lequel chifre je mets deux zero pour faire voir que 6 est le reste de 8 cens, dont on a retranché deux cent.

$$\begin{array}{r} 800 \\ 200 \\ \hline 600 \end{array}$$

6°. *Lorsque dans le nombre dont on retranche un autre nombre, il y a plusieurs zero de suite, de sorte qu'on ne peut emprunter une dizaine du rang suivant pour faire la soustraction des nombres qui doivent être retranchez; il faut, ou exprimer le nombre d'une autre maniere, en sorte qu'il y ait d'autres caracteres que des zero; comme si ce nombre étoit* 10000, *l'exprimer ainsi* 9990 *plus* 10, *ce qui est la même chose: (car, neuf-mille neuf-cens quatre-vingt-dix, plus dix, font dix mille) ou plûtôt, il faut faire cette soustraction, en empruntant ou suposant des dizaines pour su-*

pléer aux zero, comme on fait, lorſque dans le nombre ſuperieur il y a pluſieurs chifres de ſuite plus petits que ceux de l'inferieur; parce que tous ces emprunts ſe reprendront ſur le premier chifre de valeur, qu'on rencontrera.

Premier Exemple. Soient donnés ces deux nombres 900 & 432; pour retrancher ce petit nombre 432 du plus grand 900, ne pouvant rien ſouſtraire de deux zero, au lieu de 900 j'écris huit cens nonante & je conſerve dix en ma memoire pour le premier rang; car 890 plus 10, ſont la même choſe que 900. je retranche 2 de ce nombre 10 que j'ai retenu, il reſte 8, que je mets ſous le premier rang; de 9 je retranche 3, & je poſe le reſte qui eſt 6, ſous le deuxiéme rang; de 8 je retranche 4, reſte 4, que j'écris ſous le troiſiéme: ainſi le reſte de 900 après en avoir ôté 432, eſt 468; ce que l'on cherchoit.

$$\begin{array}{r} 890 \\ \cancel{9}\cancel{0}\cancel{0} \\ 432 \\ \hline 468 \end{array}$$

Second Exemple. Soit le nombre 80000, duquel il faut retrancher ce plus petit 53642. D'abord ne pouvant ſouſtraire 2 de zero, ou de rien, j'emprunte une dizaine du rang ſuivant, ſans avoir égard à ce que ce n'eſt qu'un zero, pour la raiſon que j'ai rapportée; de 10 ôtant 2, reſte 8. Du ſecond zero qui même doit un ne pouvant ôter 4, j'emprunte encore 10, quoique le chifre ſuivant ne ſoit non plus qu'un zero, de ce 10 je retranche 5 à cauſe de la dizaine qu'on a prêtée au premier zero, & cela ſelon la méthode enſeignée §. n. 13. qu'il faut toujours pratiquer comme plus aiſée, & le reſte eſt 5. De même pour le troiſiéme zero je ſupoſe une dizaine, de laquelle ôtant 7 il reſte 3. Je viens au quatriéme rang, où ayant ſuppoſé 10 au lieu de zero,

$$\begin{array}{r} 80000 \\ 53642 \\ \hline 26358 \end{array}$$

& en ayant ôté 4 le reſte eſt 6. Comme les 8 dizaines de mille du dernier rang n'en valent plus que 7, parce qu'on en a preſté une pour les rangs précédents; il faudroit donc effacer 8 & écrire 7 en ſa place, mais il n'y a qu'à augmenter encore le chifre de deſſous d'autant, ſçavoir d'une dizaine de mille; ainſi au lieu d'effacer 8, & de récrire 7 pour en ôter 5, j'ôte tout d'un tems 6 de 8, & reſte 2. Partant j'ai le nombre 26358 reſte de 80000, après en avoir retranché nonobſtant les zero le nombre 53642, & c'eſt ce qu'on cherchoit.

Exemple de Souſtraction. Les deux nombres 5782 & 3456. ſont donnés pour être retranchés de ce troiſiéme 68386, il faut ajouter par la premiere propoſition les deux premiers dans une ſomme qui ſera 9238. Après qu'on s'eſt beaucoup exercé à faire ces operations, on peut faire cette addition en ſon eſprit, mais dans les commencemens il eſt bon de la faire avec la plume.

Je place 9238 total de l'addition de 5782 avec 3456, ſous la ſomme 68386 comme dans les autres exemples. Enſuite commençant par les unités du premier rang, je dis de 6 on ne peut ôter 8, j'emprunte donc une dizaine du rang ſuivant, qui avec les 6 unités font 16, de 16 ôtant 8, reſte 8, que je marque ſous ce premier rang des unités. Après venant au deuxiéme rang, je dis de 7 dizaines, ôtez 3 reſte 4; je dis de 7, car vous ſçavez que nous avons déja ôté une dizaine de ce rang; Au troiſiéme rang je dis de 3, ôtez 2, reſte 1. Au quatriéme rang de 8 je ne puis ôter 9, j'emprunte du rang ſuivant, qui eſt celui des dizaines de mille une dizaine de mille, qui avec les 8 mille de ce quatriéme rang, fait

$$\begin{array}{r} 57 \\ \cancel{6}8386 \\ 9238 \\ \hline 59148 \end{array}$$

18 mille ; je dis donc de 18 mille ôtez 9 mille, reste 9 mille.

Enfin venant au cinquiéme rang, puisqu'il n'y a rien qui en doive être retranché, je marque avec les autres ce que je trouve dans ce rang ; sçavoir 5, car des 6 dizaines de mille qui restoient, j'en avois déja retranché une dixaine.

Le reste donc de 68386, après en avoir retranché les deux sommes 5782, & 3456, le reste, dis-je, est 59148.

Autre Exemple. Voilà encore un Exemple de soustraction faite selon la maniere que nous avons proposée s. n. 13. Soit :

Somme	493025
à soustraire.	257532
Reste	235493

829
4~~9~~~~3~~~~0~~25
257532

235493

Je dis ainsi ; Qui de 5 ôte 2, ou simplement 2 de 5 reste 3.

Ensuite : Qui de 12 paye 3 reste 9.

Et je retiens 1 par mémoire que j'ajoute à 5, ce qui fait 6. Je dis : Qui de 10 paye 6, reste 4 : & je retiens 1 que j'ai emprunté que je joins à 7, ce qui fait 8 que j'ôte de 13, reste 5 ; & je retiens par mémoire 1 que j'ai emprunté, lequel avec 5 fait 6, que j'ôte de 9, & reste 3, & puis 2 de 4, reste 2. Cette maniere est plus prompte & charge moins de chifres que la seconde, dans laquelle on écrit les restes après avoir emprunté, comme vous le voyez dans la maniere ordinaire.

PROPOSITION TROISIE'ME.

THEOREME PREMIER.

La soustraction & l'addition se servent réciproquement de preuve l'une à l'autre. 143

La soustraction & l'addition sont opposées l'une à l'autre ; l'une défait ce que l'autre a fait ; ainsi elles se servent réciproquement de preuve. Car le tout étant égal à ses parties, si on ôte toutes les parties du tout, il ne doit rien rester ; si on n'en ôte que quelques-unes, on aura les autres pour reste ; par consequent on sera assuré, que 677 est véritablement la somme de 432 & de 245 ajoutés ensemble, si l'un des deux étant ôté de l'entier 677, il reste l'autre, ou si tous deux étant retranchés de 677, il ne reste rien, cela, dis-je, est une marque qu'ils sont véritablement les parties de ce tout, & par consequent que l'addition a été bien faite.

De même pour être assuré qu'en retranchant de 677, ce nombre 432, le reste est 245, c'est-à-dire que 432 & 245 sont les parties du tout 677, j'ajoute ces deux nombres 432 & 245 ; & s'ils font 677, je conclus qu'ils sont véritablement les parties de 677, & par consequent que mon opération est bonne.

Ces opérations sont si simples qu'on ne concevroit pas comment l'on s'y peut tromper, si l'experience ne nous en convainquoit. L'on n'ajoute ensemble que deux nombres à la fois, dont chacun ne peut être plus grand que neuf, & chacun des nombres qu'on retranche l'un de l'autre, n'excéde pas la même valeur : Cependant on est quelquefois obligé de recommencer, parce qu'on voit que *ce que l'on a fait ne quadre pas, sans s'appercevoir d'abord en quoi on s'est pû tromper. La cause de l'erreur c'est qu'on va trop vite, & que sans bien prendre garde à ce qu'on fait, en calculant on dira, par exemple, 5 & 6 font treize. On compte là dessus comme si cela n'étoit pas faux. Toutes nos erreurs en quelque matiere que ce soit ont la même cause. Nous supposons sans délibération que les choses les plus fausses sont certaines, & après nous en tirons des conclusions comme de principes infaillibles. Puisque ce petit ouvrage est fait pour servir de modéle de la maniere de bien conduire son esprit dans les Sciences, il faut faire attention à cette remarque.*

CHAPITRE III.

OPERATION TROISIE'ME.

MULTIPLICATION.

Definition de la multiplication.

15. *LA Multiplication est une espéce d'addition, par laquelle on ajoute un certain nombre donné autant de fois à lui-même qu'il y a d'unités dans un autre nombre donné.*

Multiplier 5 par 6, ce qui fait 30, c'est ajoûter autant de fois 5 à lui-même, qu'il y a d'unités dans 6. On appelle *multiplicateur* le nombre qui multiplie, & on appelle *produit* le nombre que l'on cherche, & que la multiplication produit. Dans cet exemple 5 étant donné pour être multiplié par 6, ce deuxiéme nombre 6 est le multiplicateur, & 30 qui est fait par cette multiplication est le produit.

PROPOSITION QUATRIE'ME.

PROBLEME TROISIE'ME.

Multiplier un nombre par un autre nombre, & connoître ce que produit leur multiplication. 164

1°. *Il faut placer le multiplicateur ſous le nombre à multiplier, comme dans l'addition ; enſuite commençant de droit à gauche multiplier le nombre à multiplier par le premier chifre du multiplicateur, & écrire leur produit comme on fait la ſomme d'une addition.*

EXEMPLE. Soit propoſé 24 pour être multiplié par 3, je place le multiplicateur 3 ſous 4 ; Et je dis 3 fois 4 ſont 12, je poſe 2 au premier rang, & je retiens dans ma mémoire une dizaine pour le rang ſuivant ; je dis 3 fois 2 font 6, & 1 que j'avois retenu ſont 7 ; le produit de 24 multiplié par 3 eſt donc 72.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 3 \\ \hline 72 \end{array}$$

2°. *Lorſque le multiplicateur eſt compoſé de pluſieurs caracteres, on multiplie premierement par le premier de ces caracteres le nombre à multiplier : enſuite par le ſecond, & ainſi des autres ; mettant le premier produit de chacune de ces multiplications partiales ſous le caractere qui a multiplié. Après cela, l'on ajoute dans une ſomme ces multiplications partiales, dont l'addition donne le nombre qu'on cherchoit.*

Nous l'avons déja dit, l'artifice de ces quatre premieres operations dont nous parlons dans cette ſection, conſiſte à faire par parties ce qu'on ne pourvoit faire tout à la fois. La multiplication n'a rien de plus difficile que l'addition. Il ne s'agit que d'exprimer ſur le papier une certaine ſomme ou produit, *plaçant bien les chifres dans le rang qui leur convient.*

Exemple. 84 eſt le nombre à multiplier par le multiplicateur 26 ; on demande quel eſt le produit de cette multiplication. Je place 26 ſous 84, après je multiplie premierement 84 par 6, diſant 6 fois 4 fait 24 ; je poſe 4 & retiens 2 dizaines ; 6 fois 8 fait 48, lequel produit avec 2 que j'avois retenu, fait 50 : j'écris donc 50 après 4. Enſuite je multiplie le même nombre 84 par le deuxiéme chifre du multiplicateur 26, qui eſt 2 ; & je dis 2 fois 4 fait 8. Or il faut remarquer que ce 2 valant deux dizaines, c'eſt la même choſe que ſi je diſois 20 fois 4 fait 8 dizaines, j'écris donc 8 ſous le deuxiéme rang, qui eſt celui des dizaines ; après je dis 2 fois 8 font 16, je poſe 6 dans le troiſiéme rang, & 1 dans le quatriéme, car 20 fois 8 dizaines valent 16 centaines ou cent ſoixante dizaines, c'eſt-à-dire ſeize cent unités ; ainſi ces rangs conviennent à 1 & à 6. Ces deux multiplications étant faites, j'ajoute les deux produits dans une ſomme, qui eſt 2184 produit de 84, multiplié par 26.

$$\begin{array}{r} 84 \\ 26 \\ \hline 504 \\ 168 \\ \hline 2184 \end{array}$$

3°. *Dans une multiplication, lorſque les zero ſe trouvent au commencement, ſoit du multiplicateur, ſoit du nombre à multiplier, on multiplie les nombres par les nombres : & on place après les produits, les zero, tant du multiplicateur que du nombre à multiplier.*

Exemple. Que 80 ſoit à multiplier par 60, je place 60 ſous le nombre à multiplier 80 ; après cela je multiplie 80 par le premier caractere du multiplicateur 60, qui eſt un zero, ce qui ne produiſant rien, je marque un zero ſous le rang des unités.

Ensuite multipliant 80 par 6, & premierement zero par 6, cette multiplication n'ayant aucun produit, puisque 6 fois rien ne vaut pas plus qu'un rien, je place un zero sous le rang des dizaines; enfin je multiplie 8 par 6, dont le produit est 48, je place 8 dans le rang des centaines, & 4 dans le rang des mille: & je trouve que 80 par 60 fait 4800. Ainsi vous voyez que dans de semblables exemples, il suffit selon la regle précédente, de multiplier les chifres par les chifres, 8 par 6; & de placer ensuite les zero de la somme qui doit être multipliée, & ceux du multiplicateur. Ces zero servent seulement à faire connoître que ce nombre 4800, est fait de la multiplication de 8 dizaines par 6 dizaines, ce qui fait 48 centaines.

$$\begin{array}{r} 80 \\ 60 \\ \hline 4800 \end{array}$$

4°. *Quand le multiplicateur est* 1, *avec un ou plusieurs zero, il faut seulement placer après le nombre qui doit être multiplié, les zero de ce multiplicateur; Mais si c'est le nombre à multiplier qui est* 1 *avec un ou plusieurs zero, alors il faut placer ces zero après le multiplicateur.*

Exemple. Je veux multiplier 342 par 100; pour faire cette opération, j'écris seulement après le nombre à multiplier 342, les deux zero du multiplicateur 100, ce qui fait 34200, lequel nombre est le produit de cette multiplication. La certitude de cette opération est manifeste: en multipliant 342 par 100, je cherche un nombre qui vale cent fois 342. Or pour augmenter la valeur de 342 de cent fois plus que ces caracteres ne valent, il n'y a qu'à les reculer de deux rangs, ce qui se fait en mettant deux zero après 342 de cette sorte, 34200; car 2 pour lors vaudra cent fois plus qu'il ne valoit, 4 qui est le deuxiéme chifre, cent

$$\begin{array}{r} 342 \\ 100 \\ \hline 34200 \end{array}$$

fois plus qu'il ne valoit, sçavoir 4 mille ; & 3 vaudra 30 mille, ce qui est cent fois plus qu'il ne valoit auparavant. Mais si c'est 100 qu'il faut multiplier par le multiplicateur 342, j'écris après lui les deux zero du nombre à multiplier, & cela donne le même nombre 34200, comme il est évident; car cent fois 342, & trois cent quarante-deux fois 100 sont une même chose.

100
342
34200

5°. *Les zero ne multiplient point, puisque cent rien ne valent pas plus qu'un rien : cependant il faut marquer ces zero pour remplir la place où ils se trouvent, & pour conserver la valeur des nombres qui suivent & qui précédent.*

EXEMPLE. Soit donné le nombre de 670 pour être multiplié ; le multiplicateur est 305 ; je dispose ces nombres comme il a été enseigné. Je commence l'operation par 5, premier caractere du multiplicateur, & je dis 5 fois zero, ou 5 fois rien ne produit rien ; je marque cependant un zero pour remplir ce premier rang, afin de conserver la valeur des chifres suivans, ensuite je dis 5 fois 7 font 35, je pose 5, qui vaut 5 dizaines dans le rang des dizaines, & je retiens 3 centaines : Après je dis 5 fois 6 font 30, qui avec les trois centaines que j'ai reservées, fait 3 mille, plus 3 centaines ; je place ces mille & ces centaines dans leur propre rang.

670
305
3350

Je viens au deuxiéme caractere du multiplicateur 305, qui est un zero, & parce que ce zero ne peut multiplier 670, je marque seulement un zero sous ce deuxiéme rang pour conserver, comme j'ai déja dit, la valeur des caracteres suivans. Je viens au troisiéme chifre, qui est 3, par lequel je multiplie 670, disant 3 fois zero ne produisent rien, je marque ce-

670
305
3350
0
2010
204350

pendant un zero dans le troiſiéme rang : 3 fois 7 font 21, je place 1 dans le quatriéme rang, reſervant 2 pour le cinquiéme. Enfin je dis 3 fois 6 font 18, qui avec les 2 que j'avois reſervé, font 20 que je marque dans le rang qui convient.

Après j'ajoute ces trois multiplications partiales en une ſomme, qui eſt 204350, produit de 670, multiplié par 305.

CHAPITRE IV.

QUATRIE'ME OPERATION.

DIVISION.

Définition de la Diviſion.

La diviſion eſt une eſpece de ſouſtraction, par laquelle on retranche d'un grand nombre un autre nombre plus petit ou égal, autant de fois qu'on le peut, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y eſt contenu. 17.

Le premier nombre s'appelle *le dividende* ou *nombre à diviſer*, & le deuxiéme *le diviſeur.* Le nombre qui exprime combien le *diviſeur* eſt contenu dans celui qui eſt à diviſer, s'appelle le *quotient* de la diviſion.

Ce quotient eſt contenu dans le nombre à diviſer autant de fois qu'il y a d'unités dans le diviſeur ; c'eſt pourquoi on ſe ſert de cette regle, lorſqu'on veut partager un grand nombre donné. Diviſer 24 par 6, c'eſt chercher combien 6 eſt contenu de fois dans 24. Il y eſt contenu quatre fois, ainſi ce nombre 4 eſt le quotient de cette diviſion, lequel quotient eſt contenu autant de fois dans 24, qui eſt le nombre à diviſer, qu'il y a d'unités dans 6, qui eſt le diviſeur.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Diviser un nombre donné par un autre donné.

18. 1°. *Il faut écrire le diviseur sous les premiers chifres du nombre à diviser, commençant de gauche à droit, faisant le contraire de ce qui a été fait dans les Operations précedentes, après cela l'on doit voir combien le diviseur est contenu dans le nombre à diviser, & écrire le quotient de cette division à part.*

EXEMPLE. Que ce nombre 64 soit donné à diviser par le diviseur 2. 1°. Je place le diviseur 2 sous 6, premier caractere du dividende 64, commençant de gauche à droit. 2°. Je vois combien 2 est contenu de fois dans 6 : il y est contenu 3 fois, lequel 3 je pose à part comme vous voyez. 3°. Je multiplie 3 par 2, le produit est 6, que j'ôte du nombre à diviser 6, pour m'assurer que la division de 6 par 2 est bien faite : car si ôtant 3 fois 2 de 6, il ne reste rien, c'est une preuve que 3 fois 2 font les parties de 6, & par consequent que 2 est veritablement 3 fois en 6. Je fais la même chose dans toutes les operations de la division.

$$\left.\begin{array}{l} 64 \\ 2 \end{array}\right\} 3$$

Il reste encore à diviser 4 par 2, ce qui se fait en avançant le diviseur 2, & le plaçant sous 4 : comme nous l'enseignerons dans l'article 6°. ci-dessous.

2°. *Si le diviseur a plusieurs caracteres, on considere seulement combien son premier caractere de gauche à droit est contenu dans le nombre sous lequel il est placé ; après on multiplie tout le diviseur par le quotient, & on retranche le produit de cette* *multiplication du nombre divisé, laquelle soustraction fait connoître si on a bien divisé.*

Exemple. Soit le nombre donné 84, pour être divisé par le diviseur 42 : je dispose ces nombres comme il a été enseigné ; je ne cherche pas d'abord combien tout le diviseur 42 est contenu dans le nombre 84, je vois simplement combien 4 est contenu dans 8 : il y est 2 fois, ce que je marque ; mais aussi pour m'assurer, si tout le diviseur 42 est véritablement deux fois dans le nombre à diviser 84 ; & si par consequent 2 est le quotient de cette division, je multiplie ce diviseur entier par le quotient 2, & trouvant que 2 fois 42 font 84, je ne puis plus douter que l'operation que j'ai faite, ne soit certaine.

$$\left.\frac{84}{42}\right\} 2$$

Tout l'artifice de cette operation comme des trois precedentes, ne consiste qu'en cela seul, qu'on fait par partie avec facilité ce qu'on ne pourroit faire tout d'un coup sans peine, & sans danger de se tromper.

3°. *Si ayant multiplié le diviseur par le quotient, il se trouve que le produit est plus grand que le nombre à diviser ; c'est une marque que ce quotient est trop grand, & qu'il en faut prendre un plus petit.*

4°. *Si le diviseur n'est pas contenu exactement, c'est-à-dire un certain nombre de fois dans le nombre à diviser, il faut marquer à part ce reste.*

Exemple. 82 est le nombre donné pour être divisé ; le diviseur est 24, le premier chifre du diviseur 24 qui est 2, est 4 fois dans 8, premier chifre du nombre à diviser ; mais parce qu'ayant multiplié par ce quotient 4 le divisent 24, le produit est 96, qui est plus grand que le nombre à diviser 82, je reconnois que ce quotient est trop

grand ; j'en prends donc un plus petit ; sçavoir 3.
Je multiplie 24 par ce quotient 3, 1
& j'en ôte le produit du nombre à 20
diviser 82, disant 3 fois 2 font 6, 82 3 $\frac{10}{24}$
que j'ôte de 8, reste 2 ; j'efface 8
& j'écris 2 ; après 3 fois 4 font 12, 24
que j'ôte de 22 & reste 10, j'efface 22 & j'écris 10 ; ainsi 24 est contenu 3 fois dans 82 avec ce reste 10. Lorsqu'on parlera des nombres rompus, on enseignera les moyens de diviser exactement ces restes qu'on écrit, comme vous le voyez, après le quotient sur une ligne, & sous cette ligne le diviseur : C'est un nombre rompu que ce nombre. $\frac{10}{24}$

5°. *Si le diviseur n'est point contenu dans les premiers chifres du nombre à diviser sous lesquels on l'a placé, il faut le faire avancer sous les caracteres qui precedent vers la droite.*

Exemple. Soit le nombre donné pour être divisé 248, le diviseur est 62. Ce diviseur n'est contenu aucune fois dans 24, premiers chifres du nombre à diviser de la gauche à la droite. Je place donc suivant cette regle 62 sous 48, & faisant comme ci-dessus, je trouve 248 que 6 est 4 fois dans 24, ce que je 62 4 marque. Je multiplie le diviseur 62 par ce quotient, disant 4 fois 6 font 24, que j'ôte de 24, & il ne reste rien ; après cela je dis 4 fois 2 font 8, que j'ôte de 8, il ne reste rien ; ainsi je sçai que 62 est véritablement contenu 4 fois dans 248.

6°. *Après que l'on a divisé les premiers caracteres du nombre à diviser, il faut avancer le diviseur de la gauche à la droite, jusqu'à ce que l'on ait divisé tout le nombre donné.*

Exemple. Dans l'article premier ayant diviſé le premier chifre 6, du nombre à diviſer 64, par le diviſeur 2, cequi a donné 3 au quotient: pour achever l'operation, j'avance le diviſeur 2 & je le place ſous 4, effaçant

$$\left.\begin{array}{c}\cancel{6}4\\ \hline \cancel{2}2\end{array}\right\}\quad 32$$

pour ne pas m'embroüiller, celui qui eſt deſſous 6, & 6 lui-même. J'ai trouvé après cela que 2 eſt contenu 2 fois dans 4, ce que je marque après le premier quotient 3 ; je multiplie le diviſeur 2 par le dernier quotient trouvé qui eſt 2, le produit eſt 4, que je retranche de 4, & il ne reſte rien. Ainſi 2 eſt véritablement contenu 2 fois dans 4 ; & le véritable quotient de 64 diviſé par 2 eſt 32, ce que je voulois ſçavoir.

Autre Exemple. Soit le nombre 8678 à diviſer par 34, après avoir mis ces nombres dans leur place, je dis 3 eſt contenu deux fois dans 8, ce que je marque au quotient. Je multiplie 3 par 2, le produit eſt 6, que j'ôte de 8, le reſte eſt 2, ce que je marque comme vous le voyez. Je multiplie 4 le ſecond chifre du diviſeur par le quotient 2, diſant 2 fois 4 font 8, que j'ôte de 26, le reſte eſt 18.

$$\left.\begin{array}{l}\quad\cancel{1}\\ \quad\cancel{1}\cancel{7}\\ \cancel{2}\cancel{8}\cancel{2}\\ \cancel{8}\cancel{6}\cancel{7}8\\ \hline 34\,.\,.\\ \quad 34\\ \quad\quad 34\end{array}\right\}\;255\frac{8}{34}$$

Je fais avancer le diviſeur, & je dis 3 eſt contenu 6 fois dans 18, mais ce quotient étant trop grand, j'en prends un plus petit, ſçavoir 5, & je dis 5 fois 3 font 15 que j'ôte de 18, il reſte 3. Je multiplie 4, ſecond chifre du diviſeur, par ce quotient 5, diſant cinq fois 4 font 20, que j'ôte de 37 & il reſte 17.

Je fais avancer une ſeconde fois le diviſeur, & je dis 3 eſt 5 fois dans 17, je poſe donc 5 au quotient ; 3 fois 5 font 15, qui étant ôtés de 17, le reste est 2 ; je multiple par le quotient 5, l'autre chifre du diviseur, disant 5 fois 4 font 20, de 28 ôtant 20, il reste 8.

Ainsi ayant divisé 8678 par le diviseur 34, le quotient est 255, avec 8 de reste, lequel reste s'écrit de la maniere que nous avons dit qu'on le devoit faire.

Ce qui rend la division plus difficile que les trois premieres Operations, c'est que considerant combien le premier chifre du diviseur est dans le nombre à diviser sous lequel il est placé, il faut avoir égard aux chifres qui suivent ; car, comme on l'a bien compris, les regles de la division ne se donnent que pour faire par parties l'Operation. Si on le pouvoit tout d'un coup on auroit dit que 34 est 255 fois avec 8 de reste dans 8678, mais cela étoit impossible. On fait donc peu à peu ce qu'on ne peut faire tout d'un coup. D'abord on examine seulement combien de fois le premier chifre du diviseur est dans celui du nombre à diviser sous lequel il est placé ; mais en même tems on fait attention aux chifres de tout le diviseur : lorsqu'on est venu à diviser 187 par 34 considerant que 34 ne peut pas être 6 fois dans 187, comme 3 est 6 fois dans 18, on a vû qu'il falloit prendre un quotient plus petit que 6. Quand on n'a pas choisi le quotient qu'il falloit, & qu'on a par consequent écrit des chifres qu'il faut effacer, pour ne se pas broüiller, il faut récrire les nombres sur lesquels on opere.

7°. Quand le diviseur n'est pas contenu dans le nombre à diviser, sous lequel on l'avoit fait avancer, il faut mettre un zero au quotient.

Exemple. Le nombre à diviser est 24096, le diviseur est 48 ; je dispose ces nombres comme il a été dit.

1°. 48 n'étant aucune fois dans 24, je fais avancer ce diviſeur, & je conſidere combien 4 eſt dans 24, il y eſt 6 fois ; mais parceque j'apperçois que 48 ne peut être 6 fois dans 240, & que par conſequent ce quotient 6 eſt trop grand, j'en prends un plus petit, ſçavoir 5. Je multiplie le diviſeur 48 par ce quotient 5, le produit de cette multiplication eſt 240, qui étant ôté de 240, il ne reſte rien. Juſqu'à preſent la diviſion eſt bien faite, & je ſcai que 48 eſt contenu 5 fois dans les trois premiers caracteres du nombre à diviſer 24096.

$$\left.\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{0}96 \\ \hline 48 \end{array}\right\} 5$$

2°. Je fais avancer le diviſeur 48 en le plaçant ſous 09, & parcequ'il n'eſt pas contenu dans ces caracteres, je place un zero après le premier quotient 5, pour conſerver la valeur de ce premier quotient, & de celui qu'on trouve enſuite.

$$\left.\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{0}96 \\ \hline 48 \end{array}\right\} 50$$

3°. Je fais avancer le diviſeur 48 ſous les caracteres 96 qui reſtent à diviſer, & je dis 4 eſt en 9 deux fois ; je marque ce 2 au quotient. Enſuite multipliant le diviſeur 48 par ce nombre, je trouve que le produit 96 de cette multiplication eſt égal au nombre à diviſer : par conſequent la diviſion en a été bien faite. Ainſi 502 eſt le quotient de 24096 diviſé par 48.

$$\left.\begin{array}{r} 4\cancel{0}10 \\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{9}\cancel{6} \\ \hline 48 \end{array}\right\} 502$$

8°. *Lorſque le nombre à diviſer a après lui pluſieurs zero, ſi ce nombre peut être diviſé exactement par le diviſeur qui eſt au deſſous, cette diviſion étant faite, on place après le quotient les zero de ce nombre à diviſer, & la diviſion eſt achevée.*

Exemple. 800 eſt à diviſer par 4, je diviſe ſeulement 8 par 4, le quotient eſt 2, après lequel je poſe les deux zero qui ſont après 8, & la diviſion eſt achevée; car ce quotient 2, valant le quart de 8, puiſque 8 vaut 800, ce 2 doit valoir 200 : Or pour marquer que 2 eſt dans le même rang que 8 il faut mettre après lui un égal nombre de zero. *Mais ſi le dividende ne peut pas être exactement diviſé par le diviſeur qui eſt au deſſous, il n'y a qu'à continuër l'operation, avançant le diviſeur, ainſi qu'on l'a enſeigné aux articles 6°. & 7°.*

$$\left.\frac{800}{4\,..}\right\}\ 200$$

9°. *Lorſque le Diviſeur eſt* 1 *avec pluſieurs zero, & qu'il y a des zero après le nombre à diviſer, il faut retrancher autant de zero du nombre à diviſer qu'il y en a dans le diviſeur, & la diviſion ſera achevée.*

Exemple. Le nombre donné pour être diviſé, eſt 5000, le diviſeur 10, pour faire cette diviſion je retranche du nombre à diviſer 5000, autant de zero qu'il y en a au diviſeur, ſçavoir un zero; ainſi le quotient ſera 500. En diviſant 5000 par 10, on cherche un nombre contenu 10 fois dans 5000, qui ſoit par conſequent 10 fois plus petit que 5000; or pour faire valoir 5000 dix fois moins, il ne faut que faire venir 5 dans un rang plus avancé vers la droite; il eſt dans le quatriéme rang où il vaut mille, il faut le faire venir dans le rang des centaines, ce qui ſe fait en retranchant un zero, après lequel retranchement il n'eſt plus que dans le troiſiéme rang.

$$\left.\frac{5000}{10\,..}\right\}\ 500$$

Exemple de Diviſion. Soit ce nombre 2142178 donné pour être diviſé par çet autre nombre 352, 1°. Je place 3, dernier chifre du diviseur 352, non sous 2, dernier chifre du nombre à diviser, mais sous 1 qui le precede, puisque 352 n'est pas contenu une fois dans 214.

2°. Je vois combien 3 est contenu dans 21, il y est contenu 7 fois : mais parceque j'apperçois que tout le diviseur 352 n'est pas contenu 7 fois dans 2142, je ne prends que 6 pour quotient ; & afin de verifier ma division, je multiplie le diviseur entier par ce quotient, disant 6 fois 3 font 18 ; de 21 ôtant 18, il reste 3, ce que je marque : 6 fois 5 font 30, de 34 ôtant 30, il reste 4 : 6 fois 2 font 12, de 42 ôtant 12, il reste 30 ; ainsi il me reste 30178 à diviser par 352.

3
~~3~~~~4~~0
~~2~~~~1~~~~4~~~~2~~178 } 6
~~3~~~~5~~~~2~~

On peut dans les commencemens, pour éviter la confusion, récrire à part ce reste 30178, *supposant toujours qu'il y a déja un chifre au quotient.*

3°. Je fais avancer mon diviseur, comme il a été enseigné. Or 352 est un nombre plus grand que 301, qui est le nombre de dessus : Donc selon ce qui a été dit cy-dessus, je pose un zero au quotient.

30178 } 60
~~3~~~~5~~~~2~~

4°. Je fais avancer mon diviseur. Or 3 est contenu dix fois dans 30, cependant je ne prends que 8 pour quotient, parceque 9 seroit trop grand. Je verifie mon operation, multipliant le diviseur par ce quotient 8, & disant 8 fois 3 font 24, que j'ôte de 30 ; il reste 6, que je marque : 8 fois 5 font 40 : de 61 ôtant 40, il reste 21, & multipliant 2 par 8, le produit est 16, lequel je retranche de 217, il reste 201, & tout le reste du nombre à diviser est 2018.

20
~~6~~~~2~~1
~~3~~~~0~~~~1~~~~7~~8 } 608
~~3~~~~5~~~~2~~

Ceux qui commencent ne peuvent voir tout d'un *coup le juste quotient qu'il faut prendre ; comme ici, où il reste à diviser* 30178 *par le diviseur donné* 352. *Après qu'on a écrit ce diviseur sous le dividende, on ne voit pas tout d'un coup pourquoi* 3 *étant* 10 *fois dans* 30, *on ne doit pas prendre* 9 *pour quotient. On conseille donc à ceux qui commencent de prendre d'abord le plus haut quotient, comme ici* 9, *&* *ensuite multiplier à part par ce nombre* 9, *le diviseur* 352 ; *ce qui produit* 3168, *lequel nombre étant plus grand que* 3017 *sous lequel est* 352, *on voit que* 352 *n'y est pas* 9 *fois. On prend donc un plus petit quotient, sçavoir* 8. *Et pour sçavoir si on ne se trompe point encore, il faut multiplier* 352 *par* 8 ; *ce qui fait* 2816. *Ce nombre est plus petit que* 3017. *L'on voit donc que* 352 *y est* 8 *fois, mais avec reste. En faisant de la sorte ces operations à part, on ne broüille point les chifres. Cette pratique est bonne pour ceux qui commencent. Elle est même utile & presque necessaire à tout le monde, lors que le diviseur & le dividende ont plusieurs chifres ; & on ne perd pas grand temps : car de quelque maniere qu'on fasse, il faut faire les mêmes multiplications : puisque pour verifier si le quotient est juste, il le faut multiplier par le diviseur. Après cet Avertissement, qui ne sera pas inutile, reprenons la question presente, pour la terminer.*

30178
352

352
9
3168

352
8
2816

5°. Je fais avancer mon diviseur. Or 3 est contenu 6 fois dans 20, cependant je ne marque que 5 au quotient, 5 fois 3 font 15 : de 20 ôtant 15, il reste 5 : 5 fois 5 font 25 : de 51 ôtant 25, il reste 26 : 5 fois 2 font 10 : de 268 ôtant 10, il reste 258.

25	
~~5~~~~6~~8	
~~2~~~~0~~~~1~~8	6085
~~3~~~~5~~~~2~~	

Ainsi je connois que 352 est contenu 6085 fois dans 2142178 avec reste, sçavoir 258 ; ce qui se marque ainsi $6085\frac{258}{352}$, comme il a été dit.

AUTRE EXEMPLE, dans lequel on fait la soustraction comme cy-dessus n. 13.

Il faut diviser 855270 par 3978. Ayant disposé les chifres à l'ordinaire, ce que je fais ici de particulier, c'est qu'après avoir connu que le diviseur est 2 fois dans le dividende, je commence à le multiplier par le côté droit, & je soustrais le produit à la maniere qui a été enseignée ſ n. 13.

00
1980
59690
855270 } 215
3978888
39777
39

Ainsi commençant de droit à gauche, je dis deux fois 8 font 16, que j'ôte des nombres de dessus 52 ; j'emprunte deux dizaines, & je dis, qui de 22 paye 16 reste 6, que j'écris sur 2, & je retiens en ma memoire 2 que j'ai emprunté ; car je ne change point le chifre 5, & je dis, 2 fois 7 font 14, qui avec deux que j'ai conservé en ma memoire font 16. J'emprunte encore 2 du rang suivant, & je dis, qui de 25 ôte 16 reste 9 que j'écris sur 5, & je retiens en ma memoire 2 ; puis je dis 2 fois 9 font 18, & 2 que j'ai emprunté font 20. J'emprunte encore 2, & je dis, qui de 25 paye 20 reste 5, & je retiens 2. J'écris 5 dessus, & je dis 2 fois 3 font 6, & 2 que j'ai retenu font 8 que je soustrais de 8, & il ne reste rien. J'avance mon diviseur à l'ordinaire, & je poursuis la division selon la même methode, dans laquelle il n'y a pas un si grand nombre de chifres à changer, que dans la premiere.

La division du même nombre 855270 par 3978, faite selon la premiere methode, se réduit à cette forme que vous voyez. Il y a bien plus de changement, que lors qu'on fait la même operation selon la seconde methode.

14
293
508
6994
271690
855270 } 215
397888
3977
39

AUTRE MANIERE DE FAIRE LA DIVISION.

20 1°. *Le diviseur se met à côté du dividende, au dessus d'une petite ligne, en la maniere que vous le voyez. Si on vouloit par exemple diviser 24 par 2, on écrit* 24 | 2

2°. *On met un point sous le premier chifre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, c'est-à-dire sous 2 dans l'exemple proposé, ainsi* 24 | 2

3°. *S'il y avoit plusieurs chifres dans le diviseur, il faudroit mettre autant de points sous le dividende. Si par exemple je divisois 24 par 12, je mettrois un point sous 2, & un second sous 4; parcequ'il y a deux chifres dans le diviseur.* 24 | 12

4°. *Je regarde combien de fois le diviseur est contenu dans les chifres sous lesquels j'ai marqué des points, comme dans le premier exemple combien de fois 2, qui est le diviseur, est contenu de fois dans 2 premier chifre du dividende, sous lequel j'ai marqué un point. Je trouve qu'il y est une fois: Je marque 1 pour quotient sous le diviseur. En même temps je multiplie le quotient par le diviseur, di-* 24 | 2 / 1 *sant : 1 fois 2 fait 2 ; que j'ôte du premier chifre du dividende, & il ne reste rien. J'écris un zero au dessous du point, qui étoit sous le premier chifre du dividende.*

24	2
.	1
0	

5°. Je viens au second chifre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, & je mets un point dessous ce nombre qui est ici 4, & sous ce point j'écris 4, & dessous ce 4 encore un point, comme vous voyez. Ensuite je considere combien de fois le diviseur 2 est en 4 : il y est 2 fois. J'écris 2 au quotient, puis multipliant le diviseur par ce quotient 2, je dis : 2 fois 2 font 4. J'ôte ce produit 4 du chifre du dividende, sous lequel j'ai mis le dernier point, disant : de 4 ôtant 4, il ne reste rien ; j'écris donc un zero. Je trouve ainsi que 2 est 12 fois dans 24.

24	2
. .	12
04	
.	
0	

6°. S'il y avoit plusieurs chifres dans le dividende, il faudroit proceder de la même maniere. Par exemple, si au lieu de 24 pour dividende, il y avoit 242, il faudroit mettre un troisiéme point sur le troisiéme chifre qui est 2, & écrire ce 2 à côte du zero, qui est au dessous de 4, & mettre encore un point au dessous. Ensuite il faut voir combien le diviseur 2 est contenu dans ce dernier chifre du dividende ; il y est une fois : J'écris donc 1 au quotient à côté des chifres déja trouvez ; après je multiplie le diviseur 2 par 1, j'ôte le produit de cette multiplication du dernier chifre du dividende, il ne reste rien ; ainsi j'écris sous ce même chifre un zero.

242	2
. . .	121
04	
.	
02	
.	
0	

7°. La multiplication & la soustraction se font de la droite à la gauche : il n'y a pas eu occasion de le faire dans l'exemple proposé, parceque le di-

viseur étoit simple. C'est particulierement lorsque les diviseurs sont composez, que la facilité de cette methode paroît. Elle ne charge point la memoire; parceque faisant la soustraction on emprunte autant de dizaines que l'on en a besoin. Par exemple, soient 358 *à diviser par* 39, *je trouve pour quotient* 9, *par lequel je multiplie le diviseur de la droite à la gauche, & je le soustrais de même, disant:* 9 *fois* 9 *font* 81. *Il n'y a au dividende que* 8, *& ensuite un* 5, *qui ne font que* 58. *Sans m'embarasser de cela, j'emprunte* 8 *dizaines dont j'ai besoin, & je dis:* 81 *de* 88 *reste* 7, *que j'écris au dessous de* 8 *du dividende, & je retiens* 8. *Ensuite j'acheve la multiplication du diviseur par le quotient* 9, *disant:* 9 *fois* 3 *font* 27, *& 8 que j'ai retenu font* 35, *qui ôtez du dividende, reste zero; & ainsi je trouve que* 358 *divisé par* 39, *le quotient est* 9 *plus* $\frac{7}{39}$.

358	39
..	
07	$9\frac{7}{39}$

8°. *Cette operation tient moins de place. Comme on n'est point obligé d'effacer les caracteres; quand il y a quelque erreur, on la remarque facilement. Si c'est dans la premiere division qu'on s'est trompé, on trouve son erreur dans le rang des chifres qui est immediatement au dessous du dividende. Si c'est dans la seconde division partiale, on la trouve dans le rang suivant.*

PROPOSITION SIXIE'ME.

THEOREME SECOND.

1 *Le quotient d'une division étant multiplié par le diviseur, ou le diviseur par le quotient (ce qui est une même chose), fait une somme égale au nombre qui a été divisé.*

Soit 24 diviſé par 6 : le quotient de cette diviſion eſt 4, qui eſt une ſixiéme partie de 24, étant donc pris autant de fois qu'il y a d'unitez dans le diviſeur 6, c'eſt-à-dire 6 fois, il doit être égal à ſon tout 24, les parties priſes enſemble égalant leur tout; donc le quotient d'une diviſion étant multiplié par le diviſeur, fait une ſomme égale au nombre qui a été diviſé; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

La multiplication & la diviſion ſe ſervent de preuves reciproquement. 22

Car je ſuis aſſuré que 6 produit 24 étant multiplié par 4, ſi 6 eſt contenu 4 fois dans 24, ce que je puis ſçavoir en diviſant 24 par 6; & au contraire, je ſuis aſſuré qu'ayant diviſé 24 par 6, le quotient eſt certainement 4: ſi 4 eſt une ſixiéme partie de 24, ce que je puis ſçavoir en multipliant le quotient 4 par 6; car ſi 4 multiplié par 6 fait 24, certainement 4 eſt une ſixiéme partie de 24.

Suivant cette Regle, ſi je veux m'aſſurer que le quotient de la diviſion de 24096 diviſé par 48 eſt 502, je multiplie le diviſeur 48 par le quotient 502, ſi le produit de cette multiplication eſt égal à 24096, je ſuis aſſuré que l'operation eſt bien faite: au contraire, ſi je voulois ſçavoir certainement ſi 48 multipliant 502 fait veritablement 24096, je diviſerois ce nombre par 48, ſi le quotient de cette diviſion ſe trouvoit être 502, je ne pourrois plus douter de la certitude de cette operation.

AVERTISSEMENT.

Pour multiplier & diviſer avec facilité, il faut apprendre par memoire le produit des multiplians des neuf premiers caracteres: Par exemple, 23 *combien fait 5 fois 7 ; combien fait 6, multiplié par 6 ; & en même temps combien de fois une des neuf premiers élemens est contenu dans un nombre donné d'un ou de deux chifres ; par exemple combien 6 est dans 36, combien 5 dans 40.*

On dresse pour cela une Table, qui peut aider ceux qui commencent. Dans les deux rangs des cellules A B, & A C, sont les neuf premiers élemens & le nombre 10.

Lors qu'on veut sçavoir quel est le produit d'un chifre, par exemple de 6 multiplié par 7, il faut chercher dans l'un des deux rangs l'un de ces deux chifres ; par exemple, dans le rang A C, le nombre 6, & l'autre nombre 7 dans le rang AB ; après cela prenant en cette Table une cellule, qui réponde à celle où est 6 dans le rang A C, & à celle où est 7 dans le rang A B, on y trouve 42, qui est le produit de 6 multiplié par 7.

Si je veux sçavoir combien 6 est dans 42, je cherche 6 dans le rang A C, & une cellule qui réponde à 6, où sont 42, après je cherche dans le rang A B, la cellule qui réponde à celle où est 42, où je trouve 7, ainsi je sçai que 6 est 7 fois dans 42.

Mais si je veux sçavoir combien 6 est dans 45, je cherche 6 dans le rang A B ; & dans le rang qui est au dessous de 6 parellele à A C, je trouve 42 & puis 48, dont l'un est plus petit & l'autre plus grand que celui que je cherche. Ce qui me fait connoître que 6 n'est pas contenu précisement un certain nombre de fois dans 45, mais qu'il y est avec reste ; partant je laisse 48 qui excede, & m'attachant uniquement à 42 qui est moindre, je remarque que la difference de 42 à 45 est 3. Ce que sçachant, je cherche dans le rang A C, une cellule qui réponde à 42 ; j'y trouve 7. Et par là je sçai que 6 est 7 fois dans 45 avec reste, sçavoir 3. Et ainsi des autres.

TABLE
de Multiplication & de Diviſion.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

C D

On donne des regles pour faire ces multiplications & ces diviſions; mais elles ſont plus curieuſes qu'utiles. Ces operations ſe peuvent faire ſans elles, c'eſt pour cela que nous les omettons; car, comme nous l'avons remarqué, l'une n'eſt neceſſaire que pour les grandes operations. 24

SECTION TROISIE'ME.

DES QUATRE OPERATIONS DE L'ARITHMETIQUE, AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER ET DIVISER

Sur des Grandeurs marquées avec les Lettres de l'Alphabet.

CHAPITRE PREMIER.

L'Arithmetique avec des Lettres, eſt ce qu'on appelle l'Algebre. Elle s'applique aux Grandeurs poſitives & negatives. Ce que c'eſt que ces Grandeurs.

25 NOus avons dit qu'on pouvoit marquer des Grandeurs avec d'autres ſignes qu'avec des chifres, ſçavoir avec les Lettres de l'Alphabet. Il faut donc voir comment on peut faire les quatre operations de l'Arithmetique, en ſe ſervant de Lettres. Il dépend des hommes d'établir, pour ſigne d'une choſe, tout caractere qu'ils voudront choiſir. Celui-ci 7 ſignifie 7, parce qu'on eſt convenu qu'il ſignifieroit ſept ; ce qu'on auroit pû marquer par tout autre caractere. J'apperçois donc que l'on peut marquer les operations de l'Arithmetique de la maniere qu'on le voudra.

On a établi que ce ſigne +, qui eſt une ligne coupée par une autre ligne, ſignifieroit *plus*, & qu'une ſimple ligne couchée comme celle-ci, — ſignifieroit *moins*. Ajoûter une Grandeur à une autre, c'eſt prendre l'une avec l'autre, ou dire *l'une plus l'autre*. Ainſi on eſt convenu que pour ajoûter enſemble deux grandeurs marquées avec des lettres, on joindroit avec ce ſigne + qui ſignifie *plus*, les lettres qui marquent ces grandeurs. Que par exemple pour ajoûter la grandeur a avec la grandeur b, on écriroit $a + b$, c'eſt-à-dire a plus b.

Souſtraire une grandeur d'une autre, c'eſt prendre celle-ci *moins* la premiere. Quand on dit *ſix pieds moins quatre pieds*, on dit qu'on a ſouſtrait quatre pieds de ſix pieds. Il n'eſt donc queſtion pour marquer la ſouſtraction d'une grandeur marquée par lettres, d'une autre grandeur auſſi marquée par lettres, que de joindre leurs lettres avec ce ſigne — qui ſignifie *moins*. Si la premiere eſt a, dont on veut retrancher b; en écrivant $a-b$, on marque qu'on a retranché b de a, car cela veut dire a moins b.

Cela ne doit faire aucune difficulté. Les ſignes, comme on vient de le dire, ſont des choſes arbitraires, il n'eſt queſtion que de prendre garde à ce qu'on veut qu'ils ſignifient. Ainſi étant convenu une fois que pour marque qu'on conçoit une grandeur multipliée par une autre, on joindra ſans autre ſigne les deux lettres qui marquent ces grandeurs, pour multiplier b une grandeur par d autre grandeur, je ne fais que les unir de cette ſorte, bd, ſans autre ſigne, ou je mets entre deux une petite croix de S. André. Ainſi $A \times B$ marque que A eſt multiplié par B, que c'eſt le produit de ces deux grandeurs multipliées l'une par l'autre, & cela veut dire a multíplié par b.

Pour marque de la division on met sous la lettre, qui est le signe d'une grandeur, la lettre de la seconde grandeur, par laquelle on conçoit que la premiere est divisée une ligne entre deux. Ainsi quand on voit $\frac{b}{a}$ il faut concevoir que la grandeur *b* est divisée par *a*, & cela veut dire *a* divisé par *b*.

Cette maniere de faire les operations de l'Arithmetique est ce qu'on appelle l'*Algebre*, c'est-à-dire une Arithmetique plus parfaite; ce qu'on prétend que signifie ce nom dans la Langue des Arabes. On employe l'Algebre pour trouver des grandeurs inconnuës, qu'on ne peut pas exprimer par des nombres, pendant qu'on ignore leur valeur. Aussi il faut que de tous temps ceux qui ont travaillé sur les Mathematiques, ayent eu une espece d'Algebre, c'est-à-dire des notes pour marquer les grandeurs qu'ils tâchoient de découvrir. Nous ne sçavons pas quelles étoient ces notes dans les premiers temps. Depuis que l'Algebre a été plus connuë, qu'on en a fait des Livres, il paroît que d'abord on n'a eu des signes que pour les grandeurs inconnuës; pour les autres, on les marquoit avec les chifres ou nombres ordinaires. On appelloit *Nombres Cossiques*, ceux de l'Algebre. Ce mot vient de l'Italien *cosa*, c'est-à-dire *chose*; parceque c'étoit la chose même qu'on prétendoit faire considerer par le moyen de ces notes. Et c'est dans ce même sens que l'Algebre se nomme aujourd'hui *Specieuse*; parceque ce sont les *especes* ou formes des choses mêmes qu'on désigne par lettres.

Nous parlerons des anciennes notes dans la suite. Elles étoient embarassantes, confuses & mêlées avec les chifres; c'est ce qui avoit donné cette pre-

vention, que l'Algebre étoit extrémement difficile. Depuis qu'on s'y ſert des lettres de l'Alphabet, elle n'a rien que d'aiſé. J'avouë que d'abord on a peine à ſe faire à ce calcul. Les lettres ſont des ſignes fort generaux, qui n'ont point d'idées particulieres qui appliquent. Elles marquent les grandeurs dont elles ſont les ſignes d'une maniere abſtraite; au lieu que les chifres ont des idées particulieres & diſtinctes; car auſſi-tôt que je vois par exemple ces deux chifres 12, *je me repreſente* 12 *choſes égales ou douze parties de la grandeur dont il eſt queſtion. Ceux qui ne ſont pas accoutumez au calcul par lettres, quand ils ne voyent que des lettres, il leur ſemble qu'ils ne voyent rien.*

Cependant l'utilité du calcul par lettres eſt manifeſte; on ne peut appliquer des chifres qu'à des grandeurs connuës. Je ne puis point nommer des grandeurs données, l'une, par exemple 7, *l'autre* 8, *que je ne ſçache préciſement leur rapport ou leur valeur. Lors qu'il s'agit donc de connoître des grandeurs inconnuës, & que de la maniere qu'on en propoſe une queſtion, on apperçoit qu'en les ajoûtant ou retranchant l'une de l'autre, les multipliant l'une par l'autre ou les diviſant, on découvrira quelque rapport qui fera connoître le reſte, il eſt neceſſaire de faire ſur elles les quatre operations; ce que je ne puis faire avec les chifres, ſans connoître leur juſte valeur, que je cherche encore; au lieu que je puis déſigner une grandeur en la marquant avec une lettre, quoique je ne connoiſſe point ſa valeur, parceque les lettres ne déterminent rien. Si j'appelle* x *une certaine grandeur que je me propoſe de trouver, ce ſigne dont je me ſers pour la marquer, ne dit point qu'elle ait* 10. *ou* 20, *ou* 30 *pieds, ou autres parties que ce ſoit. Je puis marquer indifferemment par cette lettre* x, *toute sorte de grandeur. Il est vrai qu'ayant déja employé cette lettre pour marquer une telle grandeur, je ne puis pas, dans une même question, me servir de cette même lettre pour signifier des grandeurs que je sçai ne lui estre pas égales, à moins que je n'y ajoûte ou que je n'en retranche quelqu'autre grandeur qui en fait la difference.*

Un des avantages de ce calcul, c'est que les mêmes signes, c'est-à-dire les mêmes lettres, demeurent. Quand j'ajoûte b *avec* d, *écrivant* b + d, *ou que je multiplie* b *par* d, *écrivant* bd, *ces mêmes lettres* b *&* d *demeurent toujours. L'operation que je fais sur elles ne les change point ; ainsi dans l'examen d'une question où il y a une longue suite d'operations, je vois toujours le chemin que j'ai fait, & tous les rapports des grandeurs sur lesquelles j'opere ; parce qu'elles conservent leurs signes. Cela n'arrive pas dans les chifres ; car si j'ajoûte 5 avec 6 il vient 11, où 5 & 6 ne paroissent plus. Si je multiplie 3 par 9, je fais 27, où 3 & 9 ne paroissent plus.*

C'est ce qui doit encourager à surmonter la difficulté qui paroît dans ce calcul. Je dis qui paroît, car dans le fond le calcul par lettres est plus facile que celui des chifres. Ce que j'en ai dit, est tout ce qu'on en peut dire. Ce que je vais ajoûter n'est que pour faire faire attention aux suites de cette maniere, que j'ai proposée, de marquer les quatre operations avec des lettres. Vous allez voir combien cela est facile ; ce qui vous surprendra, après l'idée que vous aviez conçuë de l'Algebre. Cette science étoit autrefois inaccessible. L'obstacle venoit des signes embarrassans dont on se servoit. Les signes qu'on employe aujourd'hui ne sont que les lettres de l'Alphabet, ausquelles on est accoutumé ; & ces signes + & — & =, par *le moyen deſquels on s'exprime d'une maniere vive, courte & claire, ſans preſque employer de paroles. Dans l'eſpace de deux lignes on dit ce qu'on ne feroit pas, ſans ce ſecours, dans une page entiere, employant des paroles à l'ordinaire. On le verra dans la ſuite.*

Un des avantages de l'Arithmetique par lettres, ou de l'Algebre, c'eſt qu'elle s'applique à ce qu'on appelle les grandeurs negatives, comme à celles qui ſont poſitives. *Poſitif* & *réel* eſt une même choſe. Cent piſtoles qu'un homme poſſede, c'eſt une grandeur réelle, ou poſitive. Mais on peut dire de celui qui n'a rien, & qui doit cent piſtoles, qu'il a un bien negatif; c'eſt-à-dire qu'il s'en faut cent piſtoles qu'il ſoit dans la condition d'un homme qui n'a rien, mais qui ne doit rien. Ainſi ſi on nomme x ſon état, on l'exprimera ainſi $x = 0 - 100$, ou $x + 100 = 0$; c'eſt-à-dire, qu'afin que ſon bien fût égal à rien, il faudroit qu'il acquit cent piſtoles. 26

Comme ce qui eſt au deſſus de zero eſt une grandeur poſitive, ce qui deſcend au deſſous eſt une grandeur negative; ce qu'on peut concevoir dans cet autre exemple. Si *M* eſt le commencement d'un chemin vers X, tout ce que fait un Voyageur vers *X* eſt comme une grandeur poſitive. Mais ſi *A* eſt diametralement opposé à *X*, tout ce que fait ce Voyageur de *M* vers *A*, en s'éloignant de *X*, eſt une negation: cela s'appelle *moins*: comme ce qu'il fait au-delà de *M* vers *X*, en s'approchant de *X*, ſe doit nommer *plus*. Ce moins eſt une negation ou une grandeur negative, dont $-$ eſt le ſigne; comme $+$ eſt celui d'une grandeur poſitive. Par tout où l'on ne voit aucun de ces deux ſignes, il faut y ſuppoſer le ſigne $+$; car ce n'eſt preſque que de ce qui eſt poſitif qu'on parle.

Une grandeur étant infiniment petite, on peut ſans erreur ſenſible, la ſuppoſer égale à zero. Ainſi ayant nommé x une grandeur, & la conſiderant dans ſon commencement, comme par exemple le premier point d'une ligne: on peut dire que ſon premier degré eſt zero, ou x^0. C'eſt ainſi qu'on marque l'état où elle ſe peut ſuppoſer égale à rien x^0. Mais proprement ſon premier degré eſt x^1, quand elle s'éleve, & qu'elle commence d'être quelque choſe. On peut donc regarder le zero comme un milieu entre la grandeur negative, & la poſitive. Toute grandeur poſitive ſe fait par une addition au neant. Une ligne commence par un point, qui dans ſon premier commencement eſt comme rien; car par ce commencement on entend une choſe indiviſible, & qui ſe peut conſiderer comme un néant, tant elle eſt petite. Ces conſiderations donnent lieu de parler des grandeurs d'une maniere fort étenduë, qui comprend l'infini auſſi-bien en deſcendant qu'en montant. Car comme une grandeur peut s'augmenter à l'infini poſitivement, auſſi par la ſouſtraction on peut la diminuer à l'infini, non ſeulement en la ſubdiviſant & faiſant que de plus en plus elle approche du néant ou du zero; mais encore deſcendant au deſſous du zero infiniment. Les ſignes + & — donnent le moyen d'exprimer tout cela. On peut avec le ſigne — retrancher d'un plus petit terme un autre terme, quoique plus grand, ce qu'on ne pourroit autrement ôter; par exemple 8 de 5; car on peut dire 5—8: comme ſi un homme qui n'a que cinq piſtoles en devoit 8, ſon bien ſeroit 5—8; car d'un côté il a cinq piſtoles, & de l'autre il en doit 8. Ainſi ces ſignes ſont d'un uſage fort étendu.

Il faut encore conſiderer ici que les grandeurs poſitives & negatives étant oppoſées, en augmentant les unes on diminuë les autres ; & qu'ainſi pour ſouſtraire d'une grandeur negative ou la diminuer, il n'y a qu'à augmenter la grandeur poſitive oppoſée, comme nous l'allons voir.

CHAPITRE II.

Moyen de faire les quatre premieres operations de l'Arithmetique ſur les grandeurs qu'on marque avec une ſeule lettre, qu'on appelle pour cette raiſon Grandeurs incomplexes *ou* ſimples.

DE L'ADDITION.

ON peut concevoir une grandeur comme 27
faite ou compoſée de deux grandeurs ; ainſi ſi l'on veut marquer cette compoſition, il faut employer deux lettres : comme par exemple concevoir qu'une certaine grandeur a deux parties, b & d, j'appelle cette grandeur $b + d$, ce qui me la fait nommer *Grandeur complexe* ou *compoſée* ; au lieu que j'appelle une grandeur que je marque avec une ſeule lettre, *Grandeur incomplexe* ou *ſimple*. Ce ſont des termes qu'on invente pour éviter les circonlocutions.

Ajoûter, comme on l'a dit, c'eſt joindre deux grandeurs enſemble, ou exprimer par un ſigne qu'on a joint ces deux grandeurs. Ainſi il n'eſt queſtion, pour ajoûter la grandeur b avec la grandeur d, que de les joindre par le ſigne de cette jonction qui eſt $+$, écrivant $b + d$, ce qui vaut autant que b plus d. Il n'eſt donc queſtion que de ſe ſervir des ſignes des quatre operations qu'on a expliquées, les exprimant comme on en eſt convenu. Il ne faut pas confondre ces ſignes ou expressions ; car si pour ajoûter b avec d on joignoit de près ces deux lettres sans autres signes, ainsi bd, puisqu'on est convenu que cette maniere bd est le signe de la multiplication, on ne marqueroit pas que b est joint avec d, mais qu'on a multiplié b par d, ce qui est bien different : car deux ajoûtez à six font 8 ; mais deux fois six font douze.

On peut abreger ces signes ; & il le faut, quand on le peut : car il en est des signes comme des expressions, qui donnent des idées plus nettes lors qu'elles sont simples. Ainsi $b + b + b + b$ signifians que b est ajoûté quatre fois, au lieu de cette longue expression, j'écris $4b$; ce qui est la même chose.

Souvenez-vous, qu'on est convenu (car les signes ne signifient que ce qu'on convient qu'ils signifieront), que lorsque le chifre est devant la lettre, il marque une addition : ici par exemple dans $4b$, que b est ajoûté quatre fois à lui-même ; mais b^4 marque, comme on le dira, que b est multiplié quatre fois par lui-même. Afin qu'on ne s'y trompe pas, on fait ensorte que le chifre qui est après la lettre, ne se trouve pas exactement dans la même ligne, comme vous voyez ici b^4. On peut mettre le signe $+$ devant une lettre qui n'a point de signe, quand on sçait d'ailleurs que la grandeur qu'elle marque est positive. Ainsi dans cette expression $b + d$, je puis mettre $+$ devant b ; $+ b + d$.

Exemples d'Addition.

à ajoûter	a	$3f$	$4d$	a	$3c$	xb	$2b$
	b	$2f$	x	$2b$	$4d$	zc	b
	c		$8d$			zc	[illegible]
Sommes	$a + b + c$	$5f$	$12d + x$	$a + 2b$	$3c + 4d$	$xb + 2zc$	[illegible]

DE LA SOUSTRACTION.

COmme le ſigne $+$ convient à une grandeur poſitive: auſſi le ſigne $-$ marque une grandeur negative, ou qui eſt moindre que rien. Ce ſigne $-$ eſt celui de la Souſtraction. Pour ſouſtraire g de f on joint ces deux grandeurs par ce ſigne de *moins*, en cette maniere $f-g$. Ainſi la ſouſtraction dans l'Algebre ou l'Arithmetique par lettres, change en grandeurs negatives celles qui étoient poſitives. On ſous-entend le ſigne $+$, quand il n'y a aucun ſigne. Ainſi quand on propoſe d'ôter g de f; c'eſt comme ſi on propoſoit d'ôter $+g$ de $+f$. Or en changeant le ſigne de la grandeur qu'on veut ôter, vient $+f-g$; où la grandeur poſitive $+g$ devient negative: de ſorte que ſi ces lettres marquent l'état d'un homme qui a ou qui n'a pas des piſtoles, $+f$ marquera le nombre des piſtoles qu'il a poſitivement; & $-g$ le nombre de celles qui lui manquent ou qu'il doit. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'eſt rien. Ces deux ſignes $+$ & $-$ ſe détruiſent; c'eſt pourquoi on peut abreger une operation, & en rendre l'expreſſion plus nette, effaçant autant de fois les lettres qui marquent la grandeur dont on veut retrancher, que ces lettres ſe trouvent de fois dans celle qu'on veut retrancher: ainſi pour retrancher $2b$ de $5b$, il faut ôter de $5b$ deux fois b, le reſte $3b$ eſt ce que l'on cherche. Car $+2b-2b$ ce n'eſt rien.

EXEMPLES DE SOUSTRACTION.

D'où il faut	$5b$	$4d$	f	b	$3c$	ab
ſouſtraire	$2b$	d	f	d	$2b$	cd
Reſte	$3b$	$3d$	0	$b-d$	$3c-2b$	$ab-cd$

Remarquez que la soustraction d'une grandeur negative, d'une autre grandeur negative se fait par une addition. Nous avons vû que les grandeurs negatives & positives étant opposées; en diminuant les unes, on augmente les autres. En diminuant les dettes d'un homme, on augmente son bien.

De la Multiplication.

29 Pour la Multiplication on joint simplement les grandeurs que l'on veut multiplier l'une par l'autre. Pour multiplier *b* par *d*, on écrit *bd*. Pour multiplier *b* par 3, on écrit 3*b*. S'il y a des chifres joints avec les lettres, on les multiplie comme il a été enseigné; ainsi pour multiplier 3*b* par 2*b*, on multiplie 3 par 2, ce qui fait 6, & on joint *b* avec *b*, le produit de cette multiplication est 6*bb*. Il ne faut point chercher de démonstration de toutes ces choses-là. Ces manieres d'ajoûter, soustraire, multiplier & diviser toutes sortes de grandeurs, ne sont que des signes de ce que l'on suppose être fait: ainsi si j'écris *bb*, je témoigne par cette marque que je suppose que la grandeur designée par la lettre *b* a été multipliée par *b*, c'est à dire par elle-même. On a dit qu'on se servoit quelquefois d'une petite croix de S. André pour signe de la multiplication: que $A \times B$ est une note qui marque que *A* & *B* sont multipliez l'un par l'autre.

Pour abreger lors qu'on multiplie une grandeur par elle-même, on met après la lettre qui la marque, un chifre qui signifie combien de fois elle a été multipliée: ainsi multipliant *b* par *b*, cela fait *bb*, & de rechef par *b*, cela fait *bbb*; pour abreger on écrit b^3. Remarquez donc encore une fois que 3*b* n'est pas la même chose que b^3; car ſi *b* vaut 2, en diſant 3 fois *b* on dit 3 fois 2, ce qui fait 6. Mais puiſque b^3 eſt la même choſe que *bbb*, vous voyez que *bbb* doit valoir 8 ; car 2 par 2 fait 4, & 4 par 2 fait 8. Quand on écrit $2b$, c'eſt une marque que l'on ſuppoſe que *b* eſt ajoûté à *b*; mais quand on écrit *bb* ou b^2, c'eſt une marque qu'on ſuppoſe que *b* eſt multiplié par *b*. 3 ajoûté à 3 ne fait que 6; mais 3 multiplié par 3 fait 9.

Exemples de Multiplication.

A multiplier.	a	a	b	ab	aa
Multiplicateur.	b	a	$2b$	cd	ab
Produit	ab	aa ou a^2	$2bb$	$abcd$	a^3b ou $aaab$

A multiplier.	$2a$	$2b$	$3ab$	$6a^3$
Multiplicateur.	$3b$	c	$2cd$	$2a^3$
Produit.	$6ab$	$2bc$	$6abcd$	$12a^6$

Dans le dernier exemple $6a^3$, multiplié par $2a^3$, on ſera ſurpris comment le produit en eſt $12a^6$. Nous avons dit que a^3 eſt la même choſe que *aaa*; or en multipliant $6aaa$ par $2aaa$, le produit eſt $12aaaaaa$; partant pour abreger, comme il a été dit, au lieu de *aaaaaa*, on doit mettre un 6 après *a*, qui marque combien on doit concevoir que cette lettre eſt repetée.

De la Division.

LA marque de la diviſion eſt une petite ligne, 30
au deſſous de laquelle on place le diviſeur, &

au dessus la grandeur donnée pour être divisée : ainsi $\frac{b}{c}$ est une marque qu'on suppose que *b* est divisé par *c*.

Nous avons déja remarqué qu'il étoit utile de rendre les expressions les plus simples qu'on le pouvoit ; parce qu'elles donnent les idées plus simples, & par consequent plus nettes. Or il est facile d'abreger l'operation dont il est ici question. Avant que d'en proposer le moyen, il faut relire ou rappeller dans sa memoire la Proposition sixiéme, § n. 21. On y a démontré que le quotient d'une division multipliant le diviseur, produit la somme qui avoit été divisée ; ainsi le quotient doit être une grandeur qui multipliée par le diviseur, produise la grandeur qu'il faut diviser ; par consequent *bc* étant proposé pour être divisé par *c*, il est manifeste que le quotient sera *b* ; car *b* multipliant le diviseur *c*, fait la somme *bc*, qui avoit été divisée. La division défait ce qu'avoit fait la multiplication. On donne donc cette Regle génerale, pour faire les divisions qu'il faut retrancher des grandeurs à diviser les lettres qui se trouvent dans le diviseur. Suivant cette Regle, pour diviser *bcd* par *cd*, il faut retrancher de *bcd* les lettres *c* & *d* qui se trouvent dans le diviseur *cd*, & dans la grandeur à diviser *bcd*. Le quotient sera donc *b*, comme il est évident, puisque multipliant par ce quotient *b* le diviseur *cd*, cela fait *bcd*, qui est la grandeur qui a été proposée pour être divisée.

Lorsqu'il y a des chifres on les divise, comme il a été enseigné dans la division des nombres. Pour diviser 6*bb* par 3*b*, on divise *bb* par *b* ; le quotient est *b*, & 6 par 3, le quotient est 2 ; ainsi le quotient de 6*bb*, divisé par 3*b*, est 2*b*. Car 2*b* multipliant 3*b*, produit 6*bb*.

Ex-

Exemples de Divisions.

Il faut diviser	ab		a		a^3		abc		a^3b		$6ab$	
		b *quot.*		a		a^2		bc		a		$2a$
par	a		a		a		a		a^2b		$3b$	

Dans toutes ces diviſions, pour être aſſuré que l'operation eſt bonne, il ne faut que multiplier le quotient par le diviſeur; ſi le produit eſt égal au dividende, ſelon ce qu'on a dit touchant la preuve des diviſions avec les chiffres, cette diviſion par lettres ſera bonne.

Il eſt évident qu'en diviſant une grandeur par elle-même, le quotient eſt 1, diviſant b par b le quotient eſt 1; car une grandeur eſt contenuë une fois en elle-même.

Chapitre III.

Operations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs complexes ou compoſées.

De l'Addition.

L'Addition des Grandeurs complexes ou compoſées, n'a pas plus de difficulté que celle des Grandeurs incomplexes, il faut ſeulement joindre par le ſigne $+$ les Grandeurs que l'on veut ajoûter les unes aux autres. Par exemple, pour ajoûter $b+c$ avec $f+g$, il faut joindre ces deux Grandeurs complexes par le ſigne $+$ en cette maniere, $b+c+f+g$. Pour ajoûter $b+c$ avec $d-f$, il faut écrire $b+c+d-f$. 31

Pour abreger, lors qu'à une grandeur on ajoûte la même grandeur, on met un chifre qui marque combien de fois on ſuppoſe que cette grandeur eſt ajoûtée à elle-même, comme on a fait ci-deſſus: ainſi aiant à ajoûter $c+d$ avec $c+d$, au lieu de $c+d+c+d$, on fait cette addition en cette ſorte, $2c + 2d$. Si les Grandeurs données ſont $c - d$ & $c - d$, on fait l'addition de la même maniere $2c - 2d$.

Lors que les Grandeurs qu'on doit ajoûter ſont les mêmes, & qu'elles ont des ſignes contraires, il faut retrancher les lettres qui ſe trouvent d'une part avec le ſigne $+$, & de l'autre part avec le ſigne $-$, comme s'il falloit ajoûter $3b + 2d$, à $2b - 2d$, puiſque dans la premiere grandeur il ſe trouve $+ 2d$, & dans l'autre $- 2d$, je retranche $2d$, qui ſe trouve d'une part avec $+$, & de l'autre avec $-$; ainſi la ſomme de cette addition eſt $5b$. La raiſon pourquoi on ſupprime entierement $2d$ eſt manifeſte, car le ſigne $-$ détruit ce que fait le ſigne $+$, ainſi il ne reſte rien. Plus $2d$ & moins $2d$, ne ſont rien. En ôtant tout ce qu'on avoit mis, il ne reſte rien.

Nous en avons fait un Axiôme qu'il faut avoir préſent à l'eſprit, pour abreger ces operations, en rendre les expreſſions plus nettes, & pour juger des operations que d'autres ont fait. Car il arrive ſouvent qu'on ne conçoit pas la verité d'une operation; parcequ'on n'y voit point de certaines lettres qu'on juge y devoir paroître, lors qu'on n'apperçoit pas que ſe trouvant avec des ſignes contraires on a dû les ſupprimer.

Par exemple, ajoûtant $4f + 6g$ à $3f - 4g$, l'addition ſera $7f + 2g$; car $+ 6g$ eſt égal à $+ 4g + 2g$: or ſelon ce qu'on vient de dire, pour ajoûter $+ 4g + 2g$ avec $- 4g$, il faut entierement ſupprimer $4g$; ainſi il ne reſte que $+ 2g$.

EXEMPLES D'ADDITIONS.

A	$a + 3b$	$2a - b$	$aa - 5a + 6$
ajoûter.	$a + 2b$	$3a - 3b$	$aa + a - 6$
Somme	$2a + 5b$	$5a - 4b$	$2aa - 4a.$

A ajoûter.	$a - d$ $a + 4d$	$aa + 2a - 3$ $aa + a - 6$	$2a^3 + b^2 - 3$ $a^3 + b^2 - 2$
Somme	$2a + 3d$	$2aa + 3a - 9$	$3a^3 + 2b^2 + 1$

A ajoûter.	$3a + 4b - 6c$ $4a - 2b - 3c$ $7a + 12b + 2c$	$20m + 10n + 40x$ $1m - 30n - 20x$ $40m + 9n + 50x$
Somme	$14a + 14b - 7c$	$61m - 11n + 70x$

De la Soustraction.

Il faut ici, comme dans la Soustraction des Grandeurs incomplexes, se servir du signe de la Soustraction, joignant par le signe $-$ la grandeur qu'on veut soustraire, avec celle de laquelle on la veut soustraire. Pour ôter $b + d$ de $c + f$, il faut premierement écrire $c + f - b$: & parceque ce n'est pas seulement b qu'il faut retrancher, mais encore $+ d$, on doit marquer ces deux soustractions par deux signes de soustraction, en cette maniere $c + f - b - d$. 32

On l'a déja remarqué, & il est aisé de voir que par la soustraction on change les grandeurs qu'on retranche, & que de positives qu'elles étoient, on fait qu'elles deviennent negatives. C'est pourquoi on donne cette Regle generale, qu'il faut changer les signes de la grandeur qu'on veut soustraire. Vous vous souvenez que nous avons dit, que devant une grandeur qui n'est precedée d'aucun signe, celui-ci $+$ y peut être sous entendu. Suivant cette Regle, pour soustraire $b + d$, ou $+ b + d$ de $c + f$, il faut changer les deux signes de $+ b + d$ en cette maniere $c + f - b - d$, comme il a été dit.

Cette Regle se trouve toujours veritable; car lors que le signe $-$ se rencontre dans la grandeur qu'on veut soustraire : comme ici si on veut soustraire $b - d$ ou $+ b - d$ de $c + f$, il faut changer ces signes $+ b - d$ en des signes contraires, de cette sorte $c + f - b + d$. Quand on soustrait $b - d$ de $c + f$, on ne veut pas ôter entierement la grandeur b, il s'en faut la grandeur d ; ainsi ayant mis $c + f - b$, on retranche de $c + f$ plus qu'il ne faut retrancher ; sçavoir la grandeur d ; c'est pourquoi on l'ajoûte lui donnant le signe $+$ en cette maniere $c + f - b + d$. Selon cette Regle, ayant soustrait $b - d$ de $c - f$, le reste est $c - f - b + d$.

On peut abreger les expressions d'une soustraction, en observant deux choses dont nous avons déja parlé. 1°. Lors qu'il faut ajoûter des grandeurs exprimées par les mêmes lettres, il suffit de mettre devant une de ces lettres un chifre qui marque combien elle est ajoûtée de fois à elle-même, comme au lieu de $b + b + b + 2b$, on peut mettre $5b$. 2°. Puisque $+$ une grandeur $-$ la même grandeur, cela ne fait rien : $+ b - b$ égal à zero, on peut sans diminuer la valeur d'une expression, supprimer les lettres qui se trouvent avec le signe $+$ & avec le signe $-$; par consequent ôtant $+ c + f$ de $c + d + f$, comme cela fait $c + d + f - c - f$, en retranchant les lettres c & f qui ont des signes contraires, le reste de cette soustraction est d.

Si l'on soustrait $a - b$ de $3a + b$, selon la Régle generale après la soustraction, il reste $3a + b - a + b$. Or on peut abreger cette expression ; car $3a - a$ ne font que $2a$, & $+ b + b$ valent $2b$; ainsi $2a + 2b$ valent autant que $3a + b - a + b$.

En retranchant $a + 3b$ de $3a + 2b$ selon la

Regle, le reſte ſera $3a + 2b - a - 3b$. Mais puiſque $3a - a$ eſt égal à $2a$, & que $+ 2b - 3b$ eſt égal à $- b$; il eſt évident que $3a + 2b - a - 3b$ font $2a - b$.

Pour ſouſtraire $3a - 3b$ de $5a - 4b$, ſelon la Regle generale, le reſte ſera $5a - 4b - 3a + 3b$. Or 1°, $5a - 3a$ eſt égal à $2a$; 2°, d'une part on ôte $4b$, & de l'autre on ajoûte $3b$, comme vous le voyez dans l'operation $5a - 4b - 3a + 3b$: ainſi il faut ſupprimer $3b$, & n'en marquer qu'un avec le ſigne $-$ pour abreger cette expreſſion, qui ſera réduite à celle-ci $2a - b$. Soit donné $5a + 2b$ dont il faut ſouſtraire $4a + 6b$, je retranche premierement $4a$ de $5a$, & il reſte a : Enſuite pour retrancher $6b$ de $2b$, comme on ne peut pas ôter d'une grandeur ce qu'elle n'a pas, après avoir ſupprimé $2b$ pour retrancher les $4b$ qui reſtent, je les retranche de la grandeur a en les liant avec cette lettre en cette maniere $a - 4b$.

Exemples de Soustractions.

D'où il faut ſouſtraire	$2a + 5b$ $a + b$	$5a - 4b$ $3a - 3b$	$3a + 2b$ $a + 3b$
Reſte	$a + 4b$	$2a - b$	$2a - b$

D'où il faut ſouſtraire	$2a + b$ $a - b$	$3a + d$ $2a + 5d$	$2aa + 2a + 9$ $aa + a + 3$
Reſte	$a + 2b$	$a - 4d$	$aa + a + 6$

D'où il faut ſouſtraire	$25a + 12b - 14d$ $12a - 8b + 10d$	$30m - 19n + 50x + 10y$ $20m - 12n + 14x + 20y$
Reſte	$13a + 20b - 24d$	$10m - 7n + 36x - 10y$

Si dans ces dernieres operations vous n'appercevez pas comment ces soustractions donnent de tels restes, faites les operations tout au long, & vous découvrirez, sans peine, comment en abregeant une expression selon qu'il a esté enseigné, ces soustractions ont les restes qui sont marquez dans les Exemples proposez.

L'Addition & la Soustraction se servent de preuves. Pour m'assurer qu'ayant retranché $a+6b$ de $5a+2b$, le reste est $4a-4b$; j'ajoûte $4a-4b$ avec $a+6b$, & trouvant que la somme est $5a+2b$, je suis assuré que l'operation est bonne. Au contraire, pour m'assurer que $5a+2b$ est la somme de $4a-4b$, & $a+6b$, je retranche l'une de $5a+2b$; si le reste de la soustraction donne l'autre somme, l'addition a esté bien faite, comme on l'a enseigné ci-dessus.

Disons encore que pour ajoûter ensemble deux grandeurs complexes, il n'y a qu'à les écrire l'une après l'autre avec leurs mêmes signes; & que pour soustraire une grandeur complexe d'une grandeur aussi complexe, il faut écrire la grandeur à soustraire après l'autre, en changeant tous les signes de celle que l'on soustrait, & reduire le tout dans l'une & l'autre operation à la plus simple expression. Par exemple, si l'on veut ajoûter $3a+4c-5b+8$ *avec* $4a-2c-2b+4$, *l'on écrira* $3a+4c-5b+8+4a-2c-2b+4$, *ce qui se réduit à* $7a+2c-7b+12$.

De même si l'on veut soustraire $3a+4c-5b+8$ *de* $4a-2c-2b+4$, *l'on écrira tout de suite* $4a-2c-2b+4-3a-4c+5b-8$: *ce qui se reduit à* $a-6c+3b-4$. *Il n'est point necessaire en ces operations d'écrire les termes semblables sous les semblables: si nous l'avons* *fait, ce n'eſtoit que pour repreſenter aux yeux ces operations.*

De la Multiplication.

LA multiplication des grandeurs complexes ſe fait preſque de la même maniere que la multiplication des nombres qui ont pluſieurs chifres. Comme dans les nombres on multiplie tous les chifres du nombre à multiplier par chaque chifre du multipliant, en ſorte qu'il y a autant de multiplications partiales qu'il y a de chifres dans le multipliant; auſſi dans les grandeurs compoſées on multiplie toutes les parties de la grandeur à multiplier par chaque partie de la grandeur qui eſt la multipliante. 33

Soit donné $b + d$ pour eſtre multiplié par x; il faut multiplier b & d, qui ſont les parties de la grandeur donnée, par x; ce qui produit $xb + xd$.

Soit donné $b + d$ pour eſtre multiplié par $x + z$, il faut faire quatre multiplications partiales, qui ſeront $xb + xd + zb + zd$. On peut comprendre dans trois Regles tous les differens cas de cette operation.

Premiere Regle.

Lors que les deux grandeurs données ont le 34
ſigne $+$, leur produit doit avoir ce même ſigne: ainſi multipliant $b + d$ par $x + z$, le produit eſt, comme nous avons vû, $xb + xd + zb + zd$.

Seconde Regle.

Plus en moins ou moins en plus, donne un 35
produit qui doit avoir le ſigne $-$.

C'eſt à dire que ſi l'une des deux grandeurs a le signe —, par exemple si l'on avoit donné $b - c$ pour être multiplié par $+ a$, le produit de leur multiplication doit être $ab - ac$, dont la raison est évidente. Quand on multiplie $b - c$ par a, on ne veut multiplier qu'une partie de b. Ainsi ayant multiplié tout b par a, comme on a trop fait, ayant aussi multiplié c qui doit estre retranché de b, pour y remedier, on ôte autant de fois c qu'on l'avoit trop pris de fois. Le produit ab étant plus grand que celui qui est le veritable, de toute la grandeur ac : on en retranche donc cette grandeur, en la joignant avec ab par le signe de la soustraction qui est —, en cette maniere $ab - ac$.

Soit donné $b + d$ pour estre multiplié par $x - z$, le produit sera $xb + xd - zb - zd$. Quand on multiplie $b + d$ par $x - z$, on ne multiplie pas cette grandeur par toute la grandeur x, il s'en faut la partie z ; ainsi ayant multiplié la grandeur $b + d$ par toute la grandeur x, le produit $xb + xd$ est plus grand que le veritable produit qu'on cherche, de la grandeur b multipliée par z, & de d multipliée par z, c'est à dire de $zb + zd$: ainsi il faut retrancher ce produit $zb + zd$, de la maniere qu'il a été enseigné dans la soustraction, écrivant $xb + xd - zb - zd$.

Troisie'me Regle.

36 Moins en moins donne plus,

C'est à dire que si les deux grandeurs qu'on multiplie ont le signe —, le produit de la multiplication de l'une par l'autre, aura le signe +. Par exemple, $b - d$ étant multiplié par $x - z$, le produit sera $xb - xd - zb + zd$: Et afin qu'on comprenne cela ; voici comme se fait l'operation. Je multiplie d'abord $b - d$ par x, & premierement b, ce qui me donne xb pour premiere multiplication partiale. Et comme je ne voulois pas multiplier toute la grandeur b par la grandeur x, qu'il s'en falloit la grandeur d; le produit xb eſt trop grand, ſçavoir de xd. Je retranche donc xd de xb, par le ſigne de la ſouſtraction en cette ſorte $xb - xd$; & ainſi j'ai déja le produit des deux grandeurs à multiplier, par une des grandeurs du multipliant, ſçavoir de $b - d$ par x. Reſte encore à connoître le produit de $b - d$ par z. Mais ſi vous avez bien pris garde, en multipliant $b - d$ par x, vous l'avez auſſi multiplié par z, ce qu'il ne falloit pas faire; car vous n'aviez pas à multiplier $b - d$ par toute la grandeur x, il s'en falloit la grandeu r z: partant le produit de $b - d$ par x eſt trop grand, ſçavoir du produit de $b - d$ par z qui eſt $zb - zd$: c'eſt pourquoi auſſi je le retranche de $xb - xd$, en changeant les ſignes, ſuivant qu'il a eſté enſeigné dans la ſouſtraction. Ce qui me donne pour total & veritable produit $xb - xd - zb + zd$.

Ainſi pour comprendre la raiſon de cette Regle de multiplication : moins en moins donne plus; *il n'y a qu'à ſe former une juſte idée de la multiplication, & ſe ſouvenir de ce qui a eſté dit dans la ſouſtraction* ſ n. 32. *ſans y chercher d'autre miſtere ; car avec ce ſigne* plus, *on ajoûte ſeulement ce qu'on avoit ôté de trop.*

Voici une autre preuve que + par − donne −, & que − par − donne plus. On la peut paſſer dans la premiere lecture de cet Ouvrage ; elle s'entendra plus facilement, quand on ſera exercé à ce calcul. 51.

Soit à multiplier $a - b$ *par* $+ c$, *je dis que le produit ſera* $ac - bc$; *car ſoit* $a - b = d$ *donc* a = d + b. *Ce qui étant multiplié par* + c *donne* ac = dc + bc : *Donc* ac − bc = dc, *&* ac − bc *est le produit de* a − b *par* + c : *ce qu'il falloit démontrer.*

Soit encore a − b *à multiplier par* − c. *Il faut prouver que le produit est* − ac + bc. *L'on fait comme devant,* a − b = d, *ou* a = d + b ; *puisque par la démonstration precedente* + *par* − *donne* −, *en multipliant* a = d + b *par* − c, *on aura* − ac = − dc − bc, *ou* − ac + bc = − dc. *Ainsi* a + b *multiplié par* − c *donne le produit* − ac + bc : *ce qu'il falloit démontrer.*

Exemples pour la Multiplication.

Premier.

$$\begin{array}{llllll}
 & 4a + 12b + 8f & & & & \\
\text{par} & 5a - 3b + 4f & & & & \\
\hline
 & 20aa + 60ab + 40af - 36bb - 24bf + 32ff & & & & \\
 & \quad - 12ab + 16af \qquad + 48bf & & & & \\
\hline
 & 20aa + 48ab + 56af - 36bb + 24bf + 32ff & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Autre Exemple.

$$\begin{array}{ll}
 & 8m - 4n - 20x \\
\text{par} & 4m - 2n - 40x \\
\hline
 & 32mm - 16mn - 80mx + 8nn + 40nx + 800xx \\
 & \quad - 16mn - 320mx \qquad + 160nx \\
\hline
 & 32mm - 32mn - 400mx + 8nn + 200nx + 800xx \\
\hline
\end{array}$$

Comment on peut rendre les expressions de ces multiplications plus nettes.

38 Lors que les grandeurs qu'on multiplie les unes par les autres ont les mêmes lettres, on

peut abreger l'expreſſion de leur produit. Le produit de $a + b$ par $a - b$, eſt ſelon la regle $aa + ab - ab - bb$: or puiſque $+ ab - ab$ ne fait rien, donc $aa - bb$ eſt égal à $aa + ab - ab - bb$. Le produit de $a - b$ par $a - b$ eſt $aa - ab - ab - bb$, puiſque $- ab - ab$ eſt la meſme choſe que $- 2ab$, je mets donc $aa - 2ab + bb$ pour $aa - ab - ab + bb$.

Le produit de $3d + e$ par $3d + e$ eſt $9dd + 6de + ee$. Celui de $3d + e$ par $3d - e$, eſt $9dd - ee$. Celui-ci de $3d - e$ par $3d - e$, eſt $9dd - 6de + ee$. Lors que les grandeurs ſont fort composées, & que leurs produits ſeroient trop étendus, pour marquer ſeulement qu'il faut multiplier ces grandeurs composées l'une par l'autre, on les joint, mettant entre deux cette petite croix de ſaint André $\times$, comme on l'a dit, $4a + 3aa - 2a + 1 \times aa - 5a + 6$.

De la Division.

La Diviſion, comme nous avons déja remarqué, défait ce que la multiplication avoit composé ; ainſi pour diviſer, il faut ſe reſſouvenir des Regles precedentes de la multiplication. 39

Nous avons vû que la diviſion & la multiplication ſe ſervent de preuves. On ne ſe peut pas tromper dans la diviſion, pourvû qu'on obſerve ſi le quotient en multipliant le diviſeur fait un produit égal à la grandeur qu'on a diviſée ; car comme on l'a vû ſ̃ n. 21. ſi cela arrive, ce quotient eſt le veritable : ainſi $x + z$ multiplié par $b + d$, faiſant le produit $xb + xd + zb + zd$, il eſt certain que $b + d$ eſt le quotient de $xb + xd + zb + zd$ diviſé par $x + z$. Il ne faut donc que ſuivre les trois Regles que nous venons de donner pour la multiplication.

1°. Puiſque plus en plus donne plus, ſi la grandeur qui doit eſtre diviſée a le ſigne $+$, & que le diviſeur ait le ſigne $+$, c'eſt une marque que le quotient doit avoir $+$; ainſi la grandeur $xb + xd + zb + zd$ étant donnée pour être diviſée par $x + z$, il eſt manifeſte que le quotient eſt $b + d$.

2°. Si la grandeur à diviſer a le ſigne $-$, & que le diviſeur ait le ſigne $+$, le quotient aura le ſigne $-$; & ſi le diviſeur a le ſigne $-$, le quotient aura le ſigne $+$. Ainſi diviſant $xb + xd - zb - zd$ par $x - z$, le quotient ſera $b + d$; car $b + d$ multipliant $x - z$, fait la grandeur donnée $xb + xd - zb - zd$.

3°. Si la grandeur donnée à diviſer a le ſigne $+$, & le diviſeur le ſigne $-$, le quotient aura ce même ſigne $-$. Diviſant $xb - xd - zb + zd$ par $1 - z$, le quotient ſera $b - d$.

Lors que l'expreſſion d'une operation a été abregée pour en appercevoir le quotient, ou quels ſont les termes ſupprimez dans les produits à diviſer, & les rétablir ; voici ce que l'on fait.

Soit $mm - nn$ à diviſer par $m - n$, il faut écrire le diviſeur à la gauche du dividende, comme vous le voyez.

Produit à diviſer.

Diviſeur ;	}	$mm - nn$	}	*Quotient,*
$m - n.$		$- mm + mn$		$m + n$
		$0 + mn - nn$		
		$- mn + nn$		

Je dis mm diviſé par $+ m$ donne $+ m$, que j'écris au quotient. Or $m - n$ du diviſeur multiplié par m du quotient donne $+ mm - mn$, que j'écris au deſſous de toute la grandeur à diviſer, avec des ſignes contraires $- mm + mn$, comme vous voyez ; & réduiſant $mm - nn - mm + nn$ l'on a $o + mn - nn$, qu'il faut encore diviſer par $m - n$. Je dis donc encore $+ mn$ diviſé par m donne $+ n$, que j'écris au quotient, & $m - n$ multiplié par n, donne $mn - nn$, qui étant écrit avec des ſignes contraires, détruit entierement le produit à diviſer $o + mn - nn$: Ainſi je ſuis aſſuré que $m + n$ eſt le quotient de $mm - nn$, diviſé par $m - n$. Lors que dans la grandeur à diviſer on ne trouve aucune des lettres du diviſeur ; c'eſt une marque qu'on ne peut faire cette diviſion qu'en plaçant au deſſus d'une petite ligne la grandeur à diviſer, & le diviſeur au deſſous : ainſi diviſant $bd + pq$ par $r + s$ le quotient ſera $\frac{bd - pq}{r + s}$

Je ne donne pas davantage d'exemples de toutes ces operations, parceque je veux que mon Ouvrage ſoit court. Je ne mets que des exemples faciles, écrivant pour ceux qui commencent, & qui peut-eſtre n'auront point de Maîtres pour les aider. S'ils entendent mon livre, ils ſeront capables d'entendre ſans peine les Livres où l'on trouve des exemples de calcul par lettres plus longs, & plus difficiles que ceux que je propoſe. Pour les Maîtres qui voudront bien ſe ſervir de cet Ouvrage, ils doivent exercer leurs Diſciples, en leur donnant pluſieurs exemples.

Si on a bien compris ceux que je viens de donner, ce qu'on aura pû faire avec une legere *attention : On concevra aisément tout l'artifice de ces operations ; & de soi-même, on appercevra ce qu'il faudroit faire lors que les grandeurs sont encore plus composées.*

C'est à Descartes que nous devons cette Arithmetique par lettres, comme on la pratique aujourd'hui, & que je viens de l'enseigner. François Schooten l'ayant expliqué à Erasme Bartholin, celui-ci l'a mise par écrit, & en a composé un Livre, qui porte pour titre ; Mathematique Universelle, ou Introduction à la Geometrie de Descartes. *Je renvoye à ce Livre comme à la source, en ce qui regarde le calcul par lettres ; on y trouvera grand nombre d'exemples qui donneront lieu de s'exercer, & de se perfectionner dans ce calcul.*

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES
OU
TRAITE'
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL.

LIVRE SECOND,

SECTION PREMIERE.

Des differentes Puiſſances auſquelles on peut élever une Grandeur, ſelon qu'on l'augmente par l'Addition, ou par la Multiplication.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'eſt que Puiſſance *d'une Grandeur.*

NOus avons vû que les premieres proprietez de la Grandeur, c'eſt qu'à une Grandeur on en peut ajoûter une autre, ou en retrancher les Grandeurs qui ſont plus petites ; qu'on la peut multiplier par une autre Grandeur, & qu'enfin elle peut être diviſée dans les parties qu'elle contient.

Lors qu'on traite un ſujet, il ne s'agit pas toûjours de rechercher des proprietés fort cachées. Il faut conſiderer celles qui ſont les plus ſimples, & que l'idée ou notion naturelle du ſujet preſente à l'eſprit. Il y a une merveilleuſe ſimplicité dans toute la nature : les premiers principes de toutes choſes ſont ſimples ; & ce qui rend la recherche des Sciences difficile, c'eſt qu'on ne commence pas par les premiers principes, qu'on ne les ſuit pas, ou qu'on ne tire pas des premieres connoiſſances tout ce qu'on en peut déduire. La ſimplicité des premieres connoiſſances fait qu'on les mépriſe.

Evitons ce défaut ; & avant que de rechercher d'autres proprietés de la Grandeur que celles que nous avons déja conſiderées, voyons ſi celles dont nous avons parlé ne peuvent point encore ſuffire pour nous faire comprendre bien des choſes qui paroiſſent de grands myſteres. Tout ce qu'il y a au monde ne ſe fait que par addition, & multiplication de parties. Selon que les élemens ſont ajoûtez, ſont multipliez & ſont combinez ou joints les uns avec les autres, ils compoſent differens êtres. Selon auſſi qu'on ajoûte les grandeurs, qu'on les multiplie, qu'on les combine, on produit differentes eſpeces de grandeurs.

L'uſage autoriſé par ceux qui écrivent ſur les Mathematiques, nomme *Puiſſance* ce qu'une grandeur peut devenir, ſelon qu'elle eſt multipliée, & ce ſont particulierement les differentes manieres de multiplier une grandeur qui en font les differentes eſpeces, qu'on appelle Puiſſances.

Ainsi il est évident, que puisque nous devons encore nous arrêter ici à considerer les premieres proprietez de la grandeur, la methode veut que nous parlions ici des Puissances, & en même temps de leur resolution ; c'est à dire, que nous examinions comment on peut élever une grandeur à un certain degré de puissance, en la multipliant de telle & telle maniere ; & comment, lors qu'une grandeur d'une telle puissance est donnée, on peut par la division la décomposer, pour ainsi dire, & la résoudre dans les premieres parties dont elle a été composée.

CHAPITRE II.

Explication ou définition des termes dont on se doit servir, & des differentes Puissances ausquelles une Grandenr peut estre élevée.

I.

UNe grandeur qui est faite par la multiplication de deux ou de plusieurs grandeurs, s'appelle une Grandeur de plusieurs dimensions. 1

Ainsi la grandeur qui est marquée par ce signe *bc*, est une grandeur de deux dimensions ; car ce signe veut dire que *b* a été multiplié par *c*. La grandeur *bcd* est de trois dimensions ; car elle est faite de la multiplication de ces trois grandeurs *b*, *c*, *d*.

II.

On appelle proprement Puissance *ce qu'une grandeur devient, lors qu'on la multiplie une, ou plusieurs fois par elle même.* 2

Quoiqu'une grandeur, selon qu'elle est multipliée non seulement par elle-même, mais encore par toute autre grandeur, fasse differentes efpeces de grandeurs, neanmoins parce que celles qui se font par une même multiplication reïterée, sont plus considerables, on n'appelle *Puissance* d'une Grandeur, que ce qu'elle peut devenir quand elle est multipliée une ou plusieurs fois par elle-même ; & parce que, comme je le viens de dire, ces grandeurs sont les plus considerables, c'est pour cette raison que ce second Livre porte pour titre *Des Puissances*, quoi qu'on y traite encore des autres Grandeurs qui reçoivent differens noms, selon qu'elles sont ajoûtées ou multipliées.

III.

3 *On appelle premiere Puissance, deuxiéme Puissance, troisiéme Puissance, &c. un certain nombre de multiplications reïterées de la même Grandeur. Ces puissances se nomment aussi Degrez, & les chiffres qui marquent ces puissances sont les exposans de ces puissances.*

Ainsi, la premiere puissance de b, ou le premier Degré de b ; c'est b même. La deuxiéme Puissance ou second Degré, c'est bb ; c'est à dire b, multiplié par b. Nous avons vû L. 1. n. 29. que pour abreger, au lieu de repeter plusieurs fois une même lettre pour marquer qu'elle a esté multiplié par elle même, on ne la marque qu'une fois, mais on y joint ensuite un petit chifre qui marque combien de fois elle a été multipliée par elle-même. Au lieu de bb, on peut donc mettre b^2. La troisiéme Puissance ou le troisiéme Degré de b sera bbb, ou b^3 ; la quatriéme $bbbb$, ou b^4 ; la cinquiéme b^5 ; la sixiéme b^6 ; ainsi de suite à l'infini, & ces nombres 2, 3, 4, 5, 6, &c. sont les exposans de ces puissances.

4 Nous avons vû Liv. 1. n. 26. qu'une grandeur dans son premier commencement étant infini-

ment petite, peut être ſuppoſée égale à zero. Ainſi ſi on la nomme z, on peut dire que $z^0 =$ zero. Son premier degré ou premiere puiſſance étoit x^1 quand elle commence d'être une choſe ſenſible; ſon ſecond degré ou ſeconde puiſſance c'eſt x^2; ſon troiſiéme degré x^3. Si x eſt une ligne, & qu'on la conſidere dans ſon premier point, lors qu'elle n'eſt rien ou preſque rien, c'eſt à dire qu'elle n'a rien de ſenſible, on peut la nommer x^0. Quand elle eſt quelque choſe, que c'eſt une ſimple ligne, ce ſera x^1. Si on la conçoit diſpoſée avec elle-même, de ſorte qu'elle faſſe une figure qui ſoit un quarré, alors c'eſt x^2. Si on la conçoit s'élevant ſur ce même quarré, & formant comme un dez à joüer, c'eſt x^3.

Euclide avec les anciens Mathematiciens, comparoient le point des Geometres (c'eſt à dire une grandeur qui n'a aucune dimenſion) avec l'unité: ce qu'ils ne devoient pas faire. C'eſt le *Zero* de l'Arithmetique qui répond au *point* de la Geometrie; c'eſt cette erreur qui leur a fait appeller *premiere Puiſſance*, ce que nous appellons *ſeconde Puiſſance.* Ainſi bb eſt, ſelon eux une premiere puiſſance, qui dans une maniere de parler plus juſte, & qui aujourd'hui eſt la plus uſitée, s'appelle une ſeconde Puiſſance. b^1 eſt la premiere, & bb ou b^2 eſt la ſeconde; ce qu'il faut obſerver pour diſtinguer l'ancien langage d'avec le nouveau.

IV.

Les Grandeurs, par la multiplication deſquelles une grandeur de pluſieurs dimenſions a été produite, ſont nommées les Racines de cette grandeur. 5

La grandeur bxz ayant été faite par la multiplication de ces trois grandeurs b, x, z, ces trois grandeurs sont appellées les Racines de *bxz*. Ce nombre 24 est fait de 6 multiplié par 4. Ces deux nombres 6 & 4 sont les racines de ce nombre 24.

V.

6 *On appelle grandeur Plane ou de deux Dimensions une grandeur qui est faite de deux grandeurs, multipliées l'une par l'autre.*

La grandeur *bx* est une grandeur *plane* ou de deux dimensions. Ce nombre 12 sera un nombre plan ou de deux dimensions, si on conçoit qu'il est fait de ces deux nombres 2 & 6 multipliez l'un par l'autre.

VI.

7 *Une grandeur plane ou de deux dimensions est dite quarrée, lors que ses deux racines ou ses deux dimensions sont égales ; ou ce qui est la même chose, lors qu'elle est faite d'une grandeur multipliée par soi-même.*

Ainsi *bb* est une grandeur *quarrée*, ou un *quarré* ; les deux racines *b* & *b* étant égales. 16 est un nombre quarré, parce que ce nombre est fait de deux nombres égaux multipliez l'un par l'autre, sçavoir de 4 multiplié par 4, ou du même nombre 4 multiplié par lui-même, lequel nombre 4 est appellé la racine quarrée du nombre quarré 16.

VII.

8 *Le quarré est le second degré ou la seconde puissance.*

Nous venons de dire que *bb* ou b^2 est une grandeur quarrée, que c'est le quarré de *b* : or *bb* est fait de *b* par *b* racines égales ; ainsi *bb* second degré ou seconde puissance est un quarré.

VIII.

9 *Une grandeur de trois dimensions, ou qui est*

faite de la multiplication de trois racines est appellée Solide.

Ainsi *bcd*, qui a trois dimensions, & qui est fait par la multiplication de trois racines *b*, *c*, *d*, est une grandeur solide. Ce nombre 36 sera appellé nombre Solide, si on conçoit qu'il est fait de ces trois membres, 2, 6, 3, qui étant multipliez l'un par l'autre font 36.

IX.

Cube ou grandeur cubique, est une grandeur 10.
solide dont les trois racines ou dimensions sont égales; ou ce qui est la même chose, une grandeur cubique est celle qui est faite premierement d'une même grandeur multipliée par elle-même; & en second lieu, de ce produit multiplié par cette même grandeur.

Ainsi *bbb* est une grandeur cubique, ses trois dimensions ou racines *b*, *b*, *b*, étant égales. Ce nombre 27 se peut nommer cube, si on considere que 27 est fait de ces trois membres égaux 3, 3, 3, ou de ce seul nombre 3, multiplié premierement par lui-même, ce qui fait le nombre quarré 9, & ensuite de ce quarré multiplié par 3. On appelle ce nombre 3, la Racine cubique de 27.

X.

Le cube est la troisiéme puissance. 11.

Ainsi b^3 qui est la troisiéme puissance de *b*, est un cube, puisque b^3 qui est la même chose que *bbb*, est fait de trois racines égales.

XI.

Un quarré de quarré est une grandeur qui a 12.
pour sa racine une grandeur quarrée, ou ce qui est la même chose, une grandeur qui est faite d'un quarré multiplié par un quarré.

Ainsi *bbbb* est une grandeur quarrée de quarré, car elle est faite de *bb* quarré, multiplié par le quarré *bb*. Ainsi comme un quarré a deux dimensions, une grandeur quarrée de quarré a quatre dimensions.

Ce nombre 16 peut être consideré comme un nombre quarré de quarré ; car la racine quarrée de 16 est 4, qui est un nombre quarré, dont la racine est 2 ; ainsi ce nombre 16 est fait d'un quarré, multiplié par un quarré, sçavoir de 4 par 4.

XII.

13 *Le quarré de quarré est la quatriéme puissance.*

b^4 est la quatriéme puissance. Or b^4 ou *bbbb* est fait de quatre racines égales, ou de *bb* quarré multiplié par *bb* ; ce qui fait *bbbb* ; par consequent b^4, selon la définition precedente, est un quarré de quarré.

XIII.

14 *Sur-solide, est une grandeur faite d'un quarré de quarré multiplié par la premiere racine, ou ce qui est la même chose, c'est une grandeur faite d'un cube multiplié par le quarré de sa racine.*

Ainsi *bbbbb* est une grandeur qu'on appelle Sur-solide, parcequ'elle est faite de *bbbb* quarré de quarré, multiplié par sa racine *b*, ou si l'on veut de *bbb* cube par *bb* quarré, ce qui donne b^5. De même 32 peut être apellée Sur-solide, si on considere que ce nombre est fait de 16 quarré de quarré multiplié par 2 premieres racines de ce quarré de quarré, ou du cube 8 multiplié par le quarré 4, dont la racine est 2.

XIV.

15 *Le Sur-solide a cinq dimensions : ainsi c'est le cinquiéme degré ou la cinquiéme puissance.*

La grandeur *bbbbb* ou b^5 est faite de cinq racines égales, ainsi c'est une cinquiéme puissance : c'est aussi un Sur-solide, puisque c'est le produit de *bbbb* quarré de quarré par la racine *b*, comme nous venons de le voir. De même selon ce que nous avons dit, le nombre 32 peut estre consideré comme étant un Sur-solide.

XV.

Un quarré cube est une grandeur quarrée, qui a pour sa racine un cube. 16

Ainsi ce nombre 64 sera un quarré cube, si on conçoit ce nombre 64 comme un quarré dont la racine est 8; car 8 par 8 fait 64. Or 8 sera aussi un cube, en le considerant fait de 2 multiplié dabort par lui-même, ce qui fait 4: & derechef 4 par 2, ce qui fait 8. Ainsi 64 ayant pour racine quarrée un cube, c'est un quarré cube.

XVI.

Le quarré cube a six dimensions; ainsi c'est la sixiéme puissance, ou le sixiéme degré. 17

Car b^6 ou *bbbbbb* est un quarré fait de *bbb* par *bbb* laquelle grandeur *bbb* est un cube.

Une grandeur est reconnuë pour quarrée, non seulement quand elle est exprimée par deux mêmes lettres, comme bb, *mais aussi quand on peut partager en deux parties égales les lettres qui composent cette grandeur, ensorte que les mêmes lettres se trouvent en l'une & l'autre partie: ainsi* bbccdd *est une grandeur quarrée, parcequ'elle peut se diviser en* bcd, *&* bcd *qui se multipliant font* bbccdd. *Il en est de même des grandeurs cubes.*

Le même nombre peut recevoir differens noms, selon que l'on veut concevoir qu'il est fait par telles & telles multiplications. 64 sera appellé Plan, si on le considere fait de 32 multiplié par 2; quarré, si on le veut concevoir fait de 8 multiplié par lui-même. Il peut aussi être appellé Cube, car ce nombre 64 peut estre fait de 4 multiplié par 4, ce qui fait 16, & de 16 multiplié par 4: ainsi il *est cube par la définition des nombres cubes.*

Quoiqu'une Grandeur ne soit exprimée que par une seule lettre, on peut la concevoir de tant de dimensions qu'on voudra; mais pour marquer ces dimensions il faut joindre à cette lettre le chifre 1, *autant qu'il le faudra; ce qu'il est necessaire de faire quand on veut comparer deux grandeurs, qui n'ont pas autant de lettres les unes que les autres, ainsi voulant comparer* x *avec* bb, *pour concevoir dans* x *deux dimensions, comme* bb *en a deux, je place* 1 *devant* x *en cette sorte* 1x. *Pour-lors* 1x *&* bb *sont deux grandeurs planes: cependant* 1x *ne vaut pas davantage que* x, *car l'unité n'augmente point la grandeur qu'elle a multipliée.*

Prenez bien garde que toute grandeur quarrée n'est pas un nombre quarré. On appelle nombre quarré celui qui est fait de la multiplication d'un nombre par soi-même, comme 9 *est un nombre quarré qui est fait de* 3 *multiplié par* 3. *C'est pourquoi* 20 *n'est pas un nombre quarré, parce-qu'aucun nombre multiplié par lui-même ne peut faire* 20. *Ainsi si je suppose que* 20 *est égal à* bb, *je pourrai bien appeller* bb *une grandeur quarrée, mais non pas un nombre quarré. Il en est de même des grandeurs cubes, &c.*

CHAPITRE III.

Maniere ancienne d'exprimer les Puissances. La nouvelle maniere est plus nette & plus aisée.

18 C'Est particulierement dans l'expression des puissances, que consiste ce qu'on appelle *l'Algebre*: ainsi ce sont ces expressions qui font l'obscurité ou la clarté de cette Science, selon qu'elles sont plus embarassées ou plus simples.

Voyons quelles étoient autrefois les expressions de l'Algebre.

Les anciens Mathematiciens se sont servis de quelque espece d'Algebre, comme nous l'avons vû. On ne peut point exprimer avec les nombres une grandeur inconnuë; cependant pour la trouver, il la faut marquer. Il n'est donc pas possible que ces Mathematiciens, qni ont découuert tant de choses, n'ayent eu des symboles ou certains signes pour exprimer celles qu'ils cherchoient avant qu'ils les connussent. Nous ne sçavons pas quels étoient ces symboles. C'est la maniere ou la science de se servir de ces symboles ou signes, pour marquer une chose qu'on ne connoît point, qu'on appelle *Algébre*, & qui pour cela est nommée *Symbolique* ou *Spécieuse*; parceque le signe dont elle se sert presente l'espece ou la sorte de chose dont il est question. Les Italiens nomment *Cosa*, ce que nous appellons *Chose*: ainsi ils appellent nombres *Cossiques* les signes Algebriques, qui representent les choses, comme nous l'avons déja remarqué. Or on ne se servoit autrefois de ces signes, que pour marquer les racines & les puissances.

Les Italiens regardoient la racine d'une grandeur comme la chose même: ainsi *cosa* & *racine* ont la même signification chez eux. Ils ont nommé *Censo* ou Z*enzo*, c'est-à-dire *Revenu*, *Rente*, la puissance quarrée qui vient de sa racine multipliée par elle-même. Pour marquer la *cosa* ou la *racine*, ils se servoient de la lettre *N*, ou de la lettre *R*. Pour marquer le quarré, ils employoient la lettre *Q*, par où commence ce mot *Quarré*, ou ils se servoient de la lettre *Z*, parce qu'ils nommoient *Zenzo* cette puissance. Ils ont aussi marqué le cube avec un *C*, le quarré de quarré avec deux *QQ*, & avec *S* le surſolide. On voit dans leurs Livres d'Algebre d'autres caracteres fort bizarres, qui ſont faits des lettres italiques *r*, *z*, *c*, *ſ*, par où commencent ces noms, *racines*, *zenzo*, *cube*, *ſurſolide*.

On ne ſe ſert plus de ces ſignes, depuis qu'on a trouvé l'Arithmetique par lettres. On marque également avec elles les grandeurs connuës & inconnuës; ainſi il n'y a plus cette confuſion de differens ſignes, de chifres, & de ces nombres qu'on nommoit *Coſſiques*. Seulement on diſtingue les grandeurs inconnuës, en ſe ſervant pour les exprimer des derniers caracteres de l'Alphabet x, y, z. Pour les puiſſances, elles ſe marquent fort ſimplement, ajoûtant à la lettre qui eſt le ſigne d'une grandeur, un petit chifre qui indique le degré de ſa puiſſance. Ainſi x^1 eſt une racine, x^2 une quarré, x^3 un cube, x^4 une quatriéme puiſſance, x^5 une cinquiéme, x^6 une ſixiéme. Ce qu'on marquoit autrefois ainſi *A R*, *A Q* ou *A Z*, *A C*, *A QQ*, *A S*, *A QC*, ce qui veut dire racine *A*, ſon quarré, ſon cube, ſon quarré de quarré, le ſur-ſolide, le quarré cube. Nous n'avons pas beſoin de tous ces ſignes. Ceux dont nous nous ſervons ſont ſimples, & font un langage clair & abregé, comme on le voit dans cet exemple.

$$xx = bb + 2bd + dd$$

ou

$$x^2 = b^2 + 2bd + d^2$$

Cette expreſſion tient lieu des paroles ſuivantes: *Le quarré de la grandeur inconnuë* x, *eſt égal aux deux quarrez des grandeurs connuës* b *&* d, *& de plus deux fois un plan fait des racines* b *&* d *de ces deux quarrez* bb & dd. Cette expression si courte, est vive : les choses y sont marquées clairement : on voit ce qu'elles sont ; que *xx* est un quarré, que *bd* est un plan, & la marque de l'égalité = montre qu'on suppose que *xx* est égal à *bb* + 2*bd* + *dd*.

CHAPITRE IV.

De quelques autres especes de Grandeurs, que les differentes manieres d'ajoûter & de multiplier produisent.

COmme on peut multiplier en differentes manieres une grandeur, & l'ajoûter à elle-même ou avec d'autres, les differentes especes de grandeurs que produisent ces differences sont infinies. Il suffit d'indiquer les plus considerables de ces especes ; car je ne pretends pas épuiser cette matiere, cela n'est pas possible.

On distingue les grandeurs numeriques, c'est-à-dire les grandeurs qui s'expriment avec des nombres en plusieurs ordres. Voila les définitions qu'en donne Monſ. Paschal dans son Traité de l'Usage du Triangle Arithmetique, où il explique leurs proprietez.

Il appelle nombres du premier ordre les simples unitez.

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

Nombres du second ordre, les naturels qui se forment par les additions des unitez.

1, 2, 3, 4, 5, &c.

Il appelle nombres du troisiéme ordre, ceux qui se forment par l'addition des naturels. On nomme ceux-la Nombres Triangulaires.

1, 3, 6, 10, &c.

Dans cet ordre le second terme, sçavoir 3 ;

égale la somme des deux premiers naturels, qui sont 1 & 2, le troisiéme qui est 6, égale la somme des trois premiers naturels 1, 2, 3, &c.

Les nombres du quatriéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle Pyramidaux.

1, 4, 10, 20, &c.

C'est-à-dire que le troisiéme des pyramidaux, qui est 10, égale la somme des trois premiers triangulaires, sçavoir de 1, 3, 6.

Les nombres du cinquiéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des pyramidaux, ausquels on a donné le nom de Triangulo-triangulaires.

1, 5, 15, 35, &c.

Les nombres du sixiéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des precedens.

1, 6, 21, 56, &c.

Et ainsi à l'infini.

Selon que les nombres continus se multiplient les uns les autres, ils ont differens noms. Les nombres continus sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, & les autres qui suivent. Or on distingue en differentes classes ces produits : par exemple, ceux qui seront produits de deux nombres qui se suivent, sont la premiere classe; ainsi 20, qui est fait de 4 multiplié par 5, & 72 qui est fait de 8 multiplié par 9, sont de la premíere classe ou premiere espece.

Les nombres qui sont faits de la multiplication de trois nombres de suite qui se multiplient, sont de la seconde espece, ainsi 120 qui est fait de la multiplication de ces trois nombres 4, 5, & 6, qui se suivent, & 720 qui est fait de ces trois nombres 8, 9, & 10, sont de la seconde espece;

ainsi de suite à l'infini, ce qui fait voir qu'on peut inventer une infinité de differentes especes de nombres. Les premiers élemens d'une Science doivent être courts & faciles; il ne m'est donc pas permis de renfermer ici tout ce que je pourrois y faire entrer. Je rendrois ces élemens trop difficiles & trop longs, si j'entreprenois de parler de toutes ces especes de grandeurs.

SECTION SECONDE,

DE LA COMPOSITION ET DE LA NATURE DES PUISSANCES.

CHAPITRE PREMIER.

Axiomes ou Demandes touchant la compoſition & la nature des Puiſſances.

AXIOME PREMIER OU DEMANDE PREMIERE.

20 *LE tout & toutes ſes parties étant multipliés par un même multiplicateur, les produits de ces multiplications ſont égaux.*

$b+d$ ſont les parties de z. Cette propoſition dit, que ſi $b+d$ & z ſont multipliez par une même grandeur, comme par x, les produits ſeront égaux $bx+dx=zx$. Ce qui eſt évident: car puiſque le tout & toutes les parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe, en multipliant le tout ou toutes les parties par une même grandeur, on doit faire un même produit.

AXIOME SECOND OU DEMANDE SECONDE.

21 *Multipliant deux grandeurs l'une par l'autre, dans quelque ordre qu'on le faſſe, elles feront un même produit.*

Multipliant a par b, ſoit que l'on commence par a ou par b, on fait le même produit: ab eſt la même choſe que ba. Cette propoſirion, comme on voit, ne peut pas s'accommoder aux chifres; il eſt vrai pourtant que 5 fois 6, & 6 fois 5 font toujours 30 : mais ce n'eſt pas ce qu'on veut dire : il ne s'agit ici que de leur ſimple diſpoſition ou maniere de les coucher ſur le Papier. Pour les lettres cette diſpoſition eſt indifferente ; mais à l'égard des chifres, c'eſt ce qui en fait toute la valeur ; ainſi on ne la peut troubler ni changer ; 52 & 25 ne ſont pas une même choſe comme *ab* & *ba*. Cet Axiome ne s'entend donc que des grandeurs en elles mêmes, ou de leur expreſſion par lettres.

Axiome III. ou Demande troisie'me.

Multipliant trois grandeurs l'une par l'autre dans quelque ordre qu'on le faſſe, elles feront un même produit. 22

Que l'on multiplie les trois grandeurs, *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, les produits *abc*, *bac*, *cba*, *acb*, *bca*, *cab*, ne ſont qu'une même choſe.

Axiome IV. ou Demande quatrie'me.

Les produits de differentes multiplications ſont égaux, s'ils ſont faits de grandeurs égales & de multiplicateurs égaux. 23

Il eſt évident que des grandeurs égales multipliées également, c'eſt à dire priſes également tant de fois, doivent faire des produits égaux.

On ſuppoſe que les Regles qu'on a données pour multiplier ſont bonnes, & qu'ainſi lors qu'on les a ſuivies, on n'a point fait d'erreur. Pour entendre les démonſtrations des Theorêmes qu'on va propoſer, il n'y a qu'à faire les multiplications qu'il faut faire, & enſuite ouvrir les yeux pour voir ce que les produits de ces multiplications contiennent.

Pour compoſer les Puiſſances, c'eſt-à-dire pour élever une Grandeur à quelque Puiſſance qu'on *veuille, il n'est question que de la multiplier selon qu'elle le doit estre par sa définition. Par exemple, pour élever* b + d *au second degré, il faut multiplier* b + d *par* b + d. *Selon la regle, le produit de cette multiplication sera* bb + 2bd + dd, *quarré de* b + d. *Ainsi pour avoir le cube de* b + d, *il faut multiplier le quarré de* b + d; *qui est* bb + 2bd + dd *par* b + d; *le produit* b^3 + 3bbd + 3bdd + d^3 *sera le cube de* b + d.

Soit donnée cette grandeur b — d, *pour auoir son cube; je multiplie* b — d *par lui-mesme, pour avoir son quarré, qui est* b^2 — 2bd + dd, *que je multiplie par la mesme Grandeur* b — d. *Je ferai l'operation au long afin de m'exercer. Je multiplie donc* 1°. b^2, *ou* bb *par* b, *ce qui me donne* bbb *ou* b^3. 2°. *Je multiplie* — 2bd *par* b. *Or comme il faut suppléer le signe* + *devant une grandeur qui n'a aucun signe exprimé, c'est comme si je multipliois* — 2bd *par* + b; *partant puisque* — *en* + *donne* —, *le produit est* — 2bbd. 3°. *Je multiplie* + dd *par* b; *le produit est* ddb.

Ensuite je multiplie le même quarré b^2 — 2bd + dd *par* — d. 1°. b^2 *ou* + bb *par* — d; *ainsi comme* — *en* + *donne* —, *le produit est* — bbd. 2°. — 2bd *par* — d; *& puisque* — *en* — *donne* +, *ce produit sera* + 2bdd. 3°. *Je multiplie* + dd *par* — d; *&* — *en* + *donnant* —, *ce produit est* — d^3. *Ainsi le cube de* b — d *est* b^3 — 3bbd + 3bdd — d^3. *Il n'est point necessaire que je parle de la Composition des autres Puissances, il n'y a qu'à les multiplier selon leurs définitions.*

CHAPITRE II.

Propositions touchant la Composition des Puissances.

PREMIERE PROPOSITION.

Les parties b *&* d *de la grandeur* x, *ayant été multipliées par* z, *elles font un plan ou produit égal à celui de la grandeur entiere* x, *multipliée par le même multiplicateur* z; *ou le plan fait de la grandeur entiere* x *par* z, *est égal au plan fait des parties* b *&* d *par* z, 24

Il faut démontrer que $zb + zd = xz$. Les parties $b + d$ sont égales à la grandeur entiere x: Donc, *par le quatriéme Axiome ci-dessus*, les produits $zb + zd$ & xz étant faits de grandeurs égales, doivent être égaux.

SECONDE PROPOSITION.

Le plan ou le produit de deux grandeurs entieres x *&* z, *multipliées l'une par l'autre, est égal au plan ou produit fait de* b + d *parties de* x, *multipliées par* f + g *parties de* z. 25

C'est à dire, que $xz = fb + fd + gb + gd$. On suppose que $d + b = x$, & $f + g = z$: Donc *par le quatriéme Axiome ci-dessus*, le produit de $b + d$ par $f + g$, doit être égal à celui de x par z.

TROISIE'ME PROPOSITION.

La grandeur z *ayant été divisée en ses parties* b *&* d, *le quarré de la toute* z *est égal aux deux plans faits de la toute* z, *multipliée par chacune de ses parties* b *&* d. 26

Le quarré de la toute z est zz, les plans de z

par b & par d sont $zb + zd$. Or *par le premier Axiome*, la toute z, & ses parties $b + d$, ayant été multipliées par le multiplicateur commun z, doivent faire des produits égaux : Donc $zz = zb + zd$; ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

27 *Deux plans égaux ajoûtez en une somme, sont égaux à un plan fait du double de l'une de leurs racines, multipliée par l'autre.*

Soient ces deux plans égaux by & by ; la grandeur m est le double de b ; ainsi $b + b$ sont les parties de m : Donc, *par le premier Axiome*, le plan my est égal au plan $by + by$; ce qu'il falloit démontrer.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

28 *Le grandeur* z *multipliée par* b *l'une de ses parties, est égale au produit de ses parties* b *&* d *par la même partie* b : *ou le produit de* z *par* b, *est égal au quarré de* b, *plus le plan de* b *par l'autre partie* d.

Il faut démontrer que $zb = bb + bd$. Les parties de la grandeur z, sont $b + d$: Donc, *par le premier Axiome*, en multipliant z & $b + d$ par le même multiplicateur b, les produits seront égaux $zb = bb + bd$, qui est ce qu'il falloit prouver : car, comme vous le voyez, le plan zb est égal au quarré de b, qui est bb, plus le plan de b multiplié par l'autre partie d.

SIXIE'ME PROPOSITION.

29 *Le quarré de la grandeur* z *est égal aux quarrez de chacune des parties de* z, *plus 2 fois le plan de ces parties.*

Les parties de z sont $b + d$. En multipliant ces deux grandeurs z & $b + d$ par des multiplicateurs égaux, les produits seront égaux *par le quatriéme Axiome*. Ainsi puisque z est égal à $b + d$, le produit de z par z, qui est zz, sera égal au produit de $b + d$ par $b + d$, qui est $bb + 2bd + dd$; ainsi $zz = bb + 2bd + dd$. Or vous voyez que $bb + 2bd + dd$ contient les quarrez de b & de d parties de z, & deux fois le plan bd fait de ces deux parties b & d.

Je retranche de cette Edition plusieurs Theorêmes qui sont du second Livre d'Euclide, que j'avois démontrés dans l'Edition precedente. On les trouvera dans mes Elemens de Geometrie dans leur place. Ici ils sont inutiles. Ceux qui ont fait attention à ce qu'ils viennent de lire, ont un chemin ouvert pour trouver une infinité de nouveaux Theorêmes. Car, par exemple, si $z = 3b$, *le quarré de* z *étant égal au quarré de* $3b$; $zz = 9bb$, *on peut proposer cette Theorême :* Le quarré de la grandeur entiere est égal à neuf fois le quarré de sa troisiéme partie. *La démonstration est évidente. On pourroit faire une infinité de nouveaux Theorêmes semblables; ce qui fait voir la fecondité de cette methode.*

Probleme premier.

Connoissant un nombre plan avec l'une de ses racines, connoistre son autre racine. 30

Je propose ce Problême sur les nombres; car ce n'est pas une question, dans le calcul par lettres: on voit d'abord que les racines de bd sont b & d.

Soit proposé ce nombre plan 48, avec l'une de ses racines 24; pour trouver la seconde racine, c'est-à-dire pour trouver un nombre qui multipliant 24, faſſe 48, & qui ſoit auſſi la ſeconde racine du nombre plan 48; pour trouver, dis-je, cette racine, je diviſe 48 par 24, & le quotient 2 de cette diviſion ſera la racine que je cherche, puiſque ce quotient 2 multipliant 24, doit faire 48. Liv. I. n. 21.

Probleme second.

31 *Connoiſſant un nombre ſolide avec deux de ſes racines, ou le plan de ſes deux racines, connoitre la troiſiéme racine.*

Le ſolide donné eſt 36, les deux premieres racines ſont 3 & 4, dont le plan ou produit eſt 12; pour connoître l'autre racine il faut diviſer 36 par 12, le quotient de cette diviſion qui eſt 3 ſera la racine que l'on cherche; car cette racine doit être un nombre qui multipliant 12, faſſe 36. Or Liv. I. n. 21. ce quotient multipliant 12, doit produire 36: il eſt donc la troiſiéme racine de ce ſolide.

SECTION TROISIE'ME.

DE LA RESOLUTION DES PUISSANCES OU DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que resolution d'une Puissance, ou Extraction de sa Racine. Ce que c'est que Racine.

RESOUDRE une Puissance, c'est trouver la Grandeur qui l'a composée en se multipliant. 32.
L'on ne considere ici que les Puissances qui sont faites par la multiplication d'une certaine grandeur qui est multipliée tant de fois, selon le degré de la Puissance où l'on veut l'élever. La Grandeur qui produit cette Puissance en est la racine. C'est dans l'extraction de ces racines que consiste la resolution des Puissances. Elles sont dites quarrées, cubiques, &c. selon qu'elles sont racines de quarrez, de cubes. Ainsi extraire la racine quarrée de bb, c'est trouver une grandeur qui multipliée par elle-même, fasse le quarré bb. Extraire la racine cube ou cubique de bbb, c'est trouver une Grandeur qui, multipliée cubiquement, fasse le cube bbb.

Il est évident que quand les Grandeurs sont petites, ou qu'elles s'expriment avec peu de lettres, comme *bb*, *bbb*, on voit tout d'un coup que la racine quarrée de *bb* est *b* : que la racine cube de *bbb* est *b*. Il en est de même des nombres quarrez & cubes, on voit tout d'un coup quelles sont leurs racines, quand ils sont petits. Il est facile de voir que la racine quarrée de 4 est 2, que celle de 9 est 3; car on apperçoit que 2 multiplié par 2 fait 4, & que 3 multiplié par 3 fait 9. Il en est de même des nombres cubes. 8 est un nombre cube, dont la racine est 2. On apperçoit aisément que ce nombre multiplié deux fois par lui-même fait 8.

Par consequent il ne seroit pas necessaire de chercher les regles pour l'extraction des racines, si tous les nombres étoient petits. Quand les nombres sont grands, comme est celui-ci 293764, on ne voit pas tout d'un coup quelle est sa racine quarrée, c'est-à-dire quel peut être le nombre qui, multiplié par lui-même, produise 293764. Or on le peut connoître en le cherchant par parties, comme on le va voir. L'artifice dont on se sert pour l'extraction des racines quarrées, cubiques, & de quelque puissance que ce soit, est très-ingenieux. Je l'expliqueray avec soin. Ce qu'on va voir sera un parfait modelle de la maniere de bien ménager la capacité de son esprit, faisant en sorte qu'il ne soit pas obligé de voir trop de choses à la fois; les partageant afin qu'il les considere par parties.

Pour ce qui est des grandeurs de plusieurs dimensions, qui ne sont pas des quarrez, des cubes, &c. il n'est pas possible d'en extraire les racines, quand leur valeur est exprimée par nombre, à moins que de connoistre une de leurs racines. Quand je vois *bd*, d'abord je connois que c'est un plan fait de *b* multiplié par *d*. Quand je vois *bbd*, je connois que c'eſt un ſolide fait du quarré *bb* multiplié par *d* ; mais il n'en eſt pas de même des nombres. On conſidere ce nombre 24 comme un nombre plan ; & l'on propoſe d'en extraire les racines. Il eſt évident que comme il s'agit de trouver deux nombres qui, multipliez l'un par l'autre, faſſent 24, cette queſtion ſe peut reſoudre en differentes manieres ; c'eſt-à-dire qu'on peut aſſigner à 24, conſideré comme un nombre plan, pluſieurs racines ; car il peut être fait de 2 par 12, de 3 par 8, de 4 par 6. On peut même conſiderer 24 comme un nombre ſolide, c'eſt-à-dire fait d'un nombre plan multiplié par un autre nombre : car 2 & 12, 3 & 8, 4 & 6 pouvant être les racines de 24, on peut concevoir que 12 eſt un plan dont les racines ſont, ou 3 & 4, ou 2 & 6. De même 8 ſera un plan, ſi on conſidere qu'il eſt fait de 2 & de 4 ; comme pareillement que 6 eſt un plan, dont les racines ſont 2 & 3. Par conſequent pour connoître les racines dont on conçoit déterminement qu'un plan, qu'un ſolide, eſt fait, il en faut connoître une des racines, laquelle étant connuë, on connoîtra facilement la ſeconde, comme on l'a vû ci-deſſus. Lors qu'une puiſſance n'eſt pas parfaite, c'eſt-à-dire qu'elle n'a point de racine qu'on puiſſe exprimer, ou que ſi elle en a, on ne la connoît point, on met devant, ce ſigne $\sqrt{}$, qu'on appelle le Signe Radical. On y ajoûte un petit chifre, qui marque de quelle puiſſance la grandeur qui a ce ſigne eſt la racine ; ſi c'eſt d'un quarré, d'un cube.

Ainſi $\sqrt{bc}$ marque la racine d'une ſeconde puiſſance : $\sqrt[3]{bcd}$, la racine de la troiſiéme puiſſance, ou d'un cube ; $\sqrt[4]{\ }$, celle d'une quatriéme puiſſance. Quand il n'y a point de chifre dans le ſigne radical, il y faut ſouſentendre ce chifre 2 ; c'eſt-à-dire, que c'eſt une marque que la grandeur qui eſt après le ſigne $\sqrt{\ }$, eſt une ſeconde puiſſance, ou un quarré. Mais ce n'eſt que dans le ſixiéme Livre que nous parlerons de ces puiſſances imparfaites.

Chapitre II.

De l'extraction des Racines quarrées.

33 Une grandeur n'eſt proprement dite quarrée, que lors qu'elle eſt produite par une grandeur multipliée par elle-même. 9 eſt une nombre quarré, parcequ'il peut être fait par 3 multiplié par lui-même. 10 n'eſt pas un nombre quarré, car on ne trouve point de nombre qui, multiplié par lui-même, faſſe 10. On dit de même d'une grandeur exprimée par lettres, que c'eſt un quarré, lors qu'il eſt fait par les mêmes lettres multipliées l'une par l'autre. *bd* n'eſt pas un quarré ; car on voit bien que *bd* n'eſt pas fait par une même lettre multipliée par elle-même, comme eſt *bb*, *dd*. Quand le nombre des lettres eſt ainſi petit, on apperçoit aiſément la racine de la puiſſance exprimée par des lettres. Il en eſt de même des puiſſances qui ſont exprimées avec des chifres ; on voit d'abord que la racine quarrée de 4 eſt 2, que celle de 9 eſt 3. Or pour extraire les racines des grandes ſommes, il faut connoître ces racines ſimples, c'eſt-à-dire celles des nombres quarrez les plus ſimples, comme ſont les quarrez de chaque caractere. Par exem-

ple, que le quarré de 5, eſt 25, & que la racine de ce nombre quarré 25 eſt 5. Vous voyez devant vos yeux ces racines & ces quarrez. Sous chaque caractere ſimple eſt ſon quarré. Sous 6 eſt 36, dont 6 eſt la racine.

Racines,	1	2	3	4	5
Quarrez,	1	4	9	16	25
Racines,	6	7	8	9	10
Quarrez,	36	49	64	81	100

PREMIER THEOREME.

Tout nombre quarré comme celui-ci 293764, 34
fait de 542 *multiplié par* 542, *contient* 1°. *les quarrez de chacune de ſes parties* 5, 4, 2.

2°. *Deux fois le plan de* 5 *multiplié par* 4, *ou ce qui eſt la même choſe, un plan fait du double de* 5, *qui eſt* 10, *multiplié par* 4.

3°. *Deux fois le plan de* 54 *par* 2, *ou un plan fait de* 108 *double de* 54 *par* 2.

Cela s'apperçoit clairement en multipliant 542, racine du nombre propoſé par 542. On le voit d'une maniere generale, en ſe ſervant de lettres. Car le produit de $b+d$ par $b+d$, eſt $bb+2bd+dd$. Vous voyez dans ce produit les deux quarrez de b & de d, & deux fois un plan fait de b multiplié par d.

Si on marque les trois chifres de 542 par ces trois lettres $b+c+d$, & qu'on en prenne le quarré les multipliant par elles-mêmes, on verra à l'œil ce qu'il faut prouver. Faiſons l'operation.

entiere. Je multiplie 1°. $b + c + d$ par b, le produit est $bb + bc + bd$. 2°. $b + c + d$ par c; le produit est $bc + cc + cd$. 3°. $b + c + d$ par d, le produit est $bd + cd + dd$. Ce qui fait $bb + 2bc + cc + 2bd + 2cd + dd$. Vous voyez que ce produit contient 1°. les trois quarrez des trois lettres b, c, d. 2°. Deux fois le plan de b par c. 3°. Les plans $2cd$ & $2bd$, qui sont égaux s̃ n. 27. au double du plan fait de $b + c$ multiplié par d, c'est-à-dire, de 54 par 2. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SECOND THEOREME.

35 *Ayant partagé un nombre quarré, tel que 293764 de deux en deux caracteres.*

29	37	64
C	B	A

1°. *Le quarré du premier caractere de sa racine, s'il peut être exprimé par un seul chifre, est dans la premiere place de la premiere tranche* A, *commençant de droit à gauche.*

2°. *Le quarré du second chifre est dans la premiere place de la seconde tranche* B, *s'il peut être exprimé par un seul chifre.*

3°. *Le quarré du troisiéme chifre de la racine est dans la premiere place de la troisiéme tranche* C; *Ainsi de suite.*

Pour connoître la verité de cette proposition, il n'y a qu'à produire un nombre quarré comme est celui-ci 293764, en multipliant 542 par 542; car vous verrez que les quarrez de 5, de 4 & de 2 sont placez où on les a marquez. Faites l'operation en suivant les regles, le quarré de 2 qui est 4 se trouvera dans la premiere place de la premiere tranche. Le quarré de 4 ne sera qu'en partie dans la premiere place de la seconde tranche, car son quarré est 16, qui demande deux chifres. Le quarré de 5 est 25, qui par la même raison ne pourra pas être marqué tout entier sous la premiere place de la troisiéme tranche.

Corollaire.

Une nombre quarré ayant été tranché, le nombre des tranches est égal à celui des chifres de la racine de ce quarré. 36

Car le quarré du troisiéme chifre est necessairement dans la troisiéme tranche, par le Theorême precedent : Or ce quarré pour grand qu'il soit, peut être contenu dans cette tranche ; car 9 est le plus grand des chifres, dont le quarré 81 s'exprime par deux seuls chifres. Quand le quarré du dernier chifre est petit, la derniere tranche n'a qu'un chifre.

Troisiéme Theoreme.

Un nombre quarré tel que 293764, ayant été partagé par tranches, comme on le vient de dire, 1°. le plan fait du double de 5 multiplié par 4, est entre la premiere place de la tranche C, *& la premiere place de la tranche* B. *2°. Le plan fait du double de 54 multiplié par 2, est entre la premiere place de la tranche* B, *& la premiere place de la tranche* A. 37

Par la premiere proposition le nombre quarré proposé contient ces deux plans : & si on fait attention à l'operation par laquelle on produit le nombre quarré, on verra que la valeur de ces plans est placée où la proposition presente l'assigne.

Quatriéme Theoreme.

S'il y avoit 4 caracteres dans la racine entre le premier quarré & le second quarré, commençant 38 *de droit à gauche, il y auroit un plan fait du double des trois racines des trois quarrez suivans, multipliez par la racine du premier quarré.*

Ce qu'on vient de dire fait appercevoir la verité de cette proposition, & en même temps de toutes les autres qu'on peut faire quand la racine d'un nombre quarré a cinq, six, sept chifres.

Probleme premier.

39 *Trouver la racine quarrée d'une grandeur exprimée par lettres.*

Si cette grandeur est incomplexe, comme dd, on voit d'abord que d est sa racine.

Mais si cette grandeur est complexe, comme $bb + 2bd + dd$, qu'on propose pour en extraire la racine quarrée, suivant ce qu'on vient de remarquer § n. 34. 1°. Je prens la racine quarrée de bb, qui est b, je multiplie b par b; ce qui fait bb, que j'ôte de bb, & il ne reste rien. 2°. Je divise le plan $2bd$ par $2b$, qui est le double de la racine b, qu'on vient de trouver. Le quotient de cette division est d, qui est la racine du quarré dd. Ainsi je connois que la racine quarrée de $bb + 2bd + dd$ est $b + d$.

Soit cette autre grandeur complexe $bb - 2bd + dd$, je fais la même chose. Je prens la racine de bb, qui est b, par le double de laquelle je divise le plan $-2bd$, le quotient est $-d$, qui est la seconde racine; ainsi on trouve que la racine qu'on cherche est $b - d$.

Remarquez bien que $aa + ab - ab - bb$, *ou* $aa - bb$ *n'est pas une grandeur quarrée; car elle est faite de deux grandeurs inégales; de* $a + b$, *multipliée par* $a - b$. *Ainsi on n'en peut tirer la racine qu'en mettant devant elle le signe radical* $\sqrt{}\ aa - bb$.

PROBLEME SECOND.

Trouver la racine d'un nombre quarré donné.

1°. *Un nombre quarré étant proposé pour en extraire la racine, il faut le couper par tranches de deux en deux caracteres, commençant de la droite à la gauche.* 40

Cette premiere operation vous fera déja connoître combien la racine du nombre proposé a de caracteres par le Corollaire du second Theorême. S'il y a trois tranches, il y a trois caracteres dans la racine cherchée.

Soit donc ce nombre quarré 293764, pour en trouver la racine; 1°. Je le partage de deux caracteres en deux caracteres par tranches, ainsi;

29 | 37 | 64

2°. *Il faut extraire la racine quarrée du nombre qui est contenu dans la derniere tranche, si ce nombre est quarré; & s'il ne l'est pas, du plus grand quarré, qui y est contenu.*

Cette racine sera le dernier chifre de la racine cherchée; puisque son quarré est contenu dans cette tranche, par le second Theorême cy-dessus. J'extrais donc la racine quarrée de la derniere tranche 29. Ce nombre n'étant pas quarré, je prens la racine du nombre quarré qui approche le plus de 29, sçavoir 25, dont 5 est la racine. Ce caractere 5 est le dernier caractere de la racine cherchée, que je marque dans un demi cercle, comme le quotient d'une division, ainsi que vous le voyez.

29 | 37 | 64 | (5

3°. *Il faut retrancher le quarré du caractere trouvé de la premiere tranche, où il est contenu; ce qui est une des preuves de l'operation.*

J'ôte ainſi le quarré de 5, qui eſt 25 de 29, & il reſte 4.

4°. *Il faut doubler le caractere trouvé de la racine cherchée, & après avoir placé ce double, de ſorte que le premier caractere ſoit placé ſous le dernier chifre de la tranche precedente, il faut diviſer les nombres de deſſus par ce double; le quotient de cette diviſion ſera le chifre penultiéme de la racine que l'on cherche.*

Je p̃rens donc le double du caractere trouvé 5: ce double eſt 10, que je place ſous 43, de ſorte que le zero eſt ſous le dernier caractere de la tranche precedente. Je diviſe 43 par 10; le quotient eſt 4, que je marque après 5 dans le demi cercle. Je poſe auſſi le même chifre 4 ſous la premiere place de la même tranche, après 10.

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & & \\ \cancel{2}\cancel{9} & 37 & 64\ \ (54 \\ 1 & 04 & \end{array}$$

Je ſuis aſſuré que 4 eſt veritablement le ſecond chifre de la racine que je cherche; car par le troiſiéme Theorême, s̃ n. 37. entre le quarré du chifre qu'on vient de trouver, & le quarré de l'autre chifre qu'on cherche, eſt un plan qui a pour une de ſes racines le double du dernier caractere, par exemple, dans cette queſtion, le double de 5 qui eſt 10, & pour l'autre racine, celle du quarré qui eſt contenu dans la tranche precedente. Or par le Probleme s̃ n. 30. en diviſant le plan dont nous parlons par l'une de ſes racines connuës, ſçavoir 10 qui eſt le double de 5, le quotient de la diviſion qui eſt 4, montre que la ſeconde racine de ce plan eſt 4, qui eſt auſſi par conſequent le ſecond caractere de la racine quarrée du nombre propoſé.

5°. Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler, des nombres où il eſt contenu.

6°. Il faut de plus ôter le quarré du caractere de la racine que l'on a trouvée.

Prenez garde d'ôter ce quarré des nombres où il eſt contenu. S'il n'eſt exprimé que par un chifre, ſelon le ſecond Theorême ci-deſſus, il eſt contenu dans le premier chifre de cette ſeconde tranche : & s'il eſt exprimé par deux chifres, il ſera contenu dans les deux chifres de cette tranche, au moins en partie.

Dans le même exemple j'ôte des nombres de deſſus, le plan de 10, multiplié par 4 que nous venons de trouver, & le quarré de 4 ; diſant, 4 fois 10 font 40, de 43 ôtez 40, reſte 3. Enſuite diſant, 4 fois 4 font 16, de 37 ôtez 16, reſte 21,

4	21	
2~~9~~	3~~7~~	64 (54
1	~~04~~	

7°. S'il y a plus de deux tranches, il faut doubler les caracteres trouvés de la racine cherchée, & après avoir placé ce double ſous le reſte du nombre propoſé, de ſorte que le dernier caractere ſe trouve ſous la derniere place de la tranche dont on veut extraire la racine, il faut diviſer les nombres de deſſus par ce double, le quotient ſera le caractere qu'on cherche.

Puiſqu'il y a donc plus de deux tranches dans le nombre propoſé, je double les caracteres trouvez 54 de la racine cherché. Je place le double de 54 qui eſt 108, comme il a été enſeigné ; ſçavoir 8 ſous la derniere place de la premiere tranche. Je diviſe 216 par 108, le quotient eſt

2, que je place après 54, & sous la premiere place de la derniere tranche.

~~21~~	~~64~~	(542
~~10~~	~~82~~	

8°. *Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler des nombres de dessus : outre cela le quarré du caractere de la racine, lequel caractere on vient de connoître.*

S'il n'y a plus d'autres tranches, & qu'il ne reste aucun nombre, c'est une marque que le nombre proposé étoit quarré. S'il reste quelque chose, il n'étoit pas quarré.

Je multiplie 1082 par 2, & j'ôte le produit des nombres sous lesquels 1082 sont écrits, disant 2 fois 10 font 20; de 21 ôtez 20, il reste 1. Ensuite je dis, 2 fois 8 font 16; de 16 ôtez 16, il ne reste rien : 2 fois 2 font 4; de 4 ôtez 4, il ne reste rien; ainsi le nombre proposé 293764 est un nombre qnarré, dont 542 est la racine.

Voici la même extraction dans laquelle se fait la soustraction, selon la maniere que nous avons proposée Liv. I. n. 13.

4	21	00	
~~29~~	~~37~~	~~64~~	(542
1	~~04~~	~~82~~	
	~~10~~		

Soit le même nombre 293764. Je dis; la racine de 29 est 5; 5 fois 5 font 25, qui otez de 29, reste 4, que j'écris dessus.

Je double 5, ce qui fait 10, que j'écris sous le nombre proposé, ainsi que vous le voyez. Je dis : en 43 combien 10? Il y est 4 fois, ce que j'écris au quotient, & sous 7; puis je multiplie 104 par

42

4, disant : 4 fois 4 font 16. De 17 j'ôte 16, reste 1, que j'écris dessus, & retiens 1 par memoire.

Puis 4 fois o est o, avec un de retenu fait 1, que j'ôte de 3, reste 2, que j'écris dessus 3.

Puis 4 fois 1 fait 4, qui ôtez de 4, reste o.

Ensuite je double 54, ce qui fait 108, que j'écris pour diviseur, & je trouve que ce double est contenu deux fois dans 216. J'écris 2 au quotient, & sous 4; puis je dis, 2 fois 2 font 4, ôtez de 4, il ne reste rien : 2 fois 8 font 16, de 16 ne reste rien, & retiens 1 par memoire. Puis deux fois o est o, avec 1 de retenu fait 1, que je soustrais, il ne reste rien; puis 2 fois 1 fait 2 que je soustrais ; ainsi il ne reste rien.

La preuve de cette operation se fait en multipliant la racine trouvée 542 par elle-même ; si son produit est 293654, l'operation a été bien faite.

Autre Exemple.

Ce nombre 71824, est donné pour en extraire la racine quarrée.

1°. Après l'avoir partagé par tranches, j'extrais la racine du nombre quarré, qui approche le plus de 7. Ce nombre quarré est 4, dont la racine est 2, que je marque : Après j'ôte de 7 le quarré de 2, qui est 4, & il reste 3.

$$\overset{3}{\cancel{7}} \;|\; 18 \;|\; 24 \;|\; (2$$

2°. Je double le caractere touvé 2. Je place ce double qui est 4, sous 1, par lequel je divise 31, le quotient est 7 ; mais parceque ce quotient est trop grand, comme il est facile de l'experimenter, je ne prens pour quotient que 6, que je place après 2, & ſous la premiere place de la ſeconde tranche, c'eſt-à-dire ſous 8. Je multiplie 46 par 6, & j'en ôte le produit de 318, diſant : 6 fois 4 font 24, que je retranche de 31, reſte 7 ; 6 fois 6 font 36, que je retranche de 78, reſte 42.

$$\begin{array}{r|c|l} & 4 & \\ & \cancel{7}2 & \\ \cancel{3} & \cancel{1}\cancel{8} & 24 \mid (26 \\ & \cancel{4}\cancel{6} & \end{array}$$

3°. Il ne reſte plus du nombre propoſé que 4224, que j'écris & que je tranche, comme vous le voyez. Je double les caracteres 26 de la racine cherchée. Ce double eſt 52, que je place comme il a été enſeigné, en écrivant 2 ſous la derniere place de la premiere tranche, & je diviſe par ce nombre les nombres qui ſont deſſus. Le quotient de cette diviſion eſt 8, que je mets après les deux caracteres déja trouvez de la racine que je cherche, & en même temps ſous la premiere place de la premiere tranche.

$$\begin{array}{r|c|l} \cancel{2} & \cancel{6} & \\ \cancel{4}\cancel{2} & \cancel{2}\cancel{4} & (268 \\ \cancel{8} & \cancel{2}\cancel{8} & \end{array}$$

Je multiplie 528 par 8, je retranche le produit de cette multiplication des nombres de deſſus, qui ſont 4224 ; ce que je fais en diſant, 8 fois 5 font 40 ; de 42 ôtez 40, reſte 2 : 8 fois 2 font 16, de 22 ôtez 16, reſte 6 : 8 fois 8 font 64, il ne reſte rien. Ainſi ayant obſervé les Regles, je ſuis aſſuré que 71824 eſt un nombre quarré, dont 268 eſt la racine.

Autre Exemple.

On propose d'extraire la racine quarrée de ce nombre 92428. 1°. Après l'avoir tranché, j'extrais la racine de la derniere tranche où est 9, qui est un nombre quarré ; cette racine est 3, que je marque à part ; je prens le quarré de cette racine que j'ôte de 9, & il ne reste rien.

$\cancel{9}$	24	22	(3

2°. Je double ce caractere trouvé 3, je pose le double qui est 6 sous le dernier caractere de la seconde tranche, qui est 2 ; je ne puis pas diviser 2 par 6 ; ainsi le second caractere de la racine cherchée est un zero. Je marque donc un zero après 3 ; & sous le premier caractere de la seconde tranche. Je multiplie 60 par zero, & cela ne fait rien ; je ne puis donc rien ôter des nombres, sous lesquels 60 sont placez.

$\cancel{9}$	24	28	(30
	$\cancel{6}\cancel{0}$		

3°. Je double 30 qui est au quotient : ce double est 60, que je place de sorte que le caractere zero soit sous la derniere place de la premiere tranche, sçavoir sous 2.

Je divise les nombres de dessus par 60, le quotient est 4, que je marque après 30 au quotient, & sous le premier caractere de la premiere tranche.

$\cancel{9}$	24	28	(304
	$\cancel{6}\cancel{0}$	04	
	6		

Je multiplie 60 par 4, disant : 4 fois 6 font 24, que je retranche du nombre de dessus 24, & il ne reste rien : 4 fois zero font zero ; 4 fois 4 font 16, de 28 otant 16, il reste 12.

		1 2	
9	24	28	(304
	60	04	

Ainsi le nombre proposé 92428 n'est pas un nombre quarré, celui qui en approche le plus est 92416, dont la racine est 304.

Nous ferons voir dans la suite que lors qu'un nombre n'est pas quarré, il est impossible de trouver une grandeur qui, multipliée par elle même, produise ce nombre : par exemple 18 *n'étant pas un nombre quarré aucun grandeur multipliée par elle-même, ne produira* 18.

CHAPITRE III.

De l'Extraction des Racines cubes.

1 L'Extraction de la racine cube d'un nombre qui est grand, ne se fait que par parties, comme l'extraction des racines quarrées. On coupe le nombre cube proposé par tranche, & l'on ne tire la racine que d'une de ses parties qui soit un cube, dont la racine se puisse exprimer avec un seul chifre. Ainsi il faut premierement sçavoir les cubes des premiers chifres, qu'on ne peut ignorer. Vous voyez ces cubes dans cette Table.

Racines.	1	2	3	4	5
Cubes.	1	8	27	64	125

Racines.	6	7	8	9	10
Cubes.	216	343	512	729	1000

LEMME.

La grandeur b + c *étant multipliée cubiquement son cube* bbb + 2bbc + ccb + bbc + 2ccb + ccc *ou* bbb + 3bbc + 3ccb + ccc *contient les cubes des parties* b *&* c, *& deux solides, dont le premier qui est* 3bbc *est fait du triple du quarré de la derniere racine* b, *multiplié par la premiere racine* c, *& le second* 3ccb *est fait du triple du quarré de* c *multiplié par* b.

Cela saute aux yeux. Si la grandeur donnée étoit $b - c$, il y auroit les mêmes parties, mais avec des signes en parties contraires, comme il est évident. Le cube de $b - c$ est $b^3 - 3bbc + 3ccb - c^3$.

Si la grandeur donnée avoit eu trois lettres, par exemple qu'elle eût été $b + c + d$, le cube de la toute contiendroit les cubes particuliers de ces trois lettres, sçavoir bbb, ccc, ddd : outre cela, quatre solides, dont le premier seroit $3bbc$, le second $3bcc$, le troisiéme fait du triple de $b + c$, multiplié par le quarré dd : ainsi si $b + c = x$, ce troisiéme solide seroit $3xdd$. Le quatriéme solide est fait du triple du quarré de $b + c$, ou de x, qui est égal à $b + c$, & de d : ainsi ce quatriéme solide seroit $3xxd$.

CINQUIE'ME THEOREME.

Un nombre cube tel que celui-ci 160103007, 42
fait de cette racine 543 *multipliée cubiquement, contient* 1°. *les trois cubes de chacun des caracteres de sa racine* 543. 2°. *quatre solides, dont le premier est fait du triple du quarré de* 5 *multiplié par* 4 : *& le second est fait du triple de* 5 *multiplié par le quarré de* 4 : *le troisiéme est fait du triple du quarré de* 54 *multiplié par* 3 : *& le qua-*

triéme du triple de 54 multiplié par le quarré de 3.

Par ces trois lettres $b + c + d$ du Lemme precedent, nous avons pû marquer ce nombre 543, qui étant multiplié cubiquement fait 160103007, par consequent ce nombre cube 160103007 est égal au cube de $b+c+d$ qui contient les parties exprimées dans la proposition.

Sixie'me Theoreme.

43 *Ayant partagé ce nombre cube* 160103007 *par des tranches ou des lignes, commençant de droit à gauche de trois caracteres en trois caracteres, comme vous le voyez.*

160	103	007
C	B	A

1°. *Le cube de 5 est dans la premiere place de la tranche* C, *& dans les places suivantes; parceque ce cube ne peut estre exprimé que par trois chifres.* 2°. *Le cube de 4 est dans la premiere place de la tranche* B, *& dans le chifre suivant. Et* 3°. *Le cube de 3 est dans la premiere place de la tranche* A *en partie; parceque ce cube ne peut être exprimé qu'avec deux chifres.*

Cette proposition se prouve par l'operation, qui en multipliant cubiquement la racine 543, a produit le nombre cube. Pour être plus clair, & en même-temps plus court, j'applique à un nombre cube particulier ce qui convient à tous. Ce qu'on a dit de l'extraction des racines quarrées sert à comprendre ce qu'on voit ici: ce qui fait que je m'étens moins.

Corollaire.

44 *Un nombre cube ayant donc été coupé par tran-*

ches il y a autant de caracteres dans sa racine que de tranches.

Car 1°. S'il a trois chifres dans sa racine, le cube du dernier, après lequel l'on n'ajoûte plus rien, sera dans la premiere place & dans les suivantes de la troisiéme tranche. Ainsi comme le cube du plus grand chifre, qui est 9, peut être exprimé par trois chifres, sçavoir 729, si la racine du nombre proposé n'a que trois chifres, il ne peut pas y avoir plus de trois tranches. Quand la derniere tranche n'a pas trois chifres comme les autres, c'est une marque que le cube du dernier chifre a pour racine 4, ou quelqu'autre moindre nombre.

Septie'me Theoreme.

Les deux premiers solides, l'un fait du triple 45
du quarré de 5, *multiplié par* 4; *l'autre fait du triple de* 5 *multiplié par le quarré de* 4, *sont entre* C *&* B; *les deux autres, dont l'un est fait du triple du quarré de* 54 *multiplié par* 3; *& l'autre fait du triple de* 54, *multiplié par le quarré de* 3, *sont entre* B *&* A.

Cette proposition est évidente à quiconque multiplie cubiquement 543, & qui fait attention aux multiplications partiales qu'il fait.

Huitie'me Theoreme.

S'il y avoit quatre chifres dans la racine cubi- 46
que, entre le premier & le second cube, il y auroit deux solides ou leur valeur. Le premier fait du triple des trois racines des trois cubes ou racines multiplié par le quarré de la premiere racine; le second fait du triple du quarré des trois racines, multiplié par la premiere racine.

Cette propoſition ſe prouve comme les autres. On apperçoit aſſez ce qui arrive lors qu'un nombre cube a cinq, ſix tranches & davantage.

PROBLEME TROISIE'ME.

47 *Trouver la racine cube d'une grandeur cube exprimée par lettres.*

Si cette grandeur eſt incomplexe, il n'y a pas de difficulté: il eſt manifeſte que la racine cube de bbb eſt b.

Si cette grandeur eſt compléxe, comme $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, dont il faut tirer la racine cube. La racine cube de a^3 eſt a, j'ôte a^3 de a^3, & il ne reſte rien. Entre le cube a^3 & le cube ſuivant, eſt un ſolide, fait du triple de aa multiplié par la racine du cube ſuivant, ſelon le Lemme precedent; je diviſe donc $3aab$ par $3aa$, le quotient eſt b, qui eſt par conſequent la racine du cube ſuivant. Je multiplie $3aa$ par b; ce qui fait $3aab$, que j'ôte de $3aab$, il ne reſte rien. Entre le cube de a & b, il y a encore un ſecond ſolide, par le même Lemme, fait de $3a$ multiplié par bb. J'ôte donc ce ſolide de $3abb$, comme auſſi le cube b^3, & il ne reſte rien; je ſuis donc aſſuré que $a+b$ eſt la racine cube de $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$.

PROBLEME QUATRIE'ME.

48 *Trouver la racine d'un nombre cube donné.*

1°. *Il faut couper le nombre cube qui a été donné pour en extraire la racine, par tranche de trois caracteres en trois caracteres, commençant de la droite à la gauche.*

Cette premiere operation vous fera connoître, par le Corollaire ci-deſſus n. 44 le nombre des caracteres de la racine cube cherchée; s'il y a trois tranches, la racine cherchée a trois chifres, Soit donc donné ce nombre cube 160103007, dont il faut trouver la racine. Je le partage en trois tranches de la droite à la gauche, de trois caracteres en trois caracteres.

160 | 103 | 007

2°. *Il faut extraire la racine cubique du nombre contenu dans la derniere tranche, s'il est cube; & s'il ne l'est pas, du nombre cube qui y est contenu.*

Cette racine sera le dernier caractere de la racine cherchée, qu'il faut écrire dans un demi-cercle, comme le quotient d'une division.

J'extrais donc la racine cubique de 160, qui est dans la derniere tranche; ce nombre n'est pas cube; je trouve dans la table des cubes, qui est ci-dessus, que le cube qui approche le plus de 160 est 125, dont la racine est 5, que je marque à part, comme nous avons fait jusqu'à present dans les divisions & dans les extractions des racines.

160 | 103 | 007 | (5

3°. *Il faut prendre le cube de ce caractere trouvé, & l'ôter du nombre proposé.*

On fait de cette maniere l'operation & sa preuve en même temps: car pour être assuré que les parties que l'on dit être dans le nombre cube proposé y sont en effet, il faut qu'elles en puissent être retranchées. Je retranche donc le cube 125 de la derniere tranche, où il est contenu, il reste 35.

$\overset{35}{\cancel{160}}$ | 103 | 007 | (5

4°. *Il faut tripler le quarré du caractere trouvé, & écrire ce triple de sorte que le premier ca-*

ractere de la droite à la gauche, soit sous le dernier caractere de la tranche suivante.

Le quarré du caractere 5 que j'ai trouvé est 25, dont le triple est 75, que je place comme la Regle l'ordonne.

35	183	007	(5
7	5		

5°. Il faut diviser par ce triple les nombres sous lesquels il est écrit, & multipliant ce triple par le quotient de cette division, ôter le produit des nombres de dessus.

Entre le cube du caractere trouvé de la racine cherchée & le precedent, est un solide fait du triple du quarré de 5 multiplié par le caractere precedent de la racine, qui est encore inconnu. Or par le Probleme 5 n. 31, le quotient de cette division, que la Regle ordonne, sera la racine de ce solide.

Je divise donc par 75 les nombres de dessus qui sont 351, le quotient de la division est 4, qui est le second caractere de la racine cherchée, que je place par consequent après celui que j'avois trouvé. Je retranche ce solide fait du triple du quarré de 5, qui est 75, multiplié par 4, en disant : 4 fois 7 font 28; de 35 ôtant 28, il reste 7; ensuite 4 fois 5 font 20, de 71 ôtant 20, il reste 51.

5			
~~7~~			
~~35~~	103	107	(54
~~7~~	~~5~~		

Il reste donc 5103007 à diviser, que j'écris à part pour éviter la confusion, & que je tranche comme vous le voyez ci-après.

6°. *Il faut prendre le quarré de ce caractere qu'on vient de connoître, & après l'avoir multiplié par le triple du dernier caractere trouvé par la seconde Regle, c'est-à-dire du 5, premier chifre du quotient, en ôter le produit des nombres qui restent, tant en la derniere qu'en la tranche precedente; il faut aussi ôter le cube de ce caractere, puisque tout cela est contenu dans ces deux tranches par les sixiéme & septiéme Theorêmes,* $\bar{s}$ *n.* 43. & 45.

Je prens le quarré de 4, qui est 16, que je multiplie par 15, triple de 5; ce qui fait 240, que j'ôte de 510, & il reste 270; ainsi j'ôte d'un même lieu deux solides, le premier fait du triple du quarré de 5 multiplié par 4, le second fait du quarré de 4 multiplié par le triple de 5; puisqu'ils y étoient contenus.

$$\begin{array}{r|l|l|l} & 6 & & \\ \cancel{2} & \cancel{7}\,3\,9 & & \\ \cancel{8} & \cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{3} & 007 & (54 \end{array}$$

Après cela il faut retrancher le cube de 4, qui est 64; mais prenez garde qu'il faut le retrancher du lieu où il est. Or étant exprimé par deux chifres, il est contenu au moins en partie dans les deux premiers chifres de la seconde tranche, sçavoir dans 03. Ayant ôté de cette maniere 64 de 2703, il reste 2 | 639 | 007.

7°. *S'il y a plus de deux tranches dans le nombre cube proposé, il faut prendre le quarré des racines trouvées, tripler ce quarré, & après l'avoir placé de sorte que le dernier caractere soit sous la derniere place de la tranche precedente, diviser les nombres de dessus par ce diviseur, le quotient donnera le caractere cherché,* Il y a en cet endroit un solide fait du triple du quarré des racines trouvées, multiplié par la racine qu'il faut trouver ensuite. Or divisant ce solide par le triple du quarré des racines trouvées, le quotient de la division donnera cette racine. § n. 31.

Je prens le quarré des deux racines 54, qui est 2916 que je triple; ce triple est 8748, par lequel nombre je divise les nombres restans du cube proposé. Le quotient de cette division est 3, que j'écris après les autres racines trouvées.

2 | 639 | 007 | (543
| 864 | 8 |

8°. *Il faut multiplier par ce caractere qu'on vient de connoître, le triple du quarré des caracteres déja connus, & retrancher ce produit; outre cela prendre le quarré de ce caractere, & après l'avoir multiplié par le triple des autres caracteres connus, en ôter le produit de ce qui reste du nombre proposé. De plus, il faut ôter le cube de ce caractere; s'il ne reste rien, c'est une marque que le nombre proposé étoit un nombre cube.*

Je multiplie le triple du quarré 54, qui est 8748 par 3 du quotient, le produit de cette multiplication est 26244, que je retranche de 26390; il reste encore 14607.

14 | 607

Je prens le quarré de 3, qui est 9, que je multiplie par le triple de 54, qui est 162; je retranche le produit de cette multiplication qui est 1458, de 1460, & il reste encore 27.

Enfin je prens le cube de 3, qui est 27, que je retranche du reste 27, par la même Regle, après quoi il ne reste rien; ainsi 543 est la racine cube de 160103007, & ce nombre eſt cube.

La preuve de cette operation ſe fait en multipliant la racine trouvée 543 cubiquement. Si ſon produit eſt 160103007, l'operation a été bien faite.

AUTRE EXEMPLE.

Le nombre propoſé eſt 216000, après l'avoir coupé par tranches, j'extrais la racine de la premiere tranche.

216 | 000

qui contient le nombre cube 216, dont la racine eſt 6, comme il ſe voit dans la Table ci-deſſus, je retranche ce cube, & il ne reſte rien de cette premiere tranche.

Je prens le quarré de 6 qui eſt 36, je le triple; ce triple eſt 108, par lequel voulant diviſer les chifres precedens, je trouve que zero eſt le quotient, je le poſe pour le ſecond chifre de la racine cherchée qui n'a que deux chifres, puiſque ſon nombre cube n'a que deux tranches.

On voit évidemment que le nombre propoſé eſt cube, & que ſa racine eſt 60.

CHAPITRE IV.

De l'extraction des Racines des autres Puiſſances.

L'Extraction des racines des autres Puiſſances ſe peut faire auſſi facilement que de celles des ſecondes & troiſiémes puiſſances. La methode qui vient d'être enſeignée le fait aſſez appercevoir. On voit par exemple, qu'ayant partagé un nombre quarré de quarré par tranches, de quatre caracteres en quatre caracteres, il y aura autant de caracteres dans la racine de ce nombre qu'il y aura de tranches; que s'il a trois 47 tranches, cette racine aura trois chifres, que le quarré de quarré du dernier chifre ſera dans la derniere tranche. Comme ces extractions ne ſont guéres d'uſage, & que les operations de cette methode ſeroient ennuyeuſes, l'on peut prendre un chemin plus court, en rappellant ces puiſſances aux quarrez & aux cubes. Pour concevoir comment cela ſe peut faire, il faut remarquer que toute grandeur qui peut être faite de deux grandeurs égales eſt quarrée, & que celle qui peut être faite de trois grandeurs égales multipliées cubiquement, eſt un cube; d'où il s'enſuit qu'une grandeur de 4 dimenſions, comme $bbbb$, peut être conſiderée comme un quarré, car elle peut être produite de bb multiplié par bb. Une grandeur de ſix dimenſions peut être auſſi conſiderée comme un quarré; car bbb multiplié par bbb, fait b^6. Une grandeur de neuf dimenſions peut être conſiderée comme un cube; car bbb multiplié cubiquement fait b^9: d'où il ſuit que toute puiſſance qui peut être diviſée par 2 ou par 3 exactement, peut être reduite à une moindre puiſſance, juſques à la premiere même, ſi on peut encore diviſer celle à laquelle elle eſt reduite par 2 ou par 3, de ſorte que le dernier quotient ſoit 1; ce qui ſe comprendra mieux par des exemples.

La grandeur b^{12}, qui a 12 dimenſions, peut être diviſée exactement par 2 & par 3, & je la puis conſiderer, ou comme un cube, ou comme un quarré; car $bbbb$ multiplié cubiquement fait b^{12}, ou comme un quarré; car b^6 multiplié par lui-même, fait b^{12}. Ainſi en prenant la racine quarrée de cette grandeur, je la reduirai à une grandeur de ſix dimenſions. En prenant ſa racine cubique je la reduirai à une grandeur de 4 dimenſions. Or en prenant la racine quarrée d'une 6ᵉ puiſſance, par exemple de b^6, on la réduit à une 3ᵉ, ſçavoir à b^3, de laquelle ayant pris la racine cubique, on la réduit à la premiere. En prenant la racine quarrée d'une 4ᵉ puiſſance, on la réduit à une ſeconde, d'où ayant pris la racine quarrée, on la réduit à la premiere.

Pour tirer, ſelon cette methode, la racine de la 9ᵉ puiſſance de ce nombre 512, puiſqu'une grandeur de 9 dimenſions peut être diviſée par 3, & être faite de la 3ᵉ puiſſance multipliée cubiquement, je prens la racine cube de 512 qui eſt 8, & enſuite la racine cube de 8 qui eſt 2; ainſi je connois que 2 eſt la racine de 512, conſideré comme une 9ᵉ puiſſance.

Il eſt bien évident qu'on ne peut pas en cette maniere réduire à une moindre puiſſance la 5ᵉ, la 7ᵉ, la 11ᵉ, la 13ᵉ, la 17ᵉ, la 19ᵉ puiſſance. On peut réduire la 10ᵉ à la 5ᵉ, en prenant la racine quarrée, la 14ᵉ à une 7ᵉ, en prenant encore ſa racine quarrée, la 15ᵉ à une 5ᵉ, en prenant ſa racine cubique: mais on ne peut pas les réduire à la premiere puiſſance. S'il étoit neceſſaire de le faire, il faudroit déduire de ce que nous avons enſeigné touchant l'extraction des racines quarrées & cubiques, ce que l'on doit faire pour extraire les racines de ces puiſſances. Si les grandeurs abſoluës de ces puiſſances, c'eſt-à-dire celles dont elles ſont les puiſſances, étoient exprimées par pluſieurs chifres, il faudroit des operations infinies; car l'on apperçoit bien par exemple qu'une 5ᵉ puiſſance doit ſe diviſer par tranches de cinq caracteres en cinq caracteres; que la 5ᵉ puiſſance du dernier chifre de toute la racine, ſe trouveroit dans la premiere place de la derniere tranche & dans les ſuivantes ; qu'entre la premiere place de cette tranche & la premiere place de la tranche precedente, il y auroit pluſieurs grandeurs de cinq dimenſions, comme il eſt facile de le connoître en faiſant monter une grandeur telle que $b + d$ à ſa cinquiéme puiſſance, c'eſt-à-dire en la multipliant cinq fois par elle-même.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL.

LIVRE TROISIE'ME.

Des Raiſons ou Rapports que les Grandeurs ont entr'elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raiſons ou Rapports en general.

CHAPITRE PREMIER.

On donne une idée de ce que c'eſt que Raiſon, & Proportion.

RApport & *Comparaiſon*, c'eſt preſque une même choſe. Conſiderer le rapport d'une choſe avec une autre; c'eſt voir ce que l'une eſt quand on la compare avec l'autre. Comme ſi en confiderant la taille d'un homme, en même temps je le compare avec une autre perfonne, ce qui me fait concevoir qu'il eft grand, ou qu'il eft petit. Grand, fi je le trouve d'une taille plus avantageufe que celui avec qui je le compare; petit, fi fa taille eft moins avantageufe. Ainfi ce mot, *Rapport*, ne fignifie proprement qu'une maniere d'être d'une chofe au regard d'une autre: ou pour parler plus jufte, c'eft la maniere qu'on conçoit qu'une chofe eft, en la rapportant à une autre. Nous jugeons le même homme grand ou petit, felon que nous le comparons avec telle & telle perfonne.

Le rapport ou la maniere d'être d'une chofe s'appelle *Raifon*, du nom Latin *Ratio*, dont la fignification eft fort étenduë. Il fe prend pour cette lumiere qui nous éclaire; il fignifie auffi le rapport de deux ou plufieurs chofes. Souvent dans les Auteurs Latins modernes on appelle un rapport *habitudo*, du verbe *habere*; ce qui eft pris des Grecs, qui pour dire *ce que cette chofe eft au regard de celle-la*, difent ὡς ἔχει, &c. ce qu'on dit en Latin *ut ifta res fe habet, &c.* Je fais cette remarque, parcequ'il eft très-important d'avoir des idées bien nettes des mots qui font d'ufage dans les Sciences.

On ne compare enfemble que les chofes qui font d'une même efpece; c'eft toujours, felon ce qui fe rencontre en elles, de plus ou de moins, d'égal ou de femblable. On compare les qualitez entr'elles, les couleurs avec les couleurs, & on dit qu'elles font plus ou moins claires. On compare le pere avec fon fils, parcequ'il lui communique la même nature. Il y a entr'eux égalité de nature. Les rapports ou raifons, dont nous devons parler, font ceux qui fe font felon *la* *quantité.* Il y a differentes eſpeces de quantité ; il faut donc ajoûter que ces rapports ſe font ſelon la même eſpece de quantité : car on ne dit point qu'une ligne ſoit plus grande ou plus petite qu'une ſurface, qu'un corps, qu'un eſpace de temps, ou qu'une quantité de mouvement ; ou qu'elle leur ſoit égale. Or quand on conſidere deux grandeurs de même eſpece, c'eſt-à-dire deux lignes, deux ſurfaces, deux corps, deux eſpaces de temps, deux quantitez de mouvement, deux poids, l'on n'y peut remarquer autre choſe, comme nous venons de voir, que de l'égalité ou de l'inégalité, de la petiteſſe ou de l'excès.

Les idées de ces mots, *égalité, inégalité, grand, petit*, enferment une comparaiſon, c'eſt-à-dire, que ces mots ſignifient qu'on compare une grandeur. On dit qu'elle eſt égale ou inégale, petite ou grande, ſelon qu'on la rapporte à une telle ou telle grandeur. Tout ce qu'on peut donc dire des raiſons ou rapports des grandeurs, ſe reduit à ſçavoir quand eſt-ce qu'elles ſont égales ou inégales, petites ou plus grandes. Mais cette égalité ou inégalité ſe peut concevoir en differentes manieres ; ce qui fait qu'on établit pluſieurs eſpeces de raiſons ou de rapports.

Les raiſons des grandeurs ſont leurs manieres d'être, ou ce qu'elles ſont au regard les unes des autres, égales ou inégales, petites ou plus grandes. Or l'égalité, l'inégalité, petiteſſe & grandeur de deux choſes qu'on compare, ſe peuvent conſiderer en deux manieres ; 1°. En examinant de combien l'une ſurpaſſe l'autre, l'excès de l'une & le défaut de l'autre ; en un mot, leur difference. Comme ſi je compare ces deux nombres 5 & 9, je regarde que 9 eſt plus grand que 5, que ſon excès par deſſus 5 eſt 4, & que 4 eſt le défaut de 5 au deſſous de 9, ou que 4 eſt la difference de ces deux nombres. Il eſt certain qu'on conſidere ainſi très-ſouvent les choſes, leſquelles on compare ſelon leur quantité. On dira de deux bâtons; celui-ci eſt plus grand que l'autre d'un pouce, de deux pouces.

2°. L'autre maniere de comparer deux grandeurs, eſt de ne pas conſiderer ſeulement leur difference; mais ce qu'elles ſont entierement. Dans la premiere maniere on ne conſidere quaſi que les extrémitez des choſes. Pour me ſervir de l'exemple que j'ai propoſé, en joignant deux bâtons, on en conſidere les extrémitez, & l'on voit que l'un eſt plus grand de quelques pouces, ou qu'il s'en faut quelques pouces que l'extrémité de l'autre n'atteigne ſon extrémité.

Dans la ſeconde maniere on conſidere comment une grandeur entiere eſt contenuë dans une autre; ſi elle y eſt contenuë tant de fois exactement ou non; ce qui fait qu'on dit qu'elle en eſt le tiers, le quart, &c. Cette maniere eſt la plus conſiderable, & quand on parle de *Rapport*, c'eſt elle qu'on entend. Quand on demande d'une grandeur ce qu'elle eſt au regard d'une autre, c'eſt la maniere qu'elle y eſt contenue, ſi elle en eſt la moitié, le tiers, le quart, &c. Auſſi parmi les Mathematiciens le mot de *Raiſon*, quoiqu'il ne ſignifie que rapport ou maniere d'être, & que la premiere maniere dont nous venons de parler ſoit par conſequent une *raiſon* auſſi bien que la ſeconde, cependant dans l'uſage, par ce mot on n'entend que la maniere dont une grandeur contient ou eſt contenuë dans une autre; & pour diſtinction on appelle *Difference* la premiere maniere.

Comme on peut comparer une chose avec toute autre, lors qu'il y a lieu de le faire, aussi on peut comparer les comparaisons mêmes qu'on fait, c'est-à-dire, un rapport avec un rapport, examinant si une chose est au regard d'une seconde, ce qu'une troisiéme est au regard d'une quatriéme ; si par exemple Pierre est aussi petit au regard de Jacques, que Jean l'est au regard de François.

On appelle *Proportion* l'égalité, ou la similitude des rapports. Il y a deux sortes de proportions, comme il y a deux sortes de Rapports. L'égalité des différences, s'appelle *Proportion Arithmétique.* Je ne sçai point d'autre cause pour laquelle on lui a donné ce nom, si ce n'est qu'on la considére particuliérement dans l'Arithmétique. Le rapport qu'on considére le plus dans les nombres, c'est leur différence, l'excès ou le défaut de l'un à l'égard de l'autre. On a nommé *Proportion Géometrique* l'égalité des Raisons ; parcequ'effectivement on ne parle guéres dans la Geométrie que de l'égalité des raisons.

Il faut se servir des noms que l'usage a établis ; mais il faut bien en marquer les véritables idées. Ce mot, *Raison*, ne signifie plus en général un rapport quelqu'il soit, puisqu'il conviendroit à la différence ou à la premiere maniere de comparer deux Grandeurs. C'est une nécessité d'entendre par ce mot un certain rapport, selon lequel on considére la maniére qu'une grandeur en contient une autre, ou qu'elle en est contenuë. Quand il est impossible d'exprimer par nombre cette maniére, on appelle cela une *Raison sourde.*

Comme tout rapport, soit *Différence*, soit *Raison*, demande deux termes, aussi tout rapport de différence ou de raison demande quatre termes ; c'est-à-dire qu'en comparant des raisons ou des differences on a quatre termes devant les yeux. Mais un même terme peut servir deux fois ; comme, en considerant que de même que *9* surpasse *5* de *4*, de même *13* surpasse *9* de *4* ; ce qui est une proportion Arithmetique. Ou comme quand je considere que *2* est le tiers de *6*, de même que *6* est le tiers de *18* ; ce qui est une proportion Geometrique.

CHAPITRE II.

Définition & explication des termes dont on se doit servir.

PREMIE'RE DE'FINITION.

2 *Lors que l'on compare deux grandeurs l'une avec l'autre, ces deux grandeurs sont nommées Termes de cette comparaison. Le premier terme s'appelle Antécedent, & le second Conséquent.*

En comparant la grandeur A avec la grandeur B, on peut commencer par B aussi bien que par A : le premier terme est celui par lequel on commence, & qui s'écrit le premier. On pourroit commencer par celui qu'on a écrit le dernier ; ainsi le même terme de Consequent, peut devenir Antecedent. Proprement l'Antecedent c'est la chose qu'on compare, & le Consequent celle à qui on la compare.

SECONDE DE'FINITION.

3 *L'excès d'une grandeur par dessus une autre grandeur, s'appelle Difference.*

L'excès de 7 par dessus 5 est 2. Ce nombre 2 est la difference de 7 & de 5.

TROISIE'ME DE'FINITION.

La maniere dont une grandeur contient ou est *contenuë dans celle avec laquelle on la compare, se nomme Raison.*

La maniere que 2 est contenu dans 6, & que 6 contient 2, s'appelle Raison de 2 à 6.

QUATRIE'ME DE'FINITION.

*L'égalité des raisons ou des différences, s'ap- 5
pelle Proportion.*

CINQUIE'ME DE'FINITION.

*Proportion Arithmetique, est une égalité de 6
differences.*

La difference de 5 avec 3, est la même que celle de 10 avec 8, l'égalité de ces deux differences s'appelle Proportion Arithmetique.

SIXIE'ME DE'FINITION.

*L'égalité des raisons se nomme Proportion Géo- 7
métrique, ou simplement Proportion.*

Les deux raisons de 2 à 4 & de 3 à 6 étant égales, ces nombres sont en proportion Geometrique.

SEPTIE'ME DE'FINITION.

*Chaque difference & chaque raison supposant 8
deux termes, la proportion qui dépend de l'égalité des differences & des raisons, suppose par consequent quatre termes, dont le premier est nommé Premier Antecedent; le second, Premier Consequent; le troisiéme, Second Antecedent; le quatriéme, Second Consequent.*

Je marque les Proportions Arithmetiques avec trois points; les Geometriques avec quatre, au milieu des termes de la proportion.

Proportion Arithmetique, 5, 7 ∴ 10, 12;

C'est-à-dire qu'il y a même difference entre 5 9
& 7, qu'entre 10 & 12.

Proportion Géométrique, 3, 6 :: 4, 8.

C'eſt-à-dire que la raiſon de 3 à 6, eſt égale à celle de 4 à 8 ; que 3 eſt contenu deux fois en 6, comme 4 eſt contenu deux fois en 8.

Huitiéme Définition.

9 *Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent les Extrêmes de cette Proportion, & le ſecond & le troiſiéme, Ceux du Milieu, ou les Moyens.*

Proportion Arithmétique, 5, 7 ∴ 10, 12.

Ces deux nombres 5 & 12 ſont les Extrêmes de cette Proportion ; & 7 & 10, les Moyens.

Proportion Geométrique, 3, 6 :: 4, 8.

Ces deux nombres 3 & 8, ſont les Extrêmes dans cette Proportion, & 6 & 4 les Moyens.

Neuviéme Définition.

10 *Un même terme peut ſervir de premier Conſequent au premier Antecedent, & de ſecond Antecedent au ſecond Conſequent ; ainſi trois grandeurs ſuffiſent pour faire une proportion. Pour lors cette proportion eſt dite Continuë, & la grandeur qui fait l'office de deux termes, eſt appellée Moyenne proportionelle.*

Proport. Arithm. Continuë, 5, 7 ∴ 7, 9.

Proport. Géométr. Continuë, 2, 4 :: 4, 8.

Pour abreger on exprime cette operation Arithmetique avec une ligne entre deux points, la la Géométrique avec une ligne entre quatre points.

÷ 5, 7, 9. *Proportion Arithm. Continuë.*

∺ 2, 4, 8. *Proportion Géométr. Continuë.*

DIXIE'ME DE'FINITION.

Si une proportion Continuë a plus de trois termes, elle s'appelle Progression. 11

÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, &c. *Progression Arithm.*

∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. *Progression Géométr.*

ONZIE'ME DE'FINITION.

Le premier & le dernier terme d'une progression sont appellez les Extrêmes, & on nomme Moyens ceux qui sont entre ces Extrêmes. 12

SECTION SECONDE.

DE LA PROPORTION ET PROGRESSION ARITHMETIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Methode pour connoître les proprietez de la Proportion & Progression Arithmetique.

13 SELON la Définition de la Progression Arithmetique, il y a une même difference entre tous les termes comme en celle-ci.

$$\div \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & k \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \end{array} \ \&c.$$

La difference de *b* avec *a* est 2 : celle de *c* avec *b* est encore 2 ; ainsi de suite : d'où il est évident que puisque le second terme *b* n'est que le premier *a*, augmenté de la difference qui regne dans cette progression, connoissant le premier terme *a* avec la difference de la progression, on connoîtra *b* avec lequel on connoîtra *c*, qui ne differe de *b* que parcequ'il a par-dessus lui une grandeur connuë. Ainsi on connoîtra tous les autres termes de cette progression, fussent-ils infinis en nombre.

Les choses ne sont obscures, que parceque nous ne les envisageons, pour ainsi dire, que par un endroit qui n'est point éclairé, ou que nous ne tâchons point d'ôter de certains voiles qui les cachent & les font paroître differentes de celles que nous connoiſſons. Le ſecret des Sciences c'eſt de dévoiler les choſes, & de les faire paroître telles qu'elles ſont : que ce qu'elles ont de ſemblable paroiſſe, & qu'en même temps on apperçoive & qu'on diſtingue bien tout ce qui fait leur difference. Dans cette progreſſion que nous venons de propoſer, comme dans toutes les autres, ces termes paroiſſent tous differens ; & de la maniere que je les ai exprimez, vous ne voyez point en quoi ils ſont conformes, & en quoi ils different. Puiſque deux termes qui ſe ſuivent ne ſont differens que par une certaine grandeur, dont l'un eſt plus grand & l'autre plus petit, il eſt évident que l'un plus ou moins cette grandeur, doit être égal à l'autre. b eſt different de a, parcequ'il eſt plus grand que a de deux unitez. Si je nomme donc x ces deux unitez, il faut que $a+x$ ſoit égal à b. Ainſi $a+x=b$, ou $b-x=a$. Par la même raiſon $b+x=c$, ou $c-x=b$. De même de tous les autres termes.

Par conſequent il eſt facile d'exprimer toute cette progreſſion, de maniere qu'on voye dans tous ſes termes ce qu'ils ont de commun, & en quoi ils different. Car puiſque $a+x=b$, donc au lieu de b je pourrai écrire $a+x$: Et puiſque $b+x=c$ donc $a+x+x$, ou $a+2x=c$, & par la même raiſon $a+3x=d$, je réduis donc la progreſſion propoſée à celle-ci, qui eſt la même, je n'en change que les expreſſions.

$$\div\ a.\ a+x.\ a+2x.\ a+3x.\ a+4x.\ a+5x.\ a+6x.\ \&c.$$
$$1\quad 3\quad 5\quad 7\quad 9\quad 11\quad 13$$

Avec cela ſeul nous allons découvrir & démontrer toutes les proprietez des Proportions & Progreſſions Arithmetiques. Ce que je viens de dire en plusieurs paroles, je le renfermerai dans la Proposition suivante.

LEMME.

14 *Dans une Proportion Arithmetique l'antecedent plus ou moins sa difference d'avec son consequent, est égal à son consequent.*

Soit b l'antecedent, d le consequent, c leur difference. Si b surpasse d de la grandeur c, il est bien évident qu'ajoûtant à d ce qui lui manquoit, ou retranchant de b l'excès qu'il a pardessus d, ces deux grandeurs seront égales, $d+c = b$, ou $b-c=d$. Si au contraire b est plus petit que d de la grandeur c, ajoûtant à b ce qui lui manque, $b+c=d$, ou retranchant de d ce qu'il y a par dessus b, alors on fait $b=d-c$. Si dans cette progression $\div$ 1. 3. 5. 7. &c. la difference est 2, il est évident que $1+2=3$, & $3+2=5$, ou que $3-2=1$ & $5-2=3$.

COROLLAIRE I.

15 *De là il s'ensuit qu'on peut exprimer en la maniere suivante deux termes, dont on connoît la difference.*

Si $b+c=d$, ou si $b-c=d$, par tout où se trouvera d je pourrai substituer $b+c$ ou $b-c$, selon que b sera ou plus grand ou plus petit que d. Pour abreger je supposerai, dans les Démonstrations suivantes, que le consequent d est toujours plus grand que l'antecedent b; s'il étoit plus petit, il ne faudroit que changer le signe $+$ en $-$.

COROLLAIRE 2.

16 *On peut marquer tous les differens termes d'une*

Progression Arithmetique, de maniere qu'ils ayent presque le même nom.

Soit cette Progression $\div b. d. f. g. h.$ &c. je suppose que la difference qui regne entre tous ces termes est c. Ainsi $b + c = d$: & puisque f surpasse d de c, il faut que $b + c + c$, ou $b + 2c = f$, par la même raison $b + 3c = g$; & $b + 4c = h$; ainsi cette progression se trouve réduite à celle-ci : $\div b, b + c. b + 2c. b + 3c. b + 4c.$ &c. Ainsi cette progression $\div 1. 3. 5. 7. 9. 11.$ &c. peut être changée en celle-ci : $\div 1. 1 + 2. 1 + 4. 1 + 6. 1 + 8. 1 + 10.$

Chapitre II.

Propositions touchant les proprietez des Proportions & Progressions Arithmetiques.

Premiere Proposition.

Theorême I.

Dans une Proportion Arithmetique, la somme des Extrêmes est égale à celle des Moyens. 17

Soient en Proportion Arithmetique ces quatre termes $b. d \because e. f.$ ou $3. 5 \because 7. 9$, il faut démontrer que l'addition de d avec e, qui sont les Moyens, fait une somme égale à celle de b & de f, qui sont les Extrêmes de cette proportion, c'est-à-dire que $b + f = d + e$, ou que $3 + 9 = 5 + 7$.

Soit la difference de b à d nommée c, qui sera aussi par la définition de cette proportion, celle de e avec f. Donc s̃ n. 15. $b + c = d$, & $e + c = f$; ainsi les quatre termes de cette Proportion se peuvent reduire à cette expression

$b . b+c \therefore e . e+c$. Il faut donc démontrer que le premier terme b, plus le dernier qui est $e+c$, sont égaux au second terme $b+c$, plus le troisiéme terme qui est e, c'est-à-dire que $b+e+c=b+c+e$; ce qui est évident, puisque les grandeurs sont les mêmes de part & d'autre. Cette proportion $3 . 5 \therefore 7 . 9$. étant changée en celle-ci qui est la même, $3 . 3+2 \therefore 7\ 7+2$. il est évident que les Moyens $3+2+7$. sont la même chose que les Extrêmes $3+7+2$.

Corollaire I.

18 *Dans une progression Arithmetique, l'addition de deux termes également éloignez des deux Extrêmes, est égale à celle des Extrêmes.*

Soit cette progression $\div b. c. d. e. f.$ ces termes c & e sont également éloignez des Extrêmes b & f. Je dis que $c+e$ est égal à $b+f$, ce qui est évident; car il y a même difference entre b & c qu'entre e & f, selon la définition de la progression: Donc ces quatre grandeurs sont en proportion $b. c \therefore e. f.$ Ainsi par ce Theorême $b+f=c+e$; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire 2.

19 *Dans une Proportion continuë, & de même dans une Progression, dont le nombre des termes est impair, le terme du milieu ajoûté à lui-même, est égal à l'addition des Extrêmes.*

Soient $\div b. c. d.$ une proportion continuë, qu'on peut aussi regarder comme si c'étoit une progression. Le terme du milieu de cette progression est c, lequel terme tient lieu de deux termes, sçavoir de Consequent à b, & d'Antecedent à d, par les définitions de la proportion

Continuë, ou de la progreſſion. On peut donc conſiderer ce ſeul terme comme deux termes Moyens, qui avec b & avec d font cette proportion, qui a quatre termes, $b.c \because c.d$: Or par ce Theorême $b+d=c+c$, ou $b+d=2c$, qui eſt ce qu'il falloit prouver.

Seconde Proposition.

Second Theorême.

En toute progreſſion Arithmetique chaque terme renferme le premier, & outre cela autant de fois la difference qui regne dans cette progreſſion, qu'il y a de termes avant lui. 20

Soit b le premier terme d'une progreſſion Arithmetique, de tant de termes qu'on voudra. Si la difference qui regne eſt x; le premier terme étant b, le ſecond ſera $b+x$, le troiſiéme $b+2x$; ainſi de ſuite ꝟ n. 16. Si la progreſſion eſt de ſix termes, le ſixiéme ſera $b+5x$, qui renferme le premier b, & outre cela autant de fois la difference x qu'il y a de termes avant lui, ſçavoir 5, comme il eſt évident.

Troisie'me Proposition,

Troiſiéme Theoréme.

Ayant retranché le premier terme du dernier, le reſte eſt égal au produit, fait de la difference qui regne dans la progreſſion par le nombre des termes qui precedent le dernier terme. 21

Soit b le premier terme, & $b+5x$ le dernier, & ayant retranché b de $b+5x$, le reſte eſt $5x$, qui, comme on voit, eſt le produit de x difference, multipliée par 5, nombre des termes qui precedent ce dernier terme $b+5x$. Donc, &c.

Quatrie'me Proposition.

Premier Problême.

22 *Connoissant les trois premiers termes d'une proportion Arithmetique, connoître le quatriéme.*

Soient en proportion Arithmetique ces quatre termes $a. b \because c. x$, dont les trois premiers sont connus. On cherche x le quatriéme. On connoît la difference du premier avec le second. Que ce soit d, la difference du troisiéme avec x est la même que celle de a avec b; Ainsi puisque $a+d=b$, de même $c+d=x$, & partant x n'est plus inconnu.

Ces trois nombres donnez 10, 15, 13, sont les trois premiers termes d'une proportion Arithmetique dont on cherche le quatriéme terme, c'est-à-dire un nombre qui ait le même excès par dessus 13, que 15 a par dessus 10. Cela se trouve en deux manieres.

Il faut ajoûter à 13 la difference qui est entre 10 & 15, sçavoir 5. Par la définition de la proportion le nombre 13, avec cette difference, sera le quatriéme terme qu'on cherche, comme il est évident. Ou ce qui est la même chose, il faut ajoûter les termes Moyens 15 & 13 en une somme, de laquelle ayant retranché le premier terme 10, ce qui restera sera le quatriéme terme, puisque par la premiere proposition n. 17. ce quatriéme terme ajoûté au premier, égale la somme des Moyens; ainsi ayant ajoûté 13 avec 15, ce qui fait 28, & en ayant retranché le premier terme 10, le reste qui est 18, sera le quatriéme terme proportionel aux trois donnez.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Second Problême.

Continuer une Progreſſion Arithmetique, dont on connoît le premier terme, & la difference qui eſt entre le premier & le ſecond. 23

Soit le premier terme b, ſa difference d'avec le ſecond eſt c. Chaque terme ſurpaſſe celui qui le precede de cette difference, ſelon la définition de la progreſſion ; donc ſi le premier eſt b, le ſecond ſera $b+c$, le troiſiéme $b+2c$, le quatriéme $b+3c$; ainſi de ſuite, ajoûtant toujours la difference avec le precedent.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Troiſiéme Problême.

Connoiſſant le premier terme d'une progreſſion avec le dernier, & combien elle a de termes, connoître la difference qui regne dans cette progreſſion. 24

Soit b le premier terme d'une progreſſion, & f le dernier, le nombre des termes eſt n; il faut trouver la difference x qui eſt inconnuë. Ayant retranché b de f, le reſte $f-b$ eſt égal n. 21. à $nx-1x$ produit de x difference per $n-1$, nombre des termes qui precedent le dernier; partant diviſant $f-b$ par $n-1$, le quotient de cette diviſion ſera la difference qu'on cherche. L. 2. n. 30.

QUESTION.

Une perſonne diſtribuë pendant huit jours quelque aumône à des pauvres; le premier jour elle leur donne 5 ſols, le dernier jour 26, & chaque autre jour un certain nombre plus que le précedent, augmentant tous les jours également; on demande de combien elle a augmenté, ou combien elle a donné chaque jour? On voit bien que ces aumônes de chaque jour font une progression dont le premier terme & le dernier sont connus, & en même tems combien cette progression a de termes, sçavoir 8: il ne s'agit donc que de connoître la difference. Le premier terme de cette progression est 5, le huitiéme terme est 26. Pour satisfaire à la question, il faut ôter 5 de 26, le reste 21 par le Theorême troisiéme, est le produit de la difference qui regne dans la progression, multipliée par 8 — 1 ou 7, nombre des termes qui precedent le dernier, lequel dernier terme est ici le huitiéme. Divisant donc 21 par 7, le quotient 3 de cette division sera la difference qu'on cherche: Ainsi cette personne a donné le second jour 8 sols, le troisiéme 11 sols, &c.

Septie'me Proposition.

Quatriéme Probléme.

35 *Le premier & le dernier terme étant donnez avec la difference, trouver combien la progression a de termes.*

Soit b le premier terme, le dernier est f, la difference qui regne dans cette progression soit d: Je nomme z le nombre des termes de cette progression qui est inconnuë. Selon le Theorême 3 n. 21. ayant retranché b du dernier f, ce qui restera, sçavoir $f - b$, sera égal à $zd - id$ produit de la difference d, multipliée par $z - i$, nombre des termes qui precedent le dernier terme. Divisant donc $f - b$ égal à $zd - id$, par d, le quotient $\frac{f-b}{d}$ sera le nombre des termes qui precedent f, pour lequel dernier terme f ajoûtant i au quotient $\frac{f-b}{d}$: Ainſi $\frac{f-b}{d} + i = z$, on aura le nombre des termes de toute la progreſſion : ce qu'on demandoit.

QUESTION.

Un Marchand empruntant de l'argent d'un Uſurier, s'eſt engagé de lui payer le premier mois 4 écus, le ſecond 4 écus, plus 2, c'eſt-à-dire 6. ainſi de ſuite en progreſſion Arithmetique. Il ſe trouve que le dernier mois il paye 22 écus d'interêts ; on demande combien il s'eſt écoulé de mois, c'eſt-à-dire combien cette progreſſion a de termes. Par cette ſeptiéme Propoſition on trouvera qu'il y a en dix : car ôtant le premier terme 4 du dernier 22, reſte 18, qui diviſé par la difference 2 donne 9 au quotient pour le nombre des termes qui ſont avant le dernier, pour lequel dernier terme ajoûtant 1 au nombre 9 des neuf autres qui le precedent, on a 10 pour le nombre de tous les termes de la progreſſion.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Cinquiéme Problême.

Le premier & le dernier terme d'une progreſſion Arithmetique étant connus, avec la difference ou avec le nombre des termes, connoître tous les termes interpoſez. 26

Soit b le premier terme, & f le dernier : Si avec cela la difference qui regne dans la progreſſion eſt connuë, on connoîtra aiſement tous les autres termes § n. 23. Mais ſi c'eſt le nombre des termes ſeulement qu'on connoît, il faut alors chercher la difference qu'on trouvera par le Probléme troisiéme § n. 24. & par même moyen on connoîtra toute la progression.

Neuvie'me Proposition.

Sixiéme Probléme.

27 *Le premier terme d'une progression étant donné, avec la difference qui y regne, trouver un terme proposé de cette progression.*

Soit b le premier terme, la difference est d: c'est le septiéme terme que l'on cherche : pour le trouver il faut multiplier la difference par le nombre des termes qui le precedent, c'est-à-dire d par b, puisque c'est le septiéme terme qu'on cherche ; le produit est $6\,d$, auquel il faut encore ajoûter le premier terme b, & on aura par le second Theorême § n. 20. $6d + b$, ou $b + 6d$ pour septiéme terme de la progression proposée ; ce qu'on cherchoit.

Question.

Un Jardinier a cueilli des pommes d'un pommier pendant douze années ; la premier année il a cueilli 5 pommes, la seconde 60 plus que la premiere, la troisiéme 60 plus que la seconde, ainsi de suite jusqu'à la douziéme année. L'on demande combien il a cueilli de pommes la douziéme année ? Le nombre des pommes cueillies chaque année fait une progression Arithmetique, dont le premier terme est 5, & la difference qui regne dans la progression est 60 : Ainsi selon cette neuviéme Proposition, le douziéme terme doit être 665.

Dixie'me Proposition.

Septiéme Probléme.

28 *Le premier terme d'une progression étant donné,*

& la difference qui y regne, connoître à quelle place de cette progreſſion eſt un certain nombre propoſé.

Le premier terme de la progreſſion propoſée eſt b, la difference d, & $b + 6d$ eſt un de ſes termes, dont on demande la place dans cette progreſſion. Il faut d'abord en retrancher b, le premier terme, enſuite il faut voir combien la difference d eſt de fois dans le reſte $6d$: elle y eſt 6 fois. Donc par le Theorême $\bar{s}$ n. 20. le terme $b + 6d$ eſt à la 7e place de la progreſſion, puiſqu'il contient une fois le premier terme, plus 6 fois la difference d.

Question.

Il y a une rangée d'arbres, on ſçait que ſur le premier il y a 4 colombes, ſur le ſecond il y en a 6, ainſi de ſuite en progreſſion Arithmetique. Il y a un arbre ſur lequel il y en a 22; on demande à quelle place de la progreſſion eſt cet arbre. Par cette Propoſition on trouvera qu'il eſt à la dixiéme place.

Onziéme Proposition.
Problême huitiéme.

La difference, le nombre des termes, & le dernier terme étant donnez, trouver le premier terme. 29

Soit y le premier terme qu'on cherche, le dernier eſt f, la difference eſt d, & n le nombre des termes. Par le ſecond Theorême $\bar{s}$ n. 20. le dernier terme f eſt égal à $y + nd - 1d$. Otant donc $nd - 1d$, produit de la difference d par $n-1$, nombre des termes qui ſont avant le dernier f, ôtant, dis-je, ce produit du dernier terme f, le reſte ſera par conſequent la valeur du premier terme y que l'on cherche.

Question.

Une personne a dépensé de l'argent pendant 10 jours. Chaque jour elle a dépensé 2 sols plus que le jour precedent ; & le dernier jour elle en a dépensé 22. On demande, combien de sols cette personne a dépensé le premier jour & chacun des suivans ? On connoît la difference, le nombre des termes, & le dernier terme de cette progression ; ainsi par cette onziéme Proposition, on trouvera que le premier jour cette personne avoit dépensé 4 sols, & le suivant 6 sols. Ainsi de suite.

Douziéme Proposition.

Quatriéme Theorême.

30 *En toute progression la somme des deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre de tous les termes, est égale à la somme de tous les termes.*

Soit cette progression $\div b, c, d, f, g, h, k, l, m, n, p, q$.

Nous avons prouvé s̄ n. 18. que dans une progression Arithmetique, la somme de deux termes également éloignez des Extrêmes, est égale à celles des Extrêmes : Ainsi tous les

$$b + q - \left\{ \begin{array}{l} c + p \\ d + n \\ f + m \\ g + l \\ h + k \end{array} \right.$$

moyens étant pris deux à deux sont des sommes égales $c + p = d + n = f + m = g + l$, &c. Donc comme il y a ici douze termes ; six fois la somme des Extrêmes est égale à la somme de tous les termes. Par consequent la somme des Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, est égale à la somme de tous les termes.

COROLLAIRE I.

Si le nombre des termes d'une progreſſion eſt impair, leur ſomme entiere eſt égale au produit du moyen multiplié par le nombre de tous les termes. 31

Car ſi la ſomme des deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, eſt égale à la ſomme de tous ces termes, la moitié de la ſomme des Extrêmes multipliée par le nombre entier de tous les termes, doit être égale à la ſomme de tous les termes. Or le moyen vaut la moitié de la ſomme des Extrêmes, puiſqu'ajoûté à lui-même il vaut cette ſomme, ſ. n. 10. Donc, &c. Soit retranché de la progreſſion precedente le terme q, de ſorte qu'il ne reſte plus qu'onze termes dont le moyen eſt h. Alors $h + h$, ou $2h = b + p$; donc multipliant h par 11, le produit $11h$ ſera égal à la ſomme de tous ces onze termes.

COROLLAIRE 2.

Dans une progreſſion Arithmetique dont le premier terme eſt zero, ſi on multiplie le dernier z *par* x, *nombre des termes de la progreſſion, le produit qu'on aura ſera le double de la ſomme de tous les termes.* 32

Le dernier terme z, avec zero le premier terme, ce qui ne fait que z, étant multiplié par la moitié de x nombre des termes, eſt égal à la ſomme de tous les termes de cette progreſſion; donc multiplié par tout x, il eſt le double de toute cette ſomme. C'eſt à-dire que xz eſt le double de toute la progreſſion.

TREIZIE'ME PROPOSITION.

Cinquiéme Theorême.

Une progreſſion Arithmetique peut être conti- 33 *nuée à l'infini, en montant. Elle ne le peut en descendant, si ses termes ne sont des grandeurs negatives.*

Ajoûtant à un terme d'une progression la difference qui regne dans la progression, on a le terme suivant : ainsi on la peut augmenter ou continuer à l'infini, en montant. Mais on ne le peut faire en descendant, si ces termes sont des grandeurs positives. Car soit cette progression $\div o.a.b.c.$ qu'on ait continué en descendant, jusques à ce que x difference qui regne dans la progression soit telle que $a - x = o$: je dis qu'on ne peut pas trouver un terme au dessous de a, & plus grand que o. Si on suppose que z est ce terme, alors $z + x = a$; partant $z = a - x$. Or $a - x = o$; donc $z = o$, & par consequent z n'est pas plus grand que zero.

Mais si dans une progression Arithmetique il y a des grandeurs negatives, elle peut être continuée en montant & en descendant. Soit une progression dont 1 est la difference, il est évident qu'il y a la même difference entre $o + 1$ qu'entre $o - 1$, sçavoir la valeur de 1. Ainsi cette progression peut être augmentée à l'infini, soit en montant, soit en descendant, $\div 3.2.1.0.-1.-2.-3.$ &c.

QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Problême neuviéme.

34 *Le premier terme, la difference & le nombre des termes étant donnez, trouver la somme de la progression.*

Il faut trouver le dernier terme par le moyen du sixiéme Problême § n. 27. & l'ayant ajoûté au premier, on aura la somme des extrêmes, qui étant multipliée par la moitié du nombre des termes, on aura par le Theorême s̃ n. 30. la ſomme de toute la progreſſion; ce qu'on demandoit.

Quand le nombre des termes eſt impair, il faut chercher la valeur du moyen. Par exemple, ſi le nombre des termes étoit onze, le terme moyen eſt le ſixiéme terme dont il auroit fallu chercher la valeur par la Propoſition s̃ n. 27; enſuite multiplier ce moyen par le nombre entier des termes de la progreſſion, le produit ſeroit la ſomme de tous les termes de la progreſſion, par le premier Corollaire de la Propoſition douziéme s̃ n. 31.

Question.

Un Capitaine a rangé ſes Soldats de maniere qu'au premier rang il y a trois Soldats, au ſecond 5; il y a 12 rangs. On demande combien il y a de Soldats, c'eſt à-dire quelle eſt la ſomme de cette progreſſion? Par cette quatorziéme Propoſition, cette ſomme eſt 168.

Quinziéme Proposition.

Problême dixiéme.

La difference, le nombre des termes, & la ſom- 35
me de la progreſſion étant donnez, trouver les deux Extrêmes, & chacun des interpoſez.

La difference eſt c, qui vaut 2, le nombre des termes eſt 12, la ſomme de la Progreſſion eſt 168. Soient x & z ſes extrêmes qu'il faut trouver avec leurs interpoſez. Puiſque par la Propoſition s̃ n. 30. la ſomme des Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, eſt égale à la ſomme de toute la progreſſion; donc diviſant la ſomme de la progreſſion par la moitié du nombre des termes, le quotient ſera la ſomme des Extrêmes.

Ainsi ayant divisé 168 par 6, moitié de 12, nombre des termes, le quotient 28 est égal à x le premier terme, plus z le dernier; ce qui s'exprime $28 = x + z$, & par la seconde Proposition du n. 20. $x + 11c$. ou $x + 22 = z$. Donc $28 = x + z + 22$. Otant de part & d'autre 22, restera $6 = x + z$. Donc $3 = x$. Ainsi le premier terme est 3. Mais $x + 22 = z$: Donc $z = 3 + 22$, ou $z = 25$. La difference qui regne dans la progression est connuë, sçavoir c ou 2; donc le second terme sera 5, le troisiéme sera 7, &c.

Question.

Une fontaine artificielle a 12 jets d'eau differens, le second jette dans une heure deux pintes d'eau plus que le premier, le troisiéme deux pintes plus que le second, & ainsi de suite, & tous ensemble jettent 168 pintes d'eau dans une heure. L'on demande combien chacun des jets de cette fontaine jette d'eau dans une heure?

L'on connoit la difference qui regne dans cette progression, sçavoir 2, le nombre des termes qui est 12, la somme de tous les termes qui est 168; ainsi par cette quinziéme Proposition, on trouvera que le premier jette dans une heure trois pintes d'eau, le second cinq pintes, le troisiéme sept pintes; ainsi de suite.

Seiziéme Proposition.

Problême onziéme.

36 *Connoissant le nombre des termes d'une progression Arithmetique, & leur somme avec le premier ou le dernier terme, connoitre le reste,*

Le nombre des termes est n, leur somme est s. Soit x le premier ou le dernier terme qu'on ne connoît pas. Il faut en premier lieu diviſer la ſomme *ſ* par la moitié de *n* nombre des termes. Le quotient de cette diviſion ſelon ce qui a été démontré dans la Propoſition precedente, ſera la ſomme du premier & du dernier terme ; d'où ôtant le premier, le reſte ſera le dernier, ou ôtant le dernier, le reſte ſera le premier, comme il eſt évident. Enſuite on trouvera la difference par le Problême 5 n. 24. laquelle étant une fois connuë, on trouvera aiſément tout le reſte de la progreſſion.

Question Premiere.

Un debiteur eſt obligé de payer la premiere ſemaine une livre, la ſuivante quatre livres, la troiſiéme ſept livres ; ainſi chaque ſemaine trois livres plus que dans la precedente. On demande combien il doit payer la vingt-huitiéme ſemaine.

Dans cette progreſſion le nombre des termes eſt connu, la difference qui y regne, & le premier terme. Par la neuviéme Propoſition on trouvera que la ſomme qu'il doit payer eſt 82 livres. Car multipliant 27, nombre des termes qui precedent celui qu'on cherche, par 3 difference qui regne dans la progreſſion, le produit eſt 81, auquel ajoûtant le premier terme 1, cela fait 82, qui eſt le 28ᵉ terme.

Question Seconde.

Un debiteur ayant payé 82 livres la vingt-huitiéme ſemaine, & payé trois livres de moins la ſemaine precedente, ſçavoir la vingt-ſeptiéme, & toujours de même en retrogradant, on demande combien il a dû payer la premiere ſemaine.

Le nombre des termes qui precedent le 28 sçavoir 27 multiplié par la difference 3 ; c'est-à-dire 81, plus le premier terme, est égal à 82, selon qu'on l'a vû dans la question precedente : Donc de 82 ôtant 81, le reste 1 sera le premier terme qu'on demande, ou ce que le debiteur a payé la premiere semaine.

QUESTION TROISIE'ME.

Un débiteur doit pendant 28 semaines payer à la fin de chacune une certaine somme, qui croît également chaque semaine ; la premiere il a payé une livre, la derniere 82 livres : on demande quelle est cette augmentation, c'est-à-dire quelle est la difference qui regne en cette progression.

Otez de 82 dernier terme le premier 1, reste 81 ; divisez ce nombre par le nombre des termes moins 1, par consequent par 27, le quotient 3 marquera cette difference selon ce qu'on vient de voir dans les deux Questions precedentes.

QUESTION QUATRIE'ME.

Un débiteur a payé la premiere semaine une livre, la seconde 4, la troisiéme 7, de sorte que la difference de la progression est trois ; à la fin de la derniere semaine il a payé 82 : on demande le nombre de ces semaines.

Le dernier payement & le dernier terme de la progression est 82, dont j'ôte le premier terme, reste 81, que je divise par 3, difference de la progression ; le quotient de la division est 27 : ainsi il y a 27 + 1 termes ; c'est-à-dire 28 : ce qu'on demandoit.

QUESTION CINQUIE'ME.

Le debiteur doit payer pendant vingt-huit ſemaines à la fin de chacune un certain prix croiſſant de 3 livres : à la fin de la premiere il a payé 1, & à la fin de la vingt-huitiéme 82 : on demande combien il a payé en tout ?

Le premier & le dernier terme 1 + 82 multipliez par la moitié du nombre des termes, ſont égaux à la ſomme de tous les termes de la progreſſion ſ n. 30 : multipliant donc 1 + 82 ou 83 par 14, puiſqu'il y a 28 termes ; le produit 1162 eſt la ſomme que l'on demande.

QUESTION SIXIE'ME.

Un débiteur doit payer 1162 livres en un certain nombre de ſemaines, il a payé la premiere ſemaine 1 livre, & la derniere 82, payant en chacune plus qu'en la precedente dans la même Progreſſion que dans les Queſtions precedentes : on demande quel eſt le nombre de ces ſemaines ?

Je diviſe 1162 par la ſomme du premier & dernier terme, c'eſt-à-dire par 1 + 82, ou 83 : le quotient eſt 14 ; je double ce quotient : ce qui m'apprend que 28 eſt le nombre des ſemaines qu'on demande.

QUESTION SEPTIE'ME.

Un débiteur doit payer 1162 livres en 28 ſemaines, la premiere une livre, toujours dans la même progreſſion : on demande ce qu'il payera la derniere ſemaine ?

Je divise 1162 par la moitié de 28, c'est-à-dire par 14; le quotient est 83, dont je retranche le premier terme qui est 1, le dernier terme est 82 que je cherchois. Le débiteur doit donc payer 82 livres la derniere semaine.

SECTION TROISIE'ME.

DES RAISONS, ET DES PROPORTIONS ET PROGRESSIONS GEOMETRIQUES.

CHAPITRE I.

On éclaircit la notion des Raiſons.

CE mot *Raiſon*, comme je l'ai fait voir, ne ſignifiant en general qu'un rapport, l'idée en eſt confuſe quand on ne ſpecifie point ce rapport. Avoir rapport, c'eſt être d'une certaine maniere au regard d'une autre; or dire en general qu'une choſe eſt d'une certaine maniere au regard d'une autre, c'eſt parler confuſement, au moins obſcurement, ſi on ne ſpecifie cette maniere; car la paternité eſt un rapport du pere au fils: ainſi, dire que les Raiſons ſont des rapports, ce n'eſt rien dire. On ne peut tirer d'une notion ſi generale des Raiſons, aucune lumiere ſuffiſante pour démontrer ce qu'on en propoſe dans les Mathematiques. Il eſt vrai que l'on ajoûte que Raiſon c'eſt un rapport ſelon la quantité; mais quoi que cela marque que l'on conſidere la quantité ou la grandeur des choſes qu'on compare & qu'on rapporte l'une à l'autre; neanmoins on ne dit pas encore aſſez, puiſque cette comparaiſon ſe peut faire en deux manieres : ainsi on ne donne pas une idée entiere de ce que c'est que Raison, selon qu'on prend ce mot.

On a vû que l'on peut comparer deux grandeurs l'une avec l'autre, ou en considerant leur difference, ou examinant comment l'une contient l'autre, ou en est contenuë. Ainsi pour donner une idée distincte des Raisons, c'est-à-dire des rapports des Grandeurs, en tant qu'on veut parler d'un rapport qui ne consiste pas dans la difference de deux grandeurs qu'on rapporte l'une à l'autre, il faut necessairement dire que Raison c'est une maniere de contenir, ou d'être contenu.

Ce qui a trompé plusieurs personnes, & leur a fait rejetter cette notion que nous donnons ici des Raisons, c'est qu'ils se sont imaginez que les Raisons ainsi expliquées, ne pouvoient s'appliquer qu'aux Grandeurs, dont l'une contient l'autre ou en est contenuë exactement tant de fois, & qu'on peut exprimer par nombres. Il y a, disent ils, & ils ne se trompent pas en cela, une infinité de Grandeurs dont on ne peut pas dire que l'une soit contenuë un certain nombre de fois dans l'autre : ainsi comment dire que la raison qu'elles ont entr'elles est la maniere dont elles se contiennent, puisque cette maniere est inconnuë, & qu'il est impossible de l'exprimer ? Ce qu'on peut donc dire de leur raison, c'est que l'une a un rapport à l'autre.

Voila tout ce qu'ils peuvent dire contre la notion que je donne des Raisons, mais cela n'a aucune force, car bien que je ne connoisse point la maniere precise qu'une Grandeur est contenuë dans une autre, cela n'empêche pas que je ne puisse démontrer les proprietez des Raisons & des Proportions Géométriques, suivant cette no-

tion

tion que je donne des Raisons. Si je sçai que *b* est contenu dans *c* comme *d* dans *f*, sans pourtant sçavoir si c'est exactement ou avec reste ; suivant la définition des Proportions, je sçaurai certainement que ces quatre termes *b. c. d. f.* sont proportionels : Ignorant, dis-je, la maniere dont *b* est contenu dans *c*, je pourrois faire voir que *d* est à *f* comme *b* à *c*. si j'avois un moyen de démontrer qu'effectivement *d* est contenu dans *f* comme *b* l'est dans *c*. Il ne seroit pas necessaire que je pûsse dire precisement cette maniere, que par exemple *b* est le tiers de *c* comme *d* est le tiers de *f*. Il suffiroit que je fisse voir que si on supposoit *c* & *f* divisez en mille parties, si *b* étoit une milliéme partie de *c*, *d* seroit aussi une milliéme partie de *f* ; & que si divisant *c* par *b* il restoit un reste, divisant *f* par *d* il y auroit aussi un reste ; & que si on concevoit ce reste de *c* divisé en mille parties, & le reste de *f* divisé aussi en mille parties, *b* seroit à chaque milliéme partie du reste de *c* comme *d* à la milliéme partie du reste de *f* ; ainsi à l'infini. Lors, dis-je, que cela se peut démontrer, il est évident que la maniere dont *d* est contenu dans *f* est la même que celle dont *b* est contenu dans *c* ; ainsi cette définition des Raisons ; que ce sont des manieres de contenir ou d'être contenu, convient à toutes les Raisons, tant à celles qu'on peut exprimer par nombre, qu'à celles qui ne le peuvent être. Il n'est pas même necessaire d'ajoûter dans la définition des Raisons, qu'il faut, afin que deux Raisons soient semblables, que si on divise le premier & le second Antecedent en mille parties, & que le premier Consequent soit une milliéme partie du premier Antecedent, le second Consequent soit aussi une milliéme partie du second Antecedent ;

& que si le premier Consequent se trouve plus petit qu'une milliéme partie du premier Antecedent, le second Consequent se trouve aussi plus petit qu'une milliéme partie du second Antecedent. Car si cela n'étoit pas, les deux manieres de contenir ou d'être contenu ne seroient pas les mêmes. Une définition doit être courte & nette. Nous démontrerons dans ces Elemens tout ce qu'on peut démontrer touchant les Raisons des Grandeurs en general, sans avoir besoin de cette addition.

CHAPITRE II.

Explication des termes dont on se doit servir.

PREMIERE DE'FINITION.

37 *RAison de deux Grandeurs étant la maniere que l'une est contenuë dans l'autre, ou qu'elle la contient, si cette Raison se peut exprimer par un nombre, elle est appellée exacte ou de nombre à nombre.*

Par exemple, si *a* est contenu exactement ou 2 fois, ou 3 fois, &c. dans *b*, on dit que la raison de *a* à *b* est une raison de *nombre à nombre.*

SECONDE DE'FINITION.

38 *Lors qu'une Raison n'est pas de nombre à nombre, elle est appellée Sourde.*

Si on ne peut exprimer par nombre la raison de *b* à *c*, c'est-à-dire combien de fois *b* est contenu dans *c*, ou qu'il contient *c*, cette Raison est une Raison Sourde.

TROISIE'ME DE'FINITION.

39 *La Raison exacte ou de nombre à nombre, si*

divise en Raison d'égalité ou d'inégalité.

La raison d'égalité, c'est lors qu'une Grandeur est contenuë précisement & exactement une fois dans une autre ; que l'une n'est pas plus grande que l'autre ; en un mot qu'elles sont égales.

La Raison d'inégalité se divise en celle qu'on appelle de plus grande inégalité, qui est quand on commence par le plus grand terme en le comparant au plus petit, comme 3 à 2 ; & celle de moindre inégalité est quand on commence par le plus petit terme en le comparant au plus grand comme 2 à 3.

Ne confondez pas ces choses, Raison d'égalité, & égalité de Raisons ; elles sont differentes. Egalité de Raisons est une similitude de Raisons, comme l'égalité de la raison de 3 à 6, & de celle de 2 à 4. La Raison d'égalité consiste dans l'égalité d'un antecedent à son consequent, comme est la raison de b *à* b.

Remarquez aussi qu'une raison appartient proprement à l'antecedent, c'est-à-dire que dans une raison ou rapport on considere premierement & principalement le terme antecedent : comme dans ce rapport du pere au fils qu'on nomme Paternité, *cette paternité appartient au pere. On appelle donc Raison de grande inégalité, quand l'Antecedent est plus grand que son Consequent. On dit que cette Raison est de moindre inégalité, lors que l'Antecedent est plus petit au regard de son Consequent.*

QUATRIE'ME DE'FINITION.

La raison exacte d'une Grandeur à une autre Grandeur, reçoit differens noms selon que l'Antecedent est contenu ou contient son Consequent un certain nombre de fois. 4

La Raiſon de deux termes s'appelle Double; lors que l'un eſt contenu deux fois dans l'autre; Triple, s'il y eſt contenu 3 fois, &c. Lors que le plus petit terme eſt l'Antecedent, on dit Souſdouble, Souſtriple, &c.

CINQUIE'ME DE'FINITION.

41 *Diviſant l'un des deux termes d'une Raiſon par l'autre terme, le quotient de cette diviſion eſt appellé l'Expoſant de cette Raiſon.*

Parcequ'il expoſe & fait connoître la maniere que l'un des deux termes contient l'autre, ou en eſt contenu. Ainſi diviſant 12 par 6, le nombre 2 qui eſt le quotient de cette diviſion, eſt l'Expoſant de la Raiſon de 12 à 6.

SIXIE'ME DE'FINITION.

42 *On appelle particulierement Expoſant d'une Raiſon, les moindres nombres qu'on puiſſe trouver qui ſoient entr'eux comme les termes d'une Raiſon.*

Ainſi ſi *b* eſt la ſeptiéme partie de *c*, les expoſans de la raiſon de *b* à *c* ſont 1 & 7, qui ſont les moindres nombres qui ſoient entr'eux, comme *b* eſt à *c*.

SEPTIE'ME DE'FINITION.

43 *On dit que pluſieurs termes ſont proportionnels, lors que comme le premier d'une part eſt au premier de l'autre part; ainſi le ſecond d'une part eſt au ſecond de l'autre part, & le troiſiéme d'une part eſt au troiſiéme de l'autre part. Ainſi de ſuitte.*

Ce qui ſe marque en ces deux manieres.

Premiere maniere. 2. 5. 6 :: 4. 10. 12.

Seconde maniere. 2. 4 :: 5. 10 :: 6. 12.

HUITIE'ME DE'FINITION.

Les termes homologues d'une proportion ſont ceux qui ſont de même nom, & tiennent la même place chacun en ſon rang. 44

Ainſi dans la proportion precedente 2 & 4, 5 & 10, 6 & 12, qui ſont ou antecedens ou conſequens, ſont les termes *homologues* de cette proportion. Car parmi les antecedens 2 eſt le premier, comme 4 eſt le premier conſequent parmi les conſequens; ſi 5 eſt le ſecond antecedent, 10 de ſon côte eſt le ſecond conſequent, &c.

NEUVIE'ME DE'FINITION.

Proportion ordonnée, c'eſt l'arrangement de pluſieurs Grandeurs d'une part, & d'autant de Grandeurs d'une autre part, diſpoſées de telle ſorte que la premiere du premier ordre ſoit à la ſeconde du premier ordre, comme la premiere du ſecond ordre eſt à la ſeconde du ſecond ordre, &c. 45

Voila une proportion ordonnée.

12. 4. 2. 8. :: 30. 10. 5. 20.

DIXIE'ME DE'FINITION.

Proportion troublée, c'eſt l'arrangement de pluſieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, diſpoſées de telle ſorte que la premiere du premier ordre ſoit à la ſeconde, comme la penultiéme du ſecond ordre à la derniere; puis la ſeconde du premier ordre à la troiſiéme, comme l'antepenultiéme du ſecond ordre à la penultiéme, & ainſi de ſuite. 46

Voila une proportion troublée.

12. 4. 2. 18. 9. 3.

ONZIE'ME DE'FINITION.

La proportion Geometrique droite, c'eſt celle 47 *dont les termes sont disposez par ordre chacun en son rang.*

Comme 3 est à 6, de même 4 est à 8 ; cette proportion ainsi rangée 3. 6 :: 4. 8. est droite.

DOUZIE'ME DE'FINITION.

48 *Si le premier terme est au second comme le quatriéme au troisiéme, cette proportion s'appelle Renversée, & alors on dit que les deux premiers termes sont reciproques aux deux autres.*

3. 6 :: 4. 8. Ces quatre termes étant ainsi rangez 3. 6. 8. 4. la proportion est renversée, & 3 est à 6 reciproquement, comme 8 est à 4.

CHAPITRE III.

Explications de quelques termes moins utiles.

49 JE ne dois pas passer sous silence l'explication de certains autres termes qui se trouvent dans les Livres. Il faut donc sçavoir que l'une & l'autre raison de plus grande inégalité & de moindre inégalité, sont distinguées en cinq especes.

Il y a cinq especes de raison de plus grande inégalité. La premiere s'appelle *Multiple*; la seconde, *Surparticuliere* ; la troisiéme, *Surpartiente* ; la quatriéme, *Multiple surparticuliere* ; la cinquiéme, *Multiple surpartiente*.

La raison *Multiple* est quand la plus grande contient tant de fois précisement la plus petite, comme 6 contient trois fois 2, ainsi 6 est multiple de 2.

La raison *Surparticuliere*, c'est lors qu'un nombre en contient un autre une fois, plus une partie, comme la raiſon de 3 à 2 eſt ſurparticuliere, car 3 contient une fois 2, & outre cela une partie de 2.

Les raiſons ſurparticulieres reçoivent differens noms ; ce mot, *ſeſqui*, eſt un terme dont on ſe ſert pour exprimer l'unité : ainſi raiſon *ſeſquialtere* eſt quand un nombre en contient un autre une fois & une moitié de ce nombre. La raiſon de 3 à 2 eſt *ſeſquialtere*, la raiſon de 4 à 3 eſt *ſeſquitierce*, parceque 4 contient une fois 3 & un tiers de 3 ; la raiſon de 5 à 4 eſt *ſeſquiquarte*, parceque 5 contient une fois 4 & une quatriéme partie de 4.

Raiſon *ſurpartiente* eſt quand la plus grande contient la plus petite une fois, & qu'elle contient outre cela plus d'une de ſes parties. La raiſon de 5 à 3 eſt *ſurpartiente*, parceque 3 eſt contenu une fois dans 5, outre cela il y a plus d'une partie de 3 dans 5 ; car la troiſiéme partie de 3 y eſt contenuë 2 fois, outre que 3 y eſt contenu une fois ; ainſi cette raiſon de 5 à 3 eſt nommée *Surbipartiente-tierce*, celle de 7 à 4 *Surtripartiente-quarte* ; ainſi cette raiſon reçoit differens noms.

Raiſon *multiple Surparticuliere*, eſt quand le plus grand nombre contient le plus petit pour le moins 2 fois, & outre cela une des parties du plus petit. Telle eſt la raiſon de 5 à 2, car 2 eſt contenu 2 fois dans 5, outre cela 5 contient une partie de 2 ; ce qui s'appelle encore Raiſon *double ſequialtere*, comme celle de 7 à 3 *double ſeſquitierce*, celle de 13 à 4 *triple ſeſquiquarte*, parceque 13 contient 3 fois 4, plus une quatriéme partie de 4.

Raiſon *multiple ſurpartiente*, eſt quand le plus grand nombre contient 2 ou pluſieurs fois le plus petit, & plus d'une de ses parties. Telle est la raison de 8 à 3, 8 contient 2 fois 3, plus 2 parties de 3; c'est pourquoi cette raison est nommée Raison *double surbipartiente-tierce :* la raison de 15 à 4, Raison *triple surtripartiente-quatriéme.*

Les cinq especes de la raison de moindre inégalité, ne different de celles dont nous venons de parler, que par cette particule *sous*, qu'on appose à leur nom : au lieu de dire *multiple*, on dit *sous-multiple*, *sous-surparticuliere*, au lieu de dire *surparticuliere* ; ainsi tout ce qu'on a dit des cinq especes de la Raison de grande inégalité, se doit entendre des especes de la raison de moindre inégalité. Par exemple, la raison de 4 à 3 qui est de grande inégalité, est surparticuliere: la raison de 3 à 4 qui est de moindre inégalité, est une raison sous-surparticuliere.

Il n'est pas necessaire de forcer sa memoire à retenir ces noms, on ne doit pas même s'en servir : si une raison est de nombre à nombre, il faut l'exprimer par ses exposans. Par exemple, si la raison de *b* à *d* est triple sesquiquarte, au lieu de me servir de ces termes embarassans, je dirai simplement que *b* est à *d*, comme 13 est à 4.

On trouve aussi dans les Auteurs les termes suivans, lesquels j'expliquerai pour la même raison, quoique je ne m'en serve pas dans ces Elemens.

Une grandeur est appellée *Multiple* au regard de ses parties, qui étant prises un certain nombre de fois lui sont égales; ainsi 24 est multiple de 6. Or on dit que deux Grandeurs sont multiples pareils ou *équimultiples*, lors qu'elles contiennent les parties dont elles sont les multiples un même nombre de fois : ainsi 10*b* & 10*d* sont des multiples pareils.

Lors qu'une partie d'une Grandeur eſt contenuë preciſément tant de fois dans ſon tout, 2 fois, ou 3 fois, &c. cette partie eſt appellée *Aliquote* de cette Grandeur; ainſi 5 eſt aliquote de 15. Il n'y a point de nombre qui tout au moins n'ait pour aliquote l'unité; car tout nombre eſt contenu une fois en lui-même.

Si les parties aliquotes d'une Grandeur ſont autant de fois dans leur tout, que les parties aliquotes d'une autre Grandeur ſont dans le leur, elles ſont appellées *Aliquotes pareilles:* ainſi 3 & 4 ſont les aliquotes pareilles de 9 & 12; car 3 eſt contenu 3 fois dans 9, comme 4 eſt contenu trois fois dans 12.

On appelle *Aliquote commune*, un nombre qui étant pris autant qu'il faut, eſt égal à deux autres nombres: ainſi 3 eſt aliquote commune de 9 & de 12; car 3 pris trois fois eſt égal à 9, & pris 4 fois il eſt égal à 12. Deux nombres ont tout au moins pour leur commune aliquote l'unité; car il eſt manifeſte que l'unité répétée autant qu'il faut, eſt égale à quelque nombre que ce ſoit.

CHAPITRE IV.

Des proprietez des Raiſons & des Proportions Geometriques.

PREMIER AXIOME.

Les Raiſons égales ont des Expoſans égaux. 50

SECOND AXIOME.

Les Grandeurs égales ne peuvent être les Expoſans que de Raiſons qui ſoient égales. 51

LEs Raiſons ſont des manieres de contenir ou d'être contenu; d'où il eſt évident que deux raisons sont égales, c'est à-dire que celle de *b* à *d* est la même que celle de *f* à *g*, lors que *b* contient ou est contenu dans *d* comme *f* dans *g*; ou ce qui est une même chose, que divisant *b* & *d* l'un par l'autre, le plus grand par le plus petit, le quotient de cette division est le même que de la division de *f* par *g*. Car le quotient n'est qu'un signe ou une expression de la maniere qu'une Grandeur est contenuë dans celle qu'elle divise. Ces quotiens sont appellez les Exposans de ces Raisons par la sixiéme Définition ci-dessus n. 42. qui seront ainsi égaux si ces quotiens sont égaux; les demonstrations du reste de ce Livre roulent toutes sur ces deux Axiomes.

Troisie'me Axiome.

52 *Si la raison de* b *à* d *est la même que celle de* f *à* g, *celle de* d *à* b *est la même que de* g *à* f.

Ce troisiéme Axiome n'est pas moins certain que le premier & le second. *Contenir* & être *contenu* sont des termes reciproques; ainsi il est évident que si *b* contient *d* comme *f* contient *g*, ainsi *d* est contenu dans *b*, comme *g* est contenu dans *f*.

Quand on tire une consequence de cet Axiome, cela s'appelle conclure *invertendo*.

Quatrie'me Axiome.

53 *Le premier Antecedent est au second Antecedent, comme le premier Consequent au second Consequent.*

Ainsi si *A. B* :: *C. D*; donc *A. C.* :: *B. D.* laquelle maniere de conclure s'appelle *Alternando*. On compare alternativement *A* avec *C*, l'Antecedent avec l'Antecedent; & *B* avec D le Consequent avec le Consequent. Ce que nous appelſons ici *Alternando*, d'autres l'appellent *Permutando.*

Nous avons vû dans la Section precedente § *n.* 13. *l'importance qu'il y a de reduire autant que cela ſe peut, pluſieurs & differentes Grandeurs aux mêmes ſignes ou mêmes noms; de ſorte que dans la maniere qu'on les exprime on aperçoive ce qu'elles ont de commun, & ce qu'elles ont de particulier. On le peut faire ici de même.*

Les lettres marquent toutes ſortes de Grandeurs : ainſi une Raiſon étant propoſée telle qu'elle ſoit, ſourde ou non, je puis appeller b *l'Antecedent de cette Raiſon, &* d *le Conſequent; je puis diviſer* b *par* d, *ou* d *par* b. *Or ſi je nomme* q *le quotient de* d *diviſé par* b, *qui eſt le ſigne de la maniere que* b *eſt contenu dans* d : *donc puiſque le quotient d'une diviſion multipliant le diviſeur, ici* q *multipliant* b, *doit faire Liv. I. n. 2. une grandeur égale à la grandeur diviſée, il faut que* qb *ſoit égal à* d. *Ainſi je puis nommer* qb *la grandeur* d, *& réduire ces deux termes* b *&* d *à ceux ci* b, qb, *quoique je ne connoiſſe point leur valeur, & même qu'elle ne ſe puiſſe pas exprimer par nombres; & qu'ainſi leur raiſon ſoit ſourde : car* q *ne marque autre choſe que la maniere dont* b *eſt dans* d, *ſans la déterminer. C'eſt le quotient de* d *diviſé par* b, *qui ne dit point ſi* b *peut diviſer exactement* d *ou non. Il eſt certain par les Axiomes qu'on vient de propoſer, que les raiſons égales ont des expoſans égaux, les expoſans ſont les quotiens; par conſequent lors que deux raiſons ſont égales, que* b *eſt à* d *comme* f *eſt à* g, *ſi le quotient de* d *diviſé par* b *eſt* q, *celui de* g *diviſé par* f *doit être le même : ainſi* g *doit être égal à* qf. *On peut donc réduire cette propor-*

tion b. d :: f. g. *à celle-ci,* b. qb :: f. qf. *C'est ce que je dis en moins de paroles dans le Lemme suivant & son Corollaire.*

Lemme.

54 *Le plus grand terme d'une Raison est égal au plus petit multiplié par le quotient de la division du plus grand par le plus petit.*

Soient b & d les deux termes d'une raison, b est le plus petit terme. Ayant divisé d par b, je nomme q le quotient de cette division. Ce quotient q multipliant le diviseur b, le produit qb sera égal à d la grandeur divisée, Liv. I. n. 21. Ainsi $qb = d$, ce qu'il falloit prouver.

Je supposerai toujours pour abreger, que c'est le consequent qui est le plus grand terme. Si d *avoit été plus petit que* b, *la même démonstration fait voir que* qd = b.

Corollaire.

55 *On peut donc exprimer les termes d'une Raison, & même tous ceux d'une Progression, de la maniere suivante.*

J'appellerai toujours q le quotient du consequent divisé par l'antecedent. Si ces termes sont donc b & d, je pourrai mettre qb au lieu de d. Je pourrai aussi exprimer tous les termes d'une progression de cette même maniére, & changer par exemple cette progression $\div\, b.\ c.\ d.\ f.\ g.\ h.\ k.$ en celle-ci, $\div\, b.\ qb.\ qqb.\ q^3b.\ q^4b.\ q^5b.\ q^6b.$ qui est la même; car par le Lemme précedent $qb = c$, & multipliant qb par le quotient de la raison de c à d, qui est toujours le même, sçavoir q, il faudra que $q^2b = d$; ainsi que $q^3b = f$, & que $q^4b = g$, &c.

PREMIERE PROPOSITION.
Premier Theorême.

Deux grandeurs sont égales, lors qu'elles ont même raison à une troisiéme grandeur. 56

Soit $b.\ g :: b.\ f.$ c'est-à-dire que g & f ont une même raison avec b, je dis que $g = f$. Ayant divisé g par b, & f par le même b, puisque les raisons de b à g & de b à f sont égales, ces deux divisions auront un même exposant, ou même quotient, selon le premier Axiome. Je nomme q ce quotient ; donc par le Lemme précedent, $qb = \left\{ \begin{array}{l} g \\ f \end{array} \right.$. Ainsi les grandeurs g & f étant égales à une même grandeur, sçavoir à qb, elles sont égales entr'elles ; ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE PROPOSITION.
Second Theorême.

Deux Raisons égales à une troisiéme raison, sont égales entr'elles. 57

La raison de b à d est égale à celle de x à z, à laquelle celle de f à g est aussi égale. $b.\ d :: x.\ z.$ & $f.\ g :: x.\ z.$ Il faut démontrer que $b.\ d :: f.\ g.$ Par l'hypothese selon le premier Axiome, l'exposant de la raison de b à d, ou ce qui est la même chose, le quotient de d divisé par b, est le même que celui de z divisé par x, puisque ces deux raisons sont égales. Ainsi si le quotient de la raison de b à d est q, celui de la raison de x à z sera aussi q. Or puisque f est à g comme x est à z, & que le quotient de x à z est q ; donc celui de f divisé par g sera aussi q. Puis donc que ces deux raisons ont un même quotient, sçavoir q, elles ont un même exposant : Donc, selon l'Axiome, elles ſont égales, ce qu'il falloit prouver.

Troisie'me Proposition.
Troiſiéme Theorême.

58 *Deux Grandeurs demeurent en même Raiſon, quoiqu'on ajoûte à l'une & à l'autre, pourvû que ce qu'on ajoûte à la premiere, ſoit à ce qu'on ajoûte à la ſeconde, comme la premiere eſt à la ſeconde.*

Soient donnez d'une part b & d, & de l'autre f & g : on ajoûte f à b, ce qui fait $b+f$ & g à d, ce qui fait $d+g$; ſi $b.d :: f.g$, je dis que $b+f. d+g :: b.d$; ce qu'il faut démontrer.

Soit q l'expoſant de la raiſon de b à d, qui ſera auſſi celui de la raiſon de f à g, puiſque ces raiſons ſont égales : Donc par le Corollaire du Lemme ci-deſſus, je puis exprimer ainſi ces quatre grandeurs $b. d. f. g.$ les réduiſant à celles-ci $b. qb. f. qf$; ainſi ajoûtant f à b, & qf à qb, il faut démontrer que $b+f. qb+qf :: b. d.$ Pour cela je diviſe le premier conſequent $qb+qf$ par le premier antecédent $b+f$, le quotient de cette diviſion eſt q. ſelon ce qui a été enſeigné touchant cette Operation dans le premier Livre, que pour diviſer par exemple $qb+qf$ par $b+f$, il n'y avoit qu'à ſupprimer les lettres communes au diviſeur, & à la grandeur qui doit être diviſée, ſçavoir ici $b+f$, après quoi il ne reſte que q. Or par l'hypotheſe le quotient de d diviſé par b eſt auſſi q : donc par le ſecond Axiome la raiſon de $b+f$ à $qb+qf$, ou de $b+f$ à $d+g$, eſt égale à celle de b à d ; qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

59 *Lors que deux Raiſons ſont égales, l'antecédent de l'une, plus ſon conſequent, eſt à ce même conſe-*

quent, comme l'antecédent de l'autre plus son consequent est à ce consequent.

Ce Corollaire, à quelque petit changement près, n'est, s'il faut ainsi dire, qu'une expression particuliére de la proposition précédente. Car soit $b.\,d :: f.\,g$; pour démontrer que $b+d.\,d :: f+g.\,g$. il n'y a qu'à faire *alternando* $b.\,f :: d.\,g$. Mais par ce Theorême $b+d.\,f+g :: b.\,f$: & partant $b+d.\,f+g :: d.\,g$. Donc encore *alternando* $b+d.\,d :: f+g.\,g$; ce qu'il falloit démontrer.

Quand on compare ainsi les antecédens plus leurs consequens avec ces mêmes consequens, cela s'appelle composer. Et quand on en tire quelque consequence, on dit qu'on conclut *componendo*.

Quatriéme Proposition.

Quatriéme Theorême.

Deux grandeurs demeurent en même raison, 66
quoiqu'on retranche de l'une & de l'autre, pourvû que ce qu'on retranche de la premiere soit à ce qu'on retranche de la seconde, comme la premiere est à la seconde.

Soit $b.\,d :: f.\,g$, on retranche f de b; ce qu'on marque ainsi $b-f$, & g de d, ce qui se marque de même $d-g$; il faut démontrer que $b-f.\,d-g :: b.\,d$. Soit divisé le consequent d par son antecédent b, je suppose que le quotient est q; divisant g par f, cette division aura le même quotient q, puisqu'on suppose que la raison de f à g est égale à celle de b à d. Je puis donc, par le Corollaire du dernier Lemme, s. n. 54. substituer qb en la place de d, & qf en la place de g; ainsi il faut démontrer que

$b-f.\,qb-qf :: b.\,d$. On a supposé que le

quotient de d divisé par b est q. Or divisant le consequent $qb - qf$ par l'antecédent $b - f$, le quotient est le même, sçavoir q : donc par le second Axiome ci-dessus,
$b - f.\ qb - qf :: b.\ d.$ ou $b - f.\ d - g :: b.\ d.$

Corollaire.

61 *Lors que deux Raisons sont égales, le premier antecédent moins le premier consequent, est à ce consequent comme le second antecédent moins le second consequent, est à ce second consequent.*

Soit $b.\ d :: f.\ g$ il faut prouver que $b - d.\ d :: f - g.\ g$. Premierement *alternando* $b.\ f :: d.\ g$. Donc ôtant des termes b & f les termes d & g, qui sont en même raison, on aura par cette quatriéme Proposition $b - d.\ f - g :: b.\ f$. Or la raison de b à f est la même que celle de d à g. Ainsi $b - d.\ f - g :: d.\ g$. Donc *alternando* $b - d.\ d :: f - g.\ g$; ce qu'il falloit prouver.

Quand on tire une consequence de cette verité, on appelle cela conclure *dividendo*. Il me semble qu'on auroit dû dire *subtrahendo*, car c'est une soustraction.

Cinquie'me Proposition.

Cinquiéme Theorême.

62 *Lors que deux Raisons sont égales, le premier antecédent est au premier antecédent, moins le premier consequent, comme le second antecédent est au second antecédent, moins le second consequent.*

Si $a.\ b :: c.\ d$, il faut que $a.\ a - b :: c.\ c - d$; car *alternando* $a.\ c :: b.\ d$: Donc § n. 60. $a - b.\ c - d :: a.\ c$, ou ce qui est la même chose, $a.\ c :: a - b.\ c - d$. Or *alternando* $a.\ a - b :: c.\ c - d$; & c'est ce qu'il falloit prouver. Quand on tire une consequence de cette verité, cela s'appelle conclure *convertendo*.

SIXIE'ME PROPOSITION.
Sixiéme Theorême.

Lors que deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, étant multipliées, elles sont en même raison qu'avant que d'être multipliées. 63

Soient les grandeurs b & d multipliées par x, il faut démontrer que $xb. xd :: b. d.$ Ayant divisé le consequent d par l'antecédent b, soit nommé le quotient de cette division q; ainsi $qb = d$, & par consequent $xqb = xd$. Il faut donc démontrer que $xb. xqb :: b. d.$ Par l'hypothése le quotient de la division de d par b est q. Or divisant le consequent xqb par l'antecédent xb, le quotient est encore q, selon ce qui a été enseigné en parlant de la division; par consequent, par le second Axiome ci-dessus, les deux raisons proposées ayant le même quotient, elles sont les mêmes.

$$xb. xqb :: b. d. \text{ ou } xb. xd :: b. d.$$

ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Le multiplicateur est au produit de la multiplication comme l'unité à la grandeur à multiplier : pareillement le nombre à multiplier est au produit de la multiplication, comme l'unité au multiplicateur. 64

Soit le nombre 6 à multiplier par le multiplicateur 3, en multipliant 1 & 6 par 3, ce qui fait 3 & 18. La même raison demeure

$$1. \quad 6 :: 3. \quad 18$$

alternando $\quad 1. \quad 3 :: 6. \quad 18$

Donc le multiplicateur est au produit de la multiplication, comme l'unité à la grandeur à multiplier ; & le nombre à multiplier est au produit de la multiplication, comme l'unité au multiplicateur.

De même si b est multiplié par d, dont bd est le produit, on aura $1.\ b :: d.\ db$.

alternando $1.\ d :: b.\ db$.

Septiéme Proposition.

Septiéme Theorême.

65 *Divisant deux grandeurs par une troisiéme, les quotiens de ces divisions seront en même raison que ces grandeurs.*

Soient deux grandeurs b & d, je les divise par x, le quotient de b par x soit nommé p, & celui de d par x soit nommé q, il faut prouver que $p.\ q :: b.\ d$. Or $px = b$, & $qx = d$; suivant n. 55: Donc $px.\ qx :: b.\ d$. Or p & q ayant été multipliez par x ; selon la Proposition précedente, $xp.\ xq :: p.\ q$: donc, par la seconde ci-dessus, puisque les raisons de b à d & de p à q sont égales à une troisiéme raison, qui est celle de xp à xq, il faut que $p.\ q :: b.\ d$; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

66 *Le diviseur est à la grandeur à diviser comme l'unité est au quotient, ou comme l'unité est au quotient aussi le diviseur est au nombre à diviser.*

Soit 18 à diviser par le diviseur 6, le quotient est 3. Or c'est la même chose que si on proposoit de diviser 6 & 18 par 6, dont les quotiens sont 1 & 3, qui par le Theorême sont entr'eux comme 6 & 18, qui est ce qu'il falloit prouver,

$1.\ 3 :: 6.\ 18.$

HUITIE'ME PROPOSITION.
Huitiéme Theorême.

Lors que quatre grandeurs sont en proportion Geometrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. 67

Soient ces quatre grandeurs $b.\ d :: f.\ g$, dont b & g sont les extrêmes, & d & f les moyens, il faut démontrer que $bg = df$. Ayant nommé q le quotient de la raison de b à d, celui de la raison de f à g sera aussi q. Donc p̃ n. 55. je puis nommer qb la grandeur d, & qf la grandeur g; ainsi il faut démontrer que $bqf = bqf$; ce qui est évident, puisque ce sont les mêmes grandeurs. Voici encore une autre démonstration.

Multipliant les deux derniers termes f & g par le premier qui est b, par la sixiéme Proposition $bf.\ bg :: f.\ g.$ & par la même Proposition multipliant b & d par f qui est le second antecedent, $fb.\ fd :: b.\ d$, & par consequent bg & fd ayant même raison avec un troisiéme, sçavoir bf ou fb. par la premiere Proposition, ces deux produits sont égaux; ce qu'il falloit démontrer.

$$bf.\left\{\begin{matrix} bg :: f.\ g. \\ fd :: b.\ d. \end{matrix}\right.$$

COROLLAIRE.

Trois grandeurs étant en proportion continuë, le terme moyen multiplié par lui-même, ou le quarré de ce terme est égal au produit ou plan fait des deux extrêmes, 68

Soient $\div\!\div\ b.\ c.\ d.$ je dis que $cc = bd$; car $b.\ c :: c.\ d$; donc $bd = cc$, par le present Theorême.

NEUVIE'ME PROPOSITION.
Neuviéme Theorême.

Lors que quatre grandeurs sont tellement dispo- 69 *sées que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ces quatre grandeurs sont proportionnelles.*

Soient ces quatre grandeurs b, d, f, g. Si df produit des moyens d & f est égal à bg produit des extrêmes b & g; je dis que $b. d :: f. g$. je multiplie f & g par b, par la 6e Proposition $bf. bg :: f.g$. Je multiplie b & d par f: ainsi par la même Proposition $bf. fd :: b. d$. Or puisque fd & bg sont deux produits égaux ⸗ n. 56. $bf \begin{cases} fd :: b. d. \\ bg :: f. g. \end{cases}$ car la raison de bf à fd est la même que celle de bf à bg: Donc ⸗ n. 57. la raison de b à d est la même que celle de f à g: ainsi $b. d :: f. g$; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire Premier.

70 Donc si $ab^2c - abc^2 = a^2bc - ab^2c$, il faut que les grandeurs bc & $ab - ac$ qui ont produit $ab^2c - abc^2$ soient ou extrêmes ou moyens d'une proportion: de même ab & $ac - bc$, qui ont produit $a^2bc - ab^2c$ sont aussi extrêmes ou moyens.

Corollaire Second.

71 *Tout changement qui n'empêche point que de quatre grandeurs les mêmes soient ou extrêmes ou moyens, ne trouble point leur proportion.*

Soit $b. d :: f. g$. Quelque changement qui arrive, pourvû que b & g soient ou les deux moyens ou les deux extrêmes; & que d & f soient aussi ou les deux moyens ou les deux extrêmes; de sorte que le produit $bg = df$, ces quatre termes seront proportionnels. Or en transposant les raisons, comme lors que de $b. d :: f. g$, on fait $f. g :: b. d$. les moyens deviennent les extrêmes, & les extrêmes les moyens : ainsi la proportion n'est point troublée, puisque $df=bg$.

De même en changeant la disposition des termes de chaque raison, de sorte que le consequent prenne la place de l'antecedent, & l'antecedent celle du consequent, comme si de $b. d :: f. g.$ on fait $d. b :: g. f.$ Par ce changement les extrêmes deviennent les moyens, par consequent $bg=df$; ainsi la proportion demeure. En prenant les termes d'une proportion alternativement, c'est-à-dire en comparant les antecedens ensemble, & les consequens ensemble ; comme si de $b. d :: f. g.$ on fait $b. f :: d. g$, alors b & g demeurent les extrêmes, & f & d les moyens ; la proportion demeure donc, puisque $bg=fd$.

On tire souvent des consequences de ces changemens, & ces consequences sont bonnes, parceque la proportion demeure toujours, quoique changée, comme on l'a vû dans ce Corollaire : Voici plus expressement & en peu de mots toutes les differentes manieres dont on peut tirer ces sortes de consequences.

1°. *Si* a. b :: c. d, *la consequence est bonne* invertendo, *b. a :: d. c.*

2°. *Si* a. b :: c. d, *la consequence est bonne* alternando *ou* permutando, *a. c :: b. d.*

3°. *Si* a. b :: c. d, *la consequence est bonne* a + b. b :: c + d. d ; *ce qui se nomme* componendo.

4°. *Si* a. b :: c. d, *la consequence est bonne* a—b. b :: c—d. d ; *ce qui s'appelle* dividendo.

5°. *Si* a. b :: c. d. *la consequence est bonne* convertendo *a. a—b :: c. c—d.*

Cela a été démontré ci-dessus. On peut encore conclure en la même maniere ou tirer des con-

sequences des deux Propositions suivantes qu'on va démontrer.

DIXIE'ME PROPOSITION.

Dixiéme Theorême.

72 *S'il y a deux suites de grandeurs* a, b, e, *&* c, d, f, *telles que* a. b :: c. d, *&* b. e :: d. f, *on peut conclure, donc* a. e :: c. f. *Cela s'appelle conclure* ex proportione ordinata.

Selon cette supposition que *a. b :: c. d*, & que *b. e :: d. f*. Donc $\bar{s}$ n. 67. *ad = bc* & *bf = ed*: Ainsi comme *ad* & *bc* sont des grandeurs égales de même que *ed* & *bf*. Donc *ad. ed :: bc. bf*. Or *ad. ed :: a. e.* $\bar{s}$ n. 63. *& bc. bf :: c. f*. Donc *a. e :: c. f*; ce qu'il falloit prouver.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Onziéme Theorême.

73 *S'il y a deux suites de grandeurs* a, b, e, *&* c, d, f; *telles que* a. b :: d. f, *&* b. e :: c. d, *on peut conclure, donc* a. e :: c. f. Cela s'appelle conclure *ex proportione perturbata.*

Par l'hypothese, *a. b :: d. f*, & *b. e :: c. d.* Donc *af = bd* & *ec = bd*; Donc *af = ec*. Mais puisque *af* & *ec* sont deux grandeurs égales, $\bar{s}$ n. 56. elles auront même raison à une même grandeur *ef*: Ainsi *af. ef :: ec. ef*. Or $\bar{s}$ n. 63. *af. ef :: a. e*, & *ec. ef :: c. f*. Donc *a. e :: c. f*; ce qu'il falloit prouver.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

Douziéme Theorême.

74 *Les quotiens d'une même grandeur divisée par differens diviseurs, sont reciproquement entr'eux comme les diviseurs.*

Soit a divisé par b, dont le quotient soit nommé p; ainsi $\frac{a}{b} = p$. Soit aussi a divisé par c, dont le quotient soit nommé q; ainsi $\frac{a}{c} = q$. Il faut prouver que p est à q reciproquement comme b est à c, & par consequent que $p. q :: c. b$.

Puisque le quotient multiplié par le diviseur, fait un produit égal à la grandeur divisée: donc $pb = a$, & $qc = a$: donc $pb = a = qc$: donc $pb = qc$: donc s̃ n. 69. $p. q :: c. b$; ce qu'il falloit démontrer.

Treizie'me Proposition.

Treiziéme Theorême.

Dans une proportion de plusieurs termes, comme l'un des antecedens est à son consequent; ainsi la somme de tous les antecedens sera à celle de tous les consequens. 75.

Soit $b. c :: d. f :: g. h$. Il faut démontrer que $b + d + g$ somme des antecedens, est à $c + f + h$ somme des consequens, comme b est à c, ou d à f, ou g à h, puisque $b. c :: d. f$. Donc

Alternando $b. d :: c. f$.

Componendo $b + d. d :: c + f. f$.

Alternando $b + d. c + f :: d. f$.

Par l'hypothese $d. f :: g. h$.

Donc $b + d. c + f :: g. h$.

Alternando $b + d. g :: c + f. h$.

Componendo $b + d + g. g :: c + f + h. h$.

Alternando $b + d + g. c + f + h :: g. h$; qui est ce qu'il falloit démontrer. La raison de g à h est la même que celle de b à c, & de d à f.

QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Quatorziéme Theorême.

76 *Si l'on multiplie par ordre les termes de deux proportions, les produits seront aussi en proportion.*

Soit $a. b :: c. d$, & $e. f :: g. h$. Je dis que $ae. bf :: cg. dh$: car $\bar{s}$ n. 67. $ad = bc$, & $eh = fg$, & multipliant ad & bc grandeurs égales par les grandeurs égales eh & fg elles résteront égales. Ainsi $adeh = bcfg$, ou $aedh = bfeg$: donc par la neuviéme Proposition $ae. bf :: cg. dh$.

COROLLAIRE.

77 1°. *Si l'on divise les termes d'une proportion par les termes d'une autre, les quotiens seront aussi en proportion.*

Car $\frac{ae}{e}. \frac{bf}{f} :: \frac{eg}{g}. \frac{dh}{h}$ devient $a. b :: c. d$.

2°. *Les puissances quelconques d'une proportion sont aussi en proportion.*

Si $a. b :: c. d$. en multipliant les termes de cette proportion par eux-mêmes, l'on aura $aa. bb :: cc. dd$; multipliant encore celle-ci par la premiere, l'on aura $a^3. b^3 :: c^3. d^3$.

3° *Les racines quelconques des termes d'une proportion, sont aussi en proportion.*

Si $a. b :: c. d$, $\sqrt{a}. \sqrt{b} :: \sqrt{c}. \sqrt{d}$. &c.

CHAPITRE

CHAPITRE V.

Usages des Proportions dans les Regles de Trois, de Compagnie, & de Fausse position.

QUINZIE'ME PROPOSITION.
Problême Premier.

LEs trois premiers termes d'une proportion étant connus, connoître le quatriéme. 78

Soient donnez *b*, *c*, *d* les trois premiers termes d'une proportion Géométrique, on cherche le quatriéme.

Il faut multiplier le second & le troisiéme l'un par l'autre, ce qui fait *cd*, & diviser ce produit par le premier terme *b*. Je suppose que le quotient de cette division soit *f*, je dis que *f* sera le quatriéme terme qu'on cherche, & je le démontre.

Le quotient *f* de *cd* divisé par *b*, étant multiplié par *b*, fait un produit égal à *cd*, Liv. I. n. 21. Ainsi $bf = cd$; Donc ces quatre termes *b*, *c*, *d*, *f*, font une proportion *b. c* :: *d. f.* $\bar{5}$ n. 69. Le quatriéme terme de cette proportion se connoît ainsi.

Si on me donnoit donc ces trois nombres 8, 12 & 10, & qu'on demandât un quatriéme terme qui fût à 10 comme 12 est à 8, je multiplierois le second terme 12 par le troisiéme qui est 10, ce qui fait 120, lequel produit je diviserois par le premier terme 8. Le quotient de cette division qui est 15, seroit à 10 comme 12 est à 8.

COROLLAIRE.

Soit b. c :: d. f. *Voila ce qui doit arriver, selon ce Problême.* 79

1°. *c*, le second terme ayant été multiplié par le troisiéme *d*, & le produit *cd* ayant été divisé par le quatriéme *f*, le quotient de la division sera le premier terme : car $\tilde{s}$ n. 71. *f*. *d* :: *c*. *b*. puisque ce changement ne trouble point la proportion. Ainsi on peut prendre le dernier consequent pour le premier antecedent, & alors *b* qui étoit le premier terme, sera le quatriéme terme.

2°. *b*, premier terme, ayant été multiplié par *f* quatriéme terme, & le produit *bf* ayant été divisé par *d* troisiéme terme, le quotient de cette division sera égal à *c* second terme ; car $\tilde{s}$ n. 71. *d*. *b* :: *f*. *c*, où *c* est le quatriéme terme.

3°. Le troisiéme terme *d* est égal au produit du premier *b*, par le quatriéme *f*, divisé par le second *c* ; car *c*. *b* :: *f*. *d*, & alors *d* est le quatriéme terme.

4°. Si la proportion est renversée ; c'est-à dire, qu'au lieu de cette disposition *b*. *c* :: *d*. *f*, ces termes ayent celle-ci *b*. *c* :: *f*. *d*, dans laquelle le quatriéme *d* est d'autant plus petit que le troisiéme *f*, que le second *c* est plus grand que le premier *b* ; alors le quatriéme terme *d* est égal à *bf* produit du premier *b* par le troisiéme *f* divisé par le second qui est *c* ; car ces termes étant disposez comme dans une proportion droite, ils peuvent être ainsi placez, *c*. *b* :: *f*. *d*. Or, selon la Proposition precedente n. 78. le produit de *bf* divisé par *c*, est égal à *d* : Donc, &c.

DE LA REGLE DE TROIS DROITE, ET INVERSE.

80 Ce dernier Corollaire enseigne la pratique de la Regle qu'on appelle communément Regle de Trois, & à laquelle quelques-uns, à cause du

grand usage qu'on en fait, ont donné le nom de Regle d'Or. La Regle de Trois est Droite ou Inverse. Par la Regle de Trois droite on cherche le quatriéme terme d'une proportion dont les termes sont ordonnez proportionnellement, c'est-à-dire que le quatriéme est au troisiéme ce que le second est au premier. Par la Regle de Trois Inverse on trouve le quatriéme terme d'une proportion où l'ordre proportionnel des termes est renversé, de sorte que d'autant que le second terme est plus grand ou plus petit que le premier, le quatriéme au contraire est plus petit ou plus grand que le troisiéme. Dans la Regle de Trois droite on raisonne du plus au plus, ou du moins au moins, Dans l'Inverse on raisonne du plus au moins, ou du moins au plus; ainsi il est évident qu'on renverse la raison.

Question sur la Regle de Trois Droite.

Un homme dépense en 6 jours 24 pistoles; On demande combien en 30 jours il dépensera de pistoles, faisant toujours les mêmes dépenses.

Dans cette Question on cherche un quatriéme terme qui soit à 30, comme 24 est à 6. On connoît les trois premiers termes de cette proportion; pour trouver le quatriéme, il faut selon la Proposition precedente, multiplier 30 par 24, & diviser leur produit 720 par le premier terme qui est 6, le quotient de cette division 120 sera le quatriéme terme, & le nombre de pistoles que dépensera cet homme en trente jours.

Toute la pratique de cette Regle consiste à ranger les termes connus & donnez, en sorte qu'ils soient proportionnels les uns aux autres, & que l'inconnu se trouve le quatriéme terme de la proportion; car on peut proposer cette question de maniére que les termes ne ſoient pas rangez dans une proportion droite. Comme ſi par exemple on diſoit, Un homme a dépenſé 24 piſtoles en ſix jours ; en trente jours, combien dépenſera-t'il? Il faut que les choſes de même eſpece ſoient ou *les antecedens*, ou *les conſequens* de la proportion. Si on a mis les jours pour premier antecedent, il faut que les jours ſoient le ſecond antecedent; ce qui eſt évident lors que l'on a conçû ce que c'eſt que proportion. Il faut auſſi tâcher de donner aux mêmes choſes les mêmes noms. On pourroit propoſer cette même queſtion ainſi, demandant : ſi un homme en ſix jours dépenſe 24 piſtoles, combien dans un mois dépenſera-t'il d'écus ? Ces nombres 6 jours 20 piſtoles, un mois, & les écus qu'il faut trouver, ſont quatre termes qui ont chacun leur nom en particulier, comme s'ils marquoient quatre choſes differentes, ce qui peut cauſer de la confuſion. Pour l'éviter, il faut donner à la même quantité les mêmes noms. Par exemple, ayant appellé le premier temps, jours, il faut appeller le ſecond temps des jours : & ayant parlé de piſtoles, il faut continuer à exprimer la quantité de l'argent par le même nom de piſtoles; après il faut placer ces noms, de ſorte qu'ils ſe répondent. Au lieu donc de dire un mois, il faut dire trente jours : au lieu de dire combien dépenſera-t'on d'écus ? il faut dire, combien dépenſera-t'on de piſtoles ? Ce ſont de petites difficultez qui ne peuvent pas arrêter ceux qui ont une notion diſtincte des proportions.

DE LA REGLE DE TROIS INVERSE.

81 On ſe ſert de cette Regle lors qu'on cherche un quatriéme terme plus petit que le troiſiéme, à

proportion que le ſecond terme eſt plus grand que le premier, ou qui ſoit plus grand que le troiſiéme, à proportion que le ſecond eſt plus petit que le premier.

Question sur la Regle de trois Inverse.

A préſent que le ſeptier de bled coûte 16 livres ; pour une certaine monnoye j'ai 6 livres de pain, lors que la même meſure de bled ne vaudra que 8 livres, combien aurai-je de livres de pain pour la même monnoye ?

Les trois termes donnez 16, 6, 8, ne ſont point rangez proportionnellement. Le nombre propoſé des livres de pain qu'on cherche, doit être d'autant plus grand que celui qui eſt connu, ſçavoir 6 livres de pain, que 16 livres prix du ſeptier de bled dans un certain temps, eſt plus grand que 8, prix d'un ſeptier de bled dans un autre temps ; ainſi le troiſiéme terme devroit être le premier. C'eſt pourquoi faiſant le contraire de ce qu'on a fait dans la Regle de Trois Droite, il faut multiplier le premier terme par le ſecond, 16 par 6, ce qui fait 96, & diviſer le produit 96 par le troiſiéme qui eſt 8, le quotient de cette diviſion 12 eſt le quatriéme terme. Ainſi cette Regle eſt aſſez inutile ; car quand on connoît bien la nature des proportions, on peut arranger les termes d'une Queſtion, de ſorte qu'ils faſſent une proportion droite, dont on trouve le quatriéme terme par une Regle de Trois droite. Les termes de cette Queſtion pouvoient ſe ranger en cette maniére.

8 *bled*. 16 *bled* : : 6 *pain*. 12 *pain*.

SEIZIE'ME PROPOSITION.

Problême second.

82 *Diviser une grandeur proportionnellement aux parties données d'une autre grandeur.*

$a9$ est un nombre dont les parties sont $b4$, $c2$, $d3$.

$A27$ est un second nombre qu'on veut partager en trois parties B, C, D, proportionnelles à celles de a; de sorte que

$$a9.\ A27 :: \begin{cases} b4.\ B12. \\ c2.\ C6. \\ d3.\ D9. \end{cases}$$

Il faut chercher la valeur de B, de C, & de D, qui sont les quatriémes termes de cette proportion, par trois operations differentes.

1°. La valeur de B, multipliant b par A, & divisant le produit par a, le quotient de cette division, qui est 12, sera la valeur de B.

2°. Il faut multiplier c par A, & en diviser le produit par a, le quotient de la division qui est 6, sera la valeur de C.

3°. Multipliant d par A, & divisant leur produit par a, le quotient 9 sera la valeur de D. Or il n'y a pas de doute que B, C, D, ne soient les parties de A; car par l'hypothese, $a.\ A :: b.\ B :: c.\ C :: d.\ D$. Donc $\tilde{s}$ n. 75.

$a + b + c + d.\ A + B + C + D :: a.\ A.$
Donc *alternando :*

$a + b + c + d.\ a :: A + B + C + D.\ A.$
Donc *dividendo.*

$a + b + c + d - a.\ a :: A + B + C + D - A.\ A.$ ou ce qui est la même chose.

$$b + c + d.\ a :: B + C + D.\ A.$$

Or $b + c + d = a$ par l'hypothese : Donc $B + C + D = A$; ce qu'il falloit démontrer.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

La Regle de Compagnie eſt une pratique de la Propoſition precedente. Lors que pluſieurs Marchands ſont entrez dans une ſocieté, & qu'ils ont fourn diverſes ſommes d'argent, avec leſquelles ils ont fait un certain gain ; on voit par cette Regle de Compagnie combien ils doivent gagner à proportion des ſommes qu'ils ont contribuées, ou de quelle maniére il faut partager le gain proportionnellement aux ſommes particulieres que chaque Marchand de cette Compagnie a contribuées, diviſant par le moyen de la Propoſition precedente, tout le gain proportionnellement aux parties de la miſe totale. 83

QUESTION.

Trois Marchands ont fait une bourſe de 10000 *livres ; le premier a mis* 2000 *liv. le ſecond* 5000 *liv. le troiſiéme* 3000 *liv. ils ont gagné* 4000 *liv. On demande comment on pourra partager le gain qu'ils ont fait, proportionnellement aux ſommes qu'ils ont avancées ?*

Selon ce qui a été enſeigné dans la derniere Propoſition, il faut mettre au premier terme d'une Regle de Trois l'addition des trois ſommes contribuées, qui eſt 10000 livres ; au ſecond, le gain qui eſt 4000 livres ; au troiſiéme la ſomme que chaque marchand a avancée, & puis chercher les quatriémes termes proportionnels, qui ſe trouveront être pour le premier 800 liv. pour le ſecond 2000 liv. pour le troiſiéme 1200 livres. Ces trois ſommes ſont les parties du gain 4000 L. diviſées en parties proportionnelles à la miſe totale 10000 livres.

$$10000\text{ l. }4000\text{ l. :: }\begin{cases}2000\text{ l. } & 800\text{ l.}\\5000\text{ l. } & 2000\text{ l.}\\3000\text{ l. } & 1200\text{ l.}\end{cases}$$

DE LA REGLE DE FAUSSE POSITION.

84 Lors qu'on ſçait la proportion que les parties inconnueës d'un nombre propoſé ont enſemble, on ſuppoſe un nombre autre que le propoſé, dont les parties ſont en même proportion que celles du propoſé, & par les nombres ſuppoſez & connus, on connoît ceux qu'on cherche.

On appelle cette Regle, la Regle *de Fauſſe poſition*, parcequ'on ſuppoſe un nombre, avec lequel on raiſonne comme ſi c'étoit le véritable nombre, quoiqu'il ne le ſoit pas. Il y a deux Regles de Fauſſe poſition; la premiere eſt d'une Fauſſe poſition, la ſeconde eſt de deux Fauſſes poſitions. Nous parlerons de cette derniere ailleurs.

QUESTION SUR LA REGLE DE FAUSSE POSITION.

On ſçait que les trois âges de trois perſonnes ſont enſemble 144 *ans; que l'âge de la ſeconde eſt double de l'âge de la premiere, & l'âge de la troiſiéme triple de l'âge de la ſeconde. On demande quel eſt l'âge d'un chacun.*

Je fais cette ſuppoſition, que le premier eſt âgé de 3 ans; par conſequent ſelon la Queſtion, l'âge de la ſeconde perſonne doit être *6*, double de 3; l'âge de la derniére eſt triple de la ſeconde; il doit donc être de 18. Or ces trois âges 3, 6, 18, ne font que 27, par conſéquent ma ſuppoſition eſt fauſſe; car les trois âges ſelon la queſtion, doivent faire 144 ans. Mais puiſque je ſçai que les parties de 144 sont proportionnelles aux parties de 27, qui sont 3, 6, 18 par la Proposition precedente, je partage 144 en parties proportionnelles à celles de 27, comme il a été enseigné ci-dessus, n. 82.

$$27.\ 144 :: \begin{cases} 3. & 16 \\ 6. & 32 \\ 18. & 96 \end{cases}$$

Ainsi la premiere personne aura 16 ans, la seconde 32, & la troisiéme *96*.

Chapitre VI.

Des Progressions Géométriques.

Dix-septie'me Proposition.

Theorême quinziéme.

Dans une Progression Géométrique, le produit de deux termes également éloignez des Extrêmes, est égal au produit des Extrêmes. 85

Soit cette progression ∺ *b. c. d. e. f. g. h.* &c. il faut prouver que $cg = bh$, ou $df = bh$. Par la Définition des progressions $b.\ c :: g.\ h$. Donc ꝑ n. 67. $bh = cg$. & puisque $b.\ d :: f.\ h$. Donc $bh = df$, &c.

Corollaire.

Le produit ou plan fait de deux termes d'une progression, est égal au quarré d'un troisiéme terme moyen entre ces deux termes. 86

Ainsi $ce = dd$, & $df = ee$; car $c.\ d :: d.\ e$, & $d.\ e :: e.\ f$, &c.

Dix-huitie'me Proposition.

Theorême seiziéme.

Dans une Progression le second terme est égal au 87 *premier multiplié par la premiere puissance de l'exposant de la raison qui regne dans cette progression; le troisiéme au premier multiplié par la seconde puissance de cet exposant; le quatriéme au premier par la troisiéme puissance de cet exposant. Ainsi de suite.*

Ce Theorême n'est qu'une suite du Lemme proposé $\bar{s}$ n. 54. & la même chose que ce qui est contenu dans le Corollaire qui suit $\bar{s}$ n. 55. mais exprimée d'une autre maniére. Soit donc cette progression $\div$ $b.\ c.\ d.\ f.\ g.\ h.$ &c. supposant que l'exposant de la raison de b à c est q, c'est-à-dire que c divisé par b, le quotient de cette division est q; Donc $qb = c$. Et puisque le quotient de d divisé par c ou qb est encore q: Donc qc ou qqb est égal à d. Ainsi on réduira cette progression à celle-ci, qui est la même.

$$\div\ b.\ qb.\ q^2b.\ q^3b.\ q^4b.\ q^5b.\ \&c.$$

Où vous voyez à l'œil que le second terme est égal à b le premier terme, multiplié par la premiere puissance de l'exposant q, le troisiéme au premier b multiplié par la seconde puissance de q. Ainsi de suite.

Dix-neuvie'me Proposition.

Problême troisiéme.

88 *Continuer une progression dont on connoît les trois premiers termes; ou deux seulement, avec l'exposant de leur raison.*

Soient ces trois termes $\div$ $b.\ c.\ d.$ Multipliant c par d, & divisant le produit par b, le quotient $\frac{cd}{b}$ sera le quatriéme terme, $\bar{s}$ n. 78. $b.\ c :: d.\ \frac{cd}{b}$

Or puisque $\div$ $c.\ d.\ \frac{cd}{b}$, c'est-à-dire que ces trois termes sont les trois premiers termes d'une proportion, on leur trouvera de la même maniere un quatriéme; ainsi on pourra augmenter à l'infini cette progression.

Si l'on sçait que l'exposant de la raison qui regne dans cette progression est q, c'est-à-dire que q est le quotient de c divisé par b, par la Proposition precedente, le troisiéme terme sera q^2b, le quatriéme q^3b, le cinquiéme q^4b; ainsi de suite.

Vingtie'me Proposition.

Problême quatriéme.

Trouver quelque terme que ce soit d'une pro- 89
gression, dont on connoît le premier terme avec l'exposant de la raison qu'il a avec le second terme.

Le premier terme d'une progression est 5, l'exposant de la raison qu'il a avec le second terme est 10; je veux trouver le huitiéme terme. Pour cela je prens la septiéme puissance de 10, multipliant 10 six fois par lui-même; ce qui se fait en ajoûtant 6 zero après 10. Je multiplie donc par la septiéme puissance de 10 qui est 10000000, le premier terme 5, ce qui fait 50000000, qui sera le huitiéme terme que l'on cherche § n. 87. car il est fait du premier terme multiplié par la septiéme puissance de l'exposant de la raison avec le second terme.

Premiere Question.

Un Marchand vend un très-beau cheval, à condition que du premier clou de ses fers on donnera un denier; du second clou on donnera 10 *deniers; du troisiéme* 100, *& il y en a* 20: *on demande combien le vingtiéme clou doit être payé?*

Pour trouver ce prix, il faut ajoûter 18 zero après 10 ; de sorte que ce dernier clou vaudroit 1000000000000000000 deniers ; ce qui fait une somme prodigieuse : tous les Princes du monde ne seroient pas assez riches pour acheter ce cheval à cette condition.

SECONDE QUESTION.

Jacob entra en Egypte avec 70 personnes. On suppose que sa famille après 20 ans fut deux fois aussi grande ; que 20 ans ensuite elle s'augmenta encore deux fois autant, en même proportion, ainsi de suite. On demande combien elle fut augmentée 200 ans après.

On cherche le dixiéme terme d'une progression, dont le premier terme est 70 ; pour cela j'éleve 2, exposant de la raison qui regne dans cette progression, à la neuxiéme puissance, multipliant 2 huit fois par lui-même, ce qui fait 512, par laquelle puissance je multiplie le premier terme 70. Le produit est 35840. Ainsi les dernieres 20 années du second siecle après que Jacob entra en Egypte, sa famille s'augmenta de ce nombre.

VINGT-UNIE'ME PROPOSITION.

Theorême dix-septiéme.

20 *Dans une progression Géométrique, le second terme moins le premier est au premier, comme le dernier moins le premier, est à la somme de tous les termes qui le precedent.*

Soit ∺ *b. c. d. f. g. h.* Dans cette progression, comme dans toutes les autres, chaque consequent peut être pris pour antecedent du terme suivant ; ainsi on peut exprimer cette progression en cette maniere :

$$b, c :: c. d :: d. f :: f. g :: g. h;$$

Or comme le premier terme b est au second c, ainsi $b+c+d+f+g$, somme de tous les antecedens, est à $c+d+f+g+h$, somme de tous les consequens, § n. 75.

$b. c :: b+c+d+f+g. c+d+f+g+h.$

Invertendo,

$c. b :: c+d+f+g+h. b+c+d+f+g.$

Dividendo.

$c-b. b :: c+d+f+g+h-b-c-d$
$-f-g. b+c+d+f+g.$

Or puisque $+c+d+f+g-c-d-f-g=0$; donc $c+d+f+g+h-b-c-d-f-g=h-b$, & par consequent $c-b. b :: h-b. b+c+d+f+g$; c'est-à-dire que le second terme c, moins le premier b, est à b, comme le dernier h, moins le premier b, est à la somme de tous ceux qui le precedent; qui est ce qu'il falloit prouver.

Remarquez que ce que nous venons de démontrer du second & du premier terme, par rapport au dernier & à la somme de ceux qui le precedent, se doit entendre de quels autres deux termes que ce soit, pourvû qu'ils se suivent l'un l'autre. C'est ce que nous allons encore démontrer dans le Corollaire qui suit.

I. COROLLAIRE.

Dans une progression, lors que deux termes se suivent immediatement, celui qui suit, moins celui qui precede, est à celui qui precede, comme le dernier terme, moins le premier, est à la somme de tous ceux qui precedent. 91

Ainsi dans l'exemple proposé nommant s la somme de tous les termes qui precedent h; je dis que $d-c. c :: h-b. s.$ De même aussi $h-g. g :: h-b. s$, & ainsi des autres : ce qui est évident. Car une progression Géométrique n'est qu'une continuation de la même raison. Donc $b. c :: c. d$, & de même $b. c :: g. h$. Mais *invertendo* $c. b :: d. c$, & $c. b :: h. g$. *dividendo* $c-b. b :: d-c. c$, & $c-b. b :: h-g. g$. Or par cette proposition $c-b. b :: h-b. s$. Donc $d-c. c :: h-b. s$, & $h-g. g :: h-b. s$. Ce qu'il falloit démontrer.

2. COROLLAIRE.

92 1°. *Si la raison double regne dans une progression, le dernier terme que je nomme* x, *moins le premier terme, est égal à la somme de tous les termes qui le precedent.*

Soit nommée s la somme de tous les termes qui precedent x le dernier terme, je nomme a le premier terme. Si c'est la raison double qui regne dans cette progression, le premier terme étant a, le second sera $2a$. Or par la Proposition presente $2a-a. a :: x-a. s$. Donc puisque $2a-a$ est égal à a, il faut que $x-a$ soit égal à s: c'est-à dire que le dernier terme de la progression, moins le premier, est égal à la somme de tous les termes qui le precedent: ce qu'on avoit proposé.

2°. *Si la raison triple regne, le dernier terme* x, *moins le premier, est le double de* s, *somme de ceux qui le precedent.*

Car si a est le premier, le second sera $3a$. Or par la proposition presente, $3a-a. a :: x-a. s$. Partant puisque $3a-a$ est le double de a; donc $x-a$ sera le double de s: ce qu'on avoit proposé.

3°. *Si la raison quatruple regne, le dernier terme* x, *moins le premier, est triple de* s, *somme de ceux qui le precedent.*

Car si le premier est a, le second sera $4a$. Or, par la Proposition presente $4a-a. a :: x-a. s$, Donc $4a - a$ étant le triple de a, il faut que $x - a$ ſoit le triple de $ſ$.

Ainſi de toutes les autres progreſſions qui ont par conſequent des proprietez particulieres, ſelon les differentes raiſons qui y regnent, leſquelles nous découvrons toutes par ce ſeul Corollaire.

On appelle Progreſſion Multiple celle dont le ſecond terme eſt plus grand que le premier ; & Souſ-multiple celle dont le premier terme eſt plus grand que le ſecond ; de ſorte que la progreſſion va toûjours en diminuant, comme celle-ci $\div\div$ 16.8.4.2.1. *&c. ce qui peut aller à l'infini, puiſque l'eſprit ne trouve aucune borne dans la diviſibilité des Grandeurs, comme nous le démontrerons dans la propoſition ſuivante. Mais ſuppoſant qu'enfin on puiſſe arriver à une fin, c'eſt-à-dire à une Grandeur ſi petite qu'elle ne puiſſe être diviſée, & qu'elle ſoit preſque égale à zero. Puiſqu'il eſt évident qu'une Progreſſion Multiple peut être changée en Souſ-multiple, & une Souſ-multiple en Multiple, n'y ayant qu'à la retourner : nous pouvons donc regarder le premier terme de cette progreſſion qui eſt* 16, *comme le dernier ; & alors ſelon le Corollaire precedent,* 16 *moins le premier terme qui eſt zero, eſt égal à tous les termes qui le precedent, quoique leur nombre ſoit indéfini. Ce qui nous fait appercevoir la ſolution du Sophiſme de Zenon.* 93.

Suppoſant, diſoit ce Philoſophe, qu'Achille aille dix fois plus vîte qu'une tortuë, ſi la tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achille ne l'attrapera ; car tandis qu'Achile fera la premiere lieuë, la tortuë fera la dixiéme de la ſeconde lieuë : & tandis qu'Achille fera la dixiéme de la ſeconde lieuë, la tortuë fera la dixiéme de cette dixiéme, & ainſi à l'infini.

Zenon ſuppoſoit que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini, faiſoient un eſpace infini de lieuës, qui pourtant ne font toutes enſemble qu'une neuviéme de lieuës; car puiſque la raiſon Decuple regne dans cette progreſſion, le dernier terme qui eſt une lieuë moins le premier qui eſt preſque zero, ſera neuf fois plus grand que ceux qui le precedent, c'eſt à dire que toutes ces dixiémes de dixiémes. Dans cette progreſſion ſous-multiple, une lieuë eſt le premier terme; mais, comme nous avons dit, en changeant cette progreſſion ſous-multiple en une multiple, une lieuë eſt le dernier terme qui moins le premier zero, ſera neuf fois plus grande que toutes ces dixiémes de dixiémes de lieuës, par le Corollaire precedent; ainſi toutes ces dixiémes de dixiémes, pour grande qu'on conçoive la progreſſion, ne vaudront jamais qu'une neuviéme de lieuë.

VINGT-DEUXIE'ME PROPOSITION.

Theorême dix-huitiéme.

94 *Le nombre des termes d'une progreſſion Géométriques ſe peut augmenter en montant & en deſcendant.*

Soit cette progreſſion ∺ *a*, *b*, *c*. On peut trouver en montant un quatriéme terme, proportionnel à ces trois qui ſont donnez, & enſuite un cinquiéme, un ſixiéme à l'infini : il n'y a pas de difficulté à cela. On le peut de même en deſcendant : car ſoit *a* ce premier terme de la progreſſion qui monte, & le dernier de celle qui deſcend, je ſuppoſe que la raiſon Décuple regne dans l'une & dans l'autre. En diviſant *a* en 10 parties, & appellant *x* une de ces dixiémes, cet *x* ſera le ſecond terme en deſcendant; & diviſant de même *x* en dix parties, & nommant *z* cette dixiéme, z ſera le troiſiéme terme en deſcendant. Continuant à diviſer par dixiéme, je dis que l'on n'arrivera point à zero. Car ſoit nommé y le dernier terme de la progreſſion, quelqu'il ſoit, zero ou un nombre réel. Ainſi $y \ldots\ldots z, x, a, \div\!\div$. Soit auſſi nommée $ſ$ la ſomme de tous les termes de la progreſſion. Alors $a - y$, c'eſt-à-dire 9 fois a moins la dixiéme partie du terme qui eſt avant y, ſera plus grand que $ſ$. s̃ n. 92. Donc y n'eſt pas zero, mais quelque choſe qui ſe peut encore diviſer. La même choſe ſe peut dire de tout autre terme plus éloigné que y. Ainſi on n'arrivera jamais à zero.

VINGT-TROISIE'ME PROPOSITION.

Theorême dix-neuviéme.

La ſomme d'une progreſſion infinie peut être égale à un nombre fini. 93

Car ſoit une progreſſion infinie en deſcendant, dans laquelle regne la raiſon double. Le premier terme eſt 2; le ſecond 1 qui eſt la moitié de 2; le troiſiéme $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire la moitié de 1; le quatriéme $\frac{1}{4}$, c'eſt-à-dire, la moitié de la moitié, & ainſi à l'infini : de ſorte que comme ces termes vont en diminuant, on peut dire que le dernier terme eſt zero. Ainſi $\div\!\div 2.\ 1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4} \ldots\ldots 0$; & partant $\div\!\div\ 0 \ldots\ldots \frac{1}{4}.\ \frac{1}{2}\ 1.\ 2.$ Or s̃ n. 92. ce dernier terme 2, moins le premier, qui eſt zero, eſt égal à la ſomme de tous les termes precedens; partant toute cette ſuite infinie de moitiez de moitiez, eſt égale à 2, ainſi à un nombre fini.

VINGT-QUATRIE'ME PROPOSITION.

Problême cinquiéme.

96 *Trouver la ſomme d'une progreſſion dont on connoît le premier & le ſecond terme avec le dernier.*

Je nomme le premier a, le ſecond b, & le dernier x, & *ſ* la ſomme de ceux qui precedent le dernier. $b - a.\ a :: x - a.$ *ſ.* s̃ n. 90. On trouvera la valeur de *ſ* multipliant le dernier terme x, après en avoir retranché le premier a, par le premier, qui eſt a, & diviſant ce produit par le ſecond terme, après avoir retranché le premier, c'eſt-à-dire par $b - a$. Le quotient ſera la valeur de *ſ*, qui étant ajoûtée au dernier x qu'on ſuppoſe connu, on aura la ſomme de toute la progreſſion; puiſque *ſ* eſt la valeur de tous les termes qui precedent x, qui eſt le dernier terme.

PREMIERE QUESTION.

Une perſonne la premiere année a dépenſé 10 *piſtoles, la ſeconde année* 15, *& la derniére année de ſa vie* 10010. *On demande combien elle a dépenſé de piſtoles avant ſa mort?*

Selon cette derniere Propoſition le ſecond terme 15, moins le premier 10, eſt au premier 10 comme 10010 moins le premier 10 eſt à la ſomme des termes qui le precedent.

$$15 - 10.\ 10 :: 10010 - 10.\ ſ.$$

Pour avoir donc la ſomme que l'on cherche, je multiplie 10010 — 10, c'eſt-à-dire 10000, par 10, le produit eſt 100000, que je diviſe par 15 — 10, c'eſt-à-dire par 5, le quotient de la diviſion eſt 20000, que j'ajoûte à 10010, ce qui fait 30010 qui eſt le nombre des piſtoles que cette perſonne a dépenſées.

SECONDE QUESTION.

Supposant que la famille de Jacob 20 ans après son entrée dans l'Egypte, fut deux fois aussi grande que lors qu'elle y entra, & qu'ainsi Jacob y étant entré avec 70 personnes, après 20 ans sa famille fut de 140, augmentant toujours dans la même proportion, & qu'enfin les 20 dernieres années du second siecle après son entrée, elle se trouva être au nombre de 35840. On demande de combien elle fut augmentée dans tout cet espace de 200 ans?

Cette Question se réduit à trouver la somme d'une progression, dont le premier terme est 70, le second 140, & le dernier 35840. Or puisque ce dernier terme moins le premier 70, est égal à tous les termes qui le precedent, § n. 92; il faut ajoûter à 35840. le même nombre 35840 moins 70, c'est à dire, 35770 avec 35840, ce qui fait 71610.

Nous avons supposé qu'au bout de 20 ans cette famille fut plus grande deux fois, que lors qu'elle entra dans l'Egypte. Mais elle ne fut pas seulement augmentée du double; car Jacob avoit plusieurs enfans, qui étant tous mariez, eurent des enfans de leurs femmes pendant ces vingt premieres années. Ainsi 200 ans après, cette famille étoit bien plus que de 71610 personnes.

VINGT-CINQUIE'ME PROPOSITION.

Problême sixiéme.

Le premier, le dernier terme, & le nombre des termes d'une progression étant donnez, en trouver l'exposant. 97.

Soit une progression dont 70 est le premier terme, & 35840 le dernier terme, qui est le dixiéme. On veut trouver l'exposant de la raison qui regne dans cette progreſſion. Ce dernier terme eſt fait du premier terme 70, multiplié par la neuviéme puiſſance de l'expoſant que l'on cherche, s̃ n. 87. Diviſant donc 35840 par 70, le quotient qui ſera 512 ſera la neuviéme puiſſance de l'expoſant; laquelle étant extraite de ce nombre 512, ſelon la methode que nous en avons donnée Liv. 2. n. 49. il ſe trouve que l'expoſant que l'on cherchoit eſt 2.

Vingt-sixie'me Proposition.

Problême ſeptiéme.

28 *Le premier terme, l'expoſant & le dernier terme étant donnez, trouver le nombre des termes.*

Le premier terme eſt 70, l'expoſant eſt 2, le dernier terme 35840. Par la 18. Propoſition, ce dernier terme n'eſt autre choſe, que le premier multiplié par une certaine puiſſance de l'expoſant, égale, c'eſt-à-dire de même nom que le nombre des termes qui precedent ce dernier 35840. Ainſi il n'y a là qu'à diviſer 35840 par 70, le quotient eſt 512. Enſuite il faut élever l'expoſant 2 de puiſſance en puiſſance, juſqu'à ce qu'on ait un produit égal à 512, quotient de la ſuſdite diviſion. Or 2 élevé juſqu'à ſa neuviéme puiſſance donne 512. Donc 35840 eſt le dixiéme terme, fait du premier 70, multiplié par 512, neuviéme puiſſance de l'expoſant 2: Ainſi la progreſſion a dix termes.

Question.

On ſçait qu'une perſonne la premiere année dépenſa 6 piſtoles, la ſeconde trois fois davantage, & qu'elle dépenſa 486 la derniere année. On demande pendant combien d'années elle fit cette dépenſe?

Le premier terme de cette progreſſion eſt 6 piſtoles, l'expoſant de la raiſon qui regne dans cette progression est 3, & le dernier terme est 486. Je divise 486 par le premier terme 6, le quotient de cette division est 81, qui étant la quatriéme puissance de 3, il faut que 486 soit le cinquiéme terme, & que par consequent cette progression ait 5 termes.

VINGT-SEPTIE'ME PROPOSITION.
Problême huitiéme.

L'exposant, le nombre des termes, le dernier terme étant donnez, trouver le premier terme de la progression. 99

L'exposant d'une progression est 3, le dernier terme est 486; il y a cinq termes. Le terme 486 est fait du premier terme multiplié par la quatriéme puissance de l'exposant, $\bar{s}$ n. 87. Donc en divisant 486 par 81, quatriéme puissance de 3, le quotient qui est 6, sera le premier terme de cette progression que je cherchois.

VINGT-HUITIE'ME PROPOSITION.
Problême neuviéme.

L'exposant, le nombre des termes étant donnez avec la somme de la progression, trouver chacun des termes. 100

L'exposant d'une progression de six termes est 3, la somme de cette progression est 728, il faut trouver chaque terme de cette progression. Pour cela je prens une progression connuë où regne la raison triple, comme est celle-ci qui a six termes, ∺ 1. 3. 9. 27. 81. 243. la somme de cette progression est 364. En divisant 728 en parties proportionnelles à celle de 364. $\bar{s}$ n. 82. l'on trouvera tous les termes que l'on cherche, qui seront ∺ 6. 18. 54. 162. 486. car ces termes doive-être tous proportionnels à ceux de l'autre progression.

VINGT-NEUVIE'ME PROPOSITION.

Problême dixiéme.

101 *Le premier terme d'une progression, l'exposant de la raison qui y regne, & la somme de la progression étant donnez, trouver combien cette progression a de termes, & la valeur du dernier terme.*

Le premier terme d'une progression est 2, l'exposant de la raison qui y regne est 3; & 728 est la somme de tous les termes de la progression. Cette somme contient le dernier terme, plus tous ceux qui le precedent. Or ce dernier terme moins le premier qui est 2, est le double de tous ceux qui le precedent, s n. 92. Donc ayant ôté de 728 le premier terme qui est 2, & divisé le reste 726 en deux parties, telle que l'une soit le double de l'autre, qui seront 242 & 484, s n. 84; ayant ajoûté à 484, le premier terme 2, ce qui fait 486; ce nombre sera le dernier terme, aprés quoi on trouvera quel est le nombre des termes de cette progression, s n. 98.

Cette résolution paroît particuliere à cet exemple, mais elle ne l'est pas. Quand on connoît la raison qui regne dans une progression, on peut, s n. 92. connoître la raison que le dernier terme moins le premier a avec tous les termes qui le precedent; ainsi on resoudra en la même maniere de ce dixiéme Problême, quelqu'autre exemple qu'on propose. Cependant nous en donnerons une resolution plus generale dans le VII. Livre, connoissant le premier & le second terme avec la somme de la progression, mais sans faire aucune attention à la raison qui y regne.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE QUATRIE'ME.

Des Raisons composées que les Puissances & toutes les Grandeurs de plusieurs Dimensions peuvent avoir entr'elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raisons composées, & de leurs proprietez.

CHAPITRE PREMIER.

On peut nombrer les raisons, & faire par elles toutes les operations de l'Arithmetique, aussi-bien que par les nombres.

NOUS n'avons proprement consideré dans le Livre precedent, où nous avons parlé des Raisons, que ce qu'une grandeur est par rapport 1

à d'autres Grandeurs, avec qui on la compare. Examinons maintenant les raiſons ou rapports d'une maniere abſoluë, c'eſt-à-dire, conſiderons les raiſons en elles-mêmes comme des Grandeurs abſoluës. Conſiderons par exemple la raiſon double, la Raiſon triple, & toutes les autres Raiſons. J'apperçois que les Raiſons ainſi conſiderées peuvent être nombrées, qu'elles ſont capables des Operations de l'Arithmetique, qu'on peut ajouter une raiſon avec une autre raiſon, par exemple une raiſon double avec une autre raiſon, ou double, ou triple, &c. Qu'on peut ôter une raiſon double d'une raiſon triple: qu'on peut prendre la raiſon double tant de fois, par exemple trois fois, & la multiplier ainſi par 3, ce qui fait une raiſon ſextuple; ou diviſer une raiſon ſextuple par 3, de laquelle diviſion le quotient eſt une raiſon double. Raiſon n'eſt qu'une maniére de contenir ou d'être contenu; ainſi je puis regarder cette maniere comme une grandeur, puiſqu'elle eſt capable d'être diminuée & d'être augmentée. Les nombres, ſi nous conſiderons bien leur nature, ne ſont que des rapports ou raiſons. Quand on dit que cette tour a cent pieds de haut, que celle-ci n'en a que quatre-vingt, on compare ces deux tours: on conſidere le rapport ou la raiſon qu'elles ont avec un pied, & enſuite on dit que l'une eſt plus grande, ayant cent parties telles que la plus petite n'en a que quatre-vingt: de ſorte que ces mots *cent, quatre-vingt*, ne marquent qu'un certain rapport. Lors qu'on entreprend de nombrer, l'on convient premierement d'une commune meſure, & on commence par une partie qui eſt commune aux choſes qu'on veut nombrer. Dans l'exemple des
deux

deux tours, on convient d'une certaine meſure, qui eſt la grandeur d'un pied. Il faut auſſi en nombrant les raiſons, les reduire premierement, de maniere qu'elles ayent un terme connu, qui ſoit comme leur commune meſure. Nous allons voir que cela ſe peut faire; après quoi les Operations de l'Arithmétique ſe font ſur les raiſons avec la même facilité que ſur les nombres. Ainſi on concevra clairement qu'on peut compoſer une raiſon de pluſieurs raiſons, comme on peut compoſer un nombre de pluſieurs autres nombres par l'addition ou par la multiplication.

On pourroit faire les mêmes reflexions ſur *les Différences*, conſiderant qu'*une différence* peut être compoſée de pluſieurs *différences*. Il eſt bien évident que l'excès ou le défaut des deux grandeurs qu'on compare enſemble, peuvent être nombrez, ajoutez, ſouſtraits les uns des autres, ſe multiplier & diviſer. On peut dire que la différence de 10 à 15, a cinq fois la différence de 9 à 10: qu'ôtant la différence de 14 à 15 de la différence de 11 à 15, on a la différence de 9 à 12. Cela eſt trop clair pour s'y arrêter, & on ne tireroit aucune utilité d'un plus long diſcours ſur cette matiere.

Pour donner une idée encore plus claire de ce que c'eſt que Raiſon compoſée, il faut conſidérer qu'on peut rappeller toutes les Raiſons à une commune meſure, c'eſt-à-dire les exprimer de maniére qu'on les puiſſe comparer avec une même grandeur, & par ce moyen connoître ce qu'elles ſont les unes au regard des autres. Cela ſe fait en leur donnant un même conſequent, ſi elles en ont de differens: car par exemple dans les deux raiſons de 3 à 12, & de 4 à 12, où les deux antecedens 3 & 4 ont pour conſequent un même nombre qui eſt 12, on voit clairement le rapport de ces deux raiſons : que celle de 3 à 12 eſt quatruple, que celle de 4 à 12 eſt triple, & qu'ainſi la raiſon de 3 à 12 eſt à celle de 4 à 12 comme 3 à 4. Or pour donner un même conſequent à deux raiſons, à celle de *b* à *c*, & à celle de *f* à *g*, je multiplie les termes de la premiere par le conſequent de la derniere ; c'eſt-à-dire *b* & *c* par *g*, ce qui fait *bg*, *cg*, qui ſont en même raiſon que *b* & *c*, Liv. III. n. 63. Je multiplie de même les termes de la ſeconde raiſon par le conſequent de la premiere raiſon, c'eſt-à-dire *f* & *g* par *c*, ce qui fait *cf* & *cg*, qui eſt, ſelon ce qu'on vient de dire, une même raiſon que celle de *f* à *g*.

$$\begin{matrix} b. & c \\ f. & g \end{matrix} :: \left.\begin{matrix} bg. \\ cf. \end{matrix}\right\} cg.$$

Ces deux raiſons *b. c.* & *f. g.* étant ainſi réduites à celle-ci de *bg* à *cg*, & de *cf* à *cg*, elles ont un même conſequent, ſçavoir *cg*.

Soient ces deux raiſons en nombres, 3. 7. & 5. 11. Il les faut réduire de ſorte que ces deux raiſons n'ayent qu'un même conſequent, afin qu'on connoiſſe mieux le rapport qu'elles ont entr'elles. Je multiplie donc 1°. 3 & 7 par 11, ce qui fait 33 & 77. 2°. Je multiplie 5 & 11 par 7, ce qui fait 35 & 77 ; ainſi les deux raiſons de 3 à 7, de 5 à 11 ſont réduites à celles-ci, qui ont un même conſéquent.

$$\left.\begin{matrix} 33 \\ 35 \end{matrix}\right\} 77$$

On voit que ces deux raiſons propoſées ſont comme ces nombres 33 & 35 ; après quoi operant ſur ces expoſans, les ajoutant, les multipliant, on eſt cenſé ajouter, multiplier ces raiſons ; ce que je remarque pour faire comprendre comment les operations de l'Arithmetique ſe peuvent faire ſur les raiſons ; car il n'eſt pas neceſſaire pour cela de les réduire de maniére qu'elles ayent un même consequent. Comprenons seulement ici qu'il n'est pas plus difficile de faire les operations de l'Arithmetique sur les raisons que sur les nombres, qui ne sont eux-mêmes, comme je l'ai dit, que des raisons. S'il faut ajouter une raison triple avec une raison double, j'ajoute 2 & 3, qui sont leurs exposans; ce qui fait 5, exposant de la raison quintuple. S'il faut ôter la raison double de la raison triple, j'ôte 2 de 3, & il reste 1, exposant de la raison d'égalité. S'il faut multiplier la raison triple par la raison double, je multiplie 2 & 3 leurs exposans, l'un par l'autre, le produit est 6, qui est l'exposant de la raison sextuple. Ainsi le produit de la raison double multipliée par la raison triple, est la raison sextuple. On voit de même que la raison sextuple étant divisée par la raison triple, le quotient de cette division est une raison double.

Ce que je dis des raisons qui ont pour exposant des nombres, convient aux raisons sourdes, dont on peut trouver les exposans, comme nous avons vû, & ensuite operer sur ces exposans: car, comme on l'a démontré, deux raisons quelles qu'elles soient se peuvent réduire de maniére qu'elles n'ayent qu'un même consequent, & alors leurs antecedens sont leurs exposans, sur lesquels on peut faire les operations d'Arithmetique, comme sur les nombres absolus qui sont comme les antecedens de plusieurs raisons, qui ont toutes un même conséquent, sçavoir l'unité. En chemin faisant nous pouvons démontrer cette Proposition.

Deux raisons sont entr'elles comme le produit des extrêmes est au produit des moyens, c'est-à-dire *comme le produit du premier antecedent par* *le second consequent est au produit du second antecedent par le premier consequent,*

Soient ces deux raisons de b à c, & de f à g, elles se reduisent à celles-ci. La raison de b à c à celle de bg à cg, & celle de f à g à celle de cf à cg. Ces raisons ayant un même consequent, sçavoir cg, elles sont entr'elles comme bg est à cf, qui est ce que dit cette Proposition ; car bg est le produit des extrêmes, & cf celui des moyens.

$$\left.\begin{matrix} bg \\ cf \end{matrix}\right\} cg$$

Je n'ai parlé ici des operations Arithmetiques sur les raisons, que pour faire comprendre ce que nous allons dire des raisons composées dans ce quatriéme Livre ; car le Livre suivant est entiérement employé à parler de ces operations.

Chapitre II.

Ce que c'est que Raison composée.

Définitions & Axiomes touchant les Raisons composées.

2 Ce mot *Composer* est équivoque, aussi-bien que ce mot *raison composée* : car comme une Grandeur peut être composée en deux maniéres, de deux ou de plusieurs Grandeurs, sçavoir ou par l'addition, ou par la multiplication de ces Grandeurs ; aussi une raison sera composée de plusieurs autres raisons, ou parcequ'elle est égale à la somme de ces raisons, comme la raison quintuple est égale à la raison double jointe à la triple, ou parcequ'elle est faite par la multiplication de ces raisons, comme la raison sextuple est faite de la raison double multipliée par la triple.

L'uſage l'a ainſi voulu, que lors que l'on dit qu'une raiſon eſt compoſée de deux raiſons, que par exemple la raiſon de deux plans eſt compoſée de celles de leurs deux racines, on entend que ces deux raiſons étant multipliées l'une par l'autre, elles font la raiſon des deux plans, comme on le démontrera. Ainſi l'uſage ôte l'équivoque de ce mot, *raiſon compoſée.*

PREMIE'RE DE'FINITION.

Une raiſon eſt compoſée lors qu'elle eſt faite de deux ou de pluſieurs raiſons multipliées les unes par les autres. 3

Ainſi la raiſon ſextuple eſt appellée compoſée, lorſqu'on conſidere que cette raiſon eſt faite de la raiſon double multipliée par la raiſon triple.

SECONDE DE'FINITION.

On appelle raiſons compoſantes celles dont la multiplication a produit une raiſon compoſée. 4

Ainſi la raiſon triple & la raiſon double ſont les raiſons compoſantes de la raiſon ſextuple, qui a été compoſée par la multiplication de ces deux raiſons.

TROISIE'ME DE'FINITION.

Une raiſon compoſée de deux raiſons égales, s'appelle raiſon doublée de chacune de ces raiſons. 5

La raiſon de 2 à 8 eſt compoſée de deux raiſons égales, de 2 à 4, & de 4 à 8. Cette raiſon de 2 à 8 eſt doublée.

QUATRIE'ME DE'FINITION.

Une raiſon compoſée de trois raiſons égales, s'appelle Raiſon triplée de chacune de ces raiſons. 6

Cinquiéme Définition.

7 *Une raison composée de quatre raisons égales est une raison quatruplée, ainsi de suite.*

Raison doublée n'est pas la même chose qu'une raison double, ni une raison triplée n'est pas la même chose qu'une raison triple, &c. Ce que vous remarquerez dans la suite.

Axiome Premier.

8 *Des raisons sont censées être multipliées les unes par les autres, lors que l'on multiplie leurs exposans les uns par les autres.*

Cette Proposition est évidente après ce qu'on a remarqué ci-dessus, que lors qu'on a reduit des raisons à un même consequent, & qu'ainsi on a trouvé des grandeurs qui exposent les raisons, que ces raisons ont les unes avec les autres, on peut faire sur elles toutes les operations de l'Arithmetique, comme sur des grandeurs absoluës.

Axiome Second.

9 *Les raisons composées sont égales, lors que les raisons composantes sont égales.*

Cela est évident, les Tous sont égaux qui ont des parties égales. Des nombres égaux ajoûtez ou multipliez de la même maniére font des sommes égales, ou des produits égaux.

Chapitre III.

Theorêmes & Problêmes touchant les raisons composées.

Lemme Premier.

10 *Plusieurs grandeurs étant de suite, la suivante étant plus grande que celle qui la precede, l'ex-*

posant de la raison de la premiere à la seconde, multipliant celui de la raison de la seconde à la troisiéme, produit l'exposant de la raison de la premiere à la troisiéme, & cet exposant multipliant celui de la raison de la troisiéme à la quatriéme, produit celui de la raison de la premiere à la quatriéme ; ainsi de suite.

Soient ces grandeurs de suite b, c, d, f, l'exposant de la raison de b à c soit nommé q, c'est-à-dire le quotient de c divisé par b. Celui de la raison de c à d soit nommé p, il faut prouver que pq sera l'exposant de la raison de b à d. Pour cela considerez que $qb = c$, Liv. III. n. 54. Et puisque p est le quotient de d divisé par c, ou par qb égal à c : Donc $qpb = d$, Liv. III. n. 54. Or le quotient de qpb divisé par b est qp, partant qp est l'exposant de la raison de b à d, selon la Définition qui a été donnée de l'exposant d'une raison ; ce qu'il falloit démontrer.

Soit nommé y l'exposant de la raison de d à f ; donc $yqpb = f$. Or ayant divisé $yqpb$ par b, le quotient est yqp, qui est le produit des quotiens qp & y : Donc l'exposant de la raison de b à f est fait par la multiplication des exposans des raisons des grandeurs interposées ; ce qu'il falloit prouver.

Lemme Second.

Une raison est composée des raisons, dont les exposans en se multipliant, font son exposant. II

Soit cette raison de b à f dont l'exposant soit qpy, fait de q exposant de la raison de b à c, & de p exposant de la raison de c à d ; & de y exposant de la raison de d à f ; je dis que la raison de b à f est composée de celles de b à c, de c à d, & de d à f ; car par la définition une raison est composée, lorſqu'elle eſt faite de deux ou de pluſieurs raiſons multipliées les unes par les autres. Or par le premier Axiome 5. n. 8. ces raiſons ſe multiplient en multipliant leurs expoſans. Donc, &c.

PREMIERE PROPOSITION.

Premier Theorême.

12 *La raiſon d'une grandeur à une autre grandeur, eſt compoſée des raiſons des grandeurs interpoſées.*

Soient ces grandeurs *b*, *c*, *d*, *f*; entre *b* & *f* ſont interpoſées *c*, *d*. Il faut démontrer que la raiſon de *b* à *f* eſt compoſée de la raiſon de *b* à *c*, de celle de *c* à *d*, & de celle de *d* à *f*. Cela eſt, ſelon le ſecond Lemme, ſi l'expoſant de la raiſon de *b* à *f* eſt égal au produit des expoſans de ces raiſons; or ſelon ce que nous avons fait voir dans le premier Lemme, l'expoſant de la raiſon de *b* à *f* eſt fait par la multiplication des expoſans des raiſons des grandeurs interpoſées; il leur eſt donc égal, & partant cette propoſition eſt bien démontrée.

SECONDE PROPOSITION.

Second Theorême.

13 *Dans une Progreſſion Géométrique, la raiſon du premier terme au ſecond eſt ſimple; du premier au troiſiéme, doublée; du premier au quatriéme, triplée: ainſi de ſuite.*

Cette propoſition peut être conçuë en cette autre maniére.

Dans une Progreſſion Géométrique, la raiſon de deux termes entre leſquels il y a deux intervalles, eſt doublée; s'il y a trois intervalles, triplée.

Cela eſt manifeſte. La progreſſion Géométrique eſt une continuation de la même raiſon ; partant puiſque la raiſon d'un terme à un autre, eſt composée des raiſons des termes interpoſez entre ces deux termes par la Propoſition precedente, & que la raiſon du premier terme au ſecond, & celle du ſecond au troiſiéme ſont égales, il faut, par la troiſiéme Définition, que la raiſon du premier terme au troiſiéme ſoit une raiſon doublée. Ainſi la raiſon du premier au quatriéme terme étant composée de trois raiſons égales, eſt une raiſon triplée.

Cette même démonſtration montre qu'entre deux termes d'une progreſſion, tels qu'ils ſoient, s'il y a deux intervalles, la raiſon de l'un à l'autre eſt doublée, étant faite de deux raiſons égales ; s'il y a trois intervalles, triplée, étant faite de trois raiſons égales, &c.

Troisie'me Proposition,

Troiſiéme Theorême.

Pluſieurs raiſons étant données, ſi on multiplie les antecedens par les antecedens, & les conſequens par les conſequens, les deux produits de ces deux multiplications ſeront l'un à l'autre en raiſon composée de ces raiſons. 14

Soient d'une part b & c, de l'autre part d & f. Si on multiplie l'antecedent b par l'antecedent d, ce qui fait bd, & le conſequent c par le conſequent f, ce qui fait cf ; je dis que la raiſon de ces deux produits bd & cf ſera composée de la raiſon de b à c, & de celle de d à f.

Pour démontrer cette verité, prenons une des deux racines du produit bd, ou b ou d, & une autre des deux qui ont produit cf, ou c, ou f, prenant la plus petite ou la plus grande, de ſorte que le produit des deux racines qu'on aura choiſies ſoit plus grand ou plus petit que l'un de ces produits *bd* & *cf*, & qu'il ſe rencontre ainſi interpoſé entre deux. Je prens *c* & *d*, & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, cela fait *cd*, que je ſuppoſe être entre *bd* & *cf*; ainſi voila trois grandeurs qui ſe ſuivent, *bd. cd. cf.* Selon ce qui a été démontré, *bd. cd* :: *b. c.* & *cd. cf* :: *d. f.* Liv. 3. n. 63.

Or ſ. n. 12. la raiſon de *bd* à *cf* eſt composée de celle de *bd* à *cd*, & de celle de *cd* à *cf*. Donc elle eſt auſſi composée de celle de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f* qui ſont les mêmes. Soit une troiſiéme raiſon de *g* à *h*: je multiplie *bd* par *g*, & *cf* par *h*; donc ſelon ce qu'on vient de dire, la raiſon de *bdg* à *cfh*, eſt composée de celles de *bd* à *cf* & de *g* à *h*. Ainſi la raiſon de *bdg* à *cfh* eſt composée de trois raiſons de *b* à *c*, de *d* à *f*, de *g* à *h*, *&c.* ce qu'il falloit démontrer.

Proposition Quatriéme.

Problême Premier.

15 *Deux ou pluſieurs raiſons étant données, trouver la raiſon composée, dont elles ſont les raiſons composantes.*

Soient les raiſons de *b* à *c*, & *d* à *f*, il faut trouver la raiſon composée, dont elles ſont les composantes. Pour cela on doit multiplier les antecedens l'un par l'autre, & les conſequens l'un par l'autre; la raiſon de ces produits qui ſeront *bd* & *cf*, eſt une raiſon composée de ces deux raiſons, par la Propoſition precedente. Si on avoit encore une troiſiéme raiſon comme celle de *g* à *h*, les deux premieres ayant composé celle qui eſt entre *bd* & *cf*, il ne faut plus que multiplier l'antecedent *g* par *bd*, ce qui fait *bdg*; & le conſequent *h* par *cf*, ce qui fait *cfh*. Par la Proposition précedente, la raison de *bdg* à *cfh* est composée de celle de *g* à *h*, & de celle de *bd* à *cf*.

S'il y avoit une quatriéme raison que l'on voulût joindre avec celle-là, il faudroit multiplier *bdg* par l'antecédent de cette raison, & *cfh*, par le consequent de cette quatriéme raison, la raison des produits seroit composée des quatre raisons données.

Ainsi on voit comment on peut trouver une raison composée de tant de raisons qu'on voudra, lors que ces raisons seront données.

Chapitre IV.

Des Regles de Trois & de Compagnie composées. 16

1°. De la Regle de Trois composée.

Quelquefois on cherche un quatriéme terme qui soit à une raison composée de plusieurs autres raisons, comme est un autre terme à une autre raison composée. Par exemple dans cette Question. C'est la coutume de payer quatre écus pour des marchandises du poids de 200 livres, qui ont été apportées de 100 lieuës. On demande, combien on doit de port pour des marchandises qui pesent 300 livres, lors qu'elles sont apportées de 400 lieuës?

Il est manifeste que l'on cherche un quatriéme terme qui se nomme x, qui ne soit pas seulement proportionnel à la distance du chemin, mais ensemble au poids des marchandises. Ainsi pour resoudre cette Question & celles qui seront semblables, il faut trouver la raison composée de celle du poids au poids, & de celle de la distance à la distance. Selon l'hypothese $\left.\begin{matrix}200\\100\end{matrix}\right\} 4 :: \left.\begin{matrix}300\\400\end{matrix}\right\} x$

c'est-à-dire qu'on cherche la valeur d'une certaine somme d'argent, *x*, qui soit au poids 300 livres, & à la distance 400 lieuës, comme 4 écus est au poids de 200 livres, & à la distance de 100 lieuës. Or la raison composée de ces deux raisons se trouve par la Proposition precedente, en multipliant les antecedens l'un par l'autre, & les consequens l'un par l'autre, sçavoir 200 par 100, & 300 par 400; ce qui donne d'un côté 20000, & de l'autre 120000. Après cela on voit évidemment que le terme inconnu *x* est à 120000, comme 4 écus est à 20000.

$$20000. \quad 4 \;::\; 120000. \quad x.$$

Ainsi pour achever la resolution de cette Question, puisque ces trois nombres 20000. 4. 120000 sont les trois premiers termes d'une proportion, je multiplie le troisiéme par le second, c'est-à-dire 120000 par 4, ce qui produit 480000, que je divise par le premier terme 20000, le quotient de cette division est 24, qui sera le quatriéme terme de cette proportion, & le nombre des écus qui doivent être payez pour le port de 300 livres apportées de 400 lieuës, ce qu'on cherchoit. La valeur de *x* est ainsi 24.

On peut chercher un troisiéme terme qui soit à une raison composée de 3, de 4 raisons, comme un terme donné est à une autre raison composée d'autant de raisons.

Par la Proposition precedente, vous avez appris à trouver les raisons composées, dont les raisons composantes sont données; ainsi il n'est pas nécessaire que j'enseigne plus au long comment ces Questions peuvent être résoluës.

Mais je ne veux pas oublier qu'on peut proposer des Questions dans lesquelles le terme inconnu soit à une raison composée, comme un terme donné eſt à une raiſon ſimple.

Par exemple, un Ouvrier ayant par un travail de deux jours gagné 20 écus ; On demande combien ce même Ouvrier doit gagner pour avoir travaillé 20 jours, & outre cela pour avoir fourni un cheval pendant tout ce temps-la ?

Il faut premierement conſiderer combien cet Ouvrier pour ſa ſeule peine doit recevoir, qui ſera 200 écus.

Après cela il faut ſçavoir ce qu'on donne à un Loüeur de chevaux par chaque jour ; ſi c'eſt l'ordinaire de lui payer 20 ſols, cet Ouvrier outre ces 200 écus, doit recevoir 20 livres.

De la Regle de Compagnie composée.

Dans la Regle de Compagnie ſimple, on cherche un terme qui ait une raiſon donnée à un terme donné : mais dans celle qui eſt compoſée, on cherche un terme qui ait une raiſon donneé à une raiſon compoſée. 17

Quatre Marchands ont gagné en commun 240 livres, le premier avoit donné 20 écus pour 4 mois, le ſecond 40 pour 5 mois, le troiſiéme 60 pour 6 mois, le quatriéme 80 écus pour 7 mois ; le gain d'un chacun doit être proportionné à la raiſon compoſée de celle de l'argent à l'argent, & de celle du temps au temps.

La premiere choſe qu'on doit donc faire, c'eſt de trouver les raiſons compoſées de ces raiſons, & pour cela il faut multiplier l'argent d'un chacun par le temps durant lequel on a prêté ſon argent ; ce qui produit ces quatre nombres 80, 200, 360, 560, chacun de ces nombres eſt à chaque autre, par exemple 80 à 200, en raiſon compoſée, de celle de 20 écus à 40 écus, & de celle de 4 mois à cinq mois, ainſi des autres.

Après cela j'ajoûte ces quatre nombres dans une somme qui sera 1200. Or comme cette somme 1200 est à 240, qui est le gain general, ainsi 80 sera au gain particulier du premier, 200 au gain du second, 360 au gain du troisiéme, 560 au gain du quatriéme. On trouvera tous ces gains particuliers par la Regle de Trois simple, multipliant le second terme de cette proportion par le troisiéme, & en divisant le produit par le premier, de laquelle division le quotient sera le quatriéme terme inconnu qu'on cherche.

Ces quatriémes termes ou ces quatre gains particuliers se trouvent être par cette operation 16 livres pour le gain du premier, 40 livres pour le gain du second, 72 livres pour le gain du troisiéme, & 112 livres pour le gain du quatriéme.

$$1200.\quad 240 :: \left\{\begin{array}{ll} 80. & 16 \\ 200. & 40 \\ 360. & 72 \\ 560. & 112. \end{array}\right.$$

Lors qu'on a bien compris une fois la théorie de l'Arithmetique, les exemples ne sont pas nécessaires : ainsi je ne suis pas obligé de dire plus au long ce qu'il faudroit faire dans une Regle de Compagnie, où la grandeur des gains ou des pertes dépend, non seulement d'une raison composée de deux raisons, mais de 3, de 4, &c. On voit bien qu'il faut premierement trouver ces raisons composées, & ensuite faire ce qui a été enseigné touchant la Regle de Compagnie simple dans le troisiéme Livre.

SECTION SECONDE.

Des Raisons qu'ont entr'elles les Puissances & les Grandeurs de plusieurs dimensions.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

Theorême Quatriéme.

DEux grandeurs de plusieurs dimensions qui ont 18
quelques-unes de leurs racines égales & les autres inégales, sont entr'elles comme les inégales.

Soient ces deux grandeurs bc & dc, qui ont une de leurs racines égales, sçavoir c; il faut prouver que $bc. dc :: b. d.$ ce qui est manifeste; car Liv. III. n. 63. les produits de deux grandeurs qui ont été multipliées par une troisiéme grandeur, sont entr'eux comme ces grandeurs. Or les grandeurs bc & dc sont produites par b & d multipliées par la même grandeur c, partant $bc. dc :: b. d.$ Soient ces deux grandeurs bbc & dbc, je dis que $bbc. dbc :: b. d.$ car ces grandeurs bbc & dbc sont produites de la multiplication des grandeurs b & d par une même grandeur; sçavoir bc. Ainsi par la même Proposition $bbc. dbc :: b. d$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Le produit de deux grandeurs est un moyen pro- 19
portionnel entre les quarrez de ces grandeurs.

Soient ces deux grandeurs b & d, dont le produit est bd. Le quarré de b est bb, celui de d est dd, je dis que $\div\!\!\div\; bb. bd. dd.$ ce que je prouve.

Par la derniere Proposition $\left.\begin{matrix} bb.\ bd \\ bd.\ dd \end{matrix}\right\} :: b.\ d.$

Donc $bb.\ bd :: bd.\ dd.$ Liv. III. n. 57. Donc $\div$ $bb.\ bd.\ dd.$ qui est ce qu'il falloit prouver.

Corollaire II.

20 *Le produit des racines quarrées de deux quarrez, est un moyen proportionnel entre ces quarrez.*

C'est-à dire que $\div$ $bb.\ bd.\ dd$ ce qui a été démontré; car la racine de bb est b, celle de dd est d; ainsi bd est le produit de ces racines. Ce Corollaire est le même que le précedent, énoncé d'une autre maniére.

Corollaire III.

21 *Deux cubes comme* xxx *&* yyy *étant donnez, si on multiplie le quarré de la racine du premier par la racine cube du second, ce qui fait* xxy, *& le quarré de la racine du second par la racine cube du premier, ce qui fait* yyx, *je dis que ces deux produits seront moyens proportionnels entre les cubes donnez.*

$\div$ xxx. xxy. yyx. yyy.

Par la derniere Proposition $\left\{\begin{matrix} xxx.\ xxy \\ xxy.\ yyx \\ yyx.\ yyy \end{matrix}\right\} :: x.\ y.$

Donc Liv. III. n. 57.

$$xxx.\ xxy :: xxy.\ yyx :: yyx.\ yyy.$$

Donc $\div$ $xxx.\ xxy.\ yyx.\ yyy.$

22 *Entre deux quarrez de quarrez comme* a^4 *&* b^4, *ces trois produits* a^3b, $aabb$. ab^3, *sont trois moyens proportionnels. Entre* a^5 *&* b^5, *ces quatre produits* a^4b, a^3bb, aab^3, ab^4, *sont quatre moyens proportionnels; ainsi de suite des autres puissances.*

Ce qui ſe prouve par la démonſtration qui a été employée dans les deux Corollaires précedens, & qui ſe peut appliquer à toutes ces puiſſances. Ainſi je ne propoſerai toutes ces veritez que par les expreſſions ſuivantes, qui font connoître combien des moyens proportionnels ſe trouvent entre deux puiſſances, ſelon que les racines de ces puiſſances ſont multipliées les unes par les autres, de la maniére qu'on le peut remarquer dans la Table ſuivante.

Avis ſur cette Table.

Cette Table repreſente la grandeur complexe 23
$a+b$ élevée à differens degrez juſqu'au dixiéme, ſon premier degré eſt $a+b$, ſon ſecond $aa+2ab+bb$, ou $a^2+2ab+b^2$; mais on ne voit point dans cette Table les *coefficiens*, c'eſt ainſi qu'on appelle par exemple ce nombre 2 mis devant le plan ab; car comme on a vû entre les quarrez a^2 & b^2, il y a un double plan qui a pour racine celle de ces deux quarrez. Ainſi ſi on élevoit $a+b$ au troiſiéme degré entre a^3 & b^3, il y auroit le triple de deux ſolides, dans leſquels ce nombre 3 eſt *coefficient* ; ce que nous dirons en ſon lieu plus exactement. Or il eſt évident qu'après avoir ôté ces coefficiens ; ce qui reſte ſont des grandeurs qui ſont en progreſſion comme on le vient de voir dans les Corollaires précedens $\div\div a^2.\ ab.\ b^2$. ainſi des autres degrez, ce qu'il ſera facile de prouver d'un chacun ſelon l'énoncé de ce quatriéme Corollaire.

Remarquez auſſi que les expoſans des puiſſances d'une même grandeur ſont une progreſſion Arithmetique. $a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.$ &c. Ainſi pour trouver l'expoſant du produit de deux puiſſances, par exemple de a^2 multiplié par a^3, il faut ajouter dans une somme les exposans 2 & 3; ce qui fait 5, exposant du produit de ces deux puissances. Comme il est évident $aa = a^2$. $aaa = a^3$. $aaaa = a^4$. $aaaaa = a^5$. comme aussi le quarré de a^2, c'est a^2 multiplié par a^2 pour avoir l'exposant de ce quarré; il faut ajouter 2 à 2, ce qui fera a^4. Ainsi l'exposant du quarré de a^3, est a^6; celui du quarré de a^4, est a^8.

10	∺ a^{10}	a^9b	a^8b^2	a^7b^3	a^6b^4	a^5b^5	a^4b^6	a^3b^7	aab^8	ab^9	b^{10}
9	∺ a^9	a^8b	a^7bb	a^6b^3	a^5b^4	a^4b^5	a^3b^6	aab^7	ab^8	b^9	
8	∺ a^8	a^7b	a^6bb	a^5b^3	a^4b^4	a^3b^5	aab^6	ab^7	b^8		
7	∺ a^7	a^6b	a^5bb	a^4b^3	a^3b^4	aab^5	ab^6	b^7			
6	∺ a^6	a^5b	a^4bb	a^3b^3	aab^4	ab^5	b^6				
5	∺ a^5	a^4b	a^3bb	aab^3	ab^4	b^5					
4	∺ a^4	a^3b	$aabb$	ab^3	b^4						
3	∺ a^3	aab	abb	b^3							
2	∺ a^2	ab	b^2								
1	$a+b$	·									

Proposition Sixie'me.

Theorême Cinquiéme.

24 *Les plans sont les uns aux autres en raison composée de leurs racines.*

Soient deux plans donnez *bd* & *cf*, je dis que leur raison est composée de celle de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*. Le premier plan *bd* est produit par la multiplication des antecedens *b* & *d* de ces deux raisons, & *cf* le second plan est fait par la multiplication des consequens *c* & *f*; Donc par la Proposition 3e *bd* est à *cf* en raison composée de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*.

Corollaire.

25 *Les quarrez sont entr'eux en raison doublée de celles de leurs racines.*

bb & *dd* sont deux quarrez qui sont l'un à l'autre en raison composée de celle de *b* à *d*, & de celle ce *b* à *d*. Or ces deux raisons sont égales: Donc par la 3e Définition, la raison composée de *bb* à *dd* est doublée.

Proposition Septie'me.

Theorême Sixiéme.

26 *La raison d'un solide à un autre solide est composée des raisons que leurs racines ont entr'elles.*

bdc & *fgh* sont deux solides. Il faut prouver que la raison du premier au second est composée de ces trois raisons de *b* à *f*, de *d* à *g*, de *c* à *h*. Le premier est fait de la multiplication des antecedens de ces trois raisons qui sont *b*, *d*, *c*, & le second est fait des trois consequens *f*, *g*, *h* multipliez de la même maniere: Donc par la 3e Proposition la raison de *bdc* à *fgh*, est composée de ces trois raisons.

Corollaire.

Les cubes ſont entr'eux en raiſon triplée, de celles de leurs racines. 27

bbb, *ccc*, ſont deux cubes. Par la preſente Propoſition la raiſon du premier au ſecond eſt compoſée des trois raiſons de *b* à *c*, de *b* à *c*, de *b* à *c*. Or ces trois raiſons ſont égales: Donc par la 4e Définition la raiſon qu'elles compoſent eſt une raiſon triplée.

Proposition Huitie'me.
Theorême Septiéme.

Les quarrez de quarrez ſont en raiſon compoſée de leurs racines, & cette raiſon eſt quatruplée; ainſi des autres puiſſances. 28

Cette Propoſition ſe prouve comme les deux précedentes. Les quatriémes Puiſſances ont leurs quatre racines égales; ainſi la raiſon qu'elles ont entr'elles eſt quatruplée. Il en eſt de même des autres puiſſances. Il eſt évident que les cinquiémes puiſſances ſont en raiſon quintuplée de celle de leurs racines, les ſixiémes en raiſon ſextuplée; ainſi de ſuite.

Proposition Neuvie'me.
Theorême Huitiéme.

Lors que des grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrez & leurs cubes, & toutes leurs puiſſances ſont proportionnelles; de même, lors que les puiſſances ſont proportionnelles, les racines le ſont auſſi. 29

$$\text{Si } a.\, b :: c.\, d, \text{ je dis que } \begin{cases} a^5.\, b^5 :: c^5.\, d^5. \\ a^4.\, b^4 :: c^4.\, d^4. \\ a^3.\, b^3 :: c^3.\, d^3. \\ a^2.\, b^2 :: c^2.\, d^2. \end{cases}$$

La raiſon de *aa* avec *bb*, & celle de *cc* avec *dd* eſt doublée d'une même raiſon, ſçavoir de celle de a avec b, & de c avec d. La raiſon de aaa avec bbb, & celle de ccc avec ddd, ſont triplées de cette même raiſon de a avec b, & de celle de c avec d; ainſi les raiſons compoſantes étant égales par l'Axiome ſecond, les compoſées ſeront égales.

La converſe de cette propoſition eſt manifeſte, qui eſt que lors que des quarrez ou des cubes ſont proportionnels, leurs racines ſont proportionnelles.

Corollaire.

30 *Les quarrez, les cubes, & les autres puiſſances des termes d'une progreſſion, ſont en progreſſion.*

Puiſque les quarrez & les cubes de grandeurs proportionnelles ſont proportionnels, ſi la proportion des grandeurs eſt continuë, il eſt évident que celle de leurs quarrez & de leurs cubes doit être auſſi continuë.

$$\text{Si} \div\!\div a.\ b.\ c.\ \text{il faut que} \begin{cases} \div\!\div aa.\ bb.\ cc. \\ \div\!\div aaa.\ bbb.\ ccc. \\ \div\!\div a^4.\ b^4.\ c^4. \\ \div\!\div a^5.\ b^5.\ c^5. \end{cases}$$

Proposition Dixiéme.
Theorême Neuviéme.

31 *Toutes les puiſſances ou degrez d'une même grandeur rangez de ſuite, ſont en progreſſion.*

Soit a élevé à ſes puiſſances qui ſoient ici rangées de ſuite, $a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.\ a^8.$ &c. c'eſt une même raiſon qui regne; car diviſant la puiſſance qui ſuit par la precedente, c'eſt toujours le même quotient qui eſt ici a. Par conſequent ſelon la Définition de la progreſſion, cet ordre des puiſſances rangées ſelon leur degré fait une progreſſion.

PROPOSITION ONZIE'ME.
Theorême Dixiéme.

En toute progression Géométrique les quarrez de deux termes qui se suivent immediatement, sont entr'eux comme le premier terme à celui qui suit le second. 32

Soit ∺ *b. c. d. f.* &c. je dis que *bb. cc* :: *b. d.* Car §. n. 25. la raison de *bb* à *cc* est doublée de la raison de *b* à *c.* qui est la même que celle de *c* à *d.* Or §. n. 13. la raison de *b* à *d* est composée de ces deux mêmes raisons : Donc par le second Axiome §. n. 9. il y a même raison entre *bb* & *cc.* qu'entre *b* & *d* ; donc *bb. cc* :: *b. d.*

PROPOSITION DOUZIE'ME.
Theorême Onziéme.

Dans une progression Géométrique, le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier terme est à celui qui suit le troisiéme. 33

Soit ∺ *b. c. d. f.* &c. je dis que *bbb. ccc* :: *b. f.* la raison de *bbb* à *ccc* est triplée de celle de *b* à *c*, qui est la même que celle de *c* à *d*, de *d* à *f.* §. n. 27. Or la raison de *b* à *f* est composée de ces trois mêmes raisons §. n. 13. Donc celle de *bbb* à *ccc* est égale à celle de *b* à *f.*

Ce Theorême donne le moyen de doubler un cube ; car puisque bbb. ccc :: b. f. *Pour trouver un cube double de* bbb, *il faut prendre le double de* b, *& entre* b *& ce double que je nomme* f, *trouver* c *&* d *deux moyens proportionnels. On va voir comment ces moyens se trouvent. Si* f *est le double de* b, *le cube de* c *sera le double du cube de* b.

PROPOSITION TREIZIE'ME.

Theorême Douziéme.

34 *Dans une progression Géométrique, le quarré de quarré du premier terme, est à la même puissance du second comme le premier terme est à celui qui suit le quatriéme; ainsi des autres puissances.*

Cette Proposition se prouve comme les deux précedentes. Il en est de même des autres puissances. La cinquiéme puissance du premier terme est à la cinquiéme puissance du second, comme le premier terme est à celui qui suit le cinquiéme; ainsi de suite.

PROPOSITION QUATORZIE'ME.

Problême Second.

35 *Trouver un moyen proportionnel entre deux grandeurs données.*

Il faut multiplier les deux grandeurs données l'une par l'autre, la racine quarrée de ce produit sera un moyen proportionnel entre ces deux grandeurs. Liv. III. n. 86. Ainsi les deux grandeurs données étant b & c, la racine quarrée de bc sera un moyen proportionnel entre b & c. Si l'on cherche un moyen entre 2 & 18, je multiplie donc 2 par 18, ce qui fait 36, la racine quarrée de ce produit qui est *6*, sera un moyen proportionnel entre 2 & 18.

Autrement.

Si les deux nombres donnez sont quarrez comme le sont 4 & 16, il faut prendre la racine de l'un & de l'autre; celle de 4 est 2, celle de 16 est 4, le produit de 2 par 4 qui est 8, sera moyen proportionnel entre 4 & 16, par le premier ou second Corollaire de la 5[e] Proposition s. n. 19.

PROPOSITION

Proposition Quinzie'me.

Problême Troisiéme.

Trouver deux moyens proportionnels entre deux grandeurs données. 36

Cette Proposition est quelquefois impossible aussi-bien que la précédente, quand il s'agit de nombres. Nous verrons en quel cas, lors que nous parlerons des incommensurables.

Soient ces deux nombres 2 & 16, entre lesquels il faut trouver deux moyens proportionnels. J'appelle ces moyens m & n; ainsi $\div\div$ 2. m. n. 16. Le cube de 2 qui est 8, est à m^3 comme 2 est à 16. s̃. n. 31. Ainsi

$$8 . m^3 :: 2 . 16 . \text{ ou } 2 . 16 :: 8 . m^3.$$

Voilà donc une proportion de quatre termes dont les trois premiers sont connus. Je trouve la valeur du cube m^3, multipliant 16 par 8, ce qui fait 128, que je divise par 2, premier terme de cette proportion, le quotient est 64, qui sera la valeur de m^3. La racine cube de 64 est 4; donc m, premier moyen proportionnel vaut 4. Je cherche ensuite par la Proposition précédente un moyen proportionnel entre 4 & 16, qui est 8. Donc n vaut 8; ainsi j'ai trouvé entre 2 & 16 deux moyens proportionnels; ce qui étoit proposé.

Autrement.

Si les nombres donnez sont des cubes comme 8 & 64, je prens leurs racines cubiques qui sont 2 & 4, je multiplie le quarré de la premiere racine 2 par la seconde, c'est-à-dire 4 par 4, ce qui produit 16, & le quarré de la seconde racine 4 par la premiere racine, c'est-à dire 16 par 2, ce qui fait 32. Or $\div\div$ 8. 16. 32. 64. s̃. n. 21.

Proposition Seizie'me.

Probléme Quatriéme.

37 *Entre deux grandeurs données, trouver tant de moyens proportionnels qu'on voudra.*

Soient ces deux grandeurs b & l, on propose de trouver cinq moyens proportionnels, sçavoir $c. d. f. g. h.$ Comme b est à l, la sixiéme puissance de b est à la sixiéme puissance de c, premier moyen proportionnel. s̃. n. 34. Donc

$$b.\ l\ ::\ b^6.\ c^6.$$

Ainsi on trouvera la valeur de c^6, qui est le quatriéme terme de cette proportion, dont les trois premiers termes sont connus. Ce premier moyen étant connu, on trouvera le second; car $c.\ l :: c^5.\ d^5.$ s̃. n. 34. La valeur de d étant connuë, on trouvera celle de f; car $d.\ l\ ::\ d^4.\ f^4.$ ainsi de suite.

Autrement.

Il faut extraire les racines des puissances des grandeurs données, entre lesquelles on veut trouver plusieurs moyens proportionnels, ensuite multiplier ces racines, comme il a été dit s̃. n. 22.

L'on ne peut pas toujours exprimer par nombres la valeur de ces moyens proportionnels. Nous verrons dans le sixiéme Livre quand est-ce que cela se peut & ne se peut pas faire.

Proposition Dix-septie'me.

Theorême Treiziéme.

38 *Si deux grandeurs chacune de deux dimensions sont égales, les deux racines de la premiere seront reciproques à celles de la seconde*, c'est-à-dire, *qu'elles seront ou les extrêmes, ou les moyens d'une proportion de quatre termes.*

Si bf & cd sont deux grandeurs égales, leurs racines $b.f.$ $c.$ $d.$ sont réciproques, c'est à-dire, que b est à c comme d est à f, ce qui est évident; car on a démontré Livre III. n. 69. que lors que quatre grandeurs sont tellement rangées que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, ces grandeurs sont proportionnelles.

Proposition Dix-huitiéme.
Theorême Quatorziéme.

Dans une proportion de quatre termes, le produit des moyens ou des extrêmes est moyen proportionnel entre le produit des antécédens, & celui des consequens. 39

Si $b.\ c :: d.\ f.$ il faut que, $bd.\ cd :: b.\ c.$ & $cd.\ cf :: d.\ f.$ s. n. 18: Donc $bd.\ cd :: cd.\ cf$, ou $\div bd.\ cd.\ cf$: donc cd produit des moyens, est moyen proportionnel entre bd produit des antécédens, & cf produit des consequens. On peut démontrer de la méme maniere que bf est moyen proportionnel entre bd & cf.

Proposition Dix-neuviéme.
Theorême Quinziéme.

Dans une proportion de quatre termes, les quarrez des deux termes de l'une ou de l'autre raison sont entr'eux, comme le produit des antécédens est au produit des consequens. 40

Je suppose que $b.\ c :: d.\ f.$ La proposition est que $bb.\ cc :: bd.\ cf$; ce qui se démontre aisement. Puisque $b.\ c :: d.\ f$: donc $b.\ d :: c.\ f.$ Donc par la cinquiéme proposition ci-dessus $bb,\ bd :: b.\ d$ & $cc,\ cf :: c.\ f.$ Donc puisque la raison de c à f est la même que celle de b à d; ainsi $bb.\ bd :: cc.\ cf$, & partant $bb.\ cc :: bd.\ cf$, qui est ce qu'il falloit prouver. On peut faire une infinité de propositions semblables, qu'il sera également facile de resoudre.

PROPOSITION VINGTIE'ME.

Problême Cinquiéme.

41 *Trouver la somme des quarrez de chaque terme d'une progression.*

Soit cette progression $\div\!\!\div$ *a. b. c. d. f. g. h*; je suppose que *q* est le quotient du second terme divisé par le premier; ainsi selon ce qui a été enseigné, je réduis cette progression à celle-ci.

$$\div\!\!\div\ a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.$$

Voici les quarrez de cette progression qui font une progression, $\tilde{s}$. n. 30.

$$\div\!\!\div\ aa.\ aaq^2.\ aaq^4.\ aaq^6.\ aaq^8.\ aaq^{10}.$$

Cette seule expression découvre le moyen de resoudre la question. Car il ne s'agit que de chercher la somme de cette progression dont on connoît le premier, le second & le dernier terme, & de combien de termes elle est composée: cette somme se trouve comme il a été enseigné par la 24e Proposition du Livre III.

PROPOSITION VINGT-UNIE'ME.

Theorême Seiziéme.

42 *Dans une progression* $\div\!\!\div$ c. d. f. g, *l'un de ces termes* c *sera à* f *comme la somme des quarrez de* c *& de* d *est la somme des quarrez de* d *& de* f.

C'est-à-dire que $c.\ f :: cc + dd.\ dd + ff$; ce qu'il est facile de démontrer. Car $\tilde{s}$. n. 32. $cc.\ dd :: c.\ f$, & $dd.\ ff :: d.\ g$. Or la raison de *d* à *g* est la même que celle de *c* à *f*: donc ajoutant à *cc* & à *dd* des grandeurs qui ayent même raison, $cc + dd.\ dd + ff :: cc.\ dd$. Liv. III. n. 58.

Partant $cc + dd.\ dd + ff :: c.\ f$: Ce qu'il falloit démontrer, & ce qui donne jour pour démontrer plusieurs Theorêmes semblables, comme sont ceux-ci qui suivent.

Proposition Vingt-deuxiéme.

Theorême Dix-septiéme.

Comme c *est à* g, *la somme des cubes de* c, *de* d, *de* f *est à la somme des cubes de* d, *de* f, *de* g. 43

Proposition Vingt-troisiéme.

Theorême Dix-huitiéme.

Comme c *est à* f, *le quarré de* c + d *est au quarré de* d + f. 44

Comme c *est à* g, *le cube de* c + d + f *est à celui de* d + f + g.

Proposition Vingt-quatriéme.

Theorême Dix-neuviéme.

Comme c *est à* f, *ainsi la difference des quarrez de* c *& de* d *est à la difference des quarrez de* d *& de* f. 45

La démonstration de ce dernier Theorême est encore facile. Puisque $cc.\ dd :: c.\ f.$ & $dd.\ ff :: c.\ f$: donc Livre III. n. 60, ôtant de dd & de ff, les grandeurs cc & dd qui ont même raison, ils demeureront en même raisqn, $dd - cc.\ ff - dd :: c.\ f.$ Or $dd - cc$ est la difference de cc & de dd, comme $ff - dd$ est la difference de dd, & de ff.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE CINQUIE'ME.

Des Fractions & des Operations Arithmétiques ſur les Fractions & ſur les Raiſons.

SECTION PREMIERE.

Préparations pour faire les Opérations de l'Arithmetique ſur les Fractions & ſur les Raiſons.

CHAPITRE PREMIER.

Les Fractions ſont des manieres d'exprimer une raiſon ; ainſi les Fractions ſont des raiſons.

1 LEs Fractions, ou nombres rompus, ne ſont rien autre choſe que des manieres d'exprimer la raiſon qu'ont deux ou pluſieurs nombres

entr'eux ; ce sont ainsi des raisons. C'est pourquoi je m'étonne qu'un très-habile homme ait dit, qu'autrefois on n'avoit pas pris garde qu'on pouvoit faire toutes les Operations Arithmetiques sur les raisons, puisque de tout temps on a ajoûté, on a soustrait, on a multiplié & divisé des fractions qui ne sont que des raisons.

Les expressions en quoi consistent les fractions sont fort naturelles, c'est-à-dire qu'elles sont propres pour marquer ce qu'on veut qu'elles expriment. On appelle fraction par exemple cette expression $\frac{5}{6}$, qui marque qu'une grandeur entiere a été rompuë en 6 parties, ou qu'elle a 6 parties, dont on ne prend que cinq. Cette expression, dis-je, $\frac{5}{6}$ est propre pour marquer une raison ; car *raison*, comme on l'a dit souvent, c'est une maniere de contenir ou d'être contenu ; ce qu'on connoît par la division, qui fait voir combien de fois une grandeur est dans une autre : C'est pourquoi le quotient de la division de deux grandeurs est l'exposant de leur raison. Or on a vû que le signe general de la division étoit une petite ligne sur laquelle on mettoit la grandeur à diviser, & dessous le diviseur ; comme pour diviser b par c on écrit $\frac{b}{c}$. Le quotient de b divisé par c étant donc $\frac{b}{c}$, cette expression est propre pour marquer la raison de b à c. Par la même raison $\frac{5}{6}$ étant une marque qu'il faut concevoir que 5 est divisé par 6, cette expression marque la raison de 5 à 6.

Nous avons dit dès le premier Livre, que lors que le diviſeur étoit plus grand que le nombre à diviſer, il le falloit mettre ſous ce nombre. Par exemple que pour diviſer 5 par 6, on devoit écrire $\frac{5}{6}$. On voit à preſent la raiſon de cette regle. On appelle cette expreſſion une fraction; parceque, comme on le va dire, on ſuppoſe que chaque unité du reſte du nombre à diviſer eſt rompuë en autant de parties qu'il y a d'unitez dans le diviſeur. Par exemple, ſi 5 ſont cinq écus qui reſtent à diviſer, ou à partager à ſix perſonnes; comme chacune ne peut pas en avoir un écu, puiſqu'il n'y en a que 5, on conçoit que chaque écu eſt diviſé en 6 parties, dont chacune vaut 10 ſols; ainſi cette expreſſion $\frac{5}{6}$ dit que cinq écus étant diviſez à ſix perſonnes, chacune a cinq parties telles que l'écu en vaut ſix. Vous voyez donc pourquoi on appelle ces expreſſions *des Fractions*, & que $\frac{5}{6}$ eſt un nombre rompu; à cauſe que 6 eſt un nombre qui marque l'unité rompuë en ſix parties. C'eſt ce que nous allons expliquer avec ſoin, & fort aiſément, car tous les principes ont été établis, puiſque ces fractions ne ſont que des raiſons.

CHAPITRE II.

Définitions & explications des termes. Axiomes ou propositions évidentes touchant les Fractions.

PREMIERE DE'FINITION.

FRaction est une expression qui exprime le rapport de la partie d'un nombre entier, qui est rompu & divisé en tant de parties qu'on a voulu, avec ce nombre entier. 2

Soit *a* une grandeur entiere ; par exemple une toise, ayant rompu ce nombre entier *a* en 12 parties, on met comme on l'a dit, ce nombre 12, qui marque en combien de parties la grandeur *a* ou le nombre 1 est rompu, sous une petite ligne ou barre en cette maniere, $\overline{12}$. Après pour exprimer le nombre des parties de *a*, soit la sixiéme, soit la quatriéme, ou quelqu'autre partie que ce soit, on met dessus cette ligne ou barre, le nombre des parties qu'on veut exprimer, en cette maniere $\frac{6}{12}$ ou $\frac{4}{12}$. Cette fraction $\frac{6}{12}$ vaut 6 parties de *a*, telles que *a* en vaut 12. Cette fraction $\frac{4}{12}$ vaut 4 parties telles que toute la grandenr *a* en vaut 12.

SECONDE DE'FINITION.

Dans une fraction les nombres qui sont sous la ligne s'appellent Dénominateurs de la fraction, parcequ'ils font connoître en combien de parties 3 *l'entier est rompu ou partagé ; ainsi ces nombres donnent le nom à la fraction.*

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 4 qui est sous la ligne, est le dénominateur de cette fraction, parceque faisant connoître que l'entier dont $\frac{3}{4}$ est la fraction, est rompu en 4 parties, il donne le nom à la fraction ; car si $\frac{3}{4}$ est la fraction d'un écu, on dira que cette fraction vaut trois quarts d'écu.

TROISIE'ME DE'FINITION.

4 *Dans une fraction le nombre qui est sur la ligne s'appelle le numerateur.*

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 3 qui est sur la ligne est appellé le numerateur de cette fraction, parcequ'il nombre les parties que vaut cette fraction de l'entier qui est rompu en 4 parties, sçavoir $\frac{3}{4}$ de la grandeur *a* : c'est-à-dire les trois quarts de cette grandeur *a*.

QUATRIE'ME DE'FINITION.

5 *Fractions de fractions sont des nombres qui expriment les parties de la partie d'un entier.*

Soit *a* un écu, soit *b* moitié de cet entier *a*, le nombre qui exprimera quelques parties de *b*, sera un nombre doublement rompu. Ces fractions de fractions s'expriment en cette maniere. La premiere fraction qui vaut la moitié de *a*, se doit exprimer ainsi $\frac{1}{2}$; & puisque cette moitié eſt rompuë encore en deux parties, il faut rompre le premier numerateur 1 en deux parties, ce qui fera $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire une moitié d'une moitié. Ainſi comme une ſimple fraction exprime la raiſon d'une partie à ſon tout, une fraction de fraction exprime la raiſon d'une partie de partie à la grandeur entiere.

On pourroit rompre une troiſiéme fois cette ſeconde fraction, diſant une moitié, d'une moitié, d'une moitié, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, & pour lors ce ſeroit une fraction de fraction de fraction; ainſi à l'infini.

1. Axiome ou Demande.

Le dénominateur d'une fraction vaut toujours un entier. 6

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le dénominateur 4 vaut un entier, puiſqu'il montre en combien de parties l'entier eſt diviſé, & qu'il exprime toutes ſes parties, leſquelles priſes enſemble égalent le tout ou l'entier.

2. Axiome ou Demande.

Lors que le numerateur eſt égal à ſon dénominateur, il vaut un entier; s'il eſt plus petit il vaut moins qu'un entier; s'il eſt plus grand il vaut davantage. 7

Dans cette fraction $\frac{4}{4}$, le numerateur 4 vaut un entier, puiſqu'il comprend toutes les parties du dénominateur.

Dans cette fraction $\frac{2}{4}$, le numerateur 2 vaut moins que ſon dénominateur 4, parcequ'il ne vaut que 2 parties telles que 4 en vaut 4.

Dans cette fraction $\frac{6}{4}$, le numerateur 6 vaut plus que ſon dénominateur, parcequ'il vaut 6 parties telles que 4 n'en vaut que 4.

3. Axiome ou Demande.

8 *Les fractions ne ſont que l'expreſſion de la raiſon qui eſt entre un tout & ſa partie.*

Par exemple $\frac{3}{4}$ d'un écu. Cette fraction exprime la valeur d'un nombre qui a la même raiſon à un écu entier, que celle qui eſt entre ces deux nombres 3 & 4.

4. Axiome ou Demande.

9 *Quoiqu'on ajoute ou qu'on retranche du numerateur & du dénominateur d'une fraction, la valeur en ſera la même, ſi la même raiſon demeure entre le numerateur & le dénominateur devant & après ce changement.*

Cette propoſition eſt une ſuite de la précédente, puiſqu'une fraction eſt une raiſon, la valeur ſera la même ſi c'eſt une même raiſon; Ainſi $\frac{2}{4}$ & $\frac{6}{12}$ & $\frac{5}{10}$ ne valent que la moitié de l'entier mis en fraction, pendant que le numerateur ſera la moitié du dénominateur, la fraction vaudra toujours la moitié de l'entier. Six parties de douze parties ne diſent pas autre choſe que deux parties de quatre parties, cinq parties de dix parties. Toutes ces expreſſions ſignifient une même choſe, ſçavoir la moitié d'un même tout, dont il eſt queſtion.

Chapitre III.

Préparations necessaires pour faire les operations de l'Arithmetique sur les Fractions & Raisons.

Proposition Premiere.
Problême Premier.

REduire un tout en ses parties. 10

Il faut multiplier le tout par le nombre des parties dans lesquelles on le veut réduire.

Soient 10 écus que l'on veut réduire en sols. Chaque écu est composé de 60 sols; je multiplie donc 10 par 60, le produit de cette multiplication qui est 600, sera le nombre de sols que valent 10 écus; ce qui est clair. Car si un écu vaut 60 sols, il faut que 10 écus valent 10 fois 60 sols.

Corollaire 1.

Par le moyen de cette Proposition on donne le 11
même nom à deux grandeurs differentes, ce qui fait connoître plus clairement leur rapport.

Car par exemple, comparant un écu avec 40 sols, si l'on réduit un écu en ses parties qui sont 60 sols, on apperçoit plus clairement la raison de 40 sols à 60 sols, que d'un écu à 40 sols.

Corollaire 2.

On peut évaluer les monnoyes & les mesures. 12

Evaluer une grande monnoye ou une grande mesure, c'est exprimer la valeur d'une monnoye ou d'une mesure par une autre espéce de monnoye plus connuë, ou une autre espece de mesure plus connuë.

On veut ſçavoir combien 100 écus d'or valent de ſols; il faut multiplier 100 écus par 114 ſols, qui étoient autrefois les parties d'un écu d'or, le produit 11400 ſera la valeur de 100 écus d'or, qui valent ainſi 11400 ſols.

On veut ſçavoir combien 100 toiſes valent de pieds. Les parties connuës d'une toiſe ſont 6 pieds: je multiplie 100 par 6, le produit qui eſt 600 pieds ſera la valeur de 100 toiſes.

COROLLAIRE 3.

13 *On peut réduire un entier à une fraction dont le nom eſt donné.*

Le dénominateur de la fraction eſt 6. On veut réduire ce nombre entier 4 à une fraction dont le dénominateur ſoit 6, il faut multiplier 4 par 6, ce qui ſera 24, & écrire 6 ſous 24. Cette fraction $\frac{24}{6}$ vaudra 4 entiers, car le numerateur 24 contient 4 fois le dénominateur 6 qui vaut un entier.

Pour réduire la grandeur a dans une fraction dont le dénominateur ſoit d, ſuivant ce que nous venons de dire, je multiplie a par d, ce qui fait ad, que je place au-deſſus d'une ligne ſous laquelle je place d en cette maniere $\frac{ad}{d}$. De même pour réduire cette grandeur a dans une fraction dont $a+b$ ſoit le dénominateur, je multiplie a par $a+b$, le produit eſt $aa+ab$, ſous lequel je place $a+b$, de cette ſorte $\frac{aa+ab}{a+b}$.

COROLLAIRE 4.

14 *Pour réduire un entier en fraction, il ne faut*

qu'écrire le nombre donné au dessus d'une ligne, & l'unité au dessous.

Par exemple, pour exprimer en fraction un écu, j'écrirai $\frac{1}{1}$ d'écu ; car le numerateur étant égal au dénominateur, par le second Axiome $\frac{1}{1}$ vaut un écu. Ainsi pour réduire la grandeur x en fraction, j'écris $\frac{x}{1}$; car divisant x par 1, le quotient est x : partant $\frac{x}{1}$ est égal à x, c'est-à-dire à la grandeur entiere.

Remarquez que pour marquer la partie d'une grandeur exprimée par des lettres qu'on ne peut pas diviser comme des chifres, l'on met à côté une fraction avec des chifres qui expriment la valeur de la partie qu'on veut signifier ; ainsi pour exprimer la quatriéme partie de aa, *j'écris* $\frac{1}{4}$ aa.

Seconde Proposition.

Problême Second.

Rappeller les parties à leur tout. 15

Il faut diviser le nombre des parties données par le nombre qui marque combien leur entier les contient de fois. Par exemple, pour réduire 600 sols en écus ; puisque 60 sols font un écu, je divise 600 par 60, le quotient 10 montre que 600 sols valent 10 écus, puisque ce nombre de sols vaut 10 fois 60 sols.

Corollaire I.

Par le moyen de cette Proposition on donne un 16 *même nom à deux grandeurs differentes ; ce qui fait que l'on découvre plus clairement leur rapport.*

Soient données ces deux grandeurs 600 deniers & 100 ſols, je donne le même nom à ces deux ſommes, en réduiſant les deniers en ſols ; ce que je fais en diviſant 600 par 12, qui eſt le nombre des deniers qui font un ſol : le quotient de cette diviſion qui eſt 50, fait connoître que 600 deniers valent 50 ſols. Le rapport de 50 ſols à 100 ſols eſt plus ſenſible que celui de 600 deniers à 100 ſols.

Corollaire 2.

17 *L'on peut réduire les petites monnoyes à de plus grandes, & les évaluer, c'eſt-à-dire voir ce qu'elles valent au regard de celles qui ſont plus grandes.*

Je veux ſçavoir combien 600 deniers valent de ſols, 12 deniers font un ſol, je diviſe 600 par 12, le quotient de cette diviſion, 50, ſera 50 ſols, valeur de 600 deniers.

Je veux ſçavoir combien 120 pieds font de toiſes, 6 pieds font une toiſe. Je diviſe 120 par 6, le quotient qui eſt 20, marque que 120 pieds valent 20 toiſes.

Corollaire 3.

18 *L'on peut réduire une fraction en nombres entiers, & connoître combien elle vaut d'entiers.*

Je ſuppoſe que cette fraction vaille tout au moins un entier. Par exemple, ſoit cette fraction $\frac{24}{4}$. Je diviſe 24 numerateur par le dénominateur 4 ; le quotient de cette diviſion 6 fera connoître que $\frac{24}{4}$ vaut 6 entiers ; car 24 doit valoir autant d'entiers que 4 eſt contenu dans 24, ſelon le second Axiome cy-dessus ; ainsi étant contenu 6 fois dans 24, cette fraction vaut 6 entiers.

Troisie'me Proposition.
Problême Troisiéme.

Réduire à un même dénominateur ou à un même consequent plusieurs fractions ou raisons. 19

C'est la même chose que de réduire deux raisons à des expressions, où elles ayent un même consequent ; ce qu'on a enseigné ci-dessus page 218.

Soient ces deux fractions ou raisons $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, on veut les réduire à un même dénominateur, c'est-à-dire faire qu'elles ayent un même consequent, & par consequent un même nom, sans toutefois rien changer de leur valeur.

$$\frac{2}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{8\ \ 15}{20}$$

Il faut multiplier le dénominateur de la premiere par le dénominateur de la seconde, le produit sera le commun dénominateur que j'écris sous une ligne. Après il faut multiplier le numerateur de la premiere par le dénominateur de la seconde. Dans cet exemple 2 par 4, le produit 8 sera le numerateur de la premiere. Enfin le numerateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c'est-à-dire 3 par 5, dont le produit 15 sera le numerateur de la seconde ; car le numerateur 2 & le dénominateur 5 de cette fraction $\frac{2}{5}$, ont été multipliez par le même nombre, sçavoir 4, le numerateur & le dénominateur de la fraction $\frac{3}{4}$, ont aussi été multipliez par le même nombre 5. Ainsi Liv. III. n. 63. 8 est à 20 comme 2 à 5, & 15 est à 20 comme 3 à 4; Donc par l'Axiome 4^e ci-dessus ce sont les mêmes fractions $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ & $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.

S'il falloit réduire plusieurs fractions à un même dénominateur, il faudroit réduire premierement les deux premieres à un même dénominateur, après les réduire toutes trois en cette maniere.

Soit donnée $\frac{5}{6}$ une troisiéme fraction; les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, ayant déja été réduites à celle-ci $\frac{8 \quad 15}{20}$; je multiplie 20 par 6, ce qui fait 120, qui sera le dénominateur commun des trois fractions; après je multiplie 8 par 6, ce qui fera 48, qui sera le numerateur de la premiere fraction, & 15 par 6, ce qui fait 90, qui sera le numerateur de la seconde fraction; enfin je multiplie 5, numerateur de la troisiéme fraction, par 20, dénominateur des deux premieres fractions, cela fait 100 numerateur de cette troisiéme; ainsi ces trois fractions sont réduites à celles-ci $\frac{48 \quad 90 \quad 100}{120}$, qui ont un même consequent ou un même dénominateur, & qui sont toujours les mêmes que les autres $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, puisque ce sont les mêmes raisons.

Soient données ces deux fractions $\frac{b}{x}$ & $\frac{c}{z}$. Si on fait la regle précédente, c'est-à-dire qu'on multiplie les dénominateurs x & z l'un par l'autre, & le numérateur de la premiere par le dénominateur de la seconde b par z, & le numerateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c par x, elles seront réduites à ces deux fractions ou raisons qui ont le même conséquent; ainsi le même nom $\frac{zb}{zx}$ & $\frac{xc}{zx}$.

COROLLAIRE I.

Par le moyen de cette Proposition on peut connoître sensiblement le rapport de deux fractions differentes. 20

Soient ces deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$ je veux connoître l'excès de l'une par-dessus l'autre, je les réduis à ces deux fractions suivantes, qui ont un même dénominateur ou consequent $\frac{8}{20}$ & $\frac{15}{20}$, qui sont les mêmes. Après quoi je vois clairement que la premiere est plus petite que la seconde de sept parties, telles que la grandeur entiere exprimée par le dénominateur 20, en contient 20. Ayant réduit ces deux raisons $\frac{b}{x}$ & $\frac{c}{z}$ à celles-ci $\frac{bz}{xz}$ & $\frac{cx}{xz}$ qui ont un même dénominateur ou même consequent, on voit plus sensiblement quel est leur rapport.

CAROLLAIRE 2.

Deux raisons étant données, on peut connoître quelle est la plus grande & quelle est la plus petite. 21

Pour entendre en quoi consiste cet excès d'une raiſon par-deſſus une autre raiſon, il faut remarquer que la raiſon étant une maniere d'être d'une grandeur à l'égard des grandeurs avec qui elle eſt comparée ; ce qui ſe dit d'une raiſon s'entend particulierement du premier terme qui eſt comparé : Ainſi lors que l'antécédent d'une raiſon eſt plus grand à l'égard de ſon conſéquent que l'antécédent d'une autre raiſon à l'égard de ſon conſéquent, la premiere raiſon eſt plus grande que la ſeconde. Pour donc remarquer ſenſiblement cet excès, il faut donner aux deux antécédens de ces deux raiſons le même conſéquent, en les réduiſant au même nom. Ainſi ces deux raiſons $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{9}$ étant données, les ayant réduites à ces deux raiſons qui ont un même conſéquent $\frac{18}{63}$ $\frac{28}{63}$ l'on apperçoit clairement que la premiere raiſon eſt plus petite que la ſeconde, puiſque 18 eſt plus petit au regard de 63, que 28 au regard du même nombre 63.

LEMME PREMIER.

22 *Trouver la plus grande commune meſure, ou le plus grand commun diviſeur de deux nombres donnez.*

On appelle commune meſure ou commun diviſeur de deux nombres un troiſiéme nombre, par lequel les deux premiers peuvent être diviſez exactement.

Pour trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres donnez, il faut ôter le plus petit du plus grand.

Premier Cas.

Si l'excès du plus grand, meſure exactement le petit, il sera le commun diviseur de tous deux, & le plus grand de tous les communs diviseurs de ces deux nombres.

Soient donnez *b* 25 & *d* 30, ôtant 25 de 30, l'excès de *d* par dessus *b* est 5 ; & parceque 5 mesure 25, je dis qu'il mesurera 30, & que c'est le plus grand commun diviseur de *b* & de *d*.

Puisque *d* ne surpasse *b* que d'une fois 5, si 5 est 5 fois dans 25, il faut qu'il soit encore une fois dans *d* ; ainsi il le mesure exactement, & il est le plus grand commun diviseur des deux nombres donnez ; ce que je démontre. Supposons qu'il y en ait un, *c*, qui soit plus grand. Examinons si cette supposition est possible. Puisque *d* surpasse *b*, il faut que *c* soit plus de fois dans *d* que dans *b*. Or ce nombre *c* sera ou plus grand ou plus petit, ou égal à 5, qui est l'excès de *d* par-dessus *b*. S'il est plus grand, il ne mesurera pas exactement *d* & *b* ; s'il est plus petit, ou qu'il lui soit égal, il ne sera donc pas un plus grand & commun diviseur de *b* & de *d*, que ce nombre 5, la supposition étoit ainsi impossible.

Second Cas.

Si l'excès du plus grand nombre par-dessus le plus petit ne mesure pas le plus petit, il faut retrancher cet excès du plus petit jusqu'à ce qu'on ait trouvé un nombre qui mesure le plus petit nombre, ce qui se comprendra mieux par un exemple. Soient donnez 21 & 27, l'excès de 27 par-dessus 21 qui est 6, ne mesure pas 21. Je retranche cet excès 6 de 21, il reste 15, qui ne mesure pas le plus petit nombre 6. Je retranche donc 6 de 15, reste 9, & de 9 je retranche encore une fois 6, le reste est 3, qui mesure exactement 6. Je dis que 3 est la commune & la plus grande mesure des nombres proposez 21 & 27. Car 1°. par la démonstration précédente, 3 est la commune & la plus grande mesure de 9 & de 6 : Et puisque 15 surpasse 9 de 6, il faut que 3 soit la commune mesure de 9 & de 15, & la plus grande : car s'il y en avoit une autre plus grande, 3 ne seroit pas la plus grande mesure de 9 & de 6. L'on démontrera de la même maniere que 3 est la commune & la plus grande mesure de 15 & de 21, de 21 & de 27.

Lemme Second.

23 *Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.*

Si l'un des deux nombres donnez est mesuré par l'autre, il sera celui que l'on cherche. Soient donnez 3 & 6, le premier nombre 3 mesure 6; ainsi il est évident que 6 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par les deux nombres 3 & 6.

Si l'un des deux nombres donnez ne mesure pas l'autre, il faut les multiplier l'un par l'autre, & le produit sera le nombre qu'on cherche. Soient donnez 3 & 4 : leur produit 12 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par 3 & par 4. Mais cela n'est vrai que lors que les deux nombres donnez n'excédent pas le plus grand chifre 9; & qu'ils sont premiers entr'eux. On dira dans la suite quels sont les nombres premiers. 6 & 4 ne sont pas premiers, aussi 6 multiplié par 4 fait 24, qui n'est pas le plus petit nombre que 6 & 4 mesurent, c'est le nombre 12. La régle generale que nous pouvons donner ici, c'est de trouver les deux plus petits nombres qui soient les exposans de leur raison. Comme si 8 & 12 étoient donnez, il faudroit prendre 2 & 3, après quoi multipliant le plus grand nombre par le plus petit exposant, & le plus petit par le plus grand des exposans, ce qui ne doit faire qu'un même produit ; ce produit est ce que l'on cherche. Multipliant 8 par 3, & 12 par 2, le nombre 24, produit de l'une & l'autre multiplication, est le plus petit nombre, que 8 & 12 divisent exactement.

QUATRIE'ME PROPOSITION.
Problême Quatriéme.

Réduire une fraction ou raison aux moindres termes. 24

Il faut diviser le numerateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grande commune mesure.

Soit cette fraction $\frac{30}{48}$, je divise 30 & 48 par *6*, qui est la plus grande commune mesure de 30 & de 48, les quotiens 5 & 8. donneront la nouvelle fraction $\frac{5}{8}$; car Liv. III. n. *65*. 5 est à 8 comme 30 est à 48. Donc par l'Axiome 4. ci-dessus, les deux fractions $\frac{30}{48}$ & $\frac{5}{8}$ valent la même chose. Or il est certain que cette fraction est réduite aux plus petits termes ; car ayant divisé 30 & 48 par 6, qui est leur plus grande & commune mesure, aucune autre division ne peut donner de plus petits exposans que les quotiens de cette division, puisque les plus grands diviseurs donnent de plus petits quotiens. Après cette réduction l'on voit plus nettement le rapport du numerateur de cette fraction à son dénominateur, ou quelle est leur raison.

Les fractions & raiſons qui ſont exprimées par des lettres, ſe réduiſent facilement à de plus ſimples termes; car ſelon ce qu'on a dit, que lors que les mêmes lettres ſe trouvent dans la grandeur à diviſer & dans le diviſeur, pour faire la diviſion, il ne faut que retrancher les lettres ſemblables qui ſe trouvent également dans la grandeur à diviſer & dans le diviſeur; pour diviſer bx par x, il ne faut que retrancher x de la grandeur à diviſer bx, & b qui reſte eſt le quotient de cette diviſion.

Par conſequent pour réduire à de plus ſimples termes la raiſon de aac à acd, ou la fraction $\frac{aac}{acd}$; je retranche du numerateur & du dénominateur les lettres qui ſe trouvent dans l'un & dans l'autre, ce qui donne cette fraction $\frac{a}{d}$, qui a la même valeur que $\frac{aac}{acd}$, c'eſt-à-dire, que la raiſon de a à d eſt la même que celle de aac à acd; car en faiſant ce retranchement, j'ai diviſé le numerateur aac & le dénominateur acd par un même diviſeur, ſçavoir ac; partant les quotiens a & d ſont en même raiſon que aac & acd.

Soit donné cette fraction $\frac{aac + aad}{cd + dd}$, en retranchant les lettres qui ſe trouvent dans le numerateur & dans le dénominateur, cette fraction ſe trouvera réduite à celle-ci $\frac{aa + aa}{d + d}$; & puiſqu'en rétranchant de deux grandeurs propoſées deux autres grandeurs qui ont même raiſon, la même raiſon demeure après ce retranchement, on pourra encore réduire la fraction donnée à

celle-ci

celle-ci $\frac{aa}{d}$. aa eſt à d comme $aac + aad$ eſt à $cd + dd$.

Lors que deux fractions ont un même dénominateur, pour les réduire à de plus ſimples termes, de telle ſorte qu'elles ayent toujours un commun dénominateur, il faut prendre garde de ne retrancher que les lettres qui ſe trouveront en même temps dans les deux numerateurs & dans le dénominateur commun.

Soient par exemple ces deux fractions qui ont un même dénominateur $\frac{bdcd}{aaccd}$ & $\frac{a^5c}{aaccd}$, je retranche ſimplement un c des numerateurs & du dénominateur commun, & reſte $\frac{bdd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$. Si je n'avois pas voulu faire cete réduction de telle ſorte que ces deux fractions euſſent toujours le même dénominateur, je les aurois pû réduire à celles-ci $\frac{bd}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Problême Cinquiéme.

Réduire les fractions de fractions à une ſeule fraction. 25

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{b}{c}$ de $\frac{c}{z}$, le produit des dénominateurs c & z, qui eſt cz, ſera le dénominateur de la fraction qu'on cherche, & le produit des numérateurs b & c qui eſt bc, ſera le numérateur de cette fraction qui eſt ainſi $\frac{bc}{cz}$.

Par la définition des fractions de fraction, cette fraction de fraction donnée $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{z}$ exprime la raison de b partie de c à la grandeur entiere z, dont c est aussi partie. Partant Liv. IV. n. 12. la raison de b à z est composée de celle de b à c, & de celle de c à z. Or Liv. IV. n. 14. la raison de bc à cz est composée de la raison de b à c, & de celle de c à z. Donc la raison de bc à zc est égale à celle de b à z, ce qu'on cherchoit. Car réduire une fraction de fraction dans une seule fraction, c'est exprimer tout d'un coup la raison de la partie de la partie à la grandeur entiere.

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$, je multiplie 4 dénominateur de l'une par 8 dénominateur de l'autre, ce qui fait 32, & 2 numerateur de l'une par 5 numerateur de l'autre, ce qui fait 10, la fraction $\frac{10}{32}$ sera égale à $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$.

S'il y avoit des fractions de fraction de fraction de fraction, pour les réduire dans une seule fraction, par exemple pour réduire dans une seule fraction cette fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{8}$, je multiplie le dénominateur de la premiere par celui de la seconde, 4 par 6, ce qui fait 24; après je multiplie 24 par le dénominateur 8 de la derniere, ce qui fait 192, qui sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche.

Je multiplie de la même maniere les numerateurs, le premier par le second, sçavoir 3 par 5, ce qui fait 15, & ce produit 15 par le troisiéme *qui est 7, ce qui fait 105, qui sera le numerateur de la fraction cherchée, qui est par consequent* $\frac{105}{192}$.

Sixie'me Proposition.

Problême sixiéme.

Evaluer une fraction, ou la réduire à des termes connus. 26

Soit cette fraction $\frac{2}{3}$, qui vaut les deux tiers d'un écu : on veut l'évaluer, c'est-à-dire qu'on cherche combien cette fraction vaut de sols.

Je multiplie le numerateur 2 & le dénominateur qui est 3, par les parties connuës d'un écu, qui sont 60 sols, les produits 120 & 180 sont entr'eux comme 2 à 3, & ayant divisé 120 & 180 par 3, dénominateur de la fraction donnée, les quotiens 40 & 60 seront encore en même raison que $\frac{2}{3}$. Donc $\frac{2}{3}$ est égal à $\frac{40}{60}$, c'est-à-dire que deux troisiémes d'écu valent 40 sols.

La multiplication du dénominateur n'est utile que pour la démonstration ; ainsi pour résoudre la présente Proposition, il suffit de multiplier le numerateur de la fraction donnée par les parties connuës de la grandeur entiere proposée. Dans l'exemple proposé je multiplie 2 par 60 sols, qui sont les parties connuës d'un écu, & je divise 120, produit de cette multiplication, par 3, dénominateur de la fraction donnée ; 40 qui est le quotient, est ce que je cherchois.

Avertissement.

Le produit du numerateur que l'on a multiplié *par les parties connuës de l'entier, étant divisé par le dénominateur de la fraction, si la division n'est pas exacte & qu'il reste une fraction, il faut encore évaluer ce reste, & continuer ces évaluations jusques à ce qu'il ne reste que des parties, ou connuës, ou si petites, que leur valeur ne soit pas considerable. Un exemple rendra cet Avertissement plus clair.*

Soit cette fraction $\frac{3}{7}$ d'un écu, selon ce qui a été enseigné, je multiplie le numerateur 3 par les parties connuës d'un écu qui sont 60 sols, le produit de cette multiplication est 180, que je divise par le dénominateur 7, le quotient est 25 plus $\frac{5}{7}$; partant $\frac{3}{7}$ d'un écu valent 25 sols plus $\frac{5}{7}$ de sols. Pour sçavoir maintenant ce que vaut cette fraction $\frac{5}{7}$ de sols, je multiplie le numerateur 5 par 12, dernieres parties connuës d'un sol, le produit est 60, que je divise par 7, le quotient est 8 plus $\frac{4}{7}$: ainsi $\frac{5}{7}$ d'un sol vaut 8 deniers plus $\frac{4}{7}$ d'un denier; la valeur de cette derniere fraction n'est pas considerable.

Septie'me Proposition.

Problême septiéme.

27 *Diviser un petit nombre par un plus grand.*

Il faut écrire le plus grand sous le plus petit, ce qui donne une fraction qui exprime la valeur du quotient que l'on cherche.

Pour diviser 2 par 5, j'écris $\frac{2}{5}$, Si ce 2 marque deux écus qu'il faut partager à 5 hommes, chacun aura deux cinquiémes d'écu. Pour réduire ce nombre entier 2 à une fraction dont 5 soit le dénominateur, il faut s. n. 13, multiplier 2 par 5, dont le produit 10 sera le numerateur de la fraction que l'on cherche, laquelle fraction $\frac{10}{5}$ vaut le nombre entier 2. Or pour partager 10 cinquiémes d'écus à 5 hommes, il est clair qu'il faut diviser 10 par 5, laquelle division doit avoir pour quotient le nombre entier 2, puisque le nombre 10 a été fait de 2 multiplié par 5. Ainsi en écrivant le plus grand nombre sous le plus petit, on fait en abregé deux operations. Par la premiere, on réduit le nombre entier dans une fraction qui a pour dénominateur le diviseur. Par la seconde on divise le numerateur de cette fraction par le diviseur proposé: Et tout cela se fait, comme nous venons de le voir, avec un trait de plume.

Nous ne pouvions pas donner plûtôt la démonstration de cette Operation que nous avons proposée dans le premier Livre, en traitant de la Division des nombres entiers.

SECTION SECONDE,

Operations Arithmetiques sur les Fractions & sur les Raisons.

AVERTISSEMENT.

Nous avons déja dit que lors que plusieurs raisons ont pour consequent une même grandeur, la grandeur de chaque antécédent qui est relative à l'égard de son consequent, peut être *regardée comme abſoluë à l'égard des autres antecédens ; car il eſt clair que pluſieurs tiers d'une même grandeur : par exemple, pluſieurs tiers d'un écu ſont entr'eux des grandeurs abſoluës. Pour donc ajouter 2 tiers à 3 tiers, il ne faut point d'autre régle que les ordinaires : deux tiers avec trois tiers font 5 ; mais auſſi pour faire connoître que ce nombre 5, ſignifie 5 tiers de la grandeur dont il eſt parlé, il faut mettre deſſous le conſequent, 3, qui eſt le dénominateur de cette fraction ou raiſon. Ainſi quand les raiſons ou fractions propoſées ont été réduites à un même nom ou à même dénominateur, ayant pour lors un même conſequent, les operations que l'on fait ſur elles n'ont plus de difficultez. Raiſon & fraction ſont une même choſe ; partant en montrant comment ſe font les Operations Arithmétiques ſur les Fractions, on enſeigne comment elles ſe doivent faire ſur les Raiſons.*

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion des Fractions & des Raiſons.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Problême huitiéme.

28 *Ajoûter en une ſomme pluſieurs fractions ou raiſons.*

Il faut premierement les réduire à un même dénominateur, par la 3e Propoſition. Soient $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{4}$, je les réduis à ces trois fractions ou raiſons qui ont un même dénominateur ou conſequent $\frac{72 \quad 80 \quad 48}{96}$. J'ajoute en une ſomme les numerateurs 72, 80, 48, ce qui fait 200, ſous lequel j'écris le dénominateur commun 96; ainſi $\frac{200}{96}$ eſt égal $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{4}$.

Quand il faut ajouter des nombres entiers avec des nombres rompus, il faut réduire les entiers à une fraction, qui ait même nom que la fraction donnée, s̃ n.13; ainſi pour ajouter 6 avec $\frac{2}{8}$, je réduis 6 à une fraction qui ait pour dénominateur 8, qui ſera $\frac{48}{8}$, cette fraction ajoutée avec $\frac{2}{8}$, fait $\frac{50}{8}$.

Les operations qui ſe font ſur les lettres ſont encore plus faciles. Pour ajouter ces deux fractions ou raiſons $\frac{aa}{c}$ & $\frac{bb}{c}$ en une ſeule ſomme, j'écris $\frac{aa+bb}{c}$. La raiſon de $aa+bb$ à c eſt égale aux deux raiſons de aa à c, & de bb à c, ajoutées en une ſomme.

Proposition neuvie'me.

Problême neuviéme.

Souſtraire une petite fraction ou raiſon d'une 29
plus grande fraction ou raiſon.

Soient $\frac{4}{6}$ & $\frac{2}{8}$, il faut rétrancher $\frac{2}{8}$ de $\frac{4}{6}$, je les réduis premierement à ces deux fractions ou raiſons, qui ont un même dénominateur ou conſequent, $\frac{12\ \ 32}{48}$, après je rétranche le numerateur

12 du numerateur 32, le reſte ſera $\frac{20}{48}$.

S'il faut retrancher une fraction d'un entier, ou un entier d'une fraction ; il faut reduire l'entier à une fraction, qui ait le même dénominateur que la fraction donnée, ſ̃ n. 13. Pour retrancher $\frac{3}{4}$ de 8, je réduis cet entier 8 à cette fraction $\frac{32}{4}$, d'où ayant ôté la fraction propoſée $\frac{3}{4}$, il reſte $\frac{29}{4}$. Ainſi pour retrancher la fraction $\frac{aa}{c}$ de la fraction $\frac{bb}{c}$, j'écris $\frac{bb-aa}{c}$.

Dixiéme Proposition.

Problême dixiéme.

30 *Multiplier une fraction ou raiſon par une autre fraction ou raiſon.*

Soient données ces deux fractions ou raiſons $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, je les réduis à ces deux fractions ou raiſons qui ont un même dénominateur ou conſequent $\frac{12 \quad 10}{15}$. Je multiplie enſuite les numerateurs l'un par l'autre, le produit 120 ſera le numerateur de la fraction $\frac{12}{15}$ multiplié par la fraction $\frac{10}{15}$, ſous lequel numerateur 120 on met ordinairement le produit du dénominateur commun 15 multiplié par lui-même, lequel produit eſt ici 225 ; de ſorte que le produit des deux fractions données eſt $\frac{120}{225}$.

Pour abreger cette operation, ſans faire aucune réduction, il faut prendre pour numerateur de la fraction que l'on cherche, le produit des numerateurs des fractions données, & pour dénominateur le produit des dénominateurs ; ainſi les fractions données étant $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, leur produit ſera $\frac{8}{15}$. Il eſt facile de démontrer que cette operation eſt bonne.

Il ne faut que démontrer que la raiſon $\frac{8}{15}$ eſt égale à celle-ci $\frac{120}{225}$. Ce qui eſt clair ; car elles ſont composées de raiſons égales, puiſque la raiſon de $\frac{8}{15}$ eſt composée de celles-ci $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, comme cette fraction $\frac{120}{225}$ eſt composée des fractions $\frac{12}{15}$ & $\frac{10}{15}$, qui ſont les mêmes. Les raiſons composées ſont égales, lors que les raiſons compoſantes ſont égales.

Ainſi pour multiplier $\frac{b}{c}$ par $\frac{m}{n}$, il faut écrire $\frac{bm}{cn}$.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Problême onziéme.

Diviſer une fraction par une fraction.

Dans toute division on cherche la maniere dont le diviseur est contenu dans la grandeur à diviser, ou la raison du diviseur à la grandeur à diviser : car comme nous avons vû, l'exposant de la raison de ces deux grandeurs est le quotient de la division de l'une par l'autre. Ainsi quand on propose de diviser une fraction par une autre fraction, on demande quelle est la raison de l'une à l'autre, & quel est l'exposant de cette raison.

Lors que deux fractions ou raisons ont le même dénominateur ou même consequent, il est évident qu'elles sont entr'elles comme leurs numerateurs. Par exemple, il est clair que $\frac{2}{4}$ est à $\frac{3}{4}$ comme 2 est à 3 ; ainsi dans ce cas il faut seulement placer le numerateur de l'une sur le numerateur de l'autre : cette fraction $\frac{2}{3}$ est l'exposant de ces deux fractions $\frac{2}{4}$ & $\frac{3}{4}$.

Si les deux fractions proposées ont differens noms, il faut les multiplier en croix, le numerateur de l'une par le dénominateur de l'autre, & le numerateur de celle ci par le dénominateur de la premiere, puis divisant le produit fait du numerateur de la fraction à diviser, & du dénominateur de l'autre fraction par l'autre produit, on aura le quotient de la division des fractions proposées. Soient données ces deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$. Je multiplie b par g & f par d, & je divise comme il a été dit, le produit de b par g, par le produit de d par f, ce qui me donne $\frac{bg}{df}$, exposant de la raison des deux fractions proposées, ce que je démontre ainsi.

En multipliant b par g & f par d, j'aurai ces deux produits df & bg, sous lesquels ayant placé le produit de d par g, les deux fractions proposées seront réduites à celles-ci qui ont le même nom $\frac{bg}{dg}$ & $\frac{df}{dg}$, dont l'exposant est $\frac{bg}{df}$, selon ce que nous venons de dire, que lors que deux fractions ont le même nom, elles sont entr'elles comme leurs numerateurs. Or c'est ce qu'il falloit démontrer, sçavoir que $\frac{bg}{df}$ étoit l'exposant des deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$.

Selon cette methode, pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{2}{6}$, & pour trouver l'exposant de la raison de ces deux fractions, je multiplie 3 par 6, ce qui fait 18, que je place sur une ligne, sous laquelle je mets le produit de 2 par 5, ce qui me donne $\frac{18}{10}$, qui est l'exposant de la raison de $\frac{3}{5}$ à $\frac{2}{6}$.

Lors que le numerateur se peut diviser par le numerateur, & le dénominateur par le dénominateur, la chose est aisée. Ainsi ayant à diviser $\frac{6}{20}$ par $\frac{2}{5}$, les quotiens sont $\frac{3}{4}$, ce qui abrége, & sur tout pour les grandeurs literales, comme $\frac{acd}{bg}$ par $\frac{d}{g}$ vient $\frac{ac}{b}$. La raison est que la division défait ce que la multiplication a fait.

Il n'est pas necessaire d'avertir ici que les operations Arithmetiques sur les fractions, se prouvent de la même maniere que celles qu'on fait sur les entiers : Sçavoir l'Addition par la Soustraction & reciproquement, comme aussi la Multiplication par la Division, & reciproquement ; cela s'entend assez de soi-même.

CHAPITRE II.

Des autres Operations Arithmetiques sur les Fractions.

Problêmes curieux.

32 LEs autres Operations de l'Arithmetique se font sur les fractions comme sur les grandeurs absoluës ; ainsi il n'est pas necessaire d'en parler. Ces Operations ne consistent que dans certaines manieres d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions : c'est pourquoi lors que l'on sçait ajouter ou soustraire, multiplier ou diviser des nombres rompus, on sçait les Régles de trois, de compagnie, & les autres Regles sur ces nombres.

Les extractions des racines se font aussi de la même maniere sur les nombres rompus que sur les nombres entiers. Par exemple, pour tirer la racine quarrée de cette fraction $\frac{9}{25}$, je tire celle du numerateur 9 qui est 3, celle du dénominateur 25 qui est 5, ce qui me donne cette fraction $\frac{3}{5}$, racine quarrée de $\frac{9}{25}$.

Ainsi $\frac{a}{b}$ est la racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$. La racine cubique de $\frac{8}{27}$ eſt $\frac{2}{3}$; car celle de 8 eſt 2, & celle de 27 eſt 3. La racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$ eſt $\frac{a}{b}$.

Je propoſerai ici quelques queſtions, où l'on verra l'uſage des fractions, & la pratique de ce qu'on a enſeigné. Remarquez dans ces queſtions une choſe de la derniere importance, que la réſolution d'une queſtion dépend ſouvent de la ſeule maniere d'en exprimer les termes. Un nombre entier ſe rompt en tant de parties qu'on veut. Il faut choiſir une fraction propre à reſoudre la queſtion comme vous l'allez voir.

QUESTION PREMIERE.

Le baſſin d'une fontaine a trois ouvertures; par la premiere l'eau s'écoule toute en trois heures; par la ſeconde en 5, & par la troiſiéme en 6. On demande en combien de temps tout le baſſin plein d'eau s'écouleroit, ſi on ouvroit en même-temps toutes ſes ouvertures. 33

Selon que la queſtion eſt propoſée, toute l'eau s'écoulant en 3 heures par la premiere ouverture, il s'en écoulera $\frac{1}{3}$ par la même ouverture dans une heure, & pareillement il s'en écoulera $\frac{1}{5}$ dans une heure par la ſeconde ouverture, & $\frac{1}{6}$ par la troiſiéme ouverture, & par toutes trois enſemble il s'en écoulera $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ dans l'eſpace d'une heure. Toutes ces fractions ajoutées enſemble ſelon les regles de l'addition font $\frac{63}{90}$;

laquelle fraction se réduit à celle-ci $\frac{7}{10}$, selon qu'il a été enseigné, $\bar{s}$ n. 24. Après quoi on peut raisonner ainsi : Si $\frac{7}{10}$, c'est-à-dire 7 parties de l'eau telles que 10 en vaut dix, ou bien si sept dixiémes de toute l'eau s'écoulent dans une heure, dans combien de temps s'écouleront $\frac{10}{10}$ de cette eau ? c'est-à-dire toute l'eau, selon ce qui a été dit dans le 1. & 2. Axiome $\bar{s}$ n. *6.* & 7. J'apperçois que ces termes $\frac{7}{10}$, 1 heure, & $\frac{10}{10}$ sont les trois premiers termes d'une proportion Géométrique, dont le temps qu'il faut pour écouler toute l'eau fait le quatriéme terme.

$$\frac{7}{10}.\ 1\ ::\ \frac{10}{10}.$$

En multipliant le troisiéme terme de cette proportion par le second, c'est-à-dire $\frac{10}{10}$ par 1, ce qui fait $\frac{10}{10}$ $\bar{s}$ n. 30. car l'entier 1 réduit en fraction s'exprime ainsi $\frac{1}{1}$ $\bar{s}$ n. 14. & divisant ce produit par le premier terme $\frac{7}{10}$ le quotient est $\frac{100}{70}$, qui étant réduit au moindre terme $\bar{s}$ n. 24. on a le petit quotient $\frac{10}{7}$, dont la valeur est égale à celle du grand $\frac{100}{70}$. Or la fraction $\frac{10}{7}$ est un entier plus $\frac{3}{7}$, selon ce qui a éte remarqué, 2.

Axiome $\tilde{s}$ n. 7. Donc $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, & ainsi $1 \frac{3}{7}$ sera le quatriéme terme de la proportion. $\frac{7}{10}$. 1 :: $\frac{10}{10}$. 1 $\frac{3}{7}$. C'est-à-dire, que toute l'eau s'écoulera par ces trois ouvertures dans une heure plus trois septiémes parties d'une heure. Si l'on veut avoir ce temps avec plus de précision, il faut évaluer la fraction $\frac{3}{7}$, comme on l'a enseigné $\tilde{s}$ n. 26.

Question Seconde.

La moitié d'une pique & un tiers sont dans l'eau, & deux pieds de cette pique sont hors de l'eau, quelle est la longueur de toute la pique? 34

Je nomme x cette longueur. Ainsi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 = x$. Je réduis selon la régle $\tilde{s}$ n. 19. ces deux fractions à un même nom, à celles-ci $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, que j'ajoute l'une avec l'autre. $\tilde{s}$ n. 28. ce qui fait $\frac{5}{6}$, ainsi $\frac{5}{6} + 2 = x$. Or $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = x$; car le dénominateur 6 est la valeur de tout x, ainsi $\frac{6}{6} = x$, donc $\frac{12}{6} = 2$; donc la grandeur entiere x est un nombre dont 2 est la sixiéme partie; partant c'est le produit de 2 multiplié par 6, c'est-à-dire 12; cette pique est donc de 12 pieds.

Question Troisiéme.

Achille va dix fois plus vîte qu'une tortuë, cette tortuë a une lieuë d'avance. On demande quand Achille pourra l'attraper. 35

Achille attrapera cette tortuë à la premiere neuviéme de la seconde lieuë; car pendant qu'elle aura fait $\frac{1}{9}$ de cette seconde lieuë, Achille doit avoir fait $\frac{10}{9}$, c'est-à-dire dix fois plus de chemin. Or $\frac{10}{9}$ valent une lieuë entiere plus $\frac{1}{9}$ de lieuë.

Ces espaces que parcourt la tortuë font cette progression Géométrique $\div$ 1. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$. &c. Laquelle progression va toujours en diminuant. Ainsi, comme on l'a remarqué Liv. III. n. 93. toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini ne font qu'une neuviéme de lieuë.

Question Quatrie'me.

36 *Une horloge a deux éguilles, l'une des heures, qui fait son tour en 12 heures, & l'autre des minutes, qui fait le même tour en une heure.* On demande *que l'on marque tous les points ausquels ces deux aiguilles se rencontrent.*

Après chaque tour l'aiguille des minutes se trouve sur 12 heures. Ainsi après le premier tour l'aiguille des heures a l'intervalle d'une heure d'avance par-dessus celle des minutes, qui l'attrapera après la $\frac{1}{11}$ de deux heures; car dans le temps que l'aiguille des heures a fait $\frac{1}{11}$ d'une heure, l'aiguille des minutes qui va douze fois plus vîte, doit avoir fait douze onziémes, $\frac{12}{11}$, c'est-à-dire l'intervalle d'une heure entiere plus $\frac{1}{11}$ de cet intervalle. Après le second tour, l'aiguille des heures aura d'avance l'intervalle de 2 heures; elle ne peut donc être attrapée qu'à la $\frac{2}{11}$ de l'intervalle qui est entre deux & trois heures; car pour lors l'aiguille des minutes allant toujours douze fois plus vîte, aura fait $\frac{24}{11}$, qui valent l'intervalle de deux heures plus $\frac{2}{11}$. Ainsi de suite ces aiguilles se rencontreront à ces heures ici : I $+ \frac{1}{11}$. II $+ \frac{2}{11}$. III $+ \frac{3}{11}$. IV $+ \frac{4}{11}$. V $+ \frac{5}{11}$. VI $+ \frac{6}{11}$. VII $+ \frac{7}{11}$. VIII $+ \frac{8}{11}$. IX $+ \frac{9}{11}$. X $+ \frac{10}{11}$. Enfin les deux aiguilles se rencontreront à XI $+ \frac{11}{11}$, c'est-à-dire à douze heures.

On peut se servir de cette méthode pour déterminer les conjonctions des Planetes lors qu'on sçait leur periode, ou le nombre des années dans lequel elles font leur cours. On peut assigner les points du Ciel où les Planetes doivent se rencontrer.

QUESTION CINQUIE'ME.

Le mauvais Riche, brûlé de soif, pria Abraham de lui laisser distiller une goutte d'eau. Supposé que *cette goutte eût fait la premiere minute* 100 *lieuës, la seconde* 99, *toujours selon cette même raison de* 100 *à* 99 : *Et qu'il y eût une distance infinie entre le mauvais Riche & Abraham, on demande, en combien de temps cette goutte aura pû arriver jusques au mauvais Riche.*

Le mouvement de cette goutte d'eau en descendant est retardé; car dans la premiere minute devant faire 100 lieuës, & dans la seconde n'en faisant que *99*, son mouvement diminuë selon cette même raison. Ainsi les espaces qu'elle parcourt font une grogression sous-multiple, dont le premier terme est 100, le second *99*. On trouvera le troisiéme terme selon ce qui a été enseigné, multipliant le second terme *99* par lui-même, divisant son produit par le premier qui est 100, & le quotient $98\frac{1}{100}$ sera ce troisiéme terme qu'on cherche. On trouvera ainsi tous les autres termes, qui iront en diminuant, cette progression étant sous-multiple. Le dernier terme n'étant donc pas une grandeur sensible; on le peut supposer égal à zero.

Ainsi $\div$ 100. *99*. $98\frac{1}{100}$ . . . . 0.

Et changeant cette progression sous-multiple en une multiple,

On a $\div$ 0 . . . . $98\frac{1}{100}$. *99*. 100.

Soit donc *s* la somme de tous les termes qui précedent le dernier 100. Donc par le Corollaire Liv. III. n. *91*. 100 — *99*. *99* :: 100 — 0. *s*: Or 100 — *99*, n'est que 1, & 100 — 0 c'est toujours 100; ainsi la proportion se réduit à 1. *99* :: 100. *s*. c'est-à-dire 1 est à *99* comme

100 est à la somme de tous les termes qui le précedent. Pour connoître cette somme je multiplie (selon qu'il a été dit Liv. III. n. 78.) le troisiéme terme 100, par *99* le second, & j'en divise le produit par le premiere terme 1; le quotient *9900* de cette division est le quatriéme terme valeur de *f*; en cette maniere 1. *99* :: 100. *9900*. Ainsi donc *9900* est la somme de tous les termes qui précedent ce dernier terme 100, lequel étant ajouté à *9900*, on a 10000, somme de toute la progression. Donc je conclus que cette goutte d'eau faisant la premiere minute 100 lieuës, la seconde *99*, & ainsi de suite jusques à zero, ne fera dans toute l'éternité que 10000 lieuës, & par consequent ne pourra jamais arriver jusques au lieu du mauvais Riche; puisqu'on suppose qu'entre lui & Abraham il y avoit un espace infini.

SECTION TROISIE'ME.

Des differentes especes des Nombres rompus.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fractions Décimales.

Les Fractions peuvent prendre leur nom de la maniere que la grandeur entiere est divisée. On nomme par exemple Fractions Décimales, celles où l'entier est divisé en dix parties, & chacune de ces dix parties en dix autres, & ces dixiémes de dixiémes en autres dixiémes à l'infini; leurs dénominateurs sont une progression 38

Géométrique sous-multiple, dans laquelle regne la raison sous-découple, comme vous le voyez,

$$\div \frac{1}{10}\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{1000}\ \frac{1}{10000}\ \frac{1}{100000}\ \&c.$$

Joignons à cette progression Géométrique, la progression des nombres naturels, de sorte que le premier terme de l'une réponde au premier terme de l'autre; ainsi de suite.

$\div$	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
	1	2	3	4	5	6	7
$\div$	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.	10000000.

Multipliant par exemple le 3^e^ terme *c* de la progression Géométrique par le 4^e^ *d*, ce qui fait 10000000. Pour sçavoir quel terme c'est que ce produit dans la progression Géométrique, j'ajoute *C* & *D*, l'un à l'autre, de la progression Arithmetique, ce qui me donne 7 pour 7^e^ terme; ainsi je connois que le produit 10000000 est le septiéme terme. Dans la progression Arithmetique on fait par addition, ce qu'on fait dans la Géométrique par la multiplication.

39 On joint toujours la progression Arithmetique à cette progression des Fractions décimales; mais au lieu des chifres de la progression des nombres naturels, on met des lignes de cette maniere.

$$10'.\ 100''\ 1000'''.\ 10000''''.\ 100000'''''.$$
$$1000000^{\text{vi}}.\ 10000000^{\text{vii}}.$$

Ce qui fait qu'on leur donne les noms du nombre de ces petites lignes, ou de la valeur des termes de la progression Arithmetique, à laquelle ces fractions répondent. On les nomme donc *Primes, Secondes, Tierces, Quatriémes, Cinquié-*

mes, *Sixiémes*, *Septiémes*; ainſi de ſuite à l'infini, & ſelon ce qu'on a dit; multipliant des primes par des ſecondes $10'$ par $100''$, ce qui fait 1000, Pour ſçavoir ce que c'eſt que ce produit, j'ajoute les lignes de deſſus les unes avec les autres $'$ avec $''$ & cela fait $'''$; ce qui me fait connoître que le produit des primes multipliées par des ſecondes ſont des tierces. Qu'ainſi des tierces multipliées par des quatriémes font des ſeptiémes, puiſque 3 & 4 font 7. De même une prime par une prime, $1'$ par $1'$, cela doit faire $1''$: & $1''$ par $1''$ doit faire $1''''$. cela eſt évident; car une prime c'eſt $\frac{1}{10}$: multipliant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{10}$, cela fait $\frac{1}{100}$. s[au] n. 30; Ainſi une prime multipliée par une prime, doit valoir une ſeconde; car $\frac{1}{100}$ c'eſt une ſeconde. Le produit eſt donc toujours de l'eſpece que donne l'addition des petites lignes. Ainſi encore une fois des tierces par des tierces donnent des ſixiémes, les ſecondes par des quatriémes, $''$ par $''''$ donnent des ſixiémes.

L'utilité des Fractions décimales eſt très- 40
grande; parceque les operations qu'on fait par leur moyen ſont courtes. Pour réduire des entiers en primes, des primes en ſecondes, ou des ſecondes en des primes, & des primes en entiers, il n'eſt queſtion que de multiplier ou diviſer. Pour réduire des entiers en des primes, il faut les multiplier par 10; pour les réduire en des ſecondes, il faut les multiplier par 100, puiſqu'un entier vaut 10 primes, ou 100 ſecondes. Or pour faire cette réduction, il faut ſeu-

lement joindre les plus petits aux plus grands. L'on a 5 entiers $3'$ & $6''$, on veut réduire ces 5 entiers & ces 3 primes en des secondes, j'écris $536''$; car pour faire cette réduction il faut multiplier 5 par 100, c'est à-dire le faire valoir 100 fois davantage, en le faisant passer dans le rang des centaines; ce que j'ai fait en plaçant deux chifres devant lui; pour réduire $3'$ en secondes, il faut multiplier 3 par 10, ou le faire valoir 10 fois davantage, ce que je fais en plaçant un chifre devant lui.

Au contraire, pour réduire de petites mesures en de plus grandes, il faut les diviser par le nombre de leurs parties qui est necessaire pour faire la grandeur dont elles sont parties. Pour réduire par exemple un nombre de primes en entiers, il faut le diviser par 10, ou ce qui est la même chose, faire que ce nombre vaille 10 fois moins, ce qui se fait en retranchant un chifre. Par exemple, pour réduire $53'$ en des entiers, je separe 3 de 5, alors 5 ne vaudra pas cinq dixaines, mais 5 unitez qui seront cinq entiers. Ainsi si l'on propose de sçavoir combien $6782'''$ font de secondes, je retranche un chifre, & j'apperçois que cela fait $678''$ plus $2'''$; si l'on demande combien c'est de primes, je retranche deux chifres, & je vois que cela fait $67'$ plus $82'''$, ou $8''$ plus $2'''$; si enfin l'on me demande combien ce sont d'entiers, je retranche 3 chifres, & j'apperçois que $6782'''$ font 6 entiers plus $782'''$, ou $7' + 8'' + 2'''$.

41 L'Addition & la Soustraction des Fractions décimales se font à l'ordinaire. On met les fractions de même nom les unes sous les autres; les primes sous les primes, les secondes sous les secondes, les tierces sous les tierces, &c. Et on

opere à l'ordinaire. Il suffit de jetter les yeux sur ces exemples.

ADDITION.	*Ajoûter*		$\begin{cases} 5' \\ 0' \end{cases}$	$\begin{matrix} 6'' \\ 7'' \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3''' \\ 2''' \end{matrix}$		
	somme		$6'$	$3''$	$5'''$.		
SOUSTRACTION.	*de*	6.	$4'$	$5''$	$0'''$	$7''''$	$5'''''$.
	ôter	3.	$6'$	$0''$	$8'''$	$2''''$	$2'''''$.
	reste	2.	$8'$	$4''$	$2'''$	$5''''$	$2'''''$.

Vous pourrez remarquer qu'on emprunte du terme précédent, quand celui qu'on veut ôter est plus grand que celui sous lequel il est.

La multiplication & la division se font aussi 42
facilement avec ces fractions décimales; on multiplie les chifres à l'ordinaire, les uns par les autres, & on ajoute dans une somme leurs petites barres; comme on l'a vû, s n. 39. Ainsi pour multiplier 5 entiers $6'$ $3''$ $4'''$ par 8 entiers $2'$ $4''$ $6'''$, je réduis ces deux sommes au même nom, écrivant simplement $5634'''$ & $8246'''$. Après quoi je multiplie $5634'''$ par $8246'''$ dont le produit est 46457964^{vi} sur lequel je mets ^{vi}, qui est fait de l'addition de $'''$ & de $'''$ ou de 3 & de 3. Ainsi ce produit sont des sixiémes.

La division se fait en la même maniere. On divise les chifres du dividende par les chifres du diviseur; & on ôte les barres du diviseur du nombre de celles du dividende, on met le reste sur le quotient. Ainsi des huitiémes divisées par des cinquiémes donnent des troisiémes; car de v^{iii} ôtant v reste $'''$ ou 3. Si on veut donc diviser $8'$ $6''$ $4'''$ par $2'$. Je divise $864'''$ par $2'$, le quotient est $432''$, sur lequel je mets $''$, ôtant $'$ de $'''$, dont le reste est $''$. Pour diviser 3 entiers $4'$. $4''$ $3'''$ $5''''$ $2'''''$ par $9'$ $6''$. il faut diviser 344352'''' par 96'', le quotient sera 3587''', sur lequel je mets trois petites lignes; car de '''' ôtez '' reste'''.

43 Les divisions & subdivisions décimales sont commodes, comme vous le voyez, parceque les operations de l'Arithmetique en sont faciles. Ainsi autant qu'on le peut il y faut rappeller les autres subdivisions. Pour cela les toises dont se servent nos Ouvriers, étant divisées d'un côté en six parties ou six pieds; chaque pied en douze pouces, & chaque pouce en douze lignes. Il faut de l'autre côté marquer une division de la toise entiere en dix parties; & de chaque dixiéme en d'autres dixiémes à l'infini. Ainsi en mesurant avec cette toise, on peut ne parler ni de pieds ni de pouces, ni de lignes; & au bout du calcul, évaluer les parties décimales, ce qui est aisé. Car pour sçavoir en pieds, en pouces & en lignes ce que valent 8' 9'', on raisonne ainsi; si 10 primes ou cent secondes valent une toise ou six pieds, combien 8' 9'' ou 89'' vaudront-elles? ce que je trouve par la Regle de trois, multipliant 89 par 6, & divisant le produit 534 par 100; le quotient $5\frac{34}{100}$ sera connoître que 8' 9'' valent 5 pieds quelque chose de plus. J'évaluë cette fraction qui vaut 34 parties d'un pied divisé en 100, disant si 100, donne 34, combien donneront douze pouces qui valent un pied entier, & partant ces 100 parties. Je multiplie 34 par 12, & j'en divise le produit 408 par 100; le quotient $4\frac{8}{100}$ marquera que cette fraction $\frac{34}{100}$ d'un pied vaut

vaut 4 pouces plus $\frac{8}{100}$ de pouce, ce qu'on pourra de même évaluer en lignes.

Si on vouloit sçavoir combien cinq pieds trois pouces valent de primes & de secondes, on le trouveroit de la même maniere raisonnant ainsi : si six pieds valent une toise, & par consequent dix primes, ou, ce qui est la même chose, si trois pieds valent cinq primes, combien cinq pieds vaudront ils de primes.

CHAPITRE II.

De la réduction des Mesures & des Monnoyes. 44

LEs grandes mesures se divisent ordinairement en de plus petites mesures. On peut nommer les nombres qui expriment les grandes mesures, des nombres entiers ; & nombres rompus ceux qui n'expriment que les petites. Nous avons enseigné ci-dessus les moyens de réduire toutes ces differentes mesures, & de donner aux plus grandes & aux plus petites le même nom, lors qu'il est necessaire de faire sur elles les operations ordinaires de l'Arithmetique ; mais sans cette réduction ces operations se font aisément, en rangeant ces differentes mesures sous differentes colomnes, à qui on donne le nom de ces mesures ; ainsi qu'on a vû que les chifres ont differentes valeurs, selon le rang ou colomne dans lesquels ils sont placez. Les poids, les monnoyes, sont des mesures qui se subdivisent. Les toises, par exemple, se subdivisent en pieds, les pieds en pouces, les pouces en lignes. Il y a de grandes & de petites monnoyes. Il suffira pour faire concevoir tout ce qu'il est necessaire de sçavoir touchant les operations sur ces subdivisions, de voir comme on peut faire une addition de differentes especes de monnoyes. Si on avoit donc une addition à faire de plusieurs pistoles, livres, sols, deniers; il faudroit ranger toutes ces differentes monnoyes sous differentes colomnes, comme vous le voyez dans l'exemple suivant, & pratiquer la même chose que ce qu'on a fait sur les nombres ordinaires.

Une pistole vaut 10 livres. Une livre vaut 20 sols. Un sol vaut 12 deniers. Ayant differentes sommes composées de pistoles, de livres, de sols, de deniers, pour les ajouter dans une seule somme, il faut écrire chaque monnoye sous celle de même nom, mettant les deniers dans le premier rang de droit à gauche, après dans le second rang les sols, dans le troisiéme les livres, dans le quatriéme les pistoles, de cette maniere.

5 *pistoles.*	6 *livres.*	8 *sols.*	4 *deniers.*
7	8	9	10
11	9	17	8
25	8	10	7
51	3	6	5

Je commence cette addition par le premier rang, dans lequel je trouve 29 deniers, qui font 2 sols & 5 deniers; je marque 5 sous ce rang; & je retiens 2 sols pour le rang suivant, lesquels avec ceux qui y sont font 46 sols, qui valent 2 livres plus 6 sols. Je marque 6 sols sous ce rang, & je retiens 2 livres. Dans le troisiéme rang je trouve 31 livres, qui avec les deux livres que j'avois retenuëes en font 33, qui valent 3 pistoles plus trois livres. Je ne marque donc que 3 sous ce rang, & je reserve 3 pistoles, qui avec les 48 qui s'y trouvent, font 51 pistoles; ainsi la somme de toutes ces sommes particulieres est 51 pistoles 3 livres 6 sols 5 deniers.

La soustraction se fait de la même maniere; il faut écrire les monnoyes de même nom dans une même colomne, la plus petite somme sous la plus grande, & commençant par la premiere colomne de la droite à la gauche, il faut retrancher le plus petit du plus grand, & ce qui reste le placer dans le rang qui lui convient. Si dans les premieres colomnes il se trouve que ce qui est dessous est plus grand que ce qui est dessus, il faut emprunter de la colomne suivante. Ainsi voulant ôter trois pistoles six livres dix-huit sols dix deniers de cinq pistoles huit livres quinze sols six deniers, après avoir

5 *pistoles.*	8 *livres.*	15 *sols.*	6 *deniers.*
3	6	18	10
2	1	16	8

écrit ces deux sommes, je dis: on ne peut pas ôter dix deniers de six; j'emprunte un sol de la colomne suivante, qui avec 6 fait 18 deniers, d'où je retranche 10 deniers, & le reste est 8. De 14 sols qui restent je ne puis ôter 18 sols: j'emprunte une livre qui avec ces 14 fait 34 sols, d'où ayant ôté 18 reste 16 sols. De 7 livres retranchant 6 livres reste 1. De 5 pistoles ôtez en 3 reste 2. Ainsi après la soustraction reste 2 pistoles une livre, 16 sols huit deniers.

Ces deux exemples suffisent pour comprendre comment se doivent faire l'addition & la soustraction de plusieurs especes differentes, soit de monnoyes soit de mesures; comme aussi sur les parties qu'on nomme Aliquotes, c'est à dire qui se trouvent exactement un certain nombre de fois dans une grandeur. On voit par exemple ce qu'on doit faire s'il étoit question de faire un addition de tiers, de quarts, de cinquiémes, ou une soustraction; il faut en faire des colomnes, dont la derniere est celle des entiers; ainsi comme trois tiers font un entier, leur addition se doit mettre dans la colomne des entiers. Dans le calcul Astronomique l'on compte par degrez, minutes, secondes. Un degré a soixante minutes; une minute soixante secondes, une seconde soixante tierces, ainsi de suite. Lorsqu'il s'agit de faire une addition de ces parties, il faut les ranger dans des colomnes, chacune dans celle de son nom; & ensuite operer, comme on a fait sur les monnoyes.

Pour les autres operations d'Arithmetique, il faut necessairement réduire les differentes especes de mesures qu'on veut multiplier les unes par les autres, comme on l'a vû § n. 26. Cette réduction se fait par la multiplication, quand après cela on veut sçavoir quelles especes contient le produit de cette multiplication, si ce sont des mesures, combien ce produit contient par exemple de toises, de pieds, de pouces, de lignes, on divise ce produit par les nombres qui marquent les raisons que ces parties ont entr'elles. On donne ces régles pour les réductions des monnoyes dont il est facile de découvrir le fondement en faisant ces operations selon les regles ordinaires. Pour réduire les livres en sols, il faut ajouter un zero & doubler la somme. Pour réduire 40 livres en sols, je double cette somme, ce qui fait 80, & j'ajoute un zero. Quarante livres valent 800 ſols ; & pour réduire les ſols en livres, il faut retrancher le dernier chifre de droit à gauche, & prendre la moitiè du reſte, & ce qui reſte ſont des livres. Pour réduire 857 ſols en livres, je retranche le dernier chifre 7, & je prens la moitié de 85 ou de 84, ce qui me fait connoître que 857 ſols valent 42 livres 17 ſols. Pour réduire les ſols en deniers, il faut multiplier les ſols par 4 & par 3, ou quadrupler & tripler la ſomme. Ainſi pour réduire 42 ſols en deniers, je multiplie 42 par 4, ce qui fait 168 ; & 168 par 3, ce qui fait 504, c'eſt le nombre de deniers que valent 42 ſols. Pour réduire les deniers en ſols, il faut prendre le tiers & le quart. Ainſi le tiers de 504 qui eſt 168, & le quart de ce tiers qui eſt 42, eſt le nombre de ſols que valent 504 deniers. En faiſant ces réductions tout au long, on voit le fondement de ces régles.

CHAPITRE III.

De l'aproximation des Racines des puiſſances imparfaites, ou de l'expreſſion (à peu près) *en nombres rompus, de ce qu'on ne peut pas exprimer avec de nombres entiers.*

JE prouverai dans le livre ſuivant qu'on ne 45
peut exprimer par aucun nombre, ſoit entier ſoit rompu, la racine d'une puiſſance imparfaite ; que par exemple ce nombre 18, qui n'eſt pas un nombre quarré, ne peut avoir une racine qui ſe puiſſe exprimer avec quelque nombre, même rompu. Or ce qu'on ne peut pas faire exacte-

ment ſe peut faire à peu près. Pour cela il faut rompre l'entier & le réduire en fractions. Si par exemple ce nombre 18 eſt propoſé pour en extraire la racine, qui ſoit à peu près celle de 18, qui eſt un nombre de pieds; il faut réduire ces pieds en pouces. Chaque pied vaut en longueur 12 pouces, mais un pied quarré vaut 144 pouces, il faut donc multiplier 18 par 144, le produit eſt 2592, auquel un quarré de 18 pieds eſt égal. Enſuite il faut prendre la racine quarrée de ce produit; mais on n'en trouvera pas d'exacte : pour en approcher de plus près, il faut réduire l'entier 18 en fractions décimales; leſquelles peuvent être continuées à l'infini Enfin on peut trouver une fraction qui multipliée par elle même faſſe ce nombre 18 avec ſi peu de difference que cela ne ſoit pas ſenſible. J'ajoute à 18 deux zero, cela fait 1800 primes quarrées, qui ne valent que 18 entiers quarrez, ayant partagé ce nombre par tranches,

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ 18 & 00 \\ & 82 \end{array}\Big\} 4$$

& pris la racine du quarré de la derniere tranche qui eſt 16, dont la racine eſt 4, il faut doubler cette racine trouvée, comme il a été enſeigné, le double de 4 eſt 8, par lequel je diviſe 20, le quotient eſt 2, qui ſera le ſecond chifre de la racine du nombre donné, & que j'écris après le diviſeur 8. Enſuite ayant multiplié 82 par 2, ce qui fait 164, & ôté ce produit de 200, reſte 36.

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ 2 & 00 \\ & 82 \end{array}\Bigg\} 42'$$

Ainſi je ſçai que 42 primes, ou 4 entiers plus 2 primes ſont la racine de 18 ; mais cette racine n'eſt pas juſte, puiſqu'il s'en faut 36 primes qu'elle ne faſſe 18 entiers.

Pour avoir encore une racine plus exacte, il faut réduire ce reſte en des ſecondes quarrées, en plaçant devant le reſte 36 deux zero.

$$\left.\begin{array}{r|l} 36 & 00 \\ 8 & 44 \end{array}\right\} 424''$$

Enſuite il faut doubler les racines trouvées 42, ce qui fait 84, & diviſer 3600 par ce double, le quotient de cette diviſion eſt 4, qui eſt le troiſiéme caractere de la racine cherchée, que je marque aprés les deux premieres que j'ai déja trouvées ; je multiplie 844 par ce dernier caractere 4, ce qui fait 3376, que j'ôte de 3600, & reſte 224 ; ainſi cette racine 424'' n'eſt pas encore la juſte racine de 18, car il s'en faut 224 ſecondes qu'elle ne faſſe 18 ; c'eſt pourquoi ſi on en veut trouver une plus exacte, il faut continuer cette operation, ſans eſperance, comme nous le ferons voir dans le Livre ſuivant, qu'on puiſſe trouver une racine entierement préciſe du nombre non quarré qui a été propoſé, & de tout autre nombre qui n'eſt pas quarré : mais vous voyez que le moyen que nous avons donné eſt exact, puiſqu'on connoît de combien on eſt éloigné du terme où l'on prétend aller.

Ce qui eſt merveilleux, c'eſt qu'on peut augmenter juſqu'à l'infini ce nombre 4, qui eſt la racine du quarré 16, qui eſt le nombre quarré qui approche le plus de 18, ſans que cette addition augmente cette racine 4 d'un nombre entier ; ce que nous démontrerons ainſi.

9 primes, 9 ſecondes, 9 tierces, & tous les autres nombres rompus de ſuite ajoutez enſemble ;

quand il y en auroit une infinité, ne peuvent ſaire une unité d'un nombre entier. Car afin que ce qu'on ajoute à 9 ſecondes faſſe 10 ſecondes, il faudroit que cette addition valût 10 tierces, puis qu'une ſeconde vaut 10 tierces ; ainſi 9 tierces avec 9 ſecondes, ne peuvent pas faire 10 ſecondes. Or afin que ce qu'on ajoute à 9 primes valût 10 primes, & par conſequent un entier, il faudroit que cette addition valût 10 ſecondes ; ce qui n'eſt pas. On a vû que 9 tierces avec 9 ſecondes ne peuvent valoir 10 ſecondes ; ainſi $9'$ $9''$ $9'''$. ajoutées enſemble, ne peuvent valoir 10 primes, ni par conſequent un entier. Cette même démonſtration prouve que $9'$ $9''$ $9'''$ $9''''$ ne peuvent faire un entier, & ainſi à l'infini. D'un autre côté $9'$ $9''$ $9'''$ valent bien plus que 9 ſimples primes : ainſi vous voyez comme l'on peut augmenter ce même nombre 9 primes de plus en plus, ſans cependant venir juſqu'à 10 primes ; ce qui ſurprend ceux qui n'ont jamais fait réflexion ſur la diviſibilité indéfinie de tout ce qui eſt grand.

On peut en la même maniere extraire la racine cubique des nombres qui ne ſont pas cubes autant que cela ſe peut faire. Il faut réduire le nombre donné ou en primes, ou en ſecondes, ou en tierces, ſelon qu'on veut avoir une racine plus préciſe. Soit donné ce nombre non cube 30 : le cube qui approche le plus de 30 eſt 27, dont la racine cubique eſt 3 ; de 30 ôtant 27, reſte 3. Pour avoir une racine plus préciſe de ce nombre, il faut le réduire en primes, un entier qui eſt cube vaut 1000 primes ; car un entier vaut dix primes : Or 10 multipliez par 10 fait 100, & 100 multipliez par 10 fait 1000 ; donc pour réduire les 30 entiers donnez en primes, il ne faut qu'écrire de ſuite trois zero ; ainſi 30000. Il faut extraire la racine cube de ce nombre 30000 par les regles ordinaires, 1°. le coupant par tranches, comme il a été enſeigné.

	20	
~~3~~	~~3~~19	
3~~0~~	~~000~~	(31

2°. Il faut extraire la racine du cube de la derniere tranche : cette racine eſt 3 dont le cube eſt 27, que j'ôte de 30, le reſte eſt 3. Selon les regles je prends le quarré de 3 que je viens de trouver, ce quarré eſt 9 que je triple, le triple eſt 27, par lequel je diviſe 30, le quotient eſt 1, que je marque après la premiere racine trouvée 3. De 30 j'ôte 27, reſte 3 ; je prends le quarré de 1 qui eſt 1, je le multiplie par 9 triple de 3, dernier chifre de la racine. Je retranche le produit qui eſt 9 de 30, il reſte 21 ; j'ôte de 210 le cube de 1 qui eſt 1, il reſte 209. Ainſi je connois que la racine cube de 30 eſt 31 primes. Mais cette racine n'eſt pas preciſe, puis qu'il s'en faut 209 que 31 primes multipliées cubiquement faſſent 30 entiers. Pour avoir donc une racine plus exacte, il faut réduire le nombre propoſé en des ſecondes : & puis que les primes cubiques valent 1000 fois davantage que les ſecondes qui ne ſont point figurées, il faut encore ajouter trois zero après les primes qui reſtoient, ſçavoir après 209, ainſi 209000. Enſuite il faut extraire la racine cube de ce nombre commençant par le trancher, comme il a été enſeigné.

209 | 000 (310

Selon la régle je prends le quarré de 31, qui eſt 961 que je triple, ce qui fait 2883, par lequel nombre ne pouvant diviſer 2090, j'écris zero après les racines trouvées. Je ſçai ainſi que la racine cube de 30 eſt 310 ſecondes, mais cette racine n'eſt point encore exacte; c'eſt pourquoi ſi j'en veux avoir une qui approche encore plus de la veritable racine de 30, je dois réduire ces ſecondes en tierces, & continuer la même operation.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL.

LIVRE SIXIE'ME.

Des Grandeurs incommensurables.

SECTION PREMIERE.

Ce que c'est que la commensurabilité & incommensurabilité des Grandeurs. Des nombres pairs, impairs, premiers, quarrez, cubes, &c.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Grandeur incommensurable.

EN parlant des Raisons, nous avons vû qu'on disoit qu'une Raison étant *sourde* lors qu'elle ne se pouvoit exprimer avec des nombres, c'est- I à-dire lors qu'on ne pouvoit pas marquer exactement combien l'un des termes de cette Raison contenoit de fois, ou étoit contenu dans l'autre; par exemple s'il y étoit ou une fois, ou deux fois, ou trois fois, &c. Les nombres ne sont proprement que des raisons. Lors qu'il s'agit de nombrer plusieurs choses, l'on en prend ou l'on en conçoit une qui est bien connuë, qu'on établit pour l'unité ou pour la commune mesure, ainsi qu'on l'a déja remarqué. Ensuite comparant avec cette commune mesure toutes les autres choses qu'on veut nombrer, selon le rapport qu'on trouve qu'elles ont avec elle, on leur donne differens noms: on les appelle deux, trois, quatre, &c. Les nombres ne sont ainsi que des rapports connus; par exemple, ce nombre 7 est le rapport qu'il y a entre deux choses, dont on sçait que l'une étant répétée tant de fois, mesure précisement l'autre.

L'unité est donc comme la mesure dont on se sert pour mesurer. Ainsi l'on dit que plusieurs grandeurs sont commensurables, ou qu'elles peuvent être mesurées par une même mesure, lors qu'on peut assigner une certaine quantité qui se rencontre exactement tant de fois dans chacune. Que si cela n'arrive pas, ces grandeurs sont incommensurables. Les grandeurs qui n'ont entr'elles qu'une raison sourde sont donc incommensurables, puis qu'on ne les peut exprimer par nombres: ou qu'il n'y a aucune certaine quantité qui étant prise pour l'unité les puisse mesurer exactement sans reste, & qu'il y manque quelque chose où qu'il y a de l'excès.

Il est très-important de remarquer ici que les hommes ne conçoivent jamais clairement une chose quand ils n'y sont point accoûtumez, à moins *qu'on ne leur faſſe appercevoir qu'elle a un rapport exact avec les choſes qui leur ſont familieres. Or toutes les choſes ne ſont pas commenſurables. Il eſt bon de s'en convaincre & de bien remarquer qu'on ne doit pas toujours prendre pour regle ce qu'on connoît, parce qu'il ſe peut faire que ce qu'on propoſe eſt d'un autre ordre. Ceux qui veulent tout rapporter au corps, jugent mal de la nature de l'ame; & ceux qui rapportent tout aux choſes créés & finies, comme ſont l'ame & le corps, jugent mal de Dieu, de ce qu'il eſt, & de la Trinité des Perſonnes qui eſt en Dieu, les eſprits & les corps n'étant pas commenſurables, ni Dieu avec ſes creatures.*

Pour concevoir comment il y a des Grandeurs incommenſurables, conſiderons qu'avec une toiſe, qui eſt une meſure de ſix pieds, on ne peut meſurer exactement une longueur qui a moins de ſix pieds ou qui en a plus, mais qui n'en a pas douze; car alors deux fois la toiſe feroit cette longueur de douze pieds. Si cette longueur a tant de pieds, & outre cela quelque choſe de plus ou de moins qu'un pied, une meſure d'un pied ne pourra pas encore meſurer cette longueur exactement, quoi que le pied le faſſe plus exactement que la toiſe; car ce qui reſte à meſurer eſt plus petit. Si on prend pour meſure un pouce, qui eſt la douziéme partie d'un pied, & que la longueur qu'on veut meſurer ait tant de pouces, mais outre cela quelque choſe de plus ou de moins, vous voyez que le pouce ne ſera pas encore une meſure exacte, & que le pouce & cette longueur ne ſont pas commenſurables. Que ſi on continue à prendre des meſures toujours plus petites que le pouce, par exemple qu'on prenne la douziéme partie d'un pouce qui eſt une ligne, & qu'on ne trouve point de mesure exacte quoique l'on pousse la chose à l'infini, alors cette longueur est censée incommensurable avec toutes les grandeurs que nous connoissons. Je dis si cela arrive, car je ne le puis pas démontrer encore comme je le ferai dans la suite. Or si cela est, il est évident que cela vient de la divisibilité de la grandeur à l'infini; car enfin si les grandeurs avoient des parties indivisibles, ces dernieres parties seroient des mesures communes.

Ces réflexions sur l'incommensurabilité de certaines grandeurs, sont de la derniere importance pour se convaincre de cette verité, d'un si grand usage dans la Religion, qu'il y a des choses de fait constantes, qui sont incomprehensibles. Nous connoissons plusieurs veritez touchant les grandeurs incommensurables également certaines & cachées, qu'on ne comprend point; ce qui nous apprend que quoique les mysteres soient incomprehensibles, & qu'on n'en ait point d'idée parfaite, néanmoins on en peut croire & démontrer plusieurs choses. Mais en même temps que cette matiere nous fait connoître les bornes de l'esprit de l'homme, elle nous en doit faire concevoir la vaste étenduë, & sa grande pénétration qui lui fait découvrir tant de choses dans ce qui de soi-même est tellement caché, qu'on ne peut point connoître ce qu'il est véritablement.

CHAPITRE II.

Préparations pour connoître ſi les grandeurs ſont 2
commenſurables ou incommenſurables.

C'Eſt particulierement l'extraction des racines des puiſſances imparfaites qui fait paroître l'incommenſurabilité. On nomme parfaite une puiſſance qui ſe peut exprimer par un nombre quarré, par un nombre cube. Un nombre eſt quarré ou cube qui a un nombre pour racine. Ainſi il s'agit ici particulierement de donner des regles pour connoître quand des puiſſances ſont parfaites, quand ce ſont des nombres quarrez ou cubes, ce qui nous oblige de parler de ces nombres; & pour cela, de dire encore quelque choſe touchant la nature des nombres en general.

L'unité eſt ce qui peut être conçû comme une 3
ſeule choſe.

Le nombre eſt une multitude compoſée d'uni- 4
tez.

Nombre pair eſt celui qui ſe peut diviſer en 5
deux nombres égaux.

Tels ſont 6 & 10, qui ont pour moitié, l'un 3 & l'autre 5.

Nombre impair eſt celui qui ne peut être diviſé 6
en deux nombres égaux, ou qui differe d'avec le nombre pair qui le précéde, ou qui le ſuit immédiatement, de l'unité.

Ce nombre 9 eſt impair, on ne le peut pas diviſer en deux nombres égaux: ſa difference d'avec 8 & avec 10 qui ſont des nombres pairs, eſt l'unité. Dans ce nombre impair & dans tout autre qui ſoit auſſi impair, il eſt évident qu'en en retranchant ou lui ajoutant l'unité il devient pair; comme au contraire ajoutant ou retranchant d'un nombre pair l'unité, il devient impair. On dit d'un nombre pair, qu'il est pairement pair, lors que sa moitié est un nombre pair; Ainsi 12 est pairement pair, parce que 6 est un nombre pair; mais 10 est impairement pair, car 5 est impair.

7 *Nombre premier est celui qui n'a point d'autre mesure que l'unité.*

C'est-à-dire qu'il n'y a point d'autre nombre que l'unité qui le puisse mesurer exactement, étant répété tant de fois. Ces nombres 2. 3. 5. 7. sont des nombres premiers.

8 *Les nombres sont premiers entr'eux qui n'ont que l'unité pour leur commune mesure.*

Ces nombres 4 & 7 sont premiers entr'eux, car il n'y a que l'unité qui puisse être leur mesure commune. Ces nombres 18 & 6 ne sont pas nombres premiers entr'eux; car outre l'unité ils peuvent être mesurez par ces nombres 2 & 3. On a dit que les plus petits nombres qui expriment une raison sont les exposans de cette raison; ainsi les exposans d'une raison sont nombres premiers entr'eux.

On a déja vû que les nombres reçoivent differens noms selon qu'on les conçoit faits de la multiplication d'autres nombres. Generalement on appelle *nombre plan*, celui qui est fait de la multiplication de deux nombres: *Solide*, celui qui est fait de la multiplication de trois nombres. Un nombre est dit quarré lors qu'il est fait de la multiplication d'un nombre par lui même, lequel est appellé *Racine quarrée* de ce nombre. Ainsi 16 qui est fait de 4 multiplié par 4, est un nombre quarré, dont 4 est la racine quarrée. Un nombre cubique eſt fait de la multiplication d'un nombre multiplié deux fois par lui-même, qui ſe nomme *Racine cube* de ce nombre cubique. Le nombre 27 qui eſt fait de 3 multiplié premierement par lui-même, ce qui fait 9, & de ce produit par le même nombre 3, ce qui fait 27, eſt un nombre cubique, dont 3 eſt la racine cubique.

Lors qu'un nombre n'eſt ni quarré ni cube, & qu'ainſi on ne connoît point de nombre, ou qu'il n'y en a point, comme on le démontrera, qui puiſſe être ſa racine, alors pour exprimer cette racine, on met devant le nombre, dont elle eſt racine, ce ſigne $\surd$ qu'on appelle *Signe radical*, parce qu'il ſert à marquer les racines.

Quand la grandeur devant laquelle on le met eſt complexe, c'eſt-à-dire composée de deux ou pluſieurs grandeurs, jointes par le ſigne $+$ ou $-$, ſi c'eſt la racine de toute la grandeur complexe qu'on veut marquer, on allonge une des jambes du ſigne radical, pour qu'il comprenne toute la grandeur. Ainſi $\sqrt{xx+aa}$, & cela s'appelle une racine univerſelle.

Autrefois on mettoit après le ſigne radical la premiere lettre de la puiſſance dont ce ſigne marquoit la racine. Ainſi $\surd\mathcal{Q}$, ſi c'étoit une racine quarrée. $\surd C$, ſi c'étoit une racine cube. $\surd\mathcal{QQ}$, ſi c'étoit une racine de quarré quarré, comme $\surd\mathcal{Q}C$, ſi c'étoit une racine d'un quarré cube. Maintenant on met dans le ſigne radical l'expoſant de la puiſſance dont il marque la racine; ainſi $\sqrt[2]{}$, au lieu de $\surd\mathcal{Q}$, pour dire que c'eſt une racine quarrée. Quand on voit ce ſigne ſeul, il faut ſuppléer l'expoſant de la ſeconde puiſſance qui eſt 2. On exprime ainſi les autres racines $\sqrt[3]{}\sqrt[4]{}\sqrt[5]{}\sqrt[6]{}$.

Ces nombres qui sont dans le signe radical, sont les exposans des puissances.

LEMME.

9 *Toute puissance doit être censée nombre quarré ou cube, &c. lors que sa racine est égale à un nombre.*

Si x racine de x^2 de x^3 de x^4 est égale à un nombre, x^2 doit être égal à un nombre quarré, x^3 à un nombre cube; car ce nombre auquel x est égal multiplié quarrément sera égal à x^2, multiplié cubiquement, il sera égal à x^3.

PROPOSITION PREMIERE.

Theorême Premier.

10 *Un nombre quarré multipliant un nombre qui n'est pas quarré, le produit ne sera pas un nombre quarré.*

Soit 18 nombre non-quarré multiplié par le quarré de 2 qui est 4, le produit 72 ne sera pas quarré. Soit $18 = xx$ & $aa = 4$, le produit de 18 par 4 est 72, comme celui de xx par aa est $xaxa$, ainsi $xaxa = 72$. & $xa = \sqrt{72}$. Si donc 72 étoit un nombre quarré, il auroit une racine qui se pourroit exprimer en nombre, c'est-à-dire que xa seroit égal à un nombre. Or connoissant une des racines de ce nombre xa, sçavoir a qui est 2, on connoît la seconde, sçavoir x : par consequent xx ou 18 seroit un nombre quarré, ce qui est faux. Il ne se peut donc pas faire que le produit d'un nombre non-quarré multiplié par un nombre quarré, soit nombre quarré; mais prenez garde que deux nombres qui ne sont pas quarrez peuvent en se multipliant produire un nombre quarré. Car 3 & 12 ne sont pas des nombres quarrez, mais le produit de leur multiplication 36, est un nombre quarré.

Seconde Proposition.

Theorême Second.

Le produit de deux nombres quarrez est toujours un nombre quarré, qui a pour sa racine un plan fait des deux racines de ces deux nombres quarrez. 11

Soient donnez ces deux nombres quarrez 4 & 16, dont le produit est 64. 1°. Il faut démontrer que ce produit est un nombre quarré. Soit $aa=4$, & $bb=16$, aa étant multiplié par bb, cela fait $aabb=64$. La racine quarré de $aabb$ est ab, égale à celle de 64. Or la valeur de ab est connuë; car a est égal à la racine de 4 qui est 2, & b est égal à 4, racine de 16. Donc ab est égal au produit de 2 & de 4, qui est 8: Ainsi la racine de 64 se pouvant exprimer par nombre, il faut conclure par le Lemme précédent, que 64 est un nombre quarré.

2°. Il est manifeste que la racine ab du quarré $aabb$ est le produit de a & de b, qui sont les racines des quarrez aa & bb, ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Donc un nombre quarré multiplié par lui-même, produit un nombre quarré. 12

Car le produit de cette multiplication est fait par deux nombres quarrez. Ainsi 4 par 4 fait 16, qui est un nombre quarré.

Troisie'me Proposition,

Troisiéme Theorême.

Deux raisons de nombre à nombre étant égales, le produit des antécédens & le produit des con- 13 *sequens sont entr'eux comme deux nombrez quarrez.*

Soient *a*. *b* :: *c*. *d*. La raison de *a* à *b* est de nombre à nombre, comme aussi celle de *c* à *d*. Il faut prouver que *ac* est à *bd* comme deux nombres quarrez. Ainsi si $a = 12$, $b = 24$, $c = 8$, $d = 16$, il faut prouver que 12×8, où 96 est à 24×16 ou 384, comme deux nombres quarrez.

Ces deux raisons étant égales, elles ont les mêmes exposans. Ainsi en les réduisant aux moindres termes, on les réduit à ces nombres 1. 2 :: 1. 2. Les deux antécédens de ces deux raisons sont un même nombre, & les deux consequens sont aussi un même nombre; ainsi par la définition des nombres quarrez, le produit 1 des antécédens & 4 produits des consequens, seront des nombres quarrez. Les raisons composées de raisons égales sont égales: Donc *ac* ou 96 est à *bd* ou à 384 comme 1 à 4, & par consequent comme deux nombres quarrez, ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Theorême Quatriéme.

64 *Le produit de deux nombres plans semblables, c'est-à-dire dont les racines sont proportionnelles, est un nombre quarré.*

Soient ces deux nombres plans 8 & 18, les racines du premier sont 2 & 4, celles du second sont 3 & 6. Ces quatres racines sont en proportion, 2. 3 :: 4. 6. Donc par la Proposition précédente, les plans 8 & 18 faits de ces racines, sont entr'eux comme deux nombres quarrez; sçavoir 4 & 9, qui sont les quarrez des moindres termes 2 & 3, ausquels peuvent être réduites les deux raisons égales des plans proposez ; ainsi 8. 18 :: 4. 9 ; par consequent 8. 4 :: 18. 9.

Par la même raison le produit 144 des antécédens 8 & 18, est à 36 produit des consequens quarrez 4 & 9, comme deux nombres quarrez ; sçavoir comme 4 est à 1, qui sont les quarrez des moindres termes ausquels les raisons de 8 à 4 & de 18 à 9, peuvent étre réduites : Ainsi,

144. 36 :: 4. 1.

Lors que les quarrez sont en proportion, leurs racines sont proportionnelles, Liv. IV. n. 29. Donc $\sqrt{144}$. $\sqrt{36}$ :: $\sqrt{4}$. $\sqrt{1}$. Ainsi la raison de la racine 36 à celle de 144 est connuë, puisqu'elle est égale à celle qui est entre la racine de 1 & celle de 4 qui est 2. Le produit 36 fait par les nombres quarrez 4 & 9, est un nombre quarré, 5. n. 11. Donc la racine de 144 ayant une raison connuë à un nombre connu qui est la racine quarrée du nombre quarré 36, par le Lemme cidessus proposé, ce nombre 144, qui est le produit de 8 & de 18, sera un nombre quarré ; ce qu'il falloit démontrer.

Proposition Cinquiéme.

Cinquiéme Theorême.

Le produit de deux nombres cubiques, est un nombre cubique. 15

Soient ces deux nombres cubiques 8 & 27, la racine de 8 est 2, celle de 27 est 3. Je nomme *aaa* le nombre 8, & *bbb* le nombre 27. Le produit de 8 par 27 est 216, égal par consequent à cette grandeur *aaabbb*, produit de *aaa* par *bbb*. La racine cubique de ce produit est *ab*. Or puis que *a* est égal à 2, & *b* égal à 3 ; donc *ab* est égal à 6. Ainsi la racine cubique du produit 216, qui est égal à la grandeur *aaabbb*, est 6 ; par consequent ce nombre est cubique, ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

16 *Donc un nombre cubique multiplié par lui-même produit un nombre cubique.*

Car le produit de cette multiplication est fait par deux nombres cubiques. Ainsi 8 par 8 fait 64, qui est un nombre cubique.

Sixie'me Proposition.

Theorême Sixiéme.

17 *Trois raisons de nombre à nombre étant égales, le produit des trois antécédens sera au produit des trois consequens comme deux nombres cubiques.*

Soient $b. c :: f. g :: h. l.$ le produit des antécédens de ces raisons est bfh, & celui des consequens est cgl, il faut démontrer que bfh est à cgl, comme un nombre cubique est à un autre nombre cubique.

La raison de b à c a pour exposans ces deux nombres 2, 3; donc les trois raisons données étant égales, elles auront pour exposans les mêmes nombres 2. 3 :: 2. 3 :: 2. 3. Ainsi les trois antécédens de ces nombres sont trois mêmes nombres, & les trois consequens trois mêmes nombres; donc par la définition des nombres cubiques, le produit des antecedens, qui est 8, & le produit des consequens, qui est 27, seront deux nombres cubiques. La raison de 8 à 27 est composée des mêmes raisons dont la raison de bfh à cgl, est composée: donc ces deux produits bfh & cgl, seront entr'eux comme 8 est à 27. Or ces deux nombres sont cubiques; donc bfh est à cgl, comme un nombre cubique est à un autre nombre cubique, ce qu'il falloit prouver.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Theorême Septiéme.

Le produit de deux nombres ſolides ſemblables, c'eſt à dire dont les racines ſont proportionnelles, eſt un nombre cube. 18

Cela ſe démontre de la même maniere qu'on a prouvé que le produit de deux plans ſemblables eſt un nombre quarré.

AVERTISSEMENT.

De ce que nous avons démontré touchant les ſecondes & troiſiémes puiſſances, il ſuit clairement que le produit de deux puiſſances numeriques d'un même degré, eſt un nombre de la même puiſſance; par exemple, qu'un nombre quarré de quarré, multiplié par un nombre quarré de quarré, produit un nombre quarré de quarré. Que ſi quatre raiſons de nombre à nombre ſont égales, le produit des antécédens eſt à celui des conſequens, comme deux nombres de quarré de quarré: ainſi des cinquiémes, ſixiémes puiſſances numeriques à l'infini.

Il faut ſe ſouvenir ici que dans le langage des anciens Géométres, le quarré eſt la premiere puiſſance, & le cube la ſeconde. Nous avons vû les raiſons que les nouveaux Géométres ont eû de changer ce langage.

SECTION SECONDE.

Regles pour connoître si des Grandeurs proposées sont commensurables ou incommensurables.

AVERTISSEMENT.

J'Abrége autant que je le puis cette doctrine de la commensurabilité & incommensurabilité, parce qu'il suffit dans les Elémens d'en donner les principes généraux. Je ne parle ici que de ce qui peut être commun à toutes sortes de grandeurs. Je ne touche point à ce qui appartient à la Géométrie.

DEFINITIONS.

PREMIE'RE DE'FINITION.

19 *Deux Grandeurs sont commensurables, lors que la raison qui est entr'elles se peut exprimer par nombre; incommensurables, si cette raison est sourde.*

SECONDE DE'FINITION.

20 *Si deux Grandeurs n'étant pas comme nombre à nombre, leurs quarrez ou leurs cubes sont comme nombre à nombre, on dit alors que ces grandeurs sont incommensurables en elles-mêmes, mais qu'elles sont commensurables en puissance.*

Si $xx = 18$ & $aa = 25$. la racine de 18 ou de xx qui est x, est incommensurable avec a racine de aa; mais ces racines qui sont incommensurables en elles-mêmes, sont commensurables en puissance, puis que $xx. aa :: 18. 25$.

DEMANDE.

DEMANDE.

Si un nombre meſure une certaine grandeur, toute autre grandeur qui lui eſt incommenſurable eſt auſſi incommenſurable avec ce nombre. 21

Soit 3 commenſurable avec 12, avec lequel x eſt incommenſurable : je dis que 3 & x ſont incommenſurables : car ſi x étoit un certain nombre de fois dans 12, ou 12 dans x, il eſt évident que 3 ſeroit auſſi en x d'une maniére qui s'exprimeroit par nombre.

PROPOSITION HUITIE'ME.

Huitiéme Theorême.

La raiſon doublée ou triplée d'une raiſon de nombre à nombre, eſt auſſi une raiſon de nombre à nombre, qui a pour ſes expoſans des nombres quarrez ſi elle eſt doublée, & des nombres cubiques ſi elle eſt triplée. 22

La raiſon doublée eſt une raiſon compoſée de deux raiſons égales, dont les antécédens ont été multipliez l'un par l'autre, & les conſéquens de la même maniére l'un par l'autre ; par conſéquent s̄. n. 13, ces deux produits qui ſont les termes de la raiſon doublée, ſont entr'eux comme deux nombres quarrez ; ainſi cette raiſon a pour ſes expoſans des nombrez quarrez.

Une raiſon triplée eſt compoſée de trois raiſons égales ; ainſi les termes de cette raiſon triplée ſont entr'eux comme deux nombres cubiques, s̄. n. 17, & cette raiſon a pour ſes expoſans des nombres cubiques ; ce qu'il falloit démontrer.

Proposition Neuvie'me.

Neuviéme Theorême.

23 *Une raison simple est sourde, si la raison doublée ou triplée de cette raison n'a pas pour ses exposans des nombres quarrez ou cubiques.*

Si xx n'est pas à zz comme des nombres quarrez, & xxx à zzz comme des nombres cubiques, je dis que la raison de x à z est une raison sourde; car si elle est de nombre à nombre, il faut par la proposition précédente, qui xx soit à zz, ou xxx à zzz comme nombre à nombre, & que la raison de xx à zz ait des nombres quarrez pour ses exposans, & la raison de xxx à zzz des nombres cubiques: Or par l'hypothése cela n'est point; il est donc impossible que la raison de x à z soit une raison de nombre à nombre.

Dixie'me Proposition.

Theorême Dixiéme.

24 *Trois grandeurs étant continuellement proportiennelles, la raison de la premiere à la troisiéme ne peut être que de trois sortes.*

1°. *Ou de nombre à nombre, ayant pour ses exposans des nombres quarrez.*

2°. *Ou de nombre à nombre n'ayant pas pour ses exposans des nombrez quarrez.*

3°. *Ou sourde, & non de nombre à nombre.*

Premier Cas.

Si la raison de la premiere grandeur à la troisiéme est une raison de nombre à nombre, qui a pour ses exposans des nombres quarrez, ces trois grandeurs sont commensurables.

Soient ∺ $b. c. d.$ trois grandeurs. $b. d :: 4. 9.$ le produit des nombres quarrez 4 & 9 qui est 36, sera $\overline{\overline{5}}$. n. 11, un nombre quarré dont la racine se pourra par consequent exprimer par ce nombre *6*. Or *6* est le produit de la racine de 4 qui est 2, multiplié par la racine de *9* qui est 3 : Donc Liv. IV. n. 20. Ce nombre *6* est un moyen proportionnel entre 4 & *9*. Donc puis que *c* est un moyen proportionnel entre *b* & *d*, il faut que $c = 6$. Ainsi ces trois grandeurs *b. c. d.* seront commensurables, puisque la raison qu'elles ont entr'elles se peut exprimer avec des nombres.

Second Cas.

Si la raison de la premiere grandeur à la troisiéme, est une raison de nombre à nombre qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrez, la moyenne grandeur est incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance à la premiere & à la troisiéme.

Soient $\div$ *k. l. m.* trois grandeurs *k.m* :: 3. 4. La raison de *k* à *m* est doublée de la raison de *k* à *l*, ou composée des deux raisons égales de *k* à *l* & de *l* à *m*. Or 3 & 4, qui sont les exposans de cette raison doublée de *k* à *m*, ne sont pas deux nombres quarrez ; les deux raisons de *k* à *l* & de *l* à *m* dont cette raison est composée, ne peuvent donc être des raisons de nombre à nombre, par la neuviéme Proposition ci-dessus. Donc *k* & *l* sont incommensurables, comme aussi *l* & *m*. Mais puisque Liv. IV. n. 32.

$$\left.\begin{matrix} kk. & ll \\ ll. & mm \end{matrix}\right\} :: k.m. \text{ ou } 3.4.$$

Donc *kk*, *ll*, *mm*, sont commensurables ; donc *k. l. m*, que l'on a démontré être incommensurables en elles-mêmes, sont commensurables en puissance, c'est-à-dire que leurs quarrez sont commensurables ; ce qu'il falloit prouver. *kk* est à *ll* comme 3 à 4, & *ll* est à *mm* comme 3 à 4.

On se tromperoit ici si on prenoit pour exposant d'autres nombres que ceux qui sont les plus petits. Car par exemple si on prend ces trois nombres 3. 6. 12, ausquels soient égaux k, l, m; *il est vrai que* k. l. m :: 3. 6. 12. *Ainsi* k. l. m. *sont commensurables, quoique la raison de* k *à* m *qui est double de celle de* k *à* l, *& de celle de* l *à* m, *ne soient pas comme celle de deux nombres quarrez; car 3 & 12 ne le sont pas. Mais si on réduit ces nombres aux plus petits, on aura 1. 2. 4. alors* k *sera à* m *comme 1 à 4, qui sont deux nombres quarrés, ce qui rentre dans le premier cas. Les nombres exposans d'une raison sont toujours les plus petits de ceux qui la puissent exposer.*

Troisiéme Cas.

Si la raison de la premiere grandeur à la troisiéme n'est pas de nombre à nombre, la moyenne grandeur sera incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance.

N'étant pas de nombre à nombre, elle n'est pas par consequent comme des nombres quarrez. Ainsi la raison simple de la premiere à la seconde dont celle de la premiere à la troisiéme est doublée, sera sourde par la 9e Proposition ci-dessus. On suppose toujours que la premiere grandeur est connuë; par consequent si la raison qu'elle a avec la seconde est sourde, il faut que celle-ci soit inconnuë, & qu'elle ne se puisse exprimer en nombres, non plus que la troisiéme.

Cette seconde grandeur sera aussi incommensurable en puissance, parce que le quarré de la premiere est au quarré de la seconde, comme la premiere est à la troisiéme Liv. IV. n. 32. Donc si la raison de la premiere à la troisiéme n'est pas de nombre à nombre, la raiſon du quarré de la premiere au quarré de la ſeconde, ne ſera pas de nombre à nombre. La premiere & la ſeconde ſont donc incommenſurables en puiſſance. Il en eſt de même de la ſeconde à la troiſiéme : ainſi ces trois grandeurs ſont incommenſurables en elles-mêmes & en puiſſance.

Onzie'me Proposition.
Theorême Onziéme.

Quatre grandeurs étant continuellement pro- 25
portionnelles, la raiſon de la premiere à la quatriéme ne pouvant être que de trois ſortes ; voici ce qui arrivera.

Premier Cas.

Si la raiſon de la premiere à la quatriéme eſt une raiſon de nombre à nombre qui ait pour ſes expoſans des nombres cubiques, ces quatre grandeurs ſeront commenſurables.

Soient $\div\div$ *b. c. d. f.* quatre grandeurs, *b. f* :: 8. 27. puis que 8 & 27 ſont deux nombres cubiques, leurs racines ſont connuës ; celle de 8 eſt 2, celle de 27 eſt 3. Multipliant le quarrée de la premiere racine, lequel eſt 4 par la ſeconde racine qui eſt 3, ce qui produit 12 ; & 9 quarré de la ſeconde racine par la premiere racine qui eſt 2, ce qui produit 18, ces deux produits 12 & 18, ſeront deux moyens proportionnels entre 8 & 27. Liv. IV. n. 21 ; partant *b. c. d. f* :: 8. 12. 18. 27. Ainſi les raiſons que ces quatre grandeurs ont entr'elles pouvant être exprimées par nombres, elles ſont commenſurables.

Second Cas.

Si la raiſon de la premiere à la quatriéme eſt une raiſon de nombre à nombre qui n'ait pas *pour ses exposans des nombres cubiques, la premiere & la seconde grandeur sont incommensurables en elles-mêmes, & commensurables en troisiéme puissance; & il en est de même de la seconde & de la troisiéme, comme aussi de la troisiéme & quatriéme grandeur.*

Soient $\div$ *k. l. m. n.* on suppose que *k. n* :: 3. 4. la raison de *k* à *n* étant triplée de la raison de *k* à *l*, ou composée de trois raisons égales de *k* à *l*, de *l* à *m*, de *m* à *n*; chacune de ces trois raisons égales ne sçauroit être de nombre à nombre, 5. n. 23. Puisque la raison de *k* à *n* qui est triplée de ces raisons, a pour ses exposans les nombres 3 & 4, qui ne sont pas des nombres cubiques; Ainsi elles sont incommensurables, *k* avec *l*, *l* avec *m*, & *m* avec *n*. Mais Liv. IV. n. 33.

$$\left.\begin{array}{ll} kkk. & lll \\ lll. & mmm \\ mmm. & nnn \end{array}\right\} \;.:\; \left\{\begin{array}{ll} k. & n. \\ & \text{ou} \\ 3. & 4. \end{array}\right.$$

Donc ces cubes sont commensurables, puis qu'ils sont comme 3 à 4; par consequent les 4 grandeurs proposées *k. l. m. n.* sont commensurables en troisiéme puissance, puis que leurs cubes sont commensurables.

Troisiéme Cas.

Si la raison de la premiere à la quatriéme grandeur n'est pas de nombre à nombre, la premiere & la seconde, la seconde & la troisiéme, la troisiéme & la quatriéme, sont incommensurables tant en elles-mêmes qu'en troisiéme puissance.

1°. Puisque la raison de la premiere à la quatriéme qui est triplée des raisons de ces quatre grandeurs, n'est pas comme des nombres cubes, n'étant pas même de nombre à nombre 5. n. 23. Ces raisons de ces quatre grandeurs sont sourdes;

ainſi elles ſont incommenſurables en elles-mêmes.

2°. Ces grandeurs ſont pareillement incommenſurables en troiſiéme puiſſance ; parceque la raiſon du cube de la premiere au cube de la ſeconde, eſt la même que la raiſon de la premiere grandeur à la quatriéme, que l'on ſuppoſe n'être pas de nombre à nombre.

Douzie'me Proposition.

Douziéme Theorême.

Si deux grandeurs quarrées n'ont pas des nombres quarrez pour les expoſans de leur raiſon, les racines en ſont incommenſurables. 26

Et de même ſi deux grandeurs cubiques n'ont pas pour les expoſans de leur raiſon des nombres cubiques, elles ſont incommenſurables.

Car les quarrez ſont en raiſon doublée de leurs racines, & les cubes en raiſon triplée. Or ſ. n. 23. ſi deux raiſons ou doublées ou triplées n'ont pas pour expoſans des nombres quarrez ou des nombres cubiques, les raiſons dont elles ſont compoſées ſont ſourdes : Ainſi les racines des quarrez ou des cubes qui ne ſont pas entr'eux comme nombre à nombre, n'ont entr'elles qu'une raiſon ſourde ; ainſi elles ſont incommenſurables.

Treizie'me Proposition.

Theorême Treiziéme.

Entre deux nombres qui n'ont pas pour expoſans de leur raiſon des nombres quarrez, on ne peut trouver un nombre qui ſoit moyen proportionnel, & entre deux nombres, qui n'ont pas pour expoſans de leur raiſon des nombres cubiques, on ne peut pas trouver deux nombres qui ſoient moyens proportionnels. 27

Car si la premiere de ces deux choses se pouvoit, trois grandeurs proportionnelles seroient commensurables, quoique la premiere ne fût pas à la troisiéme comme deux nombres quarrez; ce qui est impossible par le second Cas de la Proposition dixiéme.

Et si la seconde se pouvoit, quatre grandeurs proportionnelles seroient commensurables, quoique la premiere ne fût pas à la quatriéme comme deux nombres cubiques; ce qui est impossible par le second cas de la Proposition onziéme.

Corollaire I.

28 *Deux nombres ne sont pas quarrez, si les exposans de leur raison ne sont pas des nombres quarrez.*

Soient *bb*. *cc* :: 1. 2. ces deux nombres 1 & 2 exposans de la raison de *bb* à *cc*, n'étant pas quarrez, *bb* & *cc* ne le peuvent être; car par la Proposition précédente, entre *bb* & *cc* on ne peut trouver de moyen proportionnel; ce qui se pourroit faire si *bb* & *cc* étoient deux nombres quarrez; car le produit *bbcc* seroit un nombre quarré. §. n. 11. Dont la racine *bc*, Liv. IV. n. 20. seroit moyen proportionnel entre *bb* & *cc*.

Corollaire II.

29 *Ainsi l'on voit évidemment que l'on ne peut trouver un nombre quarré qui soit moitié, ou tiers, ou la cinquiéme partie, ou la sixiéme, ou la septiéme, &c. d'un autre nombre quarré.*

Puis que ces nombres 2. 3. 5. 6. 7. &c. exposans de ces raisons, ne sont point des nombres quarrez.

Corollaire III.

30 *Deux nombres ne sont point cubiques, si les*

expoſans de leur raiſon ne ſont pas nombres cubiques.

Soient *ddd.fff* :: 1. 2. Ces deux nombres 1, 2. qui ſont les expoſans, ne ſont pas cubiques; partant *ddd* & *fff*, ne le peuvent être. Car par la Propoſition précédente, on ne peut pas trouver deux moyens proportionnels entre *ddd* & *fff*, ce qui ſe pourroit faire neanmoins Liv. IV. n. 36, ſi *ddd* & *fff* étoient deux nombres cubiques.

COROLLAIRE IV.

Ainſi on voit qu'on ne peut pas trouver un 31
nombre cubique qui ſoit ou moitié, ou tiers, ou la quatriéme, ou la cinquiéme, ou la ſixiéme, ou la ſeptiéme partie, &c. d'un autre nombre cubique.

Puis que ces nombres 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. ne ſont pas des nombres cubiques.

QUATORZIE'ME PROPOSITION.
Quatorziéme Theorême.

On ne peut exprimer par nombres, ſoit entiers, 32
ſoit rompus, la valeur de la racine d'une puiſſance imparfaite.

Soit ce nombre 18 qui n'eſt pas un nombre quarré. Car il eſt évident qu'il n'y a point de nombre entier qui multiplié par lui-même faſſe 18. On pourroit, comme on l'a dit, penſer qu'il pourroit y avoir quelque nombre rompu, qui exprimât la valeur de ſa racine, que je nomme x, mais je vais démontrer que cela eſt impoſſible; car ſi cela étoit, la raiſon de x à 18 ne ſeroit pas ſourde; Or elle l'eſt, ce que je prouve ainſi. Je multiplie 18 par 1, ce qui fait 18, que je puis ainſi conſiderer comme un nombre plan, dont la racine quarrée eſt un moyen proportionnel entre 1 & 18.

Liv. III. n. 68. Ainsi $\div$ 1. x. 18. Or par le second Cas de la dixiéme Proposition ci-dessus, la raison de 1 à 18 n'ayant pas pour ses exposans des nombres quarrez, x est incommensurable avec 1 & avec 18.

Donc par la demande s̅. n. 21. tout nombre ou toute grandeur commensurable avec 18 ou avec 1, ne le sera pas avec x; ainsi x ne se peut exprimer avec aucun nombre. Sa raison avec 18 est donc sourde, ce qu'il falloit démontrer.

Soit donné le nombre 24 qui n'est pas cubique, je nomme x sa racine cubique, & prenant le cube de 1, qui est 1. $\div$ 1. 1x. 1xx. 24. Liv. IV. n. 21. Par le second Cas de la onziéme Proposition ci-dessus, la raison de 1 avec 1x & 1xx à 24, est sourde. Or 1xx est la même chose que xx, & de même 1x & x. Donc x étant incommensurable avec 1 & 24, grandeurs commensurables, il sera aussi incommensurable avec tout autre nombre, & ne se pourra point exprimer.

Ainsi de toutes les autres puissances imparfaites.

Autre Démonstration.

Pour avoir une démonstration sensible qu'il n'y a point de nombre rompu qui puisse exprimer la valeur de x qu'on suppose la racine quarrée de 18, il faut se souvenir que pour réduire 18 en fraction afin d'avoir une racine plus grande que 4 racine de 16, nombre quarré qui approche le plus de 18, il faut multiplier 18 par le quarré de la fraction dans laquelle on a réduit 18. page 294e. Ce produit n'est point un nombre quarré s̅. n. 10. donc en ayant ôté la racine quarrée du plus prochain, il restera encore quelque chose. Prenant une plus petite fraction on aura encore un nombre qui ne ſera pas quarré. Il eſt bien vrai qu'on trouvera une racine plus grande que la précédente, mais moindre que la veritable ; ainſi puiſque quelque petite fraction qu'on prenne, ce ne ſera jamais un quarré, il y aura toujours du reſte, ſans pouvoir jamais venir à une grandeur préciſement égale à x.

SECTION TROISIE'ME.

Des Operations de l'Arithmétique ſur les Grandeurs incommenſurables.

CHAPITRE PREMIER.

On peut faire toutes les Operations de l'Arithmétique ſur les Grandeurs incommenſurables. Préparations pour cela.

QUOY qu'on ne connoiſſe point la valeur d'une racine ſourde, on peut néanmoins faire ſur elle toutes les operations de l'Arithmétique, l'ajouter avec une autre racine ou l'en ſoutraire, les multiplier ou les diviſer l'une par l'autre. Ces racines qu'on nomme Grandeurs *irrationelles* ou ſourdes, ſe rencontrent ſouvent. L'extraction des racines, ſoit de celles qui ſont quarrées, ſoit de celles qui ſont cubiques, eſt une operation fort ordinaire. Comme il y a donc plus de nombres qui ne ſont ni quarrez ni cubiques, que de nombres quarrez ou cubiques, à tous momens on trouve des racines ſourdes ; ainſi il eſt important de connoître comment on peut operer ſur ces ſortes de grandeurs : mais avant 33 que de faire ces operations sur les racines sourdes, il les faut préparer. Cette préparation est aisée ; elle est fondée sur la demande suivante.

DEMANDE.

34 *Une racine ne devient pas plus grande lors que de racine quarrée qu'elle étoit on fait qu'elle est racine cubique, ou racine quarrée de quarré, en augmentant les dimensions de la grandeur dont elle est la racine.*

Par exemple a est la racine de toutes ces puissances. a^2. a^3. a^4. a^5. ainsi leurs racines ne valent pas l'une plus que l'autre.

PROPOSITION QUINZIE'ME.

Problême Premier.

35 *Réduire deux ou plusieurs racines sourdes à un même nom ou même signe.*

Pour réduire deux racines au même nom, il faut élever la plus petite puissance à la plus grande, selon qu'on l'a enseigné ; si la premiere est $\sqrt{aa}$, & la seconde $\sqrt[3]{b^3}$, j'augmente aa d'une dimension, & alors $\sqrt[3]{a^3}$. & $\sqrt[3]{b^3}$, auront un même nom, ce seront deux racines cubiques : ce qui ne change point leur valeur ; car par la Demande précédente $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[2]{a^2}$.

Quand on veut réduire une grandeur absoluë à un même nom avec une racine donnée, il faut prendre le quarré ou le cube de la grandeur absoluë, selon que la racine proposée est racine de quarré ou de cube, &c. Ainsi s'il faut réduire 5 & $\sqrt{27}$ au même nom, je prens le quarré de 5 qui est 25, devant lequel je mets le signe radical ainsi,

$\sqrt{25}$. Après cela 5 & $\sqrt{27}$ sont réduits au même nom sans changer leur valeur; car $\sqrt{25}$ est la même chose que 5.

L'on ne peut pas toujours selon cette regle réduire au même signe deux racines sourdes. Par exemple, soient données ces deux racines $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{40}$; pour élever cette racine $\sqrt{5}$, de quarrée la faire une racine cubique, il faudroit multiplier le quarré 5 par sa racine quarrée, ce qui est impossible, puisque cette racine est sourde. Il faut donc élever ces deux racines proposées à de plus hautes puissances, sans qu'il soit besoin de connoître la valeur de la racine quarrée de 5, ni celle de la racine cubique de 40. Dans l'exemple proposé; multipliant 5 par lui-même, on fait 25, qui est un quarré de quarré dont la racine est $\sqrt[4]{25}$, qui est la même chose que $\sqrt{5}$; & en multipliant le quarré de quarré 25 par le quarré, j'aurai 125 qui est un quarré cube dont la racine est $\sqrt[6]{125}$, égale à $\sqrt{5}$. En multipliant le cube 40 par lui-même cela fait 1600, qui est un quarré cube dont la racine est $\sqrt[6]{1600}$, égale à $\sqrt[3]{40}$. Ainsi les deux racines $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{40}$, étant réduites à celles-cy $\sqrt[6]{125}$ & $\sqrt[6]{1600}$, elles ont un même nom.

DE'FINITION.

On appelle exposant d'une grandeur incommensurable l'expression la plus simple qui puisse marquer sa juste valeur. 36

LEMME.

Une puissance faite par la multiplication de 37 *deux puissances a pour racine, le produit des deux racines de ces deux puissances.*

Soit *aaxx*, fait de la multiplication de *aa* par *xx*, la racine de ce quarré est *ax* produit des racines des deux quarrez *aa* & *xx*. De même soit *aaaxxx* fait de la multiplication de *aaa* par *xxx*, la racine de ce cube est *ax* produit des deux cubes *aaa* & *xxx*, ce qui est évident.

On ne met le signe radical que devant les puissances imparfaites pour marquer leur racine. Les racines de celles qui sont parfaites s'expriment simplement sans ce signe. Ainsi au lieu de $\sqrt{aa}$, *on écrit simplement* a. *Car* $\sqrt{aa} = a$.

PROPOSITION SIXIE'ME.

Problême Second.

38 *Réduire les racines sourdes à des expressions plus simples, ou aux plus petits termes avec lesquels elles puissent être exprimées.*

Cette réduction ne se peut faire que lors que les puissances devant lesquelles est placé le signe radical sont telles qu'elles peuvent être divisées par un diviseur, lequel, ou le quotient de la division, soit un nombre quarré ou cube. Par exemple, on pourroit réduire $\sqrt{27}$ à une expression plus simple, divisant 27 par 9, un nombre quarré, le quotient de cette division est 3, que j'écris après le signe radical devant lequel j'écris la racine de 9 qui est 3, ainsi $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$.

Puisque 9 est trois fois dans 27, donc $9 \times 3 = 27$ donc considerant 9 & 3 comme deux quarrez, le produit de leurs racines qui sont 3 & $\sqrt{3}$, sera la racine de 27 par le Lemme précédent. Ainsi $3 \times \sqrt{3}$ ou $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$. Ainsi $3\sqrt{3}$ est l'expoſant de cette grandeur incommenſurable $\sqrt{27}$.

Pour réduire à un même terme deux grandeurs incommenſurables, il faut trouver, ſi cela eſt poſſible, un commun diviſeur qui ſoit tel, que le quotient de la diviſion ſoit une puiſſance parfaite. Soient données ces deux grandeurs incommenſurables $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, pour les réduire à de plus petits termes, je diviſe 75 & 27 par 3. les quotiens ſont 25 & 9 nombres quarrez, dont les racines ſont 5 & 3. Je les place devant le ſigne radical $\sqrt{}$, après lequel je mets le diviſeur 3, de cette maniere $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; & je dis que $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$ & $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$; comme nous venons de le démontrer.

Corollaire.

On peut connoître quelle eſt la raiſon de deux racines ſourdes. 39

Ayant réduit ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$ à cette expreſſion $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, puiſque deux produits dont un des multiplicateurs eſt le même, ſont entr'eux comme les multiplicateurs inégaux. Donc $5\sqrt{3} . 3\sqrt{3} :: 5 . 3$. Ainſi une racine qui n'eſt pas commenſurable avec le quarré dont elle eſt la racine, peut être commenſurable avec une autre racine ſourde.

Définition.

Les racines ſourdes dont on peut ainſi exprimer la raiſon, ſont appellées communicantes *ou* commenſurables. 40

Proposition Dix-septième.

Problême Troiſiéme.

Trouver ſi deux racines ſourdes ſont commen- 41 *surables ou communicantes entr'elles.*

Cela se trouve par la multiplication & par la division. 1°. Multipliant deux grandeurs proposées, l'une par l'autre, si leur produit est un nombre quarrée, leurs racines sont *communicantes.* Soient ces deux grandeurs $\sqrt{2}$ & $\sqrt{8}$, je multiplie 2 par 8; le produit 16 est un nombre quarré, dont 4 la racine montre que $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{8}$ comme 1 à 2, ce que je démontre.

Soit $2 = xx$ & $8 = zz$, partant $\sqrt{2} = x$ & $\sqrt{8} = z$, le produit de xx par zz est $xxzz$ égal à 16. ainsi $xz = 4$. Or Liv. IV. n. 20. $xx . xz :: xz . zz$. Donc $xx . xz :: x . z$, ou ce qui est la même chose $2 . 4 :: \sqrt{2} . \sqrt{8}$, & partant $1 . 2 :: \sqrt{2} . \sqrt{8}$.

2°. Divisant deux grandeurs l'une par l'autre, si le quotient de la division est un nombre quarré, leurs racines sont *communicantes.* Je divise 8 par 2, le quotient 4 est un nombre quarré; alors $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{8}$ comme 1 à 2. Car 2 & 8 divisez par 2, demeurent en même raison. Liv. III. n. 65. Ainsi $2 . 8 :: 1 . 4$. Donc Liv. IV. n. 29. $\sqrt{2} . \sqrt{8} :: \sqrt{1} . \sqrt{4}$. c'est-à-dire que $\sqrt{2} . \sqrt{8} :: 1 . 2$, ce qu'il falloit prouver.

Exemples.

Je connois aussi que les racines $\sqrt{a^4 + aabb}$ & $\sqrt{aabb + b^4}$ sont commensurables, parceque divisant $a^4 + aabb$ par $aa + bb$, le quotient est aa; & divisant $aabb + b^4$ par le même diviseur $aa + bb$, le quotient sera bb. Ces deux quotiens aa & bb sont deux nombres quarrez dont les racines sont a & b; ainsi les deux racines proposées, réduites à leurs expressions les plus simples, selon qu'il a été enseigné $\bar{s}$. n. 38. sont $a\sqrt{aa + bb}$ & $b\sqrt{aa + bb}$, lesquelles sont comme a est à b. Soient encore données ces deux racines $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, je divise 12 & 3 par 3, les deux quotiens sont 4 & 1 deux nombres quarrez. Donc $\bar{s}$ n. 28. $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ & $1\sqrt{3}=\sqrt{3}$; car 1 ne multiplie point. Par cette operation je découvre que l'une de ces deux racines est double de l'autre.

Soient données ces deux racines $\sqrt[3]{135}$ & $\sqrt[3]{320}$; pour connoître si elles sont commensurables, je divise l'une & l'autre par 135, les quotiens sont 1 & $2\frac{50}{135}$. Je réduis la fraction du dernier quotient à une fraction plus simple, divisant le numérateur & le dénominateur par 5, & vient $\frac{10}{27}$ Liv. V. n. 24. Ainsi $\frac{50}{135}=2\frac{10}{27}$. Je réduis les deux entiers en fractions comme il a été enseigné, écrivant $\frac{54}{27}$ à quoi ajoutant $\frac{10}{27}$, cela fait $\frac{64}{27}$. Je réduis pareillement le premier quotient 1 à une fraction de même nom que cette derniere, écrivant $\frac{27}{27}$. La racine cubique de $\frac{27}{27}$ est $\frac{3}{3}$, celle de $\frac{64}{27}$ est $\frac{4}{3}$: Donc $\sqrt[3]{320}.\sqrt[3]{135}::\frac{4}{3}.\frac{3}{3}::4.3.$ Ces exemples peuvent suffire, parceque mon dessein est d'être le plus court que je pourrai.

CHAPITRE II.

Les quatre opérations de l'Arithmétique sur les racines sourdes.

POur faire l'addition des racines, il ne suffit pas d'ajouter en une somme les grandeurs dont elles sont racines ; car par exemple, ayant ajouté 16 avec 9, cela fait 25, dont la racine quarrée qui est 5, n'est pas 7, somme des racines de 9 & de 16 ; il faut donc chercher des regles particulieres. La premiere chose que l'on doit faire, est de réduire au même nom les racines proposées, si elles en ont de differens, & ensuite les réduire à l'expression la plus simple.

PROPOSITION DIX-HUITIE'ME.

Problême Quatriéme.

42 *Ajouter dans une somme deux ou plusieurs racines sourdes.*

Cela se peut faire en plusieurs manieres. 1°. Joignant par le signe $+$ les racines données, ainsi pour ajouter $\sqrt{45}$ avec $\sqrt{30}$, je lie ces deux racines par $+$ en cette maniere $\sqrt{45} + \sqrt{30}$.

2°. Il faut réduire les racines proposées à un même nom, pour reconnoître si elles sont commensurables entr'elles. Si elles le sont, il faut ajouter dans une somme les exposans de leur raison, & mettre ensuite le signe radical avec le diviseur commun, par lequel les grandeurs, dont les racines sont proposées, ont été divisées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expression $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, qui me fait connoître que les exposans de ces racines sont 5 & 3, que j'ajoute, écrivant selon cette régle $8\sqrt{3}$, qui est la somme de $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, comme il est évident.

3°. Pour ajouter deux racines secondes sourdes d'une troisiéme maniere, il faut premierement sçavoir que multipliant les quarrez de deux racines l'un par l'autre, la racine de ce quarrée sera le plan de deux racines, ce qui est évident; xx multiplié par zz produit le quarré $xxzz$, dont la racine xz est le plan des racines de xx & zz. Il est aussi évident que la racine quarrée de l'addition de xx avec zz plus deux fois le plan des deux racines de xx & de zz, c'est-à-dire $2xz$. Il est, dis-je, évident que $x+z$ la racine de cette somme $xx+2xz+zz$, est la somme des racines de xx & de zz. Partant pour ajouter $\sqrt{75}$ avec $\sqrt{48}$. 1°. J'ajoute 75 avec 48, ce qui fait 123. 2°. Je multiplie 75 par 48, le produit est 3600 dont la racine quarrée 60 est le plan des racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{48}$, comme on le vient de voir. Je double 60, ce qui fait 120, que j'ajoute à 123, cela fait 243, dont la racine quarrée qui est $\sqrt{243}$, est la somme de $\sqrt{75}$, ajouté avec $\sqrt{48}$.

Lors que le produit des deux nombres n'est pas un nombre quarré comme l'est celui de 75 & de 48, on ne peut point en cette maniere ajouter ainsi les racines secondes proposées.

Proposition Dix-neuviéme.

Problême Cinquiéme.

Soustraire des Racines sourdes les unes des autres. 43

Cela se peut faire aussi en plusieurs manieres, 1°. en changeant les signes qui précédent les signes radicaux; pour soustraire $\sqrt{aa-bb}$ de

$\sqrt{aa + bb}$, il faut écrire $\sqrt{aa + bb} - \sqrt{aa - bb}$. Pour ôter $\sqrt{40}$ de $\sqrt{50}$, j'écris $\sqrt{50} - \sqrt{40}$.

2°. Lorſque les racines données ſont commenſurables entr'elles, il faut retrancher l'expoſant de l'une de l'expoſant de l'autre, & mettre enſuite le ſigne radical avec le diviſeur commun par lequel les grandeurs, dont les racines ſont propoſées, ont été diviſées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expreſſion qui eſt plus ſimple $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; enſuite pour retrancher $3\sqrt{3}$ de $5\sqrt{3}$, j'écris $2\sqrt{3}$, qui eſt ce qui reſte après cette ſouſtraction, ou ce qui eſt la différence des deux racines propoſées.

3°. Pour les ſecondes racines ſourdes, on ajoute dans une ſomme les deux grandeurs qui ſont après le ſigne radical, & l'on retranche de cette ſomme deux fois la racine du produit de ces deux grandeurs; & la racine de ce qui reſte, eſt la différence ou le reſte qu'on cherche.

Pour retrancher $\sqrt{48}$ de $\sqrt{75}$, j'ajoute dans une ſomme 75 & 48; & j'ai 123, dont je retranche 120, c'eſt-à-dire deux fois 60, qui eſt la racine de 3600, produit de 75 par 48. Il reſte 3, dont la racine, ſçavoir $\sqrt{3}$ eſt la différence ou le reſte que l'on cherche.

Le nombre 75 ſoit nommé xx, & 48 ſoit nommé zz, en rétranchant $\sqrt{zz}$ de $\sqrt{xx}$, le reſte eſt $x - z$. Ainſi il faut démontrer que $x - z = \sqrt{3}$. Le quarré de $x - z$ eſt $xx - 2xz + zz$, lequel eſt égal à 75 plus 48, moins deux fois le produit de la racine du produit de 75 & de 48; laquelle eſt 60. Ainſi $xx - 2xz + zz = 75 - 120 + 48$. Or de $75 + 48$, c'eſt-à-dire de 123 ayant retranché 120, le reste est 3. Donc $\overline{xx - 2xz + zz} = 3$. Donc $\sqrt{xx - 2xz + zz}$, ou $x - z = \sqrt{3}$, ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VINGTIE'ME.

Theorême Sixiéme.

Multiplier deux Racines sourdes. 44

1°. Si ces deux racines sont les mêmes, il ne faut qu'ôter à l'une le signe radical. Quand on multiplie $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on cherche un quarré dont $\sqrt{5}$ marque la racine, par consequent ce quarré est 5.

2°. En general les racines ayant été réduites au même nom, il faut multiplier les grandeurs dont les racines sont proposées les unes par les autres, la racine de ce produit, sera celui des racines, ce qui est évident; car soient ces deux grandeurs xx & zz, leur produit est $xxzz$ dont la racine quarrée est xz, produit de x & de z les deux racines de xx & de zz. S'il faut donc multiplier la racine $\sqrt{15}$ par $\sqrt{6}$, je multiplie 15 par 6, ce qui fait 90, dont la racine quarrée est égale à la racine de 15 multipliée par celle de 6.

S'il faut multiplier $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{cd}$, le produit sera $\sqrt{abcd}$.

Lorsque les racines sont réduites à leurs plus petits termes, on multiplie ce qui précéde le signe radical de l'un par ce qui précéde celui de l'autre, & ce qui le suit par ce qui le suit; en conservant le même signe $\sqrt{\ }$ entre deux; ainsi $3\sqrt{2}$ par $5\sqrt{3}$ donnent pour produit $15\sqrt{6}$.

Mais lorsque ces Racines sont communicantes, il suffit de multiplier ce qui précéde les signes l'un par l'autre, & ensuite multiplier ce produit par le diviseur commun qui est sous le signe;

ainsi pour multiplier $5\sqrt{3}$ par $3\sqrt{3}$, je multiplie 5 par 3 qui precedent les signes, & le produit 15 par 3 qui est le diviseur commun sous le signe $\sqrt{}$, ce dernier produit 45 est le cherché, car ces deux racines $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, étant considerées comme réduites à leurs plus simples expressions & non communicantes, leur multiplication auroit donné pour produit $15\sqrt{9}$. Or 9 étant un nombre quarré dont 3 est la racine ; ce signe $15\sqrt{9}$, marque que 15 est multiplié par 3, ce qui fait 45. On trouve ainsi que le produit de $\sqrt{27}$ par $\sqrt{75}$, dont $3\sqrt{3}$ & $5\sqrt{3}$ sont les exposans, est 45.

Corollaire.

45 *On peut connoître le produit de deux secondes racines sourdes, lors que les grandeurs dont elles sont les racines étant multipliées l'un par l'autre, produisent un nombre quarré.*

Ces racines sourdes $\sqrt{2}$ & $\sqrt{50}$ étant multipliées l'une par l'autre, elles produisent le nombre quarré 100, dont la racine est 10 ; qui étant égale au produit des racines de 2 & de 50, on connoît le produit de ces racines.

Cela est admirable qu'on ne puisse point connoître deux grandeurs, & qu'on puisse démontrer la valeur de leur produit, & même quelle raison elles ont entr'elles ; car ces deux racines étant données $\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}$. je sçay que leur produit est $\sqrt{36}$, c'est à dire 6 ; & comme elles sont communicantes, *je sçay encore que $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{18}$ comme 1 est à 3, puisque $\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$ & $\sqrt{18} =$ à $3\sqrt{2}$.*

Proposition Vingt-unième.

Problême septiéme.

46 *Diviser une racine sourde par un autre racine sourde.*

La division défait ce qu'a fait la multiplication ſi $\sqrt{2}$ multipliant $\sqrt{50}$ fait $\sqrt{100}$, qui eſt la racine du produit de 2 par 50 ; donc pour diviſer $\sqrt{100}$ par $\sqrt{50}$, il faut diviſer 100 par 50, la racine du quotient de cette diviſion, c'eſt à dire $\sqrt{2}$, ſera la racine cherchée.

Ainſi pour diviſer $\sqrt{aaab-abbb}$ par $\sqrt{aa-bb}$, il faut ſimplement diviſer $aaab-abbb$ par $aa-bb$, de laquelle diviſion le quotient eſt ab ; la racine de ce quotient ab eſt ce qu'on cherche.

Que ſi les racines ſont réduites à leurs plus petites expreſſions, on diviſe ce qui precede le ſigne par ce qui precede le ſigne du diviſeur, & ce qui le ſuit par ce qui le ſuit, en conſervant le même ſigne $\sqrt{}$ entre les deux expoſans : ainſi $15\sqrt{6}$ diviſées par $3\sqrt{2}$ donnent $5\sqrt{3}$.

Mais lorſque ces Racines ſont communicantes. on n'a de beſoin que de diviſer ce qui precede le ſigne, & l'expoſant eſt ce qu'on cherche ; ainſi $15\sqrt{3}$ diviſées par $3\sqrt{3}$ l'expoſant eſt 5, ce qui eſt évident, la diviſion défaiſant ce qu'a fait la multiplication.

Et comme il n'arrive pas toûjours que ces diviſions ſoient ſans fractions, on ſe contente ſouvent de ſeparer les deux grandeurs écrites l'une ſur l'autre par une ligne en forme de fraction ; ainſi $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}}$ $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$ $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

CHAPITRE III.

Des Binomes & Multinomes.

DEFINITIONS.

PREMIERE DE'FINITION.

LA ſomme de deux grandeurs incommenſurables entr'elles ſe nomme Binome. 47

Ainsi cette grandeur $a + \sqrt{b}$ est un Binome ; si la racine $\sqrt{b}$ est incommensurable avec la grandeur a.

Seconde Définition.

48 *La différence de deux grandeurs incommensurables entr'elles, s'appelle* Apotome *ou* Résidu.

On dit par exemple que $a - \sqrt{b}$ est un apotome. Les Apotomes se nomment aussi *Binomes.*

Troisième Définition.

49 *Une grandeur composée de plusieurs grandeurs incommensurables entr'elles, est nommée* Multinome.

La grandeur $a - \sqrt{b} + \sqrt{c}$ est multinome, si ces trois grandeurs sont incommensurables entr'elles.

Euclide distingue plusieurs sortes de Binomes à qui il donne differens noms dont il n'est pas fort necessaire de charger sa memoire.

De l'Addition & Soustraction des Binomes & Multinomes.

50 L'Addition & la sustraction de ces grandeurs n'ont rien de particulier. Pour ajoûter $30 - 4\sqrt{5}$ & $8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$, j'écris $30 - 4\sqrt{5} + 8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$: & pour retrancher $8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$ de $30 - 4\sqrt{5}$, j'écris $30 - 4\sqrt{5} - 8\sqrt{12} + 4\sqrt{5}$.

De la Multiplication des Binomes & des Multinomes.

51 Elle se fait comme celle des grandeurs complexes. Pour multiplier $a + \sqrt{d}$ par $f + \sqrt{b}$, je multiplie premierement $a + \sqrt{d}$ par f, ce qui fait $af + f\sqrt{d}$; ensuite je multiplie $a + \sqrt{d}$ pas $\sqrt{b}$,

$\sqrt{b}$, ce qui fait $a\sqrt{b} + \sqrt{bd}$, j'ajoûte les deux produits en un, $af + f\sqrt{d} + a\sqrt{b} + \sqrt{bd}$, qui eſt celui que l'on cherchoit.

Autre Exemple.

Pour multiplier $6 + 2\sqrt{5}$ par lui-même, je multiplie 6 par 6 ce qui fait 36, & $2\sqrt{5}$ encore par 6, ce qui fait $12\sqrt{5}$; enſuite je multiplie 6 par $2\sqrt{5}$, ce qui fait $12\sqrt{5}$, & $2\sqrt{5}$ par $2\sqrt{5}$, de laquelle multiplication le produit eſt 20; car le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ c'eſt 5, qui eſt le quarré de $\sqrt{5}$. Donc en multipliant $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on fait déja 5. Le produit des nombres 2 & 2 qui ſont devant le ſigne radical $\sqrt{5}$, eſt 4. Ainſi comme il faut concevoir qu'on multiplie par 4 le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, ſçavoir 5, ce qui fait 20; l'entier produit de toute cette multiplication eſt $36 + 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 20$, ou ce qui eſt la même choſe, $56 + 24\sqrt{5}$.

De la diviſion des Binomes & des Multinomes. 52

Elle ſe fait comme celle des grandeurs complexes, mettant le Binome à diviſer ſur le Binome qui eſt le diviſeur. Mais il n'en eſt pas comme des grandeurs ordinaires dont la diviſion ſe fait facilement, ou dont les diviſions s'expriment nettement, parce qu'on peut effacer les mêmes lettres qui ſe trouvent dans le diviſeur, & la grandeur qui eſt à diviſer, comme en diviſant ab par b, on n'écrit que a. Néanmoins on peut appliquer aux Binomes & aux Multinomes ce qu'on a dit des incommenſurables, dont on a vû que les diviſions en certains cas ſe pouvoient exprimer d'une maniere fort ſimple. Pluſieurs ont tâché de trouver d'autres regles. Il eſt bon de tenter, mais on ſe trompe facilement quand on prétend faire une regle generale de ce qui ne ſe rencontre que dans un exemple particulier. P

De la resolution des Puissances des Binomes.

53 Cette resolution pour l'ordinaire est impossible. Jusqu'à present l'on n'a pû trouver de regles certaines & generales pour extraire toutes sortes de racines de ces grandeurs. Voici la Regle que l'on donne pour extraire les racines quarrées des Binomes.

1°. On retranche le quarré de la petite partie du quarré de la grande, & on tire la racine du reste.

2°. On ajoute cette racine à la grande partie, ce qui fait une somme, & on la retranche de la même partie, ce qui fait une difference.

3°. On tire la racine de la moitié de la somme, & la racine de la moitié de la difference, ensuite on prend la somme de ces deux racines, si chaque partie du Binome a le signe $+$, ou bien on prend leur difference si une partie a $+$ & l'autre $-$, & l'on a la racine que l'on cherche. Ainsi pour tirer la racine quarrée de ce Binome $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, 1°. je retranche $4aabc$, qui est le quarré de la plus petite partie, de $a^4 + 2aabc + bbcc$, qui est le quarré de la plus grande partie; le reste est $a^4 - 2aabc + bbcc$, dont la racine quarrée $ab - bc$, étant ajoutée à la plus grande partie $aa + bc$, & en étant ôtée elle fait cette somme $2aa$, & cette difference $2bc$, dont les moitiez sont aa & bc, dont les racines quarrées sont a & $\sqrt{bc}$, lesquelles étant jointes par le signe $+$ elles font $a + \sqrt{bc}$, qui est la racine que l'on cherche; car si l'on multiplie cette racine $+ \sqrt{bc}$ par elle même, le produit de cette multiplication qui est le quarré de cette raison, sera $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, qui est le Binome dont on cherchoit la racine: Donc $a + \sqrt{bc}$ est la racine que l'on cherchoit.

Pour tirer la racine cubique de $45 + 29\sqrt{2}$. Otez 2 de 29, à cause que 2 est sous le signe $\sqrt{\ }$, reste 27, prenez-en le tiers 9, dont la racine 3. jointe avec $\sqrt{2}$, ou $3 + \sqrt{2} = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$ & $3 - \sqrt{2} = \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$, car il faut garder le même signe de la partie commensurable. Si vous formez le cube de $3 + \sqrt{2}$ ou plutôt le cube de $a + \sqrt{b}$, & que vous en remarquiez les parties, vous verrez bien la démonstration de la Regle, & les especes où elle doit réussir.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL.

LIVRE SEPTIE'ME.

De la methode de résoudre une Question ou Problême.

CHAPITRE PREMIER.

Il y a deux differentes Methodes de résoudre une Question ou Problême, qui sont la Synthese *&* l'Analyse. *Dans celle-cy on suppose les choses telles qu'elles le doivent être, selon que la question est proposée. Comment cela se peut faire.*

1 ON nomme *Question* la proposition ou la recherche d'une verité qui est inconnuë, mais dont on connoît quelque rapport avec des veritez connuës. On ne cherche point ce qu'on con-

noît : ce seroit aussi en vain qu'on chercheroit ce qu'on ignore, si on n'en avoit quelque connoissance; aussi dans une question tout n'est pas inconnu. Or c'est de ce qu'on sçait déja qu'on peut apprendre ce qu'on ne sçavoit point : une premiere connoissance servant de dégré pour en acquerir de nouvelles. Pour cela il faut se servir de l'une ou de l'autre de ces deux methodes, que l'exemple suivant fera comprendre. Supposons un homme qui veut connoître les ressors d'une montre, & qui n'en a jamais vû d'ouverte, & de démontée. Si cette montre étoit dans sa boëte, & qu'ainsi il ne vît point ce qui la fait marcher, il seroit porté à l'ouvrir & à la démonter pour en voir le dedans ; ce seroit la premiere methode qu'il suivroit. Si cette montre étoit démontée, & que toutes ses pieces fussent separées, il souhaiteroit de trouver un Artisan habile qui pût les assembler, & lui en expliquer l'usage. La premiere de ces methodes s'appelle *Analyse*, c'est à dire Methode de résolution, parce qu'on résout en ses parties la chose qu'on veut connoître. La seconde methode s'appelle *Synthese*, ou Methode de composition, par ce qu'on assemble les parties de la chose qu'on examine. La premiere défait, la seconde compose. C'est en suivant l'une ou l'autre methode que l'on peut résoudre une Question.

Il ne faut point s'attacher scrupuleusement à l'étymologie des noms : il faut voir ce qu'ils signifient dans l'usage present. Par la *Synthese* on entend la methode de résoudre une Question par les principes de la Science que cette Question regarde : comme pour résoudre les Theorêmes & les Problêmes que nous avons proposez dans les six premiers Livres, vous avez vû en chaque Livre que nous nous sommes servis de ce que nous avions démontré precedemment; & qu'ainsi nous avons composé comme un corps de doctrine qui comprend toutes les veritez principales que doit renfermer un Traité de la Grandeur en general. Ainsi il n'est pas necessaire de parler plus au long de la *Synthese*. Cet ouvrage, si on en est content, peut servir de modelle de ce qu'on doit faire lors qu'on l'employe On l'appelle *Methode de Doctrine*, parce qu'elle est propre pour enseigner. Un Maître qui sçait déja les choses, ne propose d'abord à son Disciple que celles qui sont faciles à comprendre, le menant par degré de connoissance en connoissance, selon que les veritez qu'il enseigne se suivent, ou que les unes servent à faire comprendre les autres; car comme elles lui sont toutes connuës, il les peut ranger comme il lui plaît. C'est ainsi que j'ay rangé les parties de ce Traité, après avoir bien connu moi-même ce que j'avois dessein de faire connoître. Il n'en est pas de même de l'*Analyse*. On ne l'employe pas pour faire connoître ce que l'on sçait, mais pour trouver ce qu'on ne sçavoit pas; c'est pour cela qu'on l'appelle *Methode d'invention*; & c'est cette Methode à laquelle j'ai destiné ce septiéme Livre. Ce mot *Analyse* se peut traduire en François *Resolution*. Mais encore une fois ne nous arrêtons pas à ce que signifie ce mot, tâchons d'en avoir une notion si claire, selon qu'on l'entend aujourd'hui, que nous puissions déduire de cette notion ce qu'on doit faire lors qu'on se sert de cette methode.

Un Problême étant proposé, lors qu'on suppose d'abord la chose faite comme elle le doit être, & que de ce qui est connu dans la Question on en tire la connoissance de ce qu'on ne sçavoit pas, c'est cela qu'on appelle *Analyse* ou *Methode* *d'invention*; parce qu'avec son secours on découvre & on vient à connoître ce qu'on ne connoissoit pas auparavant, au lieu que dans la Synthese on ne peut enseigner & on n'enseigne effectivement aux autres que ce qu'on sçait déja.

Ainsi la notion que nous venons de donner de l'Analyse nous apprend, que la premiere chose qu'on doit faire c'est d'exprimer nettement ce qui est proposé, afin de le considerer attentivement, puisque de la seule supposition qu'on fait que la chose dont il s'agit est faite d'une telle maniere, on doit déduire tout ce qu'on en veut sçavoir. Pour être entendu servons-nous d'un exemple. On propose de découvrir les âges de trois personnes. *Le second est,* dit-on, *plus vieux que le premier de cinq ans; le troisiéme a le double des années du premier & du second, & les âges de ces trois personnes font ensemble 75 années.* Si je nomme x l'âge du premier; celui du second sera $x + 5$; & puisque l'âge du troisiéme est le double de l'âge du premier & du second, donc son âge sera $4x + 10$. Ainsi ces trois âges sont x, $x + 5$, $4x + 10$. Or ils sont égaux à 75; donc $6x + 15 = 75$. On a ainsi exprimé le Probléme proposé tel qu'il est. C'est de cette seule supposition qu'il faut déduire la verité qu'on [cher]che, c'est à dire quel est l'âge de chacun.

CHAPITRE II.

L'Analyse suppose les choses faites comme on les propose dans une Question & par le moyen de ce qu'on y connoît elle égale les grandeurs inconnuës à celles qui sont connuës, ce qui s'appelle trouver des Equations. Regles pour cela.

PREMIERE REGLE.

2 *LA premiere chose que l'on doit faire est de concevoir très-distinctement l'état de la Question qu'on propose de résoudre : c'est à dire ce qu'il faut chercher pour satisfaire à la Question.*

Une Question est presque resoluë quand on sçait bien ce qu'il faut chercher, ce qui paroîtra plus clairement dans un exemple. On propose à un homme qui ne sçait pas la Langue de la Chine de faire un recueil de plusieurs mots, entre lesquels se trouvent écrits les termes de cette Langue, sans le secours d'aucun Livre ni d'aucun Maître. Cette question paroît d'abord impossible; néanmoins quand on y fait bien attention, on apperçoit que pour satisfaire à ce Problême, il n'est question que de trouver par l'art des combinaisons tous les mots possibles que l'on peut faire de toutes les lettres de l'Alphabet ; car entre ces mots tous les termes de la Langue de la Chine s'y trouveront necessairement. On parlera des combinaisons dans la suite.

SECONDE REGLE.

Pour découvrir quel est l'état de la Question, il
3 *faut retrancher ce qu'il n'est point necessaire d'examiner pour arriver à la connoissance de la ve-*

rité que l'on cherche , & suppléer les choses qui sont necessaires.

Ceux qui proposent des Questions y joignent quelquefois des conditions qui semblent necessaires , quoiqu'elles ne le soient pas. Comme dans cette Question : *J'ay vû*, dit-on , *des Chasseurs, ou plutôt des Pescheurs , qui emportoient avec eux ce qu'ils ne prenoient pas , & qui jettoient dans l'eau ce qu'ils prenoient.* L'esprit étant préocupé de l'idée de pêcheurs qui pêchent du poisson , il ne peut concevoir ce que l'on veut dire ; & toute la difficulté qu'il y a pour resoudre cette Question , vient de ce qu'on ne pense pas que des Chasseurs & des Pêcheurs aussi-bien que d'autres hommes , cherchent quelquefois dans leurs habits certains petits animaux qu'ils jettent s'ils les attrapent , & qu'ils emportent avec eux s'ils ne peuvent les attraper. Ainsi il n'étoit point necessaire de parler dans cette Question de Chasseurs ni de Pêcheurs.

Quelquefois aussi on ne met pas dans une Question tout ce qui est necessaire , comme dans celle-ci. *Rendre un homme immobile sans le lier : c'est à dire lui faisant mettre seulement son petit doigt dans son oreille , le rendre par cette posture comme immobile en sorte qu'il ne puisse sortir du lieu où on l'aura mis jusqu'à ce qu'il ôte son petit doigt de son oreille.* La condition que l'on ne dit pas , est que l'on doit faire embrasser un arbre à celui qui met son petit doigt dans son oreille , en sorte que cet arbre soit enfermé entre son bras & son oreille. Cette condition étant mise , il n'y a plus de Question.

TROISIE'ME REGLE.

Quand on a retranché d'une Question tout ce 4 *qui ne servoit qu'à la rendre plus embarassée, & que l'on a suppléé les conditions necessaires que l'on ne disoit pas, & qu'ainsi on voit clairement ce qu'il faut chercher; pour soulager l'esprit dans cette recherche, il faut donner un nom à chaque terme de la Question, & l'exprimer par un caractere sur le papier.*

Cela arrête l'imagination & empêche que l'on ne s'embrouille, & que l'on n'oublie les découvertes que l'on a faites. Ainsi dans la question que l'on a faite ci-dessus des âges de trois personnes differentes, pour fixer mon esprit j'appelle x l'âge du premier, z celui du second, & y celui du troisiéme. Ces caracteres me rendent plus facile l'attention que je dois donner à cette Question; & quand j'aurai fait quelque découverte, je la marquerai pour ne la pas oublier. Par exemple, connoissant par la proposition qui a été faite de la presente Question, que l'âge de la premiere personne que j'ai nommée x, est moindre de cinq années que l'âge de la seconde qui est marqué par la lettre z, je découvre que x plus cinq années est égal à z, ce que je marque de cette maniere $x + 5 = z$. Et ensuite je continuë l'examen de cette Question, donnant à chaque chose mon esprit tout entier, parce que je ne suis point obligé de conserver dans ma memoire ma premiere découverte, l'ayant laissée comme en dépôt sur le papier.

QUATRIE'ME REGLE.

En marquant par des signes les grandeurs qui
5 *sont le sujet de la Question, il faut distinguer par des signes differens celles qui sont connuës d'avec celles qui ne le sont pas.*

Si tout étoit connu dans une Question, ce ne seroit pas une question, comme on l'a remarqué. On ne s'avise pas de demander serieusement quelle est la grandeur qui est la moitié de 24, & qui est égale à 12. Si tout étoit inconnu, ce ne seroit pas aussi un sujet de Question. Si un homme me proposoit simplement de découvrir quel nombre il a pensé, sans me dire autre chose, je lui répondrois que je ne suis pas devin. Dans une Question raisonnable il y a toujours quelque grandeur connuë qui se trouve mêlée avec des grandeurs inconnuës : il les faut distinguer ; ce qu'on peut faire, marquant celles qui sont connuës avec les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, & se servant des dernieres lettres x, y, z, pour marquer les inconnuës. Cela soulage encore l'imagination, & fait appercevoir sensiblement ce qu'il faut chercher dans une Question. C'est toujours la valeur de x, ou de z, ou de y, que l'on cherche.

Quand dans la Question proposée l'on y parle de plusieurs grandeurs de differentes especes, on peut les marquer avec les premieres lettres de leur nom Si l'on parloit par exemple de pistoles, d'écus, de sols, on pourroit appeller les écus e, les pistoles p, les sols s. Tout cela sert merveilleusement à faciliter la resolution d'une Question, aidant l'imagination, sans le secours de laquelle la plûpart des hommes ne peuvent rien concevoir. Outre que cela abrege fort le discours, sans le rendre neanmoins obscur, parce que ces signes sont simples & faciles à connoître. Je suppose qu'on les reduit à un petit nombre; car autrement bien loin de rendre le discours clair en l'abregeant, ils l'obscurciroient, comme l'experience le fait connoître, en ce qu'ils composeroient un langage tout nouveau auquel l'on n'est point accoutumé

CINQUIE'ME REGLE.

6 *Quand une Question n'est point determinée par quelque grandeur particuliere, de sorte que plusieurs grandeurs peuvent avoir les conditions requises. il faut alors supposer à discretion quelque grandeur qui ait les conditions proposées, & détermine ainsi la Question.*

Si on proposoit de trouver en general une grandeur qui fût la sixiéme partie d'une autre grandeur, cette Question seroit indéterminée ; car l'on peut trouver une infinité de differentes grandeurs qui seront la sixiéme partie d'une autre grandeur. Je prends donc 30 que je divise par 6, le quotient de cette division qui est 5, est la sixiéme partie d'une grandeur. Je puis supposer une autre grandeur comme est 24, dont la sixiéme partie est 4 ; ainsi ces deux nombres 24 & 4 satisfont à la Question, comme font 30 & 5.

SIXIE'ME REGLE.

7 *Il faut corriger les noms ou les expressions des grandeurs qui font le sujet de la Question, & les réduire aux plus simples termes qu'il se pourra faire.*

C'est à dire que les expressions dont on se sert doivent être nettes & abregées, afin qu'on ait moins de peine à se les representer, & qu'ainsi on puisse plus aisement achever de resoudre la Question ; au lieu donc de $x + 5 + x + x + 10$, on doit écrire $3x + 15$. De même lorsqu'on a des fractions il faut les réduire aux plus simples termes ; au lieu de $\frac{12}{24}$ écrire $\frac{1}{2}$; & si on a plusieurs fractions les ajoûter en une somme.

Par conſequent ſi $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ſont la valeur d'une grandeur donnée, il faut ajoûter ces deux fractions, & mettre en leur place leur valeur $\frac{7}{6}$

Pour épargner la diverſité des ſignes, au lieu de deux grandeurs connuës, il en faut mettre une ſeule qui leur ſoit égale. Ainſi au lieu de $ax + dx$ prendre c, qui ſoit égale à $a + d$, & écrire cx. De la même maniere ſi la grandeur donnée eſt $\frac{dx}{3}$ c'eſt à dire le tiers de dx; je prends une grandeur que je nomme f, qui ſoit le tiers de d, & au lieu de $\frac{dx}{3}$ j'écris fx, car fx eſt le tiers de dx. Ces expreſſions plus ſimples & moins embaraſſées rendent la queſtion plus claire.

SEPTIE'ME REGLE.

Connoiſſant les rapports qui ſont entre les termes d'une queſtion, on connoît la difference qui eſt entre ces termes, & ce qui les rend égaux ou inégaux; par ce moyen on peut les exprimer en deux manieres; ce qui s'appelle faire une Equation.

Pour demeurer dans la même Queſtion des trois âges qui a été propoſée ci-deſſus, connoiſſant que z ſurpaſſe x de 5 ou que la difference de x & de z eſt 5, je ſcai donc que $z - 5 = x$, ou que $x + 5 = z$: & que puis que y eſt le double de x & z, il faut que $2x + 2z$ ſoit égal à y. Ainſi je puis exprimer ces grandeurs en deux manieres, nommer $x + 5$ la grandeur z, & $2x + 2z$ la grandeur y; c'eſt cette double expreſſion qui s'appelle *Equation*. Remarquez que j'ay examiné cette queſtion comme ſi tout étoit fait, J'ay donné des noms aux choses comme si je les connoissois, après quoi j'ai consideré leurs differences; j'ai, dis-je, parcouru la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement leurs rapports, ce qui ma fait trouver le moyen d'exprimer une même grandeur en deux façons & cela, comme nous l'avons dit, s'appelle avoir une *Equation*. j'ai trouvé que $x + 5 =$ & $z\ 2x + 2z = y$.

HUITIE'ME REGLE.

9 *Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de grandeurs inconnuës, & faire ensorte que dans l'expression du problême il n'y ait qu'une seule grandeur inconnuë*

Il est évident que la fin de tout ce l'on fait dans l'examen d'une question, c'est, en comparant les grandeurs inconnuës avec celles qui sont connuës, de connoître, si cela se peut, ce qui les rend inégales; ou ce qu'il faudroit ajoûter ou retrancher plus ou moins, afin qu'elles fussent égales. Ainsi ayant examiné toutes les conditions d'un Problême, il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de grandeurs inconnuës; de sorte qu'il n'en reste qu'une seule inconnuë, c'est à dire que de toutes les lettres qui marquent des grandeurs inconnuës, il ne doit rester qu'une seule lettre qui soit inconnuë. Par exemple dans la Question ci-dessus proposée, puisque je sçai que $x + 5$ est égal à z, qui est le second âge, je n'appelle plus ce second âge z, mais $x + 5$; & puis que le troisiéme âge y est le double de x & de $x + 5$, je n'appelle plus y le troisiéme âge, ni $2x + 2z$, mais $2x + 2x + 10$; laquelle expression $2x + 2x + 10$ étant corrigée, se réduit à celle-ci $4x + 10$; ainsi les trois grandeurs

x, z, y étant réduites à celles-ci x, $x+5$, $4x+10$, elles n'ont qu'une de ces lettres qui marquent les inconnuës, sçavoir x. Cela rend la Question bien plus simple, la réduisant à la re-recherche d'une seule grandeur inconnuë. Dans l'exemple proposé il n'est plus question que de chercher la valeur de x, qu'on trouve après facilement, comme nous le verrons dans la suite. Mais puisque la somme detrois âges $x+x+5+4x+10$ est égale à 75, donc après avoir corrigé cette expression & l'avoir reduite à celle-cy $6x+15$, qui est plus simple, j'ai cette Equation $6x+15.=75$ c'est à dire une double expression de la même grandeur, car $6x+15$ & 75 ont une même valeur.

NEUVIE'ME REGLES.

Quand les grandeurs connuës ou inconuës se 10
trouvent mêlées ensemble, il faut les separer, & transporter d'un côté tout ce qui est connu, & de l'autre ce qui est inconnu.

On appelle *membre* d'une Equation ce qui est de part & d'autre du signe de l'égalité; ainsi $6x+15$ & 75 sont les membres de cette équation $6x+15=75$. Or quand dans l'un des membres d'une équation la gtandeur inconnuë se trouve toute seule, & que dans l'autre membre il n'y a que des grandeurs connuës, il est évident que cette grandeur n'est plus inconnuë Si $x=10$, je sçai que la valeur de x est 10. Pour achever donc la Question, il fautfaire passer dans l'un des membres tout ce qui est connu, & dans l'autre tout ce qui est inconnu, de maniere que le rapport de la grandeur inconnuë avec les grandeurs connuës soit net. Par exemple dans cette Equation $6x+15=75$, la grandeur x se trouvant mêlée avec $+$ 15, je rejette cette grandeur connuë 15 de l'autre côté de cette maniere $6x = 75 - 15$, ce que je fais en retranchant de chaque membre cette grandeur 15, & cela ne trouble point l'Equation, puis que de deux choſes qui ſont égales ſi on en retranche choſes égales, elle demeurent égales.

Dixie'me Regle.

11 *Il faut réduire aux plus ſimples termes cette raiſon ou rapport d'égalité qui eſt entre les deux membres de l'Equation.*

Ainſi aulieu de $6x = 75 - 15$, j'écris $6x = 60$, car $75 - 15$, c'eſt la même choſe que 60. Je réduis encore cette Equation ou rapport $6x = 60$ à de moindres termes, diviſans ces deux termes $6x$ & 60 par 6. Cette diviſion donne x & 10, qui ſont encore en même raiſon, puis que diviſant deux grandeurs par un même diviſeur, elles gardent entr'elles la même raiſon qu'elles avoient auparavant. Ainſi $x = 10$, après quoi on connoît ſenſiblement la raiſon de l'inconnuë x avec ce qui eſt connu. Toute la queſtion ſe trouve donc réſoluë; car puiſque x vaut 10, que $x + 5 = z$, donc $10 + 5 = z$, donc z vaut 15 : & puis que $2x + 2z = y$, donc y vaut 50 : Par conſequent le premier âge eſt 10, le ſecond 15, le troiſiéme eſt 50, la ſomme deſquels âges eſt 75 années.

Ainſi lors qu'on ſuit la methode que nous avons preſcrite, l'on trouve enfin la reſolution de la Queſtion. Ce n'eſt point par hazard, c'eſt en ſuivant une methode judicieuſe & naturelle. Pour marque de cela, c'eſt que ſi le Problême ne peut pas être réſolu, on en découvre l'impoſſibilité.

Un Problême eſt impoſſible, ou abſolument, ou par rapport à nos connoiſſances. Un Problême eſt abſolument impoſſible lors qu'il renferme une contradiction, comme celui-ci, *Trouver un nombre qui ſoit le tiers de* 12, *& qui ſoit égal à* 5, cela eſt impoſſible, car le tiers de 12, eſt 4. Ainſi l'on demande de trouver un nombre égal en même tems à 4 & à 5, ce qui renferme une contradiction. Or en ſuivant la methode preſcrite, l'on reconnoît ſi un Problême eſt abſolument impoſſible; car par exemple dans celui-ci ayant ſuppoſé que le tiers de 12 ſe nomme x, j'ai cette Equation $3x = 12$: & puis que x eſt égal à 5, il faut que $3x = 15$; ce qui eſt impoſſible, car $3x = 12$. Ainſi je connois que les deux conditions qui ſont renfermées dans ce problême ſe combattent, & que par conſequent ce Problême eſt impoſſible. 12

Nous connoiſſons auſſi ſi un Problême eſt impoſſible par rapport à nos connoiſſances, car ſi par exemple après avoir ſuivi les Regles précedentes, je n'ai pas pû réduire à des termes plus ſimples une Equation, qu'à ceux ci, $xx = bb + ax$, j'aperçois bien que je ne puis pas ſçavoir quelle eſt la valeur de x, parce que je n'ai point encore de Regles pour connoître la valeur d'une grandeur inconnuë comme eſt x, quand je ſçai ſeulement que ſon quarré qui eſt xx eſt égal au quarré d'une grandeur connuë, tel qu'eſt bb plus un plan fait de l'inconnuë x & d'une grandeur connuë, tel qu'eſt le plan ax.

Lors qu'en parcourant la difficulté de la maniere qu'on vient de le dire, on ne trouve point d'Equation, c'eſt une marque que la queſtion eſt indeterminée, car le rapport de deux grandeurs déterminées, fait qu'on les peut exprimer en 13 deux manieres. Alors comme on l'a dit, on suppose des grandeurs à discretion qui puissent satisfaire à la question.

CHAPITRE III.

De la réduction d'une Equation à une telle expression, que la grandeur inconnuë qu'on cherche, se trouve seule dans un des membres de l'Equation.

L'Analyse consiste principalement à couper & tailler une Equation de sorte qu'on la réduise à une expression simple; & qu'on délivre la grandeur inconnuë de ce qui empêchoit qu'on ne vît précisément son rapport avec les grandeurs connuës. Comme dans cette Equations $5x - 1 = 4x + 6$ en ajoutant 1 de part & d'autres, $5x = 4x + 7$, & ôtant $4x$ de part & d'autre, on a $x = 7$, où le même rapport d'égalité subsiste. C'est ce qui a fait donner le nom d'Analise à la methode dont nous parlons. C'est un mot Grec qui signifie résoudre, couper, délier. Ces réductions se font ajoûtant aux membres d'une Equation, ou en en retranchant quelque chose, les multipliant ou les divisant, de maniere que l'égalité qui est entr'eux ne soit point ôtée.

Des Réductions qui se font par Addition.

14 *Si de part & d'autre du signe de l'égalité on ajoûte des grandeurs égales, les membres de l'Equation demeureront égaux, & l'Equation ne sera point troublée,*

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'égales, elles demeurent égales entr'elles. Ainsi si $x = 15$

& qu'on ajoûte 5 de part & d'autre, l'Equation reſte $x + 5 = 20$. pour ajoûter il ſuffit d'effacer d'un membre d'une Equation ce qui s'y trouve avec le ſigne — & l'écrivant dans l'autre avec le ſigne +. Alors l'on ajoûte également à l'un & à l'autre membre. Soit cette Equation $x - 50 = 6$. Pour ajoûter 50 de part & d'autre, j'efface 50 qui eſt dans le premier membre avec —, & je le mets dans l'autre membre avec le ſigne + de cette maniere, $x = 6 + 50$; ce qui n'eſt qu'ne expreſſion corrigée & abregée de l'addition que je fais; car ſi $x - 50 = 6$, il eſt certain que $x - 50 + 50 = 6 + 50$. Or puis que $- 50 + 50 = 0$, pour faire cette addition d'une maniere nette, il faut ſeulement écrire $x = 6 + 50$, ou $x = 56$. Ainſi ſi $a - z = 0$, pour ajoûter z à l'un & à autre membre, j'écris $a = 0 + z$, ou ſimplement $a = z$, puis que ce zero n'augmente point dans ce lieu la valeur de z. Si on a cette Equation $a - 2x = 6 + x$, en tranſportant $- 2x$ dans l'autre membre & l'écrivant avec +, on a cette Eqution $a = 6 + x + 2x$, ou $a = 6 + 3x$.

Des Réductions qui ſe font par la Souſtraction.

Si de part & d'autre du ſigne de l'égalitéo nretranche des grandeurs égales, l'Equation n'eſt point troublée. 15

De choſes égales ôtant choſes égales, elles demeurent égales entr'elles : Ainſi ſi $x + 5 = 20$, retranchant 5 de part & d'autre, l'Equation reſte $x = 15$. Si $a = 6 + 3x$ ôtant 6 de part & d'autre, reſte $a - 6 = 3x$. Or pour faire ce retranchement il ſuffit d'effacer d'un nombre ce qui s'y trouve avec le signe $+$, & de l'écrire dans l'autre avec le signe $-$. Car pour lors l'on retranche également de l'un & de l'autre membre de l'Equation, & l'on ne fait qu'abreger l'operation ; car si $x + 50 = 80$, il est évident que $x + 50 - 50 = 80 - 50$. Or puis que $+ 50 - 50$ ne fait rien, pour retrancher 50 de part & d'autre, il ne faut qu'écrire $x = 80 - 50$, ou $x = 30$.

Des Réductions qui se font par la Multiplication.

16 *Lors que l'on multiplie les deux membres d'une Equation par un même multiplicateur, l'on ne trouble point cette Equation.*

En multipliant les deux termes d'une raison par une même grandeur, les produits sont en même raison que les grandeurs multipliées. Ainsi si l'on multiplie les deux menbres de cette Equation $\frac{z}{a} = b$, par a, l'on aura cette Equation $z = ba$; car puis que la raison de $\frac{z}{a}$ avec b est une raison d'égalité, la raison de z avec ba qui est la même sera aussi une raison d'égalité. Ainsi si $\frac{x}{3} = 6$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, l'on aura $x = 18$.

Si $\frac{zz}{z-b} = a$, puisqu'en effaçant le dénominateur $z - b$ du premier membre, ce membre est censé être multiplié par $z - b$, en multipliant a par $z - b$, on aura cette reduction $zz = az -$

ab. Par la même raison si $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$ pour multiplier ces deux nombres par a, j'efface a du premier, & je multiplie les parties du second par a; & j'ay $zz = \frac{azz - abz - abb}{z}$ En multipliant cette Equation ainsi réduite par z, on a cette Equation encore plus simple $z\ 8 = azz - abz + abb$ selon le même principe, que pour multiplier une fraction par son dénominateur, il ne faut qu'effacer ce dénominateur.

C'est ce qui fait connoître que pour délivrer une Equation des fractions quand elle en a, il n'y a qu'à la multiplier par le dénominateur de la fraction. S'il y a des fractions dans les deux membres de l'Equation, il faut faire la même chose, comme ici $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$, je multiplie 1° l'un & l'autre membre par a, ce qui produit $zz = \frac{azz - abz + abb.}{z}$ 2°. Je multiplie l'un & l'autre membre par z, & j'ay $z^3 = az^2 - abz + abb$. Ainsi il n'y a plus de fraction.

Des Reductions qui se font par la Division.

Lors que l'on divise les deux membres d'une Equation par la même grandeur, l'Equation demeure. 17

Les deux termes d'une raison étant divisez par une même grandeur, les quotiens de ces divisions sont en même raison que ces deux termes. Si $zz = 4z$ divisant les deux membres par z, on aura

$z = 4$. Si $z^4 = az^3 + bbzz$, divisant cette Equation par zz, on aura $z^2 = az + bb$. De même si $3z = 12$, divisant par 3 viendra $z = 4$. Si $az = ab$ divisant par a, on aura $z = b$. Cette Equation $azz + bzz = abz + bbz - abb - b^3$, pouvant être divisée par $a + b$ on la réduit par cette division à celle-ci $zz = bz - bb$. On doit ici se souvenir des Regles que nous avons données Liv. I. n. 39. pour diviser les grandeurs marquées par des lettres.

Des Réductions qui se font par l'extractions des Racines, & en abaissant une puissance.

18 *En tirant les racines de chaque membre d'une Equation, l'on ne trouble point cette Eqution.*

Cette Regle est fondée sur ce principe, que les puissances égales ont des racines égales. Si donc $xx = 25$, en prenant les racines de xx, & de 25, il faut que x racine de xx, & 5 racine de 25 soient égales; ainsi $x = 5$. Vous voyez qu'on abaisse la puissance xx d'un degré. Ainsi si $z^3 = 125$, ayant tiré la racine cubique de l'un & l'autre membre, on aura $z = 5$, ayant de même extrait la racine quarrée de part & d'autre dans cette Equation $zz = aa + 2ab + bb$, elle sera reduite à celle-ci $z = a + b$.

Des Réductions qui se font en élevant une puissance à un plus haut degré.

19 *En élevant chaque membre d'une Equation à un plus haut & même degré, l'on ne trouble point cette Equation.*

Car comme les racines des grandeurs égales ſont égales, auſſi les grandeurs qu'on regarde comme des racines, demeurent égales entr'elles ſi on les éleve à un même degré : ce qui eſt fort utile pour ſe délivrer des grandeurs incommenſurables ; car ſi j'ai cette Equation $\sqrt{z} = 5$ en élevant ces deux grandeurs à un même degré, c'eſt à dire prenant le quarré de $\sqrt{z}$ qui eſt z, & celui de 5 qui eſt 25, je réduis l'Equation $\sqrt{z} = 5$ à celle-ci $z = 25$. Car il eſt évident que pour quarrer une grandeur qui a le ſigne radical, il ſuffit d'ôter ce ſigne. Le quarré de $\sqrt{xx}$ eſt xx : celui de $\sqrt{xx + yy}$, eſt $xx + yy$.

Des Réductions qui ſe font par la Subſtitution.

Il ne faut pas oublier la reduction qui ſe fait par la Subſtitution ; c'eſt à dire mettant au lieu d'une grandeur inconnuë ou incommode, quelqu'autre grandeur connuë, ou qui facilite la reſolution de la queſtion. On en a déjà vû des exemples dans le Problême des trois âges ; où en la place des grandeurs z & y, on à mis $x + 5$ pour z & $4x + 10$, pour y. 20

Réductions par la tranſpoſition.

On peut réduire une Equation, de maniere que la grandeur inconnuë ſe trouve ſeule d'un côté, ce qui ſe fait en tranſpoſant les grandeurs. 1°. Par l'Addition ou par la Souſtraction. Car par exemple ſi l'Equation donnée eſt $x - a = b$, on peut tranſporter a afin que x ſoit ſeul, en ajoûtant a de part & d'autre ; ainſi $x = b + a$. Si la grandeur a eût été jointe avec x par le ſigne $+$, il auroit fallu retrancher a de côté & d'autre, ce 21 qui eût donné $x = b - a$. On fait auſſi cette transpoſition par la multiplication & par la diviſion, & l'on délivre une grandeur de celle avec qui elle ſe trouve mêlée. Soit par exemple cette Equation $\frac{x}{3} = b$, pour ôter 3 du premier membre, je multiplie le premier membre $\frac{x}{3}$, & le ſecond qui eſt b par 3; ce qui me donne cette Equation $x = 3b$, dans laquelle x eſt dégagée de toute autre grandeur. Si l'Equation donée eût été $3x = b$, en diviſant les membres de cette Equation par 3, je l'aurois réduite à celle-ci $x = \frac{b}{3}$, ou x ſe trouve toute ſeule, & 3 eſt transporté de l'autre côté.

Ces réductions changent tellement une Equation qu'on n'en apperçoit ni l'origine ni le progrès à moins qu'on ne les faſſe ſoi-même. C'eſt ce qui fait la difficulté des Livres d'Algebre. Voyons-le dans un exemple.

Soit cette Equation $\sqrt{\frac{zz + 3aa}{4}} + \sqrt{\frac{zz - 3aa}{4}} = \sqrt{\frac{azz}{b}}$. Les quarrez des grandeurs égales étant égaux, en quarrant les membres de cette Equation, ce qui ſe fait ôtant les ſignes radicaux; je l'exprime ainſi. $\frac{zz + 3aa}{4}$

$$+ \frac{zz - 3aa}{4} = \frac{azz}{b}$$

$+ \frac{3aa}{4}$ & $- \frac{3aa}{4}$ ne font rien, je le ſuprime donc pour rendre l'expreſſion plus nette; & puiſque

que $\frac{zz}{4}$ eſt un quart de zz, en ajoûtant une fois cette même grandeur, c'eſt-à-dire la doublant, ce qui ne valoit qu'un quart vaut la moitié. C'eſt-à-dire que $\frac{zz}{4} + \frac{zz}{4}$ eſt égal à $\frac{zz}{2}$. Je réduis donc l'Equation propoſée à celle-ci $\frac{zz}{2} = \frac{azz}{b}$; qui eſt fort differente de ſa premiere expreſſion.

CHAPITRE IV.

Principes des Equations ou moyens de trouver de doubles expreſſions qui facilitent la reſolution d'un Problême.

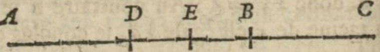
TOutes ces réductions dont nous venons de parler, ſuppoſent qu'on a trouvé des Equations, c'eſt-à-dire de doubles expreſſions des grandeurs dont on cherche la valeur, que la ſeule maniere dont un Problême eſt énoncé fait connoître. Par exemple, ſi on propoſe que z eſt trois fois plus grand que x, je conclus que trois fois x eſt égal à z, qu'ainſi z ſe peut nommer $3x$; j'ai donc une double expreſſion de la même grandeur, & par conſequent cette Equation $z = 3x$. C'eſt ainſi que par les rapports qu'ont entr'elles les grandeurs, qui ſont les termes de la Queſtion on trouve des Equations. Or tout rapport, comme nous avons vû, eſt ou difference, ou raiſon; ainſi pour égaler des grandeurs dont on connoît les rapports, & par conſequent pour les exprimer en deux manieres, il faut conſiderer leurs differences, ou les raiſons qu'elles ont entr'elles, 22

La difference de deux grandeurs eſt l'excès de la plus grande par deſſus la plus detite, ou le défaut de la plus petite au deſſous de la plus grande. Ainſi en ajoutant cette difference à la plus petite, on l'égale à la plus grande, & en retranchant cette difference de la plus grande, on l'égale à la plus petite. Si la difference de x à z eſt 10; que x ſoit plus petit que z, donc $x + 10 = z$, ou $x = z - 10$; ce qui me donne de doubles expreſſions des grandeurs x & z. Je puis nommer $x + 10$ la grandeur z, & $z - 10$ la grandeur x, ſelon que cela me ſera plus commode, & ainſi au lieu de l'une ſubſtituer l'autre, de ſorte que je n'aye qu'une lettre inconnuë.

Dans une ſomme composée de deux parties, la difference de cette ſomme à l'une de ſes parties, eſt l'autre partie. Par exemple, ſi a & b ſont les parties de z; la difference de z à a eſt b, & ſa difference à b eſt a; ainſi $z - a = b$, & $z - b = a$.

Dans une proportion Arithmétique, les extrêmes ajoutez enſemble font une ſomme égale à l'addition des moyens. Ainſi ſi $\div a.\ b.\ c.\ d.$ donc $a + d = b + c$.

23 La moitié de la ſomme de deux grandeurs inégales, plus la moitié de la difference de ces grandeurs eſt égale à la plus grande, & moins cette même moitié à la plus petite. Par exemple, ſoient ces deux lignes *AB* & *BC* jointes enſemble; leur difference eſt *DB*, & les lignes *AE* & *EC* ſont les deux moities de *AC*.



Il eſt évident que *CE* moins *BE* moitié de la difference de ces deux lignes, eſt égale à *BC* la petite ligne, & que *AE* plus *DE* ou *EB* moitié de la même difference est égale à AB : Soit donc AC égal à $2x$, & que AB soit égal à y & BC à z, que leur difference DB soit 12 ; donc $x + 6 = y$ & $x - 6 = z$. Ainsi on peut nommer $x + 6$ la grandeur y, & nommer $x - 6$ la grandeur z, par ce moyen on leur donne en quelque maniere le même nom, ce qui est d'une très-grande utilite, comme on le verra dans la suite.

Quand on connoît quelle raison il y a entre deux grandeurs, on les peut égaler facilement; car il est évident que si x est le tiers de z, il faut que x pris trois fois soit égal à z, comme nous l'avons dit, & qu'ainsi $3x = z$; ou que $\frac{1}{3} z = x$. Si m est à n comme 2 à 3, donc $m = \frac{2}{3} n$, ou $3m = 2n$.

Puis que dans une proportion Géométrique le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, si $\div\!\!\div a.\ b.\ c.\ d.$ donc $ad = bc$. & $ac = bb$ & $\frac{bc}{a} = d$; ainsi l'on peut tirer de la connoissance que l'on a des raisons qui sont entre les grandeurs proposées, des moyens assez faciles de les égaler, ou de trouver entr'elles des Equations; ce qui est la même chose.

Lors qu'on sçait que le quarré d'une grandeur inconnuë est égal à une connuë, il ne faut que l'élever d'un degré. Je sçai que le quarré de x est égal à d. donc $xx = d$: Au contraire si je sçai que la racine de x est égale à d, je conclus donc $x = dd$.

Une chose qu'on ne peut trop dire en cette matiere, c'est que le succès de la peine qu'on prend pour résoudre un Problême, dépend très souvent des expressions heureuses dont on se sert, en donnant aux grandeurs dont on parle dans une Question, des signes convenables, ou mettant le tout pour toutes les parties, ou toutes les parties pour le tout, distinguant le tout en tant & tant de parties, selon que le nombre qu'on choisira sera plus commode. On le va voir dans la résolution des problêmes suivans.

CHAPITRE V.

Application des précédentes regles de l'Analyse à des Problêmes particuliers. Comment on resout ces Problêmes selon la methode ancienne par des Regles de deux fausses positions; où il est aussi parlé de la Regle d'Alliage. Quelles sont ces Regles?

Quoique tout ce qu'on vient de voir soit intelligible, rendons-le encore plus clair & plus sensible, faisant une application de tout cela à quelques Problêmes.

PROBLEME.

24 *Une personne ayant rencontré des pauvres, & leur ayant voulu donner à chacun cinq sols, elle a trouvé qu'il lui manquoit un sol; ainsi ne leur ayant donné qu'à chacun quatre sols, il lui en est resté six. Combien y avoit-il de pauvres, & combien cette personne avoit-elle de sols?*

Il faut tirer la solution de ce Problême du Problême même, c'est-à-dire la connoissance de ce qu'on ignore, de la seule maniere dont il est proposé. 1°. Il faut exprimer sur le papier la chose dont il est question, la supposant faite comme le Problême dit qu'elle l'est ; pour cela lui donnant des noms : Je nomme x le nombre des pauvres qui ne m'est pas connu, & z celui de l'argent qu'a cette personne qui m'est pareillement inconnu.

Je considere les rapports que les grandeurs inconnuës x & z ont ensemble, afin que je puisse représenter la chose comme on suppose qu'elle est. Puis que cette personne ayant voulu donner à chaque pauvre cinq sols, elle en avoit un de trop peu ; donc cinq fois le nombre des pauvres moins un sol, c'est-à-dire $5x - 1$ est égal au nombre de sols de cette personne, c'est-à-dire à z. Ainsi le rapport de x & de z me fait trouver cette double expression ou équation $5x - 1 = z$.

Il faut, comme on a dit, faire en sorte que dans une question il n'y ait qu'une grandeur inconnuë ; & pour cela trouver autant d'équations qu'il y a de grandeurs inconnuës dans la question. Je cherche donc une autre double expression de z, considerant les autres rapports que peuvent avoir ces deux grandeurs x & z selon que la question est proposée. Puis que cette personne donnant 4 sols à chaque pauvre, elle en a 6 de reste ; donc en multipliant x le nombre des pauvres par 4, ce qui fait $4x$, & y ajoutant six sols, on fait une grandeur égale à z, qui est son argent. $4x + 6 = z$.

Or puis que $5x - 1 = z$, & que $z = 4x + 6$, donc $5x - 1 = 4x + 6$. Il n'y a dans cette derniere équation que x d'inconnu. Mais il faut faire en sorte que x se trouve d'un côté delivré de toute âutre grandeur, & qu'il soit précisément égal à une grandeur connuë. Je fais donc cette réduction. 1°. En ajoutant 1 de part & d'autre de cette équation, ce qui fait $5x = 4x + 7$. 2°. En ôtant $4x$ de l'un & de l'autre membre de l'équation, après quoi il reſte $x = 7$; par conſéquent x qui eſt le nombre des pauvres vaut 7. Il y avoit donc ſept pauvres. Or $4x + 6 = z$, c'eſt-à-dire 4 fois ſept plus ſix, ou 28 plus 6 ſont égaux à z : donc $z = 34$. Ainſi cette perſonne avoit 34 ſols.

Faiſons encore l'application des regles de l'Analyſe à la queſtion ſuivante, mais ſans tant de paroles.

25 *Alexandre étoit plus âgé qu'Epheſtion de deux ans, Clitus avoit quatre ans plus que la ſomme des deux âges d'Alexandre & d'Epheſtion, & leurs trois âges faiſoient 96 ans. On demande quel étoit l'âge d'un chacun.*

L'âge d'Epheſtion ſoit appellé x, celui d'Alexandre z, & celui de Clitus y. Puis qu'Epheſtion a deux ans moins qu'Alexandre, donc $x + 2 = z$: & puis que Clitus étoit auſſi âgé que tous deux enſemble, & de quatre ans davantage; donc $x + z + 4 = y$. Au lieu de z on peut ſubſtituer ſon égale $x + 2$, ainſi $x + x + 2 + 4 = y$, laquelle équation étant corrigée, $2x + 6 = y$. Les trois âges inconnus $x. z. y.$ ſe peuvent donc exprimer de cette maniere où il n'y a qu'une inconnuë. $x.\ x + 2.\ 2x + 6$. Or ces trois âges réduits dans une ſomme qui eſt $4x + 8$ font 96, ſelon que la queſtion eſt propoſée; donc on a cette équation $4x + 8 = 96$. Il faut faire paſſer ce qui eſt connu d'un côté, pour cela je retranche 8 de part & d'autre, & j'ai $4x = 88$, enſuite pour délivrer l'inconnuë x du chifre 4, je diviſe l'un & l'autre membre par 4, après quoi j'ai $x = 22$: Donc l'âge d'Epheſtion eſt 22 ans, celui d'Alexandre qui a deux ans par dessus 24 ans, & par consequent celui de Clitus 50.

De la Regle de deux fausses positions.

Dans l'Arithmetique ordinaire, pour résoudre les Problêmes que nous venons de proposer, l'on suppose des nombres qui ayent quelqu'une des conditions qui appartiennent aux nombres inconnus que l'on cherche. On fait deux suppositions de nombres, qu'on nomme fausses suppositions, parce qu'effectivement les nombres supposez ne sont pas les veritables que l'on cherche, quoique par leur moyen on les trouve. Pour montrer comment cela se fait, je vais résoudre le dernier Problême par cette regle. Je suppose des nombres qui ayent les conditions marquées dans la question; aprés j'ajoute ces nombres dans une somme, & j'observe quelle est la difference entr'eux & le nombre 96, qui est la somme connuë des trois âges. Cette difference se marque avec + & —. Je suppose donc que l'âge d'Ephestion est 16 ans, ainsi celui d'Alexandre est 18, & celui de Clitus est 38. Or 16 + 18 + 38 ne sont pas 96, il s'en faut 24; par consequent les nombres que j'avois supposez ne sont pas les véritables; je les écris néanmoins 16 + 18 + 38 = 96 — 24. Je fais cette seconde supposition que l'âge d'Ephestion est 21, & qu'ainsi celui d'Alexandre est 23, & celui de Clitus 48. Or 21 + 23 + 48 = 96 — 4; donc cette seconde supposition est encore fausse. Pour trouver les nombres véritables, il faut faire évanoüir les differences — 24 — 4, afin que d'un côté on trouve trois nombres, qui outre cette premiere condition marquée dans la question qu'ont les nom- 26 bres qu'on vient de ſuppoſer, ayent encore la ſeconde; c'eſt-à-dire qu'ils ſe trouvent préciſément égaux à *96*. Voila le principe des Regles qu'on donne que je vais expliquer, qui ſervira ici & ailleurs.

On peut faire évanoüir d'une Equation une grandeur embaraſſante; ajoutant cette Equation avec une autre dans laquelle ſe trouve cette même grandeur avec un ſigne contraire. Par exemple, ſi $x = d - 6$, & $z = d + 6$, pour faire évanoüir le nombre *6*, j'ajoûte ces deux Equations, & les ayant corrigées, cela fait $x + z = 2d$, où *6* ne paroît plus; car -6 avec $+6$ ne fait rien. Si la même grandeur ſe trouve dans les deux Equations avec le même ſigne, ou $-$ ou $+$, il faut ſouſtraire une de ces Equations de l'autre. Par exemple, ſi $x = d - 6$, & $z = b - 6$, je retranche l'un de l'autre, & il reſte $x - z = d - b$, dans laquelle Equation *6* ne paroît plus; car quand on retranche $b - 6$ de $d - 6$, ou $b + 6$ de $d + 6$, abregeant l'expreſſion de l'operation, le reſte eſt $d - b$. Or pour faire que deux Equations ayent ainſi une même grandeur qu'on puiſſe faire évanoüir, il faut multiplier réciproquement les membres de l'une par une grandeur qui ſe trouve dans l'autre Equation, de cette maniere. Soient ces deux Equations $x = c - 2$, & $z = d - 6$, je multiplie les membres de la premiere par *6*, & ceux de la ſeconde par *2*; ce qui me donne ces Equations $6x = 6c - 12$, & $2z = 2d - 12$, dans leſquelles ſe trouve la même grandeur 12 avec le même ſigne, ſçavoir $-$. Otant une de ces Equations de l'autre Equation, j'aurai $6x - 2z = 6c - 2d$, où 12 ne paroît point.

Suivant ces principes, pour reſoudre la queſtion des âges d'Alexandre, d'Epheſtion & de Clitus; c'eſt-à-dire pour réſoudre ces deux Equations $16 + 18 + 38 = 96 - 24$, & $21 + 23 + 48 = 96 - 4$, il faut multiplier la premiere équation par la difference de la ſeconde ſuppoſition qui eſt 4, c'eſt à-dire $16 + 18 + 38 = 96 - 24$ par 4, ce qui donne cette équation $64 + 72 + 152 = 384 - 96$, & multiplier la ſeconde équation par 24, qui eſt la difference de la premiere ſuppoſition, c'eſt à-dire $21 + 23 + 48 = 96 - 4$ par 24, ce qui donne $504 + 552 + 1152 = 2304 - 96$. 2°. Il faut retrancher la plus petite de ces équations de la plus grande, & il reſtera $440 + 480 + 1000 = 1920$, dans lequel reſte $- 96$, & $- 96$ ne paroiſſent plus; ainſi cette difference eſt évanoüie comme on le ſouhaitoit. Or puis que 96 étoit 24 fois dans 2304 produit de 96 multiplié par 24, & qu'il étoit 4 fois dans 384 produit de 96 multiplié par 4; ayant ôté 384 de 2304, il faut qu'il y ſoit 24 fois, moins 4 fois, c'eſt à-dire 20 fois, dans le reſte qui eſt 1920. C'eſt pourquoi la Regle dit que pour réduire la derniere Equation à de plus ſimples termes, il la faut diviſer par la plus grande difference 24 moins la petite qui eſt 4, c'eſt-à-dire par 20. Après cette diviſion par 20, l'on a cette équation $22 + 24 + 50 = 96$, qui me fait connoître que l'age d'Epheſtion eſt 22, celui d'Alexandre 24, celui de Clitus 50. Si les differences des deux ſuppoſitions avoient été $+ 4$ & $+ 24$, au lieu qu'elles étoient $- 4$ & $- 24$, il auroit fallu faire la même choſe, c'eſt à-dire les retrancher l'une de l'autre. Mais ſi elles avoient été $- 4$ & $+ 24$, ou $- 24$ & $+ 4$, après avoir multiplié chaque ſuppoſition par la difference de l'autre ſuppoſition, au lieu de les retrancher l'une de l'autre pour faire évanoüir les differences, il auroit fallu les ajouter ; ce qui eſt évident, & de plus a déja été dit dans la page précédente.

Nous avions reſolu le même Problême en deux coups de plume. Auſſi je n'ai propoſé cette derniere methode que pour donner la démonſtration de cette Regle de deux fauſſes poſitions, qui s'enſeigne dans les Livres de l'Arithmetique ordinaire,

De la Regle d'Alliage.

27 Lors que l'Alliage de pluſieurs choſes de differente nature eſt fait, il eſt facile de connoître la valeur de chaque partie du tout compoſé de cet Alliage, quand le prix du tout eſt connu. Par exemple, un Marchand a mis dans un vaiſſeau qui tient 300 pintes, 100 pintes de vin à 5 ſols, 100 autres à 3 ſols, & 100 autres à 10 ſols la pinte. Ces 300 pintes ainſi mêlées les unes avec les autres valent 90 livres ou 1800 ſols, on demande combien chacune doit valoir après ce mélange. C'eſt la trois centiéme partie de 90 livres ou de 1800 ſols, qui eſt 6 ſols. Ainſi ſi on ne propoſoit que de trouver le prix de chaque pinte de ce vin qui eſt mêlé, la queſtion ſeroit aiſée.

Mais lors que l'Alliage n'eſt point encore fait, & que l'on a aſſigné un certain prix moyen avec lequel il faut allier deux ou pluſieurs choſes de different prix, il y a plus de difficulté. La Regle que l'on donne pour faire cet Alliage, n'eſt pas fort differente de la Regle de deux fauſſes poſitions. Tout l'artifice conſiſte à trouver combien de fois il faut prendre chacune des choſes données, pour être alliées avec une certaine grandeur moyenne, afin qu'elles faſſent une ſomme préciſément égale à cette grandeur moyenne priſe exactement autant de fois. Cela ſe comprendra mieux par un exemple.

L'on ordonne à un Marchand de vendre ſon vin 6 ſols la pinte; le Marchand n'a que deux ſortes de vin, le premier que je nomme x vaut 3 ſols la pinte, & le ſecond que je nomme z en vaut 8. Afin qu'il ne perde point, il faut qu'il allie ces deux ſortes de vin, de maniere qu'un certain nombre de pintes de vin qu'il aura mêlé, vaille préciſement 6 ſols, lequel prix moyen je nomme a. Il faut marquer ce rapport de x avec a, & celui de z avec le même a; ce qui donne ces deux Equations $x = a - 3$, & $z = a + 2$. Selon la Regle d'Alliage, 1°. Il faut multiplier la premiere Equation par 2, qui eſt la difference de la ſeconde Equation; ce qui donnera cette Equation $2x = 2a - 6$, & multiplier la ſeconde Equation par 3, qui eſt la difference de la premiere Equation; ce qui donne $3z = 3a + 6$. 2°. Il faut ajouter ces deux Equations dans une ſomme, ce qui fait $2x + 3z = 5a$. Cette Equation me fait connoître que deux pintes de vin à 3 ſols avec 3 pintes de vin à 8 ſols, font 5 pintes de la valeur de 5 pintes de vin à 6 ſols. Ainſi ſi ce Marchand, pour faire cette alliage, prend deux pintes de vin à 3 ſols, il faut qu'il prenne trois pintes de vin à 8 ſols pour ne tromper perſonne, & n'être pas trompé lui-même.

Vous voyez que cette Regle a les mêmes fondemens que la Regle de deux fauſſes poſitions. Pour faire évanoüir les differences -2 & $+3$, on multiplie chacune de ces deux Equations par la difference de l'autre Equation; & comme ces differences ont des ſignes contraires, on ajoute en une somme les Equations, après laquelle addition ces differences s'évanouissent, comme on l'a dit.

Quand on veut allier plusieurs grandeurs differentes avec une moyenne grandeur, il faut faire cet alliage à plusieurs fois. Par exemple on veut allier x des carolus qui valent 10 deniers, z des sols marquez de quinze deniers, y des pieces de six blancs qui valent 30. deniers, avec des sols. Un sol que je nomme a est le prix moyen. J'allie premierement x avec y.

$x = a - 2$, & $y = a + 18$. Je multiplie la premiere Equation par 18, & la seconde par 2, ce qui fait $18x = 18a - 36$, & $2y = 2a + 36$. On ajoute ces deux Equations en une somme qui est $18a + 2y = 20a$. Ainsi je sçai qu'il faut mettre 18 carolus avec 2 pieces de six blancs, pour faire 20 sols en 20 pieces.

Après cela j'allie z avec x; car dans cet alliage il faut comparer une grandeur avec une qui soit plus petite que la moyenne si elle est plus grande que la moyenne, ou avec une plus grande que la moyenne, si elle est plus petite que la moyenne. Or selon les rapports que la question me fait connoître que z & x ont avec a, je trouve ces deux Equations $z = a + 3$, & $x = a - 2$. Je multiplie la premiere par 2, & la seconde par 3, & j'ajoûte en une somme ces deux produits, ce qui fait $2z + 3x = 5a$, laquelle Equation étant jointe avec la precedente, $18x + 2y = 20a$, cela fait $21x + 2z + 2y = 25a$. Ainsi pour faire l'alliage proposé, c'est-à-dire pour faire 25 sols en 25 pieces, il faut prendre 21 carolus, 2 pieces de six blancs, & 2 sols marquez valant 15 deniers.

On connoît si un Problême est possible ou non, car si l'on proposoit de faire 20 sols en 20 de ces trois pieces dont nous venons de parler il eſt évident que le Problême ſeroit impoſſible, parce que l'on ne peut pas les allier, comme nous venons de le voir, à moins que de prendre 21 carolus, 2 ſols marquez, & 2 pieces de ſix blancs; ce qui fait 25 pieces.

On réſout pluſieurs Problêmes par le moyen de cette regle d'alliage, par exemple celui-ci. *Il y avoit*, dit-on, *dans un batteau des hommes, des femmes & des enfans, les hommes pour le paſſage payoient ſix blancs, les femmes un ſol marqué, & les enfans un carolus; & l'on ſçait que toutes ces pieces faiſoient* 15 *ſols en* 13 *pieces. Combien y avoit-il d'hommes? combien de femmes? combien d'enfans?* Il faut allier ces pieces. Je leur donne des noms; j'appelle a ſix-blancs, b les ſols marquez de quinze deniers; & c les carolus de dix deniers, & m le prix moyen qui eſt un ſol. J'allie a avec c, & j'ai ces équations $a - 6 = 2m$, & $c + 2 = m$. Je multiplie la premiere équation par 2, ce qui me donne $2a - 12 = 4m$; & la ſeconde par 6, ce qui fait $6c + 16 = 6m$. J'ajoute ces deux équations enſemble, j'ai $2a + 6c = 10m$.

J'allie enſuite b avec c. J'ai cette équation, $b - 3 = m$, & $c + 2 = m$. Je multiplie la premiere par 2, ce qui fait $2b - 6 = 2m$, & la ſeconde par 3, ce qui fait $3c + 6 = 3m$. J'ajoute ces deux produits en un, $3c + 2b = 5m$. Je joints celui-ci avec le produit du premier alliage qui eſt $2a + 6c = 10m$, cela fait $2a + 2b + 9c = 15\ m$; ce qui me fait connoître qu'il y avoit deux hommes, deux femmes, neuf enfans.

Il eſt facile de ſe tromper en ces ſortes de Problêmes, ſur tout lors qu'il y a pluſieurs grandeurs, parce que l'alliage se peut faire en differentes manieres; comme en cet exemple. *Une troupe de cent personnes composée d'hommes, de femmes, d'enfans & de serviteurs ont dépensé dans un voyage* 100 *pistoles. Les hommes ont dépensé chacun trois pistoles, les femmes chacune une, chaque enfant une demie pistole, & chaque serviteur une septiéme.* h est l'argent des hommes f celui des femmes, e celui des enfans, & s celui des serviteurs. S'il étoit question de sçavoir le nombre des hommes, des femmes, des enfans & des serviteurs séparement, l'on ne pourroit pas conclure qu'il y eût necessairement 28 hommes, 5 femmes, 4 enfans, 63 serviteurs de ce que $28h + 5f + 4e + 63s = 100$ pistoles; car on peut allier ces quatre grandeurs en plusieurs differentes manieres, de sorte qu'elles fassent toujours 100 pistoles, comme vous le voyez dans cet exemple. $25h + 15f + 4e + 56s = 100$. Cent pieces de differentes valeurs font encore ici 100 pistoles. Bachet dans ses Commentaires sur Diophante, Liv. IV. Question 4e. propose en nombres entiers quatre-vingt & une résolutions differentes de cette question.

CHAPITRE VI.

Résolutions de plusieurs Problêmes.

28 POur faire voir avec plus d'étenduë l'usage de la methode qu'on enseigne ici, je proposerai dans ce Chapitre plusieurs Problêmes. Je les énonce d'une maniere abstraite pour abreger, & en même temps pour en rendre les résolutions plus generales. J'aurois pû par exemple proposer

le premier Problême qui ſuit, d'une maniere moins abſtraite, en le propoſant ainſi. *Deux hommes ont enſemble cent écus, l'un a* 40 *écus plus que l'autre : quel eſt l'argent d'un chacun ?* On pourroit de la même maniere au lieu de l'énoncé de chacun des autres Problêmes former des Queſtions de cette nature, faire des énigmes telles que Bachet en propoſe 45 qu'il a trouvées dans l'Anthologie Grecque. En voici une. *Une aſneſſe dit à une mule, ſi je t'avois donné un de mes ſacs, nous en aurions autant l'une que l'autre : & ſi tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy. Combien l'aſneſſe avoit-elle de ſacs ?* Ces queſtions ſeroient divertiſſantes; mais cela m'obligeroit à de longs diſcours. Je pourrois auſſi faire voir que la réſolution de chaque Problême donne lieu de faire un Theorême, comme vous allez voir dans le Problême ſuivant, qu'on le peut faire.

PROBLEME PREMIER.

Diviſer ce nombre 100 *en deux parties, telles que leur difference ſoit* 40.

La plus grande partie de 100 ſoit nommée z, & la plus petite x. Leur difference doit être 40. J'ai donc cette double expreſſion ou équation $x + 40 = z$, ou $z - 40 = x$. Ainſi je puis ſubſtituer $x + 40$ en la place de z, & $z - 40$ en la place de x.

Pour trouver une ſeconde équation par le moyen de laquelle une des grandeurs inconnuës ſe trouve ſeule, comparée avec des grandeurs connûës; je conſidere que ſelon que la queſtion eſt propoſée $x + z = 100$, ou $x + x + 40 = 100$, ou $z + z - 40 = 100$. L'une ou l'autre que je prenne de ces deux dernieres équations je puis resoudre ce Problême facilement: car dans $x + x + 40 = 100$, ôtant 40 de part & d'autre j'aurai $x + x = 60$, & prenant la moitié de ce reste je trouverai que $x = 30$; ainsi je connois la valeur de x. Dans $z + z - 40 = 100$, si j'ajoute 40 de part & d'autre, j'aurai $z + z = 140$, dont prenant la moitié j'aurai $z = 70$; ainsi la valeur de z me sera connuë.

Or vous voyez que puisque $x + x + 40 = 100$, donc il est vrai que *deux fois la plus petite partie d'une grandeur plus sa difference avec l'autre partie de cette grandeur est égale à toute la grandeur*. Et puisque $2z - 40 = 100$, donc *deux fois la plus grande partie moins sa difference avec la plus petite partie est égale à toute la grandeur.* Voila donc un Theorême. la résolution de tous les Problêmes que vous verrez vous donnera de la même maniere la connoissance d'un Theorême. Il suffit de l'avoir montré en cet exemple. C'est ainsi qu'on a trouvé la plûpart des Theorêmes de la Geometrie.

PROBLEME SECOND.

Couper ce nombre 100 en deux parties, telles que la plus grande soit égale à trois fois la plus petite plus vingt unitez.

Soit nommée z la plus grande, & x la plus petite. Selon que la question est proposée $3x + 20 = z$. Au lieu de z je puis donc substituer $3x + 20$ par tout où il faudra mettre z: & puis que z & x sont les deux parties de 100, & qu'ainsi $z + x = 100$ il faut que $3x + 20 + x$, ou $4x + 20$ soit égal à 100. Ainsi $4x + 20 = 100$. Donc en retranchant 20 de part & d'autre, $4x = 80$. Si on divise par 4 l'un & l'autre membre, on a cette équation $x = 20$. Ainsi 20 est la valeur de x, & par consequent puis que $3x + 20 = z$, donc la valeur de z est 80.

PROBLEME TROISIE'ME.

Partager 60 en deux nombres tels que $\frac{1}{5}$ du premier plus $\frac{1}{3}$ du second fassent 14.

Je nomme x la cinquiéme partie du premier nombre que je cherche, & z le second; ainsi le premier est $5x$. Et puis que x avec un tiers de z est égal à 14, comme on le suppose, $14 - x = \frac{1}{3}z$. Je multiplie cette équation par 3, & j'ai $42 - 3x = z$ Or $5x + z = 60$. Donc mettant $42 - 3x$ en la place de z, j'aurai $5x + 42 - 3x$, ou $42 + 2x = 60$. J'ôte 42 de part & d'autre, donc $2x = 18$, donc $x = 9$ & $5x = 45$; donc le premier nombre est 45, & partant le second est 15.

PROBLEME QUATRIE'ME.

On cherche deux nombres dont on sçait que le plus petit est le tiers du plus grand, & que si on ôte le plus petit de 16 *& le plus grand de* 30, *les restes seront égaux.*

Le plus petit soit x, l'autre soit z. Par la premiere supposition $3x = z$, & par la seconde $16 - x = 30 - z$. Substituant $3x$ égal à z en la place de z, alors on aura cette équation $16 - x = 30 - 3x$. J'ajoute de part & d'autre un x, & j'ai $16 = 30 - 2x$ J'ajoute ensuite de part & d'autre $2x$, & j'ai $16 + 2x = 30$. Je retranche 16 de part & d'autre, & j'ai $2x = 14$. Je divise l'un & l'autre membre par 2., & j'ai $x = 7$;

ainsi x vaut 7, & par consequent z qui est égal à $3x$ vaut 21.

PROBLEME CINQUIE'ME.

On cherche deux nombres qui soient entr'eux comme 1 est à 5 ; mais qui deviennent comme 1 est à 3, après avoir ajouté 4 au plus petit, & 6 au plus grand.

Le plus petit soit x, le plus grand z. Puis que x est la cinquiéme partie de z, donc $5x = z$; & puis qu'ayant ajouté 4 à x & 6 à z, pour lors $x + 4$ est le tiers de $z + 6$, ou de $5x + 6$; car $5x$ est égal à z: Donc multipliant $x + 4$ par 3 on aura cette équation $3x + 12 = 5x + 6$. Retranchant de part & d'autre $3x$ & 6, il ne reste plus que $6 = 2x$: divisant ces deux membres par 2 on a $3 = x$; donc x vaut 3, & par consequent z vaut 15, puis qu'il vaut cinq fois x.

PROBLEME SIXIE'ME.

Cette grandeur inconnuë $x - 30$ *est le triple de* $x - 100$. *On cherche la valeur de la grandeur* x.

Puis que $x - 30$ est le triple de $x - 100$, donc $x - 30 = 3x - 300$. J'ajoute 30 de part & d'autre, & pour lors j'ai $x = 3x - 270$. J'ajoute derechef 270, & j'ai $x + 270 = 3x$, j'ôte un x de part & d'autre, il reste $270 = 2x$. Je divise cette équation par 2, ce qui me donne $135 = x$, donc x vaut 135.

PROBLEME SEPTIE'ME.

Il faut diviser 100 *en deux parties, de telle sorte que le* $\frac{1}{3}$ *de la premiere avec le* $\frac{1}{5}$ *de la seconde fasse* 30.

La premiere partie soit x, la seconde z; donc $100 - x = z$, & $100 - z = x$. Par la supposition qu'on fait que $\frac{1}{3}$ de la premiere partie x avec $\frac{1}{5}$ de z seconde partie égale à $100 - x$, est égal à 30; l'on a cette équation $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}100 - \frac{1}{5}x = 30$. Il faut corriger cette équation, & la réduire à de plus simples termes. Pour cela j'en multiplie les membres par ce nombre 15, qui peut être divisé exactement par 3 & par 5. Je multiplie premierement le second membre 30 par ce nombre 15, ce qui fait 450; ensuite je multiplie l'autre membre, commençant par $\frac{1}{3}x$, qui étant multiplié par 15, le produit est quinze tiers qui sont cinq entiers; ainsi le produit de cette multiplication est $5x$. Ensuite je multiple $\frac{1}{5}100 - \frac{1}{5}x$ par 15, ce qui, selon les regles, donne $300 - 3x$; ainsi j'ai cette équation $5x + 300 - 3x = 450$. Je corrige cette équation, ôtant du premier membre $3x$ qui se trouve avec des signes contraires, & j'ai $2x + 300 = 450$. Je retranche de part & d'autre 300, après quoi $2x = 150$. Je divise cette équation par 2, ce qui me donne $x = 75$, par conséquent x vaut 75. Or $100 - x$, ou $100 - 75$, ou $25 = z$; donc la valeur de z est 25.

Probleme huitie'me.

Trouver un nombre, lequel ajouté à 100 *&* *à* 20, *fasse deux nombres qui soient l'un à l'autre comme 3 est à 1.*

Le nombre qu'on cherche soit nommé x; je suppose la chose faite, sçavoir que $20 + x. 100 + x :: 1. 3$. Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, partant $60 + 3x = 100 + x$. Je retranche 60 & une fois x de part & d'autre, & j'ai $2x = 40$. Je divise cette équation par 2; j'ai $x = 20$, par consequent x vaut 20, qui ajouté à 100 fait 120 triple de $20 + 20$ ou de 40.

PROBLEME NEUVIE'ME.

Connoissant la difference de deux grandeurs, & le rapport de l'une à l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme x la plus petite. Sa difference à la plus grande est b. Donc cette plus grande est $x + b$. On suppose que $x. x + b :: 1. 3$. donc $3x = x + b$. J'ôte x de part & d'autre; donc $2x = b$: donc $x = \frac{1}{2}b$. Si $x. x + b :: 2. 3$. alors $3x = 2x + 2b$. J'ôte $2x$ de part & d'autre, & j'ai $x = 2b$. Ainsi la valeur de x est connuë. L'expression de ce Problême est generale, par consequent quelque raison & quelque difference qu'on puisse supposer être entre des grandeurs données, on trouvera la valeur de ces grandeurs comme on vient de trouver la valeur de x.

PROBLEME DIXIE'ME.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & le produit de l'une par l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme la somme de ces deux grandeurs $2a$;

& leur difference zz. Ainsi comme on l'a fait voir § n. 13 la plus petite sera $a - z$, & la plus grande $a + z$, leur produit connu soit nommé b; donc selon que la question est proposée multipliant $a - z$ par $a + z$, leur produit $aa + az - az - zz$ sera égal à b. Puis que $+ az - az$ ne font rien, on a cette équation $aa - zz = b$. Ajoutant zz de part & d'autre on a $aa = b + zz$. Otant b, reste $aa - b = zz$. Donc ôtant b du quarré aa, la racine quarrée du reste sera la valeur de z.

L'expression de ce Problême est encore fort generale. Exprimant de la maniere que nous venons de le faire deux grandeurs dont on connoît la somme ou leur difference, on résout une infinité de questions.

PROBLEME ONZIE'ME.

L'on demande que l'on divise ce nombre 100 *en deux parties, telles que la plus grande* z *étant multipliée par la plus petite* x, *le produit qui est* xz *soit à* xx *quarré de la plus petite, comme* 10 *est à* 1.

On suppose que la plus petite est x, & la plus grande est z. Puis que z & x sont les parties de 100, donc $100 - z = x$, & $100 - x = z$. Or selon que la question est proposée, x ayant été multiplié par z ou par la grandeur qui lui est égale, sçavoir $100 - x$, le produit $100x - xx$, doit être à xx comme 10 à 1.

$$100x - xx . xx :: 10 . 1.$$

Par consequent puis que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, $100x - xx = 10xx$, j'ajoute xx de part & d'autre, & j'ai $100x = 11xx$. Je divise les membres de cette équation par x, & j'ai $100 = 11x$. Je divise de nouveau les membres de cette équation par 11 ; le quotient de cette division est $9\frac{1}{11}$ d'une part, & x de l'autre : donc $9\frac{1}{11}=x$; donc x vaut $9\frac{1}{11}$, & partant z qui est l'autre partie de 100, vaut $90\frac{10}{11}$.

Probleme douzième.

J'ai dépensé un certain nombre de livres, dont je ne me souviens plus ; je sçai seulement que le $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ *de ce nombre* $+22=94$. *Trouver ce nombre de livres.*

Tous ces nombres rompus ajoutez dans une somme, font $\frac{26}{24}$; donc $\frac{26}{24}+22=94$. J'ôte 22 de part & d'autre, ce qui me donne $\frac{26}{24}=72$. Puis que 72 est ainsi égal à $\frac{26}{24}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ du nombre que je cherche & que je nomme x ; je sçai donc que 72 doit être à x, comme 26 est à 24, qui represente l'entier x. Par consequent $26.\ 24 :: 72.\ x$; multipliant donc 72 par 24, & divisant le produit de cette multiplication par 26, le quotient de cette division qui est $66\frac{6}{13}$, donnera la valeur de x qu'il falloit trouver.

Probleme treizième.

Ce nombre 576 est un nombre plan, on cherche *ses racines inconnuës* x *&* z *, qui sont entr'elles comme* 1 *&* 4.

Selon que ce Problême est proposé, on sçait que $x.z :: 1.4.$ & que $xz = 576$. Or puis que le produit des extrêmes x & 4 est égal à celui des moyens qui sont ici z & 1 ; donc $4x = z$. Ainsi au lieu de xz on peut mettre $4xx$: & puis que xz est égal à 576, donc $4xx = 576$. Je divise cette équation par 4, j'ai $xx = 144$; je prends la racine quarrée des deux membres, ce qui me donne $x = 12$; donc x vaut 12, & par consequent z vaut 48.

PROBLEME QUATORZIE'ME.

On veut partager le nombre 178 *en trois parties qu'on nomme* x, y, z, *telles que* $\frac{x}{5} = 8z$, *& que* $8z = \frac{y}{6}$.

Pour résoudre ce Problême il n'est question que de trouver la proportion qui est entre ces trois parties, ce que l'on connoîtra par le moyen des deux équations ; car puis que $\frac{x}{5} = 8z$, donc en multipliant l'un & l'autre membre par 5, l'on aura $x = 40z$; ainsi on sçait déja que puis que x est égal à 40 fois z, il faut que $z.x :: 1.40$. En second lieu, puis que $\frac{y}{6} = 8z$; en multipliant cette équation par 6, on a $y = 48z$: donc on sçait que y est égal à 42 fois z, & qu'ainsi $z.y :: 1.48$. Cela fait connoître les raisons des trois grandeurs $z.x.y$. sçavoir que $z.x.y :: 1.40\ 48$. Pour achever ce Problême, il faut par le Liv. III. n. 81. diviser 178. proportionnellement à ces trois nombres 1. 40. 48. qui ajoutez ensemble font 89.

PROBLEME QUINZIE'ME.

Ce nombre 30 étant donné, trouver ses trois parties x. y. z. *On sçait que* $\div$ x. y. z. *&* *que* xy. xz :: 1. 4.

Pour résoudre ce Problême, il n'est question que de trouver la raison qu'ont entr'elles ces parties *x. y. z.* du nombre 30, qu'on suppose en progression. On suppose encore *xy. xz* :: 1. 4. Donc puis que l'on a démontré Liv. III. n. 63. que *xy* est à *xz* comme *y* à *z*; il faut que *z* soit quatre fois plus grand que *y*. Et puis que *x* est le premier terme de la progression, si on dit que *z* soit 16, & par consequent que *y* soit 4, *x* doit être 1. Il ne s'agit donc plus que de diviser 30 proportionnellement à ces trois nombres 1.4.16, dont la somme est 21. On trouvera Liv. III. n. 82. ces trois nombres $1\frac{9}{21}$. $5\frac{15}{21}$. $22\frac{18}{21}$, qui seront les trois parties de 30 que l'on cherchoit.

PROBLEME SEIZIE'ME.

On cherche deux nombres x *&* z. *On sçait qu'ôtant* 1 *de* z, *& l'ajoutant à* x, *alors x est double de* z; *& qu'ôtant* 1 *de* x *& l'ajoutant à* z. *alors* x *&* z *sont égaux.*

Selon la premiere supposition $2z - 2 = x + 1$, & selon la seconde $z + 1 = x - 1$. Il faut réduire les deux inconnuës *z* & *x* à une seule, *z* à *x*, ou *x* à *z*. Si on veut faire évanouir *x*; il faut ajouter aux deux membres de l'équation $z + 1 = x - 1$ la même grandeur 1, après quoi on aura $z + 2 = x$. Mettant donc $z + 2$ pour *x* dans

dans l'Equation $2z - 2 = x + 1$, pour lors $2z - 2 = z + 3$. Ajoûtez 2 de part & d'autre, vous aurez $2z = z + 5$. Retranchez un z de part & d'autre, & vous aurez $z = 5$. Et puis que $z + 2 = x$, donc $x = 7$.

Remarquez que ce Problême exprimé d'une maniere abstraite, est le Problême de la mule & de l'ânesse dont nous avons parlé ci-dessus, x marque le nombre des sacs de l'ânesse, & z celui des sacs de la mule. Ainsi l'ânesse avoit sept sacs, & la mule cinq. Si on enseignoit ce petit ouvrage à de jeunes gens il faudroit appliquer ces Problêmes à de semblables questions pour les divertir, & les convaincre en même temps de l'utilité de l'Analyse.

PROBLEME DIX-SEPTIE'ME.

$x. z :: 1. 3.$ & $zz. x :: 6. 1.$ *l'on cherche la valeur de* x *& de* z.

De la maniere que cette question est proposée, il faut que x soit le tiers de z : donc $z = 3x$. Et puisque $zz. x :: 6. 1.$ mettant $3x$ en la place de z, ou $9xx$ quarré de $3x$ en place de zz quarré de z, j'exprimerai ainsi la proportion précedente : $9xx. x :: 6. 1.$ où z ne paroît plus. Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; donc $9xx = 6x$. Je divise les membres de cette équation par 9, & j'ai $xx = \frac{6x}{9}$, ou $\frac{2x}{3}$. Je les divise encore par x; & j'ai $x = \frac{2}{3}$. Ainsi x vaut $\frac{2}{3}$, & par consequent z vaut 2, dont le quarré qui est 4, est six fois plus grand que $\frac{2}{3}$.

PROBLEME DIX-HUITIE'ME.

Connoissant le premier & le second terme d'une progression Geometrique, avec la somme de tous les termes, connoître combien elle a de termes, & la valeur du dernier.

Soit cette progression $\div\div$ 2. 6. . . . . . x. Le premier terme & le second sont des nombres connus. les autres sont inconnus ; ainsi j'ai marqué leur places avec des points. On sçait que 728 est la somme de tous les termes. Je nomme x le dernier terme. 728 contient x, & outre cela la somme de tous les termes qui precedent x, qui est ainsi $728 - x$. Or Liv. III. n. 90. $6 - 2 . 2 :: x - 2 . 728 - x$. Donc $2x - 4$ produit des moyens est égal à $2912 - 4x$ produit des extrêmes. Ainsi $2x - 4 = 2912 - 4x$. J'ajoûte $4x$ de part & d'autre, ce qui fait $6x - 4 = 2912$. J'ajoûte encore de part & d'autre 4, ce qui fait $6x = 2916$. que je divise par 6, & j'ai $x = 486$. Le dernier terme est donc 486. On connoîtra le nombre des termes de la progression proposée, par ce qui a été enseigné, Liv. III. n. 98.

Ce Problême est celui dont on avoit promis la résolution. Liv. III. n. 101.

PROBLEME DIX-NEUVIE'ME.

Connoissant la difference qui est entre deux grandeurs inconnuës, & un moyen proportionnel entre ces grandeurs, connoître ces grandeurs.

Les grandeurs données sont y & z, leur difference est 8. Le moyen proportionnel qui est entr'elles est d. Il faut premierement exprimer ces deux grandeurs, de maniere qu'elles se réduisent à une expression où il n'y ait qu'une lettre inconnuë. Supposant que $2x = z + y$, & prenant 4 moitié de la difference de z à y, selon ce que nous avons enseigné ci-dessus, n. 23. $x + 4$ doit être égal à z, si z est plus grand que y, & $x - 4$ égal à y, si y est plus petit que z. Par consequent selon que la question est proposée, $\div x + 4. d. x + 4$. Le produit des extrêmes qui est $xx - 16$, est égal à dd quarré de d moyen proportionnel : Donc $xx - 16 = dd$. Transportez 16 pour avoir $xx = dd + 16$. La grandeur d est connuë : si elle étoit 3, donc dd seroit 9 ; ainsi $xx = 25$, laquelle équation on réduit par l'extraction de la racine quarrée à celle-ci $x = 5$. Or $z = x + 4$; donc $z = 9$, & par consequent $y = 1$.

PROBLEME VINGTIE'ME.

Trois personnes ont chacune un nombre d'écus ; la premiere & la seconde ont a *plus que la troisiéme ; la premiere & la troisiéme ont* b *plus que la seconde ; & la seconde & la troisiéme ont* c *plus que la premiere. On demande ce que chacun doit avoir.*

Soit x le nombre des écus de la premiere, y celui de la seconde, & z celui de la troisiéme. Selon que la question est proposée, 1°. $x + y - a = z$; donc $x = z - y + a$.

2°. $x + z - b = y$; donc $x = y - z + b$.

3°. $x = y + z - c$.

Remarquez que tous les seconds membres de ces trois équations, $x = z - y + a$. $x = y - z + b$. $x = y + z - c$, sont égaux entr'eux étant égaux à x. Donc $z - y + a = y + z - c$. & $y + z - c = y - z + b$.

Je considere cette équation $z - y + a = y + z - c$. J'ôte z de part & d'autre, reste $- y$

$+ a = y - c$. J'ajoûte y, & j'ai $a = 2y - c$. J'ajoûte encore c, & j'ai $a + c = 2y$; donc y vaut la moitié de $a + c$.

De même je réduis cette équation $y - z + b = y + z - c$ à celle-ci $b + c = 2z$ en ôtant de part & d'autre y, il vient $- z + b = z - c$. J'ajoûte de part & d'autre z, & j'ai $b = 2z - c$. J'ajoûte encore c & vient $b + c = 2z$. Donc z est égal à la moitié de $b + c$. Or $x = y + z - c$; donc la valeur de x ne peut plus être inconnuë. Sa valeur sera la moitié de $a + c + b + c$ valeur de $y + z$, retranchant de cette somme la valeur de c.

PROBLEME VINGT-UNIE'ME.

On sçait que x. z. y :: 9. 12. 16. *Outre cela que* $xx + zz + yy = 4329$. *Il faut trouver la valeur de ces trois grandeurs*, x. z. y.

Puisque $x. z. y :: 9. 12. 16.$ Donc $xx. zz. yy :: 81. 144. 256.$ Ces trois nombres sont les quarrez de 9. 12 & 16. leur somme est 481. Par l'hypothese celle des quarrez xx, zz, & yy est 4329. Divisant donc cette somme 4329, selon qu'il a été enseigné Liv. III. n. 82. proportionnellement aux parties de 481, on aura la valeur de chacun de ces trois quarrez inconnus : sçavoir $xx = 729$, $zz = 1296$, $yy = 2304$. Dont ayant extrait les racines, on a $x = 27$, $z = 36$, $y = 48$.

PROBLEME VINGT-DEUXIE'ME.

2a *est la somme de deux grandeurs, dont le produit ajoûté à la somme de leurs quarrez est* c, *trouver chaque grandeur.*

Je nomme $2y$ leur difference qui est inconnuë, tellement que la plus petite sera $a - y$ & la plus grande $a + y$; leur produit eſt $aa - yy$. La ſomme de leurs quarrez eſt $2aa + 2yy$, laquelle avec ce produit fait $3aa + yy$ égal à c. Ainſi on a cette équation $3aa + yy = c$; donc $yy = c - 3aa$. Or $c - 3aa$ eſt tout connu ; donc yy le ſera pareillement ; & par conſequent ſa racine y, au moyen de laquelle on connoîtra les deux grandeurs $a - y$ & $a + y$.

PROBLEME VINGT-TROISIE'ME.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs & la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs qu'on veut connoître, & c la ſomme de leur quarrez. Je nomme $2z$ la difference des deux grandeurs ; ainſi la plus petite eſt $a - z$, & la plus grande $a + z$. Le quarré de $a - z$ eſt $aa - 2az + zz$, & celui de $a + z$ eſt $aa + 2az + zz$. Ces deux quarrez ajoûtez enſemble ſont $2aa + 2zz$. Or c eſt égal à ces deux quarrez ; donc $2aa + 2zz = c$; donc $2zz = c - 2aa$, & $zz = c\frac{1}{2} - aa$. Pour connoître z il faut retrancher aa de la moitié de c, & du reſte en prendre la racine quarrée, qui ſera la valeur de z.

PROBLEME VINGT-QUATRIE'ME.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs & la difference de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme de ces grandeurs, leur difference qui eſt inconnuë ſoit $2z$. La plus petite eſt $a - z$. La plus grande $a + z$. Le quarré de $a - z$ eſt $aa - 2az + zz$: celui de $a + z$ eſt $aa + 2az + zz$. La difference de ces deux quarrez est $4az$ qui est égale à b. Donc $4az = b$. Je divise cette équation par $4a$, aprés quoi $z = \frac{b}{4a}$; ainsi le quotient de b divisé par $4a$ est la valeur de z.

PROBLEME VINGT-CINQUIE'ME.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & la somme de leurs cubes, ou la difference de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Ce Probléme se résout comme les deux précedens.

PROBLEME VINGT-SIXIE'ME.

Connoissant le produit de deux grandeurs 32, & la somme de leurs quarrez 80, trouver quelles sont ces grandeurs.

Je nomme $2x$ leur somme & $2z$ leur difference. Ainsi selon ce qu'on a dit ꝰ n. 23. dont vous voyez que nous faisons tant d'usage, $x - z$ sera la plus petite de ces deux grandeurs inconnuës, & $x + z$ la plus grande. Le produit de ces deux grandeurs est $xx - zz + xz - zz$ égal, comme on le suppose, à 32. Ainsi corrigeant l'expression de ce produit, on a cette équation $xx - zz = 32$, ou $xx = 32 + zz$.

Le quarré de la plus petite de ces deux grandeurs est $xx - 2xz + zz$: celui de la plus grande est $xx + 2xz + zz$. La somme de ces quarrez est $2xx + 2zz$ égale à 80, selon que la question est proposée. On a donc cette équation $2xx + 2zz = 80$, ou $2xx = 80 - 2zz$. Divisant cette équation par 2 vient $xx = \frac{80 - 2zz}{2}$.

On a trouvé que $xx = 32 + zz$. Donc substituant $32 + zz$ au lieu de xx, on aura cette équation $32 + zz = \frac{80 - 2zz}{2}$, que je multiplie par 2, & j'ai $64 + 2zz = 80 - 2zz$. J'ajoûte $2zz$, & j'ai $64 + 4zz = 80$. Je rétranche 64 & j'ai $4zz = 80 - 64$, c'est-à-dire, $4zz = 16$, que je divise par 4, & j'ai $zz = 4$: Partant z moitié de la difference de ces deux grandeurs qu'on cherche est 2; la difference entiere est donc 4. Puisque $xx - zz$ leur produit est égal à 32, & que $xx = 32 + zz$, c'est-à-dire que $xx = 36$, donc x vaut 6. La plus petite des grandeurs qu'on cherche est $x - z$, & la plus grande $x + z$, c'est-à-dire $6 - 2$ & $6 + 2$. Donc ces grandeurs sont 4 & 8.

PROBLEME VINGT-SEPTIE'ME.

2 y est la somme de deux grandeurs inconnuës; leur difference est 2 z: *leur produit connu* b, *&* c *la valeur de ce produit ajoûté à la somme de leurs quarrez; il faut connoître ces grandeurs.*

La plus petite est $y - z$: la plus grande $y + z$ Leur produit est $yy - zz$. Leurs quarrez sont $yy - 2yz + zz$ & $yy + 2yz + zz$. Ces deux quarrez joints avec le produit $yy - zz$ font $3yy + zz$. Or $yy - zz = b$, donc $yy = b + zz$; partant $yy - b = zz$. Par l'hypothese encore $3yy + zz = c$, donc $zz = c - 3yy$. Donc $yy - b = c - 3yy$. Et ajoûtant $3yy$, on a $4yy - b = c$, & par consequent $4yy = c + b$ & $yy = \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}b$ &c.

PROBLEME VINGT-HUITIEME.

Le solide c *est fait du produit de* 2 y *somme de* *deux grandeurs par la somme des quarrez de ces grandeurs, & le solide d est fait par 2 z difference de ces grandeurs multipliée par la difference des quarrez de ces grandeurs. Connoître chaque grandeur.*

La plus petite de ces deux grandeurs est $y - z$, & la plus grande $y + z$. La somme de leurs quarrez est $2yy + 2zz$, dont le produit par $2y$ est $4y^3 + 4yzz$ égal à c. La difference des quarrez de $y - z$ & $y + z$ est $4yz$, qui multipliée par $2z$ fait $8\ yzz = d$. Donc $4y^3 + 4y = c$ & $8yzz = d$. Or la premiere équation se reduit à celle-ci $yzz = \frac{1}{4} c - y^3$, & la seconde à celle-ci $yzz = \frac{1}{8} d$. Donc $\frac{1}{4} c - y^3 = \frac{1}{8} d$. Donc $\frac{1}{4} c = \frac{1}{8} d + y^3$, & $\frac{1}{4} c - \frac{1}{8} d = y^3$, &c.

Probleme vingt-neuvie'me.

On cherche la valeur de x *& de* y, *dont la difference est* z. *On sçait seulement que le produit de* x *& de* y *divisé par leur difference* z *est* $5 \frac{1}{4}$.

Selon que la question est proposée yx produit de x multiplié par y étant divisé par z, le quotient de cette division est égal à $5 \frac{1}{4}$. Ainsi on a cette équation $\frac{yx}{z} = 5 \frac{1}{4}$. Mais elle ne suffit pas, il en faut avoir une autre, qu'on ne peut point trouver, parce que cette question n'est point déterminée; c'est-à-dire que les grandeurs qu'on cherche n'ont point de rapport particulier qui les détermine de telle ſorte qu'il n'y ait qu'une ſeule grandeur à qui ce rapport convienne. Pluſieurs grandeurs peuvent avoir ce même rapport ; ainſi on peut ſuppoſer telle grandeur qu'on voudra. Je ſuppoſe donc que la plus petite des deux grandeurs propoſées eſt 3 ; la plus grande eſt donc $z + 3$. Le produit de 3 & de $z + 3$ eſt $3z + 9$, qui étant diviſé par z, le quotient doit être $5\frac{1}{4}$. Ainſi $\frac{3z + 9}{z} = 5\frac{1}{4}$. Je multiplie les membres de cette équation par z, & j'ai $3z + 9 = 5z + \frac{1}{4}z$. Je retranche $3z$ & vient $9 = 2z + \frac{1}{4}z$. Pour délivrer l'équation de cette fraction, je la multiplie par 4, & j'ai $36 = 8z + z$. Par conſequent $36 = 9z$ que je diviſe par 9, après quoi $4 = z$. Ainſi z vaut 4, & partant comme la plus petite grandeur qu'on cherchoit eſt 3, la plus grande ſera 7. Le produit de 3 par 7 eſt 21. Ce nombre étant diviſé par 4, le quotient eſt $5\frac{1}{4}$. Ainſi ces deux nombres ſatisfont à la queſtion. En prenant tout autre nombre que 3 j'aurois réſolu de la même maniere la queſtion ; c'eſt-à-dire que j'aurois trouvé d'autres nombres qui y auroient ſatisfait.

Probleme trentie'me.

Ce nombre 34 eſt compoſé de ces deux nombres quarrez 9 & 25. Il faut partager ce nombre en deux autres nombres quarrez, de telle maniere que ce que l'on ajoûte à la racine de l'un ſoit la moitié de ce que l'on ôte de la racine de l'autre.

La racine de 9 est 3, celle de 25 est 5. Pour resoudre ce Problême, il faut trouver deux autres racines, dont l'une soit plus petite, & l'autre plus grande. J'ajoûte x à 3. L'on demande outre cela, que ce que l'on ôte de 5 soit le double de ce que l'on ajoûte à 3; ainsi si la premiere racine est $3 + x$; la seconde racine sera $5 - 2x$. Le quarré de $3 + x$ est $9 + 6x + xx$; celui de $5 - 2x$ est $25 - 20x + 4xx$. Ces deux quarrez ajoûtez ensemble font $34 - 14x + 5xx$ qui sont égaux à 34; ainsi on a cette équation $34 - 14x + 5xx = 34$. J'ajoûte $14x$ de part & d'autre, $34 + 5xx = 34 + 14x$. Je retranche 34, j'ai $5xx = 14x$; je divise par x, & j'ai $5x = 14$. Je divise par 5, & il vient $x = \frac{14}{5}$. La premiere racine est $3 + \frac{14}{5}$. La seconde est $5 - \frac{28}{5}$ qui corrigée est $\frac{3}{5}$. Le quarré de la premiere est $33 \frac{16}{25}$. Celui de la seconde $\frac{9}{25}$; & les deux font 34.

Voilà quelques exemples de Problêmes indéterminés sur des grandeurs rationnelles; c'est à-dire qui se peuvent exprimer par nombres. Comme il est libre entre les grandeurs dont la valeur n'est point déterminée, d'en supposer une telle qu'on la veut choisir; ces Problêmes sont capables de plusieurs differentes résolutions. Prenez garde aux méthodes, qui étant bien entenduës découvrent le moyen de résoudre une infinité de Problêmes sur les nombres.

PROBLEME TRENTE-UNIE'ME.

Trouver deux grandeurs commensurables, & telles que leur somme, & celle de leur quarrez ayent un même rapport que deux grandeurs connuës.

a & b sont les grandeurs connuës. Je nomme z la premiere des inconnuës, & zy la seconde. Prenez garde à cette expression. Dans les Problêmes précédens on a marqué chaque inconuë par une seule lettre. Selon que la question est proposée $z + zy$ la somme des deux innconnuës, est à $zz + zzyy$, la somme de leurs quarrez, comme a est à b; ainsi le produit des extrêmes de cette proportion $z + zy$ & b est égal au produit des moyens a & $zz + zzyy$. Donc.

$$bz + bzy = azz + azzyy.$$

Je divise les deux membres de cette équation par $az + azyy$, & aprés la correction vient

$$z = \frac{b + by}{a + ayy}$$

Si je suppose que $y = 2$. Donc $z = \frac{b + 2b}{a + 4a}$ & si $a = 1$, & $b = 10$; donc $z = 6$. Ainsi $zy = 12$. Or $z + zy$ ou $6 + 12$ est à $zz + zzyy$ ou $36 + 144$, comme a est à b, c'est-à-dire 18. 180 :: 1. 10. Voilà donc la question résoluë. On auroit trouvé d'autres nombres, si on avoit supposé y égal à une autre valeur que ce nombre 2.

PROBLEME TRENTE-DEUXIE'ME.

Couper un quarré déterminé en deux quarrez parfaits.

Soit a le côté du quarré connu, & x celui du premier inconnu qu'on cherche, & x le côté du second. Ainsi voilà ce qu'on cherche $aa = zz + xx$. Il est évident que x & z sont chacun moindre que a. Prenons $a - zy$ ou $by - a$ pour x. Ainsi au lieu de l'équation précedente on aura $aa = zz + aa + zzyy - 2azy$, qu'on peut réduire par les voies ordinaires à celle-ci, $2azy = zz + zzyy$. Divisant de part & d'autre par z vient $2ay = z + zyy$, ou $2ay = 1z + 1zyy$. Je divise l'un & l'autre membre par $1 + yy$, & j'ai $\frac{2ay}{1 + yy} = z$. Donc supposant $y = 2$ & $a = 10$, Alors $2ay = 40$ & $1 + yy$ $1 + 4$. Ainsi $z = \frac{2ay}{1 + yy} = 8$ & $zy = 16$ & $zy - a = 6$. Donc $x = 6$ & $xx + zz$ ou $36 + 64 = 100 = aa$. Il faut toûjours supposer y plus grand que l'unité.

PROBLEME TRENTE-TROISIE'ME.

Diviser la somme de deux quarrez parfaits en deux autres parfaits.

Soit a le côté du plus grand des quarrez connus, & b celui du plus petit. Le côté d'un des deux inconnus sera moindre nécessairement que le côté a, & l'autre par conséquent plus grand que le petit côté b. Nommons donc $a - z$ celui des côtez inconnus qui vaut moins que le côté connu a; & nommant ensuite $yz - b$, l'autre côté qui doit surpasser b; les quarrez de ces deux côtez seront $aa - 2az + zz$ & $yyzz - 2byz + bb$. Et leur somme égalera la somme connuë $aa + bb$. Ce qui donnera une équation qui se réduit à celle-ci.

$$zz + yyzz = 2az + 2byz.$$

Divisant cette équation p[ar] z, vient

$$z + yyz = [2]a + 2by.$$

Or $z + yyz = 1z + [yyz]$. Divisant donc l'équation précedente par $1 + yy$, reste $z = \frac{2a + 2by}{1 + yy}$.

Ainsi si $a = 3$. $b = 2$ & qu'on suppose que $y = 2$. Donc $z = \frac{6 + 8}{1 + 4} = \frac{14}{5}$. On trouvera de cette maniere une résolution de la question, qui en peut recevoir une infinité d'autres.

Equation & égalité c'est une même chose. On se sert plus souvent du premier nom; & on n'employe le second que lorsqu'il s'agit de Problêmes numeriques, qu'on distingue en Problêmes de double, de triple égalité, selon le nombre des égalités qu'il faut trouver pour les resoudre. On définit ainsi ces égalités. On nomme double égalité, la comparaison de deux grandeurs qui renferment une même inconnuë, à deux divers quarrés qui sont inconnus. Comme s'il faut découvrir deux quarrés dont l'un soit égal à une grandeur az, *& l'autre à une grandeur* bz, *ensorte que l'inconnuë* z *de la grandeur* az *soit la même* z *qui est inconnuë dans* bz. *Et s'il falloit découvrir de la même sorte deux quarrés dont l'un fût égal à une grandeur* az + 6, *& l'autre à une autre grandeur* bz + d. *Mais s'il y avoit trois diverses grandeurs, dont chacune renfermât une même inconnuë, & qu'il fallût égaler chacune à un quarré; on diroit que c'est une triple égalité. Voilà un Problême de double équalité.*

PROBLEME TRENTE-QUATRIE'ME.

Trouver une grandeur laquelle étant multipliée *par deux grandeurs connuës, donne deux produits qui soient chacun un quarré parfait.*

Ayant nommé a & b les deux grandeurs connuës, & z l'inconnuë qui les multiplie ; le premier plan az sera égal à un quarré yy. Ainsi $az = yy$, divisant par a cette équation, viendra $z = \frac{yy}{a}$. Le second plan bz sera égal à un quarré xx. Ainsi $bz = xx$ & $z = \frac{xx}{b}$ Partant $\frac{xx}{b} = \frac{yy}{a}$, & multipliant de part & d'autre par b, on aura le quarré $xx = \frac{byy}{a}$, dont prenant la racine on aura $x = \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. De sorte que pour trouver une résolution où les grandeurs soient toutes commensurables, il est nécessaire que les grandeurs connuës a & b soient telles que la grandeur $\sqrt{\frac{b}{a}}$ soit un quarré parfait, ou que les grandeurs a & b soient deux plans semblables. Soit $a = 6$ $b = 54$. Ainsi $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{9}$. Comme y est arbitraire, supposé que $y = 8$. Alors $x = 24$ & $z = \frac{32}{3}$ & az ou $6z = 64$ & bz ou $54z = 576$.

Ainsi on a trouvé ce que l'on cherchoit, c'est-à-dire z une grandeur qui multipliée par a & par b donne deux produits, qui sont deux quarrez parfaits. Vous pouvez voir que cette liberté qu'on a de choisir ou de supposer des grandeurs telles qu'on le veut, est ce qui rend souvent la résolution des Problêmes indéterminez très-difficile, quand il s'agit de trouver des nombres ou quarrez, ou cubes. Cela demande un grand temps qui n'eſt pas entierement perdu, parce que cela peut exercer l'eſprit; & qu'on y trouve un amuſement agréable quand on aime les queſtions numeriques. Mais comme je ne dois pas groſſir ces Elemens, je ne propoſerai pas d'autres ſemblables Problêmes. J'ai tiré ces quatre derniers des Elemens du Pere Preſtet de l'Oratoire, qui en propoſe un grand nombre. La réſolution de ceux-ci donnera une entrée dans ce que cet Auteur a écrit touchant la réſolution des Problêmes indéterminez.

CHAPITRE VII.

De la nature des Equations, de leurs differens degrez, & des preparations neceſſaires pour les reſoudre.

DAns les Problêmes qu'on vient de propoſer on a réduit toutes les grandeurs inconnuës à une ſeule, qu'on fait paſſer dans un des membres de l'équation, la délivrant de toute autre grandeur, de maniere que ſe trouvant égale à une ou pluſieurs grandeurs connuës, elle n'eſt plus inconnuë. Il y a des Problêmes plus compoſez, dans leſquels aprés toutes les réductions qui ont été expliquées, c'eſt le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré de la lettre qui marque l'inconnue; par exemple ou z^2, ou z^3, ou z^4, qui eſt dans l'un des membres de l'équation, & dans l'autre ſe trouve la grandeur inconnuë z mêlée avec d'autres grandeurs: de ſorte que le Problême n'eſt pas réſolu, puiſqu'on ne connoît pas la valeur preciſe de z. Quand cela arrive l'équation n'est pas simple comme celles que nous avons vuës jusqu'à present, elle est composée. C'est de la nature de ces équations composées, que nous allons parler dans ce Chapitre, seulement pour en donner une idée, car pour en donner une pleine connoissance il faudroit un Ouvrage fait exprès, & ce ne sont ici que des Elemens pour ceux qui commencent.

I.

Le Equations sont dites d'un ou de plusieurs degrés, selon le degré où la grandeur inconnuë est élevée.

Considerez ces Equations, où l'inconnuë est z élevée à differens degrez.

$$z = b$$
$$z^2 = -az + bb$$
$$z^3 = +az^2 + bbz - c^3$$
$$z^4 = az^3 - c^3z + d^4$$

Dans la premiere de ces Equations, la grandeur inconnuë z est égale à b : Dans la seconde le quarré de z est égal au quarré de b moins a multiplié par z. Dans la troisiéme, le cube de z est égal à a multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z, moins le cube de c. Enfin dans la quatriéme, le quarré de quarré de z est égal à a multiplié par le cube de z moins le cube de c multiplié par z, plus le quarré de quarré de d. &c. Ces Equations sont composées, & à la reserve de la premiere les autres ne font pas découvrir la juste valeur de l'inconnuë. Or ces Equations reçoivent differens noms selon la puissance à laquelle la grandeur inconnuë est élevée. Une équation est du premier degré si l'inconnuë est une grandeur lineaire, ou si elle est dans le premier degré, comme est la premiere de ces équations $z = b$. Elle est du second degré, si cette inconnuë est un quarré ; du troisiéme, si c'est un cube ; du quatriéme, si l'inconnuë est élevée à la quatriéme puissance. Ainsi de toutes les autres équations qui prennent leur nom des degrez de l'inconnuë.

On reconnoîtra dans la suite que pour mieux expliquer la nature des Equations, & pour les résoudre il est bon de faire passer dans le premier membre tout ce qui est dans le second, égalant toute l'équation a zero ; ce qui se fait en changeant les signes, c'est-à-dire en joignant les deux membres par le signe $+$ ou $-$ selon que l'inconnuë est une grandeur positive ou négative ; & mettant zero dans le second membre après le signe de l'égalité. Il est évident que si $z = b$, ôtant b de z il ne doit rien rester ; c'est-à-dire qu'en retranchant d'une grandeur sa valeur entiere, on l'égale à zero. Si $z = b$ donc $z - b = 0$.

Lorsqu'une grandeur est négative, elle est moins que rien. Ainsi si z est négatif, & qu'il s'en faille b qu'il ne soit égal a rien, que $z = 0 - b$, alors pour faire passer b dans le premier membre, il faut le joindre avec $+$; car dans ce cas, afin que z soit égal à zero, il est évident qu'il faut lui ajoûter b, par consequent $z + b = 0$. Voilà donc la regle génerale, si la grandeur inconnuë qui est seule dans le premier membre est positive, le premier membre moins le second est égal à zero. Si cette inconnuë est négative, le premier membre plus le second est égal à zero. Au reste quand on fait passer le second membre dans le premier, on change les signes, c'est-à-dire le $+$ en $-$ & le $-$ en $+$. Ainsi si $z^2 = - pz + q$, on écrit $z^2 + pz - q = 0$. Si $z^2 = + pz - q$, on écrit $z^2 - pz + q = 0$.

II.

Des differens termes d'une Equation. Qu'est-ce qu'on appelle terme d'une Equation ? Tous ces termes ne paroissent pas toûjours.

Aprés qu'on a fait passer d'un côté toutes les grandeurs d'une Equation, qu'ainsi le second membre est égal à zero, on voit que dans le premier lieu du premier membre la grandeur inconnuë y est dans le degré qui donne le nom à l'équation ; que c'est ou une quatriéme, ou une troisiéme, ou une seconde puissance, & qu'elle descend ensuite ; comme ici dans cette Equation du quatriéme degré.

$$\underset{A}{x^4} - \underset{B}{4x^3} - \underset{C}{19x^2} + \underset{D}{106x} - \underset{E}{120} = 0$$

Faites attention aux parties du premier membre de cette Equation. L'inconnuë x qui est dans la premiere partie A, y est élevée jusqu'au quatriéme degré, & elle descend dans les autres parties ; car dans la seconde partie B, elle est abaissée au troisiéme degré. En C elle est descenduë au second, & en D jusqu'au premier.

Ces parties sont ce qu'on appelle les termes d'une Equation, qui se nomment premiers, seconds, troisiémes, selon que l'inconnuë descend, & a moins de dimensions. La derniere partie E, où x la grandeur inconnuë ne se trouve point, se nomme le dernier terme. Le premier c'est celui dans lequel l'inconnuë est dans le degré qui donne le nom à l'équation; x^4, qui est dans la premiere place A, est le premier terme, & 120, qui est dans la derniere place E, est le dernier terme. On dit qu'une Equation est ordonnée quand il y a de l'ordre en ses termes ; que la plus haute puissance de l'inconnuë en est le premier terme; & que les autres puissances de suite de la même inconnuë en sont les autres termes selon leurs degrez. Ainsi cette Equation est ordonnée.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

On ne compte que pour un terme, deux ou plusieurs grandeurs qui sont mêlées avec le même degré de l'inconnuë, ou dans lequel deux ou plusieurs grandeurs connuës se trouvent avec le même degré de l'inconnuë. Ainsi $bx + cx$ ou $bx - cx$ ne peuvent faire qu'un terme, car il n'y a qu'à corriger leur expression, prenant par exemple d qui soit égal à $b + c$; ainsi au lieu de $bx + cx$, écrire dx. Si on ne fait pas cette réduction, il faut écrire dans une même colonne ou l'un sous l'autre tout ce qui ne peut faire qu'un terme. Ainsi avant la réduction il faudroit écrire
$+ bx.$
$+ cx.$

Considerons encore ici comment pour faire ces réductions on peut changer une expression dans une autre, un quarré dans un plan, un plan dans un quarré. Si au lieu de aa on veut avoir un plan égal, ayant pris à discretion une grandeur plus petite ou plus grande que a; il faut en trouver une seconde, telle qu'entre ces deux, a soit un moyen proportionnel. Si c'est m & n, & qu'ainsi $\div m.\ a.\ n.$ il est évident que $mn = aa$. Si on vouloit donc changer le plan mn dans un quarré de même valeur, il faudroit trouver un moyen proportionnel entre m & n.

Les termes d'une Equation sont complexes ou incomplexes, selon que leur expression est simple ou composée. Un terme comme celui-ci $+ bx + cx$ qui n'en fait qu'un, est complexe. Si on le changeoit, & qu'ayant pris d égal à $b + c$ on fit $dx = bx + cx$, ce terme dx seroit incomplexe. Autant qu'on le peut il faut faire ensorte que les termes d'une Equation deviennent incomplexes s'ils ne le sont pas. Ainsi dans cette Equation dont le dernier terme est complexe.

$$xx - ax + bb - cc = 0$$

Il faut pour le rendre incomplexe supposer $bb - cc = dd$, & au lieu de $bb - cc$, écrire dd qui est un terme incomplexe. De même dans cette Equation.

$$xx = \frac{aax + ccd}{a - b}$$

Or dans celle-ci qui est la même chose,

$$xx = \frac{aax}{a - b} + \frac{ccd}{a - b}$$

Divisant aa par $a - b$ qui sont des grandeurs connuës, & nommant g le quotient de cette division. Divisant de même ccd par $a - b$, & nommant bb le quotient de cette division, j'aurai cette expression $xx = gx + bb$, où le second & le dernier terme sont incomplexes. C'est par le moyen de ces réductions & corrections qu'on réduit les Equations de chaque degré à de certaines formules, dans lesquelles la grandeur inconnuë se trouve seule dans le premier terme ; comme celle qui est connuë se trouve toute seule dans le dernier. Dans les autres termes on appelle *coëficiens* ou grandeurs *coëficientes*, celles qui se trouvent mêlées avec les grandeurs qui composent ces termes, comme dans les termes B, C, D, de l'Equation précedente, les chifres 4. 19. 136, sont des grandeurs *coëficientes*. Il est bon de se souvenir que lorsqu'on éleve une grandeur complexe ou un Binome, à quelque degré qu'on l'éleve, tous les termes dont elle sera composée sont en proportion aprés qu'on en a ôté les nombres coëficiens ; car par exemple le produit de $a + b$ par $a + b$ est $aa + 2ab + bb$; ôtez ce nombre 2 qui est dans le second membre, & qui est coëficient, alors $\div$ $aa.\ ab.\ bb$.

Il y a des Equations dont tous les termes ne paroissent pas, comme en celle-ci, qui n'a point de second terme.

$$x^2 \ldots bb = 0$$

Cela arrive lorsque la même valeur se trouve avec des signes contraires qui se détruisent ; ainsi on la supprime en corrigeant les expressions. Par exemple dans celle-ci, dont les racines sont $x - a$ & $x + a$; c'est-à-dire, qui est faite de la multiplication de $x - a$ par $x + a$.

$$xx + ax - ax + aa = 0$$

Pour corriger l'expression je supprime $+ ax - ax$, qui ont des signes qui se détruisent, aprés quoi il n'y a plus de second terme.

$$xx \ldots + aa = 0.$$

III.

Des Racines d'une Equation,

On nomme racines d'une Equation les valeurs de l'inconnuë par la multiplication desquelles une Equation a été composée. Ainsi si on suppose $x = 2$ ou $x - 2 = 0$ & $x = 3$ ou $x - 3 = 0$, & qu'on multiplie $x - 2$ par $x - 3$, on aura cette Equation $xx - 2x - 3x + 6 = 0$, qui étant corrigée deviendra

$$xx - 5x + 6 = 0,\ \text{ou}\ xx = 5x - 6.$$

Les racines de cette Equation sont $x - 2$ & $x - 3$. Que si de rechef on suppose $x - 4 = 0$, & qu'on multiplie la précedente Equation $xx - 5x + 6 = 0$, par cette racine on aura cette Equation :

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$$

dont les trois racines ſont 2. 3. 4. qui ſont les differentes valeurs. Ce n'eſt pas que dans la réſolution d'un Problême, on puiſſe ſuppoſer qu'une même grandeur ait differentes valeurs ; mais c'eſt qu'on appelle racine d'une Equation les grandeurs par la multiplication deſquelles elle peut être formée ; & que celle par exemple qu'on vient de propoſer, ſe peut concevoir comme étant formée de ces trois racines $x - 2 = 0$. $x - 3 = 0$. $x - 4 = 0$.

Ces racines ſont nommées vraies ou fauſſes, ſelon qu'elles expriment des grandeurs réelles & poſitives, ou les grandeurs négatives, c'eſt-à-dire, moindres que zero.

Le degré où l'inconnuë eſt élevée fait connoître combien l'Equation a de racines ; & les ſignes + & — font appercevoir quand elles ſont vraies ou fauſſes.

Dans une Equation qui a pluſieurs racines, comme dans celle-ci,

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

dont les racines ſont 2. 3. 4. qui ſont vraies ou poſitives, la grandeur connuë 9 qui eſt au ſecond terme $9x^2$ eſt égale à la ſomme de toutes ces racines. $2 + 3 + 4 = 9$. La grandeur connuë du troiſiéme terme $26x$ eſt égale à la ſomme des produits de ces racines priſes deux à deux, c'eſt-à-dire, aux produits. 1°. de 2 & de 3, ce qui fait 6. 2°. de 2 & de 4, qui fait 8. 3°. de 3 & de 4, c'eſt-à-dire 12. Ces produits ſont 26. La grandeur du dernier terme qui eſt entierement connuë eſt égale à 6 produit de la premiere & de la ſeconde, multiplié par la troiſiéme 4, ce qui fait 24. Cela ſe reconnoît en compoſant cette Equation, c'eſt-à-dire, en multipliant ſes racines.

Il eſt évident qu'une Equation qui contient pluſieurs racines peut être diviſée par un binome compoſé de l'inconnuë moins la valeur de l'une des racines vraies, laquelle que ce ſoit, ou plus la valeur de l'une des fauſſes, au moyen de quoi on diminuë d'autant ſes dimenſions. Reciproquement, ſi la ſomme d'une Equation ne peut être diviſée par un binome compoſé de l'inconnuë + ou — quelqu'autre grandeur c'eſt une marque que cette autre grandeur n'eſt point la valeur d'aucune de ſes racines. Cette équation, par exemple, peut être diviſée par $x - 2$.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

& par $x - 3$ & par $x - 4$ & par $x + 5$, mais non point par x + ou — aucune autre grandeur; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 & 5.

Les racines d'une équation ſont, comme on vient de le dire, ou vraies ou fauſſes. Elles ſont encore ou réelles ou imaginaires. C'eſt ce qu'il faut expliquer, & rendre raiſon pourquoi il y a des racines imaginaires, & montrer qu'elles ſont d'uſage.

Nous avons vû & démontré que *moins en moins* donne *plus*; ainſi il ne ſe peut pas faire que la racine quarrée de $-aa$ ſoit une grandeur réelle; car le produit de $-a$ par $-a$ c'eſt $+aa$, comme on l'a vû Liv. I. n. 36 & 37. Ainſi $\sqrt{-aa}$ c'eſt une racine imaginaire, c'eſt à-dire qu'elle n'eſt point réelle, puiſque $-aa$ ne peut être le produit de $-a$. Car $-a$ par $-a$ fait $+aa$. Cependant il y a des occaſions où l'on rencontre de ces racines imaginaires dont on peut faire uſage comme on le fait des quatriémes, cinquiémes, ſixiémes puiſſances, quoiqu'il n'y ait point de puiſſance dans la nature au-deſſus de la troisiéme, qui eſt le cube.

IV.

On peut augmenter & diminuer, multiplier & diviſer les racines d'une Equation ſans les connoître.

Sans connoître la valeur des racines d'une équation, on les peut augmenter ou diminuer de quelque grandeur connuë. Il ne faut pour cela qu'au lieu du terme inconnu en ſuppoſer un autre qui ſoit plus ou moins grand de cette même grandeur connuë, & le ſubſtituer par tout en la place du premier. Comme ſi on veut augmenter de 3 la racine de cette Equation.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

Il faut prendre y au lieu de x, & penſer que cette grandeur y eſt plus grande que x de 3, en ſorte que $y - 3$ eſt égal à x, & au lieu de x^2 il faut mettre le quarré de $y - 3$ qui eſt $y^2 - 6y + 9$, & au lieu de x^3 il faut mettre ſon cube qui eſt $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$, & enfin au lieu de x^4 il faut mettre ſon quarré de quarré qui eſt $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. Ainſi décrivant l'Equation ci-deſſus, & ſubſtituant par tout y au lieu de x, on a l'Equation ſuivante, laquelle ſe trouve corrigée au-deſſous de la ligne comme vous voyez.

$$\begin{array}{rrrrr} y^4 - 12y^3 & + 54y^2 & - 108y & + 81 \\ - 4y^3 & + 36y^2 & - 108y & + 108 \\ & - 19y^2 & + 114y & - 171 \\ & & + 106y & - 218 \\ & & & - 120 \\ \hline \end{array}$$

$$y^4 - 16y^3 + 71y^2 + 4y - 420 = 0$$

La racine vraie qui étoit 5 eſt maintenant 8 à cauſe du nombre 3 qui lui eſt ajoûté,

Que

Que ſi au contraire on veut diminuer de 3 la racine de cette même Equation, il faut faire $y + 3 = x$ & $y^2 + 6y + 9 = x^2$ & ainſi des autres, de façon qu'au lieu de

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

on met

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 + 12y^3 & + 54y^2 & + 108y & + 81 \\
- 4y^3 & - 36y^2 & - 108y & - 108 \\
& - 19y^2 & - 114y & - 171 \\
& & + 106y & + 318 \\
& & & - 120 \\
\hline
\end{array}$$

$$y^4 + 8y^3 - 1y^2 - 8y \ * = 0$$

En augmentant les vraies racines d'une Equation, il eſt évident qu'on en diminue les fauſſes, & au contraire en diminuant les vraies, on augmente les fauſſes. Je copie Deſcartes, mais je paſſe ce que je ne crois pas ſi néceſſaire ici.

On peut de même ſans connoître la valeur des racines d'une Equation, les multiplier, ou diviſer toutes, par telle grandeur connuë qu'on veut, ce qui ſe fait en ſuppoſant que la grandeur inconnuë étant multipliée ou diviſée par celle qui doit multiplier ou diviſer les racines, eſt égale à quelqu'autre. Enſuite multipliant ou diviſant la grandeur connuë du ſecond terme par celle qui doit multiplier ou diviſer les racines, & par ſon quarré, celle du troiſiéme, & par ſon cube, celle du quatriéme, & ainſi juſqu'au dernier. Ce qui peut ſervir pour réduire à des nombres entiers & rationaux les fractions, & ſouvent auſſi les nombres ſourds, qui ſe trouvent dans les termes des Equations. Comme ſi on a cette équation,

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$$

& qu'on veüille en avoir une autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux ; il faut supposer $y = x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la grandeur connuë du second terme qui est aussi $\sqrt{3}$, & par son quarré qui est 3, celle du troisiéme terme, qui est $\frac{26}{27}$, & par son cube qui est $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui est $\frac{8}{27}\sqrt{3}$ ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$$

Après cela si on en veut avoir encore une autre en la place de celle-ci, dont les grandeurs connuës ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut supposer que $z = 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27, on trouve

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$$

où les racines étant 2, 3 & 4, on connoît de-là que celles de l'autre d'auparavant étoient $\frac{2}{3}$, 1 & $\frac{4}{3}$ & que celles de la premiere étoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

V.

Régle générale pour faire évanoüir le second terme d'une Equation.

Puisque + une grandeur — cette même grandeur = o. Donc pour faire évanoüir le second terme d'une Equation proposée ; il faut, si l'on peut, substituer quelques grandeurs qui fassent que le second terme de l'Equation proposée se trouve affecté du signe $+$ & du signe $-$, ce qui le détruira entierement, comme il est évident : Or pour cela il faut ajoûter ou ôter des racines, selon la diversité de leurs signes $+$ & $-$ la grandeur connuë qui se trouve au second terme après qu'on l'aura divisée par l'Exposant de la puissance du premier : & substituant cette valeur dans l'équation autant que faire se pourra, le second terme après les operations faites ne s'y trouvera plus. Des exemples éclairciront cette régle.

Exemple pour le second degré.

Soit cette Equation dont il faille ôter le second terme. $xx - px + q = o$. L'on prendra selon la Régle $x - \frac{1}{2}p = y$; donc $x = y + \frac{1}{2}p$, & $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$; cette équation est pour le premier terme ; celle du second sera $-px = -py - \frac{1}{2}pp$. Donc

$$xx - px + q = yy + py + \frac{1}{2}pp + q - py - \frac{1}{2}pp = o,$$

& ôtant les termes qui se détruisent, il viendra enfin $yy * -\frac{1}{4}pp + q = o$, où l'on voit que le second terme est évanoüi.

Si l'Equation proposée eût eu le signe $+$ au second terme, on auroit pris $x + \frac{1}{2}p = y$, & l'on auroit trouvé la même égalité résultante n'ayant de difference que dans les signes.

Exemple pour le troisiéme degré.

Soit cette Equation $x^3 - pxx + qx + r = 0$, dont on veut faire évanoüir le second terme; comme l'exposant du premier est 3, il faut selon la Régle prendre $x - \frac{1}{3}p = y$, donc $x = y + \frac{1}{3}p$; & $x^3 = y^3 + pyy + \frac{1}{3}ppy + \frac{1}{27}p^3$; de même $-pxx = -pyy - \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3$, & $qx = qy + \frac{1}{3}pq$. L'on aura donc $x^3 - pxx + qx + r = y^3$

$$+ pyy + \frac{1}{3}ppy + \frac{1}{27}p^3 + qy + \frac{1}{3}pq + r$$
$$- pyy - \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3 \qquad = 0.$$

Et effaçant les termes qui se détruisent, il viendra enfin cette équation, qui n'aura plus de second terme $y^3 * - \frac{1}{3}ppy - \frac{2}{27}p^3 + qy + \frac{1}{3}pq + r = 0$.

Si l'égalité avoit eu le signe + au 2e terme, l'on auroit supposé $x + \frac{1}{3}p = y$.

Il en est de même pour le quatriéme degré, n'y ayant de difficulté que la longueur du calcul.

Cette Régle est la même que celle que M. Descartes donne dans sa Géometrie, lorsqu'il dit que pour faire évanoüir le second terme d'une équation, il faut rétrancher des vraies racines la quantité connuë de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes ayant le signe + l'autre a le signe −;

ou bien les augmenter de la même grandeur, s'ils ont tous deux le signe $+$ ou tous deux le signe $-$, & c'est ce que nous avons fait; car pour les Equations du second degré, nous avons pris la moitié de p, c'est-à-dire, que nous avons divisé p par 2, qui marquoit les dimensions de l'inconnuë x^2. Le nombre 3 marque les dimensions du troisiéme degré. Aussi dans le second exemple nous avons pris le tiers de p, ce qui est diviser p par 3. Pour ôter le second terme de cette Equation de quatre degrez.

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$$

Ayant divisé 16 par 4 à cause des quatre dimensions du premier terme y^4, il vient derechef 4; c'est pourquoi je fais $z - 4 = y$, & j'écris

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 & -16z^3 & +96z^2 & -256z & +256 \\
 & +16z^3 & -192z^2 & +768z & -1024 \\
 & & +71z^2 & -568z & +1136 \\
 & & & -4z & +16 \\
 & & & & -420 \\
\hline
z^4 & * & -25z^2 & -60z & -36 = 0
\end{array}$$

Le second terme est évanoüi, ou il ne doit plus paroître, parce que $-16z^3 + 16z^3 = 0$.

Ainsi pour faire évanoüir le second terme d'une Equation du quatriéme degré, il faut augmenter cette Equation de $-$ le quart de la grandeur connuë du second terme (ou du nombre coëficient, comme nous avons vû que ce mot se prenoit) si ce second terme a le signe $+$; ou $+$ le même quart, si ce terme a le signe $-$.

CHAPITRE VIII.

De la résolution des Equations composées, ou moyen de résoudre les Problêmes du second, du troisiéme & du quatriéme degré.

LEs Problêmes prennent leur nom des degrez des Equations que l'on trouve en les examinant. On réduit, comme on l'a vû, à un certain degré les Equations. C'est de ce degré qu'un Problême prend son nom. Si l'Equation n'a qu'un degré, il se nomme *lineaire*, ou d'un degré. Si l'Equation est du second degré, le Problême s'appelle *plan* ou du second degré. Si l'Equation a trois degrez, le Problême est *solide*, ou de trois degrez. Enfin on dit qu'il est du quatriéme degré ou *plus que solide* si l'Equation a quatre degrez. Les Problêmes lineaires ou du premier degré, se résolvent comme nous avons vû. Quand l'inconnuë se trouve seule dans l'un des membres, & que l'autre n'a que des grandeurs connuës, la valeur de cette inconnuë ne peut plus être inconnuë. Tous les Problêmes du Chapitre sixiéme sont du premier degré. Parlons maintenant des autres Problêmes.

I.

Les termes d'une Equation de plusieurs degrez se resolvent en proportion.

Les Equations d'un même degré se réduisent à un certain nombre de formules, & toutes ces formules se peuvent réduire en proportion, qui fait connoître de quoi il s'agit pour résoudre un Problême. C'est ce qu'il faut considerer. On appelle Equation pure celle où l'inconnuë n'est point mêlée avec les inconnuës, comme celle-ci $xx - ab = 0$. Quand cela n'est pas ainsi, on dit qu'elle est affectée. Cette Equation pure $xx - ab = 0$ se change en cette proportion $\div$ $a.\ x.\ b.$ car $ab = xx$. Ainsi pour résoudre cette équation, il s'agit de trouver entre deux grandeurs données une moyenne proportionnelle, qui sera la racine de cette équation ou la valeur de la grandeur inconnuë x. Cette équation affectée $xx - ax - bc = 0$, se résout en cette proportion $x.\ b.\ ::\ c.\ x - a$; ce qui fait connoître que pour résoudre entierement l'équation, il faut trouver quatre grandeurs proportionnelles, dont les deux moyennes soient données, aussi bien que l'excés de la premiere sur la quatriéme. Or toutes les questions qu'on peut faire sur la maniere de trouver ces proportionnelles, se résolvent aisément, exprimant deux grandeurs inconnuës dont la difference est connuë, en la maniere qu'on l'a expliqué, § n. 23. Soit $\div$ $y.\ b.\ z$, & que la difference de y & de z soit 8. Il faut supposer que x est la moitié de $y + z$. Ainsi si y est plus petit que z, alors $x - 4 = y$ & $x + 4 = z$. Partant $\div$ $y.\ b.\ z$ & $\div$ $x - 4.\ b.\ x + 4$ sont une même chose. Le produit des extrémes est égal à celui des moyens, ainsi $xx + 4x - 4x - 16 = bb$; où vous voyez que les signes contraires se faisant évanoüir l'un l'autre, l'équation devient $xx - 16 = bb$, ou $xx = bb + 16$, qui est une équation pure, & partant facile à résoudre.

Toutes les équations de trois, de quatre, & de plusieurs autres degrez, soit qu'elles soient pures, soit qu'elles soient affectées, se résolvent en proportion; ce qui ne se pouvant expliquer en peu de paroles, je proposerai une voye plus courte pour résoudre les équations. De quelque degré que ſoit une équation quand elle eſt pure, elle ſe réſout aiſément. Pour réſoudre celle-ci $x^2 = ab$, il ne s'agit que de tirer la racine quarrée de ab. Mais ſi ab n'eſt pas un nombre quarré, on ne peut pas exprimer en nombre la valeur de x. Pour réſoudre cette équation $x^3 = aab$ qui eſt pure, il faut tirer la racine cube de aab; ainſi des autres degrez ou puiſſances. Il ne s'agit donc que de la réſolution des équations affectées.

II.

Des differentes formules des Equations du ſecond degré, & de leur proprieté

Les équations d'un même degré ſe réduiſent donc, comme nous l'avons dit, à un certain nombre de formules, qui ſont differentes, parce que leurs racines peuvent avoir differens ſignes. Pour entendre ceci il faut ſçavoir que lorſqu'une équation eſt corrigée & abregée, cela s'appelle *une formule*; c'eſt-à-dire, une expreſſion génerale ou abregée de toutes les équations du même degré, qui ont le même nombre de termes, & la même diverſité dans leurs ſignes. Or les équations du ſecond degré ont ces quatre formules.

$$z^2 = pz + q \qquad z^2 - pz - q = 0$$
$$z^2 = pz - q \quad \text{ou} \quad z^2 - pz + q = 0$$
$$z^2 = -pz + q \qquad z^2 + pz - q = 0$$
$$z^2 = -pz - q \qquad z^2 + pz + q = 0$$

La raiſon de ces quatre formules, c'eſt que ſi la grandeur inconnuë eſt négative, ſes racines ſeront ou $-p-q-$ ou $+p+q$, ce qui fait deux cas. Si elle eſt poſitive, cela fait encore deux autres cas; car ces racines feront pareillement ou $+p+q$ ou $+p-q$. Je ſuppoſe dans la ſuite du Chapitre que la grandeur connuë du second terme est p, & que celle du dernier terme qui est toûjours connu, soit q. Les deux Theorêmes suivans contiennent le fondement de ce que l'on dira touchant la résolution des Equations de deux degrez.

THEOREME PREMIER.

Si $z = p + x$ *ou* $z = p - x$. *Le quarré* zz *de la grandeur entiere* z *est égal au plan fait de la partie* p, *& de la toute* z, *moins ou plus le plan de* zx.

En multipliant $z = p + x$ par z, vient l'Equation $zz = pz + xz$, comme en multipliant $z = p - x$ par z vient $zz = pz - xz$; ce qui fait voir à l'œil la verité de ce Theorême, sans qu'il soit besoin d'autre démonstration.

COROLLAIRE.

pz *étant le second terme, le plan* xz *est la valeur du dernier terme; ainsi* $xz = q$.

Nous supposons que $z^2 = pz \underline{+} p$. Par consequent puisque selon ce Theorême $z^2 = pz \underline{+} xz$, il faut que $xz = q$.

THEOREME SECOND.

z *est égal á la moitié de* p. *plus ou moins la racine quarrée de* $\frac{1}{4}pp \underline{+} q$.

Soit m moitié de p, donc $2m = p$, & $4mm = pp$: Divisant les deux membres par 4, vient $mm = \frac{1}{4}pp$. Il faut donc prouver que $z = m \underline{+} \sqrt{mm \underline{+} q}$. Nous supposons $z = p \underline{+} x$ ou z

$= m + m + x$; donc $z - m$ eſt égal à la racine du quarré de $\overline{m \pm x}$ qui eſt $mm \pm 2mx \pm xx$. Ainſi $\sqrt{mm \pm 2mx \pm xx} = m \pm x$. Or puiſque $z = p + x$ ou $z = 2m \pm x$. Donc $2mx \pm xx = xz$. Mais par le Corollaire précédent $xz = q$. Donc $2mx \pm xx = q$. Partant $z = m \pm \sqrt{mm \pm q}$; ou $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \pm q}$, qui eſt ce qu'il falloit prouver.

III.

Réſolution des Equations du ſecond degré.

Premier Cas.

Lorſque l'Equation eſt incomplete.

On dit qu'une Equation eſt complete lorſque tous les termes paroiſſent ; ſi quelqu'un ou pluſieurs ſont évanoüis, qu'elle eſt incomplete. Une Equation du ſecond degré incomplete ſe réduit à ces deux formules $xx \; * + q = 0$ & $xx \; * - q = 0$. En ôtant de la premiere formule, de part & d'autre q, vient $xx = -q$, cette formule montre que x eſt une grandeur négative. Prenant la racine quarrée de l'un & l'autre membre on aura $x = \pm \sqrt{-q}$. La raiſon pour laquelle on met + & — devant le ſigne radical, en cette formule, c'eſt que le quarré $-q$ ſe peut faire également de cette racine $+ \sqrt{-q}$ multipliée par elle-même, ou de cette racine $- \sqrt{-q}$, multipliée auſſi par elle-même.

Dans l'autre formule $xx \; * - q = 0$, la grandeur inconnuë x eſt poſitive. J'ajoûte de part

& d'autre q, ce qui donne cette Equation $xx = q$; d'où ayant tiré les racines quarrées, la question sera resoluë $x = \sqrt{q}$. Si q n'est pas un nombre quarré ; on ne pourra pas exprimer en nombre la juste valeur de x.

Second Cas.

Lorsque l'Equation est complete.

On pourroit résoudre cette Equation comme dans le premier Cas ; parce qu'il est toûjours aisé de la rendre incomplete, en faisant évanoüir son second terme, comme on l'a enseigné ci-dessus.

Nous avons déja dit que les Equations du second genre qui ont tous leurs termes se réduisent à ces quatre formules.

$$z^2 - pz - q = 0 \qquad z^2 = pz + q$$
$$z^2 - pz + q = 0 \qquad z^2 = pz - q$$
$$z^2 + pz - q = 0 \qquad z^2 = -pz + q$$
$$z^2 + pz - q = 0 \qquad z^2 = -pz - q$$

Ces quatre formules se peuvent résoudre par le Theorême 2. ci-dessus. Voyons comme on le peut faire sans le secours de ce Theorême. Je transforme les quatre formules en celles-ci.

$$z^2 - pz = +q$$
$$z^2 - pz = -q$$
$$z^2 + pz = +q$$
$$z^2 + pz = -q$$

J'ajoûte de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$, c'est-à-dire, le quart du quarré de la grandeur connuë du second terme ; & j'ai ces Equations.

$$z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$$

$$z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q$$

$$z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$$

$$z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q$$

Après cela le dernier membre eſt une puiſſance parfaite dont il eſt facile de tirer la racine quarrée. Celle de $z^2 + pz + \frac{1}{4}pp$ eſt $z + \frac{1}{2}p$. Ainſi Ainſi en faiſant l'extraction des autres formules on les réduit à celles-ci.

$$z - \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$

$$z - \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$$

$$z + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$

$$z + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}.$$

Remarquez ces deux ſignes $\pm$ qu'on met devant le ſigne radical, pour faire connoître que z a deux valeurs, ſelon qu'on prend cette grandeur poſitivement ou négativement.

Enfin ayant tranſporté $\frac{1}{2}p$ de l'autre côté afin que l'inconnuë ſe trouve ſeule, on a ces dernieres formules qui ſont la réſolution des précédentes,

$$z = + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$

$$z = + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$$

$$z = - \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$

$$z = - \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}.$$

C'eſt ce que nous avons démontré dans le ſecond Theorême ci deſſus.

PROBLEMES DU SECOND DEGRÉ.

PREMIER PROBLEME.

Le premier terme a *d'une progreſſion Arithmetique étant donné, avec* b *la diff rence qui regne dans la progreſſion, & d ſomme de tous ſes termes, trouver ſon dernier terme, & le nombre de tous les termes.*

Soit x le nombre de tous les termes. Selon ce qui a été démontré Livre III. n. 28. le dernier terme d'une progreſſion contient le premier terme a, plus autant de fois la difference b qu'il y a de termes moins une fois cette difference. Ainſi le dernier terme ſera $xb - b + a$, ce dernier terme avec le premier a, c'eſt-à-dire, $xb - b + 2a$ multiplié par x nombre des termes, eſt égal au double de d ſomme de la progreſſion. Ainſi $xxb - bx + 2ax = 2d$. Pour corriger cette Equation, je prens $c = -b + 2a$. Ainſi j'ai $xxb + cx = 2d$. Je diviſe le tout par b, & vient $xx + \frac{cx}{b} = \frac{2d}{b}$. Comme b eſt connu, ſi c'eſt par exemple 3, je prends p, tiers de c, & alors $px = \frac{cx}{b}$ & comme $\frac{2d}{b}$ eſt tout connu, je le fais égal à q, ainſi j'ai cette Equation $xx + px = q$, ou $xx + px - q = 0$, qui eſt une Equation du ſecond degré qui vient d'être réſoluë.

Second Probleme.

Deux Marchands ont mis en ſocieté douze piſtoles, & ils en ont gagné 34. Le premier a eu ſept piſtoles, tant pour miſe que pour gain pour deux mois ; & le ſecond en a pris 39, tant pour ſa miſe que pour ſon gain pour cinq mois. On demande la miſe & le gain d'un chacun en particulier.

J'appelle a la miſe de ces deux Marchands, qui eſt 12 piſtoles. Donc ſi la miſe du premier eſt x, celle du ſecond eſt $a - x$.

Je nomme b la miſe & gain du premier, qui eſt 7 piſtoles ; ainſi $b - x$ eſt le gain du premier.

Je nomme c la miſe & gain du ſecond, qui eſt 39 piſtoles ; ainſi puiſque ſa miſe eſt $a - x$; donc $c - a + x$ ſera ſon gain.

Comme x miſe du premier, multipliée par ſon temps, qui eſt 2, ce qui fait $2x$, eſt à ſon gain, qui eſt $b - x$; ainſi $a - x$ miſe du ſecond multipliée par ſon temps qui eſt 5, ce qui fait $5a - 5x$, eſt à ſon gain, qui eſt, comme nous venons de le dire, $c - a + x$, c'eſt-à-dire, que $2x . b - x :: 5a - 5x . c - a + x$. Le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax - 5bx + 5xx$. J'ajoûte de part & d'autre $2ax$, & je retranche en même-temps $2xx$, & j'ai $2xc = 5ab - 3ax$

$- 5bx + 3xx$. J'ajoûte de part & d'autre $3ax$ & $5bx$, ce qui me donne $2xc + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$.

Je prens $d = 2c + 3a + 5b$; ainsi $dx = 5ab + 3xx$. Je suppose encore $f = 5ab$; & qu'ainsi $dx = f + 3xx$. Je rétranche f de part & d'autre, ce qui me donne $dx - f = 3xx$. Enfin au lieu de d je prens $3p$, que je lui suppose égal, comme aussi $3q$ égal à f; ainsi $px - q = xx$. Ce qui est une Equation du second degré qui a été résoluë.

I V.

Résolution des Equations du troisiéme degré.

Lorsque les Equations du troisiéme degré n'ont ni second ni troisiéme terme, c'est-à-dire, qu'elles ne sont point affectées, elle n'ont aucune difficulté. Par exemple cette Equation étant pure $z^3 = q$ il est évident que $z = \sqrt[3]{q}$; & qu'ainsi pour trouver la valeur de z il n'est question que de tirer la racine cube de q. Quand une Equation du troisiéme degré a tous ses termes; il faut faire évanoüir le second, comme on l'a enseigné ci-dessus. Or les Equations de ce degré qui n'ont point de seconds termes se reduisent à ces quatre formules.

$$z^3 + pz + q = 0$$
$$z^3 - pz + q = 0$$
$$z^3 + pz - q = 0$$
$$z^3 - pz - q = 0$$

On résoud ces quatre Cas par cette méthode que Monsieur Varignon proposa dans les Mémoires de l'Academie des Sciences. Le 5 Août 1699. à la page 191. Edition de Hollande.

Soit $z^3 + pz + q = 0$, Equation à résoudre qui est du troisiéme degré, & qui n'a point du second terme. Prenez $z = x - y$, (il faudroit prendre $z = x + y$ si l'Equation avoit $- pz$) & vous aurez le cube de z égal à celui de $x - y$. Ainsi $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Or $- 3xxy + 3xyy = - 3xy\,xx - y$. Car écrivant au long le produit de $- 3xy$ par $x - y$, il vient $- 3xxy + 3xyy$. Mais puisque $x - y = z$, on a $- 3xy\,xx - y = - 3xy \times z = - 3xyz$. Maintenant dans l'Equation précédente $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$, à la place de $- 3xxy + 3xyy$ mettez la valeur $- 3xyz$, & l'Equation sera réduite a celle-ci $z^3 = x^3 - 3xyz - y^3$. & en transposant tout d'un côté $z^3 +$

$$3xyz \begin{matrix} + y^3 \\ \\ - x^3 \end{matrix} = 0.$$

Si vous comparez terme à terme cette derniere Equation avec la proposée $z^3 + pz + q = 0$, la comparaison du second terme vous donnera $3xyz = pz$, & divisant par z vous aurez $3xy = p$, & divisant encore par $3x$, vous aurez $y = \frac{p}{3x}$; & par consequent $y^3 = \frac{p^3}{27x^3}$

Or la comparaison du troisiéme terme vous donnera $y^3 - x^3 = q$, ou mettant au lieu de y^3 sa valeur $\frac{p^3}{27x^3}$ il viendra $\frac{p^3}{27x^3} - x^3 = q$, & multipliant par x^3, $\frac{1}{27}p^3 - x^6 = qx^3$, & transposant tout d'un côté vous aurez $x^6 + qx^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$. Or $x^6 = x^3 \times x^3$ &

$qx^3 = q \times x^3$. Ainsi on peut regarder x^6 comme un quarré dont x^3 est la racine, & qx^3, comme un plan dont, q & x^3 sont les racines ; ainsi $x^3 + qx - \frac{1}{27}p^3$, comme une Equation du second degré ; par consequent $x^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq \pm \frac{1}{27}p^3}$, selon ce qu'on a démontré en parlant de la résolution du second degré. Ainsi ce que nous avons dit éclaircit la résolution du troisiéme, & nous découvre le fondement des regles ; car par la même voie on trouve la valeur de y ; sçavoir que $y^6 + qy^3$ est égal à $\frac{1}{27}p$. Partant comme $q = y^3 - x^3$, ou $q + x^3 = y^3$. On pourroit aussi se servir de $y = \frac{p}{3x}$, mais c'est pour arriver d'abord aux formules ordinaires que l'on commence par ici. L'on aura de même $y^3 = q + x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq \pm \frac{1}{27}p^3}$.

Donc $z\,(x - y) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$
$- \sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{qq\ \frac{1}{27}p^3}}$, ce qu'il falloit trouver.

On peut voir dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de l'année 1699, page 190. l'Ecrit entier que Monsieur Varignon y a fait inserer, pour trouver ce que donneront encore les trois autres Cas de ce troisiéme degré sans second terme. La forme du volume de mon Ouvrage ne me permet pas de rapporter cet Ecrit.

V.

Résolution des Equations du quatriéme degré.

On ſuppoſe qu'on a fait évanoüir le ſecond & le quatriéme terme d'une Equation du quatriéme degré qu'on veut réſoudre. Mais ſi on la propoſoit toute complette, il faut alors la rendre incomplette, en faiſant évanoüir ces deux termes. Or une Equation incomplette de quatre degrez ſe réſout comme celle de deux degrez. La quatriéme puiſſance ſe peut conſiderer comme la ſeconde, avec cette difference que ſa racine eſt un quarré. La racine de x^4 eſt x^2. Voilà quatre formules auſquelles on réduit ces Equations: pour les réſoudre on pratique ce qui a été enſeigné pour le ſecond degré, comme vous le voyez; mais comme je l'ai dit, la racine eſt un quarré, qui eſt égal à des grandeurs toutes connuës. Ainſi l'Equation ſe trouve entierement réſoluë.

1. $x^4 = aabb$. $\quad xx = ab$ ou $x = \sqrt{ab}$

2. $x^4 = aaxx + aabb$. $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$

3. $x^4 = -aaxx - aabb$. $xx = -\frac{1}{2}2a + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}$

4. $x^4 = aaxx - aabb$. $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}$

Pour avoir la valeur de xx il faut prendre la racine quarrée de chaque membre; car comme on l'a dit, les racines que donne la réſolution précédente ſont des quarrez. Or en tirant la racine, quarrée des deux membres on a ces trois formules.

$$2.\ x = \sqrt{\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + aabb}}$$

$$3.\ x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - aabb}}$$

$$4.\ x = \sqrt{\tfrac{1}{2}aa \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - aabb}}.$$

Si l'on veut que tout le membre connu, à sçavoir $\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 \pm aabb}$ soit nommé ab tout se réduira à cette seule formule $xx = ab$ dont la résolution est $x = \sqrt{ab}$. Pour s'assurer que ces résolutions sont bonnes, il n'y a qu'à élever à la quatriéme puissance ces racines ; comme pour s'assurer d'une racine quarrée on la quarre. Si alors elles sont égales aux grandeurs dont on prétend qu'elles sont les racines, elles le sont véritablement.

La seconde Equation étoit $x^6 = aaxx + aabb$, dont la derniere solution est $= \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}}$; en quarrant chaque membre l'on a, $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$.

En transposant $\frac{1}{2}aa$, l'on a $xx - \frac{1}{2}aa = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$; & quarrant chaque membre on a $x^4 - aaxx + \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{4}a^4 + aabb$, qui ſe réduit à $x^4 - aaxx = aabb$ ou $x^4 = aaxx + aabb$, qui eſt l'Equation propoſée. Ainſi des autres formules.

LIVRE VIII.

SUPLEMENT DES ELEMENS DES MATHEMATIQUES

TRAITÉ

De la progression des nombres naturels & des nombres impairs. Les fondemens de l'Arithmetique des Infinis.

CHAPITRE PREMIER.

Proprietez de la Progression des nombres naturels.

ON appelle nombres naturels ceux dont la difference est l'unité, comme,

÷ 0. 1. 2. 3. 4 5. 6. 7. 8. 9. 10, &c.

Ces nombres font une progression qui peut être continuée jusqu'à l'infini. Je nomme *a* le premier terme de cette progression, soit qu'on la commence par zero, soit par 1, Le dernier terme, de quelques termes qu'on compose la progression, sera nommée x, & z le nombre des termes, quelque soit ce nombre.

Lemme Premier.

2. *x le dernier terme plus l'unité est égal au premier terme a plus z le nombre des termes.*

C'est-à dire, que $x + 1 = a + z$, & par consequent que $x = a + z - 1$.

Le dernier terme x contient le premier terme a, & autant de fois la difference qui regne dans la progression qu'il y a de termes devant lui. Livre III. n. 20. Or z est le nombre de tous les termes de la progression, partant égal moins 1 au nombre des termes qui précédent le dérnier. Ce nombre est ainsi $z - 1$. Donc $x = a + z - 1$, ajoûtant l'unité de part & d'autre, vient $x + 1 = a + z$; ce qu'il falloit prouver.

Premier Theoreme.

3. *Si le premier terme est zero, x le dernier terme plus l'unité est égal à z le nombre des termes.*

C'est-à-dire, que $x + 1 = z$ ou $x = z - 1$; car par le Lemme précédent $x = a + z - 1$. Or ici a est zero, qui ne fait rien, on peut donc le supprimer ; & partant $x = z - 1$, ajoûtant de part & d'autre l'unité, on aura $x + 1 = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

Second Theoreme.

4. *Si le premier terme a est l'unité, le dernier terme x est précisement égal à z nombre des termes.*

Selon le Lemme $x = a + z - 1$, ici $a = 1$.

donc $x = 1 + z - 1$. Or $+1 - 1 = 0$, donc $x = z$; ce qu'il falloit prouver. Ainsi dans une progression de cinquante termes, si le premier est 1, le cinquantiéme est 50.

Troisie'me Theoreme.

Le terme (que je nomme y) *qui suivroit aprés* x *le dernier terme, est égal au premier* a *plus à* z *nombre des termes.* 5

Il faut prouver que $y = a + z$. Ce terme y est plus grand d'une unité que le dernier x Ainsi $x + 1 = y$ ou $x = y - 1$. Mais par le Lemme précédent $x = a + z - 1$; donc $y - 1 = a + z - 1$ ou $y = +1 + a + z - 1$, & parce que $+1 - 1$ ce n'est rien, $y = a + z$; ce qu'il falloit prouver.

Corollaire Premier.

Donc si dans $y = a + z$, *le premier terme* a *est zero, le terme* y *est précisément égal à* z. 6

Corollaire 2.

Donc si dans $y = a + z$, *le premier terme* a *est* 1; *le terme* y *moins* 1 *est égal à* z *ou* $z + 1 = y$. 7

Quatrie'me Theoreme.

Le premier terme a *étant zero, le quarré de* x *dernier terme, plus ce même terme* x *est égal au double de toute la progression.* 8

C'est-à-dire, que $xx + x$ est égal au double de la somme de toute la progression. La somme du premier terme qui est ici zero, & de x dernier terme ne fait que x; & en ce cas $x = z - 1$ ou $x + 1 = z$. § n. 3. Or multipliant la somme du premier & du dernier terme; c'est-à-dire, ici

x par z nombre des termes, ou par $x + 1$ égal à z, le produit $xx + 1x$ sera le double de la progression, selon ce qui a été démontré Liv. III. n. 1. Partant xx quarré du dernier terme plus une fois x est le double de la progression; ce qu'il falloit démontrer.

Cinquième Theoreme.

9\. *Le premier terme étant zero, le quarré de* y *qui suivroit le dernier terme* x, *moins une fois* y, *est égal au double de la progression des termes précédens.*

On vient de prouver que $xx + x$ est le double de la somme de la progression dont x est le dernier terme. Or le terme y qui suit ce dernier x étant plus grand de l'unité; & par consequent $x = y - 1$. Il faut que $xx = yy - 2y + 1$. Ajoûtons la premiere Equation $x = y - 1$, viendra $xx + x = yy - 2y + 1 + y - 1$. Or $- 2y + 1 + y - y = - y$, donc $xx + x = yy - y$; Mais $xx + x$ est le double de la progression dont x est le dernier terme; donc $yy - y$ est le double de la même progression.

Lemme Second.

10\. *Dans la progression naturelle soit ajoûté à un nombre quarré le double de sa racine, plus l'unité, cela fera une somme égale au nombre quarré qui suit de plus prés ce quarré.*

Soit aa un nombre quarré dont a est la racine. Celle du nombre quarré qui suit de plus près est $a + 1$ dont le quarré est $aa + 2a + 1$; ce qui montre que pour avoir un quarré qui suive de plus près un nombre quarré donné, il faut prendre $2a$ double de la racine plus l'unité. Ainsi pour avoir le quarré qui suive celui-ci 9, je lui ajoûte

ajoûte 6 double de sa racine, & l'unité, ce qui fait 16.

$$9 + 3 + 3 + 1 = 16.$$

Sixie'me Theoreme.

Le quarré d'un terme de la progression naturelle est égal au double des termes qui le precedent, plus le quarré du premier, plus encore la difference qui regne dans la progression multipliée par le nombre des termes qui precédent le terme donné. 11

Soit cette progession $\div a.\ b.\ c.\ d.$ par le Lemme précedent.

$$\begin{aligned} dd &= cc + 2c + 1 \\ cc &= bb + 2b + 1 \\ bb &= aa + 2a + 1 \end{aligned}$$

Je substitue ou j'écris $bb + 2b + 1$ en la place de cc; comme $aa + 2a + 1$ en la place de bb, ce qui me donne

$$dd = \left\{ \begin{array}{l} \quad\;\; + 2c + 1 \\ \quad\;\; + 2b + 1 \\ aa + 2a + 1 \end{array} \right.$$

Par consequent le quarré de dd est égal, 1°. à aa quarré du premier terme a. 2°. à $2c + 2b + 2a$, c'est-à-dire, au double de tous les termes qui le précedent. 3°. à la difference 1 multipliée par le nombre des termes qui précedent; c'est-à-dire, ici à 1 multiplié par 3, ce qui fait 3.

Lemme troisie'me.

Si on ajoûte à un nombre cubique le triple du quarré de sa racine, plus le triple de la même racine, plus l'unité, cela fera une somme égale au nombre cubique, qui suit de plus près le cube proposé. 12

Soit aaa un nombre cube, dont la racine est a, par consequent $a+1$ sera celle du nombre cube qui suit de plus près le nombre cube aaa.

Le cube de $a+1$ est $aaa+3aa+3a+1$. Ce qui fait voir que le cube que l'on cherche est plus grand que le nombre cube aaa. 1°. du triple du quarré de sa racine a. 2°. du triple de la même racine. 3°. de l'unité. Ainsi 64 nombre cubique qui suit de plus près le nombre cubique 27, est plus grand 1°. de 27 qui est triple de 9, quarré de sa racine cubique qui est 3. 2°. de 9, triple de 3. 3°. de l'unité; car $27+27+9+1=64$.

Septie'me Theoreme.

13 *Le cube d'un terme de la progression naturelle est égal 1°. au cube du premier terme. Plus 2°. au triple des quarrez des termes qui le précedent. Plus 3°. au triple de la somme des termes qui le precedent. Plus 4°. à l'unité multipliée par le nombre des termes qui precedent ledit terme,*

Soit cette progression $\div\ a.\ b.\ c.\ d.$ par le Lemme précedent.

$$d^3 = c^3 + 3cc + 3c + 1$$
$$c^3 = b^3 + 3bb + 3b + 1$$
$$b^3 = a^3 + 3aa + 3a + 1$$

Substituant en la place de c^3 la grandeur égale $b^3+3bb+3b+1$, & en celle-ci au lieu de b^3 substituant la grandeur égale $a^3+3aa+3a+1$: on aura

$$d^3 = \left\{\begin{array}{r} 3cc + 3c + 1 \\ 3bb + 3b + 1 \\ a^3 + 3aa + 3a + 1 \end{array}\right.$$

Partant le cube de d est égal, 1°. au cube a^3 du premier terme a. 2°, à $cc+3bb+3aa$, c'est à-dire, au triple des quarrez des termes précedens 3°. à $3c + 3b + 3a$: c'est-à-dire, au triple de la somme de tous les termes de la progression qui le précedent. 4°. & outre cela au produit de l'unité multipliée par le nombre des termes qui le précedent, c'est-à-dire, que pour faire une somme égale au cube d^3, il faut encore ajoûter à tout cela le nombre des termes qui précedent sa racine dans la progression ; or ce nombre est 3, puisque d est le quatriéme terme, & que 3 fois fois 1 donne toûjours 3.

COROLLAIRE.

Le cube d'un terme de la progression naturelle, moins le cube du premier terme, moins le triple de la somme des termes qui le précedent, est égal au triple des quarrez des termes qui le précedent. 14

Soit a le premier terme, s la somme des termes, t le nombre des termes, & q la somme des quarrez. Par le Theorême $d^3 = a^3 + 3q + 3s + t$. Otant de part & d'autre $+ a^3 + 3s + t$, vient $d^3 - a^3 - 3s - t = 3q$; ce qu'il falloit prouver.

Ce Corollaire nous en fait appercevoir trois autres d'une seule vûë.

1°. $d^3 - a^3 - 3q - 3s = t$.

2°. $d^3 - a^3 - 3q - t = 3s$.

3°. $d^3 - 3q - 3s - t = a^3$.

Ces Corollaires sont si évidens & coulent si naturellement du Theorême proposé, qu'il n'étoit presque pas besoin d'aucune autre démonstration pour les prouver.

HUITIE'ME THEOREME.

On voit bien encore que du sixiéme Theorême n. 11. *on auroit pû tirer de la même maniere trois Corollaires à peu près semblables.*

Chapitre II.

Proprietez de la Progression des nombres impairs.

15 LES nombres impairs sont faits de l'addition des nombres naturels : par exemple ce nombre 3 qui est le second des impairs est fait de l'addition du premier & du second des naturels. 5 qui est le troisiéme des impairs est fait de l'addition du second & du troisiéme des naturels : ainsi de suite.

Neuvie'me Theoreme.

16 *Si l'on dispose successivement & par ordre tous les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. & les autres qui suivent, le premier de ces nombres qui est 1, sera le premier nombre quarré ; ce quarré plus 3 qui le suit, donne 4 le second quarré ; 4 plus 5 qui suit 3, donne 9 le troisiéme quarré ; & ainsi de suite.*

La raison de cela est claire ; car s *n.* 10. ajoûtant au quarré 1 deux fois sa racine plus l'unité, c'est-à-dire, 3, l'on a le quarré qui le suit, qui est celui de 2 ; ajoûtant au quarré 4 deux fois sa racine & l'unité, c'est-àdire 5, on a le quarré de 3 qui est 9 ; ainsi de suite.

Dixie'me Theoreme.

17 *Dans la progression des nombres impairs, le quarré du nombre des termes est égal à la somme de la progression.*

Le nombre 2 est la difference qui régne dans la progression des impairs. Soit nommez z le nombre des termes. Le dernier terme que je nomme x est égal au premier terme, plus la difference 2 multipliée par z moins une fois cette difference 2. Liv. III. n. 20. Partant $x = 1 + 2z - 2$. La somme du premier terme 1 & du dernier x, ou $1 + 2z - 2$ grandeur égale, est donc $1 + 1 + 2z - 2$ ou $2z$, puisque $+1 + 1 - 2 = 0$. Or cette somme $2z$ étant multipliée par z, le nombre des termes, ce qui fait $2zz$, est le double de la progression : donc la moitié de $2zz$ qui est $1zz$ ou zz est égale à la somme de toute la progression. Liv. III. n. 30. ce qu'il falloit prouver.

Ainsi dans une progression de nombres impairs qui a dix termes, le quarré du nombre des termes, c'est-à-dire, le quarré de 10 *est égal à la somme de tous les dix termes de la progression.*

On découvre d'admirables proprietez dans les nombres ; elles sont infinies, Considerez celles-ci, que j'expose seulement. Jettez les yeux sur la Table suivante de six colomnes. La premiere est des progression des nombres naturels. 17

La seconde colomne contient les quarrez de ces nombres qui sont faits de l'addition des nombres impairs qui précedent chaque quarré. Ainsi le deuxiéme quarré 4 *est fait des deux premiers impairs* 1 *&* 3. *Le troisiéme quarré* 9 *est fait du premier, du second, & du troisiéme des impairs,* 1. 3. 5. *Le quatriéme quarré* 16 *est fait de* 1. 3. 5. 7. *les quatre impairs : Et c'est ce qui vient d'être démontré* sur n. 16.

La troisiéme colomne comprend les differences des quarrez des nombres naturels, & ces differences sont la progression des nombres impairs.

Dans la quatriéme colomne, sont les cubes des nombres naturels, qui sont faits de l'addition des differences des quarrez en cette sorte. Le premier cube étant 1. *pour faire le second, il faut ajoûter* *les deux premieres differences 3 & 5. ce qui donne 8 second cube ; pour avoir le troisiéme, il faut ajoûter les 3 differences suivantes, sçavoir, 7, 9, & 11, ce qui donne 27 troisiéme cube, & ainsi de suite. La raison de cela est fondée sur le Lemme* 3me § n. 12.

Dans la cinquiéme, sont les differences des cubes.

Et dans la derniere, les differences de ces differences, qui sont une progression Arithmetique, dont la difference est 6.

Nombres.	Quarrez des nombres.	Differences des quarrez.	Cubes des nombres.	Differences des cubes.	Differences des differences des cubes.
1	1	3	1	7	12
2	4	5	8	19	18
3	9	7	27	37	24
4	16	9	64	61	30
5	25	11	125	91	36
6	36	13	216	127	42
7	49	15	343	169	48
8	64	17	512	217	54
9	81	19	729	271	60
10	100	21	1000	331	66

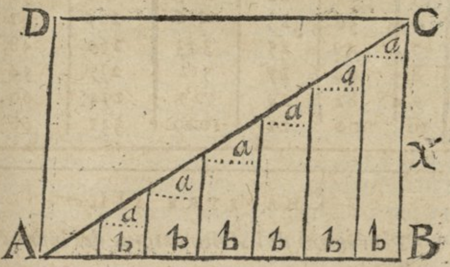
CHAPITRE III.

Fondement de l'Arithmetique des infinis.

12 DAns la progression naturelle l'unité est la difference entre deux termes qui se suivent immédiatement. La difference entre 4 & 5 c'est

1. Or si on interposoit entre ces deux nombres 4 & 5, & mille autres termes qui fussent aussi en progression Arithmetique, & qu'on fit la même chose entre chacun des autres termes de la progression, alors la difference qui regneroit dans la progression seroit encore 1, mais un milliéme, & si on interposoit de même entre les termes de cette nouvelle progression mille autres termes, alors cela feroit une nouvelle progression dont la difference seroit encore 1. mais un milliéme de milliéme ; continuant de même jusqu'à l'infini, enfin on viendra à une difference si petite qu'on la pourroit concevoir sans erreur comme nulle ; c'est-à-dire, égale à zero. Cela feroit toûjours une progression naturelle, dont 1 seroit la difference, mais infiniment petite.

Quelque grandeur qu'on propose, on y peut 20
concevoir une infinité de parties. Soit par exemple la ligne *A B*, dans laquelle je conçois une infinité de parties telles que *b*, ou une infinité de lignes élevées sur ces parties *b*. Je suppose toutes ces lignes en progression Arithmetique,



croissant également depuis *A* jusqu'à *B*. La ligne BC est la plus grande & le dernier terme de la progression que je nomme x; je menne une ligne droite du point A au point C; & par les sommes de ces lignes b de petites lignes qui font les petits triangles a. Il est évident que si on conçoit un grand nombre de lignes telles que b qui couvrent la surface du triangle ABC, on pourra dire que la somme des lignes b sera égale à la surface du triangle ABC, après en avoir ôté la somme des petits triangles a. Or si le nombre des lignes b est infini ou innombrable. & qu'ainsi leur difference soit nulle, ou égale à zero; en ce cas comme tous ces petits triangles a ne sont que des zeros, lon pourra dire que la somme des lignes b sera précisement égale à la surface du triangle ABC.

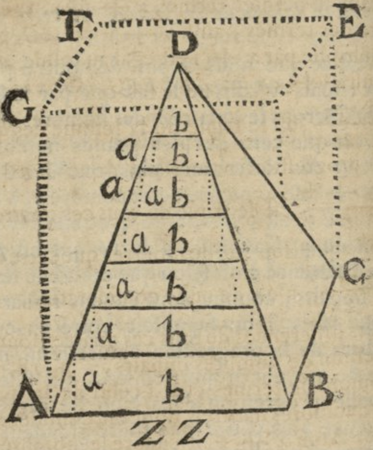
La ligne AB sur laquelle sont élevées les lignes b peut être considerée comme le nombre des termes de la progression que font ces lignes, & BC ou x, comme nous l'avons dit, en est le dernier terme, le premier c'est zero. AB qui répresente le nombre des termes soit nommée z, la somme du dernier terme x, & du premier qui est zero; c'est-à-dire x étant multiplié par z, le nombre des termes, le produit de cette multiplication qui est zx, sera le double de toute la progression des lignes b, selon ce qui a été démontré Liv. III. n. 32. & cela se voit à l'œil; car $z = AB$ & $x = BC$. Ainsi $zx = AB \times BC$. Or il est évident que la figure $ABCD$ est le double du triangle ABC. Ainsi on peut compter la valeur de ce nombre infini de lignes b, marquant précisement la somme qn'elles font. C'est ce qui fait qu'on appelle cette méthode *l'Arithemique des infinis.* Ceux qui la traitent expriment ainsi ce que nous venons de démontrer, & en font cette proposition.

Une suite de lignes en progression Arithmetique étant donnée, si on multiplie BC, *la plus grande de toutes ces lignes par* AB, *somme de tous les termes, c'est-à dire,* x *par* z, *le produit* BC × AB *ou* xz *sera le double de la somme de cette progression.*

C'est ce que nous avons démontré positivement : mais Wallis ne le fait que par induction.

Considerons les quarrez des nombres naturels. On voit que ceux des plus grands nombres ont entr'eux des differences plus considerables. La difference de 4, quarré de ce nombre 2, d'avec 9, quarré de 3, est 5 plus petite que celle des quarrez de 3 & de 4, sçavoir de 9 de 16 qui est 7. Ainsi cette difference croît selon que croissent les nombres impairs, comme nous l'avons remarqué, § n. 18. Mais si on supposoit entre chacun des nombres de la progression naturelle un nombre infini de moyens proportionnels., qui fissent une nouvelle progression dans laquelle regnât une difference plus petite que toute grandeur qu'on puisse penser, alors on pourroit concevoir qu'il n'y auroit aucune difference sensible entre les quarrez de ces nombres qui seroient les termes de cette nouvelle progression.

Pour rendre la chose sensible, concevons les nombres quarrez, des nombres de la progression naturelle à commencer par zero. Je suppose que tous ces quarrez que je nomme *b*, sont mis les uns sur les autres. Le dernier ou le dessus est *D* zero ; le plus grand qui est dessous est *ABCA*. ils décroissent en montant ; mais je suppose qu'ils ont la même épaisseur, ou qu'ils sont en égale distance les uns des autres, ils font une pyramide ; & s'ils ont de l'épaisseur, ils font un solide égal à la solidité de la pyramide *ABCD*, si on en ôte les petits triangles *a* que laissent les échelles que font tous ces quarrez étant mis les uns sur les autres, & décroissant comme ils font.



Mais si au lieu d'un certain nombre fini de quarrez entre *A*, *B* & *D*, il y en avoit une infinité, leur difference *a* ne seroit nullement sensible ; c'est-à-dire, qu'ils ne laisseroient point de triangles ou d'échellons sensibles sur la pyramide qu'ils feroient ; par consequent leur solidité seroit sensiblement la même que celle de la pyramide *ABCD*. La question est de trouver quelle est la raison de la somme de tous ces quarrez *b* avec le produit du quarré *ABCA*, qu'on peut regarder comme le plus grand terme de la progression, multiplié par la hauteur de tous ces quarrez, ou par le nombre des termes de cette progression ; ce qui feroit le solide *ABCEFG*. Le premier terme de la progreſſion eſt zero ; je ſuppoſe un nombre infini de termes, dont le plus grand eſt x, & par conſequent xx eſt le plus grand quarré de tous les quarrez des termes de la progreſſion, x étant le dernier terme, $x + 1$ ſ n. 3. eſt le nombre des termes, ainſi $x + 1 = AG$, partant xx multiplié par $x + 1$ eſt égal au ſolide $ABCEFG$, ainſi $x^3 + xx = ABCEFG$. Or $x^3 + xx + \frac{xx + x}{2}$ eſt le triple de la ſomme des quarrez de la progreſſion naturelle ; donc $ABCEFG$ plus $\frac{xx + x}{2}$ eſt le triple de tous ces quarrez, il n'eſt donc queſtion que de montrer que cette difference $\frac{xx + x}{2}$ n'eſt de nulle conſideration.

Les differences de tous ces quarrez font une progreſſion de nombres impairs, ſ n. 18, qui a un nombre de termes égal à celui de la progreſſion des nombres naturels dont on conſidere les quarrez. Ainſi $x + 1$ eſt encore le nombre des termes de cette progreſſion d'impairs, partant le dernier terme de ces impairs eſt encore x ; or le premier terme étant zero, donc $x + 0$ ou x multiplié par $x + 1$, le nombre des termes, fait $xx + x$, double de toute la progreſſion des impairs : ainſi $\frac{xx + x}{2}$ eſt la juſte ſomme de la progreſſion que font ces differences. Par l'hypotheſe la difference de tous ces quarrez eſt nulle, ou n'eſt pas ſenſible ; donc $\frac{xx + x}{2}$ ne doit point être conſideré ; ainſi on peut dire que la ſomme de tous ces quarrez eſt le tiers du ſolide $ABCEFG$, qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

En ſuivant la méthode que nous avons employée on, pourroit démontrer ſur les autres puiſſances, ce que nons avons démontré de la premiere & de la ſeconde puiſſance : ſçavoir par exemple que le ſomme des termes d'une progreſſion naturelle infinie, eſt le quart du produit du cube du dernier terme multiplié par le nombre des termes. Ainſi de toutes les autres puiſſances.

TRAITÉ

Des progreſſions Arithmetiques & Geometriques jointes enſemble.

De la compoſition & de l'uſage des Logarithmes.

AVERTISSEMENT.

LES deux progreſſions Arithmetique & Geometrique ont des proprietez conſiderables quand elles ſont jointes enſemble. Elles le ſont dans le Triangle Arithmetique dont M. Paſchal a fait un Traité. J'expoſerai ſommairement les proprietez de ce Triangle, que je ſuppoſe fait tel que cet Auteur le répreſente. J'en conſidere les proprietez principales qui réſultent de la diſpoſition des nombres qu'il renferme, toutes ſi évidentes qu'il n'eſt point néceſſaire de les démontrer autrement qu'en les expoſant.

Triangle Arithmetique

Ordres Numeriques		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 Unitez	1	A 1	B 1	C 1	D 1	E 1	F 1	G 1	H 1	I 1	K 1
2 Noms Naturels	2	L 1	*A* 2	*B* 3	*C* 4	*D* 5	*E* 6	*F* 7	*G* 8	*H* 9	
3 Triangulaires	3	M 1	*K* 3	a 6	b 10	c 15	d 21	e 28	f 36		
4 Piramidaux	4	N 1	*L* 4	g 10	m 20	n 35	o 56	p 84			
5 Triangulo-Triangulaires	5	O 1	*M* 5	q 15	r 35	s 70	t 126				
Sixiéme ordre.	6	P 1	*N* 6	u 21	z 56	aa 126					
Septiéme ordre.	7	Q 1	*O* 7	x 28	bb 84						
Huitiéme ordre.	8	S 1	*P* 8	y 36							
Neuxiéme ordre.	9	T 1	*Q* 9								
Dixiéme ordre.	10	V 1									

Rangs paralelles

Rangs perpendiculaires

Chapitre Premier.

Proprietez du Triangle Arithmetique qui comprend celles des progressions Arithmetiques & Geometriques.

IL faut d'abord remarquer dans ce Triangle une progression, qui consiste en ce que chaque base contient une cellule plus que la précedente. Il n'y en a qu'une dans l'angle droite, sçavoir la cellule *A*; après laquelle suivent les deux cellules *B* & *L*; après elles il y en a trois autres dans la base qui suit, qui sont *C*, *A*, *M*.

La Cellule *A* est appellée la Génératrice, & le nombre 1 qui y est, le Générateur. Il est arbitraire, on y peut mettre tout autre nombre, mais celui-là posé, il faut qu'en chaque cellule il y ait un nombre égal aux deux des deux cellules, l'un superieur dans le rang parallele, l'autre qui la précede dans le rang perpendiculaire. Ici l'unité étant la Génératrice, ce nombre 6 de la cellule *a* est égal à 3 + 3 des cellules *B*, *K*. De même 3 de la cellule *B* est égal à 1 + 2 des cellules *C*, *A*, & 3 de la cellule *K* est égal à 2 + 1 des cellules *A*, *M*.

Cela étant voici les autres proprietez qu'il faut considerer dans ce triangle, & qui en sont comme des consequences nécessaires.

1°. Chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallele précedent comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement.

10 = 1 + 2 + 3 + 4, ou *b* = *L*. *A*. *B*. *C*.

2°. Chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire précedent compriſes depuis ſon rang parallele juſqu'au premier incluſivement.

$10 = 1 + 3 + 6$, ou $b = C. B. a.$

3°. Chaque cellule diminuée de l'unité, eſt égale à la ſomme de toutes celles qui ſont compriſes entre ſon rang parallele & ſon rang perpendiculaire, excluſivement.

$15 - 1 = 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ou $c - 1 = C + B + A + L + D + C + B + A.$

4°. Chaque cellule eſt égale à ſa reciproque $B = L$ & $B = K$.

5°. Un rang parallele & un perpendiculaire qui ont un même expoſant ſont compoſez de cellules toutes pareilles : Par exemple,

Le rang parallele dont *6* eſt l'expoſant contient les cellules 1. *6*. 21. 56. 126. leſquelles ſont égales à celles du rang perpendiculaire qui a le même expoſant.

6°. La ſomme des cellules de chaque baſe eſt double de celles de la baſe précedente.

$N + K + B + D$ eſt le double de $M + A + C$.

7°. La ſomme des cellules de chaque baſe eſt un nombre de la progreſſion Geometrique double, qui commence par l'unité dont l'expoſant eſt le même que celui de la baſe.

÷ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

8°. Chaque baſe diminuée de l'unité eſt égale à la ſomme de toutes les précedentes.

$N + K + B + D - A = M + A + C + B + L + A.$

La quatriéme baſe eſt de 8, & les trois premieres de 7.

9°. La ſomme de tant de cellules continuës qu'on voudra d'une baſe, à commancer par une extrêmité, eſt égale à autant de cellules de la baſe précedente, plus encore à autant hormis une.

Prenant ces trois cellules *N. K. B.* de la quatriéme base, leur somme qui est 7 est égale aux trois cellules *M. A. C.* de la base précedente; plus encore les mêmes cellules, hormis *C.* Mr. Paschal appelle cellules de la Dividente celles que la ligne qui divise l'angle droit par la moitié, traverse diagonalement, comme *A*, *A*, *a*, *m*, *s*.

10°. Chaque cellule de la Dividende est double de celle qui la precede dans son rang parallele ou perpendiculaire. *a* est double de *B*, comme aussi de *K*.

11°. Deux cellules contiguës, comme *a* & *l* étant dans une même base, la superieure est à l'inferieure, 6 à 4, comme la multitude des cellules depuis la superieure jusqu'au haut de la base, à la multitude de celles depuis l'inferieure jusqu'en bas inclusivement; car il en a trois au dessus de *a* en comptant *a*; sçavoir *a*, *C*, *E*, & au dessous il n'y en a que deux, *l* & O.

12°. Deux cellules contiguës *b* & *m* étant dans un même rang perpendiculaire, l'inferieure est à la superieure, 20 à 10, comme 6 exposant de la base superieure à 3, exposant de son rang parallele.

13°. Deux cellules contiguës *B* & *C* étant dans un meme rang de paralleles, la plus grande est à la précedente comme 4 exposant de la base de cette précedente à 3 exposant de son rang perpendiculaire.

14°. En tout Triangle Arithmetique, comme dans le Triangle *A D N*, la somme des cellules d'un rang parallele, comme ici le second *L A B* est à la derniere de ce rang, c'est-à-dire, à *B*, comme l'exposant du Triangle est à l'exposant du rang parallele qui est ici 2.

15°. Soit un Triangle quelconque, par exemple le cinquiéme *AEO*, quelque rang paralléle qu'on y prenne, par exemple le troisiéme. La somme de ses cellules *M. K. a.* qui est 10, est à *N. l*, celles dn quatriéme, comme 4 exposant du rang quatriéme est à 2, exposant de la multitude de ses cellules ; car il n'y en a que deux de ce rang qui soient dans le Triangle *AEO*.

Ce que je viens de dire suffit pour comprendre qu'on peut unir ensemble les deux progressions Arithmetique & Geometrique. l'Auteur de ce Triangle Arithmetique montre qu'il a plusieurs autres proprietez dont on peut faire usage ; c'est ce que je ne dois pas entreprendre d'expliquer dans ces premiers Elemens, je dirai seulement qu'il sert à trouver les ordres numeriques dont on a parlé ci-dessus, Liv. II. n. 19. Vous voyez par exemple, vis-à-vis du troisiéme ordre dans la cellule *a* ce nombre *6.* formé par l'addition des nombres du second ordre qui sont dans les cellules *L*, *A*, *B*. Sçavoir, 8, 2, 3. & ainsi du reste.

CHAPITRE II.

L'union de la progression naturelle des nombres avec une progression Geometrique, se nomme Logarithme.

LE zero, ainsi qu'on l'a remarqué, peut être consideré comme un milieu entre la grandeur positive & la grandeur négative, ce qui est positivement grand peut être si petit, & si infiniment petit, qu'on le peut supposer égal à zero. Considerant donc une grandeur qui commence, & qui croît toûjours dans une même proportion Arithmetique, & par consequent dont les accroissemens font une progression Arithmetique, on peut dire que zero en est le premier terme; les autres termes sont les nombres comme ils se suivent naturellement. Voici cette progression.

÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Au lieu de considerer que cette grandeur qui commence depuis le zero croisse par addition, comme il le fait dans la progression Arithmetique; concevons qu'elle croît par la multiplication; c'est-à-dire, qu'étant multipliée continuellement par elle-même, on l'éleve à tous ses degrez ou puissances. Ces puissances font une progression Geometrique, comme on l'a prouvé Liv. IV. n. 31. Or on peut dire que le premier terme de cette progression est encore zero. Car si la grandeur proposée est a, en la considerant dans la premiere origine sortant pour ainsi dire du neant, & lui étant encore égale, on la peut appeller a^0, qui sera le premier terme. Le zero multipliant a ne l'augmente point; ainsi a^0, sera toûjours zero; on ne peut donc pas dire que ce soit un degré. Le premier degré c'est a^1, qui sera le second terme de la progression. a^2 est le troisiéme. Voilà cette progression que font les degrez de a.

$$\div\div\ a^0.\ a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.\ a^8.\ a^9.$$

Tous les degrez d'une grandeur ainsi exprimez font deux progressions, l'une Arithmetique, l'autre Geometrique. La suite des nombres naturels qui exposent les degrez de cette grandeur font une progression Arithmetique; & les puissances marquez par les degrez en font une Geometrique; ce qui est évident.

÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

$$\div\div\ a^0.\ a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.\ a^8.\ a^9.\ a^{10}.\ \&c.$$

C'est l'union de ces deux progressions qu'on nomme *Logarihme*. Ce nom est composé de deux noms : le premier signifie *raison*, & l'autre *nombre*. Ce mot *Logarithme* signifie proprement des nombres en progression Arithmetique qui correspondent à d'autres nombres qui sont en progression Geometrique. Par le moyen de cette union, on abrege plusieurs operations Arithmetiques. Vous voyez ici que la somme ou l'addition de deux nombres de la progression Arithmetique est l'exposant d'une puissance faite par la multiplication des deux puissances dont ces deux nombres sont les exposans. Ainsi, par exemple, $2 + 3$ ou 5 est l'exposant de a^5, qui est une puissance faite par la multiplication de a^2 par a^3. ou de *aa* par *aaa*, car ce produit est *aaaaa* ou a^5, suivant les regles de la multiplication.

Dans les progressions Arithmétiques on fait par l'addition & la soustraction, ce qui ne se fait dans la progression Geometrique que par la multiplication & par la division, qui sont des operations beaucoup plus longues. Ainsi en ajoûtant ici les exposans 3 & 6, ce qui fait 9, on a l'exposant de la neuviéme puissance, qui est faite par les puissances troisiéme & sixiéme multipliées l'une par l'autre. Par consequent la difference de deux exposans est le quotient de deux puissances divisées l'une par l'autre. Ainsi $9 - 6$ ou 3 difference de 9 & de 6, est le quotient ou la puissance qui résulte de la puissance neuviéme divisée par la sixiéme. La puissance qui resulte de cette division est la troisiéme. La division défait ce que la multiplication avoit produit. Or pour diviser a^9 par a^6, il faut ôter six *a* de neuf *a*, & les trois *a* qui reste sont le quotient de cette division.

CHAPITRE III.

De la composition des Tables des Logarithmes.

L'Union des deux progreſſions Arithmetique & Geometrique donnant donc le moyen de trouver par l'addition & par la ſouſtraction, ce qu'autrement on ne trouve que par la multip ication, & par la diviſion, qui ſont des operations difficiles, on s'eſt aviſé de joindre ces deux progreſſions, & de compoſer des Tables qui continſſent les nombres naturels depuis l'unité juſqu'à cent mille & plus, avec leurs Logarithmes propres, c'eſt-à-dire, des nombres qui fiſſent une progreſſion Arithmetique, & fuſſent les expoſans d'autant de termes d'une progreſſion Geometrique. Pour comprendre mieux ce que c'eſt que ces Logarithmes & leurs uſages, il faut faire voir de quelle maniere ils ſe trouvent, c'eſt-à-dire, comme on a compoſé les Tables qui les contiennent. Conſiderez ces deux progreſſions, ou parties de progreſſions que vous voyez. L'une eſt des nombres naturels, & a pour ſon premier terme zero. Dans la progreſſion Geometrique regne la raiſon décuple, comme la difference qui regne dans l'Arithmetique c'eſt 10000000. On verra pourquoi ce grand nombre de zero dans la progreſſion Arithmetique, & pourquoi je ne lui donne pour ſon premier terme que des zero, leſquels répondent à 1, qui eſt le premier terme de la Geometrique. On a pris ce mot *Logarithme* pour le terme d'une progreſſion Arithmetique, qui répond à un terme d'une progreſſion Geometrique, ce nombre 10000000 de la progreſſion

Arithmetique est donc le Logarithme de 10 un des termes de la Geometrique.

Geometrique.	*Arithmetique.*
1	0.0000000
10	10000000
100	20000000
1000	30000000
10000	40000000
100000	50000000
1000000	60000000

Vous ne voyez pas ici les Logarithmes de 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. & c'est ce qui est néceſſaire, ſi on veut avoir la ſuite des Logarithmes de tous les nombres comme ils ſe ſuivent depuis l'unité. Ils ne ſe trouvent qu'avec un travail infini dont vous allez voir un échantillon. Le Baron Neper, Ecoſſois, commença ce travail l'an 1614. Brigge Anglois le perfectionna. Pour juger combien il eſt grand, il ſuffit de chercher le Logarithme de 9, & on connoîtra par là la grandeur du travail; car pour le trouver il faut auparavant trouver tant de moyens proportionnels entre 1 & 10, qu'enfin on en trouve un égal à 9, où dont la difference avec ce nombre ne ſoit pas conſiderable. Il faut en même temps chercher à chacun de ces moyens proportionnels, un terme dans la progreſſion Arithmetique auſſi moyen proportionnel qui lui réponde, pour avoir enfin le Logarithme de 9, qu'on ne peut aſſigner autrement.

C'eſt par l'extraction des racines qu'on trouve des moyens proportionnels entre deux nombres donnez, comme on l'a enſeigné. Ces produits ne ſont pas toûjours des puiſſances parfaites ou nombres quarrez ou cubes; ainſi comme on n'en peut avoir que des racines approchées, au lieu de 1 & de 10 on prend ces grands nombres 10000000 & de 10. 0000000 qui ſont en même raiſon, afin que l'erreur ne ſoit pas ſenſible. Prenez garde à cette Table que vous voyez devant vos yeux. Ce n'eſt que le commencement d'une qui eſt plus grande qui ſe trouve dans tous les Auteurs qui traitent les Logarithmes. Elle répreſente les ſupputations qu'il faut faire pour trouver le ſeul Logarithme de 9. Jugez de-là du travail de la compoſition des Tables entieres des Logarithmes.

	Proportion Geometrique.	*Logarithmes.*
A	1.0000000	0. 00000000
C	3.1622777	0. 50000000
B	10.0000000	1. 00000000
B	10.0000000	1. 00000000
D	5.6234132	0. 75000000
C	3.1622777	0. 50000000
B	10.0000000	1. 00000000
E	7.4989421	0. 87500000
D	5.6234132	0. 75000000

Il faut chercher un moyen proportionnel entre ces deux nombres *A* & *B*. On trouve *C* en multipliant *A* par *B*, & tirant la racine quarrée de leur produit; après cela on cherche le Logarithme de *C*, c'eſt-à-dire, un nombre qui ſoit moyen Arithmetique entre 000000000 & 100000000. On le trouve ajoûtant ces deux termes en une omme, dont la moitié eſt le moyen Arithmeique qu'on cherche. Puiſque dans cette progreſsion le premier terme n'est rien, il suffit de prendre la moitié de l'autre terme.

Or le moyen proportionnel *C* qu'on a trouvé est moindre que 9000000, il faut donc chercher un autre moyen proportionnel entre le moindre *C* & le plus grand *B*. Je trouve *D* & son Logarithme ; mais comme ce moyen *D* est encore moindre que celui qu'on cherche ; il faut de même chercher entre *D* & le plus grand terme *B*, un troisiéme moyen proportionnel, on trouve *E* & son Logarithme, qui ne sera point encore celui que l'on cherche. Mais enfin en continuant de chercher entre le prochainement moindre, & le prochainement plus grand des moyens Geometriques proportionnels, on aura des nombres qui approcheront toûjours de plus en plus du nombre proposé 9000000, lequel enfin se trouvera le vingt-sixiéme moyen proportionnel ; comme on le voit dans les Auteurs qui rapportent cette operation en toute son étenduë. Quel est donc le travail quand il faut conposer des Tables entieres, c'est-à-dire, trouver des Logarithmes depuis l'unité jusquà cent mille, & encore plus loin, puisque seulement pour le Logarithme de 9 il faut faire tant d'operations ?

Quand on a trouvé les Logarithmes de tous les nombres absolus, à commencer depuis l'unité, on les range selon leur suite. Vous trouverez ici le commencement de ces Tables. Dans la premiere colomne qui est la plus étroite, sont les nombres absolus, & vis-à-vis leurs Logarithmes, qui ont été trouvez en la maniere que je l'ai dit. Tous les moyens Geometriques qu'il a fallu trouver auparavant ne paroissent point dans ces Tables : car cela ne sert de rien pour l'usage qu'on en veut faire.

Les Logarithmes qui ſont comme les expoſans des nombres abſolus ou naturels, ſont entr'eux arithmetiquement, ce que les nombres naturels ſont entr'eux geometriquement, c'eſt-à-dire, par exemple, que ces trois nombres 4. 6. 9. étant en progreſſion Geometrique, les Logarithmes qui ſont à côté de ces trois nombres ſont en progreſſion Arithmetique. Ainſi le Logarithme qui ſe trouvera à côté d'un nombre quatriéme proportionnel aux trois précedens, ſera auſſi un quatriéme proportionnel arithmetique aux Logarithmes des trois nombres précedens.

CHAPITRE IV.

De l'uſage des Tables des Lobarithmes.

POur trouver un quatriéme terme proportionnel Geometriquement, il faut multiplier, comme on l'a enſeigné, le ſecond par le troiſiéme, & en diviſer le produit par le premier. Si 3. 6 : : 4. on multiplie 6 par 4, & on diviſe 24 le produit par 3, le quotient 8 ſera le quatriéme qu'on cherche. Or ces multiplications & diviſions ſont des operations longues : on s'en exempte en ſe ſervant de la Table des Logarithmes. Je prens le Logarithme de 6 qui eſt 7781512, je l'ajoûte à celui de 4 qui eſt 6020600, cela fait 13802112 dont je retire ce nombre 4771212 qui eſt Logarithme de 3, le reſte eſt 9030900, qui eſt un quatriéme proportionnel arithmetiquement aux trois Logarithmes précedens. Je cherche ce nombre ou celui qui en approche le plus, à côté duquel je trouve 8, qui eſt ainſi le terme que je cherchois.

Outreque l'addition & la soustraction sont des operations plus courtes que la multiplication & la division ; cela seul, que le premier terme de la progression des Logarithmes est zero, fait que les operations sont très-courtes, ou qu'une seule suffit. Voyons-le dans un exemple. Soient ces quatre termes a, b, c, d, en proportion Arithmetique, qui répresente les Logarithmes de quatre nombres. $a + d = b + c$, Liv. III. n. 17. Donc si a étoit le Logarithme de l'unité, cette lettre ne vaudroit que zero premier terme de la progression Logarithmetique, comme on le voit dans la Table ; ainsi d seul est égal à $b + c$, c'est-à-dire, que le Logarithme d est égal à la somme des Logarithmes b & c. Ainsi pour le trouver, il suffit d'ajoûter les Logarithmes b & c, puisque leur somme lui est égale. De même si $\div a.\ b.\ c.$ puisque $a + c = b + b$, ou $a + c = 2b$, supposant comme on a fait que a est zero, le Logarithme c est le double de b ; ainsi pour l'avoir il ne faut que doubler b.

Les Tables des Logarithmes abregent les operations de l'Arithmetique, donnant le moyen de faire par l'addition ou par la soustraction ce qu'on seroit obligé de faire par la multiplication & par la divifion ; car par exemple si on veut trouver le quotient d'un nombre divisé par un autre nombre de 24 divisé par 6, il n'y a qu'à prendre la difference des Logarithmes de 6 & de 24, ou retirer le plus petit du plus grand, le reste est le Logarithme du nombre qui est le quotient qu'on cherche ; ce quotient est 4. Or l'unité est au quotient comme le diviseur 6 est au nombre à diviser 24, ainsi 1. 4 :: 6. 24. Soient donc leurs Logarithmes $a.\ b :: c.\ d$, puisque a Logarithme de 1 est zero ; donc $b + c = d$; donc $d - c = b$, c'est-à-dire, la la difference des Logarithmes de *c* & de *d*; ou le reste du Logarithme de *d* dont on a ôté *c*, est le Logarithme de *b* qu'on cherche.

Nous avons vû que la racine d'un nombre quarré est une moyenne proportionnelle entre ce nombre quarré & l'unité. Par exemple 9 est un nombre quarré dont la racine est 3, il faut que $\div$ 1. 3. 9; d'où il suit que le double du Logarithme d'une racine est le nombre quarré: & par consequent que la moitié du Logarithme d'un nombre quarré est le Logarithme de la racine de ce quarré. Car soient $\div$ *a*. *b*. *c*. & qu'à l'ordinaire *a* soit zero, pour lors $b + b = c$, donc la moitié de *c* sera égale à la moitié de $b + b$ ou à *b*. Quand il s'agit donc d'extraire la racine quarrée d'un nombre, ce qui est une operation longue, il faut chercher dans la Table le Logarithme de ce nombre, dont la moitié sera le Logarithme de la racine que l'on cherche.

Le triple du Logarithme d'une racine cube est le Logarithme du cube de cette racine cube; ainsi pour extraire la racine cube d'un nombre, au lieu de faire l'operation ordinaire encore plus longue que l'extraction des racines quarrées, il faut seulement prendre le tiers de son Logarithme; & ce tiers est le Logarithme de la racine cube que l'on cherche. En voilà la démonstration. Lunité est à la racine cube comme le quarré de cette racine est à son cube. Soit donc ce nombre cube 27 dont la racine est 3, alors 1. 3 :: 9. 27, ainsi ces quatre lettres qui désignent les Logarithmes de ces quatre nombres font cette proportion Arithmetique. *a*. *b* ∴ *c*. *d*, donc $a + d = b + c$. On suppose toûjours que *a* est zero; partant $d = b + c$. Or on a vû que le Logarithme d'un nombre quarré vaut le double du Logarithme de ſa racine ; donc $c = b + b$. Ainſi ſubſtituant $b + b$ en la place de c alors $d = b + b + b$, ou $d = 3b$; qui eſt ce qu'il falloit prouver, que d Logarithme du nombre cube étoit le triple de b Logarithme du nombre qui eſt la racine du nombre cube.

Je n'en dirai pas davantage de l'uſage des Tables des Logarithmes, qui ſe trouve expliqué au commencement de ces Tables, dont voilà la premiere page, que je ne propoſe que pour y appliquer ce que nous venons de dire, & le rendre plus intelligible. Ces Tables ſe trouvent par tout.

N.	*Logarithmes.*	N.	*Logarithmes.*
1	0. 0000000	31	1. 4913617
2	0. 3010300	32	1. 5051500
3	0. 4771213	33	1. 5185139
4	0. 6020600	34	1. 5314789
5	0. 6989700	35	1. 5440680
6	0. 7781513	36	1. 5563025
7	0. 8450980	37	1. 5682017
8	0. 9030900	38	1. 5797836
9	0 9542425	39	1. 5910646
10	1. 0000000	40	1. 6020600
11	1. 0413927	41	1. 6127839
21	1. 0791812	42	1. 6232493
13	1. 1139434	43	1. 6334685
14	1. 1461280	44	1. 6434527
15	1. 1760913	45	1. 6532125
16	1. 2041200	46	1. 6627578
17	1, 2304489	47	1. 6720979
18	1. 2552725	48	1. 6812412
19	1. 2787536	49	1. 6901961
20	1. 3010300	50	1. 6989700
21	1. 3222193	51	1. 7075702
22	1. 3424227	52	1. 7160033
23	1. 3617278	53	1. 7242759
24	1. 3802112	54	1. 7323938
25	1. 3979400	55	1. 7403627
26	1. 4149733	56	1. 7481880
27	1. 4313638	57	1. 7558749
28	1. 4471580	58	1. 7634280
29	1. 4623980	59	1. 7708520
30	1. 4771213	60	1. 7781513

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
61	1. 7853298	91	1. 9590414
62	1. 7923917	92	1. 9637878
63	1. 7993405	93	1. 9684829
64	1. 8061800	94	1. 9731279
65	1. 8129134	5	1. 9777236
66	1. 8195439	6	1. 9822712
67	1. 8260748	97	1. 9867717
68	1. 8325089	98	1. 9912261
69	1. 8388491	99	1. 9956352
70	1. 8450980	100	2. 0000000
71	1. 8512583	101	2. 0043214
72	1. 8573325	102	2. 0086002
73	1. 8633229	103	2. 0128372
74	1. 8692317	104	2. 0170333
75	1. 8750613	105	2. 0211893
76	1. 8808136	106	2. 0253059
77	1. 8864907	107	2. 0293838
78	1. 8920946	108	2. 0334238
79	1. 8976271	109	2. 0374265
80	1. 9030900	110	2. 0413927
81	1. 9084850	111	2. 0453230
82	1. 9138139	112	2. 0492180
83	1. 9190781	113	2. 0530784
84	1. 9242793	114	2. 0569049
85	1. 9294189	115	2. 0606978
86	1. 9344984	116	2. 0644080
87	1. 9395193	117	2. 0681859
88	1. 9444827	118	2. 0718820
89	1. 9493900	119	2. 0755470
90	1. 9542425	120	2. 0791812

TRAITE'

De la Proportion Harmonique.

CHAPITRE I.

Ce que c'est que proportion Harmonique.

LA proportion Arithmetique & la Geometrique sont jointes ensemble dans la proportion Harmonique. Pour le concevoir voyons ce qui peut faire que les sons soient d'accord & agreables, ce qui n'arrive que lorsqu'il s'y trouve union de ces deux proportions. Le son se fait par un trémoussement ou certain mouvement de l'air qui se communique à une membrane tenduë dans l'organe de l'oüie. C'est cette impression qui nous cause le sentiment du son. Tout corps qui peut donner à l'air ce trémoussement est sonore. Par exemple une corde de boyau ou de leton qui est tenduë, fait un son lorsqu'on la pince, parce qu'elle agite l'air. En la pinçant on la tire hors de la ligne droite ; où avant que de se remettre, & d'être en repos elle va & vient en delà & en deçà. Ces allées & ces venuës sont ce que l'on appelle des vibrations qui causent un trémoussement dans l'air. & qui par consequent font le son.

Pour entendre ce que c'est que ces vibrations, considerez un pendule, c'st-à-dire, un fil au bout duquel pend une bale de plomb. Lorsquon retire ce pendule hors de la perpendiculaire, la bale y rédescend, passe au-delà, & ne s'y arrête qu'aprés plusieurs allées & venuës ce qu'on nomme mes vibrations. Elles sont à peu près *isochrones*, c'est-à-dire, qu'elles se font en temps égaux; car au commencement quand la bale va plus vîte, elle parcourt un plus grand espace; sur la fin qu'elle va plus lentement, elle a moins de chemin à faire.

Les cordes des instrumens font de même des vibrations quand on les pince. Elles semblent trembler, & c'est en tremblant qu'elles font trémousser l'air, ce qui produit le son. L'experience fait connoître que le son est plus grave lorsque les vibrations sont plus lentes: qu'il est plus aigu quand elles sont plus frequentes; ou que dans un même temps il s'en fait un plus grand nombre. Les cordes plus longues & plus grosses & moins tenduës, se remuant plus lentement, leurs vibrations sont plus tardives; aussi leur son est plus grave. Une corde plus menuë, moins longue, plus tenduë, fait plus de vibrations dans un même espace de temps; ainsi son son est plus aigu.

Or trois choses font l'agrément des sons, la distinction, l'égalité, la varieté. 1°. Une corde bien égale dont les parties sont bien unies comme sont celles de boyau, & plus encore celles de leton, quand elle est tenduë, est plus capable de ces vibrations qui font trembler l'air; & comme son tremblement dure du temps, le son qu'elle fait se distingue bien mieux, & se conserve dans une égalité, ses vibrations étant à peu près égales pour le temps. Les oreilles ne peuvent être contentes que de ce qu'elles distinguent; ainsi aucun rapport qui puisse être entre les sons ne leur plaît que quand il s'exprime par de petits nombres. C'est pour cela que les rapports Arithmetiques ſont plus propres pour l'Harmonie, parce qu'ils ne conſiſtent que dans une difference ſenſible.

2°. L'égalité des ſons entre ceux que produiſent les cordes d'un inſtrument, dépend du rapport de leurs vibrations. Deux cordes de même matiere, égales dans leur groſſeur & dans leur longueur, & également tenduës, doivent faire dans un méme eſpace de temps un égal nombre de vibrations quand elles ſont pincées de la même maniere. Auſſi l'experience montre qu'elles ſont d'accord, & que ſi dans le temps d'une ſeconde, l'une fait dix vibrations, l'autre en fait un pareil nombre; & ſi elles ſont pincées en même temps, le temps de chaque vibration de l'une doit étre égal au temps de la vibration de l'autre. Des oreilles qui ſentent aiſément cette égalité ſont donc contentes; au lieu qu'elles ſont troublées, & comme inqnietes, quand il n'y aucun rapport exact qui ſe puiſſent exprimer par nombres entre leurs vibrations, en la méme maniere que ce qui eſt confus & ſans ordre déplaît à la vûë.

3°. L'égalité ſeroit néanmoins déſagreable ſi la varieté ne prevenoit le dégoût qu'elle pourroit cauſer. Il y a une varieté qui s'allie avec l'égalité, & qui peut ainſi ſatisfaire les oreilles; car ſi par exemple aprés un certain intervale de temps deux cordes commencent & finiſſent exactement leurs vibrations; mais que dans cet eſpace l'une faiſant une vibration, l'autre en faſſe deux; ou lorſqu'une en fait deux, l'autre en faſſe trois, il eſt évident que la varieté & l'égalité s'y rencontrent, & que leurs mouvemens s'accommodent. Les oreilles ſentent & diſtinguent aiſément cette alliance, ſi le rapport de leurs vibrations s'exprime avec de petits nombres ; car je ne crois pas que l'oreille la plus fine pût remarquer l'accord des vibrations de deux cordes, si dans le temps par exemple que l'une en fait quarante-neuf, l'autre en faisoit précisement cinquante.

C'est l'experience qui a fait connoître que trois cordes d'instrumens également grosses & tenduës, dont la longueur est comme ces trois nombres 3. 4. 6. forment ces trois principaux accords de la Musique ; sçavoir l'Octave, la Quinte, & la Quarte, quand elles sont pincées. De deux de ces cordes qui seront l'une à l'autre comme 3 à 6 ; ou 1 à 2 ; la plus courte fera deux vibrations dans le temps que la plus longue n'en fera qu'une ; ce qui fait l'octave. De ces trois cordes les deux qui sont l'une à l'autre comme 6 à 4, ou 3 à 2, la plus courte fera trois vibrations contre deux de la plus longue, ou six contre quatre ; c'est cet accord qu'on nomme la quinte. Enfin deux de ces trois cordes dont la plus courte fera quatre vibrations dans le temps que l'autre n'en fera que trois, feront quand on les pince en même temps ou successivement cet accord, qui se nomme la quarte.

Ainsi l'experience a fait connoître que ces trois nombres 3. 4. 6. expriment la proportion qui fait les principaux accords de la Musique, & c'est pour cela que cette proportion se nomme *Harmonique* ; car l'harmonie c'est l'accord des sons. Or remarquez en ces trois nombres que comme le premier 3 est au dernier 6, la difference du premier & du second, c'est à-dire, de 3 avec 4, qui est 1, est à la difference du second & du troisiéme, c'est-à-dire, de 4 & 6 donr la difference est 2, ce qui se peut exprimer ainsi.

3. 6 : : 4 — 3. 6 — 4.

Prenez garde à cette expreſſion qui eſt la même que celle-ci, 3. 6 : : 1. 2. c'eſt-à-dire, que les grandeurs que ces deux expreſſions marquent ſont les mêmes 4 — 3 = 1 & 6 — 4 = 2. Vous voyez en quel ſens ou comment la proportion Harmonique eſt compoſée de la proportion Arithmetique, & de la proportion Geometrique. On y conſidere l'égalité de la difference, ainſi l'Arithmetique s'y trouve, & la Geometrique, puiſqu'il y a auſſi égalité de raiſons.

CHAPITRE II.

Proprietez de la proportion Harmonique.

DEFINITION.

LA proportion Harmonique arrive lorſque les nombres ſont tels que le plus petit eſt au plus grand geometriquement, comme l'excès du moyen ſur le plus petit eſt à l'excès du plus grand ſur le moyen; ou comme la difference du premier & du deuxiéme à la difference du deuxiéme & du troiſiéme.

Ces nombres 3. 4. 6. ſont en proportion Harmonique, car le plus petit 3 eſt la moitié de 6 le plus grand, comme l'excès du moyen 4 ſur le plus petit 3 eſt à l'excès du plus grand 6 ſur le moyen 4.

3. 6 : : 4 — 3. 6 — 4.

PREMIERE PROPOSITION.

Problême Premier.

Ces deux termes 12 *&* 5 *d'une proportion*

Harmonique étant donnez, trouver le troisiéme.

J'appelle x ce troisiéme terme qui m'est inconnu & que je cherche. Voilà donc les trois termes 12. 5. x de la proportion Harmonique donnée. Suivant la définition de la proportion Harmonique.

$$12. x :: 12 - 5. 5 - x.$$

ce que je puis exprimer de cette maniere, car $12 - 5 = 7$.

$$12. x :: 7. 5 - x.$$

Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Liv. III. n. 67, donc

$$60 - 12x = 7x.$$

Ajoûtant à ces grandeurs égales de part & d'autre $12x$ selon les regles des additions, cela produit

$$60 = 19x.$$

Et divisant ces deux grandeurs égales par 19, cela fait

$$\frac{60}{19} = x$$

Ainsi le troisiéme terme que je cherchois est $\frac{60}{19}$, c'est-à-dire, le quotient de 60 divisé par 19.

SECONDE PROPOSITION.

Theorême premier.

Toutes les fois que la difference de deux nombres est plus grande que le plus petit des deux, on ne peut pas en montant trouver un troisiéme nombre en proportion Harmonique.

Soit 5 & 12 dont la difference 7 est plus grande que 5. Soit x le troisiéme terme, je dis qu'il ne peut pas être plus grand que 12, car supposé que 5. 12. x. soient en proportion Harmonique, alors.

$$5 . x :: 12 - 5 \text{ ou } 7 . x - 12.$$

Or d'autant que 7 est plus grand que 5, il faudroit que $x - 12$ fut plus grand que x ; ce qui est impossible, qu'une partie de x soit plus grande que toute la grandeur entiere x.

TROISIÉME PROPOSITION.
Theorême second.

Une proportion Harmonique peut diminuer à l'infini, mais non pas augmenter.

Ces trois nombres 4. 6. 12. sont en proportion Harmonique, c'est-à-dire, que

$$4 . 12 :: 6 - 4 . 12 - 6,$$

ou ce qui est la même chose.

$$4 . 12 :: 2 . 6.$$

Il faut donc démontrer qu'on ne peut pas continuer cette proportion en l'augmentant, c'est-à-dire, trouver un troisiéme terme plus grand que 12, qui avec 6 fasse une proportion Harmonique qu'on puisse ainsi augmenter. Supposons qu'on puisse trouver ce troisiéme terme : quel qu'il soit nommons-le x. Voyons si la supposition est possible : en premier lieu je puis ainsi exprimer cette supposition.

$$6 . x :: 12 - 6 . x - 12.$$

Or si x est plus grand que 12, comme on le suppose ; il faudroit que le même nombre $12 - 6$ ou 6 eût un même rapport avec l'entier x qu'avec une partie de x, sçavoir avec $x - 12$; ce qui est absurde. S'il est donc vrai, comme on le suppose, que

$$6 . x :: 12 - 6 . x - 12.$$

il faut que x le troisiéme terme soit plus petit que 12. Cette demonstration fait donc voir que la proposition Harmonique ne se peut pas augmenter à l'infini, mais elle peut diminuer ; car on peut trouver x qui sera plus petit, comme on l'a fait dans la premiere proposition.

Quatrie'me Proposition.

Troisiéme Theorême.

Trois grandeurs étant en proportion Arithmetique, les produits. 1°. de la premiere par la seconde. 2°. de la premiere par la troisiéme. 3°. de la deuxiéme par la troisiéme sont en proportion Harmonique.

Soient a, b, c, en proportion Arithmetique, après avoir multiplié 1°. a par b. 2°. a par c, 3°. b par c, il faut prouver que ces trois produits ab ac bc sont e proportion Harmonique ; & qu'ainsi, selon la Définition précédente $ab.\ bc :: ab - ac.\ ac - bc$. Puisque $\div a.\ b.\ c.$ donc Liv. III. n. 19. $a + c = 2b$. Multipliant $a + c$ & $2b$ grandeurs égales par $a\,b\,c$ les produits seront égaux. On aura ainsi une équation dont ayant réduit les deux membres aux plus simples termes, elle se trouvera être

$$a^2bc + abc^2 = 2ab^2c$$

ou $$a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2.$$

Mais $a^2bc - ab^2c$ est le produit de ab multiplié par $ac - bc$, comme $ab^2c - abc^2$ est le produit de bc & de $ab - ac$, donc ces quatre grandeurs sont proportionnelles. Livre III, n. 70.

$$ab.\ bc :: ab - ac.\ ac - bc.$$

qui est ce qu'il falloit prouver. Car selon la définition de la proportion Harmonique, ces trois produits ab, ac, bc, ſont en cette proportion.

COROLLAIRE.

Donc ayant trois nombres en proportion Arithmetique $\div$ 6. 4. 2. *ces trois produits* 6×4 6×2 4×2, *ou* 24. 12. 8. *ſeront en proportion Harmonique.*

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Theorême Quatriéme.

Si on diviſe la même grandeur par des diviſeurs qui ſoient en progreſſion Arithmetique, les quotiens de la diviſion ſeront proportionnels Harmoniquement.

Soit a diviſé par les termes de cette progreſſion $\div b.\ b+d.\ b+2d.$ les quotiens de ces diviſeurs ſont $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b+d}$ $\frac{a}{b+2d}$. Soit $\frac{a}{b}=e$, & $\frac{a}{b+d}=f$ & $\frac{a}{b+2d}=g$; ainſi il faut prouver que $e.\ g :: e-f.\ f-g$. Les quotiens de la même grandeur ſont entr'eux réciproquement comme les diviſeurs, Liv. III. n. 74. Ainſi $e.\ f :: b+d.\ b$; partant *dividendo* $e-f.\ f :: b+d-b.\ b$, Puiſque $+b-b=$ zero ; Donc $e-f.f :: d.\ b.$
par le méme raiſonnement.

$f.\ g :: b+2d.\ b+d.$ Donc *convertendo*.

$f.\ f-g :: b+2d.\ b+2d-b-d.$

Or $b+2d-b-d=d$, donc

$$f.\ f-g :: b+2d.\ d.$$

On vient de voir que $e-f.\ f :: d.\ b.$

donc *ex proportione perturbata*. Liv. III. n. 73
$e-f.\ f-g :: b+2d.\ b.$

Or $e.\ g :: b+2d.\ b$; car comme on vient de le voir, e est le quotient de a divisé par b, comme g est le quotient de a divisé par $b + 2d$, donc les quotiens de la même grandeur étant entr'eux réciproquement comme les diviseurs. Liv. III. n. 74. $e. g :: b + 2d. b :: e - f. f - g.$ donc $e. g :: e - f. f - g$, qui est ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Divisant ce nombre 60 par cette progression Arithmetique, 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. les quotiens seront en proportion Harmonique.

Les quotiens sont 60. 30. 20 15. 12. 10. qui par le Theorême précédent doivent être en proportion Harmonique, ainsi ils sont une progression Harmonique; car 60. 20 :: 60 — 30. 30 — 20; & 30. 15 :: 30 — 20. 20 — 15, & 20. 12 :: 20 — 15. 15 — 12, & 15. 10 :: 15-12. 12 — 10. Ces nombres sont donc une progression Harmonique.

Si on vouloit avoir une plus longue progression Harmonique, il faudroit continuer la progression Arithmetique, & si elle avoit sept termes, multiplier 60 par 7, ce qui feroit 420, lequel nombre divisé par les sept termes de la progression Arithmetique, donneroit une nouvelle progression Harmonique, sçavoir 420. 210. 140. 105. 84. 70. 60. Vous voyez que c'est-là une autre progression, qui continuë la premiere, mais en descendant, comme nous avons vû que cela se pouvoit faire.

TRAITÉ

des Combinaisons & des changemens d'ordre.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Combinaison. Comment on trouve les Combinaisons possibles de deux & de plusieurs choses.

LE mot de Combinaisons ne signifie proprement que la maniere de prendre plusieurs choses deux à deux, & de trouver toutes les differentes dispositions qu'elles peuvent avoir ainsi prises. Mais on donne une signification plus étenduë à ce mot. On entend la maniere de trouver généralement toutes les dispositions que peuvent avoir, soit deux, soit plusieurs choses, selon qu'on les voudra prendre, non seulement deux à deux, mais trois à trois, quatre à quatre, & de quelqu'autre façon, en les ajoûtant, en les multipliant, selon qu'il sera nécessaire. Changement d'ordre, c'est lorsque l'on change leur ordre de la maniere dont nous donnerons des exemples, après avoir expliqué les Combinaisons.

Les Combinaisons sont d'usage dans une infinité de rencontres. Souvent pour ne se point tromper, il faut faire des dénombremens exacts. La difficulté est d'être assûré de cette exactitude, c'est-à-dire, que rien n'a échapé ; ce qu'on obtient par le secours des Combinaisons. Voilà en quoi consiste tout leur art. Comme dans toute l'Arithmetiqne, il faut 1°. *Faire par parties ce qu'il seroit impossible de faire tout d'un coup, en ne commençant que par des Combinaisons fort simples.*

2°. *Il faut faire avec ordre les premieres Combinaisons.*

3°. *Il faut tirer des consequences de ce qu'on a découvert en faisant les premieres Combinaisons.*

Un exemple rendra sensibles ces trois Regles ausquelles je réduis tout l'art des Combinaisons. On verra comme les premieres Combinaisons simples & aisées font découvrir tout ce qu'on peut sçavoir des Combinaisons composées, sans qu'on soit obligé de les faire.

On propose de connoître le nombre de tous les mots possibles qu'on peut faire des vingt-quatre lettres de l'Alphabet, faisant les uns de deux lettres, les autres de trois, les autres de quatre, jusqu'à les faire de vingt-quatre lettre. Cette proposition paroît d'abord fort difficile, & cependant il est facile de la résoudre en suivant les trois regles qu'on vient de donner. Car premierement je n'entreprendrai pas de faire la chose tout d'un coup, & je ne commencerai que par des Combinaisons aisées. Je verrai donc combien on peut faire de mots de deux lettres; ce que je ferai par parties; car je n'examinerai d'abord qu'en combien de manieres chaque lettre peut être combinée avec les autres lettres. En second lieu, suivant la seconde regle, je garderai un ordre naturel; car puisque la lettre *a* est la premiere de l'Alphabeth, je commencerai par elle ces Combinaisons, & je suivrai l'ordre des lettres. Il me sera donc facile de trouver qu'on peut combiner la lettre *a* avec les 24 de l'Alphabeth en 24 manieres que voilà : *aa, ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, ak, al, am, an, ao, ap, aq, ar, as, at, au, ax, ay, az, a&c.*

Maintenant je dois faire ce que la troisiéme regle m'avertit de faire, qui est de considerer cette premiere combinaison qui est très-simple, d'y faire attention, & de voir ce que j'en puis conclure. Il est évident que ce que j'ai fait en commençant par *a*, je le puis faire en commençant par *b*; c'est-à-dire, combinant *b* la seconde lettre avec les 24 lettres, suivant le même ordre, disant: *ba, bb, bc, &c.* par consequent puisque chaque lettre se combine en 24 manieres differentes, où elle tient toûjours la premiere place; on peut donc faire vingt-quatre fois vingt-quatre, c'est-à-dire, 576 combinaisons differentes, ou mots de deux lettres. Ainsi cette premiere combinaison simple & aisée de *a* avec les lettres de l'Alpabeth me fait découvrir le nombre de tous les mots de deux lettres, & je vois bien que s'il les falloit tous ecrire, je le pourrois faire sans qu'il m'en échapât un.

Cette premiere & seule combinaison me donne encore une plus grande connoissance, & pour le dire en un mot elle me fait connoître tout ce que je cherche. Car pour trouver tous les mots de trois lettres, je n'ai qu'à garder le même ordre, combinant chacun de ces mots de deux lettres avec chacune des vingt-quatre lettres. Par exemple, comme le premier mot étoit *aa*, disant *aaa, aab, aac, &c.* d'où il est évident que comme je combinerai chaque mot de deux lettres en 24 manieres differentes, les combinant avec les 24 lettres de l'Alphabet, le nombre des mots de trois lettres sera vingt-quatre fois plus grand que celui des mots de deux lettres; ainsi multipliant 576 par 24 ; ce qui fait 13824, j'aurai le nombre des mots de trois lettres, sans faire aucune combinaison.

Il n'en faut pas davantage ; car j'apperçois qu'en combinant chacun de ces mots de trois lettres avec les 24 lettres, gardant toûjours le même ordre, disant par exemple, *aaaa*, *aaab*, *aaac*, *&c.* le nombre des mots de quatre lettres doit être 24 fois plus grand ; ce qui me découvre une proportion ou progression qui regne ici ; sçavoir que le nombre de mots de quatre lettres sera 24 fois plus grand que celui des mots de trois lettres : que le nombre des mots de cinq lettres sera 24 fois plus grand que celui des mots de quatre lettres ; & qu'ainsi ces Combinaisons augmentent dans une même proportion. On peut donc connoître tout d'un coup après avoir fait cette premiere Combinaison simple, combien par exemple il y auroit de mots faits de treize lettres, & si l'on veut quel seroit le nombre de toutes les Combinaisons ensemble. Car une progression étant donnée connoissant le premier terme & la raison qui regne, il est facile de connoître quelqu'autre de ses termes qui soit proposé, & la somme de tous les termes.

Ce seul exemple suffit pour comprendre l'art des Combinaisons. On trouve toûjours de la même maniere une certaine proportion qui regne. On la découvre d'abord lorsqu'on commence par les Combinaisons les plus simples, & qu'on suit un ordre naturel. Voyons-le dans ce second exemple. On demande en combien de manieres on peut combiner les dix premiers chifres 1. 2. 3. 4. 6. 7. 8. 9. 0. en les prenant deux à deux, après trois à trois, continuant jusqu'à dix. La valeur des chifres dépendant de leur place, il faut bien considerer en les combinant qu'ils gardent la même place ; 12 & 21 ne sont pas une même chose. Ainsi commençant la Combinaison par 1, il faut le mettre à la premiere place ; & on trouvera d'abord que le nombre de ces Combinaisons sera une progression dans laquelle regne la raison décuple.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 10.

Vous voyez que les dix premiers chifres pris seuls, sont le premier terme de cette progression. Le chifre 1 combiné avec chacun de ces dix chifres, fait dix combinaisons ; partant chacun des dix étant ainsi combinez,

21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 20.

combinant, dis-je, tous les autres chifres en la même maniere, cela fera cent Combinaisons.

Cela seul vous fera connoître que les dix chifres pris de la même maniere trois à trois, feront mille combinaisons. Ainsi tout d'un coup on voit le nombre des combinaisons que ces dix chifres peuvent faire pris par exemple sept à sept ; & quel est le nombre de toutes les combinaisons, qui sera la somme d'une progression. Par des chifres on peut entendre quelque chose qu'on voudra ; & on voit comment quelque soit leur nombre, il est facile d'en trouver toutes les combinaisons possibles.

CHAPITRE II.

Les Combinaisons se font differemment, selon la fin pour laquelle on les fait.

ON peut avoir differentes vûës en faisant les Combinaisons : les unes sont inutiles à la fin qu'on se propose, & celles-là se doivent connoître pour les exclure, ou pour les éviter, afin qu'elles ne broüillent point. Des exemples feront comprendre ce qu'on veut faire remarquer ici. En même temps on verra comme les combinaisons sont d'usage dans choses mêmes qui semblent n'avoir aucune liaison avec les Mathematiques. On appelle *syllogisme* un raisonnement composé de trois propositions, qui sont nécessairement ou des propositions universelles affirmatives, comme est celle-ci. *Tous les hommes sont mortels* : ou des propositions universelles négatives : comme celle-ci. *Aucun homme n'est immortel* : ou ces propositions sont particulieres & affirmatives : *Comme il y a des hommes sçavans*. Ou enfin ces propositions sont particulieres négatives. *Il y a des hommes qui ne sont pas raisonnables*. On marque avec ces quatre voyelles *A*. *E*. *I*. O. la qualité de ces propositions. *A* marque une proposition universelle affirmative : *E* une proposition universelle négative. *I* une proposition particuliere affirmative. O une proposition particuliere négative. Or cette affirmation ou négation, universalité ou particularité des trois propositions dont un syllogisme est composé, est ce qu'on appelle *mode d'un syllogisme*, lequel mode se marque avec trois de ces quatre voyelles. Si ces propoſitions ſont toutes univerſelles affirmatives, ſon mode ſera *AAA*. Ainſi pour ſçavoir combien on peut faire de differens ſyllogiſmes, quant à cette qualité de leurs trois propoſitions, il faut voir en combien de manieres on peut combiner ces quatre voyelles *A. E. I, O.* prenant trois de ces voyelles à la fois, par exemple, ou *AAA AAE*, ou *AAI* ou *AAO*. Vous voyez devant vos yeux toutes ces Combinaiſons, & l'ordre que j'ai tenu.

1.	A a a.	17.	E e e.	33.	I i i.	49.	O o o.
2.	A e a.	18.	E a e.	34.	I a i.	50.	O a o.
3.	A i a.	19.	E i e.	35.	I e i.	51.	O e o.
4.	A o a.	20.	E o e.	36.	I o i.	52.	O i o.
5.	A e e.	21.	E a a.	37.	I a a.	53.	O a a.
6.	A i i.	22.	E i i.	38.	I e e.	54.	O e e.
7.	A o o.	23.	E o o.	39.	I o o.	55.	O i i.
8.	A a e.	24.	E e a.	40.	I i a.	56.	O o a.
9.	A a i.	25.	E e i.	41.	I i e.	57.	O o e.
10.	A a o.	26.	E e o.	42.	I i o.	58.	O o i.
11.	A e i.	27.	E a i.	43.	I a e.	59.	O a e.
12.	A e o.	28.	E a o.	44.	I a o.	60.	O a i.
13.	A i e.	29.	E i a.	45.	I e a.	61.	O e a.
14.	A i o.	30.	E i o.	46.	I e o	62.	O e i.
15.	A o e.	31.	E o a.	47.	I o a	63.	O i a.
16.	A o i.	32.	E o i.	48.	I o e.	64.	O i e.

J'ai ſuivi celui de l'Alphabet, & commençant par *A*, j'ai trouvé ſeize Combinaiſons, dans leſquelles *A* tient la premiere place; ainſi je vois que puiſqu'il y a quatre voyelles *A. E. I. O.* il doit y avoir quatre fois ſeize ou ſoixante quatre Combinaiſons. Il peut donc y avoir ſoixante-quatre differens ſyllogiſmes. C'eſt aux Philoſophes qui enſeignent l'art de raiſonner, d'examiner ſi tous ces ſoixante-quatre modes ſont bons. Ils établiſſent des régles, ſelon leſquelles par exemple on ne peut rien conclure de deux propoſitions négatives : ainſi ces modes *EEE*, *EOE* & ſemblables ne ſont pas concluans. De deux propoſitions particulieres on ne peut non plus rien conclure ; & jamais la derniere propoſition ne peut être plus étenduë que les premieres. Suivant ces régles & quelques autres, un Logicien peut marquer les ſyllogiſmes qui ſont bons ou mauvais, & & traiter avec la charté & l'exactitude des Mathematiques cette matiere.

Voyons la même choſe dans l'exemple ſuivant; & comment on doit exclure les combinaiſons inutiles au deſſein pour lequel on les fait. On demande en combien de manieres ſe peuvent combiner les ſept Planettes. La choſe ſeroit aiſée ſi c'étoit toutes leurs combinaiſons poſſibles qu'on cherchât. Déſignons premierement les ſept Planettes par les ſept premieres lettres de l'Alphabet. *a* marque le Soleil, *b* la Lune, ainſi de ſuite. Si on combine *a* avec lui-même & avec les autres lettres ſuivantes, cela fera ces ſept combinaiſons *aa*. *ab*. *ac*. *ad*. *ae*. *af*. *ag*. combinant de même chacune des ſept Planettes, cela fera ſept fois ſept, c'eſt-à-dire 49 combinaiſons. Si on combinoit *aa* premierement avec lui-même, *aaa*, *aab*, *aac*, & qu'on fit la même choſe des 49 combinaiſons précedente, on en trouveroit ſept fois quarante-neuf, c'eſt-à-dire 343 ; ce qui montre que ces combinaiſons ſont une progreſſion dont la raiſon eſt ſeptuple. Mais toutes ces combinaiſons ne ſont pas utiles, ſi l'on demande que la même Planette ne ſe trouve point deux fois dans une même combinaiſon, ou qu'on ne la combine point avec elle-même, qu'ainsi il faille exclure des combinaisons, qu'on cherche, ces combinaisons *aa. bb. cc. &c.* On peut aussi demander que celles qui ont les mêmes lettres ne soient comptées que pour une; que par exemple *ab* & *ba*, ne soient pas comptées pour deux differentes combinaisons, comme effectivement le Soleil & la Lune, & la Lune & le Soleil ne sont qu'une même chose. Alors le nombre des combinaisons sera bien plus petit; car en premier lieu il faudra exclure ces sept combinaisons, où une lettre est combinée avec elle même, comme *aa. bb. cc. &c.* Ainsi de 49 il en faut déja retrancher 7, reste 42. Or dans celles qui restent se trouvent encore *ab* & *ba*, *ac* & *ca*, *&c.* qui ne peuvent être prises que pour une combinaison, il en faut donc retrancher la moitié; ainsi de 42 il ne reste que 21 combinaisons des sept Planettes, les prenant deux à deux, selon les conditions proposées,

Voici la maniere d'exclure toutes les combinaisons qu'on regarde ici comme inutiles. Puisqu'on ne peut pas combiner chaque Planette avec elle-même, je ne dois combiner *a* la premiere qu'avec les six lettres suivantes; ce qui ne fait donc que six combinaisons. Venant à combiner *b*, comme cette lettre a déja été combinée avec *a*, je ne la puis combiner qu'avec les cinq dernieres lettres. Je ne ferai donc que cinq combinaisons differentes. Par la même raison la troisiéme lettre *c* ne peut être combinée qu'avec quatre, la quatriéme *d* qu'avec trois, la cinquiéme qu'avec deux, la sixiéme qu'avec une, la septiéme se trouve déja dans les combinaisons précedentes. Ainsi il n'y a d'utiles que ces combinaisons qui font cette progression.

÷ 6. 5. 4. 3. 2. 1.

La ſomme de cette progeſſion eſt 21.

Pour combiner les Planettes trois à trois, il faut combiner ces 21 combinaiſons trouvées ou 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1. Mais comme je ne puis pas combiner *a* avec ſoi-même, & qu'il ſe trouve dans les 6 premieres combinaiſons, je ne le combine qu'avec les combinaiſons ſuivantes, qui ſont 5 + 4 + 3 + 2 + 1, ce qui ne fait que 15 nouvelles combinaiſons. *b* ſe trouve auſſi dans ſix combinaiſons, ſçavoir *ab. cb. db. eb. fb. gb.* & dans ces cinq autres, ſçavoir *bc. bd. be, bf. bg.* Je n'en puis donc faire de nouvelles combinaiſons qu'avec 4 + 3 + 2 + 1, ce qui fait 10.

Par les mêmes raiſons je ne puis combiner *c* qu'avec 3 + 2 + 1, ce qui fait 6. & *d* qu'avec 2 + 1, & *e* qu'avec + 1. Ainſi ces combinaiſons des ſept Planettes priſes trois à trois ne font que 15 + 10 + 6 + 3 + 1; ce qui fait trente-cinq.

Par cette méthode on trouvera qu'on ne peut faire que 35 combinaiſons des ſept Planettes les prenant quatre à quatre. 21 ſi on les prenoit cinq à cinq. 7 ſi on les prend ſix a ſix; & une ſeule combinaiſon ſi on les prend toutes ſept; car dans cette ſeule combinaiſon *a b c d e f g* elles ſe trouvent toutes; ainſi il ne peut pas y avoir d'autres combinaiſons de ces ſept lettres. Toutes les combinaiſous des ſept Planettes deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on les prenne toutes ſept, ſont donc au nombre de 120, qui ſe pourroit trouver tout d'un coup par le moyen d'une progreſſion, ce qu'il faut voir, & ce qui prouvera ce que nous avons dit; qu'en faiſant les combinaiſons avec ordre, on découvre des progreſſions qui abregent l'operation.

Une ſeule choſe ne peut ſe prendre qu'une fois ſéparément de toute autre. Deux choſes comme *a* le Soleil, & *b* la Lune, ne ſe peuvent joindre que d'une maniere ; car *ab* & *ba* ne ſont pas deux conjonctions differentes. Si nous ajoûtons *c* une troiſiéme Planette ; ces trois Planettes *a.b.c.* pourront faire quatre conjonctions, *ab*, *ac*, *bc*, & cette quatriéme *abc*, qui comprend ces trois Planettes. Quatre Planettes peuvent faire ces onze conjonctions que voilà ; *ab. ac. ad. bc. bd. cd. abc. abd. acd. bcd. abcd.* Quand on prend les Planettes ſéparément, cela s'appelle leur disjonction. Or ſi on ajoûte au nombre de leurs conjonctions celui de leur disjonction : par exemple à celui de la conjonction de deux Planettes, qui eſt 1, ce nombre 2 de leur disjonction : de même qu'on ajoûte à 4, qui eſt le nombre des conjonctions de trois Planettes, celui de leur disjonction qui eſt 3 ; & à 11 celui de la conjonction de quatre Planettes celui de leur disjonction qui eſt 4, vous aurez ces nombres,

1. 3. 7. 15.

Ajoûtez-y l'unité, & viendra

2. 4. 8. 16.

Ces nombres ſont une progreſſion dans laquelle regne la raiſon double. Nous avons vû qu'on pourroit trouver 120 conjonctions des Planettes toutes differentes. Ajoûtez à ce nombre 120, leurs disjonctions, qui ſont 7, cela fera 127. Or ayant ôté l'unité de chacun des termes de cette progreſſion double.

∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.

viendront ces nombres

1. 3. 7. 15. 31, 63. 127.

X

Ainsi vous voyez que le septiéme terme de cette suite de nombres donne toutes les conjonctions & disjonctions possibles des sept Planettes.

Il semble que cela ne s'accorde pas avec ce que nous avons dit ci-dessus, qu'il y avoit 21 combinaisons des sept Planetes prises deux à deux, 35 quand elles sont prises trois à trois, &c. mais dans ces combinaisons nous les prenions toutes sept. Nous combinions par exemple *a* avec les six autres; au lieu que dans ces combinaisons dont le nombre est exprimé par ces nombres 1. 3. 7. 15. &c. on considere les Planettes en premier lieu, comme s'il n'y en avoit que deux; ensuite qu'il n'y en eût que trois. Mais de quelque maniere qu'on fasse ces combinaisons, toutes les conjonctions & disjonctions possibles des sept Planettes ou des sept choses font toûjours précisement 127. Nous avons trouvé 120 combinaisons; ajoûtez les sept disjonctions cela fait ce nombre 127.

Chapitre III.

Des changemens d'ordre.

Il est aussi utile de considerer comment on peut découvrir tous les changemens possibles d'un certain nombre de choses, par exemple en combien de differentes manieres on pourroit changer l'ordre de six personnes assises à une même table. Il ne faut point d'autres regles que celles que j'ai proposées pour les combinaisons.

1°. *Il faut commencer par examiner les changemens les plus simples.*

2°. Observer un ordre dans cet examen.

3°. Reconnoître s'il n'y a point quelque espece de proportion, laquelle étant trouvée, on puisse juger par les premiers changemens simples & faciles, de tous ceux qui sont plus composés.

Je me sers des Lettres de l'Alphabet, dont je suis l'ordre. Une seule lettre comme *A* ne peut pas recevoir de changement. Quand on la joint avec une seconde lettre, comme avec *B*, puisqu'on peut mettre *B* devant ou après *AB* ou *BA*, cela fait deux changemens ; ainsi deux lettres se peuvent changer en deux manieres. Si j'ajoûte une troisiéme lettre *C* : comme on peut mettre *C* dans trois places de *AB* ; sçavoir ou au commencement. *CAB*, ou au milieu *ACB*, ou à la fin, *ABC* ; & qu'on peut faire la même chose dans *BA*, plaçant *C* en trois endroits, ou au commencement, ou au milieu, ou à la fin, *CBA*, *BCA*, *BAC*, comme vous le voyez.

ABC, *BAC*, *CBA*,
ACB, *BCA*, *CBA*.

Je connois que je puis disposer trois lettres, & par consequent trois choses en six manieres. Si j'ajoûte *D*, une quatriéme lettre ; comme en chacun des six changemens, dont trois lettres sont capables, il y a quatre places où je puis mettre *D*, par exemple dans *ACB*, je puis mettre *D* en quatre endroits differents, écrivant ou *DACB*, ou *ADCB*, ou *ACDB*, ou *ACBD*. Si, dis-je, j'ajoûte une quatriéme lettre, ces 4 lettres, & partant 4 choses seront capables de 4 fois 6 differens changemens, c'est-à-dire, de 24 changemens. Il n'en faut pas davantage pour me faire appercevoir que cinq choses seront capables de 5 fois 24 changemens, c'est-à-dire, de 120 : Que multipliant 120 par 6, ce produit 720 ſera le nombre des changemens de 6 lettres : Et 5040, produit de 720 par 7, le nombre des changemens de 7 lettres: 40320, produit de 5040 par 8, le nombre des changemens de 8 letres : 362880 produit de 40320 par 9, le nombre des changemens de 9 lettres : Et qu'enfin 3628800 produit de 362880 par 10 eſt le nombre des changemens poſſibles de dix lettres, & par conſequent de dix hommes aſſis à une même table.

La regle générale c'eſt d'écrire les termes de la progreſſion naturelle. Chacun de ces termes marquera le nombre des choſes ou des lettres, dont on cherche les differens changemens. Sous cette progreſſion il faut ranger les continuels produits des termes de deſſus, comme vous le voyez.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	2.	6.	24.	120	720	5040.	40320.	362880.

Le produit des deux termes naturels 1 & 2, c'eſt 2; ce produit multiplié par le troiſiéme terme c'eſt 6 que j'écris ſous 3. ce 6 me fait connoître que trois choſes reçoivent 6 changemens. Je multiplie le produit 6 par 4, j'en écris le produit 24 ſous 4. Enſuite je multiplie 24 par 5, & j'écris 120 le produit ſous 5 ; je continuë de même: Je trouve par exemple que ſix choſes peuvent changer en 720 manieres differentes. Ainſi pour connoître de combien de changemens ſont capables 7 lettres, je n'ai qu'à multiplier 720 par 7, & le produit 5040 eſt le nombre de ces changemens.

Ceci peut ſervir à trouver tous les changemens poſſibles des lettres du nom d'une perſonne, de maniere qu'elles faſſent un autre nom qui ait un ſens obligeant ou ſatirique, ſelon qu'on veut loüer ou blâmer. C'eſt ce qu'on appelle faire des *Anagrammes* ; dont l'art ne conſiſte qu'à trouver tous les changemens poſſibles des lettres d'un nom. On les compte, & auſſi-tôt on connoît combien elles peuvent recevoir de differens changemens. Vous pourrez remarquer la difference qu'il y a entre les combinaiſons & changemens d'ordre. Proprement combiner, c'eſt un certain nombre de choſes étant donné, les prendre les unes après les autres, ou deux à deux ou trois à trois. Dans le changement d'ordre, on ne fait que changer la place des choſes qui ſont propoſées. Quand la même lettre ſe trouve pluſieurs fois dans un nom, on lui donne differentes figures, comme en ce nom *Jeſus*, où il y a deux *ſ*, il en faut faire une italique & l'autre romaine, ou l'autre majuſcule & l'autre petite, pour les diſtinguer. Ces cinq lettres reçoivent 120 changemens, ainſi on en peut faire autant de noms parmi leſquels on choiſit ceux qui ſignifient quelque choſe. Quand le nombre des choſes dont on cherche les changemens eſt grand, ce nombre eſt prodigieux ; par exemple celui des changemens des dames d'un damier, & des piéces d'un jeu d'échets. Qui le croiroit, s'il n'y en avoit démonſtration, que dix hommes aſſis à une même table peuvent changer de place en 3628800 manieres differentes.

On peut faire pluſieurs queſtions ſur le changement d'ordre ; par exemple celle-ci. En combien de manieres on peut changer l'ordre des mots de ce vers Latin.

Tot tibi ſunt dotes, virgo, quot ſidera cœlo.

de ſorte que ce ſoit toûjours un vers Latin. Pour entendre le détail de ce qu'on doit faire il faut avoir quelque connoiſſance de la poëſie Latine ; & je n'écris que pour des François. Ceux qui ſçavent les regles de cette poëſie, & qui garderont les trois regles que nous avons données pour les combinaiſons & les changemens d'ordre, trouveront aiſément en combien de manieres ce vers ſe peut changer ſans perdre ſa meſure ; ou de ſorte que ce ſoit toûjours un vers Latin, dont le cinquiéme pied ſoit comme il le doit, un *dactile*, & le ſixiéme un *ſpondée*. Ainſi comme dans ce vers, il n'y a que ces dactiles *ſidera* & *tot tibi* ou *ſunt tibi*, ou *quot tibi*, il faut que *ſidera* ou *tibi* ſe trouvent toûjours au cinquiéme pied.

Tot tibi ſunt dotes virgo quot ſidera cœlo.
Sidera quot cœlo tot dotes ſunt tibi virgo.

En changeant ainſi l'ordre de ces mots, on peut faire un nombre infini de differens vers dont chacun ne ſera composé que de ces mots. Mais dans les uns le dernier pied ſera *cœlo*, dans l'autre *virgo*; l'un aura au cinquiéme, *ſidera*, l'autre *tot tibi*. Tous auront quelque difference ; quelque ordre particulier. Le Pere Preſtet dans la premiere édition de ſes Elemens, compte 2196 changemens poſſibles des mots qui compoſent ce vers. Dans la ſeconde il en trouve 3376, & qu'ainſi de ce ſeul vers on en peut faire ce grand nombre de differens vers qui ſeront tous compoſez des mêmes mots, & qui ne differeront entr'eux que parce que ces mots ſeront differemment placez.

CHAPITRE IV.

Moyens de trouver une combinaison dont le rang est donné dans une suite de plusieurs combinaisons, ou la combinaison étant donnée, trouver son rang. Application de ces moyens à la periode Julienne.

CEs moyens sont utiles dans les occasions. Voyons-le dans l'application que nous en allons faire à la période Julienne. Cette periode est faite de la multiplication de ces trois cycles : du Solaire de 28 ans, du Lunaire de 19, & & de l'Indiction qui est une révolution de quinze années. Cette periode est une combinaison de ces trois cycles dont je marque les années avec des lettres que vous voyez. Je combine 1°. le cycle solaire avec le cycle Lunaire, combinant A avec a & avec toutes les 19 lettres du cycle Lunaire. Cela fait 19 combinaisons. Combinant ensuite B & toutes les 28 lettres du cycle Solaire avec les 19 du cycle Lunaire, cela fait vingt-huit fois dix-neuf combinaisons ; c'est-à-dire, 532 toutes differentes. Combinant ensuite ces 532 combinaisons avec les 15 lettres du cycle des Inductions, cela fait quinze fois cinq cens trente-deux, ou 7980 combinaisons differentes. On pourroit augmenter ce nombre de combinaisons si on comptoit les changemens d'ordre, comme seroient A a & a A & A a A : mais ce ne sont pas differentes choses non-plus que celles-ci K b *D* & b K *D* ou *D* b K. Car il est évident que dire le 10. du cycle Solaire, le second du cycle Lunaire, c'est la même chose, que si on commenſoit par le Lunaire, diſant le ſecond du cycle Lunaire, le 10. du Solaire.

Cycle Solaire.		*Cycle Lunaire.*		*Cycle des Indictions.*	
A	1	a	1	*A*	1
B	2	b	2	*B*	2
C	3	c	3	*C*	3
D	4	d	4	*D*	4
E	5	e	5	*E*	5
F	6	f	6	*F*	6
G	7	g	7	*G*	7
H	8	h	8	*H*	8
I	9	i	9	*I*	9
K	10	k	10	*K*	10
L	11	l	11	*L*	11
M	12	m	12	*M*	12
N	13	n	13	*N*	13
O	14	o	14	*O*	14
P	15	p	15	*P*	15
Q	16	q	16		
R	17	r	17		
S	18	s	18		
T	19	t	19		
V	20				
X	21				
Y	22				
Z	23				
β	24				
γ	25				
δ	26				
ζ	27				
θ	28				

La periode Julienne eſt une ſuite de 7980 combinaiſons differentes. Chacun de ces trois cycles étant revolu, il recommence. Par exemple, l'année 28. du cycle Solaire, est suivie de la premiere année du même cycle. Ainsi du cycle Lunaire & du cycle des Indictions. Ces trois cycles commencent & finissent sans que dans toute la periode, qui est de 7980 combinaisons, deux années ayent les mêmes cycles.

QUESTION.

Une année des 7980 de la periode Julienne étant donnée, trouver quels sont les cycles de cette année; & par consequent la combinaison caracteristique de cette année.

IL est évident que rejettant autant qu'on le peut un cycle entier de l'année proposée, ce qui reste est l'année du cycle qu'on cherche. Si par exemple, de l'année 4714 de la periode Julienne, on rejette autant qu'on le peut le cycle Solaire 28, ce nombre 10 qui restera, sera l'an du cycle Solaire de cette année 4714; puisqu'après 28 années, le cycle Solaire recommence toûjours.

Or pour rejetter un cycle autant qu'on le peut, & trouver ce qui reste, il faut diviser l'année proposée par le cycle entier. Ce n'est pas le quotient de cette division qu'on cherche. Mais c'est parce que s'il ne reste rien, la division faite, on connoît que c'est la derniere année du cycle entier. S'il reste quelque chose; ce reste est l'année particuliere du cycle entier. Ainsi pour trouver les trois cycles de l'année 4714. il en faut rejetter les cycles 28. 19. & 15. ce qui se fait divisant ce nombre 4714. par ces cycles 1°, par 28. pour connoître quel étoit le cycle Solaire de cette année 4714. La division faite, le reste qui sera 10, donnera ce cycle; de même pour connoître quel sera le cycle Lunaire de la même année, il faut diviser 4714 par 19, le reste 2 sera le cycle Lunaire de cette année; enfin en le divisant par 15, le reste 4 marquera que l'Indiction étoit 4. Prenant ensuite les lettres qui sont vis-à-vis des années 10. 2. 4. en chaque cycle, on trouvera cette combinaison *KbD*, qui ne se trouve que dans cette année 4714.

La premiere année de l'Ere Chrétienne a ces mêmes cycles; partant cette premiere année convient avec l'année 4714. de la periode Julienne, qui est ainsi nommée, parce qu'on la joint avec nos années qui ont été reglées par Jules Cesar; d'où elles ont été appellées les années Juliennes. On trouve ainsi les cycles de toutes les autres années de la periode Julienne, qui seront données.

On pourroit aussi proposer cette question, les années de chaque cycle étant donnéés trouver l'année de la periode Julienne à laquelle ils conviennent. Par exemple on suppose qu'on sçache qu'une certaine année avoit 10 de cycle Solaire, 2 de cycle Lunaire. & 4 d'Indiction, on demande quelle est l'année de la periode Julienne à laquelle conviennent ces trois cycles. Ce problême se trouve resolu dans plusieurs Livres de Mathematiques: Comme il a quelque difficulté, & que mon but n'est que de donner des Elemens faciles, je n'en parlerai point ici. Ceux qui auront bien compris ces Elemens auront une introduction pour entendre des Livres plus difficiles que le mien, & pénetrer s'ils le souhaitent plus avant dans des sciences qui méritent fort d'être cultivées.

FIN.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre, à nos amez & feaux Conseilles les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, Salut. Notre bien amé le Pere Lamy, Prêtre de l'Oratoire, nous ayant fait rémontrer que depuis plusieurs années il se seroit appliqué à composer plusieurs Ouvrages pour le Public sous le titre d'*Elemens de Geometrie, Mathematiques & Mecanique; Démonstrations ou preuves évidentes de la verité & de la sainteté de la Morale Chrétienne; Réflexions sur l'Art Poëtique, Rhetoriqus, ou l'Art de parler; Traité Historique de l'ancienne Pâque des Juifs:* Lesquels Ouvrages il désireroit faire imprimer; mais comme il ne le peut faire sans s'engager à une très-grande dépense, il nous auroit très-humblement fait suplier de lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Pere Lamy, & reconnoître son zele & son application à nous procurer des Ouvrages aussi utiles pour le Public & pour l'avancement des sciences, & voulant par ce moyen le dédommager des grands frais qu'il est obligé de faire pour l'impression desdits Livres ci-dessus expliquez; Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits Livres intitulez, *Elemens de Geometrie, Mathematique, & Mecanique; Démonstration ou preuues évidentes de la verité & de la sainteté de la Morale Chrétienne; Réflexion sur l'Art Poetique, Rethorique, ou l'Art de parler; Traité Historique de l'ancienne Pâque des Juifs*, en tels volumes, formes, marges, caracteres, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de dix années consecutives, à compter du jour de la datte desdites Présentes; faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression etrangere dans aucun lieu de notre obéïssance; & à tous Imprimeurs, Libraires & autres, d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Livres ci-dessus énoncez, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque pretexte que ce soit d'augmentation, correction, changemens de titre, tant en grand qu'en petit ou autre.

ment, sans permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts, à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la datte d'icelle; que l'impression desdits Livres sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les exposer en vente, il en sera mis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier Chancelier de France le sieur Voisin, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Présentes, du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desdits Livres, soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes réquis & nécessaires sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. DONNE' à Versailles le douziéme jour du mois de Decembre l'an de grace mil sept cent quatorze, & de notre Regne le soixante-douze. Par le Roy en son Conseil, Signé, FOUQUET.

Il est ordonné par l'Edit de sa Majesté de 1686. & Arrêt de son Conseil, que les Livres dont l'impression se permet par chacun des Privileges, ne seront vendus que par un Libraire ou Imprimeur.

Registré sur le Registre n°. 3. de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page 890. n°. 1117. conformement aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du 13. Août 1703. A Paris le 19. Decembre 1714.

ROBUSTEL, Syndic.

De l'Imprimerie de G. F. QUILLAU, à l'Annonciation.