ESSAIS D'ANALYSE.

Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

Fungar vice cotis, acutum
Reddere quæ ferrum valet, exsors ipsa secandi.
HOR. *Art. poët.*

~~TOME PREMIER.~~ un volume

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT.

M. DCC. LXVIII.
Avec Approbation & Permission.

PRÉFACE.

PRÉFACE.

J'AI cru qu'en réuniſſant ſous un même titre & dans un même volume ce que j'ai publié depuis trois ans, il étoit à propos de développer avec quelque étendue l'objet de mon travail, & ce que j'ai exécuté du plan que je m'étois formé.

Il n'eſt queſtion dans ce que j'ai donné que de Calcul intégral; & ſans m'arrêter à aucune méthode, ni à aucun cas particulier, je ne l'ai enviſagé que dans ſa plus grande généralité, afin d'en approfondir mieux la nature, de parvenir à des méthodes auxquelles rien ne pût échapper, & de donner aux Géometres un moyen quelquefois long, mais toujours sûr, de parvenir à la ſolution de tous les problêmes particuliers qui en dépendent. Les ſucceſſeurs de Newton ont enrichi l'analyſe de l'Infini d'un grand nombre de méthodes ingénieuſes & profondes qu'ils ont appliquées avec ſuccès à des problêmes très compliqués, mais le Calcul en lui-même a été très rarement l'objet de leurs recherches. Jean Bernoulli a ajouté aux découvertes de Newton celle du Calcul des fonctions logarithmiques & exponentielles: on doit à M. d'Alembert le Calcul des différences partielles, calcul ſi important par ſes uſages dans la théorie du mouvement des fluides ou des corps flexibles. Les découvertes de MM. Fontaine & Euler ſur les équations de condition, & différentes remarques importantes répandues dans leurs Ouvrages, étoient encore pour moi des ſecours bien précieux. C'eſt de-là que je ſuis parti & que j'ai enviſagé le Calcul intégral dans les trois hipotheſes des différences évanouiſſantes, des différences finies & des différences partielles. L'application des ſuites infinies ou indéfinies à l'integration, les méthodes d'approximation, & l'uſage de toutes ces méthodes pour les problêmes de Dynamique ont été enſuite l'objet de mes réflexions : en voici le réſultat.

Une équation différentielle étant donnée, on doit examiner ſi elle a une intégrale, chercher enſuite cette intégrale, en diſcuter la nature ; enfin comme l'intégration introduit des arbitraires, il faut les déterminer. Dans le cas où les différences ſont évanouiſſantes, il faut ſavoir d'abord quand une fonction différentielle d'un nombre quelconque de variables & d'un ordre quelconque, eſt une différentielle exacte d'une fonction d'un ordre immédiatement inférieur ou ſimplement inférieur, ou finie. Je recherche donc les équations de condition qui doivent avoir lieu dans ce cas, & je trouve

Calcul intégral, pag. 5 & ſuiv.

qu'elles se peuvent donner sous une forme assez simple, & qui n'exige point, lorsqu'il n'est pas question d'une intégrale immédiatement inférieure, qu'on connoisse les intégrales intermédiaires. Je tire de ces conditions une maniere de représenter une fonction qui est une différentielle exacte sous une forme qui la rende intégrable par la méthode des quadratures appliquées à un nombre quelconque de variables. Cette méthode réduit immédiatement à une seule intégration celle des différentielles exactes de quantités d'un ordre moins élevé de plusieurs unités, toutes les fois qu'aucune différence n'est supposée constante. En effet dans ce cas les intégrales intermédiaires sont algébriques; mais si une différence est supposée constante, alors les intégrales intermédiaires peuvent contenir des fonctions logarithmiques. Soit dx cette différence, V la fonction proposée, B son intégrale, $\frac{dV}{dx} = N$, on aura $\frac{dB}{dx} = \int . N$; & appellant B' la seconde intégrale, $\frac{dB'}{dx} = \int\int . N$, & ainsi de suite, où $\int . N$ ne contient point de transcendante, sans quoi V en contiendroit; mais $\int . \int . N$ peut en contenir. Au reste, on peut trouver $\int . N$ sans intégration. Prenant en effet $V = dB$, retranchant de V les

Calcul intégral, pag. 21 & 22.

valeurs de $\frac{dB}{dy}dy$, $\frac{dB}{dp'}dp'$, $\frac{dB}{dq'}dq'$, &c. qui ſont données, & diviſant le reſte par dx, on aura d'un côté $\frac{dB}{dx}$, & de l'autre ſa valeur exprimée en V, & conſéquemment donnée par l'hypotheſe.

Calcul intégral, pag. 22 & ſuiv.

Connoiſſant une fois les équations de condition pour les fonctions qui ſont des différentielles exactes, il m'eſt aiſé de connoître celles que je dois avoir pour qu'une équation différentielle propoſée ait une intégrale, ou d'un ordre immédiatement inférieur, ou fini. En effet, il n'y a aucune fonction différentielle, qui, multipliée par une autre fonction, ne devienne une différentielle exacte, la fonction qui multiplie pouvant être une différence quelconque diviſée par la propoſée, & dont la propoſée eſt faite égale à zéro; cette fonction devient infinie, à moins que le numérateur, qui eſt une différentielle exacte, ne devienne auſſi zéro: donc toutes les fois qu'une différence exacte eſt nulle en même tems que la propoſée, on peut ſuppoſer que le facteur ne devient point infini lorſque la propoſée égale zéro; donc en ce cas on peut, dans les équations de condition identiques, ſuppoſer que tous les termes qui ſont multipliés par la propoſée, & qui contiennent des fonctions dépendantes du facteur, ſont nuls lorſque la fonction propoſée eſt égalée à zéro. Mais si on a une équation identique, & qu'on fasse une supposition dans quelques uns des termes, il est clair que dans la même hypothese le reste devient nul; donc ce qui reste de l'équation de condition est nul lorsque la proposée l'est, ou bien est identique : ces principes me conduisent à des équations de condition qui n'exigent pour aucun cas la connoissance des intégrales. J'ai dit que lorsqu'une équation étoit possible, le numérateur du facteur pouvoit être une différentielle exacte qui devient nulle en même tems que la proposée; & cela peut arriver de plusieurs manieres, ou immédiatement, lorsque la valeur de la plus haute différence prise de la proposée rend nulle cette différentielle exacte, ou bien lorsque ces deux fonctions deviennent ensemble égales à zéro; en supposant nulle une fonction d'un ordre inférieur, l'équation différentielle n'a alors qu'une intégrale incomplette qui ne contient point d'arbitraires, & qui est cette même fonction dont je viens de parler : dans ce cas les équations de condition se trouvent avoir lieu en vertu de la supposition de cette fonction égale à zéro, ce qui donne moyen de le distinguer des autres, & de trouver cette fonction même par la comparaison des équations de condition avec la proposée.

Calcul intégral, pag. 27.

Le cas des solutions incomplettes est le seul où l'on puisse sans intégration résoudre une équation différentielle, car dans tout autre il faut que la solution contienne des arbitraires & quelquefois des transcendantes. J'observerai encore que la supposition de la proposée égale à zéro dans l'équation de condition, est d'autant plus nécessaire, que si je cherche immédiatement les valeurs des différences partielles du facteur, & que je les trouve, ce qu'au-delà du premier ordre je ne crois pas possible en général, j'aurai le même résultat que par ma méthode, si par hasard elles sont finies; mais elles seront naturellement, ce me semble $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire, auront une valeur indéterminée dans une infinité de cas. Je crois être le premier qui ai résolu ce problême, du moins je n'en connois aucune autre solution que la mienne.

A l'aide des principes que j'établis, je démontre analytiquement que toute équation du premier ordre entre deux variables a une solution complette; que toute équation d'un ordre quelconque entre deux variables ou une différence, est supposée constante & généralement intégrable.

Calcul intégral, pag. 29 & 33.

Lorsqu'on sait qu'une équation admet une solution générale, il est question de la trouver, & la solution générale de ce problême se doit naturellement tirer de la nature de la différentiation. Il eſt aiſé de voir d'abord que cette opération ne peut faire diſparoître que des conſtantes, & qu'on retrouve dans la différentielle les mêmes fonctions que dans l'intégrale, à moins qu'une fonction tranſcendante n'ait une différentielle algébrique, ou une différentielle qui ne contienne point de nouvelle tranſcendante. On trouve pour le premier cas une ſuite indéfinie de logarithmes à laquelle on peut ajouter une conſtante qui reſte arbitraire ; & pour le ſecond on trouve une exponentielle qui a pour expoſant une fonction comme la précédente, plus une fonction algébrique, & c'eſt la même conſtante qui reſte arbitraire ; en ſorte que dans le premier cas on a la ſomme d'un nombre indéfini de logarithmes ; & dans le ſecond le produit d'un nombre indéfini d'exponentielles & d'interſcendantes.

Calcul intégral, pag. 37, 38 : & voyez l'*Errata* général joint à cette Préface.

On pourroit prouver qu'une telle fonction logarithmique eſt la ſeule dont la différence ſoit algébrique, par la théorie de l'intégration des fonctions rationnelles qu'ont donnée Jean Bernoulli & M. d'Alembert. La même choſe ſuit également de la nature de la queſtion : en effet, ſi on conſidere une fonction tranſcendante indépendamment de toute ſuppoſition, elle ne peut être qu'une fonction ſuſceptible d'une valeur réelle, qui ne ſoit point donnée par une équation algébrique, & qui puiſſe contenir o ou ∞ ſans être o ni ∞, ou des expoſans abſolument indéterminés. Cela poſé, ſi on cherche les formes que peut avoir une telle fonction qui ſoit ſimple, & qu'on les veuille aſſujettir à cette condition, on ne trouve que $\frac{x^o}{o} + \frac{m}{o}$, fonction qu'on ſait être un logarithme. Quant au ſecond cas, on prouveroit également que la fonction que j'ai indiquée eſt la ſeule qui puiſſe convenir : en effet, ſoit cette tranſcendante une fonction de X que j'appelle y, j'aurai par l'hypotheſe y donné par une équation du premier ordre en y, dy & dX, dX étant algébrique : donc X ne peut contenir que des fonctions logarithmiques où entre y : donc y ne peut contenir que e^X.

Lettre à M. d'Alembert, N°. III.

On peut aux fonctions tranſcendantes dont je parle ici en ſubſtituer qui naiſſent de la conſidération du cercle ; en effet, la fonction logarithmique peut être regardée comme la ſomme d'un nombre indéfini d'angles dont les coſinus ſoient des fonctions algébriques, & qui ſoient multipliées par des coefficiens conſtans : & la ſeconde eſpece de fonction eſt une exponentielle dont une pareille fonction eſt l'expoſant, c'eſt-à-dire, à cauſe de l'expreſſion des coſinus en exponentielles, le coſinus d'une ſuite

ſuite d'angles comme ci-deſſus, plus un angle égal à une fonction algébrique. Indépendamment de l'utilité dont peut être le changement, lorſque des tranſcendantes ſe préſentent compoſées d'imaginaires, j'en tire des conſéquences utiles ſur la forme des intégrales regardées comme repréſentant des courbes. On peut remarquer encore qu'il ſuit de-là qu'il n'y a que deux lignes de nature différente, la droite & la circulaire; & qu'il arrive préciſément que les tranſcendantes, qui analytiquement ont une expreſſion fauſſe, ſe trouvent en avoir une vraie géométriquement, & que celles qui ne ſont pas conſtructibles par le cercle ſe trouvent l'être par l'hyperbole. Si on conſidere une équation du premier ordre, les deux claſſes rentrent l'une dans l'autre; mais ſi on conſidere les ordres ſupérieurs, & qu'on ſuppoſe les tranſcendantes ſans différences, alors il y en aura un nombre égal à l'expoſant de l'ordre de l'équation, ce qui, appellant n cet expoſant, donne un nombre 2^{n-1} de formes différentes. Dans mon Calcul intégral j'ai ſuppoſé un nombre 3^{n-1} de formes, parceque je diſtinguois la forme interſcendante de la forme exponentielle : mais je crois cette nouvelle diviſion préférable, plus commode dans la pratique & plus naturelle. Ce

Calcul intégral, p. 41.

que je dis au même endroit ſur la maniere dont ſont compoſées ces tranſcendantes pour les différens ordres, ſuffit pour montrer de quelle maniere peut être formée l'intégrale finie d'une équation différentielle d'un ordre quelconque, & ce que les différenciations ſucceſſives peuvent faire évanouir des fonctions qui ſe trouvoient originairement dans l'intégrale, & dont les différences ſont confondues dans la différentielle.

Calcul intégral, p. 38 & ſuiv.

Après avoir déterminé ce qui diſtingue entre elles les équations intégrales des différens ordres, j'examine chaque ordre en particulier, & ce qui naît du différent dégré où peuvent monter les différences dans l'équation miſe ſous une forme rationnelle. Pour le premier ordre, il ne peut ſe trouver dans l'intégrale de radicaux plus élevés que ceux du dégré où montent les différences; & les radicaux de ce dégré ne peuvent ſe trouver encore dans la fonction tranſcendante ou logarithmique, ſans être la racine d'une même équation algébrique de cet ordre : la ſomme enfin de tous les expoſans de ces radicaux, s'ils ſont moins élevés, doit égaler l'expoſant de ce dégré. Pour les ordres ſupérieurs, il ne peut ſe trouver dans la tranſcendante de la premiere intégrale, ni dans la fonction différentielle algébrique, de radicaux plus élevés que l'expoſant

Calcul intégral, p. 44 & ſuiv.

Calcul intégral, pag. 50, 51, &c. & voyez l'*Errata* déja cité.

de la plus haute différence : il ne peut non plus y entrer dans la ſeconde intégrale, de radicaux plus élevés que l'expoſant de la plus haute différence de la premiere, diviſé par celui du radical qui entre dans la premiere tranſcendante, & ainſi de ſuite. Je paſſe de-là à examiner en particulier les équations du premier ordre ſans radicaux ; & je trouve, par un procédé très ſimple, les formes générales d'intégrales qui les peuvent produire : mais il peut arriver que les formes générales d'intégrales pour un dégré, donnent des équations différentielles d'un dégré inférieur ; & cela, ſoit parceque les coefficiens des rangs ſupérieurs deviennent nuls tous à la fois, ſoit parcequ'ils ſont tels que la propoſée ait un facteur. Cet abaiſſement n'a lieu de la premiere maniere, que juſqu'à un certain point ; mais celui de la ſeconde eſt indéfini. C'eſt à M. de la Grange que je dois cette remarque. Cela poſé, ſi l'on veut conſtruire une Table d'intégrales, il faut aux formes générales, pour chaque cas, ajouter par ordre ces nouvelles intégrales, que, pour le cas indéfini, il faut mettre ſous une forme indéfinie ; ce qui ſera d'autant moins difficile, qu'il y a lieu de croire que, pour chaque cas, le nombre des fonctions logarithmiques eſt fixé. Je penſe auſſi que le nombre des formes pour les intégrales purement algébriques

Calcul intégral, pag. 53 & ſuivantes. Voy. auſſi l'*errata* cité.

Eclairciſſement ſur le Calcul intégral, joint au Problême des trois Corps, pag. 68 & ſuivantes.

Eclairciſſement, p. 75.

n'eſt pas indéfini ; mais je n'en ai aucune preuve concluante. On parviendra auſſi par-là à trouver pour chaque dégré l'intégrale de la différentielle, les coefficiens étant quelconques ; mais cette intégrale aura une forme fautive dans les cas particuliers où l'intégrale doit être plus élevée. Ces recherches entraînent tant d'embarras, ſur-tout ſi (ce que je ne crois pas, quoique le contraire ne ſoit pas démontré) il arrivoit que le nombre des logarithmiques ne fût point déterminé pour chaque cas, que j'ai cru devoir chercher quelque autre moyen général de trouver l'intégrale d'une équation propoſée. Et d'abord, ſoit cette équation du premier ordre & ſans radicaux ; il eſt clair que, la multipliant par une fonction rationnelle qui ait un numérateur & un dénominateur indéfini, elle devient une différentielle exacte : or, dans le cas des différentielles exactes, le dégré où monte naturellement l'équation différentielle, n'eſt aſſujetti qu'à l'abaiſſement de la premiere eſpece, qui n'eſt pas indéfinie ; & par conſéquent le nombre des formes d'intégrales générales pour un nombre quelconque de variables, eſt alors, pour chaque équation, fini & déterminé ; & l'on trouvera, en les eſſayant, celle qui convient.

Eclairciſſement, p. 74.

Eclairciſſement, pag. 76 & 77.

Si l'équation contient un ou pluſieurs radicaux, je la multiplie par des ſuites où ces radicaux entrent, comme les autres variables, & j'en détermine les coefficiens, pour que la propoſée ſoit une différentielle exacte. Je regarde enſuite ces radicaux comme de nouvelles variables; & à cauſe que leur différence eſt une fonction rationnelle des variables de leurs différences, & de la nouvelle variable égale au radical, j'ajoute à l'équation une fonction indéfinie, multipliée par la différence de cette nouvelle variable, moins la même fonction mutipliée par ſa valeur; je détermine les coefficiens, en ſuppoſant que la propoſée ſoit une différentielle exacte de toutes ces variables, ce qui doit néceſſairement avoir lieu: par-là je réduis la propoſée à une équation ſans radicaux entre pluſieurs variables, qui s'integre par la méthode que je viens d'expoſer. On auroit pu, avant de chercher le facteur, ſubſtituer les ſuites qui font diſparoître les radicaux, les déterminer d'après la condition que la propoſée ſoit poſſible, les nouvelles variables étant regardées comme telles: alors on auroit une équation ſans radicaux, qu'il faudroit enſuite rendre une différentielle exacte. Au reſte, un radical qui contiendroit ſous lui d'autres radicaux, peut ête ici traité comme un radical ſimple.

Eclairciſſement, pag. 78 & 79.

Paſſant aux équations des ordres plus élevés, il

Calcul intégral, pag. 33. faut remarquer qu'elles peuvent être telles qu'aucune des différences ne ſoit ſuppoſée conſtante, ou qu'une le ſoit. Dans le premier cas, l'arbitraire peut être ou une conſtante finie, ou une conſtante finie multipliée par une différentielle quelconque, qu'on ſuppoſe conſtante. Dans le ſecond, elle eſt une conſtante finie, ou une conſtante finie multipliée par la différentielle conſtante. Dans le premier, les intégrations ſucceſſives peuvent introduire une nouvelle variable dans l'intégrale; mais cela n'a point lieu dans le ſecond, & il s'y trouve ſeulement des fonctions ſemblables de la variable dont la différence y eſt ſuppoſée conſtante : cependant, la propoſée ayant une intégrale exacte, on peut, pour le premier cas, ſuppoſer conſtante une des différentielles, intégrer en conſéquence; & l'intégrale ſera la même que celle de la propoſée, à cela près, qu'aux fonctions de la variable dont la différence eſt conſtante, il faut ſubſtituer des fonctions ſemblables d'une variable quelconque, dans les termes qui ſont nés de l'intégration par l'addition des arbitraires. Eclairciſſement, pag. 77 & 78. Si donc j'ai une équation à intégrer, d'un ordre quelconque, je la mets ſous une forme telle que les plus hautes différences ne montent qu'au premier dégré; & regardant les différences diviſées par la différence conſtante, comme de nouvelles variables, ce qui m'eſt permis, je cherche à la rendre une différentielle exacte, en la multipliant par une fonction rationnelle indéfinie de toutes les variables, dont je détermine les coefficiens par les équations de condition que l'on a pour ce cas : je la mets enſuite dans la forme qu'elle doit avoir pour être intégrée par rapport aux différences regardées comme de nouvelles variables; & alors elle eſt dans le cas des équations du premier ordre, & s'integre de même. Il faut obſerver que les fonctions irrationnelles qui contiennent les variables de l'équation & leurs différences, doivent entrer dans la ſuite indéfinie, de même que ces variables & leurs différences, & qu'on réduira la propoſée à n'avoir plus que des fonctions rationnelles, par la méthode que j'ai indiquée ci-deſſus. En regardant les différences comme de nouvelles variables, il eſt aiſé de s'aſſurer, 1°. que la premiere équation intégrale de l'ordre inférieur d'une unité, donne une valeur algébrique de la tranſcendante qui y entre; & que ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde intégrale de l'ordre inférieur de deux unités, elle ne contient plus qu'une tranſcendante; & que mettant dans la troiſieme intégrale les valeurs algébriques des deux tranſcendantes que donnent les deux premieres, il n'en reſtera plus qu'une ſeule, &

Calcul intégral, pag. 43. Eclaircissement, pag. 77 & 78.

ainsi à l'infini; de sorte qu'on a autant d'équations de l'ordre immédiatement inférieur, toutes intégrales de la proposée, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de différences, & qu'on peut les supposer toutes de la même forme : 2°. que ces équations étant supposées toutes connues, on en peut tirer la vraie intégrale de la proposée, parce-qu'il y en a une dans laquelle la transcendante est finie, & que prenant de celle-là la valeur de la plus haute différence, & substituant dans toutes, on en trouve encore une où la transcendante est aussi sans différence, & ainsi de suite; & il en sera de même des constantes. 3°. La suite que rend la proposée différentielle exacte, aura donc un pareil nombre de valeurs; & les trouvant toutes successivement, & intégrant chaque équation qui en résulte, comme je l'ai dit ci-dessus, on aura l'intégrale cherchée. Au reste, les termes qui ont des exposans indéterminés, les transcendantes qui se trouvent dans la proposée, se traiteront précisément comme les radicaux, & on en réduira également l'intégration à celle d'une équation rationnelle du premier ordre.

Calcul intégral, pag. 67 & suiv.

M. Euler a remarqué qu'une équation différentielle avoit quelquefois certaines solutions particulieres qui ne se trouvoient pas dans l'intégrale générale. J'indique le moyen de les trouver. Il consiste à produire

duire la proposée par la différenciation de son intégrale, & à égaler à zéro tous les facteurs finis, ou d'un ordre moindre, par lesquels il a fallu diviser les différences, afin qu'elles donnassent la proposée. Toutes ces équations, en effet, la résolvent, & ne doivent point entrer dans l'expression de l'intégrale générale. Telle est la méthode d'intégrer que je présente aux Géometres : elle est absolument générale, &, si je ne me trompe, aussi simple que le permet la nature de ce calcul; il ne faut d'ailleurs, pour s'en servir d'après les formules que j'ai développées dans mes Ouvrages, que les connoissances les plus élémentaires du Calcul de l'infini : je crois même que si l'on avoit à chercher l'intégrale d'une équation tant soit peu compliquée, le procédé de cette méthode seroit souvent plus court & plus sûr que celui des méthodes indirectes qu'on pouvoit choisir.

On peut, en attendant la construction des Tables nécessaires pour se servir de cette méthode, employer celle des fractions rationnelles, en observant seulement qu'il faut répéter l'opération autant de fois qu'il y a de variables, les ajouter ensemble, en ne prenant qu'une seule fois les termes qu'elles ont communs. Cette méthode se trouve exposée dans le Calcul intégral de M. de Bougainville, seconde Partie.

On voit que, pour rendre la méthode générale, il faut connoître, 1°. les équations de condition pour tous les cas: 2°. le Théoreme de la Remarque II du Calcul intégral, page 21: 3°. le nombre & la nature des transcendantes qui peuvent entrer dans une intégrale, & la maniere dont on en peut tirer les différentes intégrales de l'ordre inférieur qui appartiennent à chaque équation: sans cette connoissance, on ne seroit jamais sûr d'intégrer; car on ne peut savoir, sans connoître l'intégrale, si une équation différentielle en a une algébrique; & une méthode qui n'enseigneroit qu'à trouver ces intégrales, ne seroit presque d'aucun usage: 4°. la maniere de rappeller les transcendantes, les exposans indéterminés & les radicaux à une forme rationnelle, du moins pour les ordres supérieurs. Mais cette derniere connoissance étoit moins indispensable. Je crois n'avoir été précédé par personne dans les méthodes que je propose pour tous ces points, non plus que dans la construction des Tables, pour lesquelles je dois à M. de la Grange de m'avoir fait appercevoir des corrections qui y étoient nécessaires.

Eclaircissement, pag. 68 & suiv.

Lorsque l'on a une équation finie & algébrique, on en peut toujours déduire une des coordonnées égale à une fonction algébrique des autres ; & il ne faut pour cela que résoudre une équation algébrique à une variable, ce qui se peut en général : on peut même, par quelques observations assez simples, voir quelles formes conviennent à ces équations pour les différens dégrés, s'assurer que le nombre en est fini, & trouver ensuite quelle est celle qui convient, en les essayant successivement. Il n'en est pas de même des équations finies où il entre des transcendantes qui contiennent toutes les variables, toutes les fois qu'elles ne peuvent se rappeller à une équation algébrique, ou qu'on ne peut faire ensorte, en transformant les transcendantes, qu'une des variables ne s'y trouve plus. Si l'on vouloit que réciproquement on eût l'une en l'autre, il faudroit que cette opération pût s'exécuter pour chaque variable. Il suit de-là que les équations intégrales d'une differentielle donnée sont de deux sortes : on peut tirer des unes la valeur d'une des coordonnées égale à une fonction des autres ; cela est impossible dans les autres. Ces deux cas se peuvent distinguer par des équations de condition d'une espece particuliere ; & j'indique la maniere dont il faudroit s'y prendre pour y parvenir. Ces équations sont à l'égard des équations absurdes, ce

Problême dec 3 Corps, p. 42 & suiv.

Lettre à M. d'Alembert, N°. V.

Problême des 3 Corps, pag. 44, 45.

Problême des 3 Corps, pag. 55, 56.

Lettre à M. d'Alembert, N°. II.

que ſont à l'égard des imaginaires les fonctions irrationnelles ou tranſcendantes ; c'eſt-à-dire qu'on peut toujours conſtruire ces équations, du moins par un mouvement continu ; qu'on peut même trouver par approximation leur valeur, & que cette valeur ne doit pas même contenir plus de tranſcendantes que l'intégrale inſoluble qui y répond. J'examine auſſi la méthode de ſéparer les indéterminées par des ſubſtitutions. Je trouve qu'elle eſt générale en elle-même ; que les réſultats où elle conduit, donnent des équations ſéparées, dont la conſtruction une fois ſuppoſée, conduit à la poſſibilité de la conſtruction des équations différentielles qui ne ſont point abſurdes. De l'abſurdité d'une équation différentielle, on n'a point droit de conclure l'impoſſibilité du problême qui y répond, parcequ'en général cela peut ſimplement ſignifier que le problême eſt plus que déterminé, & qu'il faut avoir encore une nouvelle équation ; ou bien, ſi la propoſée eſt d'un ordre ſupérieur, & qu'il n'y ait aucune différence conſtante, qu'il faut avoir une équation, toujours poſſible, entre une des variables, & une autre quelconque, dont la différentielle ſoit conſtante, & qui ne ſe trouve point dans la propoſée.

Lettre à M. d'Alembert, N°. II.

Lettre à M. d'Alembert, N°. II.

Lettre à M. d'Alembert, N°. IV.

Si une équation différentielle eſt telle que l'on peut tirer de ſon intégrale *y* égal à une fonction de x, lorſqu'elle eſt entre ces deux variables, on peut rechercher quelle eſt cette fonction de x, qui, ſubſtituée dans l'équation propoſée, peut la rendre identique, en déterminant ſeulement ſes coefficiens. Il eſt clair qu'une telle fonction doit être repréſentée par une ſuite indéfinie, qui s'arrête à un certain terme. Je trouve la forme générale qu'il faut donner à cette ſuite pour un ordre donné, parceque je trouve une maniere de mettre les différentes fonctions tranſcendantes ſous une forme ſemblable, qui ne differe d'une forme algébrique qu'en ce que les coefficiens ou les expoſans qui ſont dans l'une finis ou rationnels, ſe trouvent dans l'autre irrationnels & infinis. Je conſidere ici les tranſcendantes, ſoit comme des logarithmes & des exponentielles ou interſcendantes, ſoit comme des angles & des coſinus : & comme cette maniere de chercher l'intégrale pourroit être utile, & qu'elle ſuppoſe ici la ſolution des équations déterminées de tous les dégrés (problême très compliqué), j'indique le moyen de s'en paſſer, du moins pour trouver l'intégrale, ſi ce n'eſt pour la détermination des coefficiens. Soient en général x, y, z, les variables qui doivent entrer dans une tranſcendante qu'une différenciation fait évanouir, on a $\frac{dr}{ar+b} = Adx + Bdy + Cdz$, A, B, C étant algébriques, & b étant zéro lorſque la tranſcendante eſt une exponentielle. Cette réflexion donne un nouveau moyen de ſimplifier la méthode dont je vais parler.

Problême des 3 Corps, p. 47 & ſuiv.

On peut, par la ſimple ſubſtitution de $x + y = z$ dans une équation en y & z, où dz eſt ſuppoſé conſtant, préparer toute équation différentielle entre y & x qui en peut réſulter, à avoir pour intégrale y égale à une ſuite infinie, entiere & rationnelle de x : & ſi l'on cherche le terme général d'une telle ſuite, on le trouve, pour chaque ordre, par une formule analogue, mais très compliquée. Cette formule contient un nombre indéfini de termes, qui varie pour les différentes valeurs qu'on donne à l'expoſant du terme général. Comme il ſeroit très avantageux, lorſque cela eſt poſſible, de l'avoir exprimé par une fonction finie de ce même expoſant, qui contient des tranſcendantes lorſque cela eſt néceſſaire, je remarque que cette expreſſion eſt égale à la racine d'une équation différentielle ordinaire d'un certain ordre, ou, ce qui eſt plus ſimple, d'une équation aux différences finies : alors il eſt aiſé de voir que, quelle que ſoit l'expreſſion, elle eſt égale à cette racine, l'équation étant intégrable ſi l'expreſſion eſt réductible à un nombre fini de termes, & n'étant que conſtruc-

Lettre à M. d'Alembert, N°. V.

tible ſi elle ne l'eſt pas. La ſommation d'une ſuite pour un nombre indéfini de termes, & l'interpolation, ſe trouvent également dépendre d'une pareille intégration. Si, après avoir ainſi déterminé la forme du terme général de la ſuite qui répond à une équation différentielle d'un ordre & d'un dégré déterminés, on ſuppoſe une fonction qui contienne les tranſcendantes convenables à l'ordre donné, où les variables montent à un dégré inconnu, mais déterminé, & qu'on cherche la forme du terme général, on la trouvera donnée également par une fonction indéfinie, qu'on recherchera à réduire à une fonction finie, ou du moins, ſi cela eſt impoſſible, à une fonction indéfinie de la même forme que celle du terme général de la ſuite qui répond à l'équation différentielle, afin que par la comparaiſon de ces deux termes, on détermine les coefficiens inconnus & le dégré de l'intégrale.

Après avoir donné une méthode d'intégrer, à laquelle aucune équation ne puiſſe ſe ſouſtraire; après en avoir diſcuté quelques autres qui s'y rappellent, & dont aucune n'eſt plus ſimple, étant priſe dans ſa généralité, il ne me reſte plus qu'à parler de la détermination des conſtantes que la différenciation fait diſparoître, & que l'intégration laiſſe arbitraires. Cette détermination, qui n'eſt d'usage que lorsqu'il est question de résoudre un problême particulier, n'est assujettie qu'à une seule loi ; c'est que l'arbitraire doit être constante lorsque les changeantes sont supposées varier : le reste dépend des suppositions qu'on peut faire. Si l'équation étoit entre variables dont la différence ne fût point constante, & qu'elle se trouvât d'un ordre supérieur, alors l'intégrale pourroit contenir une nouvelle variable, dont la différence seroit constante. Les coefficiens de cette variable sont des arbitraires constantes : elle-même reste arbitraire, & doit être déterminée par certaines conditions du problême, étrangeres à l'équation proposée.

Lettre à M. d'Alembert, N°. VI.

Calcul intégral. p. 33.

La méthode générale est quelquefois très longue ; on ne connoît point de méthodes particulieres plus courtes : & si alors une méthode d'approximation est suffisante pour le but qu'on se propose, il est plus commode de renoncer aux méthodes exactes, & de l'employer. J'entre dans un assez grand détail sur ces méthodes, qui, malgré je ne sais quelle incertitude dont peut-être on ne peut les débarrasser, sont si utiles dans les problemes qui regardent le mouvement des planetes, & conséquemment si intéressantes dans un tems où cette matiere est l'objet des recherches des plus grands Géometres. Ce que je trouve de plus avantagenx, est une équation

Problême des 3 Corps, p. 55 & suiv.

Lettre à M. d'Alembert, N°. IX.

Lettre à M. d'Alembert, N°. IX.

différentielle

différentielle dont la forme générale, lorſqu'on ne cherche qu'une valeur approchée, ſe trouve, à l'aide de diverſes remarques, intégrable par une méthode plus ſimple, plus courte & plus commode que la méthode générale, & qui s'étend même à d'autres cas aſſez étendus. Il eſt ſur-tout avantageux de trouver l'expreſſion approchée ſous ſa vraie forme, ou ſous une forme qui n'induiſe pas en erreur : & je me ſers pour cela, avec aſſez de ſuccès, des principes généraux que j'ai donnés ſur les formes des équations intégrales, & la nature de leurs fonctions tranſcendantes.

Juſqu'au tems de Deſcartes, la Géométrie avoit fait une ſcience ſéparée de l'Algebre, qui ne s'exerçoit que ſur des nombres. Ce grand homme réunit l'une & l'autre, & toutes deux firent des progrès immenſes : il tenta même avec ſuccès de les appliquer à la connoiſſance de la Nature. Newton le ſuivit de près, perfectionna l'Analyſe & la Géométrie, inventa les nouveaux Calculs; & ſaiſiſſant le vrai principe qui lie le Calcul à la Méchanique, & la Méchanique à l'explication des phénomenes, créa, pour ainſi dire, une nouvelle ſcience. Ce fut l'époque d'une révolution dans cette partie des connoiſſances humaines. La ſécchereſſe des Mathématiques, qui rebutoit une foule d'eſprits, a ceſſé d'être un obſtacle, dès qu'elles ſont devenues la route des découvertes les plus brillantes & les plus utiles de la Philoſophie naturelle. L'eſtime publique, les ſuffrages même des Géometres, ont été le prix des applications heureuſes de l'Analyſe, plutôt que des découvertes analytiques; & les Savans, dont la gloire eſt la ſeule récompenſe, ſe ſont en cela ſoumis à l'opinion de leur ſiecle. Qu'on me permette cependant de dire que je crois cette maniere de faire des découvertes, peu favorable au vrai progrès de la ſcience. Il me ſemble qu'il eſt plus naturel de perfectionner, autant qu'on le peut, l'inſtrument dont on veut ſe ſervir, & l'employer enſuite, que de ſe propoſer un objet particulier, & préparer l'inſtrument pour ce ſeul objet. Il me ſemble que c'eſt ainſi que chez Newton les découvertes purement analytiques en précéderent l'application. C'eſt auſſi la route que j'ai ſuivie, en dirigeant d'abord mes efforts vers les difficultés du Calcul intégral pris en lui-même, ſans ſonger encore à en faire quelque application. J'ai cherché enſuite á faire quelque application de mes principes, & voici ce que j'ai trouvé.

Lettre à M. d'Alembert, N°. I.

Suppoſant d'abord qu'un point placé dans l'eſpace, & dont la poſition y eſt donnée à chaque inſtant par trois coordonnées perpendiculaires, ſoit animé de trois forces dont les directions ſoient paralleles à ces coordonnées, & en ſoient des fonctions; il eſt clair que la courbe à double courbure qu'il décrit, eſt toujours donnée par des équations poſſibles, & qu'ainſi le problême l'eſt néceſſairement auſſi. Je trouve réciproquement que les courbes étant données, l'expreſſion des forces eſt également poſſible; & que, quant au nombre & à la nature des tranſcendantes, elles ſe trouvent être les mêmes dans l'expreſſion des forces & dans l'équation des courbes; que celles-ci en contiennent autant que celles-là, & en peuvent contenir deux de plus; & qu'enfin, quelles que ſoient les courbes décrites par un ſyſtême de points, on peut, lorſque le nombre des tranſcendantes n'eſt que le double de celui des points, trouver certaines forces générales qui s'exercent ſur chacun de ces points, dont l'expreſſion ſoit algébrique & convienne à chacun, en alternant les coordonnées & les coefficiens conſtans. Cette derniere remarque eſt importante pour la recherche des cauſes des phénomenes.

M. d'Alembert eſt le premier qui ait rappellé à un ſeul principe unique tous les problêmes de la Dynamique. Cette découverte importante rappelle à de ſimples difficultés d'analyſe, toutes celles du calcul des mouvemens des corps. M. de la Grange, en généraliſant celui de la moindre action, & en le combinant avec celui de la conſervation des forces vives, a donné une méthode fort ſimple & fort élégante de trouver, dans tous les cas, les équations des problêmes. J'ai cherché à les tirer, par une méthode ſemblable, d'un principe plus direct & indépendant des cauſes finales; & je déduis de ce principe purement méchanique, que la conſervation des forces vives, & le principe de la moindre action, ont lieu en général dans tous les mouvemens; qu'ainſi ces principes ſont de vrais principes méchaniques, ſuites néceſſaires de la nature des corps. Je crois que mon principe eſt à peu près celui que M. de la Grange a employé dans ſa Piece ſur la libration de la Lune, long-tems avant que je m'occupaſſe de cet objet; & même tous ces principes, puiſés dans les mêmes notions, conduiſant aux mêmes réſultats, ne peuvent différer entre eux que dans la maniere de les enviſager ou de les combiner, & dans l'expreſſion plutôt que dans la réalité.

Problême des 3 Corps, p. 3 & ſuiv.

Je trouve, pour le mouvement des points qui s'attirent réciproquement, un ſyſtême d'équations dont chacune contient toutes les coordonnées, & le tems, dont le nombre égale celui des coordonnées. On peut, par des éliminations, parvenir à

Problême des 3 Corps, p. 7.

une équation entre le tems & une des coordonnées ; & par conſéquent le problême peut ſe réſoudre par la methode générale : mais ici elle peut être ſimplifiée, premiérement, parcequ'ayant une des coordonnées donnée en t, on a toutes les autres en alternant ſeulement dans les coefficiens, les quantités conſtantes qui ſe rapportent à chaque point ; ſecondement, l'ordre de l'équation étant m, & le nombre d'équations n, celui des tranſcendantes ne peut être que mn. Il ſuit de-là que, ſuppoſant dt variable & l'éliminant, ce qui donne $n - 1$ d'équations entre les coordonnées de l'ordre $m + 1$, le nombre des tranſcendantes eſt $\overline{n - 1} . \overline{m + 1}$. Je ſuppoſe que les tranſcendantes, dans chaque équation entre deux variables, qui alors doit être poſſible, contiennent les deux coordonnées, elles ſeront différentes dans chacune des équations intégrales ; elles n'y pourront donc être qu'au nombre $m + 1$, qui eſt indépendant du nombre des points, & 3 dans le cas que je conſidere : mais ſi elles ne contiennent qu'une des variables, alors il y en a autant de différentes que de variables, c'eſt-à-dire qu'elles ne peuvent être qu'en nombre m pour chaque variable, parcequ'à cauſe de $\overline{m + 1} . n > \overline{m + 1} . \overline{n - 1}$, il ſeroit contre l'hypotheſe qu'il fût $m + 1$; m eſt ici 2 : & par conſéquent, dans la premiere hypo-

Problême des 3 Corps, p. 11 & ſuiv. Page 38.

Problême des 3 Corps, pag. 10, 16, & l'*Errata* cité.

these, quel que soit n, l'ordre de l'équation sera le troisieme, & le quatrieme dans la seconde. Si je considere une équation en l'une des coordonnées, & le tems dont l'élément est supposé constant, elle est de l'ordre mn, & a une solution complette. Soit la coordonnée x; si j'ai x égal à une fonction de t, le nombre des transcendantes pourra être mn, pourvu qu'elles soient les mêmes dans les autres équations semblables, & les arbitraires aussi les mêmes. Si l'on a seulement une équation en x, dx, & t, sans que x ou dx entrent dans les transcendantes, leur nombre ne pourra être que $\overline{n.m-1}+1$, avec les mêmes conditions. Si l'on a seulement une pareille équation en x, dx, ddx, & t, le nombre des transcendantes ne pourra être $\overline{n.m-2}+2$; & si cela n'a lieu qu'à l'équation de l'ordre m, on n'en aura qu'un nombre m, indépendant du nombre n des points, & les transcendantes pourront n'être que semblables dans les diverses équations, & contiendront les deux variables. Ce cas est celui que j'ai spécialement considéré dans mon Ouvrage, & je supplée ici à ce que j'aurois dû y dire des autres. On peut, par une méthode particuliere, trouver, pour une valeur quelconque de n, l'équation du quatrieme ordre, pour laquelle on ne doit prendre que les équations

Problême des 3 Corps, p. 11 & suiv. & l'*Errata* cité.

d'où dt, comme variable, a été éliminé. Si l'on n'avoit éliminé que dt, ſuppoſé conſtant, & qu'on ſuivît la même méthode, on pourroit parvenir aux mêmes réſultats, &, dans le cas où l'on a x par une équation algébrique d'un ordre moindre que mn, trouver une équation entre deux coordonnées, ſéparable immédiatement, & d'où l'on tireroit cette équation en x & dt. On voit de-là que l'ordre des équations de l'orbite eſt en général indépendant de n, & ne peut être ici au-deſſus du quatrieme, mais qu'il peut entrer dans les arbitrires une variable dont la différence eſt conſtante; & que ſuppoſant que c'eſt le tems, on a cette variable donnée par une équation dont l'ordre peut dépendre de n; & qu'il en ſeroit de même de toute autre ſuppoſition. Je remarquerai encore, que ſi l'on a x en t, & nm tranſcendantes, & qu'un des points devienne zéro, quel qu'il ſoit, le nombre n'eſt plus que $\overline{n-3}.m$: d'où il ſuit que les $3\,m$ dernieres tranſcendantes doivent avoir pour coefficient le produit de toutes les maſſes, de même que les $3\,m$ ſuivantes doivent avoir pour coefficient le produit de toutes les ſommes de ces maſſes ajoutées deux à deux; & ainſi de ſuite. Enfin, d'après ce que je viens de dire, on parviendra toujours à connoître, *à priori*, la forme des intégrales, avant de les trouver elles-mêmes,

Problême des 3 Corps, p. 16, & l'*Errata* cité.

Problême des 3 Corps, page 45.

puiſque le nombre des tranſcendantes dépend de l'ordre des équations ſéparées qu'on peut avoir entre t & les coordonnées.

Ibid. p. 23 & ſuiv.

En ſuppoſant, au lieu de points, des corps d'une figure quelconque, dont toutes les particules s'attirent, on a des équations auxquelles on peut, par l'application des mêmes principes, trouver des réſultats ſemblables, à quelques légers changemens près. Je n'en ai conſidéré les équations, comme celles des points ſimples, que dans l'hypotheſe des tranſcendantes non ſéparées; ainſi il faut joindre à ce que j'ai dit alors, des réflexions ſemblables à celles que je viens de faire. Au reſte cette matiere, c'eſt-à-dire l'intégration d'un ſyſtême d'équations différentielles, dans leſquelles les variables de chaque équation ne ſont point ſéparées de celles des autres, & demandent à l'être par des éliminations ſucceſſives, étoit abſolument neuve. J'ai indiqué les principes généraux; mais je ne me flatte point d'avoir dit, à beaucoup près, tout ce qu'il y a d'intéreſſant ſur ce ſujet. J'ajouterai ſeulement ici, pour éclaircir ce que j'ai dit, qu'indépendamment de toute hypotheſe, chaque équation en deux variables quelconques peut contenir toutes les tranſcendantes du ſyſtême; qu'ainſi ſon équation différentielle doit être de l'ordre convenable à cela, & qu'on

Ibid. p 34 & ſuivantes, & l'*Errata* cité.

qu'on ne doit pas être surpris d'avoir toutes équations de cet ordre, quoiqu'il n'y ait réellement dans toutes, qu'autant de transcendantes & d'arbitraires qu'une seule en peut contenir.

On trouvera, dans ce que je dis des méthodes d'approximations, quelques réflexions particulieres sur ce qui regarde leur application aux problêmes qui concernent le mouvement des corps. Lettre à M. d'Alembert, N°. IX.

J'ai joint aux différentes théories que je viens d'expliquer, quelques remarques sur les *maxima* & *minima* des quantités données par des équations différentielles. Les équations réduites en formules qui les donnent, se trouvent être les mêmes que mes équations de condition pour les différentielles; & je montre que cette identité n'est pas l'effet du hasard, mais celui de la nature de ces deux problêmes, dont une même analyse donne la solution. Calcul intégral, p. 16. J'ai aussi discuté en détail l'intégration d'une forme particuliere d'équations, & l'on peut regarder ce morceau comme un exemple, & en même tems comme une simplification de la méthode générale. Lettre à M. d'Alemberr, N°. IX. Il y a grande apparence qu'il n'y a point de classes d'équations pour l'intégration, desquelles on ne puisse se procurer un pareil avantage; & quiconque aura bien saisi les principes généraux, trouvera, sans beaucoup de difficulté, ce qu'il y aura à faire dans les occasions particulieres. L'équation que je considere, me fournit de plus l'occasion de faire quelques réflexions sur le facteur par lequel on peut multiplier une fonction différentielle, pour la rendre une différentielle exacte. (*Voyez* sur le même objet le quatrieme volume des Opuscules de M. d'Alembert, où j'ai puisé une de ces réflexions.)

Au lieu de supposer que des quantités augmentent & diminuent de maniere que leurs incrémens, plus petits qu'aucune quantité finie, se trouvent avoir entre eux des rapports dépendans de ceux qu'ont entre elles les variables elles-mêmes; on peut supposer que ces incrémens soient finis, & qu'une équation entre eux & les variables naisse de celle qui existe entre elles, ou serve à la trouver. Il y a une différence remarquable entre ces deux suppositions. Dans la premiere, les rapports des différences sont seuls assujettis au calcul; & par conséquent peu importe de connoître la valeur absolue d'une d'elles : dans la seconde, on calcule les différences elles-mêmes; & il faut par conséquent que la grandeur absolue d'une différence à laquelle les autres se rapportent, soit donnée par une hypothese, ou qu'elle reste arbitraire. Si elle reste arbitraire, alors l'équation aux différences finies se traite comme les équations aux différences évanouissantes:

Lettre à M. d'Alembert, N°. VII.

ſi elle ne l'eſt pas, la théorie en devient beaucoup plus compliquée & plus difficile. Dans ce dernier cas, où la différence finie d'une des variables eſt donnée par une équation, il s'en trouve réellement deux entre les variables & leurs différences; & c'eſt une eſpece de paradoxe analytique, que deux équations qui aient lieu en même tems, & qui, ſans être réductibles à une ſeule, paroiſſent ne point limiter l'étendue de la ſolution : mais il eſt aiſé de lever cette difficulté. En effet, ce n'eſt pas l'intégrale trouvée qui eſt la véritable ſolution de ces équations, c'eſt ſeulement les valeurs données par cette intégrale de variables dépendantes de x, par exemple, lorſque x augmente ſucceſſivement de certaines quantités données par les valeurs antérieures de x & des autres variables. Ce n'eſt point réellement une courbe qui eſt le lieu de l'équation lorſqu'elle ne contient que deux variables, mais ce ſont les ſommets des angles d'un polygone inſcrit dans la courbe : ce ne ſont pas toutes les valeurs de y répondant à tous les x, mais une infinité de y répondant à une infinité de x pris ſuivant une certaine loi. La ſolution ſe trouve donc, dans cette hypotheſe, moins étendue d'une dimenſion, de même que dans une équation ordinaire, lorſque le nombre des variables eſt diminué d'une unité.

Soit, par exemple, l'équation $2x\delta x + 2y\delta y + \delta x^2 + \delta y^2 = 0$; il eſt clair que ſon intégrale eſt $x^2 + y^2 = a^2$, & que le lieu en eſt un cercle dont le rayon eſt arbitraire. Soit $2x\delta x + 2y\delta y + \delta x^2 + \delta y^2 = 0$, & $x = b$; l'intégrale eſt encore $x^2 + y^2 = a^2$. Mais prenant à volonté une valeur de x & ſa coordonnée y, le lieu de l'équation ne ſera que les valeurs de y répondant aux x, qu'on aura en prenant ſucceſſivement ſur l'axe, de côté & d'autre, des quantités égales à b.

J'ai ſuivi, pour ces deux eſpeces d'équations, le même ordre que dans mon travail ſur les équations aux différences infiniment petites : mais j'ai conſidéré les équations aux différences finies de la premiere eſpece ſous deux points de vue différens. Je les ai d'abord conſidérées ſous la forme de la ſuite infinie qni les repréſente, & dont les différens termes homogenes, quant au dégré des différences, lorſqu'ils ſont pris chacun ſéparément, deviennent ſucceſſivement d'un dégré plus élevé d'une unité. Je trouve dans cette hypotheſe les équations de condition qui doivent avoir lieu dans les différens cas, & elles ſe trouvent être données également ſous la forme d'une ſuite infinie dont la loi eſt donnée. Quant à l'intégration de l'équation, qui ſe trouve être poſſible, je la trouve être abſolument

Calcul intégral, pag. 71 & ſuiv.

Calcul intégral, p. 74 & ſuiv.

Eclairciſſement, pag. 80 & 81.

Calcul intégral, pag. 72, & Eclairciſſement, p. 83.

la même que celle de l'équation qu'on auroit en y ſuppoſant les différences infiniment petites, & en obſervant que, différenciant une fonction & ſuppoſant les différences finies, on ne peut faire évanouir des fonctions tranſcendantes. Il eſt clair qu'on retrouve toujours dans la différentielle le nombre & la forme des tranſcendantes qui peuvent ſe trouver dans l'intégrale ; & même, comme l'on a $1.\overline{X+\delta X} - 1.X = 1.\frac{X+\delta X}{X} = 1.\overline{1+\frac{\delta X}{X}}$, & $\frac{e^{X+\delta X}}{e^{X}} = e^{\delta X}$, il eſt clair que, pour les avoir elles-mêmes, on n'auroit à intégrer que dX ou $\frac{dX}{X}$, quantités données. L'intégration de ces équations eſt donc plus facile que celle des équations ordinaires, parceque la ſuppoſition des différences infiniment petites fait évanouir des élémens dont la connoiſſance ſeroit néceſſaire pour trouver l'intégrale. La conſidération des équations aux différences finies, ſans ſuppoſer ce développement en ſuite infinie, me donne des équations de condition bien plus ſimples, comme ce que j'ai dit du rapport qu'il y avoit entre ces formules & celles qui donnent les *maxima* & les *minima* des fonctions données par des équations différentielles, & indépendamment de la ſuppoſition que les différences

Eclairciſſement, pag. 81 & 82.

Calcul intégral, p. 83.

ſoient infiniment petites ; on peut, pour le cas des différences finies, en tirer les mêmes conſéquences & la même utilité. L'on voit de plus, que la forme de l'intégrale y étant toujours une & donnée immédiatement, on n'a qu'à la ſubſtituer, & chercher l'intégrale par la détermination des coefficiens.

Lettre à M. d'Alembert, N°. VII.

Les principes qui ſervent à la théorie des équations aux différences finies abſolues, me ſervent à établir celle des différences finies hypothétiques. On trouve les équations de condition qui ſont néceſſaires pour que ces équations ſoient poſſibles. Il eſt facile de voir qu'elles ſont toujours conſtructibles ; mais l'un ne ſuit pas toujours de l'autre, & l'utilité la plus réelle de la recherche de ces conditions une fois réduites en formules, ſeroit de montrer s'il y a des cas où un problême dont on connoît une infinité de ſolutions pour des valeurs particulieres, ne peut être donné par une équation analytique, & quels ſont ces cas. La différenciation fait diſparoître ici, non ſeulement des fonctions tranſcendantes, mais même des fonctions arbitraires. Les unes & les autres ſe trouvent par des équations très ſimples, indépendamment de l'intégration de la propoſée ; &, cette opération une fois faite, la forme de l'intégrale eſt connue, & une ſimple ſubſtitution ſuffit pour la trouver. Il y a

Ibid. N°. V.

même bien des cas où l'intégration se fait par des moyens absolument élémentaires.

Lettre à M. d'Alembert, N°. VIII.

Les équations aux différences partielles & à trois variables ont été enfin l'objet de mes recherches. J'ai trouvé, par l'application de mes principes, le moyen de distinguer avant l'intégration celles qui sont intégrales, & d'avoir ensuite ces intégrales par une méthode analogue à celle que j'ai donnée pour les équations différentielles ordinaires, & qui n'est plus longue que parceque ces intégrales sont, par la nature même du problême, nécessairement plus compliquées. Pour y parvenir, j'ai recherché d'abord quelles en devoient être les formes; & j'ai trouvé, qu'indépendamment des fonctions transcendantes de la même nature que celles qui entrent dans les intégrales des équations ordinaires, elles pouvoient contenir encore des fonctions arbitraires de fonctions données.

Calcul intégral, p. 86 & 87.

Ibid. p. 87 & suiv.

Eclaircissement, p. 80.

Considérant ensuite la nature de ces fonctions, il est aisé de voir que, si j'ai une équation de l'ordre n, & toutes ses intégrales successives jusqu'à l'intégrale finie, dans chacune desquelles les transcendantes ne contiennent pas de différentielles, je pourai, en éliminant ces transcendantes, & n'en laissant successivement que celles qu'une seule différenciation fait évanouir, avoir $n-1$ d'équations différentes de l'ordre $n-1$, où les transcendantes contiennent des différences aussi de l'ordre $n-1$. Il faut donc avoir d'abord une méthode générale d'intégrer les équations pour le premier ordre. J'en ai indiqué une pour celles qui ne doivent pas contenir de radicaux, & en voici une autre qui s'étend à tous les cas. Je remarque d'abord que la forme d'intégrale pour ces équations n'est pas unique, & que deux formes différentes peuvent être également l'intégrale d'une équation du premier ordre. Cette difficulté ne rend pas la solution plus difficile, mais beaucoup plus longue, parcequ'il faudoit essayer les deux formes l'une après l'autre alternativement. Il est donc avontageux de les réduire à une seule. En voici le moyen. Soit une équation donnée en x, y, z, dx, dy, dz, & $\frac{dz}{dx}$; je prends $A\,dz + B\,dx + C\,dy + D\,dr = 0$, $A\frac{dz}{dx}dx + B\,dx + D\frac{dr}{dx}dx = 0$; & il faut que, ces deux fonctions étant des différentielles exactes, & $\frac{dr}{ar+b} = A'dz + B'dx + C'dy$, j'aie la proposée, qui ne contienne plus ni r ni dr. A, B, C, D sont des fonctions de x, y, z, r, qui ne peuvent contenir de radicaux d'un ordre plus élevé que celui de dz ou $\frac{dz}{dx}$ dans la proposée; & A', B', C, sont de pareilles fonctions de

Eclaircissement, p 79.

x,

x, y, z. Cela posé, lorsque, faisant $a + a' = A$, $b + b' = B$, $c + c' = C$, $d + d' = D$, la proposée pourra être $\frac{a\,dz + b\,dx + c\,dy + d\,dr}{a\frac{dz}{dx}dx + b\,dx + d\frac{dr}{dx}dx} + \frac{a'dz + b'dx + c'dy + d'dr}{a'\frac{dz}{dx}dx + b'dx + d'\frac{dr}{dx}dx} = 0$, on aura $F.\int.a\,dz + b\,dx + c\,dy + d\,dr + \int.a'dz + b'dx + c'dy + d'dr = 0$, il faut que $a\,dz + b\,dx + c\,dy + d\,dr$ soit une différentielle exacte ; & les équations peuvent avoir lieu, soit r étant quelconque, soit r étant $\int.A'dz + B'dx + C'dy$, lorsqu'elle est algébrique. On auroit pu avoir $dr' = a\,dz + b\,dx + c\,dy + d\,dr$, & on peut toujours le supposer lorsqu'on connoît a, b, c, d ; autrement on aura $\int.A\,dz + B\,dx + C\,dy + D\,dr = 0$, qui pourra contenir deux arbitraires ou deux transcendantes, à cause de $\int\frac{dr}{ar+b} = \int.A'dz + B'dx + C'dy$. Dans les équations de condition, pour qu'une équation de cette forme ait une intégrale possible, on pourra, en éliminant les $\frac{dz}{dx}$ à l'aide de la valeur qu'en donne la proposée, parvenir à une équation du second ordre aux différences ordinaires, toutes les fois que l'intégrale ne doit pas contenir de fonctions arbitraires. Pour appliquer notre méthode aux ordres supérieurs, il faut ſeulement obſerver, 1°. que pour l'ordre n, c'eſt le dégré des $d^n z$ ou $\frac{d^n z}{dx^n}$ qui regle celui des radicaux; 2°. que les fonctions qui ſont finies pour le premier ordre, contiennent les différences de l'ordre $n - 1$, & celles de z, depuis $d^{n-1} z$ juſqu'à $\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$; 3°. qu'au lieu de la fonction $A dz + B dx + C dy + D dr$, on a une fonction de l'ordre n, de z, de la différence $\frac{dz}{dx}$ & ſes différences, & ainſi de ſuite juſqu'à $\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ & ſa différence; y & ſes différences; x, dx qu'on peut ſuppoſer conſtant, & r & dr qui doit être une différentielle exacte d'une fonction de l'ordre inférieur; & que $\frac{dr}{ar + b}$ doit être égal à une pareille fonction de x, y, z, & des mêmes différences. Il faut obſerver ici que dans ce cas, comme dans celui des équations aux différences ordinaires, il faut que les équations de l'ordre $n - 1$ ſoient réellement différentes. Pour les équations ordinaires, il ſuffit, ſi l'intégrale eſt algébrique, que A & A' étant les différentielles exactes de ces deux équations, $\frac{A}{A'} + C$ ne ſoit pas l'intégrale; & dans les autres cas, que les différentielles de trois de ces équations intégrales de l'ordre $n - 1$ étant A, A', A'', on n'ait point $A'' = mA + nA'$, m, n étant des nombres conſtans ; & ainſi de ſuite. Pour les équations de l'eſpece de celle-ci, il faut, 1°. la même condition que ci-deſſus, à cauſe des intégrales algébriques ; 2°. pour les autres, s'aſſurer ſi r pris dans une de ces équations, n'eſt pas fonction de r pris dans l'autre, & que j'appelle r'. 3°. Si cela eſt, & qu'aucune des deux ne contienne de fonctions arbitraires, il faut s'aſſurer ſi l'une diviſée par l'autre avant l'intégration, n'eſt pas l'intégrale de la propoſée ; & s'il y en a trois, ſi la troiſieme n'eſt pas égale à la ſomme du produit de chacune des deux autres par des quantités conſtantes. 4°. Si elles contiennent des fonctions arbitraires r, r', il faut que, mettant dans la valeur de la fonction de r, à la place de la plus haute différence, ſa valeur priſe de l'équation en r', il n'en réſulte pas une équation en r & r', ou immédiatement, ou en égalant à zéro une fonction des variables, qui, égalée à une conſtante, ſoit l'intégrale de la fonction des variables, égale à la fonction de r. 5°. Lorſque cela n'arrive pas, & que cependant r eſt fonction de r', il peut arriver que, les équations étant trouvées & les intégrales priſes comme je l'ai dit ci-deſſus, on n'ait l'intégrale finie qu'en ſuppoſant entre $F.r$ & $F'.r'$ $= F''.r$, une équation qu'il ſeroit inutile d'intégrer. Ces intégrales au nombre de n étant auſſi trouvées, on pourra toujours avoir l'intégrale finie, en cherchant à éliminer les différences.

Lettre à M. d'Alembert, N°. VIII.

Après avoir trouvé les intégrales, il ne me reste plus qu'à déterminer les fonctions qui y restent arbitraires, mais qui, pour les cas particuliers, ont une valeur déterminée. Cette détermination, d'après les différentes conditions qu'on peut choisir, n'est pas à beaucoup près aussi facile que celle des constantes dans les équations ordinaires. Je donne le moyen de rappeller ce problême à l'intégration des équations aux différences finies, où la différence d'une des variables est donnée. Il y a même une maniere de choisir les conditions, qui ne demanderoit que l'intégration d'une équation différentielle ordinaire. Ces fonctions arbitraires sont tellement indéterminées, qu'elles ne sont pas même assujetties en tout à la loi de continuité, & qu'il suffit qu'elles soient données par une équation différentielle possible entre la fonction que j'appelle F, & la quantité dont elle est fonction.

Calcul intégral, pag. 92.

Lettre à M. d'Alembert, N°. VIII.

Je n'ai dit qu'un mot de quelques autres équations aux différences partielles. On sent qu'on peut faire des hypotheses à l'infini, dont chacune donneroit une nouvelle classe de ces équations : mais les mêmes méthodes s'y appliqueront, en faisant le changement qu'indique l'analogie. Cet avantage

ij

d'embraſſer, pour ainſi dire, l'univerſalité de la ſcience, & de donner les ſolutions dans toute leur étendue, caractériſe les méthodes directes & en fait le prix.

Cette Préface eſt l'analyſe fidele de ce que contiennent mes trois Ouvrages. J'ai eu ſoin d'éclaircir & de corriger pluſieurs endroits, & je ſens bien qu'il y auroit encore beaucoup à faire; néanmoins je ſerai content & croirai n'avoir pas été inutile aux ſciences, ſi ces méthodes, perfectionnées par des mains habiles, deviennent un jour un inſtrument utile pour des découvertes importantes. Je n'ai fait qu'indiquer la route qu'il faut ſuivre, mais ſans oſer y entrer :

Fungar vice cotis, acutum
Reddere quæ ferrum valet, exſors ipſa ſecandi.

CORRECTIONS ET ADDITIONS.

PRÉFACE.

PAGE iv, ligne 14 (,) *mettez* (;). *Ibid.* & dont, *mettez* ſi donc. Ligne 15 (;) *mettez* (,).

Page v, ligne 16 (;) *mettez* (,). Ligne 17 (,) *mettez* (;).

Page vj, ligne 15, ai, *liſez* ait. Lig. 22, *ôtez la virgule.* Lig. 23, &, *liſez* eſt.

Page ix, ligne 3, le, *liſez* ce.

Page xij, ligne 21, indéfinie, *liſez* indéfini.

Page xx, ligne 18, *ôtez* que.

Page xxij, ligne 3, dont je vais parler, *liſez* dont je viens de parler. Ligne. 5, y, liſez g. Ligne 18, contient, *liſez* contienne.

Page xxiij, ligne 12, recherchera, *liſez* cherchera.

Page xxxj, ligne 11, arbitrires, *liſez* arbitraires.

Page xxxij, ligne derniere, *à cela*, liſez *pour cela*.

Page xxxvj, ligne 5, $x = b$, liſez $\delta x = b$.

Page xxxvij, ligne 20 (,) *mettez* (;). Lignes pénultieme & derniere, *indépendamment*, liſez *eſt indépendant*.

CALCUL INTÉGRAL.

Page 38, ligne 8, fonction algébrique, *liſez* fonction dont la différentielle eſt algébrique.

Page 40, ligne 25, $e^{\Phi x, y, \&c.}$, mettez $e^{\Phi x, y, \&c. r}$.

Page 52, *ajoutez à la fin :* Cette maniere de déterminer le dégré des dx, dy, &c. demande, pour les ordres ſupérieurs, les mêmes précautions que la méthode que je donne dans l'article ſuivant pour déterminer le dégré des x, y. Ainſi il vaut mieux intégrer en cherchant les intégrales de l'ordre $n - 1$ pour une équation que l'ordre a, que de chercher immédiatement l'intégrale finie.

Page 63, ligne 5, *à commencer par la fin*, *ajoutez :* Certaines valeurs particulieres, données aux coefficiens de l'intégrale, peuvent abaiſſer le dégré de la différentielle, ſoit en faiſant diſparoître les rangs ſupérieurs, ſoit en lui donnant un facteur. Le premier abaiſſement eſt déterminé ; le ſecond ne peut l'être que par l'intégration. On peut dreſſer des Tables pour le premier, & elles ſuffiront pour les différentielles exactes. Celles que je viens de donner, ſuffiront auſſi pour les différentielles exactes & homogenes, cas où toutes les équations peuvent ſe rappeller.

Page 70, ligne 11, *ajoutez :* D'autant que ces équations entre les coefficiens ſe préſentent ſous une forme indéfinie.

Page 86, ligne 7, à compter de la fin, $d. \frac{ddz}{dx}$, mettez $d. \frac{dz}{dx}$.

Page 88, ligne 5, à compter de la fin, *au lieu de* Donc, &c. *mettez* Dans $e^{\Phi x, y, z}$, $\Phi x, y, z$, eſt une fonction ſemblable à celles de la même eſpece, dont j'ai parlé *page* 38, c'eſt-à-dire, dont la différentielle eſt algébrique. Donc, &c.

Probleme des trois Corps.

Page 11, ligne 7, *avant* Cela poſé, *mettez :* Cette maniere d'éliminer en ſuppoſant dt conſtant, conduit naturellement à des équations qui n'ont pas d'intégrale finie :

d'où il ſuit que pour avoir celles qui en admettent, il faut, au lieu des équations ci-deſſus, prendre celles qu'on auroit en éliminant, dt étant ſuppoſé variable, c'eſt-à-dire, aprés avoir ſubſtitué à $\frac{ddx}{dt}$, &c. $d.\frac{dx}{dt}$, &c.

Page 20, ligne 8, *après* contenue, *ajoutez :* Comme l'équation où dt conſtant a été éliminé, donne une de ces intégrales, & que celle où dt traité comme variable a été éliminé, donne l'autre, la méthode la plus ſure ſera de les chercher chacune dans celle qui lui convient.

Page 20, ligne 22, *après* tous, *ajoutez :* Tout ceci n'a lieu que dans le cas où les tranſcendantes contiennent toutes les variables. Si elles ne contiennent que t, ou bien une ſeule des coordonnées, l'équation entre t & une coordonnée eſt d'un ordre dépendant de celui des variables, & l'équation entre deux coordonnées peut être du quatrieme. *Voyez la Préface, pages xxix & ſuivantes.*

Page 34, ligne 21, *ajoutez :* Je n'ai encore conſidéré ici que les cas où les tranſcendantes contiennent toutes variables : dans les autres cas, l'ordre de l'équation entre t & une coordonnée dépend du nombre des variables, & l'équation entre deux coordonnées peut être du quatrieme.

Page 74, ligne 6, *après la citation, ajoutez :* Il me ſemble qu'on pourroit cependant faire le raiſonnement ſuivant. Soit $A\,dx + B\,dy$ une équation différentielle qui admet une intégrale, quelle que ſoit la valeur de ſes coefficiens, & ſoit trouvée cette intégrale, il eſt clair que la propoſée n'en aura de plus élevées pour des valeurs particulieres des coefficiens, que lorſqu'elles rendront ceux de la différentielle exacte de l'intégrale $\frac{0}{0}$ ou ∞ ; ce qui ne donne qu'un nombre fini d'équations. Subſtituant dans la propoſée les valeurs qu'on en tire pour un des coefficiens, j'aurai un nombre fini d'équations où il y a un coefficient déterminé. Je les integre chacune ſans déterminer les autres coefficiens ; & traitant chacune de ces équations comme la propoſée, j'aurai à intégrer un nombre fini d'équations où deux coefficiens ſeront déterminés. Continuant les mêmes opérations, je parviendrai à un nombre toujours fini d'équations où il n'y aura plus qu'un coefficient d'indéterminé. Intégrant alors chaque équation ſans le déterminer, je trouverai qu'il n'aura qu'un nombre fini de valeurs qui rendent l'intégrale fautive. Le nombre de toutes les intégrales ſera donc auſſi fini & déterminé. L'élévation ultérieure des intégrales pour les différens dégrés ne ſeroit donc indéfinie que dans ce ſens, qu'on ne peut ſavoir juſqu'où elle s'étend, ſans avoir procédé à l'intégration de toutes les équations où elle a lieu. On pourroit donc avoir une Table qui ne contiendroit qu'un nombre fini de cas, lorſque la forme de l'équation ſeroit telle, qu'elle auroit toujours une intégrale complette, ſans déterminer aucun des coefficiens qui y ſeroient indéterminés. Mais la méthode que je vais propoſer pour s'en paſſer, ſera toujours la plus commode pour intégrer, & ſerviroit utilement, quand même cette réflexion ne s'étendroit pas à tous les cas.

Page 75, ligne 1, *après* infinité, *ajoutez :* du moins en apparence, lorſque l'équation propoſée eſt poſſible en général.

l

Page 79, ligne 13, du premier ordre, *mettez* du premier ordre & du premier dégré.

LETTRE A M. D'ALEMBERT.

Page 5, ligne 2, *à compter de la fin*, eſt, *liſez* ſoit.

Page 11, ligne 23, les, *liſez* ces.

Page 16, ligne 25, *ajoutez :* Sur quoi il faut obſerver que, lorſque j'ai une équation en y, dy, ddy, &c. ſans aucune autre variable, il peut arriver qu'en intégrant cette équation, j'aie dans l'intégrale une variable quelconque t, dont la différence ſoit conſtante ; que ſi j'ai une ſemblable équation en x, dont l'intégrale contienne auſſi t, j'aurai réellement x en y, quoiqu'il paroiſſe que j'aie ſeulement x & y donnés par des équations déterminées. Il ſuit de-là qu'on ne doit point regarder comme déterminés les problêmes pour leſquels on a deux équations différentielles en x, y, aucune différence n'étant conſtante ; ni comme abſurdes les équations où les équations de condition n'ont lieu qu'en ſuppoſant égales une fonction différentielle de y & une de x.

Page 17, ligne 14, cas, *mettez* coſinus.

Page 20, l. 15, à la place de $A.\,\text{coſ.} = X + X\sqrt{-1}$, mettez $A.\,\text{coſ.} = X_{,} + X\sqrt{-1}$. Ligne 17, *idem*. Ligne 18, $\text{l.}\, X'''' \sqrt{-1}$, *liſez* $\text{l.}\, X''' \sqrt{-1}$.

Page 21, ligne 4, multipliées, *liſez* multipliés.

Page 22, ligne 2, variables, *liſez* réelles.

Page 34 (numérotée 24), ligne 23, y, liſez g.

Page 36, ligne 7, indéterminé, *liſez* indéterminés.

Page 39, ligne 1, $+z$, lisez $=z$.

Page 42, ligne 1, fractionnelle, *lisez* rationnelle.

Page 44, ligne 4, la formule doit être $s = mA \cos. = X + nA \cos. = X' + \ldots + X'' + N$.

Page 48, ligne 3, *ôtez* fonction. *Ibid.* ligne 17, or, *lisez* alors.

Page 50, lignes 17 & 26, x, mettez X.

Page 51, ligne derniere, n, mettez n'.

Page 52, ligne 5, $ne^{X'+a}$, lisez $e^{nX'} + a$. Ligne 23, repris, *lisez* encore.

Page 54, ligne 22, *ajoutez :* Il y a des équations où les méthodes ci-dessus ne peuvent s'appliquer qu'après une substitution ; & si l'on veut se servir, pour les ordres supérieurs, de ce que j'ai dit pour le premier, il n'y aura point de nouvelle difficulté que les mêmes principes ne puissent résoudre.

Page 56, ligne 13, différentielle, *lisez* aux différences évanouissantes.

Page 59, ligne 18, *otez* &. Ligne 20, & une autre en $FX + F'X'$, *lisez* & une autre en $FX, + F'X',$.

Page 62, ligne 7, j'ai, *lisez* j'aie.

Page 65, ligne 7, *mettez* IX.

Page 73, ligne 5, X, mettez x.

Page 76, ligne 17, e', lisez c.

Page 78, ligne 18, que, *lisez* que, si.

Page 83, ligne 16, ne contient d'angles, *lisez* ne concontient point d'angles.

APPROBATION.

J'ai lu, par ordre de Monſeigneur le Vice-Chancelier, un Manuſcrit qui a pour titre, *Lettre ſur le Syſtême du Monde & ſur le Calcul intégral*, par M. le Marquis de Condorcet. Il m'a paru que cet Ouvrage ſeroit vu avec plaiſir par les Mathématiciens, & je n'y ai rien trouvé d'ailleurs qui puiſſe en empêcher l'impreſſion. A Paris le 8 Août 1768. BEZOUT.

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, par la Grace de Dieu, Roi de France et de Navarre. A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers, qu'il appartiendra. Salut: Notre amé le ſieur Marquis de Condorcet Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au Public: un Ouvrage intitulé: *Lettre ſur le Syſtême du Monde précedé d'une Préface*, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Permiſſion puor ce néceſſaire. A ces causes, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & petmettons par ces préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de trois années conſecutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faisons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance. A la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractéres; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance de la préſente Permiſſion; qu'avant de l'expoſer en vente, le Manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le ſieur de Lamoignon, & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle dudit ſieur de Lamoignon, & un dans celle de notre très cher & féal Chevalier, Vice-Chancelier, & Garde des Sceaux de France, le ſieur de Maupeou: le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles Vous mandons & enjoignons, de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayans cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la Copie des préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huſſier ou Sergent ſur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion; & nonobſtant clameur de haro, charte Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Paris le quatorzieme jour du mois de Septembre l'an mil ſept cent ſoixante-huit, & de notre regne le cinquante-quatrieme.

PAR LE ROI EN SON CONSEIL.

Signé, Le Begue.

Regîtré ſur le Regître XVII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 4, fol. 517, conformement au Réglement de 1723, qui fait défenſes art. 41, à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre neuf exemplaires preſcrits par l'art. 108 du même Réglement. A Paris ce 19 Septembre 1768.

Signé, Briasson, Syndic.

DU CALCUL INTEGRAL.

Par M. le Marquis de CONDORCET.

Et his principiis, via ad majora sternitur. *Newton*, *in fine Tractatûs de quadraturâ curvarum.*

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT.

M. DCC. LXV.

Avec Approbation & Permission.

AVERTISSEMENT.

1°. M. Fontaine avoit eu la bonté de me communiquer, avant l'impression de ses Mémoires, le Théorême fondamental qui s'y trouve pag. 24, & dont je me suis servi pag. 29, de même que l'Introduction à la nouvelle Méthode de Calcul Intégral qu'on y trouve pag. 89. Sa troisieme Table, pag. 150, donne, pour le cas où l'intégrale est algébrique, les premiers termes des suites d'équations qu'on trouvera ici pag. 54 & suivantes : mais elles sont ici réduites à un nombre fini de formes, ce qui est essentiel pour ma Théorie.

2°. La formule de la page 72 pour les différences finies a été donnée & démontrée d'une maniere très ingénieuse pour le cas où Φ ne contient qu'une variable, par M. d'Alembert, dans *ses Recherches sur le Systême du Monde*. On la trouve aussi dans les *Institutions* de M. Euler.

3°. Les équations aux différences partielles, pour leſquelles je donne quelques principes, ont été d'abord traitées ſous un point de vue différent dans la Diſſertation de M. d'Alembert ſur la cauſe générale des Vents. On y trouve pluſieurs de ces équations intégrées par une méthode très ingénieuſe, qui joint l'élégance à la ſimplicité. MM. Euler & de la Grange en ont réſolu depuis quelques-unes par d'autres méthodes. Celle de ce dernier a une très grande généralité, & ſon Auteur l'a appliquée à des équations très compliquées.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

Du 22 Mai 1765.

NOUS, Commiſſaires nommés par l'Académie, avons examiné un Traité du Calcul Intégral par M. le Marquis de Condorcet. Cet Ouvrage eſt diviſé en deux Parties, dont la premiere traite des équations différentielles aux différences infiniment petites, & la ſeconde conſidere les différences finies. Comme toute équation différentielle n'eſt pas toujours ſuſceptible d'une intégrale finie, que ſouvent même elle n'admet pas une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, M. de Condorcet s'occupe d'abord de la recherche des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction, ou une équation différentielle propoſée, ait une intégrale. Il traite cette matiere de la maniere la plus générale; ſoit qu'on ait ſuppoſé, ou non, une des différentielles conſtante, à quelque degré que montent les variables & leurs différentielles, & en tel nombre que puiſſent être ces variables.

Lorſqu'une équation eſt ſuſceptible d'une intégrale, il y a entre cette équation & ſon intégrale, une relation qui, quoiqu'elle ſoit une ſuite du principe de la différenciation, exige néanmoins de l'adreſſe & beaucoup de connoiſſances de calcul, pour être réduite en équation. C'eſt cette relation que M. de Condorcet enſeigne à trouver. Mais cette relation donneroit encore peu de connoiſſance ſur l'intégrabilité de l'équation propoſée, ſi, par des réflexions ultérieures, on ne parvenoit point à réduire l'équation, ou les équations qui expriment cette même relation, à ne renfermer d'autres quantités que celles qui appartiennent à l'équation proposée même, qui eſt ici la ſeule choſe connue. M. de Condorcet en vient à bout : enſorte qu'il réſout pleinement ce problême général : *Etant donnée une équation différentielle de tel ordre que ce ſoit, & qui renferme tant de variables qu'on voudra, déterminer ſi cette équation, dans l'état où elle eſt propoſée, admet, ou non, une intégrale d'un degré immédiatement inférieur.* La ſolution qu'il donne de ce problême, joint au mérite de l'utilité, celui de l'élégance & de la généralité. M. de Condorcet remarque que les formules qui expriment les conditions cherchées, ſont abſolument les mêmes que celles qui expriment les conditions qui doivent avoir lieu entre pluſieurs variables qui entrent dans une fonction intégrale indéfinie, pour que cette fonction devienne un *maximum* ou un *minimum*. Les queſtions de cette derniere eſpece ont été traitées par MM. Euler & de la Grange. M. de Condorcet fait voir que l'identité des formules eſt fondée ſur l'identité analytique des deux ſortes de queſtions. Lorſqu'un problême eſt poſſible, c'eſt déja avoir fait un pas utile vers ſa ſolution, que d'avoir démontré que l'équation différentielle qui l'exprime, admet une intégrale du degré immédiatement inférieur. Mais il peut arriver ſouvent qu'une équation ſuſceptible d'une pareille intégrale, exprime une choſe impoſſible, & par conſéquent n'admette point d'intégrale finie. C'eſt donc un travail fort utile que de déterminer dans quels cas une équation propoſée peut être amenée à une intégrale finie. Cette recherche, qui paroît d'abord aſſez épineuſe, & qui en effet exige une certaine ſagacité, trouve aſſez naturellement ſa ſolution par la méthode de M. de Condorcet. Il n'eſt pas néceſſaire de trouver toutes les intégrales ſucceſſives. M. de Condorcet donne la relation que doivent avoir les parties de l'équation propoſée, pour que la condition demandée ait lieu.

De ces recherches, qui renferment un très grand nombre de réflexions utiles & d'opérations ingénieuſes, M. de Condorcet paſſe à la méthode générale de trouver l'intégrale d'une équation différentielle propoſée. Il examine quel peut être le nombre & la nature des fonctions tranſcendantes qui peuvent entrer dans cette équation intégrale, comment ces fonctions tranſcendantes ont pu diſparoître dans les différenciations ſuceſſives. Il donne les moyens de préparer des équations générales, repréſentatives de l'intégrale, & qui, par différentes combinaiſons qu'il indique, puiſſent enfin devenir l'équation différentielle propoſée. Ce n'eſt que par la lecture de l'Ouvrage même, qu'on peut ſe former une idée ſuffiſante de l'étendue de ces méthodes : il nous ſuffit de dire qu'elles s'appliquent à toute équation différentielle.

Dans la ſeconde Partie, qui, comme nous l'avons déja dit, traite des différences finies, M. de Condorcet, après avoir expliqué la nature de ces différences, traite de l'intégration des équations qui renferment ces quantités. Il fait voir qu'on ne doit eſpérer l'intégration de ces ſortes d'équations, que dans le cas où la ſuppoſition que la différence ſoit infiniment petite les rendroit intégrables : mais cette condition, quoiqu'eſſentielle, n'eſt pas la ſeule à laquelle l'intégrabilité ſoit aſſujettie. C'eſt pourquoi M. de Condorcet s'occupe enſuite de la recherche des conditions néceſſaires pour qu'une équation à différences finies ait pour intégrale une fonction d'un ordre inférieur, & même une fonction ſans différences.

A la ſuite de ce travail, M. de Condorcet a ajouté un essai sur les équations différentielles qui contiennent des différences partielles. On appelle ainsi les équations qui expriment la relation entre la différentielle d'une quantité prise en faisant varier quelques-unes de ses parties seulement. M. de Condorcet donne les moyens de reconnoître dans quels cas ces sortes d'équations sont intégrables, & d'en trouver l'intégrale, lorsque cela est possible.

La nature des objets sur lesquels roule cet Ouvrage, ne permet guere, dans un extrait, un plus grand développement sur la finesse & la profondeur des vues que supposent les méthodes dont l'Auteur fait usage, & qui, pour la plupart, lui sont propres. Non seulement cet Ouvrage suppose dans l'Auteur des connoissances de calcul très étendues, & qu'il est très rare de trouver à pareil degré dans un âge aussi peu avancé; mais il annonce encore les plus grands talens, & les plus dignes d'être excités par l'approbation de l'Académie. Fait à Paris, ce 22 Mai 1765. *Signé*, D'ALEMBERT & BEZOUT.

Je certifie le présent Extrait conforme à son original & au jugement de l'Académie. A Paris, ce 29 Mai 1765.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

DU

DU CALCUL INTEGRAL.

JE me propoſe dans cet Ouvrage de donner une méthode générale de déterminer l'intégrale finie d'une équation différentielle donnée. Je le diviſe en deux Parties. Je traiterai dans la premiere, avec aſſez d'étendue, des équations différentielles ordinaires : je donnerai dans la ſeconde quelques principes pour appliquer la théorie expliquée dans la premiere aux équations aux différences finies, & à celles où une même variable, égalée à une fonction de pluſieurs autres, a été ſucceſſivement ſuppoſée varier avec chacune d'entre elles.

PREMIERE PARTIE.

De l'intégration des équations différentielles aux différences infiniment petites.

PAR résoudre, ou intégrer une équation différentielle, j'entens, trouver l'équation finie, qui, par un nombre de différentiations successives égal à l'exposant de l'ordre de la proposée, la peut produire ; ou trouver du moins une équation finie, telle, que tirant de cette équation la valeur d'une des variables, & substituant cette valeur pour la variable dans la proposée, celle-ci devienne nulle par elle-même. J'appellerai dans la suite une telle équation finie l'*intégrale finie*, ou simplement l'*intégrale de la proposée*.

J'entens encore, dans un autre sens, par résoudre ou intégrer une équation différentielle, trouver une équation d'un ordre moindre d'une unité, qui, par sa différentiation, produise la proposée, ou qui du moins la résolve : & j'appellerai une telle équation l'*intégrale de la proposée d'un ordre inférieur d'une unité*, ou simplement *de l'ordre inférieur*.

Si, par des différentiations successives, une équation finie a produit une équation différentielle d'un ordre n, il y aura nécessairement un nombre n des constantes qui entroient dans les coefficiens de l'équation finie, qui ne ſe trouveront plus dans ceux de l'équation différentielle ; & par conſéquent, en repaſſant de cette équation différentielle à ſon intégrale finie, les conſtantes reſteront néceſſairement indéterminées : il y aura donc dans l'intégrale finie un nombre n de conſtantes arbitraires ; & il ne pourra y en avoir davantage.

Mais ſi je prends le terme d'*intégrale* dans le ſens le plus étendu, c'eſt-à-dire, pour une équation finie qui réſolve une équation différentielle propoſée, il m'eſt aiſé de voir, avec un peu d'attention, que, s'il ne peut y avoir dans les coefficiens de l'équation finie plus de conſtantes arbitraires que l'expoſant de l'ordre de l'équation ne contient d'unités, il ſe peut faire au contraire qu'il y en ait moins, ou même qu'il n'y en ait pas du tout. Les intégrales, priſes dans ce ſens, ſeront donc générales ou particulieres, & les ſolutions qu'elles donnent, complettes ou incomplettes. Les intégrales ſeront générales & les ſolutions complettes, lorſqu'elles renfermeront un nombre d'arbitraires égal à l'expoſant de l'ordre de l'équation différentielle. Les intégrales ſeront particulieres & les ſolutions incomplettes, lorſqu'elles en renfermeront moins.

J'ignore ſi, en combinant à volonté des variables & leurs différentielles d'un ordre quelconque, il n'arrive pas ſouvent que la fonction ainſi formée ne ſoit la différentielle exacte d'aucune fonction finie, ou même d'aucune fonction d'un ordre inférieur d'une unité, ou que l'équation qu'on a en égalant cette fonction à zero, n'ait aucune intégrale, ſoit finie, ſoit de l'ordre inférieur, ou n'en ait que de particulieres. Il paroît même naturel que cela soit ainsi. C'est pourquoi, avant de chercher à intégrer une équation ou une fonction, il est à propos de s'assurer si elle a une intégrale, & pour cela de trouver certaines conditions dépendantes de la forme générale d'une fonction ou équation différentielle qui aient toujours lieu, & qui n'aient jamais lieu que dans ce cas.

Je divise donc cette premiere Partie en deux Sections. Je donnerai dans la premiere le résultat de mes recherches sur ces conditions. Je traiterai dans la seconde de l'intégration des équations que j'aurai reconnu, par les méthodes de la premiere, avoir des intégrales finies possibles.

PREMIERE SECTION

De la recherche des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction ou équation différentielle proposée ait une intégrale.

Je crois que toutes les recherches qu'on peut faire sur la forme que doit avoir une fonction ou une équation différentielle pour être intégrable, se réduisent à celles qui sont l'objet des problêmes suivans, dont les quatre premiers roulent sur les fonctions, & les trois derniers sur les équations différentielles.

Comme il n'y a encore que quelques Géometres qui se soient familiarisés avec la matiere que je traite ici, je crois qu'il n'est pas hors de propos d'avertir, 1°. que par équation de condition, j'entends une équation qui doit avoir lieu pour qu'une fonction ou équation différentielle ait une intégrale. 2°. Que par équation identique, j'entends une équation telle, que dans la fonction égalée à zero, tous les termes se détruisent. 3°. Que l'expression $\frac{dV}{dx}$ exprime la différence de V prise en ne faisant varier que x, & divisée par dx. 4°. Que $\frac{ddV}{dx\,dy}$ exprime la différence de $\frac{dV}{dy}$ prise en nefaisant varier que x, & divisée par dx, ou la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en ne faisant varier que y, & divisée par dy, ce qui revient au même. Enfin que $d\,\frac{dV}{dx}$ exprime la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en faisant tout varier. Cette explicatiion suffit pour faire entendre la valeur de toutes les autres expressions semblables.

PROBLÊME I.

TROUVER l'équation qui doit avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque de deux variables x, y, où dx est supposé constant, soit la différentielle exacte d'une fonction des mêmes variables d'un ordre moins élevé d'une unité.

SOLUTION. Soit V la fonction proposée, B la fonction de l'ordre inférieur dont V doit être la différence. Je fais dans V & dans B $dx = p$, $dy = p'$, $dp = 0$, à cause de dx constant, $ddy = dp' = q'$, $d^3y = d^2p' = dq' = r'$, $d^4y = d^3p' = d^2q' = dr' = s'$, & ainsi de ſuite : j'aurai donc V & B fonctions de x, y, p, p', q', r', s', &c. la derniere de ces lettres p', q', r', s', &c. qui ſe trouve dans V ne devant pas ſe trouver dans B, parceque B eſt d'un ordre inférieur à V ; & cette ſubſtitution me donnera moyen de diſtinguer les p, p', q', r', s', &c. qui ſe trouvent dans B, de ceux que la différentiation introduit dans dB.

Cela poſé, j'aurai par la ſuppoſition,

$$V = dB = \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy + \frac{dB}{dp'} dp' + \frac{dB}{dq'} dq' + \frac{dB}{dr'} dr',$$

&c. & mettant dans cette valeur de V pour dx, dy, dp', dq', dr', &c. leurs valeurs, j'aurai

$$V = \frac{dB}{dx} p + \frac{dB}{dy} p' + \frac{dB}{dp'} q' + \frac{dB}{dq'} r' + \frac{dB}{dr'} s', \text{ \&c.}$$

forme que doit néceſſairemnt avoir V pour être la différentielle exacte de la fonction B. Pour parvenir à tirer de-là l'équation de condition que je cherche, je différencie les deux membres de l'équation ci-deſſus. Le premier me donne,

$$dV = N dx + N' dy + P' dp' + Q' dq' + R' dr' + S' ds',$$

&c.

où N, N', P', Q', R', S', &c. ſont des quantités connues. Le ſecond me donne,

$$d\,\overline{\frac{dB}{dx} p + \frac{dB}{dy} p' + \frac{dB}{dp'} q' + \frac{dB}{dq'} r' + \frac{dB}{dr'} s', \text{ \&c.}} =$$

$$\overline{\frac{ddB}{dx^2} p + \frac{ddB}{dx\,dy} p' + \frac{ddB}{dx\,dp'} q' + \frac{ddB}{dx\,dq'} r' + \frac{ddB}{dx\,dr'} s', \text{ \&c.}}\ dx$$

$$+ \overline{\frac{ddB}{dy\,dx} p + \frac{ddB}{dy^2} p' + \frac{ddB}{dy\,dp'} q' + \frac{ddB}{dy\,dq'} r' + \frac{ddB}{dy\,dr'} s', \text{ \&c.}}\ dy$$

$$+ \overline{\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dp'dx} p + \frac{ddB}{dp'dx} p' + \frac{ddB}{dp'^2} q' + \frac{ddB}{dp'dq'} r' + \frac{ddB}{dp'dr'} s',}$$

$$\overline{\text{\&c.}}\ dp'$$

$$\overline{+\frac{dB}{dp'}+\frac{ddB}{dq'dx}p+\frac{ddB}{dq'dy}p'+\frac{ddB}{dq'dp'}q'+\frac{ddB}{dq'^2}r'+\frac{ddB}{dq'dr'}s',\text{ \&c.}}\; dq'$$

$$\overline{+\frac{dB}{dq'}+\frac{ddB}{dr'dx}p+\frac{ddB}{dr'dy}p'+\frac{ddB}{dr'dp'}q'+\frac{ddB}{dr'dq'}r'+\frac{ddB}{dr'^2}s',\text{ \&c.}}\; dr'$$

$$+\overline{\frac{dB}{dr'}}+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ds'$$

$$+\;.$$

& réduisant, en mettant pour les suites qui multiplient les dx, dy, dp', dq', dr', ds', &c. leurs valeurs $d\frac{dB}{dx}$, $d\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr}$, $\frac{dB}{dr'}$, &c. j'aurai

$$d\,\overline{\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s',\text{ \&c.}}=$$

$$\overline{d\frac{dB}{dx}}dx+\overline{d\frac{dB}{dy}}dy+\overline{\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}}dp'+\overline{\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}}dq'+$$

$$\overline{\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}}dr'+\overline{\frac{dB}{dr'}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; ds',\text{ \&c.}$$

Mais puisque V & $\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s'$, &c. doivent être une même chose, leurs différences doivent être égales terme à terme : j'aurai donc

$$N=d\frac{dB}{dx} \qquad N'=d\frac{dB}{dy}$$

$$P'=\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}$$

$$Q'=\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}$$

$$R'=\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}$$

$$S'=\frac{dB}{dr'}+\;.\;.$$

équations qui donnent les valeurs que doivent avoir N, N', P', Q', R', S', &c. pour que V soit la différentielle exacte de B. Je remarque maintenant que, dans cette suite d'équations, le second membre de la premiere & de la derniere ne peuvent avoir qu'un terme, & qu'ainsi chaque $\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dr'}$, se trouve dans une équation, & sa différence dans une autre. Mettant donc ces équations sous cette forme,

$$N' = d\frac{dB}{dy}$$

$$dP' = d\frac{dB}{dy} + d^2\frac{dB}{dp'}$$

$$d^2Q' = d^2\frac{dB}{dp'} + d^3\frac{dB}{dq'}$$

$$d^3R' = d^3\frac{dB}{dq'} + d^4\frac{dB}{dr'}$$

$$d^4S' = d^4\frac{dB}{dr'} + \cdot\ \cdot$$

j'aurai, en retranchant alternativement l'une de l'autre, $N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S'$, &c. $= 0$: équation identique qui doit avoir lieu pour que V soit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre inférieur d'une unité, & qui est par conséquent l'équation de condition cherchée.

PROBLÈME II.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque de deux variables x, y, où aucune des différences premieres n'est supposée constante, soit la différentielle

férentielle exacte d'une fonction des mêmes variables d'un ordre moins élevé d'une unité.

SOLUTION. Soit, comme ci-dessus, V la fonction différentielle proposée, B la fonction d'un ordre inférieur dont V doit être la différentielle exacte : je fais, comme dans le problême précédent, $dx = p$, $dp = q$, $dq = r$, $dr = s$, &c. $dy = p'$, $dp' = q'$, $dq' = r'$, $dr' = s'$, &c. & B & V seront fonctions de x, y, p, q, r, s, &c. p', q', r', s', &c. les dernieres de ces lettres qui se trouvent dans V ne se trouvant pas dans B, parceque B doit être d'un ordre inférieur d'une unité. J'aurai donc par la supposition,

$$V = dB = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dq}dq + \frac{dB}{dr}dr, \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr', \text{ \&c.}$$

& substituant pour dx, dp, dq, dr, &c. leurs valeurs p, q, r, s, &c. & pour dy, dp', dq', dr', &c. leurs valeurs p', q'. r', s', &c. j'aurai

$$V = \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s, \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s', \text{ \&c.}$$

forme que doit avoir V pour être une différentielle exacte.

Maintenant pour avoir les équations de condition, je prends, comme dans le problême précédent, la différence de chacun des membres de l'équation ci-dessus; & j'ai d'une part

$$dV = Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + Sds, \text{ \&c.}$$
$$+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds', \text{ \&c.}$$

où N, P, Q, R, S, &c. N', P', Q', R', S', &c. ſont donnés : & de l'autre, en réduiſant comme ci-deſſus,

$$d\left\{\begin{array}{l}\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dp}q+\frac{dB}{dq}r+\frac{dB}{dr}s\text{, \&c.}\\ +\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s'\text{, \&c.}\end{array}\right.=$$

$$\overline{d\frac{dB}{dx}}\,dx+\overline{\frac{dB}{dx}+d\frac{dB}{dp}}\,dp+\overline{\frac{dB}{dp}+d\frac{dB}{dq}}\,dq+\overline{\frac{dB}{dq}+d\frac{dB}{dr}}\,dr+\overline{\frac{dB}{dr}}\;\ldots\ldots\;ds\text{, \&c.}$$

$$+\overline{d\frac{dB}{dy}}\,dy+\overline{\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}}\,dp'+\overline{\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dq'}}\,dq'+\overline{\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}}\,dr'+\overline{\frac{dB}{dr'}}\;\ldots\ldots\;ds'\text{, \&c.}$$

Mais puiſque V doit être une même choſe que

$$\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dp}q+\frac{dB}{dq}r+\frac{dB}{dr}s\text{, \&c.}$$

$$+\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s'\text{, \&c.}$$

leurs différences doivent être égales terme à terme. J'aurai donc ces deux ſuites d'équations

$$\begin{array}{ll}N=d\frac{dB}{dx} & N'=\frac{dB}{dy}\\ P=\frac{dB}{dx}+d\frac{dB}{dp} & P'=\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}\\ Q=\frac{dB}{dp}+d\frac{dB}{dq} & Q'=\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}\\ R=\frac{dB}{dq}+d\frac{dB}{dr} & R'=\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}\\ S=\frac{dB}{dr}\;\ldots & S'=\frac{dB}{dr'}\;\ldots\end{array}$$

équations qui me donnent les formes que doivent avoir N, P, Q, R, S, &c. N', P', Q', R', S', &c. pour que V soit une différentielle exacte. Je remarque que, dans ces suites d'équations, chaque $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, $\frac{dB}{dr}$, &c. ou $\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dr'}$, &c. se trouve une fois, & sa différence une autre fois, parceque chaque premiere équation & chaque derniere n'ont qu'un terme. J'aurai donc les équations

$$N - dP + ddQ - d^3 R + d^4 S, \text{ \&c.} = 0$$
$$N' - dP' + ddQ' - d^3 R' + d^4 S', \text{ \&c.} = 0$$

équations identiques qui doivent avoir lieu pour que V soit la différentielle exacte d'une fonction B. C. Q. F. T.

PROBLEME III.

TROUVER les équations de condition pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque, & contenant un nombre quelconque de variables x, y, u, z, &c. soit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre inférieur d'une unité.

SOLUTION. Je ne mets ici ce problême, qui n'a aucune difficulté après ce qu'on a vu ci-dessus, que pour expliquer comment la méthode que j'ai détaillée pour deux variables s'étend à un nombre quelconque.

Soit donc toujours V la fonction proposée, B son intégrale : je fais

$$dz = p, \; dp = q, \; dq = r, \; dr = s, \text{ \&c.}$$
$$dy = p', \; dp' = q', \; dq' = r', \; dr' = s', \text{ \&c.}$$
$$du = p'', \; dp'' = q'', \; dq'' = r'', \; dr'' = s'', \text{ \&c.}$$
$$dz = p''', \; dp''' = q''', \; dq''' = r''', \; dr''' = s''', \text{ \&c.}$$

& ainsi de suite; & j'ai

$$\begin{aligned} V = dB = {} & \frac{dB}{dx}\,p + \frac{dB}{dp}\,q + \frac{dB}{dq}\,r + \frac{dB}{dr}\,s, \text{ \&c.} \\ & + \frac{dB}{dy}\,p' + \frac{dB}{dp'}\,q' + \frac{dB}{dq'}\,r' + \frac{dB}{dr'}\,s', \text{ \&c.} \\ & + \frac{dB}{du}\,p'' + \frac{dB}{dp''}\,q'' + \frac{dB}{dq''}\,r'' + \frac{dB}{dr''}\,s'', \text{ \&c.} \\ & + \frac{dB}{dz}\,p''' + \frac{dB}{dp'''}\,q''' + \frac{dB}{dq'''}\,r''' + \frac{dB}{dr'''}\,s''', \text{ \&c.} \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

forme que doit avoir V pour être une différentielle exacte. Faisant donc les mêmes réflexions que ci-dessus, j'aurai

$$\begin{aligned} dV = {} & N\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds, \text{ \&c.} \\ & + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds', \text{ \&c.} \\ & + N''du + P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' + S''ds'', \text{ \&c.} \\ & + N'''dz + P'''dp''' + Q'''dq''' + R'''dr''' + S'''ds''', \text{ \&c.} \\ & + \text{\&c.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d\frac{dB}{dx}\,dx + \overline{\frac{dB}{dx} + d\frac{dB}{dp}}\,dp + \overline{\frac{dB}{dp} + d\frac{dB}{dq}}\,dq + \\ & \overline{\frac{dB}{dq} + d\frac{dB}{dr}}\,dr + \overline{\frac{dB}{dr}\;.\;.\;.}\;ds, \text{ \&c.} \\ & + d\frac{dB}{dy}\,dy + \overline{\frac{dB}{dy} + d\frac{dB}{dp'}}\,dp' + \overline{\frac{dB}{dp'} + d\frac{dB}{dq'}}\,dq' + \\ & \overline{\frac{dB}{dq'} + d\frac{dB}{dr'}}\,dr' + \overline{\frac{dB}{dr'}\;.\;.\;.}\;ds', \text{ \&c.} \\ & + d\frac{dB}{du}\,du + \overline{\frac{dB}{du} + d\frac{dB}{dp''}}\,dp'' + \overline{\frac{dB}{dp''} + d\frac{dB}{dq''}}\,dq'' + \\ & \overline{\frac{dB}{dq''} + d\frac{dB}{dr''}}\,dr'' + \overline{\frac{dB}{dr''}\;.\;.\;.}\;ds'', \text{ \&c.} \\ & + d\frac{dB}{dz}\,dz + \overline{\frac{dB}{dz} + d\frac{dB}{dp'''}}\,dp''' + \overline{\frac{dB}{dp'''} + d\frac{dB}{dq'''}}\,dq''' + \\ & \overline{\frac{dB}{dq'''} + d\frac{dB}{dr'''}}\,dr''' + \overline{\frac{dB}{dr'''}\;.\;.\;.}\;ds''', \text{ \&c.} \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

& comme ces deux valeurs de dV doivent être égales terme à terme, j'aurai autant de suites semblables d'équations, que j'aurai eu de variables ; & chaque suite me donnera une équation de condition de la même forme. J'aurai donc les équations identiques

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S, \&c. = 0$$
$$N' - dP' + ddQ' - d^3R' + d^4S', \&c. = 0$$
$$N'' - dP'' + ddQ'' - d^3R'' + d^4S'', \&c. = 0$$
$$N''' - dP''' + ddQ''' - d^3R''' + d^4S''', \&c. = 0$$

& ainsi de suite pour chaque variable. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

EN suivant l'analyse du problême précédent, il est aisé de voir que, si une des différences du premier ordre eût été supposée constante, on auroit eu les mêmes équations de condition, excepté celle qui se rapporte à la variable dont la différence a été supposée constante : ensorte que, si aucune différence n'est supposée constante, le nombre des équations de condition est égal à celui des variables ; autrement il lui est inférieur d'une unité.

REMARQUE II.

LORSQUE $V = dB$, V est nécessairement de la forme

$$\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s, \&c.$$
$$+ \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s', \&c.$$
$$+ \frac{dB}{du}p'' + \frac{dB}{dp''}q'' + \frac{dB}{dq''}r'' + \frac{dB}{dr''}s'', \&c.$$
$$+ \frac{dB}{dz}p''' + \frac{dB}{dp'''}q''' + \frac{dB}{dq'''}r''' + \frac{dB}{dr'''}s''', \&c.$$
$$+ \&c.$$

On en auroit donc pu conclure d'abord, que les dernieres différences qui ne se trouvent pas dans B, ne peuvent être dans V que sous une forme linéaire: mais cette condition est renfermée dans nos équations de condition. En effet, si les différences les plus élevées se trouvoient dans les derniers termes de la valeur de dV, qui donnent les derniers termes de ces équations, il n'y auroit alors aucune fonction dans les termes précédens, qui pût donner dans l'équation des différences aussi élevées que celles que produisent les différentiations de ces derniers termes; & par conséquent on ne pourroit faire disparoître ces différences, & l'équation ne sauroit être identique.

REMARQUE III.

CEUX qui connoissent les équations de condition qu'a donné M. Fontaine pour les équations différentielles du premier ordre, ne seront peut-être pas fâchés de voir ici l'identité de ses formules & des miennes, quoique trouvées par des méthodes toutes différentes.

M. Fontaine, dans sa premiere méthode de calcul intégral, démontre [Théo. 2 & 3] que, si une fonction

$$A dx + B dy + C du + D dz,$$

par exemple, A, B, C, D étant des fonctions finies, est la différentielle exacte d'une fonction finie des mêmes variables, on a les équations identiques

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}, \quad \frac{dA}{du} = \frac{dC}{dx}, \quad \frac{dA}{dz} = \frac{dD}{dx}, \quad \frac{dB}{du} = \frac{dC}{dy},$$

$$\frac{dB}{dz} = \frac{dD}{dy}, \quad \frac{dC}{dz} = \frac{dD}{du}$$

Or, dans ce cas [Problême 3] nous avons

$$V = Ap + Bp' + Cp'' + Dp''',$$

& pour équations de condition

$N - dP = 0$, ou, mettant pour N & P leurs valeurs

$$p' \overline{\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}} + p'' \overline{\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{du}} + p''' \overline{\frac{dD}{dz} - \frac{dA}{dz}} = 0$$

$N' - dP' = 0$, ou

$$p \overline{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}} + p'' \overline{\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{du}} + p''' \overline{\frac{dD}{dy} - \frac{dB}{dz}} = 0$$

$N'' - dP'' = 0$, ou

$$p \overline{\frac{dA}{du} - \frac{dC}{dx}} + p' \overline{\frac{dB}{du} - \frac{dC}{dy}} + p''' \overline{\frac{dD}{du} - \frac{dC}{dz}} = 0$$

& enfin

$N''' - dP''' = 0$, ou

$$p \overline{\frac{dA}{dz} - \frac{dD}{dx}} + p' \overline{\frac{dB}{dz} - \frac{dD}{dy}} + p'' \overline{\frac{dC}{dz} - \frac{dD}{du}} = 0$$

Mais les p, p', p'', p''', ne se trouvent pas dans A, B, C, D, & les équations ci-dessus doivent être identiques : donc chacun des coefficiens de p, p', p'', p''', doit être nul par lui-même : donc trois quelconques de mes équations donnent la quatrieme & les six de la méthode de M. Fontaine.

Il en seroit de même pour tout autre nombre de variables.

Si la fonction eût été $Adx + Bdy$, on n'auroit eu pour équations que

$$N - dP = 0$$
$$N' - dP' = 0$$

qui deviennent

$$p \overline{\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}}$$
$$p' \overline{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}} = 0$$

ce qui ne donne que l'équation de condition connue

$$\frac{dA}{dy_{\prime}} = \frac{dB}{dx}$$

REMARQUE IV.

Les formules des équations de condition que j'ai données dans les problêmes précédens, sont identiquement les mêmes que, dans leurs excellens Ouvrages, MM. Euler & de la Grange donnent pour les équations qui doivent avoir lieu entre les variables, pour qu'une fonction intégrale indéfinie $\int V$ soit un *maximum*, ou un *minimum*. Cet accord est fondé sur une identité analytique entre les deux questions que je vais exposer.

Voici d'abord le procédé de M. de la Grange.

Soit $\int V$ une fonction intégrale indéfinie, qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*. Je suppose que V devienne en général $V + \partial V$, dans le cas du *minimum*, ou *maximum*, $\overline{\int V + \partial V}$ devra être $\int V$, & par conséquent $\partial V = 0$.

$$\begin{aligned} dV = {} & N dx + P dp + Q dq + R dr, \text{ \&c.} \\ & + N' dy + P' dp' + Q' dq' + R dr', \text{ \&c.} \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

& par conséquent

$$\begin{aligned} \partial V = {} & N \partial x + P \partial p + Q \partial q + R \partial r, \text{ \&c.} \\ & + N' \partial y + P' \partial p' + Q' \partial q' + R \partial r', \text{ \&c.} \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

N, P, Q, R, &c. N', P', Q', R', &c. restant toujours

jours les mêmes, & les ∂x, ∂p, ∂q, ∂r, &c. ∂y, $\partial p'$, $\partial q'$, $\partial r'$, &c. étant des différences absolument indépendantes de celles qui se trouvent dans V.

Mettant donc pour p, q, r, &c. p', q', r', &c. leurs valeurs, j'aurai

$$\begin{aligned}\int \partial V = \int N \partial x + P \partial dx + Q \partial d^2 x + R \partial d^3 x, \ \&c.\\ + N \partial y + P' \partial dy + Q' \partial d^2 y + R' \partial d^3 y, \ \&c.\\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0\end{aligned}$$

équation qui doit être identique. Je remarque maintenant que, par rapport aux différences affectées de la caractéristique d auxquelles se rapporte le signe $\int$, cette fonction est intégrable par parties; & l'équation devient alors $\overline{\int A \partial x + B \partial y + \&c.} + Z = 0$, A, B, &c. ne contenant point de ∂x ou ∂y, & par conséquent n'étant plus réductibles: j'aurai donc, pour qu'elle puisse être identique, A, B, &c. nuls par eux-mêmes, & conséquemment les équations $A = 0$, $B = 0$, &c. entre les variables: j'aurai aussi chaque terme de Z égal à zero. Mais comme ils ne sont plus sous le signe d'intégration, il suffit que ces équations aient lieu pour chaque valeur de $\int V$.

Je suppose maintenant que V doive être une différentielle exacte, $V + \partial V$, & par conséquent ∂V seront aussi des différentielles exactes par rapport aux différences affectées de la caractéristique d. Mais intégrant ∂V par parties, j'aurai

$$\overline{\int A \partial x + B \partial y + \&c.} + Z.$$

Donc lorsque V sera une différentielle exacte, A, B,

&c. seront nuls ; & j'aurai les équations identiques $A = 0$, $B = 0$, &c.

Les formules des équations de condition doivent donc être les mêmes que celles des équations qui doivent avoir lieu entre les variables, lorsqu'une formule intégrale indéfinie est un *maximum*, ou un *minimum*.

Si, dans le problême *de maximis & minimis*, A, B, &c. étoient nuls par eux-mêmes, il n'y auroit donc aucune équation nécessaire entre les variables ; ce qu'on sait d'ailleurs. *Voyez l'Ouvrage de M. Euler, Théorême premier.*

On voit aussi que, dans le même problême, il y a autant d'équations entre les variables, que de variables : d'où il suit que le problême n'est possible que lorsque ces équations se réduisent à une de moins. En effet, tout problême où l'on traite des formules qui renferment des différentielles des ordres supérieurs, n'est possible que lorsque, supposant une des différentielles constante, la fonction ne change point ; & cette condition réduit les équations à une de moins : car, dans ce cas, si toutes les équations de condition, hors une, sont supposées avoir lieu, celle-ci en suit nécessairement. *Voyez ci-dessus, Remarque I. Voyez l'Ouvrage de M. de la Grange, N°. VIII.*

PROBLEME IV.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque & comprenant un nombre quelconque de variables, ſoit la différentielle exacte d'une fonction finie.

SOLUTION. Soit, comme ci-deſſus la fonction propoſée V; B la fonction d'un ordre inférieur d'une unité, dont V doit être la différentielle exacte; B' la fonction d'un ordre inférieur, dont B doit être la différentielle exacte; B'' la fonction d'un ordre inférieur, dont B' doit être la différentielle exacte; & ainſi de ſuite juſqu'à l'intégrale finie.

Je fais

$$\begin{array}{l} dV = N\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds, \text{ \&c.} \\ \quad + N'dy + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad + N''du + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad + N'''dz + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

& j'ai 1°. par le Problême III, pour la variable x, l'équation de condition

$$N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S, \text{ \&c.} = 0,$$

& une équation ſemblable pour chaque autre variable.

J'ai 2°. par le même Problême, pour la variable x, l'équation de condition

$$\frac{dB}{dx} - d\frac{dB}{dp} + d^2\frac{dB}{dq} - d^3\frac{dB}{dr}, \text{ \&c.}$$

Mais [Prob. II.] $P = \frac{dB}{dx} + d\frac{dB}{dp}$

$$Q = \frac{dB}{dp} + d\frac{dB}{dq}$$

$$R = \frac{dB}{dq} + d\frac{dB}{dr}$$

$$S = \frac{dB}{dr} + \cdot \cdot$$

J'aurai donc $\frac{dB}{dx} = P - dQ + d^2R - d^3S$, &c.

$$\frac{dB}{dp} = Q - dR + d^2S, \text{ \&c.}$$

$$\frac{dB}{dq} = R - dS, \text{ \&c.}$$

$$\frac{dB}{dr} = S, \text{ \&c.}$$

& substituant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dB}{dx} - d\frac{dB}{dp} + d^2\frac{dB}{dq} - d^3\frac{dB}{dr}, \text{ \&c.}$$

il en résultera l'équation de condition

$$P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S, \text{ \&c.} = 0;$$

& j'aurai pour chaque variable une équation semblable.

3°. J'ai, pour la variable x, l'équation de condition

$$\frac{dB'}{dx} - d\frac{dB'}{dp} + d^2\frac{dB'}{dq}, \text{ \&c.} = 0,$$

qui, par le N°. 2, devient

$$\frac{dB}{dp} - 2d\frac{dB}{dq} + 3d^2\frac{dB}{dr}, \text{ \&c.} = 0,$$

qui, en faisant les mêmes substitutions que dans le N°. précédent pour $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, $\frac{dB}{dr}$, &c. devient enfin

$$Q - 3dR + 6d^2S, \text{ \&c.} = 0;$$

& j'aurai une équation de condition semblable pour chaque variable.

On voit aisément que je puis continuer les mêmes opérations jusqu'à ce que je parvienne à une fonction finie, & qu'ainsi, sans avoir besoin de connoître B, B', B'', &c. j'aurai les équations de condition cherchées.

REMARQUE I.

Il suit de ce qui précede, que j'aurai autant de suites d'équations que de variables, à moins qu'il n'y ait une différentielle ſuppoſée conſtante, & qu'alors il y en aura une de moins. Le nombre des équations ſera, dans chaque ſuite, égal à l'expoſant de l'ordre des différences; enſorte que, pour la variable x, par exemple, la premiere ſera

$$N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S, \text{\&c.} = 0,$$

la 2^e $P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S$, &c. . . $= 0$,

la 3^e $Q - 3dR + 6d^2S$, &c. . . . . $= 0$,

& ainſi de ſuite, les coefficiens étant, dans la premiere, les nombres conſtans, dans la ſeconde, les nombres naturels, dans la troiſieme, les nombres triangulaires, les nombres pyramidaux dans la quatrieme; & ainſi de ſuite.

REMARQUE II.

Il ſuit des valeurs que j'ai trouvées dans le Problême précédent pour les $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, $\frac{dB}{dr}$, &c. que, ſi V eſt une différentielle exacte de B, j'aurai

$$\begin{aligned}
V = {} & P - dQ + d^2R - d^3S, \text{\&c. } dx \\
& + Q - dR + d^2S, \text{\&c. } \ldots \; dp \\
& + R - dS, \text{\&c. } \ldots \; dq \\
& + S, \text{\&c. } \ldots \; dr \\
& + \ldots \\
& + P' - dQ' + d^2R' - d^3S', \text{\&c. } dy \\
& + Q' - dR' + d^2S', \text{\&c. } \ldots \; dp' \\
& + R' - dS', \text{\&c. } \ldots \; dq' \\
& + S', \text{\&c. } \ldots \; dr' \\
& + \ldots
\end{aligned}$$

continuant de même pour chaque variable : & pour avoir la valeur de B, je n'aurai qu'à intégrer la fonction précédente, comme différence d'une fonction de $x, p, q, r,$ &c. $y, p', q', r',$ &c.

Si j'avois V égale à la différence d'un ordre quelconque d'une fonction finie, je n'aurai, si, par exemple, la fonction est du troisieme ordre, qu'à intégrer la fonction $\quad Rdx + R'dy + R''du + R'''dz$, &c.

ou $\quad Sdx + S'dy + S''du + S'''dz$, &c.

si elle est du quatrieme, pour avoir cette fonction finie, à laquelle il faudra ajouter les constantes convenables.

PROBLEME V.

TROUVER l'équation de condition qui doit avoir lieu pour qu'une équation différentielle à deux variables x & y, où aucune des différentielles n'est supposée constante, ait une intégrale de l'ordre inférieur d'une unité.

SOLUTION. Soit fait, comme ci-dessus, $dx = p$, $dp = q$, $dq = r$, &c. $dy = p'$, $dp' = q'$, $dq' = r'$, &c. & que l'équation proposée soit $V = 0$. Je suppose que, multipliant V par A, fonction de $x, p, q, r,$ &c. $y, p', q', r',$ &c. AV devienne une différentielle exacte ; & il suffit pour cela de faire $A = \frac{dB}{V}$, B étant une fonction quelconque de l'ordre inférieur. J'aurai donc, par le Problême II, en faisant

$$dV = Ndx + Pdp + Qdq + Rdr, \text{ \&c.} + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr', \text{ \&c.}$$

& $$dA = \mathrm{N}dx + \Pi dp + \Psi dq + \mathrm{P}dr, \text{ \&c.} + \mathrm{N}'dy + \Pi' dp' + \Psi' dq' + \mathrm{P}'dr', \text{ \&c.}$$

les équations de condition

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\ A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\ dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\ d^2A - \overline{R, \&c.}\ d^3A, \&c.$$

$$+ \overline{\mathrm{N} - d\Pi + d^2\Psi - d^3\mathrm{P}, \&c.}\ V - \overline{\Pi - 2d\Psi + 3d^2\mathrm{P}, \&c.}\ dA + \overline{\Psi - 3d\mathrm{P}, \&c.}\ d^2V - \overline{\mathrm{P}, \&c.}\ d^3V, \&c. = 0$$

$$\& \ \overline{N' - dP' + d^2Q' - d^3R', \&c.}\ A - \overline{P' - 2dQ' + 3d^2R', \&c.}\ dA + \overline{Q' - 3dR', \&c.}\ d^2A - \overline{R', \&c.}\ d^3A, \&c.$$

$$+ \overline{\mathrm{N}' - d\Pi' + d^2\Psi' - d^3\mathrm{P}', \&c.}\ V - \overline{\Pi' - 2d\Psi' + 3d^2\mathrm{P}', \&c.}\ dV + \overline{\Psi' - 3d\mathrm{P}', \&c.}\ d^2V - \overline{\mathrm{P}', \&c.}\ d^3V, \&c. = 0:$$

équations que je puis toujours rendre identiques en faisant $A = \frac{dB}{V}$.

Pour avoir maintenant l'équation de condition que je cherche, je remarque que l'équation $V = 0$ ne peut être intégrable, dans quelque sens que ce soit, que lorsqu'une même fonction égalée à zero rend V & B nuls en même-tems. Mais s'il y a une telle fonction, elle rendra aussi égaux à zero les membres des équations ci-dessus, qui sont multipliés par V, dV, d^2V, &c. & il est clair qu'elle ne peut les rendre nuls dans aucun autre cas. Donc, si l'équation est possible, la fonction affectée de V dans chacune des équations ci-dessus sera nulle par elle-même, ou deviendra telle, en faisant égale à zero une fonction qui rende $V = 0$; & il en sera de même du premier terme de ces équations, qui lui est identiquement égal. J'aurai donc les deux équations

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\; A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\; dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\; d^2A - \overline{R, \&c.}\; d^3A, \&c. = 0$$

$$\overline{N' - dP' + d^2Q' - d^3R', \&c.}\; A - \overline{P' - 2dQ' + 3d^2R', \&c.}\; dA + \overline{Q' - 3dR', \&c.}\; d^2A - \overline{R', \&c.}\; d^3A, \&c. = 0:$$

équations qui seront identiques, ou auront lieu en même-tems que l'équation $V = 0$, lorsque celle-ci aura une intégrale. Donc éliminant A, j'aurai une équation où tout sera connu, & qui sera identique, ou aura lieu en même-tems que $V = 0$, toutes les fois qu'il y aura une fonction d'un ordre inférieur, qui, égalée à zero, rendra $V = 0$. C. Q. F. T.

Remarque.

Si j'avois supposé

$$d\,AV = [N]\,dx + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr, \&c.$$
$$+ [N']\,dy + [P']\,dp' + [Q']\,dq' + [R']\,dr', \&c.$$

& que j'eusse fait égal à zero, dans les valeurs de $[P]$, $[Q]$, $[R]$, &c. $[P']$, $[Q']$, $[R']$, &c. le terme multiplié par V, le résultat eût été le même. En effet, ce terme ne peut être nul en même-tems que V, que lorsque l'équation $V = 0$ est possible. Cette remarque me donnera lieu de simplifier les calculs dans les Problêmes suivans.

Probleme

PROBLEME VI.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque, comprenant un nombre quelconque de variables, ait une intégrale de l'ordre inférieur.

SOLUTION. L'analyse de ce Problême est précisément la même que celle du Problême précédent, qu'il est facile d'appliquer à un nombre quelconque de variables.

Soit donc les variables x, y, u, z, &c. l'équation $V = 0$. Je suppose que AV devienne une différentielle exacte ; ce que je peux faire toujours en supposant $A = \frac{dB}{V}$. J'aurai donc, en faisant

$$\begin{aligned} dAV = & [N]dx + [P]dp + [Q]dq + [R]dr, \&c. \\ & + [N']dy + [P']dp' + [Q']dq' + [R']dr', \&c. \\ & + [N'']du + [P'']dp'' + [Q'']dq'' + [R'']dr'', \&c. \\ & + [N''']dz + [P''']dp''' + [Q''']dq''' + [R''']dr''', \&c. \end{aligned}$$

des équations de condition, semblables à celles du Problême III : équations qui devront être identiques, & auxquelles je satisferai toujours en faisant $A = \frac{dB}{V}$. Mais comme l'équation ne peut être possible, que lorsqu'une même fonction, égalée à zero, rend nuls B & V en même-tems, & que toutes les fois qu'il y a une telle fonction, elle rend aussi nuls les termes multipliés par V dans les valeurs de $[N]$, $[P]$, $[Q]$, $[R]$, &c. $[N']$, $[P']$, $[Q']$, $[R']$, &c. $[N'']$, $[P'']$, $[Q'']$, $[R'']$, &c. $[N''']$, $[P''']$, $[Q''']$, $[R''']$, &c. il est clair que, supposant ces termes tels dans les équations de condition qui sont identiques, la fonction qui restera, égalée à zero, donnera une équation identique, ou une équation qui aura lieu en même-tems que $V = 0$. Mais, dans cette supposition, les équations de condition deviennent

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\, A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\, dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\, d^2A - \overline{R, \&c.}\, d^3A, \&c. = 0$$

$$\overline{N' - dP' + d^2Q' - d^3R', \&c.}\, A - \overline{P' - 2dQ' + 3d^2R', \&c.}\, dA + \overline{Q' - 3dR', \&c.}\, d^2A - \overline{R', \&c.}\, d^3A, \&c. = 0:$$

$$\overline{N'' - dP'' + d^2Q'' - d^3R'', \&c.}\, A - \overline{P'' - 2dQ'' + 3d^2R'', \&c.}\, dA + \overline{Q'' - 3dR'', \&c.}\, d^2A - \overline{R'', \&c.}\, d^3A, \&c.$$

$$\overline{N''' - dP''' + d^2Q''' - d^3R''', \&c.}\, A - \overline{P''' - 3dQ''' + 3d^2R''', \&c.}\, dA + \overline{Q''' - 3dR''', \&c.}\, d^2A - \overline{R''', \&c.}\, d^3A, = 0;$$

& ainsi de suite pour chaque variable. D'où éliminant A, j'aurai des équations où tout sera donné, qui seront identiques, ou auront lieu en même-tems que $V = 0$, toutes les fois que cette équation sera possible, & qui ne pourront être telles que dans ce cas. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

SI aucune différentielle n'est supposée constante, le nombre des équations de condition sera égal à celui des variables diminué d'une unité ; & si une des différentielles est supposée constante, ce nombre sera celui des variables diminué de deux unités ; & la même chose aura lieu pour les équations de la forme $Adx + Bdy + Cdu$, &c. $= 0$ (Remarque III, page 15).

REMARQUE II.

TOUTE équation qui satisfera aux conditions du problême sera possible, c'est-à-dire, admettra une solution complette ou incomplette. Pour distinguer ces deux cas, je remarque 1°. que, pour que la solution puisse être complette, il faut que les différentielles de l'ordre le plus élevé puissent être mises sous une forme linéaire, & que les équations de condition qu'on trouve pour cela par l'algebre ordinaire soient identiques. En effet, quand d'ailleurs elles rendroient $V = 0$, comme elles ne contiennent pas d'arbitraires, & qu'elles sont d'un ordre inférieur, elles ne peuvent fournir de solutions complettes.

2°. Si cette condition a lieu, il faudra tirer de la proposée toutes les équations linéaires qu'elle renferme, prendre pour chacune à part les équations de condition, & la solution pourra être complette, lorsque, substituant dans ces équations la valeur d'une des plus hautes différences prise de la proposée, pour sa différence supérieure, sa valeur tirée d'une équation formée en égalant à zero la différentielle de la proposée, & ainsi de suite, les équations deviendront identiques, ou le seront par elles-mêmes ; car alors cette valeur, substituée dans

dB, rend $dB = 0$; & conséquemment $A = \frac{dB}{V}$ devient d'un ordre inférieur à B : & intégrant AV, on a une intégrale générale.

Dans tout autre cas, l'intégrale ne peut être que particuliere ; car, de ce que la valeur de la différence supérieure, prise de la proposée, ne rend pas $dB = 0$, aucune fonction du même ordre, égalée à zero, ne peut rendre V & dB nuls en même-tems, & par conséquent aucune fonction de l'ordre inférieur qui contienne une arbitraire.

Il est clair par la nature du Problême, & l'on verra en en suivant l'analyse, que les équations de condition qu'on trouveroit en suivant pied à pied les opérations indiquées dans cette Remarque, sont contenues dans les équations de condition générales du Problême, & qu'ainsi, plus simplement, l'équation proposée admettra une solution complette toutes les fois que les équations de condition seront identiques, ou le deviendront en substituant, pour les différences de l'ordre de l'équation, ou d'un ordre supérieur, leurs valeurs tirées de $V = 0$, $dV = 0$, &c. & n'en admettra que dans ce cas, ce qui est évident par soi-même; car alors on aura une fonction du même ordre que V, qui étant égalée à zero, rendra V & $B = 0$; & l'on n'aura pas besoin de recourir à une équation d'un ordre inférieur, qui rende $V = 0$. Donc, &c.

Remarque III.

Soit une équation $dx + Ady + Bdz = 0$: A &

B étant des fonctions finies, j'aurai $V = p + Ap' + Bp'' = 0$, & les équations de condition

$$\frac{N - dP}{P} = \frac{N' - dP'}{P'}$$

$$\frac{N - dP}{P} = \frac{N'' - dP''}{P''}$$

où mettant pour N, P, N', P', N'', P'', leurs valeurs, & éliminant p qui reste à l'aide de l'équation $p + Ap' + Bp'' = 0$, je n'aurai plus que l'équation

$$A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0,$$

qui est celle de M. Fontaine, & qui sera identique lorsque la proposée aura une intégrale générale, & aura lieu en même-tems que la proposée lorsque l'intégrale ne sera que particuliere.

Remarque IV.

Soit V du premier ordre, & à deux variables seulement : on pourra toujours mettre la proposée sous la forme $Adx + Bdy = 0$; cas pour lequel (Remar. I.) il n'y a pas d'équations de condition : d'où je conclus que, quel que soit A & B, cette équation admet une solution complette.

Si pourtant on vouloit le démontrer directement, voici comme il faudroit s'y prendre. Le Problême II donne, dans ce cas, l'équation de condition

$$\frac{N - dP}{P} = \frac{N' - dP'}{P'}$$

Faisant disparoître les dénominateurs, & multipliant par pp', elle devient

$$\overline{Np - pdP}\,P'p' = \overline{N'p' - p'dP'}\,Pp.$$

Mais à cause que les dx, dy se trouvent toujours à une même dimension, on a $aV = Pp + P'p'$, a désignant cette dimension. Donc, puisque $V = 0$, $Pp = -P'p'$; & l'équation précédente devient

$$Np + N'p' - pdP - p'dP = 0.$$

Mais . . $dV = Np + N'p + Pdp + P'dp' = 0.$

Donc l'équation précédente devient

$$Pdp + pdP + P'dp' + pdP' = adV = 0.$$

Donc elle est nulle lorsque $V = 0$, & cela sans avoir besoin de supposer qu'une fonction d'un ordre inférieur rende $V = 0$. Donc la proposée admet une solution complette.

PROBLEME VII.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque, comprenant un nombre quelconque de variables, puisse avoir une intégrale finie.

SOLUTION. Soit toujours $V = 0$. Je suppose, comme dans le Problême VI, que V multiplié par A devienne une différentielle exacte, & que j'aie $AV = dB$, ensorte que $B = 0$ ait lieu en même-tems que $V = 0$: je suppose encore que B multiplié par A' devienne une différentielle exacte, & que j'aie $A'B = dB'$, ensorte que $B' = 0$ ait lieu en même-tems que $B = 0$, que $V = 0$, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation finie.

Cela posé, j'aurai 1°. par le Problême VI, pour la variable x, l'équation

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\; A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\; dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\; d^2A - \overline{R, \&c.}\; d^3A, \&c.$$

& une équation semblable pour chacune des autres variables ; ensorte que, pour avoir les équations de condition, il n'y a plus qu'à éliminer A.

J'aurai 2°. par le même Problême, pour que l'équation $B = 0$ soit possible par rapport à la variable x, l'équation

$$\overline{\frac{dB}{dx} - d\frac{dB}{dp} + d^2\frac{dB}{dq}, \&c.}\; A' - \overline{\frac{dB}{dp} - 2d\frac{dB}{dq}, \&c.}\; dA + \overline{\frac{dB}{dq}, \&c.}\; d^2A', \&c. = 0,$$

& une équation semblable pour chaque variable.

Prenant maintenant, par le Problême VI, les valeurs des $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, &c. en $d\frac{AV}{dp}$, $d\frac{AV}{dq}$, $d\frac{AV}{dr}$, &c. & faisant égaux à zero les termes multipliés par V, dV, &c. ce qui peut toujours se faire, lorsque l'équation $V = 0$ a une intégrale de l'ordre inférieur, & ne peut se faire que dans ce cas, j'aurai l'équation

$$\overline{AP - 2dAQ + 3d^2AR, \&c.}\; A' - \overline{AQ - 3dAR, \&c.}\; dA' + \overline{AR, \&c.}\; d^2A', \&c. = 0,$$

& une équation semblable pour chaque variable.

J'aurai 3°. pour que l'équation $B' = 0$ soit possible, des équations semblables aux précédentes, en mettant A'' pour A'; A' pour A; $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, &c. pour P, Q, &c. & pour $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, &c. leurs valeurs, en supposant nuls les termes multipliés par V: & continuant ces opérations jusqu'à ce que je parvienne à l'équation finie, j'aurai les équations de condition cherchées, en éliminant les A, A', A'', &c. ce qui n'a besoin que des regles ordinaires de l'Algebre. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

Il suit de l'analyse du Problême, que le nombre des équations qui contiennent A, A', A'', &c. étant égal au produit de l'exposant de l'ordre de l'équation par le nombre des variables, & celui des quantités à éliminer étant égal au même exposant, il en résultera un nombre d'équations de condition égal au produit de l'exposant de l'ordre des différences par le nombre des variables diminué de l'unité. Et si une des différentielles est supposée constante, le nombre des équations sera encore diminué d'un nombre égal à l'exposant de l'ordre de l'équation.

REMARQUE II.

Si l'équation $V = 0$ admet une solution complette, A peut être supposée telle, que la valeur d'une des plus hautes différences tirée de $AV = dB$ soit identiquement la même que la valeur de la même différence tirée de $V = 0$: si donc $B = 0$ a une solution complette, tirant de $V = 0$, $dV = 0$, &c. les valeurs d'une des plus hautes différences, & de ses différences supérieures, & substituant dans les équations de condition, elles deviendront identiques.

On

On peut appliquer ce raisonnement aux équations des ordres inférieurs à $B = 0$, & conclure en général que, lorsque toutes les équations de condition seront identiques, ou deviendront telles en y substituant les valeurs des plus hautes différences tirées de $V = 0$, $dV = 0$, &c. la proposée aura une intégrale finie complette, & n'en aura qu'une incomplette dans tout autre cas.

On voit aisément que, s'il n'y avoit que deux variables & une différentielle supposée constante, la proposée admettroit toujours une solution complette.

REMARQUE III.

SI l'équation $V = 0$ étoit telle que V fût la différentielle exacte d'une fonction finie, l'équation auroit une intégrale complette qu'on trouveroit en intégrant la formule que je donne à la fin de la Remarque II, page 22. Mais comme cette intégration ne donne qu'une arbitraire, au lieu d'un nombre égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation, je remarque, pour ôter tout nuage, que cette arbitraire doit alors être supposée de la forme $ax'^n + bx'^{n-1} + \ldots + g$, n étant l'exposant de l'ordre de l'équation, & x' pouvant être une variable quelconque dont la différence soit constante.

REMARQUE VI.

JE suppose que j'aie une équation entre Z, dZ, x, y z, &c. & leurs différences d'un ordre quelconque, il eſt clair que les équations que j'aurai pour que cette équation ait pour intégrale une équation entre x, y, z, &c. leurs différences, & Z, devront être identiques, lorſque j'en aurai éliminé Z & dZ à l'aide de la propoſée, & qu'ainſi elles doivent être les mêmes que celles que l'on auroit eues, ſi l'équation eût été $dZ = M$, M étant une fonction ſans Z, & par conſéquent les mêmes qu'on auroit pour que M ſoit une différentielle exacte.

Soit donc une équation d'un ordre quelconque entre x, y, z, &c. & Z, & que Z doive être un *maximum*, j'aurai (Remarque IV, page 17) les équations qui devront avoir lieu entre les variables, en éliminant les Z, dZ, &c. des équations que donnera le Problême VII, pour que l'équation en Z, dZ puiſſe avoir une intégrale en Z; & il faudra de plus, qu'en ſuppoſant que ces équations aient lieu entre les variables, on puiſſe avoir une intégrale de la propoſée du premier ordre. Donc toutes les équations du Problême VII devront avoir lieu en même-tems, & ſe réduire, pour que le Problême *de maximis* ſoit poſſible, à un nombre égal à celui des variables, en y comprenant la propoſée; & les équations qu'on aura alors en éliminant Z, dZ, &c. ſeront les équations cherchées.

Le cas où la formule $\int V$ devant être un *maximum*, V contiendroit une intégrale indéfinie, ſe rappelle aiſément au cas préſent : on pourroit auſſi alors trouver les équations par les Problêmes III & IV. S'il y avoit une équation qui dût avoir lieu entre les x, y, z, &c. on élimineroit, à l'aide de cette équation, une des variables, & on traiteroit ensuite la formule comme ci-dessus. M. de la Grange a étendu sa méthode à tous ces cas.

CONCLUSION.

VOILA, je crois, comme je l'ai annoncé, tout ce qu'on peut exiger sur les équations de condition. Je puis m'assurer si une équation différentielle proposée a une intégrale finie : il ne me reste donc plus qu'à déterminer cette intégrale, lorsqu'il y en a une : c'est ce que je me propose de faire dans la Section qui suit.

SECONDE SECTION.

Méthode générale de trouver l'intégrale d'une équation différentielle proposée.

QUELLE que soit l'équation différentielle que l'on me propose d'intégrer, je puis la mettre sous une forme telle qu'il ne s'y trouve plus que des puissances entieres & positives des différentielles. Les coefficiens finis de ces différentielles ne peuvent être non plus que des fonctions algébriques des variables

x, y, &c. $r = \mathrm{l}.\,\Phi\, x, y$, &c. $s = \mathrm{l}.\,\Phi'\, x, y$, &c. r,

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$ ou $e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.\, r}$;

& ainsi de suite, Φ, Φ', &c. désignant des fonctions algébriques des variables x, y, &c. ou x, y, &c. r; &c.

& il n'y a point de fonctions analytiques qu'on ne puisse réduire à cette forme ; & je pourrai préparer l'équation ensorte que ces coefficiens ne contiennent plus ni dénominateurs ni radicaux.

J'appellerai une équation différentielle ainsi préparée, *une équation rationnelle & entiere*, *une équation algébrique entre* x, y, *&c. leurs différences*, *&* r, s, *&c.*

L'intégrale finie d'une telle équation pourra toujours être aussi une équation algébrique rationnelle & entiere entre x, y, &c. r, s, t, &c.

Une équation différentielle étant ainsi préparée, j'y remarque quatre points qui la distinguent de tout autre.

1°. L'ordre de l'équation, & le nombre des fonctions r, s, t, &c. qui s'y trouvent.

2°. Le degré où y montent les différences, & celui des équations rationnelles entre x, y, &c. Φ; x, y &c. r, Φ'; &c.

3°. Le degré où montent les x, y, &c. r, s, &c. dans les coefficiens des différentielles, & dans les coefficiens des équations rationnelles & entieres entre x, y, &c. Φ; x, y, &c. r, Φ'; &c.

4°. Les coefficiens constans.

Et, de ces quatre points, je détermine quatre points qui distinguent l'intégrale de cette équation différentielle de toute autre équation finie.

1°. Le nombre des fonctions r, s, t, &c.

2°. Le degré des équations rationnelles entre Φ, Φ', Φ'', &c. & les variables x, y, &c. r, s, t, &c. & le degré où doivent monter les r, s, t, &c. dans l'intégrale mise sous une forme rationnelle & ordonnée par ordre par rapport à ces fonctions, en commençant par la derniere.

3°. Le degré où doivent monter les x, y, &c. dans les coefficiens des fonctions r, s, t, &c. dans l'intégrale cherchée, mise sous une forme rationnelle & entiere.

4°. Les coefficiens constans.

Cette Section se divise donc naturellement en quatre Articles.

ARTICLE I.

Trouver le nombre & la nature des fonctions transcendantes qui peuvent entrer dans l'intégrale d'une équation différentielle proposée.

JE suppose que j'aie une fonction algébrique de x, y, &c. leurs différentielles, & r, fonction transcendante de x, y, &c. & que cette fonction soit égalée à zero. Si je différencie cette fonction, j'aurai une fonction algébrique d'un ordre supérieur entre x, y, &c. leurs différences, r & dr. Donc, égalant cette fonction à zero, si la valeur de dr en x, y, &c. ne contient pas de fonction transcendante, ou n'en contient point d'autre que r, je pourrai éliminer r à l'aide des deux équations, & j'aurai une fonction algébrique des variables x, y, &c. & leurs différences seulement, d'un ordre plus élevé que la proposée, fonction égale à zero; & cela ne peut arriver que dans ces deux cas, parceque je n'ai pas d'équations à l'aide desquelles je puisse éliminer les nouvelles transcendantes que la différentiation auroit produites.

Je dis maintenant que le premier cas ne peut avoir lieu que lorsque la fonction $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. ou $m\,\mathrm{l}.\, a + n\,\mathrm{l}.\, b + p\,\mathrm{l}.\, c$, &c. a, b, c, &c. étant des fonctions algébriques, & m, n, p, &c. des nombres même incommensurables : & le second, lorsque $r = e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$, Φ désignant une fonction algébrique, ou que $r = e^{q\,\mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$, q désignant un nombre irrationnel, sans quoi cette fonction seroit algébrique ; & la constante que la différentiation aura fait disparoître, se trouvera être, pour le premier cas, dans les coefficiens de la proposée, & pour les autres, dans la fonction r; dans le premier, le terme constant de la valeur de r, tirée de la proposée; dans le second, le terme constant de Φ; & dans la troisieme, le coefficient de $a^m b^n c^p$, &c.

Cela posé, soit 1°. une équation du premier ordre entre x, y, &c. dx, dy, &c. sans fonction transcendante : il suit de ce qui précede, que son intégrale finie ne peut être qu'une équation algébrique entre x, y, &c. & $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$,

ou $e^{q\,\mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$.

Mais il est clair que repassant des logarithmes aux nombres, ces trois formes d'équations se réduisent à la premiere. Donc l'équation intégrale finie pourra toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. & $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c.

$$dr = \overline{\frac{m}{a}\frac{da}{dx} + \frac{n}{b}\frac{db}{dx},\ \&c.}\ dx + \overline{\frac{m}{a}\frac{da}{dy} + \frac{n}{b}\frac{db}{dy},\ \&c.}\ dy + \&c.$$

& par conséquent étant ſans fonctions tranſcendantes : & cette équation pourra être r égale à une conſtante, & par-là ſe réduire à une équation algébrique.

Cette derniere remarque s'applique également à ce qui ſuit.

2°. Soit une équation du premier ordre entre x, y, &c. leurs différences, & $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c.

$$\text{ou } e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.},$$

$$\text{ou } e^{q\, \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\ \&c.},$$

regardant r comme une nouvelle variable : il ſuit de ce qui précede, que l'intégrale finie de cette équation peut toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. r, & $s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c. a', b', c', &c. étant des fonctions algébriques de x, y, &c. r.

Soit auſſi une équation différentielle du ſecond ordre entre x, y, &c. & leurs différences du premier & ſecond ordre, ſans fonction tranſcendante, ſon intégrale finie ne pourra être qu'une équation algébrique entre x, y, &c. $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. & $s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

$$\text{ou } e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}, \qquad \text{ou } e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.\, r},$$

$$\text{ou } e^{q\, \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\ \&c.}, \qquad \text{ou } e^{q'\, \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'},\ \&c.};$$

car, dans toute autre ſuppoſition, on ne peut parvenir à une équation du ſecond ordre ſans tranſcendante ; &

par conséquent l'intégrale pourra toujours être supposée une équation algébrique entre x, y, &c. &

$$r = \text{l.}\, a^m\, b^n\, c^p\,, \quad \& \quad s = \text{l.}\, a'^{m'}\, b'^{n'}\, c'^{p'}\,, \text{ \&c.}$$

$$\text{ou} \quad e^{\Phi\, x,\, y,\, \text{\&c.}}\,,$$

$$\text{ou} \quad e^{q\,\text{l.}\, a^m\, b^n\, c^p,\ \text{\&c.}}\,.$$

Une des arbitraires sera le terme constant de la valeur de s, prise de l'équation intégrale : la seconde sera, pour la premiere forme, le terme constant de la valeur de r, prise de l'équation algébrique du premier ordre, qu'on a entre x, y, &c. leurs différences, & r; pour la seconde, le terme constant de Φ; pour la troisieme, le coefficient de $a^m\, b^n\, c^p$, &c.

3°. Soit encore une équation différentielle du premier ordre entre x, y, &c. leurs différences, & r, s, regardant r & s comme de nouvelles variables : il est clair, par ce qui précede, que l'intégrale en pourra toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. r, s & $t = \text{l.}\, a''^{m''}\, b''^{n''}\, c''^{p''}$, &c. a'', b'', c'', &c. étant des fonctions algébriques de x, y, &c. r, s.

Soit une équation du second ordre en x, y, &c. leurs différences, & r, regardant r comme une nouvelle variable : il suit de ce qui précede, que son intégrale finie pourra toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. r, $s = \text{l.}\, a'^{m'}\, b'^{n'}\, c'^{p'}$, &c.

$$\text{ou} \quad e^{\Phi'\, x,\, y,\, \text{\&c.}}\,,$$

$$\text{ou} \quad e^{q'\,\text{l.}\, a'^{m'}\, b'^{n'}\, c'^{p'}}$$

& $t = \text{l.}\, a''^{m''}\, b''^{n''}\, c''^{p''}$, &c.

Soit

Soit enfin une équation du troisieme ordre entre x, y, &c. leurs différences des premier, second & troisieme ordres, sans fonction transcendante : l'intégrale ne pourra jamais être qu'une équation algébrique entre x, y, &c. $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$, ou $e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.\, r}$,

ou $e^{q\, \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$, ou $e^{q'\, \mathrm{l}.\, a'^m b'^{n'} c'^{p'},\, \&c.}$,

& . $t = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{q''}$, &c.

ou $e^{\Phi''\, x,\, y,\, \&c.\, r,\, s}$,

ou $e^{q''\, \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''},\, \&c.}$,

& conséquemment pourra toujours être supposée une équation algébrique entre . . . x, y, &c. $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$, ou $e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.\, r}$,

ou $e^{q\, \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$, ou $e^{q'\, \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'},\, \&c.}$,

& . $t = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c.

ce qui donne neuf formes différentes d'intégrales. Une des arbitraires sera le terme constant de la valeur de t, prise de l'intégrale. La seconde, pour la premiere forme de s, sera le terme constant de la valeur de s, prise de l'équation algébrique du premier ordre, qu'on a entre x, y, &c. r, s ; pour la seconde, le terme constant de Φ' ; pour la troisieme, le coefficient de $a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c. La troisieme sera, pour la premiere forme de r, le terme constant de la valeur de r, prise de l'équation algébrique du second ordre entre x, y, &c. & r; pour la seconde, le terme constant de Φ; pour la troisieme, le coefficient de $a^m b^n c^p$, &c.

Il est aisé d'appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs; & l'on peut conclure en général, 1°. que l'intégrale finie d'une équation de l'ordre n n'est susceptible que de 3^{n-1} de formes semblables à celles que j'ai déterminées ci-dessus; 2°. que ces formes pourront contenir un nombre n de fonctions transcendantes, formées comme ci-dessus, & dans lesquelles entreront celles qui se trouvent déja dans la proposée; 3°. que, dans le cas où l'équation intégrale contient ce nombre de fonctions transcendantes, elle a nécessairement aussi un nombre égal d'arbitraires, qui se trouveront distribuées dans les coefficiens de l'équation intégrale, ou des fonctions transcendantes, selon la nature de celles-ci, comme il a été remarqué ci-dessus.

Si donc une équation proposée n'est susceptible que d'une solution incomplette, les formes générales devront être moins composées, & ne pourront contenir qu'autant de fonctions transcendantes, qu'il doit rester de constantes arbitraires.

La même chose suit aussi de la Section précédente; car si la proposée n'a point d'intégrale générale, en comparant avec la proposée les équations de condition, je parviendrai à une équation d'un ordre inférieur, qui n'aura ni nouvelle transcendante ni arbitraire, & qui aura lieu en même-tems que la proposée; & de-là par le même moyen, à une équation, ou finie, ou qui admettra une solution complette, & où il ne se trouvera ni arbitraire ni nouvelle transcendante, & qui résoudra la proposée : & je n'aurai plus, pour avoir l'intégrale de la proposée, qu'à chercher celle de cette nouvelle équation.

Si, dans les opérations qu'on a été obligé de faire pour mettre l'équation différentielle sous la forme que je considere ici, on avoit eu besoin de la différencier, ce qui a lieu lorsque les fonctions transcendantes qui se trouvent dans cette équation contiennent des différences, ou lorsqu'il s'y trouve des formules sous le signe d'intégration, l'intégrale sera d'une des formes trouvées ci-dessus pour l'ordre où monte la proposée après la différentiation. Mais, dans le premier cas, il faudra déterminer dans l'intégrale un nombre d'arbitraires égal à celui dont l'exposant de l'ordre de la proposée se trouve augmenté : car, sans cela, repassant de l'intégrale finie à la proposée, il y resteroit des arbitraires ; ce qui est contre l'hypothese. Il n'en est pas de même dans le second cas, parceque chaque fonction sous le signe d'intégration contient une arbitraire.

Il suit de ce qui précede, qu'une des intégrales d'un ordre inférieur quelconque d'une équation des ordres supérieurs, qui a une intégrale finie, est toujours une équation algébrique entre x, y, &c. leurs différences, & r, s, &c. mais que les autres peuvent contenir des fonctions transcendantes où entrent des différences, comme on peut s'en assurer en cherchant à produire ces équations par la différentiation de la forme générale de l'intégrale finie de la proposée.

ARTICLE II.

Du degré où doivent monter les r, s, *&c. dans l'équation intégrale mise sous une forme rationnelle & entiere, c'est-à-dire, débarrassée de dénominateurs & de radicaux, & aussi du degré ou des équations entre* Φ, Φ′, *&c.* a, b, c, *&c.* a′, b′, c′, *&c. &* x, y, *&c.*

JE ne supposerai ici, & dans l'Article suivant, que deux variables, pour abréger seulement; car il sera facile de voir que la méthode s'applique également à un plus grand nombre, sans aucune nouvelle difficulté.

I. Soit l'équation proposée du premier ordre, & sans fonctions transcendantes. Je fais disparoître les dénominateurs & les radicaux; & elle devient de la forme

$$A\,dx^{\text{п}} + B\,dx^{\text{п}-1}dy \quad . \quad . \quad . \quad + P\,dy^{\text{п}} = 0,$$

A, B . . . P étant des fonctions entieres & rationnelles de x, y, & п un nombre entier. Par l'Article précédent, l'intégrale de cette équation peut toujours être une équation algébrique entre x, y, & $r = \text{l}.a^m b^n c^p$, &c. $= m\,\text{l}.a + n\,\text{l}.b + p\,\text{l}.c$, &c. a, b, c, &c. étant des fonctions algébriques: & par conséquent l'équation intégrale pourra être mise sous la forme

$$F'r^{\nu} + G'r^{\nu-1} + H'r^{\nu-2} + K'r^{\nu-3} + \cdot\ \cdot = 0,$$

F', G', H', K' étant des fonctions algébriques sans dénominateurs ni radicaux; ensorte que prenant de cette équation la valeur de r, elle soit $X + N$, N étant l'arbitraire, & X étant sans N: ce qui fait qu'on peut changer la forme précédente en celle-ci,

$$\begin{array}{llll}
Fr^{\nu} & + \nu NFr^{\nu-1} & + \frac{\nu.\overline{\nu-1}}{1.2} N^2 Fr^{\nu-2} & + \frac{\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}}{1.2.3} N^3 Fr^{\nu-3} + \dots = 0 \\
+G & + \overline{\nu-1}\, NG & + \frac{\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}}{1.2} N^2 G & \\
 & +H & + \overline{\nu-2}\, NH & \\
 & & +K &
\end{array}$$

F, G, H, &c. étant sans N. On aura aussi, à cause de $dr = d\,\mathrm{l}.\,a^m b^n c^p$, &c. une équation

$$\mathrm{a}\,dr^{\theta} + \overline{\mathrm{b}\,dx + \mathrm{c}\,dy}\,dr^{\theta-1} + \overline{\mathrm{e}\,dx^2 + \mathrm{f}\,dx\,dy + \mathrm{g}\,dy^2}\,dr^{\theta-2} + \dots = 0,$$

a, b, c, &c. étant ici des fonctions algébriques de x, y, sans radicaux & sans dénominateurs : & à l'aide de la valeur de dr, qu'on tire de cette derniere équation, on doit parvenir à une équation de la même forme que la proposée.

Je suppose d'abord $\Pi = 1$: j'aurai une équation différentielle . . . . $A\,dx + B\,dy = 0$,
dont l'intégrale sera . . . . . $\begin{array}{l} Fr + NF = 0; \\ \qquad\quad +G \end{array}$
& j'aurai . . . . . . $\mathrm{a}\,dr + \mathrm{b}\,dx + \mathrm{c}\,dy = 0$,
ce qui donne $a + f = 0$, $b + f' = 0$, $c + f'' = 0$, &c. f, f', f'', &c. étant des fonctions algébriques rationnelles & entieres de x, y; car toute autre supposition donneroit $\Pi > 1$.

Je suppose en second lieu que $\Pi = 2$: j'aurai une équation différentielle $A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2 = 0$,

Donc l'intégrale sera
$$\begin{array}{llll} Fr^2 & + 2NFr & + N^2F & = 0; \\ +G & & + NG & \\ & & + H & \end{array}$$
& j'aurai . . . $a\,dr + b\,dx + c\,dy = 0$: ce qui donne $a + f = 0$, $b + f' = 0$, $c + f'' = 0$, &c.

Ou . . . .
$$\begin{array}{lll} Fr & + NF & = 0; \\ & + G & \end{array}$$
& j'aurai $a\,dr^2 + \overline{b\,dx + c\,dy}\,dr + e\,dx^2 + f\,dx\,dy + g\,dy^2 = 0$: ce qui donne

$fa^2 + ga + h = 0$, $f'b^2 + g'b + h' = 0$, &c.

avec les conditions que $\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f} = \frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f} =$ &c. & un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux, semblables à celles du cas précédent.

Ou enfin . .
$$\begin{array}{llll} Fr^2 & + 2NFr^2 & + N^2F & = 0; \\ +G & & + NF & \\ & & + H & \end{array}$$
& j'aurai $a\,dr^2 + \overline{b\,dx + c\,dy}\,dr + e\,dx^2 + f\,dx\,dy + g\,dy^2 = 0$: ce qui donne, comme ci-dessus,

$fa^2 + ga + h = 0$, $f'b^2 + g'b + h' = 0$, &c.

avec un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux ; & il faudra que
$$\frac{G^2}{4F^2} - \frac{H}{F} = \frac{g^2}{4f'^2} - \frac{h}{f} = \frac{g'^2}{4f'^2} - \frac{h'}{f'} = \text{\&c.}$$
& l'intégrale ne pourra être autre chose, car toute autre supposition donne $\Pi > 2$.

Je suppose en troisieme lieu que $\Pi = 3$: & j'aurai l'équation differentielle

$$A\,dx^3 + B\,dx^2dy + C\,dx\,dy^2 + E\,dy^3 = 0.$$

Donc l'intégrale sera

$$\begin{array}{llll} Fr^3 & +\,3NFr^2 & +\,3N^2Fr & +\,N^3F = 0; \\ \quad +\,G & & +\,2NG & +\,N^2G \\ & & +\,H & +\,NH \\ & & & +\,K \end{array}$$

& j'aurai . . . $\mathrm{a}dr + \mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy = 0$: ce qui donne . . . $a + f = 0$, $b + f' = 0$, &c.

Ou bien l'intégrale sera . . $\begin{array}{l} Fr + NF = 0; \\ \qquad\;\; +\,G \end{array}$

& j'aurai

$$\mathrm{a}dr^3 + \overline{\mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy}\,dr^2 + \overline{\mathrm{e}dx^2 + \mathrm{f}dxdy + \mathrm{g}dy^2}\,dr + \mathrm{h}dx^3 + \mathrm{i}dx^2dy + \mathrm{k}dxdy^2 + \mathrm{l}dy^3 = 0:$$

ce qui donne

$fa^3 + ga^2 + ha + k = 0$, $f'b^3 + g'b^2 + h'b + k' = 0$, &c. &c. avec cette condition, que les racines de toutes ces équations soient commensurables entre elles; & de plus un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux.

Ou enfin l'intégrale sera

$$\begin{array}{llll} Fr^3 & +\,3NFr^2 & +\,3N^2Fr & +\,N^3F = 0; \\ \quad +\,G & & +\,2NG & +\,N^2G \\ & & +\,H & +\,NH \\ & & & +\,K \end{array}$$

& j'aurai

$$\mathrm{a}dr^3 + \overline{\mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy}\,dr^2 + \overline{\mathrm{e}dx^2 + \mathrm{f}dxdy + \mathrm{g}dy^2}\,dr + \mathrm{h}dx^3 + \mathrm{i}dx^2dy + \mathrm{k}dxdy^2 + \mathrm{l}dy^3 = 0:$$

ce qui donne

$fa^3 + ga^2 + ha + k = 0$, $f'b^3 + g'b^2 + h'b + k' = 0$, &c. & un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux, mais avec cette condition, que les racines, tant de la proposée, que de ces équations du troisieme degré, seront commensurables entre elles : & l'intégrale ne pourra être autre chose, car toute autre supposition donneroit $\pi > 3$.

Je parviendrai aisément par la même méthode à déterminer les formes que peut avoir l'intégrale pour les cas où $\pi = 4, 5, 6$, &c. & à en former des tables. On voit en effet que, quel que soit π, le degré de l'équation en r ne peut être qu'un des facteurs de π, & qu'il en est de même de l'équation en dr: d'où il suit que le nombre de ces formes est toujours fini. On voit aussi qu'il pourra y avoir entre les variables & a, b, c, &c. autant de suites d'équations, que π a de facteurs, comptant pour plusieurs facteurs différens le même facteur, lorsque pour produire π il est répété plus d'une fois ; & chacune de ces suites contiendra un nombre indéfini d'équations. Quant aux conditions qui doivent avoir lieu entre les coefficiens, soit de la proposée, soit de ces équations en a, b, c, &c. pour que certaines formes conviennent à la proposée, on pourra les trouver facilement : & 1°. si on veut que plusieurs équations, du cinquieme degré par exemple, aient lieu en même-tems pour $\pi = 5$, on supposera leurs racines commensurables entre elles, ce qui se peut faire sans résoudre l'équation. 2°. Si l'on veut que des équations du second degré aient lieu avec une du quatrieme, pour que $\pi = 4$, il faudra que l'équation du quatrieme ait pour racine la somme des racines de deux équations du second

ſecond ; & le reſte comme ci-deſſus : & pour avoir alors les conditions, on n'aura pas non plus beſoin de réſoudre l'équation.

Si l'équation différentielle propoſée étoit réſolue en facteurs linéaires de dx & dy, alors, comme on connoîtroit les radicaux qui entrent dans la compoſition des coefficiens, & qu'ils ſont les mêmes que ceux qui entrent dans la compoſition de ceux de l'intégrale, on ſauroit immédiatement quelles ſont, entre toutes ces formes, celles qu'on doit choiſir.

Il paroît au premier coup d'œil, que la méthode ne donne aucun réſultat pour le cas le plus ſimple, qui eſt celui où l'intégrale eſt algébrique : car, dans ce cas, Π peut être 1, 2, 3, 4, &c. Mais avec un peu d'attention, on verra que ce cas ſe rappelle de lui-même à celui où on auroit dans $Fr + FN + G = 0$, $F = 1$, $G = 0$, & une équation en dr, telle qu'elle doit être pour la valeur de Π : & il n'y aura plus qu'à repaſſer des logarithmes aux nombres. On en verra des exemples dans l'Art. III.

II. Je ſuppoſe maintenant que l'équation propoſée eſt du ſecond ordre & de cette forme,

$$\overline{Adx^{\Pi} + Bdx^{\Pi-1}dy + \ldots\ ddy^{p}} + \overline{A'dx^{\Pi-2} + B'dx^{\Pi-1}dy + \ldots\ ddy^{p-1}} + \ldots = 0,$$

dont elle eſt ſuſceptible toutes les fois qu'elle admet une ſolution complette. On a vu dans l'Article I, que ſon intégrale pouvoit toujours être ſuppoſée une équaquation algébrique entre

$x, y, r = \mathrm{l}.\, a^m\, b^n\, c^p$, & $s = \mathrm{l}.\, a'^{m'}\, b'^{n'}\, c'^{p'}$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$,

ou $e^{q\mathrm{l}.\, a^m\, b^n\, c^p,\, \&c.}$,

& sera par conséquent de la forme

$$(1)\ \overline{F r^{\omega} + G r^{\omega - 1} + H r^{\omega - 2} + \ldots}\; s^{0} + \overline{F' r^{\omega'} + G' r^{\omega' - 1} + H' r^{\omega' - 2} + \ldots}\; s^{0 - 1} + \ldots = 0:$$

& j'aurai aussi les équations

$$(2)\ \mathrm{a}' d s^{\theta'} + \overline{\mathrm{b}' dx + \mathrm{c}' dy + \mathrm{e}' dr}\; ds^{\theta' - 1} + \ldots = 0,$$

(3) $\begin{cases} \mathrm{a}\, dr^{\theta} + \overline{\mathrm{b}\, dx + \mathrm{c}\, dy}\; dr^{\theta - 1} + \ldots\ldots = 0 \\ \text{pour le premier cas; \&} \\ \mathrm{a}\, dr^{\theta} + \overline{\mathrm{b}\, dx + \mathrm{c}\, dy}\, r\, dr^{\theta - 1} + \ldots\ldots = 0 \end{cases}$

pour les deux autres; a', b', c', &c. a', b', c', &c. étant des fonctions de x, y, r; & a, b, c, &c. a, b, c, &c. de x, y seulement. Je différencie l'équation (1), j'élimine ds avec l'équation (2), puis s avec avec l'équation (1), & dr avec l'équation (3), & j'ai une équation (4) du premier ordre, où il ne se trouve plus que x, y, r, dx & dy. Je différencie cette équation (4) : j'élimine de cette différence dr avec l'équation (3), & r avec l'équation (4); & j'ai une équation différentielle du second ordre, qui ne contient plus que x, y, dx, dy, ddy, sans fonctions transcendantes, & qui doit être de la forme de la proposée : & pour satisfaire aux équations (2), (3), j'aurai des équations en

a', x, y, r ; b', x, y, r ; c', x, y, r ; &c. & en a, x, y ; b, x, y ; c, x, y ; &c.

Tout cela posé, si je veux dresser, pour ce second ordre, des tables semblables à celles dont j'ai exposé ci-dessus les principes, je n'aurai qu'à faire 1°. o, ω, θ', θ, successivement 1, 2, 3, 4, 5, &c. observer les valeurs de Π & P, qui naissent de chacune de ces suppositions, & les cas généraux où la valeur de Π & P peut s'abaisser; ce qui donne des conditions générales entre les coefficiens en x, y. 2°. Je mettrai à côté de chaque valeur de Π & de P les formes que j'aurai vu pouvoir leur convenir, avec les conditions, lorsqu'il y en a : & de plus, je mettrai à côté de chaque valeur de θ', θ, dans ces formes, les équations en Φ, Φ', a, b, c, &c. a', b', c', &c. que j'aurai trouvé leur convenir par la même méthode. Il est aisé de voir que le nombre de ces formes ne peut être que fini; car o & θ' ne peuvent être plus grands que $\Pi + 1$; de même que le degré de l'équation (4) & θ ne peuvent être plus grands que P.

Soit, par exemple, $\Pi = 0$, $P = 1$: on aura $Fr^{\omega} + Gr^{\omega - 1} \ldots s + F'r^{\omega'} + G'r^{\omega' - 1} + \ldots = 0$, $a'ds + b'dx + c'dy + e'dr = 0$, $adr + bdx + cdy = 0$, ou $adr + r\,\overline{bdx + cdy} = 0$: & il faudra que l'équation (4) soit $rdx + a''dx + b''dy = 0$, a'' & b'' étant des fonctions sans radicaux : & on aura les intégrales qui répondent à cette formule, en trouvant, par l'Article qui suit, celles qui répondent à l'équation $rdx + a''dx + b''dy = 0$, où il faut observer que r ne doit être qu'au premier degré, & n'avoir pour facteur que dx. Ces formes, une fois déterminées, donneront celles de toutes les équations qu'on peut réduire à la forme $Addy + Bdx^2 + Cdxdy + Ddy^2 = 0$, A, B, C, D contenant des fonctions irrationnelles. En effet elles seront les mêmes, excepté que les fonctions qui, pour le cas précédent, étoient irrationnelles, pourront, dans celui-ci, contenir les mêmes fonctions irrationnelles que A, B, C, D.

Si l'équation étoit ou pouvoit être $Ad^2y + Bd^2x + Cdx^2 + Ddxdy + Fdy^2 = 0$, la proposée ne pourroit contenir qu'une seule transcendante.

Quelque forme qu'ait la proposée, elle peut avoir une intégrale, soit algébrique, soit avec une seule transcendante : mais ces cas se ramenent au cas général ; & pour lors l'équation (1) est $Fs + G = 0$, F & G étant des constantes : & dans le premier seulement l'équation (2) sera $rds - dr = 0$.

Les intégrales des équations différentielles qui auroient une fonction transcendante dans leurs coefficiens, se trouvent par cette méthode, observant seulement que, comme la différentielle de cette fonction transcendante, dont on a la valeur, a été éliminée, il faut voir quelles formes pouvoit avoir la proposée avant l'élimination : & le reste se fera comme ci-dessus.

Il est aisé de voir que les principes que je viens d'appliquer aux premier & second ordres, sont généraux pour un ordre quelconque.

ARTICLE III.

Du degré où peuvent monter les variables x , y , *ſoit dans les coefficiens des équations intégrales en* r , *&c. ordonnées par rapport à ſes fonctions tranſcendantes , ſoit dans les coefficiens des équations en* a , b , c , *&c.* x, y, *ou* Φ, x, y; *&c.*

I. SOIT l'équation propoſée du premier ordre , & $\Pi = 1$: l'équation différentielle ſera $A\,dx + B\,dy = 0$, dont l'intégrale ne peut être que

$$\begin{array}{l} Fr + FN = 0, \\ \quad + G \end{array}$$

N étant l'arbitraire , & $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^q$, &c. enſorte qu'on ait $a + f = 0$, $b + f' = 0$, $c + f'' = 0$, &c.

Soit maintenant 1°. A & B conſtant , l'équation différentielle propoſée ſera $\pi\,dx + \pi'\,dy = 0$, & je pourrai faire $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $F = 1$, $G = 0$.

Les a , b , c , &c. ainſi que les π , ϱ, &c. ſont ici des nombres , ainſi que dans le reſte de cet Article , & p eſt un parametre conſtant qui conſerve l'homogénéité , & par conſéquent différent du p qui multiplie $\mathrm{l}.\,c$, & qui eſt un nombre. Et comme aucune autre ſuppoſition ne peut donner la propoſée , ſon intégrale ne peut être que $\mathrm{l}.\,\frac{ax + by + cp}{p} + N = 0$, équation qui , repaſſant des logarithmes aux nombres , eſt purement algébrique.

Soit 2°. A & B du premier degré : l'équation ſera $\overline{\pi x + \varrho y + \upsilon p}\,dx + \overline{\pi' x + \varrho' y + \upsilon' p}\,dy = 0$, &

je pourrai faire

1°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $G = 0$, $F = 1$,

2°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = 0$, $F = 1$,

3°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a'x + b'y + c'p$, $F = p$,

4°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a'x + b'y + c'p$, $F = ax + by + cp$.

Et comme aucune autre ſuppoſition ne peut donner la forme de la propoſée, ſon intégrale ne peut être qu'une de ces quatre équations

1. $\mathrm{l.}\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2} + N = 0$,

équation qui, repaſſant des logarithmes aux nombres, eſt toujours algébrique.

2. $m\,\mathrm{l.}\frac{ax + by + cp}{p} + n\,\mathrm{l.}\frac{a'x + b'y + c'p}{p} + N = 0$,

équation qui eſt algébrique, lorſque m & n ſont rationnels.

3. $m\,\mathrm{l.}\frac{ax + by + cp}{p} + \frac{a'x + b'y + c'p}{p} + N = 0$.

4. $m\,\mathrm{l.}\frac{ax + by + cp}{p} + \frac{a'x + b'y + c'p}{ax + by + cp} + N = 0$.

a′ & b′ peuvent manquer à la fois dans cette équation.

Soit 3°. A & B du ſecond degré : la propoſée ſera

$$\overline{\pi x^2 + \varrho xy + \upsilon y^2 + \delta px + \varepsilon py + \nu p^2}\, dx + \overline{\pi' x^2 + \varrho' xy + \upsilon' y^2 + \delta' px + \varepsilon' py + \nu' p^2}\, dy = 0;$$

& je pourrai faire

1°. $a = \frac{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3 + fpx^2 + gpxy + hpy^2 + ip^2x + kp^2y + lp^3}{p^3}$, $G = 0$, $F = 1$.

2°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = 0$, $F = 1$.

3°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $c = \frac{a''x + b''y + c''p}{p}$, $G = 0$, $F = 1$.

4°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $G = a'x + b'y + c'p$, $F = p$.

5°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x + b''y + c''p$, $F = p$.

6°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x + b''y + c''p$, $F = ax + by + cp$.

7°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2$, $F = p^2$.

8°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2$, $F = p\,\overline{ax + by + cp}$.

9°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2$, $F = \overline{ax + by + cp}^2$.

10°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a''x + b''y + c''p$, $F = a'x + b'y + c'p$.

Et puisqu'aucune autre supposition ne convient à la proposée, son intégrale ne peut être qu'une de ces dix équations,

1. $l.\frac{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3 + fpx^2 + gpxy + hpy^2 + ip^2x + kp^2y + lp^3}{p^3} + N = 0$,

équation qui, repassant des logarithmes aux nombres, est toujours algébrique.

2. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+N=0$,

équation algébrique, lorsque m & n sont rationnels.

3. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+p\,\mathrm{l.}\,\frac{a''x+b''y+c''p}{p}+N=0$,

équation algébrique, lorsque m, n, p sont rationnels.

4. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+N=0$.

5. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+\frac{a''x+b''y+c''p}{p}+N=0$.

6. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+\frac{a''x+b''y+c''p}{ax+by+cp}+N=0$.

a'' & b'' peuvent manquer en même-tems.

7. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p^2}+N=0$.

8. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p\,\overline{ax+by+cp}}+N=0$.

9. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{\overline{ax+by+cp}^2}+N=0$.

a', b', c', e', f' peuvent manquer en même tems.

10. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x+b''y+c''p}{a'x+b'y+c'p}+N=0$.

a'' & b'' peuvent manquer en même-tems.

Soit

Soit 4°. *A* & *B* du troisieme degré, l'équation sera

$$\psi x^3 + \varsigma x^2 y + \upsilon x y^2 + \delta y^3 + \varepsilon p x^2 + \eta p x y + \mu p y^2 + \nu p^2 x + \pi p^2 y + \varphi p^3 dx$$
$$+ \psi' x^3 + \rho' x^2 y + \upsilon' x y^2 + \delta' y^3 + \varepsilon' p x^2 + \eta' p x y + \mu' p y^2 + \nu' p^2 u + \pi' p^2 y + \varphi' p^3 dy$$
$$= 0:$$

& je pourrai faire

$$1^\circ.\ a = \frac{\left\{\begin{array}{r} \mathrm{a} x^4 + \mathrm{b} x^3 y + \mathrm{c} x^2 y^2 + \mathrm{e} x y^3 + \mathrm{f} y^4 \\ + \mathrm{g} p x^3 + \mathrm{h} p^2 x y + \mathrm{i} p x y^2 + \mathrm{k} p x^2 y + \mathrm{l} p y^3 \\ + \mathrm{m} p^2 x^2 + \mathrm{n} p^2 x y + \mathrm{p} p^2 y^2 \\ + \mathrm{q} p^3 y + \mathrm{r} p^3 y \\ + \mathrm{s} p^4 \end{array}\right.}{p^4},\ G = 0,$$

$F = 1.$

$$2^\circ.\ a = \frac{\mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 y + \mathrm{c}x y^2 + \mathrm{e}y^3 + \mathrm{f}p x^2 + \mathrm{g}p x y + \mathrm{h}p y^2 + \mathrm{i}p^2 x + \mathrm{k}p^2 y + \mathrm{l}p^3}{p^3}$$

$b = \frac{\mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}'p}{p}$, $G = 0$, $F = 1.$

$3^\circ.\ a = \frac{\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}xy + \mathrm{c}y^2 + \mathrm{e}px + \mathrm{f}py + \mathrm{g}p^2}{p^2}$, $b =$
$\frac{\mathrm{a}'x^2 + \mathrm{b}'xy + \mathrm{c}'y^2 + \mathrm{e}'px + \mathrm{f}'py + \mathrm{g}'p^2}{p^2}$, $G = 0$, $F = 1.$

$4^\circ.\ a = \frac{\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}xy + \mathrm{c}y^2 + \mathrm{e}px + \mathrm{f}py + \mathrm{g}p^2}{p^2}$, $b = \frac{\mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}'p}{p}$,
$c = \frac{\mathrm{a}''x + \mathrm{b}''y + \mathrm{c}''p}{p}$, $G = 0$, $F = 1.$

$5^\circ.\ a = \frac{\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c}p}{p}$, $b = \frac{\mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}'p}{p}$, $c = \frac{\mathrm{a}''x + \mathrm{b}''y + \mathrm{c}''p}{p}$,
$\frac{\mathrm{a}'''x + \mathrm{b}'''y + \mathrm{c}'''}{p}$, $G = 0$, $F = 1.$

$$6^\circ.\ a = \frac{\mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 y + \mathrm{c}x y^2 + \mathrm{e}y^3 + \mathrm{f}p x^2 + \mathrm{g}p x y + \mathrm{h}p y^2 + \mathrm{i}p^2 y + \mathrm{k}p^2 y + \mathrm{l}p^3}{p^3}$$

$G = \mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}'p$, $F = p.$

$7^\circ.\ a = \frac{\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}xy + \mathrm{c}y^2 + \mathrm{e}px + \mathrm{f}py + \mathrm{g}p^2}{p^2}$, $b = \frac{\mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}p}{p}$,
$G = \mathrm{a}''x + \mathrm{b}''y + \mathrm{c}''p$, $F = p.$

$8^\circ.\ a = \frac{\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}xy + \mathrm{c}y^2 + \mathrm{e}px + \mathrm{f}py + \mathrm{g}p^2}{p^2}$, $b = \frac{\mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}'p}{p}$,
$G = \mathrm{a}''x + \mathrm{b}''y + \mathrm{c}''p$, $F = \mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}'p.$

9°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $c = \frac{a''x + b''y + c''p}{p}$, $G = a'''x + b'''y + c'''p$, $F = p$.

10°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $c = \frac{a''x + b''y + c''p}{p}$, $G = a'''x + b'''y + c'''p$, $F = ax + by + cp$.

11°. $a = \frac{ax^2 + bxy + + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2$, $F = p^2$.

12°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p}$, $G = a'x^2 + b'yx + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2$, $F = ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2$.

13°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $G = a''x + b''y + c''p$, $F = a'x + b'y + c'p$.

14°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = p^2$.

15°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = p\,\overline{ax + by + cp}$.

16°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{ax + by + cp}^{\,2}$.

17°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''p + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{ax + by + cp}\,.\,\overline{a'x + b'y + c'p}$.

18°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a'''x + b'''y + c'''p$, $F = a''x + b''y + c''p$.

19°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'x^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = p^3$.

20°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'y^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = p^2 . ax + by + cp$.

21°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'y^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = p . \overline{ax + by + cp}^2$.

22°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'y^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = \overline{ax + by + cp}^3$.

23°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = p . a'x + b'y + c'p$.

24°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a''x + b''yx + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{ax + by + cp} . \overline{a'x + b'y + c'p}$.

25°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{a'x + b'y + c'p}^2$.

Et comme aucune autre ſuppoſition ne peut donner la propoſée, l'intégrale ne pourra être qu'une des vingt-cinq équations ſuivantes.

$$1.\quad \mathrm{l.}\frac{\left\{\begin{array}{l} ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + exy^3 + fy^4 \\ + gpx^3 + hpx^2y + ipxy^2 + kpy^3 \\ + lp^2x^2 + mp^2xy + np^2y^2 \\ + pp^3x + qp^3y \\ + rp^4 \end{array}\right.}{p^4} + N = 0,$$

équation qui, repassant des logarithmes aux nombres, est purement algébrique.

$$2.\quad m\,\mathrm{l.}\frac{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3 + fpx^2 + gpxy + hpy^2 + ip^2x + kp^2y + lp^3}{p^3}$$
$$+ n\,\mathrm{l.}\frac{a'x + b'y + c'p}{p} + N = 0,$$

équation algébrique, lorsque m & n sont rationnels.

$$3.\quad m\,\mathrm{l.}\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2} +$$
$$n\,\mathrm{l.}\frac{a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2}{p^2} + N = 0,$$

équation algébrique, lorsque m & n sont rationnels.

$$4.\quad m\,\mathrm{l.}\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2} + n\,\mathrm{l.}\frac{a'x + b'y + c'p}{p}$$
$$+ p\,\mathrm{l.}\frac{a''x + b''y + c''p}{p} + N = 0,$$

équation encore algébrique, lorsque m, n & p sont rationnels.

$$5.\quad m\,\mathrm{l.}\frac{ax + by + cp}{p} + n\,\mathrm{l.}\frac{a'x + b'y + c'p}{p} + p\,\mathrm{l.}\frac{a''x + b''y + c''p}{p}$$
$$+ q\,\mathrm{l.}\frac{a'''x + b'''y + c'''p}{p} + N = 0,$$

équation algébrique, lorsque m, n, p & q sont rationnels.

$$6.\quad m\,\mathrm{l.}\frac{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3 + fpx^2 + gpxy + hpy^2 + ip^2x + kp^2y + lp^3}{p^3}$$
$$+ \frac{a'x + b'y + c'p}{p} + N = 0.$$

7. $m\,l.\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+n\,l.\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}$
$+\frac{a''x+b''y+c''p}{p}+N=0.$

8. $m\,l.\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+n\,l.\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}$
$+\frac{a''x+b''y+c''p}{a'x+b'y+c'p}+N=0.$

a'' & b'' peuvent manquer en même-tems.

9. $m\,l.\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,l.\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+p\,l.\,\frac{a''x+b''y+c''p}{p}$
$+\frac{a'''x+b'''y+c'''p}{p}+N=0.$

10. $m\,l.\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,l.\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+p\,l.\,\frac{a''x+b''y+c''p}{p}$
$+\frac{a'''x+b'''y+c'''p}{ax+by+cp}+N=0.$

11. $m\,l.\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+$
$\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p^2}+N=0.$

12. $m\,l.\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+$
$\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}+N=0.$

a', b', c', e', f' peuvent manquer en même-tems.

13. $m\,l.\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+\frac{a''x+b''y+c''p}{a'x+b'y+c'p}$
$+N=0.$

a'', b'' peuvent manquer en même-tems.

14. $m\,l.\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,l.\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+$
$\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{p^2}+N=0.$

15. $m\,l.\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,l.\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+$
$\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{p\,.\,ax+by+cp}+N=0.$

16. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}+$

$$\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{ax+by+cp}^{\,2}}+N=0.$$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer en même tems.

17. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}+$

$$\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{ax+by+cp}\,.\,\overline{a'x+b'y+c'p}}+N=0.$$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer en même-tems.

18. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}+\dfrac{a'''x+b'''y+c'''p}{a''x+b''y+c''p}$

$+N=0.$

a''' & b''' peuvent manquer en même-tems.

19. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{\left\{\begin{array}{l}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\ \quad+f'px^2+g'pxy+h'py^2\\ \qquad+i'p^2x+k'p^2y\\ \qquad\quad+l'p^3\end{array}\right.}{p^3}+$$

$N=0.$

20. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{\left\{\begin{array}{l}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\ \quad+f'px^2+g'pxy+h'py^2\\ \qquad+i'p^2x+k'p^2y\\ \qquad\quad+l'p^3\end{array}\right.}{p^2\,\overline{ax+by+cp}}+$$

$N=0.$

21. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{\left\{\begin{array}{l}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\ \quad+f'px+g'pxy+h'py^2\\ \qquad+i'p^2x+k'p^2y\\ \qquad\quad+l'p^3\end{array}\right.}{p\,\overline{ax+by+cp}^{\,2}}+$$

$N=0.$

$$22.\ m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\left\{\frac{\begin{array}{r}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\+f'px^2+g'pxy+h'py^2\\+i'p^2x+k'p^2y\\+l'p^3\end{array}}{\overline{ax+by+cp}^3}\right.+$$

$N=0.$

a', b' c', e', f', g', h', i', k' peuvent manquer.

$$23.\ m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{p\,.\,a'x+b'y+c'p}$$

$+N=0.$

$$24.\ m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{ax+by+cp}\,.\,\overline{a'x+b'y+c'p}}$$

$+N=0.$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer.

$$25.\ m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{a'x+b'y+c'p}^2}$$

$+N=0.$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer.

L'on voit aiſément de-là comment il faudroit s'y prendre pour déterminer les formes dont eſt ſuſceptible l'intégrale finie des équations où les variables ſont d'un degré plus élevé. Le produit de tous les a, b, c ne peut être en général que d'un degré ſupérieur d'une unité à celui où montent les variables, & G ne peut jamais être d'un degré plus élevé ; & par conſéquent le nombre de ces formes ſera toujours fini.

II. Soit l'équation du ſecond degré de différences, & . . $Adx^2+Bdxdy+Cdy^2=0$: l'intégrale ne pourra être que d'une des trois formes ſuivantes.

1. $$\begin{array}{l} Fr^2 + 2FNr + FN^2 = 0; \\ \quad + G \quad\quad + GN \\ \quad\quad\quad\quad\quad + H \end{array}$$

$r = \text{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $a + f = 0$, $b + f' = 0$, &c.

2. $$\begin{array}{l} Fr + FN = 0, \\ \quad\quad + G \end{array}$$

$$r = \text{l}.\, a^m b^n c^p, \text{ \&c.}$$

& $fa^2 + ga + h = 0$, $f'b^2 + g'b + h' = 0$, &c.
ou $a^2 + ga + hf = 0$, $b^2 + g'b + h'f' = 0$, &c.
car en général, dans ce cas, au lieu d'une équation

$$fa^s + ga^{s-1} + ha^{s-2} + ia^{s-3}, \text{ \&c.} = 0,$$

on peut mettre l'équation

$$a^s + ga^{s-1} + hfa^{s-2} + ifa^{s-3}, \text{ \&c.} = 0.$$

On aura avec cela un nombre aussi indéfini d'équations rationnelles, comme dans l'Article précédent; & il faudra que $\frac{g^2}{4} - hf = \frac{g'^2}{4} - h'f'$, &c.

3. $$\begin{array}{l} Fr^2 + 2FNr + FN^2 = 0; \\ \quad + G \quad\quad + GN \\ \quad\quad\quad\quad\quad + H \end{array}$$

$$r = \text{l}.\, a^m b^n c^p, \text{ \&c.}$$

$a^2 + ga + hf = 0$, $b^2 + g'b + h'f' = 0$, &c.
& un nombre indéfini d'équations rationnelles, comme pour la premiere forme; & il faudra que

$$\frac{G^2}{4} - HF = \frac{g^2}{4} - hf = \frac{g'^2}{4} - h'f', \text{ \&c.}$$

Je traiterai chacune de ces formules générales de maniere à produire l'équation différentielle sans r ni dr, qui y répond: & faisant dans chacune les quantités F, G,

G, H, &c. f, g, h, &c. f', g', h', &c. des degrés 0, 1, 2, 3, 4, &c. égales ou inégales, produits de plusieurs facteurs, ou sans facteurs, j'aurai, dans chacune de ces suppositions, le degré de A, B, C. Je pourrai par conséquent dresser des tables, où, faisant successivement A, B, C, des degrés 1, 2, 3, 4, 5, &c. je mettrai à côté de chacune de ces suppositions celles que j'aurai trouvé pouvoir leur convenir, & dont il est clair que le nombre est toujours fini.

Je dois faire observer ici que tout ce que j'ai dit jusqu'ici est égalemenr vrai pour un nombre quelconque de variables, & que pour avoir les formes des intégrales des équations différentielles à trois variables, il n'y a qu'à mettre dans les formules des pages 54 & suiv. des fonctions à trois variables, semblables à celles à deux variables qui s'y trouvent. Cette remarque me sert à résoudre une objection qu'on pourroit me faire. L'équation entre deux variables $\overline{\psi x + \varrho y + \upsilon p}\, dx + \overline{\psi' x + \varrho' y + \upsilon' p}\, dy = 0$ est toujours possible. Pourquoi donc n'ai-je pas une équation finie entre x, y, qui soit l'intégrale de cette équation, quelque valeur qu'aient les coefficiens, comme cela devroit être? La réponse est simple : les formes que donne la méthode sont également pour un nombre quelconque de variables; & l'équation semblable pour un nombre quelconque de variables n'est pas toujours possible : il ne faut donc pas qu'il y ait une forme unique d'intégrale, indépendante des coefficiens.

On pourroit traiter par la même méthode les équations du premier ordre qui contiendroient une fonction tranſcendante, & dreſſer des tables des formes de leurs intégrales, puiſque, par l'Article précédent, on en connoît déja les formes les plus générales. On pourroit auſſi, puiſqu'on connoît la différence dr qui a été éliminée, s'aſſurer de quelle forme pouvoit être la propoſée avant l'élimination : & dès-lors, regardant r comme une nouvelle variable, on n'auroit beſoin que des tables pour les équations à trois variables ſans tranſcendantes.

Si on avoit à intégrer une équation du premier ordre à deux variables, où une des variables ſeulement eût des expoſans indéterminés, telle eſt celle de Ricati par exemple, il eſt clair qu'on peut regarder ces expoſans comme entiers, puiſqu'on peut les rendre tels par les plus ſimples ſubſtitutions. Alors on ſuppoſera que l'intégrale de la propoſée eſt d'une des formes que donnent les tables pour le plus haut expoſant de la variable dont les expoſans ſont déterminés, ayant ſoin de ſubſtituer dans ces formes des puiſſances indéterminées de l'autre variable, au lieu des puiſſances déterminées qui s'y trouvent, & des coefficiens conſtans : & on aura la forme générale des intégrales de cette équation, qu'il faudra déterminer enſuite pour chaque cas particulier. Si, au lieu de puiſſances indéterminées, on avoit une fonction quelconque, on ſe conduiroit de même.

Ce que j'ai dit juſqu'ici ſuffit, je crois, pour faire entendre la généralité de la méthode, & la maniere de l'appliquer aux cas plus compliqués : ainſi je ne m'étendrai pas davantage.

Il arrive quelquefois que certaines équations finies réſolvent la propoſée dont elles donnent des intégrales particulieres, & ne ſont pas contenues dans l'intégrale générale, quelque valeur qu'on donne aux arbitraires. Cette remarque, qui a été faite par M. Euler, pourroit paroître contraire aux principes généraux que j'ai établis : & je crois devoir analyſer ce cas, pour ne rien laiſſer à deſirer ſur la nature du calcul intégral, & ſur la généralité de la méthode que je donne ici.

Soient A, A', &c. des fonctions finies ; B, B', &c. des fonctions du premier ordre ; C, C', &c. des fonctions du ſecond, &c. je remarque que ces équations ſont néceſſairement des formes

$$\left.\begin{array}{r} AB = 0 \\ AB + A'dA = 0 \end{array}\right\} \text{pour le premier ordre,}$$

$$\left.\begin{array}{r} AC = 0 \\ AC + C'dA + Bd^2A = 0 \\ C''dA = 0 \\ CdA + Bd^2B = 0 \end{array}\right\} \text{pour le ſecond :}$$

& ainſi de ſuite.

Ou, ce qui revient au même,

$$A.B = 0$$

$$A.B + A'\frac{dA}{A} = 0;$$

$$\& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A.C = 0$$

$$A.C + C'.\frac{dA}{A} + B\frac{d^2A}{A} = 0$$

$$dA.C'' = 0$$

$$dA.C + B\frac{d^2A}{dA} = 0, \text{ \&c.}$$

& ces équations donnent les ſolutions particulieres $A = o$, ou $dA = o$, ſans arbitraires.

Soit maintenant S l'intégrale finie de $B = o$

$$B + A'\frac{dA}{A} = o,$$

S' l'intégrale du premier ordre de . . . $C = o$

$$C + C'\frac{dA}{A} + B\frac{ddA}{A} = o,$$

S'' l'intégrale du premier ordre de . . . $C'' = o$

$$C + B\frac{ddA}{dA} = o.$$

Je dis que $AS = o$, $AS' = o$, $dAS'' = o$ ſont les intégrales des propoſées. En effet, différenciant & faiſant diſparoître l'arbitraire qui ne ſe trouve que dans S, S', S'', on aura les propoſées.

Cela poſé, je diſtingue deux cas : le premier, où la propoſée a un facteur A, ou dA, facteur d'un ordre inférieur, que je puis trouver par l'analyſe ordinaire, n'a dès-lors aucune difficulté : & même lorſque ce facteur eſt fini, la méthode générale s'y applique ſans peine. Il n'en eſt pas de même pour les autres cas : l'Algebre ordinaire n'eſt d'aucun ſecours : & comme, pour traiter l'équation différentielle, je la ſuppoſe ſous une forme rationnelle & entiere, on voit aiſément que l'intégrale de $AB + A'dA = o$, par exemple, doit être la même que celle de $B + A'\frac{dA}{A} = o$, qui ne contient point la ſolution particuliere $A = o$. Si je veux donc trouver toutes les ſolutions particulieres de cette eſpece, qui ne ſont pas contenues dans la complette, je différencie l'équation intégrale trouvée, ordonnée enſorte que l'arbitraire ſoit le terme conſtant : & ſi la propoſée eſt du premier ordre, j'aurai toutes les équations particulieres, en égalant à zero les fonctions finies par leſquelles il faut multiplier cette différence, pour qu'elle devienne la propoſée. Si elle eſt du ſecond ordre, je répéterai la différenciation, en obſervant toujours qu'une des arbitraires ſoit le terme conſtant; & j'aurai toutes les équations particulieres, en égalant à zero les fonctions finies, ou du premier ordre, par leſquelles il faut multiplier cette ſeconde différence, pour qu'elle devienne la propoſée.

ARTICLE IV.

Trouver les coefficiens conſtans.

APRÈS avoir trouvé, dans les Articles précédens, les différentes formes dont eſt ſuſceptible l'intégrale d'une équation différentielle d'une forme donnée, il ne me reſte plus qu'à déterminer, entre ces formes, celle qui convient aux coefficiens donnés de la propoſée, & les coefficiens de l'intégrale qui en réſultent. Pour cela, différenciant chaque forme d'intégrale, & la réduiſant à la forme de la propoſée, j'aurai une fonction qui devra être identiquement la même : comparant donc terme à terme, j'aurai les coefficiens de l'intégrale, & les conditions que chaque ſuppoſition peut demander entre les coefficiens de la propoſée ; & je joindrai dans les tables, à côté de chaque forme, & les conditions & la valeur des coefficiens.

Il n'y a aucune forme générale d'équations qui ne puisse avoir une intégrale, puisque le nombre des variables y est supposé quelconque : les équations de condition ne tombent donc que sur les coefficiens : on trouveroit donc toutes ces conditions dans la table. Mais cela ne diminue rien de l'utilité des formules générales de la Section précédente ; puisqu'étant pour un ordre & un degré quelconques, elles donnent des résultats généraux où les tables n'en donnent que de particuliers, & dispensent du travail de continuer les tables en pure perte, si on avoit à traiter une équation absurde qui ne s'y trouvât pas.

CONCLUSION.

CEUX qui auront suivi l'esprit de cette méthode, verront que j'ai résolu le problême que je m'étois proposé dans toute son étendue. En effet, 1°. il n'y a aucune équation différentielle à laquelle cette méthode ne s'applique : 2°. je donne pour chacune la maniere de trouver toutes les formes dont l'intégrale est susceptible, & je démontre que le nombre en est fini. Le reste ne dépend donc plus que de l'Algebre ordinaire : j'intégrerai donc toute équation différentielle qui ne sera pas absurde.

SECONDE PARTIE.

PREMIERE SECTION.

Des différences finies.

I. *De la nature des différences finies*

Je ſuppoſe que dans une fonction donnée φ de x, y, &c. x, y, &c. deviennent $x + \delta x$, $y + \delta y$, &c. δx, δy, &c. étant des quantités finies ; la fonction φ variera auſſi & deviendra $\varphi + \delta\varphi$, $\delta\varphi$ devenant nul lorſqu'on ſuppoſe δx, δy, &c. $= 0$: & j'aurai

$$\varphi + \delta\varphi = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi'''', \text{ \&c.}$$

cette ſuite pouvant être infinie, φ', φ'', φ''', φ'''', &c. étant des fonctions des variables & de δx, δy, &c. enſorte qu'il ne s'y trouve que des puiſſances rationnelles & entieres de δx, δy, &c. & ces différences finies étant au premier degré dans φ', au ſecond dans φ'', au troiſieme dans φ''', & ainſi de ſuite. Tout cela ſuit de la nature d'une fonction quelconque.

Si je ſuppoſois maintenant $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, &c. $\varphi + \delta\varphi$ deviendroit $\varphi + d\varphi$, & la ſuite deviendroit $\varphi + \varphi'$: donc dans ce cas $d\varphi = \varphi'$. Donc en général, pour avoir φ', il faut prendre la différence infiniment petite de φ, & ſubſtituer pour dx, dy, &c. δx, δy,

&c. & j'appellerai $\Delta\varphi$ cette différence ainsi changée par la substitution. On trouvera enfin, par des raisonnemens analogues, que si je désigne par $\Delta^2\varphi$, $\Delta^3\varphi$, &c. les différences successives de φ, prises en supposant les différences constantes, & dans lesquelles on auroit substitué δx, δy, &c. pour dx, dy, &c. j'aurai $\varphi'' = \frac{\Delta^2\varphi}{1.2}$, $\varphi''' = \frac{\Delta^3\varphi}{1.2.3}$, $\varphi'''' = \frac{\Delta^4\varphi}{1.2.3.4}$, &c. & par conséquent $\varphi + \delta\varphi = \varphi + \Delta\varphi + \frac{\Delta^2\varphi}{1.2} + \frac{\Delta^3\varphi}{1.2.3} + \frac{\Delta^4\varphi}{1.2.3.4}$, &c. forme générale de la différence finie d'une fonction donnée, qu'on trouve par le calcul différentiel ordinaire.

Si maintenant, au lieu de φ, fonction de x, y, &c. seulement, j'avois à diffé rencier une fonction de x, y, &c. & de leurs différences finies de différens ordres, j'aurois la différence par la même méthode, en faisant $\delta x = p$, $\delta p = q$, &c. $\delta y = p'$, $\delta p' = q'$, &c. &c. regardant p, q, &c. p', q', &c. &c. comme de nouvelles variables, & dans les termes affectés de la caractéristique Δ, les δx, δy, δq, &c. δy, $\delta p'$, $\delta q'$, &c. &c. comme constans.

II. *De l'intégration des équations différentielles aux différences finies.*

SOIT $\varphi = 0$ une équation sans différences : différenciant, j'aurai $\delta\varphi = 0$: substituant dans $\delta\varphi$, pour un des coefficiens, sa valeur tirée de l'équation $\varphi = 0$, j'aurai une équation aux premieres différences finies, dont l'intégrale sera $\varphi = 0$, & où le coefficient que j'ai j'ai fait disparoître sera arbitraire : & il est clair que faisant dans cette équation $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, &c. j'aurai la même équation que si, dans $d\varphi$, j'avois substitué, pour ce même coefficient, sa valeur tirée de la même équation, & dont l'intégrale est la même. Si donc je veux avoir l'intégrale d'une semblable équation, je n'aurai qu'à prendre, par la méthode de la premiere Partie, celle de l'équation aux différences ordinaires, qui y répond, & que me donne cette substitution.

Si je différencie maintenant cette équation du premier ordre, & que je substitue dans cette différence la valeur d'un des coefficiens de φ, qui se trouve encore dans l'équation du premier ordre, car toute autre supposition ne s'accorderoit pas à la supposition que je fais ici d'une équation produite par une équation sans différences & susceptible d'avoir une intégrale générale, j'aurai une équation du second ordre, dont $\varphi = 0$ sera l'intégrale, les deux coefficiens qu'on a fait évanouir restant arbitraires : & faisant dans cette équation $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, j'aurai la même équation que si, dans le cas des différences ordinaires, j'avois traité semblablement la même équation $\varphi = 0$. Mais il est clair que l'intégrale de cette derniere équation est la même que celle de la proposée. Donc, &c. Et en général, toutes les fois qu'une équation aux différences finies admet une solution complette, son intégrale sera la même que celle de l'équation aux différences ordinaires qui y répond ; car elles ont les mêmes variables, ont le même nombre d'arbitraires, & doivent avoir lieu en même-tems.

Si donc j'ai à intégrer une équation aux différences finies, je commencerai par résoudre les équations aux différences ordinaires qui y répondent. Si l'intégrale de la proposée admet un nombre d'arbitraires égal, alors quelques-unes de ces équations seront les intégrales cherchées : sinon on les aura en déterminant la valeur des arbitraires qui devront être déterminées, ce qui est facile. J'ai dit *quelques-unes*, parceque, si dans la proposée les plus hautes différences ne sont pas sous une forme linéaire, elle n'est plus une équation simple, mais le produit de plusieurs autres qui peuvent être impossibles, quoique l'équation aux différences ordinaires, qui y répond, soit possible.

III. *Des équations de condition.*

Si l'équation différentielle aux différences infiniment petites, qui répond à une équation aux différences finies, n'est pas possible, il est clair que celle-ci ne l'est pas non plus : mais de ce que la premiere a une intégrale finie, on n'en peut pas conclure que la proposée en ait une aussi ; ce qui donne lieu à la recherche de nouvelles équations de condition. Il paroît ici que, comme il n'en est pas des équations aux différences finies impossibles, auxquelles répond une équation aux différences infiniment petites qui soit possible, comme d'une équation aux différences ordinaires qui seroit absurde, parceque cette derniere n'est susceptible d'aucune solution, & que la premiere en admet une dans le cas particulier des différences infiniment petites, il ne sera pas inutile de chercher quelle ſera l'intégrale dans ce cas; que cette intégrale une fois trouvée, comme elle ſera celle de la propoſée en général, s'il y en a une, il ne faudra plus que voir ſi elle réſout la propoſée; & qu'ainſi toute autre recherche d'équations de condition ſera ſuperflue. Cependant on verra que la ſolution directe de cette queſtion, que je vais donner dans les trois Problêmes ſuivans, n'eſt pas ſans utilité, indépendamment du mérite analytique de la méthode.

PROBLEME I.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction aux différences finies d'un ordre quelconque ſoit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre moins élevé d'une unité.

SOLUTION. 1°. Je ſuppoſe la fonction propoſée de x, y, &c. & de leurs différences finies ordonnées par rapport à ces différences, regardant $\delta^2 x$ comme homogene à δx^2, $\delta^3 x$ comme homogene à $\delta x \delta^2 x$, à δx^3, & ainſi de ſuite; elle ſera néceſſairement de la forme

$$\begin{aligned} & V + V' + V'' + V''', \text{ \&c.} \\ & + Y + Y' + Y'' + Y''', \text{ \&c.} \\ & + \text{ \&c.} \end{aligned}$$

V étant une fonction du degré n, V' du degré $n+1$, V'' du degré $n+2$, V''' du degré $n+3$, & ainſi de ſuite; Y étant du degré ν, Y' du degré $\nu+1$, Y'' du degré $\nu+2$, Y''' du degré $\nu+3$, & ainſi de ſuite.

2°. Il eſt évident que ſi cette fonction eſt une différentielle exacte, son intégrale ne peut être que

$$\begin{aligned} &B + B' + B'' + B''', \text{ \&c.} \\ &+ \text{P} + \text{P}' + \text{P}'' + \text{P}''', \text{ \&c.} \\ &+ \text{\&c.} \end{aligned}$$

les B, B', B'', B''', &c. P, P′, P″, P‴, &c. &c. étant d'un ordre inférieur d'une unité, & B du degré $n - 1$, B' du degré n, B'' du degré $n + 1$, B''' du degré $n + 2$, &c. P du degré $\nu - 1$, P′ du degré ν, P″ du degré $\nu + 1$, P‴ du degré $\nu + 2$, &c. &c. ensorte que $B + B' + B'' + B'''$, &c. soit l'intégrale de $V + V' + V'' + V'''$, &c. & P + P′ + P″ + P″, &c. l'intégrale de $Y + Y' + Y'' + Y'''$, &c. &c. & la fonction

$$\begin{aligned} &V + V' + V'' + V''', \text{ \&c.} \\ &+ Y + Y' + Y'' + Y''', \text{ \&c.} \\ &+ \text{\&c.} \end{aligned}$$

ne pourra être une différentielle exacte, que chacune de ses parties ne le soit aussi.

3°. Je fais pour δx, &c. δy, &c. les substitutions indiquées (Art. I.) & j'ai par la supposition

$$V + V' + V'' + V''', \text{\&c.} = \delta.\overline{B + B' + B'' + B''', \text{\&c.}} = \Delta B + \Delta B' + \Delta B'' + \Delta B''', \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{\Delta^2 B}{1.2} + \frac{\Delta^2 B'}{1.2} + \frac{\Delta^2 B''}{1.2}, \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{\Delta^3 B}{1.2.3} + \frac{\Delta^3 B'}{1.2.3}, \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{\Delta^4 B}{1.2.3.4}, \text{ \&c.}$$

Puis donc que la fonction $V + V' + V'' + V'''$, &c. doit avoir cette forme pour être une différentielle exacte, j'aurai, comparant terme à terme,

$$V = \Delta B$$
$$V' = \Delta B' + \frac{\Delta^2 B}{1.2}$$
$$V'' = \Delta B'' + \frac{\Delta^2 B'}{1.2} + \frac{\Delta^3 B}{1.2.3}$$
$$V''' = \Delta B''' + \frac{\Delta^2 B''}{1.2} + \frac{\Delta^3 B'}{1.2.3} + \frac{\Delta^4 B}{1.2.3.4}:$$

& ainsi de suite. Ou, ce qui est la même chose,

$$V = \Delta B$$
$$V' - \tfrac{1}{2}\Delta^2 B = \Delta B'$$
$$V'' - \tfrac{1}{2}\Delta^2 B' - \tfrac{1}{6}\Delta^3 B = \Delta B''$$
$$V''' - \tfrac{1}{2}\Delta^2 B'' - \tfrac{1}{6}\Delta^3 B' - \tfrac{1}{24}\Delta^4 B = \Delta B''':$$

& ainsi de suite.

4°. ΔB, $\Delta B'$, $\Delta B''$, $\Delta B'''$ sont ce que deviennent dB, dB', dB'', dB''', en substituant les différences finies aux différences infiniment petites : j'aurai donc

$$V = \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s, \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s', \text{ \&c.}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

& faisant

$$\Delta V = Np + Pq + Qr + Rs + St, \text{ \&c.}$$

j'aurai $\frac{dB}{dx} = P - dQ + d^2 R + d^3 S$, &c.

$$\frac{dB}{dp} = Q - dR + d^3 S, \text{ \&c.}$$

& de même pour chaque variable, en supposant toujours que, pour les dx, dp, dq, &c. dy, dp', dq', &c. on a mis p, q, r, &c. p', q', r', &c.

$$5^o.\ \Delta^2 B = p\Delta\frac{dB}{dx} + q\Delta\frac{dB}{dp} + r\Delta\frac{dB}{dq} + s\Delta\frac{dB}{dr},\ \&c.$$
$$+ p'\Delta\frac{dB}{dy} + q'\Delta\frac{dB}{dp'} + r'\Delta\frac{dB}{dq'} + s'\Delta\frac{dB}{dr'},\ \&c.$$
$$+\ \&c.$$

J'aurai donc $\Delta^2 B$ en valeurs dépendantes de V. Il en sera de même de $\Delta^3 B$, $\Delta^4 B$, &c. & j'aurai pareillement $\Delta^2 B'$, &c. en V & V', $\Delta^2 B''$, &c. en V, V', V''; & ainsi de suite.

6°. Cela bien entendu, je substituerai ces valeurs dans les équations du N°. 3, & j'aurai des fonctions données, qui devront être des formes ΔB, $\Delta B'$, $\Delta B''$, $\Delta B'''$, &c. dB, dB', dB'', dB''', &c. après les substitutions : & par conséquent les équations qu'on trouve pour ce cas par le Problême III de la Section I de la premiere Partie, devront avoir lieu après les mêmes substitutions.

Répétant les mêmes opérations pour la suite $Y + Y' + Y'' + Y'''$, &c. $= \delta.\overline{P + P' + P'' + P'''}$, &c. & ainsi de suite, on aura les équations de condition cherchées.

REMARQUE.

On aura donc pour chaque variable une suite d'équations identiques : joignant toutes ces équations par le signe $+$, on aura alors autant d'équations en suites, que de variables ; & ces équations donneront le même résultat que toutes les précédentes, parcequ'elles doivent être identiques, & qu'elles ne le peuvent être, que chacun de leurs termes ne soit nul : enfin ces équations de condition, présentées sous cette forme, seront les mêmes qu'on auroit eues pour que

$$
\begin{array}{ll}
V+V'+V''+V''', \&c. = \Delta . & B+B'+B''+B''', \&c. \\
-\frac{\Delta^2 B}{1.2}-\frac{\Delta^2 B'}{1.2}-\frac{\Delta^2 B''}{1.2}, \&c. & +\mathrm{P}+\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}''', \&c. \\
\quad -\frac{\Delta^3 B}{1.2.3}-\frac{\Delta^3 B'}{1.2.3}, \&c. & + \;.\;.\;.\;.\;.\; \&c. \\
\quad\quad -\frac{\Delta^4 B}{1.2.3.4}, \&c. & \\
+Y+Y'+Y''+Y''', \&c. & \\
-\frac{\Delta^2 \mathrm{P}}{1.2}-\frac{\Delta^2 \mathrm{P}'}{1.2}-\frac{\Delta^2 \mathrm{P}''}{1.2}, \&c. & \\
\quad -\frac{\Delta^3 \mathrm{P}}{1.2.3}-\frac{\Delta^3 \mathrm{P}'}{1.2.3}, \&c. & \\
\quad\quad -\frac{\Delta^4 \mathrm{P}}{1.2.3.4}, \&c. & \\
+ \;.\;.\;.\;.\;.\; \&c. &
\end{array}
$$

ou, ce qui revient au même,

$$
\begin{array}{ll}
V+V'+V''+V''', \&c. = \delta . & B+B'+B''+B''', \&c. \\
+Y+Y'+Y''+Y''', \&c. & +\mathrm{P}+\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}''', \&c. \\
+ \;.\;.\;.\;.\;.\; \&c. & + \;.\;.\;.\;.\;.\; \&c.
\end{array}
$$

ce qui donne une maniere de trouver les mêmes formules des équations de condition, plus abrégée que celle du Problême.

PROBLEME II.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction aux différences finies d'un ordre quelconque soit la différentielle exacte d'une fonction sans différences.

SOLUTION. Il est clair que cette fonction doit être de la forme $V+V'+V''+V'''$, &c. Ainsi, quoique la méthode donne des formules pour tout autre cas, je me bornerai à considérer celui-ci.

Soit donc $V+V'+V''+V'''$, &c. qui doit être la différentielle exacte d'une fonction sans différences : j'aurai d'abord les équations du Problême précédent : j'aurai de plus, pour que $B+B'+B''+B'''$, &c. soit une différentielle exacte, des équations semblables, qui ne contiendront que des différences partielles de B, B', B'', B''', &c. & j'ai les valeurs en quantités dépendantes de V, V', V'', V''', &c. J'aurai par conséquent des équations en B, B', B'', B''', &c. pour que l'intégrale de $B+B'+B''+B'''$, &c. soit une différentielle exacte : je les aurai donc en V, V', V'', V''', &c. Continuant donc ainsi jusqu'à ce que je sois parvenu à une équation sans différences, j'aurai les équations de condition cherchées.

REMARQUE.

SI l'équation $V+V'+V''+V'''$, &c. est une différentielle exacte d'une fonction sans différences, il suit des principes de l'Art. II, que je l'aurai en prenant l'intégrale de V, en y supposant les différences infiniment petites, ce que je réduis aux quadratures par la Remarque II, page 21. Mais si je ne cherche que l'intégrale d'un ordre inférieur d'une telle fonction, j'aurai aisément, par le Problême I, ΔB, $\Delta B'$, $\Delta B''$, $\Delta B'''$, &c. & pour avoir B, B', B'', B''', &c. je n'aurai plus besoin que d'intégrations ordinaires, que, par la même Remarque, je réduis aux quadratures.

PROBLEME

PROBLEME III.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour que l'équation $V + V' + V'' + V'''$, &c. $= 0$ ait pour intégrale une équation ſans différences.

1°. Je ſuppoſe que, multipliant $V + V' + V'' + V'''$, &c. par $A + A' + A'' + A'''$, &c. A, A', A'', A''', &c. étant des fonctions de même ordre que V, V', V'', V''', &c. ou d'un ordre inférieur, le produit devienne une différentielle exacte ; ce qui, par le Problême II, me donne des équations de condition qui devront être identiques, & auxquelles je ſatisferai toujours en faiſant

$$A + A' + A'' + A''', \text{ \&c.} = \frac{\delta^n K}{V + V' + V'' + V''', \text{ \&c.}},$$

n étant l'expoſant de l'ordre de l'équation, & K une fonction quelconque.

2°. Mettant les équations de condition ſous la forme de la Remarque qui ſuit le Problême I, il eſt clair que ces équations de condition ne contiendront que des fonctions de $V + V' + V'' + V'''$, &c. & de $A + A' + A'' + A'''$, &c. toujours multipliées les unes par les autres : mais lorſque la propoſée eſt poſſible, $\delta^n K$ doit être nul en même-tems que $V + V' + V'' + V'''$, &c. (Problêmes V, VI, VII, premiere Part.). Donc ſuppoſant nuls les termes multipliés par $V + V' + V'' + V'''$, &c. le reſte de l'équation identique sera nul par lui-même, ou en même-tems que $V + V' + V'' + V'''$, &c. $= 0$.

3°. Substituant ensuite dans toutes ces équations, pour $A + A' + A'' + A'''$, &c. & ses différences partielles, leur valeur identique, tirée de l'équation $A + A' + A'' + A'''$, &c. $= \frac{\delta^n K}{V + V' + V'' + V''', \&c.}$, il ne me restera plus d'inconnues que des différences partielles de K.

4°. K étant une fonction finie, il est aisé de voir que ses différences partielles ne seront prises que par rapport aux différentes variables. Ainsi les équations de condition seront des équations données entre K & les variables de l'espece de celles que je traiterai dans la Section suivante. Je pourrai, à l'aide de différenciations réitérées aux différences infiniment petites, éliminer K & ses différences partielles; & alors j'aurai des équations de condition de la nature de celles dont je parlerai ci-dessous, qui seront toujours en suites, & qui devront être identiques, ou compatibles avec la proposée, pour qu'elle soit possible: & il ne sera plus question que de les vérifier. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

Si j'avois à intégrer une équation

$$\begin{aligned} &V + V' + V'' + V''', \&c. = 0 \\ &+ Y + Y' + Y'' + Y''', \&c. \\ &+ \ . \quad . \quad . \quad . \ \&c. \end{aligned}$$

il est clair que n'ayant non plus dans les équations de condition, mises sous la forme indiquée ci-dessus, que des fonctions de la proposée, ou du facteur que je supposerois la rendre la différentielle exacte d'une fonction sans différences, on pourroit la traiter de même, & qu'il n'y auroit aucune difficulté de plus.

REMARQUE II.

LA solution sera complette, lorsque les équations trouvées par le Problême seront identiques, ou n'auront pas besoin, pour être compatibles avec la proposée, qu'une équation d'un ordre inférieur les résolve en même-tems.

REMARQUE III.

APPLIQUANT aux différences finies les principes expliqués dans la Remarque IV, page 16, j'observe que, si

$$\begin{array}{l} V + V' + V'' + V''', \text{ \&c.} \\ + Y + Y' + Y'' + Y''', \text{ \&c.} \\ + \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \end{array}$$

est une différentielle exacte, la fonction

$$\begin{array}{l} \partial V + \partial V' + \partial V'' + \partial V''', \text{ \&c.} \\ + \partial Y + \partial Y' + \partial Y'' + \partial Y''', \text{ \&c.} \\ + \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \end{array}$$

(la caractéristique ∂ désignant une différence infiniment petite quelconque) en sera une aussi, étant rapportée à la caractéristique δ: & intégrant par parties, j'aurai la formule

$$\begin{array}{l} A + A' + A'' + A''', \text{ \&c. } \partial x \\ + B + B' + B'' + B''', \text{ \&c. } \partial y \\ + \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \end{array}$$

qui devra être nulle par elle-même : j'aurai donc néceſſairement les équations identiques

$$A + A' + A'' + A''', \text{\&c.} = 0,$$
$$B + B' + B'' + B''', \text{\&c.} = 0,$$

& ainſi de ſuite : & ces équations de condition ſeront les mêmes que celles que me donne pour chaque variable la Remarque de la page 78. Si donc on veut maintenant que

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} V + V' + V'' + V''', \text{\&c.} \\ Y + Y' + Y'' + Y''', \text{\&c.} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array} \right.$$

Σ déſignant l'intégrale priſe par rapport aux différences finies, ſoit un *maximum*, j'aurai de même

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \partial V + \partial V' + \partial V'' + \partial V''', \text{\&c.} \\ \partial Y + \partial Y' + \partial Y'' + \partial Y''', \text{\&c.} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array} \right\} = 0,$$

&

$$A + A' + A'' + A''', \text{\&c.} = 0$$
$$B + B' + B'' + B''', \text{\&c.} = 0$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$

équations qui doivent avoir lieu entre les variables ; lorſque la formule propoſée ſera un *maximum* ou un *minimum* ; & il faudra que le nombre de ces équations diminue d'une unité, pour que la queſtion ſoit poſſible.

Il ſuit de ceci & de l'Article II, que, s'il n'y a aucune ſuppoſition particuliere, on a pour la fonction aux différences finies les mêmes équations que pour la fonction aux différences infiniment petites qui y répond.

Ce que j'ai dit (Remarque IV, page 33) étant vrai auſſi ici, j'aurai les équations entre les variables, pour que la fonction Z, déterminée par une équation aux différences finies, soit un *maximum* ou un *minimum*, à l'aide des équations de condition que donne le Problême III pour l'équation entre Z & les variables, & de cette équation même: & les observations générales qu'on trouve dans cette même Remarque peuvent également s'appliquer ici.

Comme les équations de condition que donne le Problême peuvent être difficiles à traiter, je remarque 1°. que, si l'équation aux différences infiniment petites qui répond à la proposée est possible, je n'ai qu'à l'intégrer par la méthode de la seconde Section de la premiere Partie, & substituer pour les différences partielles de K, les valeurs que donne cette intégrale: 2°. que, si elle n'est pas possible, je n'ai qu'à prendre les équations sans différences que ce cas donne pour le *maximnm*, & que j'aurai par la même Section, & que ces équations la rendant intégrable, lorsque le Problême est possible, ce cas se réduit alors au précédent: de façon que le nombre total de ces équations, y compris la proposée, doit se réduire à un nombre égal à celui des variables.

SECONDE SECTION.

Essai sur les équations différentielles qui contiennent des différences partielles.

Les équations différentielles dont je me propose de traiter ici, sont celles dans lesquelles, outre les différences dx, dy, dz des variables x, y, z, se trouvent aussi des différences partielles $\frac{dz}{dx} dx$, $\frac{dz}{dy} dy$, &c. d'une des variables z; ensorte que, soit $z = Z$, Z étant une fonction de x, y, j'aurai une équation formée de deux des équations

$$dz = dZ$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dZ}{dx}$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{dZ}{dy};$$

car deux quelconques donnent nécessairement la troisieme : & ceci étant vrai en général pour un ordre quelconque, il me restera toujours à intégrer une équation entre x, y, z, dx, dy, dz, $\frac{dz}{dx}$, ddx, ddy, ddz, $d\frac{ddz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, &c. En effet, toutes les autres formules qui paroîtroient s'y trouver, peuvent en être chassées. Pour m'assurer d'abord si une telle équation a une intégrale, je remarque que, soit la proposée $V = 0$, je pourrai supposer un facteur A, tel que $AV = dB$, B étant une fonction différentielle ordinaire d'un ordre de différences moindre d'une unité, & que la proposée aura une intégrale de l'ordre inférieur, toutes les fois que B pourra être supposée nulle en même-tems que V. Mais $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, &c. peuvent être regardées comme des fonctions de x, y. Les traitant donc comme telles, j'aurai, par la premiere Section de la premiere Partie, des équations de condition qui contiendront de ces différences partielles : elles devront être identiques, ou avoir lieu en même-tems que $V = 0$; & il n'est plus question que de les vérifier.

Soit, pour donner un exemple de la méthode que je propose ici, l'équation $\frac{dz}{dx} = e\frac{dz}{dy}$:

elle devient . . . . $dz = \frac{edz}{dy}dx + \frac{dz}{dy}dy$:

ce qui me donne l'équation de condition

$$\frac{eddz}{dy^2} = \frac{ddz}{dxdy}, \text{ ou } \frac{d\frac{edz}{dy}}{dy} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy},$$

équation qui devient identique, lorsque, pour $\frac{edz}{dy}$, je substitue sa valeur $\frac{dz}{dx}$ prise de la proposée : d'où il suit que celle-ci admet une solution complette.

M'étant assuré par cette méthode, qu'une équation proposée a une intégrale, il me reste à la trouver. Je ferai usage pour cela de la méthode que j'ai exposée dans la seconde Section de la premiere Partie : mais je n'entrerai dans quelque détail pour l'espece d'équations que je considere, que sur le nombre & la nature des fonctions que peut renfermer l'intégrale de la proposée : ce point étant le plus important, & celui sur lequel ces équations different le plus des équations ordinaires.

Pour cela, soit 1°. une équation algébrique entre les variables x, y, z, leurs différences entieres ou partielles, & deux fonctions r, s, formées comme dans l'Art. I, page 38 & suivantes. Il est clair qu'à l'aide de la proposée & des deux équations différentielles que j'en tire, je pourrai éliminer r & s.

Soit 2°. une équation algébrique entre les mêmes variables, & $r' = \text{l.}\, a^m b^n c^p + F\varphi x, y, z$, F désignant une fonction quelconque de φ, fonction de x, y, z. J'aurai, en différenciant, deux équations sans r, dont l'une contiendra $\frac{d.F\varphi x,y,z}{d.\varphi x,y,z}\, d\varphi x, y, z$; l'autre $\frac{d.F\varphi x,y,z}{d.\varphi x,y,z} \cdot \frac{d.\varphi x,y,z}{dx}\, dx$. Donc si $d.\varphi x,y,z$ & $\frac{d.\varphi x,y,z}{dx}\, dx$ sont tous deux algébriques, ou ne contiennent que des fonctions transcendantes qui leur soient facteurs communs, on éliminera $\frac{d.F\varphi x,y,z}{d.\varphi x,y,z}$ à l'aide de ces équations, & il ne restera plus qu'une équation algébrique, dont la proposée sera l'intégrale, & dont l'arbitraire sera la fonction F. Mais cela arrive lorsque $\varphi x, y, z$ est une fonction algébrique de x, y, z, que je désigne par $\Phi x, y, z$; ou que

$$\varphi x, y, z = \text{l.}\, a^m b^n c^p, \text{\&c.} + \Phi x, y, z,$$

$$\text{ou } e^{\Phi x, y, z}\, \Phi' x, y, z,$$

$$\text{ou } e^{q\text{l.}\, a^m b^n c^p, \text{\&c.}}\, \Phi x, y, z.$$

Donc, &c.

Soit 3°. une équation algébrique entre les mêmes variables s' & $r' = \text{l.}\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F\varphi x, y, z$; j'aurai j'aurai, en différenciant, deux équations qui contiendront $\frac{d.F\varphi x, y, z}{d.\varphi x, y, z}$, & r'. Donc, éliminant $\frac{d.F\varphi x, y, z}{d.\varphi x, y, z}$, il me restera une équation algébrique entre les variables, & r': & (N°. précédent) j'éliminerai r' par une nouvelle différenciation.

Soit 4°. une équation algébrique entre les mêmes variables, & $r = \text{l}.a^m b^n c^p + F\varphi x, y, z + F'\varphi' x, y, z$: j'aurai, en différenciant, deux équations, à l'aide desquelles je ferai disparoître une des fonctions F ou F'; & une seconde différenciation fera disparoître l'autre.

Soit 5°. enfin une équation algébrique, toujours des mêmes variables, & de

$$s' = \text{l}.a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'} + F'\varphi' x, y, z, r'$$

$$\&\ \cdot\ \cdot\ r = \text{l}.a^m b^n c^p + F\varphi x, y, z.$$

Une différenciation éliminera s': & comme $\frac{d.F\varphi x, y, z}{d.\varphi x, y, z}$ se trouvera alors dans l'équation avec r', il faudra une seconde différenciation pour faire évanouir cette fonction, & une troisieme pour faire évanouir r'.

Si l'on avoit eu une équation qui contînt t', s', r', il auroit fallu une différenciation pour faire évanouir t'; deux, par le N°. précédent, pour faire évanouir s'; & comme après on a r', dr', d^2r', d^3r', il en faudroit quatre pour faire évanouir r'.

Ces principes, qu'il suffit d'exposer, étant bien entendus, on trouvera sans difficulté les différentes formes d'intégrales qui répondent à une équation différentielle.

Ainsi, 1°. une équation différentielle du premier ordre aura pour intégrale *une équation algébrique* entre x, y, z, r & s: *ou une équation algébrique* entre x, y, z, & $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p + F\varphi x, y, z$, l'arbitraire étant la fonction F.

2°. Une équation du second ordre aura pour intégrale *une équation algébrique* entre x, y, z, r, s &c. ces fonctions transcendantes étant au nombre de quatre : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, & $t' = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c. $+ F'' \varphi'' x, y, z, r, s$; & une des arbitraires sera la fonction F'' : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F\varphi x, y, z$ & s'; & la fonction F sera une des arbitraires : *ou enfin une équation algébrique* entre x, y, z, &c. & $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F\varphi x, y, z + F'\varphi x, y, z$, les fonctions F & F' étant les arbitraires.

3°. Une équation du troisieme ordre aura pour intégrale *une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, &c. ces fonctions étant au nombre de six : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, &c. ces fonctions étant au nombre de quatre, & $t' = \mathrm{l}.\, a''''^{m''''} b''''^{n''''} c''''^{p''''}$, &c. $+ F'''' \varphi'''' x, y, z, r, s$, &c. *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, $t' = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c. $+ F''\varphi'' x, y, z, r, s$, & une fonction logarithmique de x, y, z, r, s, t' : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, $t' = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c. $+ F''\varphi'' x, y, z, r, s$

$+ F''' \varphi''' x, y, z, r, s$: *ou une équation algébrique* entre x, y, z, $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z$, s' & t' : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z + F' \varphi' x, y, z$, & s': *ou une équation algébrique* entre x, y, z, $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z$, & $s' = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c. $+ F' \varphi' x$, y, z, r' : *ou enfin une équation algébrique* entre x, y, z, & $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z + F' \varphi' x, y, z + F'' \varphi'' x, y, z$.

Et il en ſera de même pour les ordres plus élevés, les fonctions F, F', F'', &c. étant toujours arbitraires : & il y aura de plus autant de conſtantes d'arbitraires, que de fonctions r, s, &c. & le terme conſtant de φ le ſera toujours.

Si, au lieu d'une équation entre trois variables x, y, z, j'avois à intégrer une équation entre quatre variables x, y, z, u, chaque différenciation me donneroit trois équations, au lieu de deux que j'avois lorſque l'équation étoit à deux variables : d'où l'on voit qu'il me ſeroit facile de déterminer pour ce cas les différentes fonctions, ſoit tranſcendantes, ſoit arbitraires, qui peuvent entrer dans l'intégrale.

Si j'avois auſſi à intégrer une équation dans laquelle, outre les différences partielles de z en x, y, &c. il ſe trouveroit des différences partielles de x en z, y, &c. de y en z, x, &c. il eſt clair que le raiſonnement que j'ai fait (page 76) au ſujet des équations de condition, s'y appliqueroit, & que chaque différenciation donneroit un nombre d'équations égal au quarré du nombre des variables diminué de l'unité; & qu'ainsi on parviendroit, à l'aide des mêmes principes que ci-dessus, à déterminer les formes que peut avoir l'intégrale.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ces équations, quelqu'intéressante qu'en puisse être la théorie; & je me contenterai de joindre ici une remarque sur la nature des fonctions arbitraires F, F', &c. Supposant donc l'équation à trois variables: je dis que, différencier une fonction, n'est autre chose qu'y substituer, pour x, y, z; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; & retrancher la fonction elle-même de ce qu'elle devient par cette substitution. Donnant donc cette signification à la caractéristique d, je remarque que si, au lieu de supposer que F devienne $F+dF$, je suppose que F devienne $F'+dF'$, F' étant une autre fonction, c'est-à-dire, ce que devient F pour cette valeur des variables, j'aurai, au lieu de dF, $F'-F+dF'$; & qu'ainsi je ne pourrai faire disparoître F, que $F'-F$ ne soit nul; ce qui ne demande point que la fonction F' soit la même que la fonction F, mais seulement qu'elle lui soit égale pour cette valeur particuliere des variables. Si l'équation est supposée du second ordre, j'aurai $d^2F=F''-2F'+F+2dF''-2dF'+d^2F''$: & pour que la fonction F puisse être éliminée, il faut seulement que, pour la valeur particuliere des variables, $F''+2F'+F$ & $dF''-dF'$ soient nuls: & ainsi de suite. Si donc on a une courbe dont l'abciſſe ſoit ce qu'on voudra, & l'ordonnée F; elle devra, pour le premier ordre, être telle qu'il n'y ait pas de ſaut dans ſon cours, c'eſt-à-dire, être continue ou formée de parties de courbes continues qui ſe coupent : il faudra pour le ſecond, que les différentes courbes dont elle ſeroit compoſée, ſe touchent; qu'elles ſe touchent à un point d'inflexion pour le troiſieme, à un point de ſerpentement pour le quatrieme, & ainſi de ſuite, mais en ſuppoſant toujours que l'intégrale, pour cet ordre, ſoit auſſi compliquée qu'elle peut l'être; car il eſt clair que ſi l'équation pouvoit avoir une intégrale algébrique ſans F d'un ordre inférieur, les conditions doivent être pour cet ordre. Et ſi on avoit une équation à quatre variables du premier ordre, par exemple, & qu'elle ne contînt qu'une fonction arbitraire F, il arriveroit qu'il n'y auroit aucune condition, & que les F ne ſeroient aſſujettis à aucune loi.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

LA méthode d'intégrer, que je donne dans cet Ouvrage, joint au mérite d'être directe, celui de la plus grande généralité qui en eſt une ſuite. Mais le défaut d'exiger beaucoup de calcul & de travail, auſſi longtems ſur-tout qu'il n'y aura pas de tables d'intégrales toutes dreſſées, fait que juſques-là elle ne peut guere être d'uſage, que pour les cas qui ont échappé aux méthodes particulieres. La conſtruction de ces tables, pouſſées même aſſez loin, exigeroit plus de connoiſſances que celle des tables des logarithmes, mais moins de travail; ſeroit incomparablement plus utile, & feroit infiniment plus d'honneur à ceux qui exécuteroient ce projet, dont les difficultés ne ſont pas purement méchaniques, comme l'étoient celles de la conſtruction des tables de logarithmes.

FIN.

APPROBATION.

J'ai lu, par l'ordre de Monseigneur le Vice-Chancelier, & approuvé un Ouvrage qui a pour titre, *Du Calcul Intégral.* A Paris, ce 30 Mai 1765.

LA CHAPELLE,
Membre de la Soc. Roy. de Londres.

ERRATA.

Page 3, ligne 3, les, *lisez* ces.
Page 17, ligne 7, N, mettez N'.
Page 23, ligne 6, dA, mettez dV.
Page 30, ligne 5, $p'dP$, mettez $p'dP'$.
Idem, ligne 8, pdP', mettez $p'dP'$.
Page 31, ligne 12, dA, mettez dA'.
Page 33, ligne 25, *Remarque VI*, lis. *Rem. IV*.
Page 40, ligne 25, $e^{\Phi' x, y, \&c.}$, mettez $e^{\Phi' x, y, \&c.} r$.
Page 64, ligne 13, $ifa^{\int -3}$, mettez $if^2 a^{\int -3}$.
Page 73, ligne 13, supposition, *lisez* substitution.

DU PROBLEME DES TROIS CORPS,

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

Ut omnia candide legantur, & defectus in materia tàm difficili non tàm reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus investigentur, & benignè suppleantur, enixè rogo. NEWTON, *in fine Præfationis principio appositæ.*

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT.

M. DCC. LXVII.

EXTRAIT
Des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 20 Décembre 1766.

MESSIEURS D'ALEMBERT & BEZOUT, qui avoient été nommés pour examiner trois Mémoires sur différents objets de Méchanique & de Calcul, ayant pour titre général : *Du Problême des trois Corps*, l'Académie les a jugés dignes de son Approbation. Les Méthodes proposées par l'Auteur dans ce nouvel Ouvrage, ne peuvent que confirmer l'opinion avantageuse que le premier a donné des connoissances & des talens de l'Auteur. Fait à Paris, le 20 Décembre 1766.

GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secrétaire Perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

APPROBATION.

J'AI lu par ordre de Monseigneur le Vice-Chancelier, un Ouvrage intitulé *Problême des trois Corps*, par M. le Marquis DE CONDORCET, & il m'a paru que l'Impression n'en pouvoit être que très avantageuse & très agréable aux Géometres, par les nouvelles & excellentes vues qu'il contient, ainsi que par la sagacité avec laquelle l'Auteur y traite les matieres les plus épineuses de l'Analyse & de la Méchanique. A Paris, le 18 Novembre 1766.

MONTUCLA.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne ville de Paris, nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilege pour l'impression de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Exposans, Nous leur avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression, en tels volumes, forme, marge, caractères, conjointement ou séparement, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci dessus specifiés, il en puisse être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie: Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages seront remis ès mains de notre très cher & féal Chevalier le sieur D'AGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très cher & féal Chevalier le sieur D'AGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des Présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayant cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Février, l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre Regne le trente-cinquieme. Par le Roi en son Conseil. MOL.

Regîstré sur le Registre XII de la Chambre Royale & Sindicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 430, Fol. 309, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, art. 4, à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. 108 du même Reglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, Syndic.

PREMIER MEMOIRE.

ANALYSE
D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE
DE RÉSOUDRE
LE PROBLÊME DES TROIS CORPS,

Leur maſſe étant ſuppoſée réunie en un point ſans étendue.

LE PROBLÊME des Trois Corps, ſur lequel je vais donner ici quelques vues, eſt un des plus célebres que les Géometres ſe ſoient propoſés dans ce ſiecle. Newton fit mouvoir dans les ellipſes de Képler, les planetes lancées dans le vuide & animées d'une force de gravitation. Il calcula dans des paraboles, les orbites elliptiques & preſque infiniment allongées des cometes. La Lune, le Satellite de notre globe, attirée en même-tems par le Soleil & par la Terre, ſe mouvoit dans une courbe irréguliere qui avoit échappé à toutes les hypotheſes & à toutes les tables dreſſées d'après les obſervations. Les cometes étoient troublées dans leur cours par l'approche de quelques-unes de nos planetes. C'eſt à ces queſtions que s'arrêta Newton ; c'eſt d'après le réſultat du calcul, comparé à ce que donnent les obſervations, que les Diſciples de ce grand homme doivent, ou mettre la derniere main à ſon ſyſtême, ou en renverſer l'édifice hardi.

Trois corps mus dans l'eſpace d'un mouvement uniforme, s'attirent réciproquement en raiſon directe de leurs maſſes, & inverſe du quarré de leurs diſtances. Quel en eſt le mouvement? Voilà le problême général qu'il faut réſoudre.

La maſſe du Soleil eſt énorme par rapport à celles de la Terre & de la Lune : cet aſtre eſt à peine ébranlé par leur attraction ſur lui ; & on peut, dans ce cas particulier, n'y avoir aucun égard. La queſtion ſe réduit donc déja à trouver le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement, & ſont en même-tems attirés vers un point fixe.

On ſait de plus quelle eſt la courbe du mouvement ſenſible de la Terre ; & cette connoiſſance réduit le problême, dans ce cas particulier, à trouver le mouvement d'un corps attiré vers un point fixe, & encore par un autre corps dont le mouvement eſt donné.

Ces problêmes ont néceſſairement deux parties. Leur nature ne nous permettant point d'en avoir les équations, ſans qu'il y entre des différentielles ; il faut, après avoir trouvé ces équations, en chercher l'intégrale, ou du moins les mettre ſous une forme à laquelle les méthodes connues s'appliquent facilement. Je donnerai pour l'une & l'autre parties, des méthodes également utiles pour un nombre de corps quelconque, & qui, à mesure que le nombre des corps augmenteroit, exigeroient seulement de plus longs calculs, mais ne renfermeroient pas de nouvelles difficultés.

PREMIERE PARTIE DU PROBLÊME.

TROUVER les équations différentielles du mouvement de chacun des corps d'un systême quelconque, en supposant que chacun de ces corps soit animé de certaines forces, & qu'il y ait entr'eux une attraction mutuelle.

SOLUTION. Soient ces corps M, M', M''. . . que M, M', M''. . . en désignent aussi les masses, & que, d'un point fixe dans l'espace, trois coordonnées rectangles déterminent la courbe du mouvement de chacun de ces corps. Soient ces coordonnées x, y, z, pour le corps M; x', y', z', pour le corps M'; x'', y'', z'', pour le corps M''. . . P, Q, R, les forces du corps M dans les directions de x, y, z; P', Q', R', celles de M'; P'', Q'', R'', celles de M''. . . Soient les distances entre le corps M & les corps M', M''. . . f, f'. . . les distances entre M' & M''. . . $f_{,}$. . . ensorte que

$$f = \sqrt{\overline{x - x'}^2 + \overline{y - y'}^2 + \overline{z - z'}^2},$$

$$f' = \sqrt{\overline{x - x''}^2 + \overline{y - y''}^2 + \overline{z - z''}^2} \ldots\ldots\ldots$$

$$f_{,} = \sqrt{\overline{x' - x''}^2 + \overline{y' - y''}^2 + \overline{z' - z''}^2} \ldots\ldots \;\&$$

F, F'. . . les forces d'attraction entre M & M', M''. . . $F_{,}$. . . les forces d'attraction entre M' & M''. . . Soient enfin u, u', u''. . . les vîteſſes des corps M, M', M''. . . $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, $ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$, $ds'' = \sqrt{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}$. . . les eſpaces parcourus par ces mêmes corps, & dt l'élément du tems, que je ſuppoſe conſtant.

Je ſuppoſe qu'au lieu de parcourir les eſpaces ds, ds', ds''. . . les corps parcourent les eſpaces $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}s'$, $\mathrm{d}s''$. . . à cauſe d'un changement quelconque dans les forces (les différentielles affectéesde la caractériſtique d étant abſolument indépendantes de celles qui ſont affectées de la caractériſtique ordinaire); la ſomme des forces néceſſaires pour opérer ce changement dans le ſyſtême, ſera

$$\int \overline{M.\,P\,\overline{\mathrm{d}x - dx} + Q\,\overline{\mathrm{d}y - dy} + R\,\overline{\mathrm{d}z - dz}} +$$
$$\overline{M'.\,P'\,\overline{\mathrm{d}x' - dx'} + Q'\,\overline{\mathrm{d}y' - dy'} + R'\,\overline{\mathrm{d}z' - dz'}} +$$
$$\overline{M''.\,P''\,\overline{\mathrm{d}x'' - dx''} + Q''\,\overline{\mathrm{d}y'' - dy''} + R''\,\overline{\mathrm{d}z'' - dz''}} \dots$$
$$+ MM'F\,\overline{\mathrm{d}f - df} \dots + MM''F'\,\overline{\mathrm{d}f' - df'} \dots +$$

$M'M''F_{\prime}\,\overline{\mathrm{d}f_{\prime} - df_{\prime}}$. . . & par conſéquent la ſomme de toutes les forces du ſyſtême ſera dans l'hypotheſe

$$\int M.\overline{P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z} + M'.\overline{P'\mathrm{d}x' + Q'\mathrm{d}y' + R'\mathrm{d}z'}$$
$$+ M''.\overline{P''\mathrm{d}x'' + Q''\mathrm{d}y'' + R''\mathrm{d}z''} \dots + MM'F\,\mathrm{d}f +$$

$MM''F'\mathrm{d}f'$. . . . $+ M'M''F_{\prime}\mathrm{d}f_{\prime}$. . . le ſigne d'intégration $\int$ ſe rapportant à la caractériſtique d. Multipliant par dt, élément du tems, j'aurai la quantité d'action qui, dans l'hypotheſe, s'exercera dans le ſyſtême. Mais, dans les mêmes ſuppoſitions, cette quantité d'action eſt auſſi $\int Mud\,\mathrm{d}s + M'u'd\,\mathrm{d}s' + M''u''d\,\mathrm{d}s''$. . . & ces

deux expressions doivent être identiques entre elles. Donc $\int \overline{Mudds + M'u'dds' + M''u''dds'' \ldots -}$
$\overline{M.\overline{Pdx + Qdy + Rdz}.dt - M'.\overline{P'dx' + Q'dy' + R'dz'}.dt}$
$\overline{- M''.\overline{P''dx'' + Q''dy'' + R''dz''}.dt \ldots - MM'Fdf.dt}$
$\overline{- MM''F'df'.dt \ldots - M'M''F_{,}df_{,}.dt \ldots} = 0.$

Je mets dans cette équation, pour dds, sa valeur $\frac{dx.ddx + dy.ddy + dz.ddz}{ds}$; pour dds', sa valeur $\frac{dx'.ddx' + dy'.ddy' + dz'.ddz'}{ds'}$; pour dds'', sa valeur $\frac{dx''.ddx'' + dy''.ddy'' + dz''.ddz''}{ds''}$. J'integre par partie, ensorte qu'il me reste sous le signe une fonction qui ne soit plus susceptible de réduction; & j'ai, 1°. un terme hors du signe, qui sera nul de lui-même, ou le deviendra en vertu de suppositions convenables, selon que la trajectoire sera assujettie à passer par certains points, ou à d'autres suppositions; 2°. une fonction sous le signe, qui sera aussi égale à zero : ce qui me donnera

$$\int \overline{M\, d.\frac{udx}{ds} + MPdt + FMM'\frac{x - x'}{f}dt +}$$
$$\overline{F'MM''\frac{x - x''}{f'}dt \ldots}\, dx.$$
$$+ \overline{M\, d.\frac{udy}{ds} + MQdt + FMM'\frac{y - y'}{f}dt +}$$
$$\overline{F'MM''\frac{y - y''}{f'}dt \ldots}\, dy.$$
$$+ \overline{M\, d.\frac{udz}{ds} + MRdt + FMM'\frac{z - z'}{f}dt +}$$
$$\overline{F'MM''\frac{z - z''}{f'}dt \ldots}\, dz.$$

$$\overline{+\ M'd.\ \frac{u'dx'}{ds'} + M'P'dt - FMM'\ \frac{x-x'}{f}\ dt\ +}$$

$$\overline{F_{,}M'M''\frac{x-x''}{f_{,}}\ dt}\ \ldots\ dx'.$$

$$\overline{+\ M'd.\ \frac{u'dy'}{ds'} + M'Q'dt - FMM'\ \frac{y-y'}{f}\ dt\ +}$$

$$\overline{F_{,}M'M''\frac{y'-y''}{f_{,}}\ dt}\ \ldots\ dy'.$$

$$\overline{+\ M'd.\ \frac{u'dz'}{ds'} + M'R'dt - FMM'\ \frac{z-z'}{f}\ dt\ +}$$

$$\overline{F_{,}M'M''\frac{z'-z''}{f_{,}}\ dt}\ \ldots\ dz'.$$

$$\overline{+\ M''d.\ \frac{u''dx''}{ds''} + M''P''dt - F'MM''\ \frac{x-x''}{f'}\ dt\ -}$$

$$\overline{F_{,}M'M''\frac{x'-x''}{f_{,}}\ dt}\ \ldots\ dx''.$$

$$\overline{+\ M''d.\ \frac{u''dy''}{ds''} + M''Q''dt - F'MM''\ \frac{y-y''}{f'}\ dt\ -}$$

$$\overline{F_{,}M'M''\frac{y'-y''}{f_{,}}\ dt}\ \ldots\ dy''.$$

$$\overline{+\ M''d.\ \frac{u''dz''}{ds''} + M''R''dt - F'MM''\ \frac{z-z''}{f'}\ dt\ -}$$

$$\overline{F_{,}M'M''\frac{z'-z''}{f_{,}}\ dt}\ \ldots\ dz''.$$

Mais cette équation doit avoir lieu, quels que ſoient les dx, dy, dz, &c. Donc, égalant à zero chacun de leurs coefficiens, j'aurai perpétuellement entre les coordonnées & les vîteſſes, les équations ſuivantes, qui ſeront pour chaque corps au nombre de trois.

1re. $M d. \frac{u\,dx}{ds} + MP\,dt + FMM' \frac{x-x'}{f} dt +$
$F'MM'' \frac{x-x''}{f'} dt \ldots = 0.$

2e. $M\, d. \frac{u\,dy}{ds} + MQ\,dt + FMM' \frac{y-y'}{f} dt +$
$F'MM'' \frac{y-y''}{f'} dt \ldots = 0.$

3e. $M d. \frac{u\,dz}{ds} + MR\,dt + FMM' \frac{z-z'}{f} dt +$
$F'MM'' \frac{z-z''}{f'} dt \ldots = 0.$

4e. $M' d. \frac{u'dx'}{ds'} + M'P'dt - FMM' \frac{x-x'}{f} dt +$
$F_{,}M'M'' \frac{x'-x''}{f_{,}} dt \ldots = 0.$

5e. $M'd. \frac{u'dy'}{ds'} + M'Q'dt - FMM' \frac{y-y'}{f} dt +$
$F_{,}M'M'' \frac{y'-y''}{f_{,}} dt \ldots = 0.$

6e. $M'd. \frac{u'dz'}{ds'} + M'R'dt - FMM' \frac{z-z'}{f} dt +$
$F_{,}M'M'' \frac{z'-z''}{f_{,}} dt \ldots = 0.$

7e. $M''d. \frac{u''dx''}{ds''} + M''P''dt - F'MM'' \frac{x-x''}{f'} dt -$
$F_{,}M'M'' \frac{x'-x''}{f_{,}} dt \ldots = 0.$

8e. $M''d. \frac{u''dy''}{ds''} + M''Q''dt - F'MM'' \frac{y-y''}{f'} dt -$
$F_{,}M'M'' \frac{y'-y''}{f_{,}} dt \ldots = 0.$

9e. $M''d. \frac{u''dz''}{ds''} + M''R''dt - F'MM'' \frac{z-z''}{f'} dt -$
$F_{,}M'M'' \frac{z'-z''}{f'} dt \ldots = 0.$ Equations qui suffiront

dans tous les cas, pour avoir le mouvement de chacun des corps. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

S'IL y avoit entre les coordonnées une ou plusieurs équations données, indépendantes de celles du problême, on substituera dans le terme qui reste sous le signe, la valeur d'une ou de plusieurs des différentielles affectées du signe d, tirée de ces équations; on égalera à zero le coefficient de chacune de celles qui restent : & ces équations, jointes aux équations données, serviront à résoudre le problême.

REMARQUE II.

PUISQUE le coefficient de chacune des différentielles affectées de la caractéristique d est nul, il est clair qu'en mettant dans la fonction sous le signe, dx à la place de $\mathrm{d}x$, & ainsi de suite, on aura une fonction qui sera aussi égale à zero. Développant ensuite tous ces termes, puis réduisant, & substituant pour $\frac{dds}{dt}$ sa valeur du, on aura

$$Mudu + M'u'du' + M''u''du'' \cdot\cdot + M.\overline{Pdx + Qdy + Rdz} + M'.\overline{P'dx' + Q'dy' + R'dz'} + M''.\overline{P''dx'' + Q''dy'' + R''dz''} + MM'Fdf + MM''F'df' \cdots + M'M''F_{,}df_{,} \cdots = 0:$$

équation qui est la même que celle que donne le principe des forces vives, & qui renferme ce principe.

REMARQUE III.

TOUTES les fois que le mouvement est possible, la fonction

fonction égalée ci-dessus à zero peut être regardée comme intégrable; mais dans ce cas j'ai $Mudu + M'u'du' + M''u''du''\ldots + M.\overline{Pdx + Qdy + Rdz} + M'.\overline{P'dx' + Q'dy' + R'dz'} + M''.\overline{P''dx'' + Q''dy'' + R''dz''}\ldots + MM'Fdf + MM'F'df'\ldots + M'M''F_{,}df_{,}\ldots = 0$. Donc, comparant cette équation avec celle du problême, j'aurai $\int Mudds + Mudu dt + M'u'dds' + M'u'du'dt + M''u''dds'' + M''u''du''dt\ldots = 0$. Donc, mettant pour u, u', $u''\ldots$ leurs valeurs $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$, $\frac{ds''}{dt}\ldots$ j'aurai $\int Mudds + Mdsdu + M'u'dds' + M'ds'du' + M''u''dds'' + M''ds''du''\ldots = 0$; & réduisant, $\int d.Muds + M'u'ds' + M''u''ds''\ldots = 0$, ou $d.\int Muds + M'u'ds' + M''u''ds''\ldots = 0$. Donc $\int Muds + M'u'ds' + M''u''ds''\ldots$ est un *minimum*. Donc le principe de la moindre action a lieu toutes les fois que le mouvement est possible, mais ne peut être employé pour trouver les équations du problême, que lorsque la formule ci-dessus est immédiatement intégrable. Cela a été aussi remarqué par M. de la Grange.

SECONDE PARTIE DU PROBLÊME.

Pour avoir les équations du premier cas du problême, il est aisé de voir qu'il n'y a qu'à faire, dans les neuf équations ci-dessus, P, Q, R; P', Q', R'; P'', Q'', R'', égaux à zero, & $F = \frac{1}{f^2}$, $F' = \frac{1}{f'^2}$, $F_{,} = \frac{1}{f_{,}^2}$. Je fais ensuite dans ces équations, $u = \frac{ds}{dt}$, $u' = \frac{ds'}{dt}$, $u'' = \frac{ds''}{dt}$,

& elles deviennent

$$1^{re}.\ ddx + M'\frac{x-x'}{f^3}dt^2 + M''\frac{x-x''}{f'^3}dt^2 = 0,$$

$$2^e.\ ddy + M'\frac{y-y'}{f^3}dt^2 + M''\frac{y-y''}{f'^3}dt^2 = 0,$$

$$3^e.\ ddz + M'\frac{z-z'}{f^3}dt^2 + M''\frac{z-z''}{f'^3}dt^2 = 0,$$

$$4^e.\ ddx' - M\frac{x-x'}{f^3}dt^2 + M''\frac{x'-x''}{f_{,}^3}dt^2 = 0,$$

$$5^e.\ ddy' - M\frac{y-y'}{f^3}dt^2 + M''\frac{y'-y''}{f_{,}^3}dt^2 = 0,$$

$$6^e.\ ddz' - M\frac{z-z'}{f^3}dt^2 + M''\frac{z'-z''}{f_{,}^3}dt^2 = 0,$$

$$7^e.\ ddx'' - M\frac{x-x''}{f'^3}dt^2 - M'\frac{x'-x''}{f_{,}^3}dt^2 = 0,$$

$$8^e.\ ddy'' - M\frac{y-y''}{f'^3}dt^2 - M'\frac{y'-y''}{f_{,}^3}dt^2 = 0,$$

$$9^e.\ ddz'' - M\frac{z-z''}{f'^3}dt^2 - M'\frac{z'-z''}{f_{,}^3}dt^2 = 0.$$

Pour avoir maintenant les équations des courbes que décrivent les corps, j'élimine dt^2, & j'ai les huit équations suivantes :

$$1^{re}.\ \frac{ddx}{M'\frac{x-x'}{f^3} + M''\frac{x-x''}{f'^3}} = \frac{ddy}{M'\frac{y-y'}{f^3} + M''\frac{y-y''}{f'^3}},$$

$$2^e.\ \frac{ddx}{M'\frac{x-x''}{f^3} + M''\frac{x-x''}{f'^3}} = \frac{ddz}{M'\frac{z-z''}{f^3} + M''\frac{z-z''}{f'^3}},$$

$$3^e.\ \frac{ddx'}{M''\frac{x'-x''}{f_{,}^3} - M\frac{x-x'}{f^3}} = \frac{ddy'}{M''\frac{y'-y''}{f_{,}^3} - M\frac{y-y'}{f^3}},$$

$$4^e.\ \frac{ddx'}{M''\frac{x'-x''}{f_{,}^3} - M\frac{x-x''}{f^3}} = \frac{ddz'}{M''\frac{z'-z''}{f_{,}^3} - M\frac{z-z'}{f^3}},$$

$$5^e.\quad \frac{ddx''}{M\frac{x-x''}{f'^3}+M'\frac{x'-x''}{f_{,}^3}}=\frac{ddy''}{M\frac{y-y''}{f'^3}+M'\frac{y'-y''}{f_{,}^3}},$$

$$6^e.\quad \frac{ddx''}{M\frac{x-x''}{f'^3}+M'\frac{x'-x''}{f_{,}^3}}=\frac{ddz''}{M\frac{z-z''}{f'^3}+M'\frac{z'-z''}{f_{,}^3}},$$

$$7^e.\quad \frac{ddx}{M'\frac{x-x'}{f^3}+M''\frac{x-x''}{f'^3}}=\frac{ddx'}{M''\frac{x'-x''}{f_{,}^3}-M\frac{x-x'}{f^3}},$$

$$8^e.\quad \frac{ddx}{M'\frac{x-x'}{f^3}+M''\frac{x-x''}{f'^3}}=\frac{-ddx''}{M\frac{x-x''}{f'^3}+M'\frac{x'-x''}{f_{,}^3}}$$

Et l'on pourroit, au lieu des équations 7^e. & 8^e. en avoir d'autres ſemblables en ddy & ddy', ddy & ddy'', ou ddz & ddz', ddz & ddz''. Cela poſé, il eſt aiſé de voir qu'y ayant neuf variables & huit équations, on pourra éliminer par les méthodes connues, enſorte qu'il ne reſte plus que des équations entre deux variables, telles qu'elles doivent être pour déterminer le mouvement de chaque corps, & leur poſition reſpective à chaque inſtant. Mais, quoique la méthode que j'ai donnée dans mon précédent Ouvrage ſoit générale, elle demande de ſi longs calculs, même pour le premier ordre, qu'il n'en faut eſpérer immédiatement aucun ſecours pour des équations de l'eſpece de celles-ci, qui monteront naturellement au vingtieme ordre. Il me faut donc chercher ici d'autres ſecours ; & c'eſt dans la nature du problême que j'eſpere les trouver.

Je remarque donc, 1°. que le mouvement du corps M doit être donné par une équation en x & en y, & par une équation en x & en z, ou bien en y & en z; le mouvement du corps M' par une équation en x' & y', & par une équation en x' & z', ou bien en y' & z'; le mouvement enfin du corps M'' par une équation en x'' & y'', & une équation en x'' & z'', ou bien y'' & z''; & que la position respective de ces corps dans l'espace pour chaque instant sera donnée par une équation en x & x', & une équation en x & x'', ou, si l'on veut, par deux équations, soit en y & y', & en y & y'', soit en z & z', & en z & z''.

2°. Que, puisque les forces qui agissent sur les corps sont semblablement composées des coordonnées x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; & que la masse des corps, leur vîtesse primitive, leur premiere position dans l'espace, toutes quantités constantes, sont les seules choses qui fassent que le mouvement d'un de ces corps ne soit pas celui d'un autre; il est aisé de voir que, 1°. les équations en x & y, x & z; x' & y', x' & z'; x'' & y'' x'' & z'', seront semblables, & ne différeront que par les coefficiens constans; c'est-à-dire qu'on aura dans l'équation en x' & y', ou en x'' & y'', des fonctions de x' & y', ou de x'' & y'', semblables à celles de x & y qui entrent dans l'équation en x & y, & qu'il en sera de même des équations en x & z, x' & z', x'' & z''. 2°. Que les équations qu'on auroit en y & y', y & y'', z & z', z & z'', seront également semblables aux équations qu'on aura entre x & x', x & x''. 3°. Que les équations en x & y, x & z, seront telles que les fonctions de y qui entreront dans la premiere, seront semblables à celles de z qui entreront dans la seconde, & qu'il en sera de même des équations en x' & y', x' & z', ou x'' & y'', x'' & z''. 4°. Enfin, que dans ces équations, les fonctions égalées à zero seront semblablement composées des variables x & y pour l'équation en x & y, des variables x & z pour l'équation en x & z, & ainsi pour toutes les autres équations. D'où il suit, & de ce qu'on doit tirer des équations en x & y, x & z, une équation en y & z semblablement composée de ces deux variables, & d'une maniere semblable à celle dont l'équation en x & y est composée de x & y; il suit, dis-je, qu'on doit avoir une fonction de x égale à une fonction semblable de y, & ainsi pour les autres équations. Tout ceci s'accorde parfairement avec la forme des équations que j'ai trouvées dans la premiere Partie du Problême; car si l'on joint aux huit ci-dessus, les autres équations qu'on en peut déduire, on verra que les neuf variables y entrent d'une maniere semblable.

Je remarque, en troisieme lieu, que si je joins aux huit équations dont je viens de parler, une équation entre le tems & une quelconque des coordonnées, j'aurai toutes les équations nécessaires pour résoudre le problême; que j'aurai par conséquent une équation entre t & chacune des coordonnées; que ces équations seront semblables, & que ces neuf équations entre t & chacune des coordonnées suffiront aussi pour résoudre le problême.

Je remarque enfin, que si au commencement du mouvement je suppose à chacune des coordonnées une valeur donnée, j'aurai la position primitive de chacun des corps dans l'espace; que leur direction primitive sera donnée pour M par les valeurs de $\frac{dx}{dy}$ & $\frac{dx}{dz}$ dans cet instant, pour M' par les valeurs de $\frac{dx'}{dy'}$, & $\frac{dx'}{dz'}$, pour M'' enfin par les valeurs de $\frac{dx''}{dy''}$ & $\frac{dx''}{dz''}$; que leur vîtesse primitive sera donnée par les valeurs de $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$, $\frac{ds''}{dt}$. D'où il suit, qu'en général il doit rester dix-huit constantes arbitraires dans les équations finies du problême. Donc, puisque ces équations sont au nombre de neuf entre t & chacune des coordonnées, & qu'elles sont toutes semblables entre elles, chacune de ces équations en contiendra deux semblablement placées dans chaque équation. Il suit de-là, que chacune des huit équations en deux des coordonnées en paroîtra contenir quatre, qui se réduiront à trois en changeant l'équation de forme; que la laissant sous la forme où elle en contiendroit quatre, la même coordonnée se trouvant dans deux équations, leurs huit arbitraires se réduisent à six par la nature du problême; & que six de ces équations suffisant pour que toutes les fonctions semblables de chaque variable soient déterminées, toutes les arbitraires se réduiront à dix-huit, comme on sait déja que cela doit être. Les coefficiens constans déterminés seront aussi, dans chaque équation, composés de fonctions semblables des M, M', M''; & ces nombres constans seront les mêmes dans chaque équation.

De tout ce que je viens de dire, il n'est pas difficile de conclure que, de quelque maniere que je combine mes neuf équations entre t & chacune des coordonnées, sans pourtant chasser t, je ne pourrai, à chaque différenciation, éliminer dans les équations non séparées, plus d'arbitraires ou de fonctions tranfcendantes, que je n'en pourrois éliminer dans les équations féparées; mais que par la combinaifon des deux équations qui ont lieu entre trois coordonnées, je puis par deux différenciations éliminer quatre fonctions tranfcendantes qui fe réduifent à trois, & quatre arbitraires qui fe réduifent auffi à trois. Donc, puifque les équations non féparées du problême font du fecond ordre, je ne puis avoir entre t & chacune des coordonnées, que des équations féparées qui contiennent deux fonctions tranfcendantes & deux variables; d'où il naîtra une équation algébrique du fecond ordre entre t & chaque coordonnée, & entre deux coordonnées quelconques où il n'y aura point d'arbitraire. Donc il y aura d'ailleurs entre les différentes coordonnées, des équations du troifieme ordre auffi algébriques & fans arbitraires; & ce font les équations féparées qui répondront aux équations non féparées du problême.

Maintenant je fuppofe que j'élimine non feulement t, mais auffi toutes les coordonnées, enforte qu'il ne me refte plus qu'une équation entre deux coordonnées, x & y par exemple; fi j'ai éliminé enforte que, quoique j'aie différencié, je n'aie pas introduit de nouvelles arbitraires, j'aurai une équation qui aura pour folution incomplette une équation algébrique féparée, du fecond ordre, & une du troifieme : & il eft clair que cette opération eft toujours poffible dans ce cas.

Cette opération une fois exécutée, j'aurai une équation féparée qui ne doit avoir pour folution qu'une équation différentielle algébrique du troisieme ordre, & une équation différentielle algébrique du second sans arbitraires. Pour en tirer les solutions, je me sers des deux méthodes suivantes. Prenant d'abord les équations que me donne le Problême VII de la Section I de la premiere Partie de mon Essai sur le Calcul Intégral pour les équations de condition, & les comparant avec l'équation que j'ai ici à traiter, je parviendrai enfin à une équation du troisieme ordre sans arbitraires, ou à une du second, ou immédiatement peut-être à toutes deux, puisqu'elles sont toutes deux contenues dans la proposée, si on a soin de ne négliger aucune des équations que peut faire naître la comparaison de la proposée avec ses équations de condition.

La seconde méthode que je vais proposer, est absolument la même que la précédente; mais elle est plus commode en quelque sorte pour le cas présent, quoiqu'en elle-même elle lui soit inférieure & en généralité & en ce que les équations qu'elle donne ne se peuvent mettre sous une formule générale, comme celles du Problême VII cité ci-dessus. Je suppose que j'aie entre deux variables dont aucune différence premiere n'est supposée constante, une équation différentielle d'un ordre supérieur au premier; l'intégrale finie complette qu'elle pourra avoir, pourra contenir, outre des arbitraires constantes, une nouvelle variable quelconque, dont la différence soit constante. Si je suppose que dans cette équation la premiere différence d'une des variables soit constante, il est clair que l'intégrale finie de cette

nouvelle

nouvelle équation ſera la même que ci-deſſus, ſi ce n'eſt que la nouvelle variable, dont la différence étoit conſtante, ſera alors une des variables de l'équation.

Je ſuppoſe maintenant que j'aie entre deux variables une équation différentielle où une des différences ſoit ſuppoſée conſtante, & que je veuille la changer en une équation où aucune des différences ne le ſoit; pour cela je remarque que, ſoit x & y les variables & dx conſtant, je peux, à cauſe de l'homogénéité des différences, diſpoſer les différences de y enſorte que je n'aie que dy, $\frac{ddy}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^3}$, &c. ou à cauſe de dx conſtant dy, $d.\frac{dy}{dx}$, $d.\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$, $d.\frac{d.\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}}{dx}$, &c. Donc pour avoir une équation où rien ne ſoit conſtant, & dont l'intégrale ſoit la même que la propoſée, ſauf l'exception ci-deſſus, je n'aurai qu'à ſubſtituer dans la propoſée les valeurs des formules ci-deſſus priſes dans l'hypotheſe où tout varie, au lieu de leurs valeurs priſes dans l'hypotheſe où une des différences eſt conſtante. Cela poſé, il eſt clair qu'une équation entre deux variables où aucune différence n'eſt ſuppoſée conſtante, & qui admet une ſolution finie complette, doit être telle qu'en ſuppoſant une différentielle conſtante, puis faiſant les ſubſtitutions indiquées ci-deſſus, l'équation qui en réſultera ſoit identiquement la même que la propoſée, dans le cas où l'intégrale de la propoſée ne contiendroit pas de nouvelle variable arbitraire. Lorſque la propoſée n'admet qu'une ſolution finie incomplette, ou, ce qui dans ce cas revient au même, une ſolution du premier ordre; alors ſuppoſant que, dans la propoſée & la ſubſtituée, les plus hautes différences ſoient ſous une forme linéaire, & donnant l'unité pour coefficient dans l'une & l'autre à l'une de ces différences, je dois avoir les coefficiens de l'autre différence égaux entre eux. Si en les égalant, j'ai une équation qui ne ſoit pas identique, alors je traite cette équation comme la propoſée. Si l'équation eſt identique, comme les derniers termes des deux équations ſont auſſi égaux, mais dans l'hypotheſe préſente ne ſont pas identiques, j'aurai en les égalant une équation que je traiterai comme la propoſée. Continuant toujours ainſi, je parviendrai à une équation identique avec la ſubſtituée qui lui convient; car lorſqu'une équation d'un ordre ſupérieur a pour intégrale une équation d'un ordre inférieur ſans arbitraires, & qui admet une ſolution complette, cette équation & ſes différences ont été combinées enſemble, & la propoſée ne differe de ſes ſubſtituées que par-là; l'équation trouvée par cette méthode ſera l'intégrale incomplette de la propoſée. On aura par le même moyen l'intégrale complette des équations dans les arbitraires deſquelles entre une nouvelle variable; & on l'aura inférieure d'autant de degrés à la propoſée, qu'il y aura d'arbitraires conſtantes affectées de cette nouvelle variable, & par-là même quelquefois du premier, lorſque la nouvelle variable affectera toutes les arbitraires conſtantes, hors une. En effet, l'intégrale incomplette n'eſt telle, que parceque l'intégrale complette de la propoſée contient la nouvelle variable, ou l'intégrale de la ſubſtituée ne contient qu'une des variables de l'équation; d'où il ſuit que ces deux intégrales ne peuvent être les mêmes qu'en égalant à zéro les coefficiens conſtans arbitraires; ou, ce qui revient au même, on a produit la ſubſtituée en diviſant par la différence ſuppoſée conſtante à chaque différentiation, ce qu'on n'a point fait pour produire la propoſée : d'où les termes conſtans que chaque différentiation rend arbitraires doivent être ſuppoſés nuls, pour que les deux intégrales ſoient les mêmes. La ſolution incomplette étant trouvée, on aura aiſément la ſolution complette, d'après ce que je viens de dire. En effet, il n'y a qu'à chercher à produire la propoſée ou la ſubſtituée avec cette intégrale incomplette, pour voir comment étoient placées les arbitraires conſtantes qu'on a ſuppoſées nulles. Cette méthode s'applique à un nombre quelconque de variables, en y faiſant les changemens qu'exige la différence des cas, & qui n'auront aucune difficulté. On voit auſſi qu'on auroit pu ſe diſpenſer de ſuppoſer les différences ſupérieures ſous une forme linéaire. Il eſt aiſé de voir par la nature de cette méthode, qu'elle ne doit point donner les ſolutions incomplettes des ordres plus élevés que le premier, lorſque ces ſolutions n'ont point elles-mêmes d'intégrales. Elle ne donnera donc, dans le cas du problême que je traite, que l'équation du troiſieme ordre, qui admet une ſolution complette.

On pourra, lorſqu'il ſera queſtion de réſoudre le préſent problême, employer d'abord la ſeconde méthode, qui conduira à l'équation du troiſieme ordre qu'on doit avoir entre deux coordonnées quelconques. On tâchera enſuite de tirer auſſi, par la premiere méthode, l'équation du ſecond ordre entre les mêmes coordonnées, qui entre aussi dans les équations du problême; & on abrégera cette recherche en négligeant de traiter les équations que donne la premiere méthode, & que la seconde auroit aussi données. Si malgré tout cela on n'avoit pas encore cette seconde équation, on la trouveroit toujours en combinant diversement les équations de la méthode avec celles du problême, puisque cette seconde équation y est contenue.

Ayant une fois une équation du troisieme ordre entre deux coordonnées quelconques, on en aura aisément entre les autres coordonnées, puisqu'elles doivent être semblables. Il en sera de même de l'équation du second ordre, où de plus les variables se sépareront d'elles-mêmes, dont chaque membre s'égalera à dt^2 multiplié par un coefficient constant, qu'on déterminera aisément à l'aide des équations du problême; d'où, par les méthodes connues, on réduira facilement l'équation du second ordre entre dt & chacune des variables, en une équation du premier. Il pourroit se faire qu'au lieu d'équation du troisieme ordre, on n'en eût qu'une du second, & qu'ainsi nos deux équations entre les coordonnées se réduisissent à une seule. Ce cas seroit le plus simple de tous.

Je passe maintenant au second cas du problême, & supposant que ce soit le corps dont la masse est M'' qui soit immobile & fixe, & qu'il soit placé à l'origine des coordonnées, il est clair que les neuf équations trouvées ci-dessus, se réduiront aux six premieres, dans lesquelles il faudra faire x'', y'', z'', égaux à zero. Les réflexions que je viens de faire s'appliquant à ce cas comme au précédent, on le résolvera donc de même, excepté que les équations séparées seront moins élevées & le problême moins compliqué.

Quant au troisieme cas, supposant, comme dans le second, que M'' soit le corps immobile, & M' le corps dont le mouvement est connu, j'aurai par l'hypothese y' en x' & z' en x' : je substitue ces valeurs dans les six équations qui me restent, je prends des trois dernieres la valeur de x' qu'elles me donnent, je la substitue dans les premieres, & il ne me reste plus que trois équations entre le tems & les trois coordonnées du corps M, qui me suffiront pour résoudre le problême, & auxquelles les réflexions que j'ai faites s'appliquent d'elles-mêmes.

Il est aisé de voir que tout ce que je viens de dire pour trois corps est également vrai pour quatre, cinq, six, &c. & s'y applique également, & que les équations séparées & trouvées par la méthode, pourront être plus compliquées, mais non d'un ordre plus élevé, & qu'ainsi les difficultés seront toujours de la même nature, quelque soit le nombre de ces corps.

on le résolvera donc de même, excepté que les équations séparées seront moins élevées & le problême moins compliqué.

Quant au troisième cas, supposant, comme dans le second, que M soit le corps immobile, & M' le corps dont le mouvement est connu, j'aurai par l'hypothese x', y' & z' en t ; je substitue ces valeurs dans les six équations qui me restent, je prends des trois dernieres la valeur de t qu'elles me donnent, & la substitue dans les premieres, & il ne me reste plus que trois équations entre le tems & les trois coordonnées du corps M, qui me suffiront pour résoudre le problême, & auxquelles les réflexions que j'ai faites s'appliquent d'elles-mêmes.

Il est aisé de voir que tout ce que je viens de dire pour trois corps est également vrai pour quatre, cinq, six, &c. & s'y applique également, & que les équations séparées & trouvées par la méthode, pourront être plus compliquées, mais non d'un ordre plus élevé, & qu'ainsi les difficultés seront toujours de la même nature, quelque soit le nombre de ces corps.

SECOND MEMOIRE.

ANALYSE

Du Probleme où il s'agiroit de trouver le Mouvement de trois Corps de figure quelconque, dont les particules s'attireroient en raison inverse du quarré de leurs distances.

Mon but, dans ce Mémoire, est de montrer par un exemple que le Problême que je traite ici, & tous les autres de cette espece, quoiqu'ils paroissent infiniment plus compliqués, ne renferment pourtant point de difficultés d'un ordre supérieur à celles du Problême des trois Corps.

Soit ici, 1°. trois corps C, C', C'':

2°. dm, dm', dm'' des élémens quelconques de ces corps:

3°. x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; des coordonnées rectangles qui donnent la position d'un élément quelconque dm, dm', dm'' à chaque instant.

4°. Soit pour abréger les distances entre dm & dm' & dm'',

$$f = \sqrt{\overline{x - x'}^2 + \overline{y - y'}^2 + \overline{z - z'}^2}:$$

$$f' = \sqrt{\overline{x - x''}^2 + \overline{y - y''}^2 + \overline{z - z''}^2}:$$

& la distance entre dm' & dm'',

$$f_{,} = \sqrt{\overline{x' - x''}^2 + \overline{y' - y''}^2 + \overline{z' - z''}^2}.$$

5°. s, s', s'', les espaces parcourus par les points dm, dm', dm'' pendant l'élément du tems dt, que je suppose constant.

6°. Soit enfin u, u', u'', les vîtesses de ces mêmes points, pendant le même tems.

Il est clair, 1°. que les forces de tout le corps C' agissantes sur le point dm, seront $\Sigma \frac{dm'}{f^2}$: le signe d'intégration Σ ne se rapportant qu'à la position des différens dm, dm', dm'' dans les corps, & non à leur position instantanée dans l'espace.

2°. Que par la même raison, les forces que le corps C'' exercera sur le même élément, les forces que les corps C & C'' exerceront sur dm', les forces que les corps C & C' exerceront sur dm'', seront $\Sigma \frac{dm''}{f'^2}$, $\Sigma \frac{dm}{f^2}$, $\Sigma \frac{dm''}{f_{,}^2}$, $\Sigma \frac{dm}{f'^2}$, $\Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2}$.

Les forces que les corps C & C' exercent réciproquement l'un sur l'autre & par lesquelles ils tendent à s'approcher, seront par conséquent $\sum dm \, \Sigma \frac{dm'}{f^2}$; les mêmes forces entre les corps C & C'' seront de même $\sum dm \, \Sigma \frac{dm''}{f'^2}$; & les mêmes forces entre les corps C' & C'' seront $\sum dm' \, \Sigma \frac{dm''}{f_{,}^2}$.

Désignant par la caractéristique d des différences de $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; s, s', s''$, &c. indépendantes de de celles qui ſont affectées de la caractériſtique ordinaire d, l'expreſſion de la quantité d'action dans tout le ſyſtême pendant le tems dt ſera également

$$\int\Sigma\, dm\,u\,dd\mathrm{s} + dm'u'\,dd\mathrm{s}' + dm''u''\,dd\mathrm{s}''\ \&$$

$$\int\Sigma\,\overline{dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^2}\mathrm{d}f + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\mathrm{d}f' + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_,^2}\mathrm{d}f''}\,.dt.$$

Ces deux expreſſions doivent être égales à chaque inſtant. Donc les égalant enſemble, & intégrant par rapport à la caractériſtique $\int$ ce qui peut être intégré immédiatement, ce qui reſtera ſous le ſigne devra être nul à chaque inſtant, & on doit avoir entre les coordonnées des équations qui le rendent tel.

Ces opérations exécutées, j'aurai l'expreſſion

$$\begin{aligned}
\int\Sigma\, & \overline{dm\frac{ddx}{dt} + dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^2}\,\frac{x-x'}{f}\,dt + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\,\frac{x-x''}{f'}\,dt}\cdot\mathrm{d}x \\
& + \overline{dm\frac{ddy}{dt} + dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^2}\,\frac{y-y'}{f}\,dt + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\,\frac{y-y''}{f'}\,dt}\cdot\mathrm{d}y \\
& + \overline{dm\frac{dd z}{dt} + dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^2}\,\frac{z-z'}{f}\,dt + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\,\frac{z-z''}{f'}\,dt}\cdot\mathrm{d}z \\
& + \overline{dm'\frac{ddx'}{dt} - dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^2}\,\frac{x-x'}{f}\,dt + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_,^2}\,\frac{x'-x''}{f_,}\,dt}\cdot\mathrm{d}x' \\
& + \overline{dm'\frac{ddy'}{dt} - dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^2}\,\frac{y-y'}{f}\,dt + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_,^2}\,\frac{y'-y''}{f_,}\,dt}\cdot\mathrm{d}y' \\
& + \overline{dm'\frac{ddz'}{dt} - dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^2}\,\frac{z-z'}{f}\,dt + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_,^2}\,\frac{z'-z''}{f_,}\,dt}\cdot\mathrm{d}z' \\
& + \overline{dm''\frac{ddx''}{dt} - dm''\,\Sigma\frac{dm}{f'^2}\,\frac{x-x''}{f'}\,dt - dm''\,\Sigma\frac{dm'}{f_,^2}\,\frac{x'-x''}{f_,}\,dt}\cdot\mathrm{d}x'' \\
& + \overline{dm''\frac{ddy''}{dt} - dm''\,\Sigma\frac{dm}{f'^2}\,\frac{y-y''}{f'}\,dt - dm''\,\Sigma\frac{dm'}{f_,^2}\,\frac{y'-y''}{f_,}\,dt}\cdot\mathrm{d}y'' \\
& + \overline{dm''\frac{ddz''}{dt} - dm''\,\Sigma\frac{dm}{f'^2}\,\frac{z-z''}{f'}\,dt - dm''\,\Sigma\frac{dm'}{f_,^2}\,\frac{z'-z''}{f_,}\,dt}\cdot\mathrm{d}z'' \\
& = 0.
\end{aligned}$$

& cette expreſſion devra être nulle, quelles que ſoient les différentielles affectées de la caractériſtique d : je pourrois donc égaler à zero le coefficient de chacune de ces différences, ce qui me donneroit neuf équations. Mais il eſt aiſé de voir que pour réſoudre le Problême plus commodément, il eſt à propos d'avoir le mouvement d'un point déterminé auquel on rapporte enſuite le mouvement de tous les autres. Nous ferons donc pour y parvenir les opérations ſuivantes.

Je prends d'abord dans chaque corps un point déterminé dont je ſuppoſe que le mouvement ſoit rapporté à des coordonnées X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; & que le mouvement d'un point quelconque de chacun de ces corps ſoit rapporté à des coordonnées P, Q, R; P', Q', R'; P'', Q'', R''; le point déterminé pris dans chaque corps étant ſuppoſé fixe, & ces coordonnées priſes dans la même direction que celles qui expriment le mouvement du point déterminé.

Cette ſuppoſition me donne $dx = d\mathrm{X} + dP$, $dy = d\mathrm{Y} + dQ$, $dz = d\mathrm{Z} + dR$, & $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathrm{X} + \mathrm{d}P$; $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\mathrm{Y} + \mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}\mathrm{Z} + \mathrm{d}R$, $dx' = d\mathrm{X}' + dP'$, $dy' = d\mathrm{Y} + dQ$, $dz' = d\mathrm{Z} + dR$, & $\mathrm{d}x' = \mathrm{d}\mathrm{X}' + \mathrm{d}P'$, $\mathrm{d}y' = \mathrm{d}\mathrm{Y}' + \mathrm{d}Q'$, $\mathrm{d}z' = \mathrm{d}\mathrm{Z}' + \mathrm{d}R'$; enfin $dx'' = d\mathrm{X}'' + dP''$, $dy'' = \mathrm{d}\mathrm{Y}'' + dQ''$, $dz'' = d\mathrm{Z}'' + dR''$, & $\mathrm{d}x'' = \mathrm{d}\mathrm{X}'' + \mathrm{d}P''$, $\mathrm{d}y'' = \mathrm{d}\mathrm{Y}'' + \mathrm{d}Q''$, $\mathrm{d}z'' = d\mathrm{Z}'' + \mathrm{d}R''$.

Je ſuppoſe enſuite que par le point déterminé que j'ai pris dans chaque corps paſſent trois axes perpendiculaires entr'eux & qui aient la même direction que les coordonnées, qu'un point quelconque tourne autour de ces trois axes, & que dans le corps C il parcourre autour de l'axe parallele aux x l'arc dX pendant le tems dt, autour de l'axe parallele aux Y l'arc dY, & autour de l'axe parallele aux Z l'arc dZ; dans le corps C' l'arc dX' autour de l'axe des x', l'arc dY' autour de l'axe des Y', l'arc dZ' autour de l'axe des z'; dans le corps C'' enfin l'arc dX'' autour de l'axe des x'', l'arc dY'' autour de l'axe des Y'', l'arc dZ'' autour de l'axe des z''. Les angles sont indépendans de la position d'un point quelconque dans le corps, & leur rapport donnera par conséquent le mouvement giratoire de chacun des corps autour de ces axes. Cette nouvelle supposition me donne, en exprimant les différences de P, Q, R, &c. par leurs valeurs en X, Y, Z, &c.

$$
\begin{array}{ll}
dx = d\mathrm{x} + R\,dY + Q\,dZ, & \mathrm{d}x = \mathrm{d}\,\mathrm{x} + R\,\mathrm{d}Y + Q\,\mathrm{d}Z, \\
dy = d\mathrm{y} + R\,dX - P\,dZ, & \mathrm{d}y = \mathrm{d}\,\mathrm{y} + R\,\mathrm{d}X - P\,\mathrm{d}Z, \\
dz = d\mathrm{z} - Q\,dX - P\,dY, & \mathrm{d}z = \mathrm{d}\,\mathrm{z} - Q\,\mathrm{d}X - P\,\mathrm{d}Z, \\
dx' = d\mathrm{x}' + R'\,dY' + Q'\,dZ', & \mathrm{d}x' = \mathrm{d}\,\mathrm{x}' + R'\,\mathrm{d}Y' + Q'\,\mathrm{d}Z', \\
dy' = d\mathrm{y}' + R'\,dX' - P'\,dZ', & \mathrm{d}y' = \mathrm{d}\,\mathrm{y}' + R'\,\mathrm{d}X' - P'\,\mathrm{d}Z', \\
dz' = d\mathrm{z}' - Q'\,dX' - P'\,dY, & \mathrm{d}z' = \mathrm{d}\,\mathrm{z}' - Q'\,\mathrm{d}X' - P'\,\mathrm{d}Y', \\
dx'' = d\mathrm{x}'' + R''\,dY'' + Q''\,dZ'', & \mathrm{d}x'' = \mathrm{d}\,\mathrm{x}'' + R''\,\mathrm{d}Y'' + Q''\,\mathrm{d}Z'', \\
dy'' = d\mathrm{y}'' + R''\,dX'' - P''\,dZ'', & \mathrm{d}y'' = \mathrm{d}\,\mathrm{y}'' + R''\,\mathrm{d}X'' - P''\,\mathrm{d}Z'', \\
dz'' = d\mathrm{z}'' - Q''\,dX'' - P''\,dY'', & \mathrm{d}z'' = \mathrm{d}\,\mathrm{z}'' - Q''\,\mathrm{d}X'' - P''\,\mathrm{d}Y''.
\end{array}
$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, & réduisant en observant que le signe Σ n'affecte en aucune façon les x, X, &c., & égalant à zero le coefficient de chaque différence affectée de la caractéristique d, j'aurai les dix-huit équations suivantes, où M, M', M'', désignent les masses des corps C, C', C''.

1^e. $Mddx + \Sigma P dm - \overline{dY^2 + dZ^2} + \Sigma Q dm \cdot \overline{ddZ - dXdY} + \Sigma R dm \cdot \overline{ddY + dXdZ} + \sum dm\, \Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f} dt^2 + \sum dm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{x - x'' + P - P''}{f'} dt^2 = 0.$

2^e. $Mddy + \Sigma P dm - \overline{ddZ + dXdY} + \Sigma Q dm - \overline{dX^2 + dZ^2} + \Sigma R dm \cdot \overline{ddX - dYdZ} + \sum dm\, \Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{y - y' + Q - Q'}{f} dt^2 + \sum dm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{y - y'' + Q - Q''}{f'^2} dt^2 = 0.$

3^e. $Mddz + \Sigma P dm - \overline{ddY - dXdZ} + \Sigma Q dm - \overline{ddX + dYdZ} + \Sigma R dm - \overline{dX^2 + dY^2} + \sum dm\, \Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 + \sum dm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{z - z'' + R - R''}{f'} dt^2 = 0.$

4^e. $M'ddx' + \Sigma P'dm' - \overline{dY'^2 + dZ'^2} + \Sigma Q'dm' \cdot \overline{ddZ' - dX'dY'} + \Sigma R'dm' \cdot \overline{ddY' + dX'dZ'} - \sum dm'\, \Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f} dt^2 + \sum dm'\, \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_,} dt^2 = 0.$

5^e. $M'ddy' + \Sigma P'dm' - \overline{ddZ' + dX'dY'} + \Sigma Q'dm' - \overline{dX^2 + dZ^2} + \Sigma R'dm' \cdot \overline{ddX' - dY'dZ'} - \sum dm'\, \Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{y - y' + Q - Q'}{f} dt^2 + \sum dm'\, \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{y' - y'' + Q' - Q''}{f_,} dt^2 = 0.$

6^e. $M'ddz' + \Sigma P'dm' - ddY' - dX'dZ' + \Sigma Q'dm' - \overline{ddX' + dY'dZ'} + \Sigma R'dm' - \overline{dX'^2 + dY'^2} - \sum dm'\, \Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt + \sum dm'\, \Sigma \frac{dm'}{f_,^2} \cdot \frac{z' - z'' + R' - R''}{f_,} dt^2 = 0.$

$7^e.\ M''ddx'' + \Sigma P''dm'' - \overline{dY''^2 + dY''^2} + \Sigma Q''dm''$
$\cdot \overline{ddZ'' - dX''dY''} + \Sigma R''dm'' \cdot \overline{ddY'' + dX''dZ''} - \sum dm''$
$\Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{X - X'' + P' - P''}{f'} dt - \sum dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2} \cdot \frac{X' - X'' + P' - P''}{f_,} dt^2$
$= 0.$

$8^e.\ M''ddY'' + \Sigma P''dm'' - \overline{ddZ'' + dX''dY''} + \Sigma Q''dm''$
$- \overline{dX''^2 + dY''^2} + \Sigma R''dm'' - \overline{dX'' - dY''dZ''} - \sum dm''$
$\Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{Y - Y'' + Q - Q''}{f'} dt^2 - \sum dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2} \cdot \frac{Y' - Y'' + Q' - Q''}{f_,} dt^2$
$= 0.$

$9^e.\ M''ddZ'' + \Sigma P''dm'' - \overline{ddY'' - dX''dZ''} + \Sigma Q''dm''$
$- \overline{ddX'' + dY''dZ''} + \Sigma R''dm'' - \overline{dX''^2 + dY''^2} - \sum dm''$
$\Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{Z - Z'' + R - R''}{f'} dt^2 - \sum dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2} \cdot \frac{Z' - Z'' + R' - R''}{f_,} dt^2$
$= 0.$

$10^e.\ \Sigma Rdm.\, ddY + \Sigma PRdm - \overline{ddZ + dXdY} + \Sigma QRdm$
$- \overline{dX^2 + dZ^2} + \Sigma R^2dm \cdot \overline{ddX - dYdZ} + \sum Rdm\, \Sigma \frac{dm'}{f^2}$
$\cdot \frac{Y - Y' + Q - Q'}{f} dt^2 + \sum Rdm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{Y - Y'' + Q - Q''}{f} dt^2$
$- \Sigma Qdm.\, ddZ - \Sigma PQdm - \overline{ddY - dXdZ} - \Sigma Q^2dm$
$- \overline{ddX + dYdZ} - \Sigma QRdm - \overline{dX^2 + dY^2} - \sum Qdm$
$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{Z - Z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum Qdm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{Z - Z'' + R - R''}{f} dt^2$
$= 0.$

$11^e.\ \Sigma Rdm \cdot ddX + \Sigma PRdm - \overline{dY^2 + dZ^2} + \Sigma QRdm$
$\cdot \overline{ddZ - dXdY} + \Sigma R^2dm \cdot \overline{ddY + dXdZ} + \sum Rdm$
$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{X - X' + P - P'}{f} dt^2 + \sum Rdm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{X - X'' + P + P''}{f'} dt^2.$

. . . .

$$-\Sigma P dm \cdot ddZ - \Sigma P^2 dm - \overline{ddY - dXdZ} - \Sigma PQ dm$$
$$-\overline{ddX + dYdZ} - \Sigma PR\, dm - \overline{dX^2 + dY^2} - \sum P dm$$
$$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum P dm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{z - z'' + R - R''}{f'} dt^2$$
$$= 0.$$

12^e. $\Sigma Q dm \cdot ddX + \Sigma PQ dm \cdot -\overline{dY^2 + dZ^2} + \Sigma Q^2 dm$
$$\cdot\, \overline{ddZ - dXdY} + \Sigma QR\, dm \cdot \overline{ddY + dXdZ} + \sum Q\, dm$$
$$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f'} dt^2 + \sum Q dm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{x - x'' + P - P'}{f'} dt^2.$$
$$-\Sigma P dm \cdot ddY - \Sigma P^2 dm - \overline{ddZ + dXdY} - \Sigma PQ dm$$
$$-\overline{dX^2 + dZ^2} - \Sigma PR\, \overline{ddX - dYdZ} - \sum P dm\, \Sigma \frac{dm'}{f^2}$$
$$\cdot\, \frac{y - y' + Q - Q'}{f} dt^2 - \sum P dm\, \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{y - y'' + Q - Q''}{f'} dt^2$$
$$= 0.$$

13^e. $\Sigma R'dm' \cdot ddY' + \Sigma P'R'dm' - \overline{ddZ' + dX'dY'}$
$$+\Sigma Q'R'dm' - \overline{dX'^2 + dZ'^2} + \Sigma R'^2 dm'\, \overline{ddX' - dY'dZ'}$$
$$-\sum R'dm'\, \Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{y - y' + Q - Q'}{f} dt^2 + \sum R'dm'\, \Sigma \frac{dm''}{f_{,}^2}$$
$$\cdot\, \frac{y' - y'' + Q' - Q''}{f_{,}} dt^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$-\Sigma Q'dm'\, ddZ' - \Sigma P'Q'dm' - \overline{ddY' - dX'dZ'}$$
$$-\Sigma Q'^2 dm' - \overline{ddX' + dY'dZ'} - \Sigma Q'R'dm' - \overline{dX'^2 + dY'^2}$$
$$+\sum Q'dm'\, \Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum Q'dm'\, \Sigma \frac{dm''}{f_{,}^2}$$
$$\cdot\, \frac{z' - z'' + R' - R''}{f_{,}} dt^2 = 0.$$

14^e. $\Sigma R'dm' \cdot ddX' + \Sigma P'R'dm' - \overline{dY'^2 + dZ'^2}$
$$+\Sigma Q'R'dm' \cdot \overline{ddZ' - dX'dY'} + \Sigma R'^2 dm' \cdot \overline{ddY' + dX'dZ'}$$
$$-\sum R'dm'\, \Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f} dt^2 + \sum R'dm'\, \Sigma \frac{dm''}{f_{,}^2}$$
$$\cdot\, \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_{,}} dt^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$-\Sigma P'dm' \cdot ddz' - \Sigma P'^2 dm' - \overline{ddY' - dX'dZ'} - \Sigma P'Q'dm'$$
$$- \overline{ddX' + dY'dZ'} - \Sigma P'R'dm' - \overline{dX'^2 + dY'^2} + \sum P'dm'$$
$$\Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum P'dm' \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{z' - z'' + R' - R''}{f_,} dt^2$$
$$= 0.$$

15^e^. $\Sigma Q'dm' \cdot ddx' + \Sigma P'Q'dm' - \overline{dY'^2 + dZ'^2} + \Sigma Q'^2 dm'$
$$\cdot \overline{ddZ' - dX'dY'} + \Sigma Q'R'dm' \cdot \overline{ddY' + dX'dZ'} - \sum Q'dm'$$
$$\Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f} dt^2 + \sum Q'dm' \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_,} dt^2.$$
$$-\Sigma P'dm' \cdot ddy' - \Sigma P'^2 dm' - \overline{ddZ' + dX'dY'} - \Sigma P'Q'dm'$$
$$- \overline{dX'^2 + dZ'^2} - \Sigma P'R'dm' \cdot \overline{ddX' - dY'dZ'} + \sum P'dm'$$
$$\Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{y - y' + Q - Q'}{f} dt^2 - \sum P'dm' \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{y' - y'' + Q' - Q''}{f_,} dt^2$$
$$= 0.$$

16^e^. $\Sigma R''dm'' \cdot ddy'' + \Sigma P''R''dm'' - \overline{ddZ'' + dX''dZ''}$
$$+ \Sigma Q''R''dm'' - \overline{dX''^2 + dZ''^2} + \Sigma R''^2 dm'' \overline{ddX'' - dY''dZ''}$$
$$- \sum R''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{y - y'' + Q - Q''}{f'} dt^2 - \sum R''dm''$$
$$\Sigma \frac{dm'}{f'^2} \cdot \frac{y' - y'' + Q' - Q''}{f_,} dt^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$- \Sigma Q''dm'' \cdot ddz'' - \Sigma P''Q''dm'' - \overline{ddY'' - dX''dZ''}$$
$$- \Sigma Q''^2 dm'' - \overline{ddX'' + dY''dZ''} - \Sigma Q''R''dm'' - \overline{dX''^2 + dY''^2}$$
$$+ \sum Q''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{z - z'' + R - R''}{f'} dt^2 - \sum Q''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2}$$
$$\frac{z' - z'' + R' - R''}{f_,} dt^2 = 0.$$

17^e^. $\Sigma R''dm'' \cdot ddx'' + \Sigma P''R''dm'' - \overline{dY''^2 + dZ''^2}$
$$+ \Sigma Q''R''dm'' \cdot \overline{ddZ'' - dX''dY''} + \Sigma R''^2 dm'' \cdot \overline{ddY'' + dX''dZ''}$$
$$- \sum R''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{x - x'' + P - P''}{f'} dt^2 - \sum R''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2}$$
$$\cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_,} dt^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$-\Sigma P''dm'' \cdot ddz'' - \Sigma P''^2 dm'' \overline{ddy'' - dx''dz''} - \Sigma P''Q''dm''$
$-\overline{ddx'' + dy''dz''} - \Sigma P''R''dm'' - \overline{dx''^2 + dy''^2} + \sum P''dm''$
$\Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{z - y'' + R - R''}{f'} dt^2 + \sum P''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2} \cdot \frac{z' - z'' + R' - R''}{f_{,}} dt^2$
$= 0.$

18e. $\Sigma Q''dm'' \cdot ddx'' + \Sigma P''Q''dm'' - \overline{dy''^2 + dz''^2}$
$+ \Sigma Q''^2 dm'' \cdot \overline{ddz'' - dx''dy''} + \Sigma Q''R''dm'' \cdot \overline{ddy'' + dx''dz''}$
$- \sum Q''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{x - x'' + P - P''}{f'} dt^2 - \sum Q''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2}$
$\cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_{,}} dt^2.$

$- \Sigma P''dm'' \cdot ddy'' - \Sigma P''^2 dm'' - \overline{ddz'' - dx''dy''}$
$- \Sigma P''Q''dm'' - \overline{dx''^2 + dy''^2} - \Sigma P''R''dm'' \cdot \overline{ddx'' - dy''dz''}$
$+ \sum P''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{y - y'' + Q - Q''}{f'} dt^2 - \sum P''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2}$
$\cdot \frac{y' - y'' + Q' - Q''}{f_{,}} dt^2 = 0.$

Je ſuppoſe que le point du corps dont on cherche le mouvement, ſoit ce point ſingulier qu'on nomme centre de gravité, & dont la propriété eſt telle qu'on a continuellement $\int P\,dm = 0$, $\int Q\,dm = 0$, $\int R\,dm = 0$ dans le corps C. $\int P'\,dm' = 0$, $\int Q'\,dm' = 0$, $\int R'\,dm' = 0$ pour le corps C'. $\int P''\,dm'' = 0$, $\int Q''\,dm'' = 0$, $\int R''\,dm'' = 0$ pour le corps C''. Cette ſuppoſition produira les deux avantages de ſimplifier beaucoup les équations ci-deſſus en en diminuant le nombre des termes, & de faire diſparoître des neuf premieres équations les différences ſecondes & premieres des variables x, y, z ; x', y', z' ; x'', y'', z'' ; & des neuf dernieres les ſecondes différences des variables x, y, z ; x', y', z' ; x'', y'', z'' ; ce qui ſimplifie encore & détermine

détermine les neuf premieres à donner le mouvement du centre de gravité, comme les neuf dernieres à donner le mouvement giratoire des corps; mais non pas toujours indépendamment les unes des autres.

Dans ces équations nous avons, indépendamment des fonctions qui naissent des forces, les formules $\Sigma P^2 dm$, $\Sigma PQdm$, $\Sigma PRdm$, $\Sigma Q^2 dm$, $\Sigma QRdm$, $\Sigma R^2 dm$ qui se rapportent au corps C, & six formules semblables pour chacun des corps C' & C'': pour intégrer ces formules, je suppose que la position d'un point quelconque dans le corps C soit donnée par trois coordonnées rectangles p, q, r, en sorte que la distance de ce point au centre de gravité soit $\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, & qu'au commencement du mouvement $P=p$, $Q=q$, $R=r$; il est clair que si je fais parcourir successivement à la ligne tirée du centre de gravité au point quelconque les angles x, y, z, elle se trouvera dans la même position qu'elle se trouve dans le Problême au bout du tems t. Donc les valeurs de P, Q, R, que la Géométrie ordinaire donne, dans cette hypothese en p, q, r & sinus & cosinus de x, y, z, seront les mêmes que celles que doit donner le Problême après le tems t. Je substituerai donc ces valeurs dans les formules précédentes; j'intégrerai ensuite par rapport aux signes Σ, c'est-à-dire en ne regardant comme variables que les p, q, r; il en sera de même pour chacun des autres corps; & toutes les fois que ces corps seront tels que l'élément dm puisse être exprimé par une formule algébrique, soit qu'ils soient homogenes, soit que leur densité varie suivant une certaine loi, on aura les intégrales par les méthodes connues pour les quadratures. Quant aux intégrales qui naiſſent des forces, on les aura par une double opération, ne regardant dans chacune comme variable que les coordonnées du corps dont l'élément ſe trouve ſans le ſigne.

Toutes ces opérations exécutées, j'aurai entre les variables des équations algébriques : car puiſque les angles X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'', ne ſe trouvent pas dans ces équations, mais ſeulement leurs différences, on peut les en faire aiſément diſparoître, pour n'y plus laiſſer que leurs ſinus ou coſinus & leurs différences.

Les équations entre les variables ſeront telles qu'il n'y en a aucune qui ne contienne les dix-neuf variables du Problême; le tems, dont la différence dt^2 ſe trouve dans chaque équation, ſera éliminé en égalant les valeurs de dt^2 priſes de deux de ces équations, & on parviendra par des différentiations réitérées à des équations qui ne contiendront plus que deux variables & auront lieu entre deux coordonnées. Ces équations ſeront celles qu'on aura à intégrer pour réſoudre le Problême, & ſur leſquelles on peut faire les réflexions ſuivantes.

1°. Le mouvement du centre de gravité, & le mouvement giratoire de chacun des corps, ſera donné par dix-huit équations, dont neuf entre le tems & chacune des neuf coordonnées du mouvement des centres de gravité, & neuf entre le tems & les ſinus & coſinus des angles du mouvement giratoire. Les neuf premieres ſeront toutes ſemblables entr'elles de même que les neuf dernieres, & il en ſera de même des équations différentielles qui en pourroient naître.

2°. Le mouvement ſera également donné par une équation entre t & une variable quelconque, puis deux équations entre les coordonnées x, y, z; deux entre les coordonnées z', y', z'; deux entre les coordonnées x'', y'', z''; deux entre les ſin. & coſ. de X, Y, Z; deux entre les ſin. & coſ. de X', Y', Z'; deux entre les ſin. & coſ. de X'', Y'', Z''; deux entre x & x' ou y & y' ou z & z', & x & x'' ou y & y'' ou z & z''; deux entre les ſin. & coſ. de X & X' ou de Y & Y' ou de Z & Z', & les ſin. & coſ. de X & X'' ou Y & Y'' ou Z & Z''; une enfin entre x & les ſin. ou coſ. de X, &c. Les équations que je propoſe ici ſous la particule disjonctive doivent être ſemblables entr'elles, c'eſt-à-dire qu'elles ne doivent différer que par les différentes variables qui y entrent, & non par la forme. Les équations en x, y & x, z ſeront ſemblables aux équations en x', y' & x', z', & aux équations entre x', y'' & x'', z''. L'équation en x & y ſera ſemblablement compoſée de x & de y; celle en x & z ſera ſemblablement compoſée de x & de z. Les fonctions de y dans la premiere ſeront ſemblables aux fonctions de z dans la ſeconde, & on aura une autre équation auſſi ſemblable entre y & z; d'où il eſt aiſé de conclure qu'on doit avoir une fonction de x égale à une ſemblable fonction de y, & la même fonction de x égale à une fonction ſemblable de z. Il en ſera de même des équations entre x' & y', x' & z'; & x'' & y'', x'' & z''; & dans toutes les équations ſemblables entre elles, les coefficiens ſeront toujours pour le mouvement de chaque corps des fonctions ſemblables de quantités dépendantes des corps C, C', C''. On doit dire des ſix équations entre ſin. & coſ. de X & Y, ſin. & coſ. de X & Z, ſin. & coſ. de X' & Y', ſin. & coſ. de X' & Z', ſin. & coſ. de X'' & Y'', ſin. & coſ. de X'' & Z'', la même choſe que des ſix équations précédentes. Les équations entre x & x', x & x'' ſeront ſemblables, compoſées de fonctions ſemblables de chacune des variables, & les coefficiens auſſi compoſés de fonctions ſemblables dépendantes de C & de C', ou de C & de C''. Il en ſera de même des équations entre ſin. & coſ. de X & de X', & ſin. & coſ. de X & de X''.

3°. Les quantités conſtantes à déterminer dans le Problême, qui, ne ſe pouvant trouver dans les équations différentielles, ſont les mêmes par conſéquent que celles que les différentiations ont pu éliminer, & les mêmes par conſéquent que les arbitraires des équations intégrales, ſont les valeurs des neuf coordonnées du mouvement des centres de gravité, au commencement du mouvement, les valeurs correſpondantes des neuf ſin. & coſ. du mouvement giratoire, les vîteſſes de chacun des centres de gravité, & leurs directions, dans ce moment, pour leſquelles il ſuffit d'avoir les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$; $\frac{dx''}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$, $\frac{dz''}{dt}$; les vîteſſes enfin du mouvement giratoire & leurs directions données par de ſemblables formules. Les arbitraires ſeront en tout au nombre de trente-ſix; dix-huit ſe rapporteront au mouvement du centre de gravité, ſe trouveront ſemblablement placées dans les neuf équations ſemblables entre t & chacune des coordonnées qui donnent ce mouvement, la premiere différentiation aura fait disparoître les neuf premieres, & la seconde les neuf dernieres. Les dix-huit autres se rapporteront au mouvement giratoire, & seront produites & distribuées d'une maniere semblable.

De tout cela & de ce que les équations trouvées ne sont que du second ordre, il est aisé de voir que chaque équation séparée entre *t* & une des coordonnées quelconque ne peut contenir plus de fonctions transcendantes de cette coordonnée (quoiqu'elle en puisse contenir moins) que n'en peuvent faire évanouir deux différentiations successives, & ne peut avoir non plus que deux arbitraires. Les équations entre les coordonnées n'en pourront contenir que quatre, réductibles à trois par elles mêmes. L'élimination étant faite, si on observe de faire entrer dans chaque opération les équations du Problême, & non pas seulement leurs différences, il sera toujours possible de parvenir à une équation qui aura pour intégrale une équation Algébrique du troisieme ordre sans arbitraires, ou même une du second. Donc les difficultés de ce Problême seront du même ordre que celles du Problême précédent, & on pourra y faire les mêmes remarques.

REMARQUE I.

La méthode sera la même pour un nombre de corps quelconque, & le Problême sans être d'un autre ordre, sera seulement plus compliqué. On peut dire la même chose de tout Problême où l'on cherchera le mouvement d'un systême de corps quelconque où tout sera mutuel &

dont les équations différentielles ne feront que du fecond ordre.

REMARQUE II.

Si j'ai entre un nombre n de variables un nombre $n - 1$ d'équations différentielles, le nombre des fonctions tranfcendantes & des arbitraires fera en tout la fomme des expofans de l'ordre de toutes ces équations; les fonctions étant prifes comme je l'explique dans la II^e Section de la premiere Partie du Calcul Intégral. Quant à la maniere dont elles feront diftribuées dans les équations féparées, on la trouvera *à pofteriori* par la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, lorfque la nature du Problême ne la donnera pas *à priori*.

REMARQUE III.

Les neuf premieres équations donneront feules indépendamment des autres le mouvement des centres de gravité, lorfque les fonctions qui s'y trouvent contenir les finus & cofinus du mouvement giratoire feront nulles, ou que les égalant à une fonction dépendante feulement de la figure des corps & indépendante du mouvement du centre de gravité, on aura une équation qui convienne avec celles du Problême. Les neuf dernieres dans des fuppofitions femblables, donneront auffi le mouvement giratoire indépendamment des neuf premieres.

REMARQUE IV.

Si les intégrations que je suppose être faites par rapport aux signes Σ, introduisoient dans les proposées des fonctions transcendantes, les réflexions ci-dessus auroient également lieu, puisque ces transcendantes seroient connues. Si au lieu de supposer ces intégrations, on fait évanouir les signes Σ par des différentiations qui n'affectent que les p, q, r, dm, $\Sigma\, dm$, on aura des équations encore du même ordre, par rapport aux variables du mouvement : on les auroit par la même méthode, en regardant comme constantes les quantités qui ne dépendent que de la figure ; & en intégrant ensuite, en regardant ces quantités comme les seules variables, on aura résolu ce problême. La méthode est la même pour toutes les équations qui contiennent des variables, absolument indépendantes les unes des autres. On aura aussi par-là la figure des corps, leur mouvement étant donné, comme on avoit eu ci-dessus le mouvement, la figure étant donnée.

TROISIEME

TROISIEME MEMOIRE.

METHODE D'APPROXIMATION, OU APPLICATION DES SUITES INFINIES A L'INTÉGRATION.

LA Méthode d'intégrer que je me propose de donner ici, est fondée sur les mêmes principes que celle que j'ai déja donnée. Je la crois plus commode, & aussi générale dans la pratique, quoi qu'elle le soit infiniment moins à regarder les choses d'une maniere abstraite.

Si j'ai entre x & y une équation algébrique délivrée de dénominateurs & de radicaux, j'aurai y égale à une fonction de x, que je trouverai en résolvant l'équation ordonnée par rapport à y; j'aurai donc autant de valeurs de y en x, que cette équation a de racines. Ces valeurs seront liées entr'elles, comme le sont les racines des équations algébriques à une seule variable. Ces dernieres racines se pourront toujours trouver en général, quelque soit le dégré de l'équation, à l'aide des réflexions suivantes. 1°. Elles seront composées de nombres & de fonctions entieres, dépendantes des coefficiens des puiſſances de y. 2°. Ces fonctions entieres ne pourront êrre affectées d'un ſigne radical plus élevé que l'expoſant du dégré de la propoſée : ces fonctions ainſi affectées, ne pourront être qu'en nombre inférieur à ce même expoſant. 3°. Ces mêmes fonctions entreront dans chaque racine & ſeront liées entr'elles, en ſorte qu'elles ſoient les racines d'une équation d'un ordre inférieur, dont l'expoſant ſoit égal à leur nombre. 4°. Les coefficiens en nombres qu'elles pourroient avoir pris dans une même racine, dépendront auſſi d'une équation de ce même ordre inférieur, pris dans les différentes racines de la propoſée : ils ſeront auſſi les différentes racines d'une équation d'un ordre inférieur d'une unité à celui de la propoſée. 5°. Multipliant toutes ces racines les unes par les autres pour produire la propoſée, il faut que les coefficiens numériques de chaque radical qui reſtera dans le coefficient de chaque puiſſance, ſoient égaux à zéro ; & que les fonctions ſans radicaux qui reſteront dans les coefficiens de chacune de ces mêmes puiſſances, ſoient égales au coefficient de cette puiſſance dans la propoſée, ce qui donnera des équations pour les déterminer : ces coefficiens ſeront du nombre inférieur d'une unité à l'expoſant du dégré de la propoſée ; & mettant dans chaque racine un terme rationel égal au coefficient du ſecond terme diviſé par l'expoſant, on aura l'équation cherchée pour ce ſecond terme : ainſi les fonctions affectées de radicaux devront contenir un nombre de fonctions rationelles moindre de deux unités, & conſéquemment égal à celui que contient la racine d'un dégré inférieur d'une unité.

6°. Enfin il ſera permis de ſuppoſer que le produit de toutes ces racines qui ſe trouvent ſous un ſigne radical & qui eſt néceſſairement rationel, ſoit une puiſſance parfaite de même degré que l'expoſant du radical. Il ſuit de tout cela, qu'il ſera facile de trouver immédiatement, pour un degré quelconque, un nombre fini de formes, entre leſquels on trouvera celle que doivent avoir les racines de l'Equation propoſée, en cherchant à la produire par la multiplication de ces racines. On trouveroit, par exemple, que $x^3+ax^2+bx+c=0$, doit être le produit des racines $x+p+m\sqrt[3]{q+\sqrt{r}}+n\sqrt[3]{q-\sqrt{r}}$

$$x+p+m'\sqrt[3]{q+\sqrt{r}}+n'\sqrt[3]{q-\sqrt{r}}$$

$$x+p+m''\sqrt[3]{q+\sqrt{r}}+n''\sqrt[3]{q-\sqrt{r}}$$

& les racines d'une équation $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, ſe trouveront devoir être de la forme $x+p+\sqrt{AX+BX'+CX''}+\sqrt{A'X+B'X'+C'X''}$
$+\sqrt{A''X^2+B''XX'+C''XX''+D''X'^2+E''X'X''+F''X''^2}$, p étant une quantité entiere & rationelle, égale à, $\frac{1}{4}a$, X, X', X'' étant les trois racines d'une équation du troiſieme degré, & les autres caracteres étant des nombres. Le Problême général de réſoudre une Equation donnée, ſera réſolu généralement par cette Méthode, & n'aura plus d'autres difficultés, que celles d'un calcul toujours de plus en plus compliqué; Calcul auquel je ne m'arrêterai point,

d'autant que j'apprends que M. Bézout a donné ſur cette matiere, une Méthode qui lui eſt propre, mais dont je n'ai point eu connoiſſance juſqu'ici. Il eſt aiſé de voir que ce que je viens de dire d'une Equation algébrique, à une ou à deux variables, eſt également vrai quelque ſoit le nombre de variables, & eſt réciproque pour chacune. Mais il n'en eſt pas de même des Equations non algébriques, & c'eſt ce qu'il faut que j'examine ici.

Je ſuppoſe que j'aie, par exemple, $l.\,x + x + b = 0$, b étant un nombre entier dans cet exemple, il eſt clair qu'il faut que x ſoit un nombre, que $l.\,x$ en ſoit auſſi un, & que le logarithme de ce nombre, plus le nombre lui-même, ſoit égal à b, ce qui aſſujettit le nombre entier b à certaines conditions. Je ſuppoſe pareillement que j'aie l'Equation intégrale,

$$\frac{l.\,a'x + by + cp}{p} + \frac{dx + b'y + c'p}{p} + N = 0.$$

N étant une arbitraire, il eſt clair que je n'aurai la valeur de y en x, que ſi $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$; ce qui réduit la forme propoſée à $ax + by + cp + N = 0$, ou bien ſi $b = 0$ ou $b' = 0$; & que ſi dans ce dernier cas, je veux avoir auſſi la valeur de x en y, il faut ou que $a = 0$ & $b' = 0$, ou $a' = 0$ & $b = 0$. Ces exemples ſuffiſent pour faire voir comment dans des équations plus compliquées, il faut s'y prendre pour diſtinguer les cas où l'on peut avoir y en x ou x en y, ou tous deux à la fois. Les mêmes principes apprendront à diſtinguer de même les cas où l'on peut avoir une fonction de y, égale à une fonction de x, & s'appliqueront également aux équations qui contiendroient un plus grand nombre de variables.

Si on vouloit trouver ces mêmes conditions pour une équation différentielle, dont l'intégrale est inconnue, on supposeroit, par exemple, que V est la différentielle exacte d'une fonction de x, plus une fonction de y d'un ordre quelconque. Une méthode semblable à celle du Problême second, *Cal. intégral*, *pag.* 8, donneroit les équations de condition dans cette supposition ; & elles ne différeroient de celles de ce Problême, qu'en ce qu'au lieu des différences entieres d, on auroit des différences partielles, répondant à x & à ses différences, ou à y & à ses différences. Par la méthode ensuite du Problême cinq, *pag.* 22, on trouvera une formule qui, étant débarrassée du coefficient général, qui doit rendre la proposée une différentielle complette, & des différentielles de x ou de y, supérieures à celle que contient $V = 0$, & cela à l'aide des différences partielles répondant à x ou y, sera ou nulle par elle-même, ou aura lieu en même tems que $V = 0$, lorsque $V = 0$ pourra avoir une intégrale de cette forme. Il en sera de même pour un nombre de variables quelconque, & pour tout autre supposition semblable.

Ces recherches auront une très grande utilité, en ce que dans la pratique, les équations, où ces indéterminées peuvent être séparées, sont presque les seules dont on puisse se servir ; & en ce que, connoissant dans les formules d'intégrales, celles où cette séparation a ou n'a pas lieu, & le connoissant aussi pour chaque différentielle proposée, on ne comparera à chaque équation différentielle, que les intégrales de la classe de celles qu'on saura par-là lui convenir.

Maintenant, si j'ai entre x & y une équation différentielle d'un ordre quelconque, en sorte que j'aie y égale à une fonction de x, il est aisé de voir, 1°. que cette fonction de x ne pourra contenir qu'un nombre égal à l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle de fonctions transcendantes de x, qui ne pourront entrer dans la composition les unes des autres, comme on le peut voir dans le Calcul intégral, page 37 & suivantes, & que j'appellerai de même r, s, t, &c. 2°. Que dans cette fonction les arbitraires, que la différentiation devra faire disparoître pour avoir la proposée, seront disposées selon les différentes formes que peuvent avoir r, s, t, &c., comme on l'explique au même endroit. 3°. Que désignant par n l'exposant de l'ordre de la proposée, faisant disparoître les dénominateurs & les radicaux, la fonction transcendante la plus composée ne pourra contenir de radicaux plus élevés que l'exposant de la puissance de d^ny; & que quant aux autres fonctions transcendantes, mettant dans l'équation proposée $x + g$ à la place de x, g étant une constante indéterminée, afin qu'on puisse supposer toujours $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, &c., substituant, puis comparant terme à terme, il est clair que le nombre & le dégré de ces radicaux, comme de ceux de la fonction algébrique de x qui entre dans la valeur de y, seront assujettis à ne point donner plus de valeurs de y, qu'on n'en trouve dans la comparaiſon ci deſſus pour chaque terme de la ſuite. Dans le Problême des quadratures ou ceux qui s'y réduiſent, c'eſt-à-dire, où y ne ſe trouve point dans l'équation du premier ordre y, ni dy dans celle du ſecond, &c, ces radicaux étant donnés, & l'intégrale n'en pouvant contenir d'autres, on a immédiatement la forme dont y eſt ſuſceptible; & il eſt clair que la valeur de l'ordonnée en l'abciſſe dépendante d'une équation d'un dégré quelconque, on aura, ſi la courbe eſt exactement quarrable, une équation du même dégré entre l'aire & la même abciſſe.

On voit que tout ce que je viens de dire eſt applicable, *mutatis, mutandis*, au cas où l'on a ſimplement une fonction de y égale à une fonction de x.

Tout ceci poſé & la forme de la ſuite déterminée en général, il n'y aura plus qu'à la ſubſtituer dans la propoſée, & en déterminer enſuite les coefficiens; mais avant de faire cette ſubſtitution, il faudroit avoir la forme générale des ſuites dont la ſomme eſt algébrique. Sans cela, la ſuite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ donnant en général la valeur de y, on n'auroit, en ſubſtituant, des ſuites plus compliquées, que des valeurs indéterminées pour les coefficiens. Je tirerai la méthode que je vais donner ici, pour avoir cette forme, d'un Mémoire que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie des Sciences, au mois d'Octobre 1761. On l'y propoſoit comme générale pour les quadratures, rectifications abſolues, & même pour l'intégration, toutes les fois qu'une variable étoit fonction algébrique d'une autre.

Je ſuppoſe que j'aie entre les variables, x & y l'équation algébrique du dégré m.

$$
\begin{array}{r}
Ay^m \\
+\overline{A' + B'x} \cdot y^{m-1} \\
+\overline{A'' + B''x + C''x^2} \cdot y^{m-2} \\
+\overline{A''' + B'''x + C'''x^2 + D'''x^3} \cdot y^{m-3} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
+A + Bx + \Gamma x^2 + \Delta x^3 \;\ldots + \Pi x^p = 0
\end{array}
$$

Soit, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 \cdot\cdot + (n)\,x^n + (n+1)x^{n+1} \ldots$ une des racines de cette équation ſous la forme d'une ſuite infinie, où je déſigne pour plus de commodité le coefficient d'un terme x^n par (n). Il eſt clair que ſubſtituant cette valeur de y dans l'équation, je dois avoir égal à zero le coefficient de chaque puiſſance de x. Appellant donc en général $(n)^{(m)}$ le coefficient de x^n dans la ſuite élevée à la puiſſance m, j'aurai en général l'équation

$$
\begin{array}{r}
A\,(n)^{(m)} \\
+A'(n)^{(m-1)} + B'(n-1)^{(m-1)} \\
+A''(n)^{(m-2)} + B''(n-2)^{(m-2)} + C''(n+2)^{(m-2)} \\
+A'''(n)^{(m-3)} + B'''(n-1)^{(m-3)} + C'''(n-2)^{(m-3)} \\
\pm\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot = 0
\end{array}
$$

On

On sait de plus que $(n)^{(m)}$

$$= m a^{m-1}(n) + m\cdot\overline{m-1}\cdot a^{m-2} b\,(n-1) + \overline{m\cdot\overline{m-1}\cdot a^{m-2}\cdot c + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}}{1\cdot 2}\cdot a^{m-3} b^{2}}\,(n-2)$$

$$+ \overline{m\cdot\overline{m-1}\cdot a^{m-2}\cdot d + m\cdot\overline{m-1\cdot m-2}\cdot a^{m-3} bc + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-3}}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{m-4} b^{3}}\,(n-3)$$

$$+ \overline{m\cdot\overline{m-1}\cdot a^{m-2} e + m\cdot\overline{m-1\cdot m-2}\cdot a^{m-3} bd + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}}{1\cdot 2}\cdot a^{m-3} c^{2}}$$

$$+ \overline{\frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}}{1\cdot 2}\cdot a^{m-4} b^{2}c + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot\overline{m-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{m-5} b^{4}}\,(n-4)$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Valeur générale, de laquelle on a facilement les valeurs de $(n)^{(m-1)}$ . . . de $(n-1)^{m-1}$ . . .

Je substitue ces valeurs dans l'équation précédente, & elle devient

$$\begin{array}{ll}
A m\cdot a^{m-1}\cdot(n) & + A\cdot m\cdot \overline{m-1}\cdot a^{m-2} b\cdot(n-1) \\
+ A'\cdot \overline{m-1}\cdot a^{m-2} & + \left\{\begin{array}{l} A'\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot a^{m-3} b \\ + B'\cdot\overline{m-1}\cdot a^{m-2} \end{array}\right. \\
+ A''\cdot \overline{m-2}\cdot a^{m-3} & \\
+ A'''\cdot \overline{m-3}\cdot a^{m-4} & + \left\{\begin{array}{l} A''\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot a^{m-4} b \\ + B''\cdot\overline{m-2}\cdot a^{m-3} \end{array}\right. \\
+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & + \left\{\begin{array}{l} A'''\cdot\overline{m-3}\cdot\overline{m-4}\cdot a^{m-5} b \\ + B''''\cdot\overline{m-3}\cdot a^{m-4} \end{array}\right. \\
& + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

$$+A\cdot\left\{\begin{array}{l} m\cdot m-1\cdot a^{m-1}\cdot c\cdot(n-2) \\ +\frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2}a^{m-3}b^2 \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} A'\cdot\left\{\begin{array}{l} m\cdot m-2\cdot a^{m-3}c \\ +\frac{m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2}a^{m-4}b^2 \end{array}\right. \\ +\quad B'\cdot m-1\cdot m-2\cdot a^{m-3}b \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} A''\cdot\left\{\begin{array}{l} m-2\cdot m-3\cdot a^{m-4}c \\ +\frac{m-2\cdot m-3\cdot m-4}{1\cdot 2}a^{m-5}b^2 \end{array}\right. \\ +\quad B''\cdot m-2\cdot m-3\cdot a^{m-4}b \\ +\quad C''\cdot m-2\cdot a^{m-3} \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} A'''\cdot\left\{\begin{array}{l} m-3\cdot m-4\cdot a^{m-5}c \\ +\frac{m-3\cdot m-4\cdot m-5}{1\cdot 2}a^{m-6}b^2 \end{array}\right. \\ +\quad B'''\cdot m-3\cdot m-4\cdot a^{m-5}b \\ +\quad C''\cdot m-3\cdot a^{m-4} \end{array}\right.$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ =0.$$

Tirant de cette équation indéfinie la valeur de a, j'aurai la forme du terme général d'une ſuite égale à la racine d'une équation algébrique, le nombre des termes dont dépendra ce terme général mis ſous cette forme, étant le nombre entier plus petit que $n-\frac{n}{m}$. Toutes les fois qu'il faudra pour une valeur particuliere de n, ajouter une quantité constante à la valeur générale pour avoir le coefficient de x, il est clair que cela indiquera un terme dans la suite indéfinie que je place à la fin de mon équation algébrique, dont l'exposant soit cette valeur particuliere de n, & le coefficient, la constante multipliée par

$$\overline{-A\, m\, a^{m-1} + A' \cdot \overline{m-1} \cdot a^{m-2} + A'' \cdot \overline{m-2} \cdot a^{m-3} + A''' \cdot \overline{m-3} \cdot a^{m-4} \ldots}$$

Cette méthode peut-être utile pour sommer immédiatement une suite donnée, dont le terme général soit sous une forme susceptible d'être comparée à celle que je viens de trouver. En voici quelques exemples.

EXEMPLE I.

Soit la suite $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{81}x^5 \pm \ldots$ la loi de la suite étant telle que

$$(n) = \frac{-2 \cdot \overline{\tfrac{1}{2}+1}\,(n-1) + 2 \cdot \tfrac{1}{3}(n-2) + 2 \cdot \tfrac{2}{9}(n-3) \ldots}{3}$$

le nombre des termes qui entrent dans cette formule étant l'entier $\frac{n}{2}$, & le coefficient du dernier terme n'étant point multiplié par 2, lorsque n est un nombre pair; comparant cette forme avec la forme ci-dessus, je vois qu'elles conviennent en faisant, $m = 2$; A, A', B', $= 1$. Je ferai donc $A = -a \cdot \overline{Aa + A'} = -2$, $B = -\frac{B'a}{2\,\overline{Aa+A'}} + b \cdot \overline{2Aa+A'} = -\frac{5}{2}$; enfin $\Gamma = -\frac{Ab^2 + B'b}{2\,\overline{Aa+A'}} + c \cdot \overline{2Aa+A'} = -\frac{7}{4}$ & j'aurai l'équation $y^2 + xy + y - \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - 2 = 0$. Je la résous, & j'ai $y = -\frac{1+x}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 3x + 2x^2}$. Je fais $x = 0$, & j'ai $y = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{2}$. Or y doit par l'hypothèse être égale à 1 dans ce cas; donc je dois prendre le signe $+$ pour avoir la vraie valeur de la somme de la suite.

EXEMPLE II.

Soit la loi d'une suite telle que $A\,(n) = -B\,(n-1) - C\,(n-2) - D\,(n-3)$, & ainsi de suite jusqu'au terme $n-m+1$, j'aurai l'équation $y \cdot \overline{A + Bx + Cx^2 + Dx^3} \ldots + \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \Gamma x^2 + \Delta x^3 \ldots = 0$. Le cas de la formule générale donne toute la théorie des suites récurrentes.

EXEMPLE III.

Soit une suite telle que $(n) = n + 1$, j'aurai $(n-1) = n$, $(n-2) = n-1$; donc $(n) = 2 \cdot (n-1) - (n-2)$; donc, exemple précédent, $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, $y \cdot \overline{1 - 2x + x^2} + \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \Gamma x^2 = 0$. Si je veux que $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, j'aurai $y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 +$ &c. $= \frac{1}{1-2x+x^2}$; mais si je veux que $a = p$, $b = p + 1$, $c = p + 2$, p étant un nombre entier, j'aurai $y = \frac{p + \overline{1-p} \cdot x}{1-2x+x^2}$. multipliant cette nouvelle suite & la valeur par x^{p-1}, & retranchant en suite l'une de l'autre les deux suites & les deux sommes, j'ai en général $1 + 2x + 3x^2 \ldots + \overline{p-1} \cdot x^{p-2} = \frac{1 - px^{p-1} + \overline{p-1} \cdot x^p}{1-2x+x^2}$; d'où l'on voit que la méthode peut être utilement employée à trouver la somme d'un nombre indéfini de termes dans une suite quelconque.

Je passe maintenant au cas plus compliqué, où il s'agiroit d'avoir la forme d'une suite, dont la somme seroit la valeur de y, qu'on peut tirer en général d'une équation algébrique entre x, y & z. Voici comment il faudroit s'y prendre pour avoir cette forme. On supposera d'abord l'équation ordonnée par rapport à x, & il faudra que chaque suite en z, multipliant chaque puissance de x, soit algébrique : on aura donc la loi de cette suite par ce qui précede ; mais il faudra aussi que l'ordonnant par rapport à z, la suite en x, qui multipliera chaque puissance de z, soit algébrique ; donc on aura la loi de cette suite. Mais les coefficiens de cette suite sont les coefficiens des mêmes puissances de z, pris successivement dans chaque suite en z, qui multiplie les diverses puissances de x ; donc on aura la loi des coefficiens, & par conséquent la loi de la suite, pour qu'elle donne une fonction algébrique de x & z pour valeur de y. L'analogie indique suffisamment ici ce qu'il y auroit à faire pour un plus grand nombre de variables.

Pour appliquer la théorie ci dessus à l'intégration, on supposera une suite algébrique de transcendantes & de x, ces transcendantes étant des logarithmes exponentielles ou intercendantes de suites algébriques ; & comme le dégré où monte l'équation qu'on doit avoir entre chaque suite & sa somme est déterminé, mais seulement par la plus haute puissance de la somme, on supposera que le coefficient de chaque puissance de y en x, au lieu d'être déterminé est indéfini, ou même la somme d'une suite récurrente. La forme de la suite étant donnée dans cette nouvelle ſuppoſition, forme qu'on aura aiſément par ce qui précede; il ne reſtera plus d'indéfini que les dénominateurs & les numérateurs des ſommes des ſuites récurrentes, & le nombre des fonctions logarithmiques qui peuvent être ajoutées enſemble, ſans que la propoſée change de forme : pour les déterminer pour chaque cas particulier, on ſuppoſera d'abord qu'ils ſont déterminés au-deſſous de ce qu'ils doivent être, & on ajoutera ſeulement à la valeur de chaque coefficient, ce qu'une ſuppoſition plus élevée y changeroit; on comparera enſuite, avec la propoſée, ces ſuites ainſi préparées, & la comparaiſon conduira enfin à un point où il n'y aura plus rien à ajouter pour avoir la valeur du coefficient, & tout ſera déterminé. Voici un exemple de cette méthode qui la fera mieux comprendre.

Soit le cas des fractions rationnelles,

$$dy = \frac{A + Bx + Cx^2 \ldots\ldots + Px^m}{A' + B'x + C'x^2 \ldots\ldots + P'x^{m'}} dx$$

& qu'il faille trouver y. Je réduis en ſuite le coefficient de dx; je vois alors que la valeur de y en ſuite, ne peut être que l. $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots + a' + b'x + c'x^2 + \ldots$ la ſuite $a' + b'x + c'x^2 \ldots\ldots$ étant une ſuite récurrente, & la ſuite $a + bx + cx^2 \ldots\ldots$ la ſomme d'un nombre indéfini de ces ſuites, je compare la valeur de dy donnée dans cette hypotèſe, avec la valeur donnée par la prépoſée, en ſuppoſant que les ſuites $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots$ $a' + b'x + c'x^2 \ldots\ldots$ ſoient des ſuites récurrentes fort ſimples; j'ajoute à chaque terme une quantité conſtante, ſi elle ne devient pas en général égale à zero, je la ſuppose ce qu'elle doit être dans une supposition où ces suites soient plus compliquées, plus une nouvelle indéterminée, & ainsi de suite, jusqu'à ce que cette nouvelle indéterminée soit nulle en général, & alors le Problême sera résolu. Au reste, cette opération ne sera pas aussi longue qu'on le croiroit d'abord, parceque les suites qu'on substitue dans la proposée ne pouvant contenir dans leurs coefficiens plus de quantités indépendantes de la loi de la suite qu'on n'en trouve dans le coefficient de dx.

Il est aisé de voir qu'on pourra dans cette méthode dresser des Tables qui contiendroient par ordre toutes les équations intégrales qui donnent y en x, avec les équations différentielles qui y répondent & les changemens qui y peuvent faire de nouvelles suppositions pour le nombre & l'élévation des suites récurrentes.

Quoique cette méthode, traitée ainsi par les suites infinies, dont il ne seroit pas difficile de se passer, soit d'une grande commodité dans la pratique, & qu'elle conduise à une intégration absolue; sa plus grande utilité sera pourtant de servir aux approximations immédiatement & de la maniere la plus commode. Toute équation différentielle peut, par la préparation que j'ai indiquée ci-dessus, être, lorsqu'elle est possible, telle que y substituant pour y $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ tous les coefficiens des puissances de x s'évanouissent; & cette suite étant rendue convergente, donnera une valeur de y, d'autant plus vraie, qu'on prendra plus de termes, avec cette différence cependant, que si on peut tirer de l'équation proposée une valeur de y en x en termes finis; la différence qu'il y aura entre la valeur de y prise dans la suite & sa vraie valeur, pourra être supposée plus petite qu'aucune quantité donnée, & que la somme de la suite sera cette vraie valeur; au lieu que dans l'autre cas, on peut, à la vérité, parvenir à un terme, dans la suite, plus petit qu'aucune quantité donnée; mais jamais on ne peut parvenir à la vraie valeur. C'est à-peu-près la même chose que si l'on proposoit d'avoir $\sqrt{1-n}$ en nombres rationels. L'expression étant développée en suite, si $n = \frac{3}{4}$, on parviendra à la fin à la vraie valeur $\frac{1}{2}$; mais si $n = \frac{1}{2}$, quoique plus on prend de termes, plus on approche de la valeur de $\sqrt{\frac{1}{2}}$ en nombres rationels, si elle en avoit une; jamais cependant on ne peut parvenir à cette valeur, parce qu'elle n'en a point.

La suite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ étant substituée dans l'équation différentielle en proposée, & étant rendue convergente, donne déja une méthode d'avoir y en x par approximation; mais il s'en faut beaucoup que ce soit-là la borne de l'utilité des méthodes précédentes. De quelque maniere que y soit donné en x, dès qu'il est question d'approximations, il est clair que la valeur de x étant donnée, on aura, par les Tables de logarithmes, sinus, &c., la valeur de y qui y répond. Je prendrai donc une forme générale qui convienne avec l'ordre d'une équation différentielle proposée. Je supposerai d'un nombre fini de termes les différentes suites algébriques qui entreront dans les valeurs de r, s, t, &c. en x; x & r; x, r, s; &c. & aussi la suite algébrique qui donne y en x, r, s, t, &c. Je substituerai

ſubſtituerai dans la propoſée la ſuite ainſi terminée; j'en déterminerai les coefficiens; & ajoutant à cette valeur, ainſi trouvée, ce qu'il faut y ajouter, pour qu'étant réduite en ſuite, elle donne la ſuite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ que j'ai dit ci-deſſus être la valeur de y, j'aurai une nouvelle valeur de y: ſuppoſant un terme de plus dans les r, s, t, &c. & dans l'équation finie entre y & x, r, s, t. &c. j'aurai encore une nouvelle valeur de y; & ſi ces valeurs ſont de la forme que doit avoir la vraie valeur de y, & que la ſuite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ ſoit convergente, on aura par cette méthode des valeurs très approchées, en ne prenant qu'un petit nombre de termes dans la ſuite qui reſte dans chaque valeur.

Quant à la maniere de faire en ſorte que la ſuite ſoit convergente, il faut remarquer que cette convergence vient ou de la petiteſſe de x ou de celle des coefficiens: il faudra donc pour ce qui regarde x, faire en ſorte, par des ſubſtitutions convenables que x ſoit telle (ſi la nature du Problême le permet), ce qui arrivera, ſoit qu'on puiſſe avoir une variable x toujours plus petite qu'une quantité conſtante donnée, qu'on a ſuppoſée égale à l'unité, & qui rend homogene la ſuite en x, ſoit qu'on puiſſe ſuppoſer cette quantité conſtante ſi grande qu'on voudra, en ſorte qu'on puiſſe regarder x comme très petite vis-à-vis d'elle: ſi cela étoit impoſſible, parceque x ne pourroit jamais être qu'une quantité ſuſceptible d'avoir toutes les valeurs poſſibles; alors on pourroit rendre la ſuite convergente, tant que x ſera très petite; faire enſuite une autre ſuppoſition pour avoir z très petite lorſque x ſera grande; une autre pour le cas où x ſera à-peu-près égale au parametre, & l'on parviendra ainſi au but qu'on ſe propoſe.

Quant aux coefficiens, il faudra chercher une méthode convenable dans chaque cas particulier. Lorſqu'il eſt poſſible, comme dans le Problême des trois Corps, d'avoir par des Obſervations ou d'autres circonſtances particulieres des valeurs particulieres de y pour des valeurs données de x; on pourra s'en ſervir commodément pour avoir les coefficiens de la ſuite. Si même on vouloit ſe contenter de comparer les réſultats de la Théorie avec ceux des Obſervations, on le pourroit faire en comparant les coefficiens trouvés dans la ſuite, par le moyen des Obſervations, avec ceux que donne la ſubſtitution de la ſuite dans l'équation différentielle. En effet, ſi ces coefficiens different peu, que la ſuite ſoit convergente ou non, il ſera toujours vrai que les Obſervations & la Théorie s'accordent enſemble. On pourroit encore réſoudre ces ſortes de Problêmes par cette méthode ſeule, ſans employer leurs équations différentielles lorſque les ſuites ſeront convergentes, & par conſéquent indépendamment de toute hypothèſe phyſique. Cette derniere méthode pourroit ſervir à calculer des Phénomenes dont les loix ſeroient inconnues, pourvu qu'on ſache de quoi ces loix peuvent dépendre. Mais il eſt eſſentiel d'obſerver ici qu'il n'eſt vrai, que quelqu'équation qu'on ait entre y & x, on aura $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ . . . . que dans le cas où on a fait la ſubſtitution indiquée ci-deſſus; qu'il faut donc qu'il y ait une conſtante indéterminée g; & qu'au lieu d'avoir la valeur de x par les Obſervations, on a ſeulement celle $x + g$; & qu'ainſi, lorſqu'on veut déterminer les coefficiens par les obſervations, il faut mettre pour x cette valeur moins l'indéterminée g. Pourvu qu'on ne donne pas à g une valeur particuliere, on peut la supposer incomparablement plus grande ou plus petite qu'aucune autre quantité, ce qui peut quelquefois servir avantageusement à rendre la suite convergente.

On sent qu'il seroit très avantageux d'avoir pour déterminer les coefficiens par le moyen des Observations, une formule indéfinie pour un nombre indéfini de coefficiens & d'observations. Ce Problême se réduit à trouver la valeur d'une inconnue donnée par un nombre indéfini n d'équation entre un nombre indéfini n d'inconnues; je tire cette méthode du Mémoire que j'ai déja cité ici. Soient $a, b, c, d, e \ldots\ldots p$ ces inconnues, & qu'on ait

$$\begin{array}{l}
\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e \ldots\ldots + \Pi p = A \\
\alpha' a + \beta' b + \gamma' c + \delta' d + \varepsilon' e \ldots\ldots + \Pi' p = A' \\
\alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c + \delta'' d + \varepsilon'' e \ldots\ldots + \Pi'' p = A'' \\
\alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c + \delta''' d + \varepsilon''' e \ldots\ldots + \Pi''' p = A''' \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}$$

Il est clair qu'on aura en général

$$p = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\frac{A}{\alpha}-\frac{A'}{\alpha'}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha'}} - \cfrac{\frac{A'}{\alpha'}-\frac{A''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}}}{\cfrac{\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma'}{\alpha'}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha'}} - \cfrac{\frac{\gamma'}{\alpha'}-\frac{\gamma''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}}} - \cfrac{\cfrac{\frac{A'}{\alpha'}-\frac{A''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}} - \cfrac{\frac{A''}{\alpha''}-\frac{A'''}{\alpha'''}}{\frac{\beta''}{\alpha''}-\frac{\beta'''}{\alpha'''}}}{\cfrac{\frac{\gamma'}{\alpha'}-\frac{\gamma''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}} - \cfrac{\frac{\gamma''}{\alpha''}-\frac{\gamma'''}{\alpha'''}}{\frac{\beta''}{\alpha''}-\frac{\beta'''}{\alpha'''}}}}{\cfrac{\cfrac{\frac{\delta}{\alpha}-\frac{\delta'}{\alpha'}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha'}} - \cfrac{\frac{\delta'}{\alpha'}-\frac{\delta''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}}}{\cfrac{\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma'}{\alpha'}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha'}} - \cfrac{\frac{\gamma'}{\alpha'}-\frac{\gamma''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}}} - \cfrac{\cfrac{\frac{\delta'}{\alpha'}-\frac{\delta''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}} - \cfrac{\frac{\delta''}{\alpha''}-\frac{\delta'''}{\alpha'''}}{\frac{\beta''}{\alpha''}-\frac{\beta'''}{\alpha'''}}}{\cfrac{\frac{\gamma'}{\alpha'}-\frac{\gamma''}{\alpha''}}{\frac{\beta'}{\alpha'}-\frac{\beta''}{\alpha''}} - \cfrac{\frac{\gamma''}{\alpha''}-\frac{\gamma'''}{\alpha'''}}{\frac{\beta''}{\alpha''}-\frac{\beta'''}{\alpha'''}}}} - \&c.$$

& ainsi de suite, où en général on peut supposer $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, &c. égaux à l'unité. On aura donc p donné par une fraction, dont le Numérateur & le Dénominateur ne différeront qu'en ce que l'un sera composé de A, A', A'', A''', &c., de la même maniere que l'autre le sera de Π, Π', Π'', Π''', &c., & on formera cette valeur de p successivement de la maniere qu'on voit figurée ici; d'où l'on voit que le nombre des $\dfrac{\frac{A}{\alpha}-\frac{A'}{\alpha'}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha'}}$ ou $\dfrac{A-A'}{\beta-\beta'}$, lorsque α, α', α'', &c. seront égaux à l'unité, sera 4^{n-2}, & qu'ils seront toujours distribués quatre à quatre d'une maniere semblable.

Dans le cas dont il est particulierement question ici, on a les α, α', α'', α''', &c. égaux à l'unité, les β, β', β'', β''', &c. égaux aux valeurs de x données par un nombre n d'observations, les γ, γ', γ'', γ''', &c. égaux aux valeurs de x^2 données de mêmes, & ainsi de suite; les Π, Π', Π'', Π''', &c. égaux aux valeurs de x^n, & enfin les A, A', A'', A''', &c. égaux aux valeurs correspondantes de y, que donnent les mêmes observations.

Je n'en dirai pas davantage, mon but étant de donner des principes généraux, sans entrer dans des détails qui faciliteroient aux autres des routes que je n'ai point le courage de suivre.

CONCLUSION.

TELLES ſont les vues que je propoſe aux Géometres ſur un Problême dont la ſolution étoit ſi importante pour le ſyſtême du monde, & qui a ſi bien confirmé ce que Newton avoit déduit du mouvement des Planettes principales.

Mes équations *dans les deux premiers Mémoires*, ſont les mêmes que celles que le principe de la moindre action donne à M. de la Grange; & quoique tirées d'un principe différent, je les ai par la même Méthode. Cette façon de ſuppoſer que la même changeante varie de pluſieurs manieres à la fois, eſt la clef d'une infinité de Problêmes; & lorſqu'elle ſera mieux connue, on en ſentira encore mieux tous les avantages. Mon but n'a point été de réſoudre le Problême dont j'ai parlé, mais d'indiquer la voie qu'on pourroit ſuivre pour le réſoudre généralement, directement & exactement. Le Problême des trois Corps a été réſolu par trois célebres Géometres. Ils ont cherché à en tirer une Théorie plus exacte de la Lune & des Cometes, qui pût ſervir à perfectionner l'Aſtronomie & la Navigation, & à confirmer les idées de Newton ſur le ſyſtême du monde. Ils ſe ſont ſervis pour cela des Méthodes d'Approximation, les ſeules qui conviennent à ces ſortes de queſtions, ſitôt qu'il s'agit de faire quelqu'application de la Théorie. Je ſuppoſe en effet que les équations du Problême ſoient intégrées exactement. S'il s'y trouve quelque fonction tranſcendante, ou même qu'en prenant la valeur du temps en l'une des coordonnées, ou celle d'une des coordonnée en une autre, on ait à réſoudre une équation des ſecond, troiſieme, quatrieme..... dégrés ; on aura des radicaux ou des fonctions tranſcendantes dans les formules du Problême. Il faudra donc y faire entrer des ſuites infinies & avoir encore recours aux Méthodes d'Approximation. Qu'on ſe ſerve donc de ces Méthodes avant d'intégrer, ou qu'on ne les applique aux équations qu'après l'intégration ; je n'y vois aucune différence : mais il y a des conditions néceſſaires pour toute Méthode d'Approximation, qu'il n'eſt pas toujours aiſé de remplir, lorſqu'on les applique aux équations différentielles. 1°. Il faut que la ſuite donnée dans la Méthode d'Approximation, car dans toute Méthode d'Approximation il entre néceſſairement une ſuite infinie ; il faut, dis je, que cette ſuite ſe puiſſe continuer à l'infini, ſans pouvoir s'arrêter à aucun terme & y changer, ſoit de forme, ſoit de nature ; & que plus on prend de termes ou un terme plus éloigné du premier, la ſomme de la ſuite ou bien de ce terme plus éloigné, differe moins ; & il faut non-ſeulement que cela ſoit, mais encore que cela ſoit bien prouvé à priori. 2°. L'identité, ſoit de la ſomme de la ſuite entiere, ſoit de ſon dernier terme avec la vraie valeur, ou une valeur ſenſiblement égale à la vraie, doit être rigoureuſement démontrée ; & ſi les coefficiens dans les ſuites ſe déterminent par la Méthode des indéterminées, il faut avoir démontré à priori que la forme qu'on lui ſuppoſe eſt celle qu'elle doit avoir. La Méthode de M. d'Alembert remplit exactement tout ce que je viens de dire : ainſi tout ce qu'on pourroit faire ne conduiroit au but, ni plus directement, ni plus exactement : en effet, ſi on deſire plus d'exactitude, il n'y a qu'à continuer plus loin ſes formules, & y faire entrer l'altération du mouvement que l'Auteur de la piece couronnée en 1762, a appris à calculer. Ce travail doit particulierement regarder les Astronômes : il exige, à la vérité beaucoup de connoissances de calcul, & peut-être plus qu'on n'en peut acquérir ordinairement, sans négliger les autres parties de l'Astronomie. Mais il n'en est pas moins vrai que ce que le Géometre peut faire maintenant sur ce sujet comme Géometre, n'est plus que de pure curiosité.

J'ai cru ce détail nécessaire pour qu'on ne fût pas étonné des bornes où je me suis renfermé sur le Problême des trois Corps. Quant aux travaux nécessaires pour les Problêmes plus compliqués, j'avoue franchement que je les crois au-dessus de mes forces, & sur-tout de mon courage : bien que, dans les divers morceaux que la nécessité de défendre sa solution a fait publier à M. d'Alembert, on trouve sur les Méthodes d'Approximation, & sur-tout sur la maniere de s'assurer de leur bonté indépendamment des résultats, nombre de choses qui seroient de la plus grande utilité, & qu'une sagacité singuliere pouvoit seule deviner & employer.

Le peu que j'ai dit au commencement du *troisieme Mémoire*, est suffisant pour faire sentir aux Géometres de quelle Méthode ils pourroient se servir pour résoudre un Problême célebre dans la solution duquel on n'avoit, depuis Descartes, fait que peu de progrès. La Méthode que je propose est générale pour un dégré quelconque, & je l'ai mise au point de ne laisser plus pour déterminer la forme des racines d'une équation donnée, d'autres difficultés à résoudre que celles qui naîtront nécessairement de la complication & de la longueur des calculs. M. Euler a fait ſur cette matiere quelques réflexions ſemblables, qu'il propoſe comme des conjectures : un peu de méditation ſuffit pour s'aſſurer que les miennes ſont une ſuite néceſſaire de la nature des équations. Il n'y a rien de commun entre l'Ouvrage de M. Fontaine ſur cette matiere, & mes courtes réflexions. Ce grand Géometre détermine la forme des racines d'une équation en cherchant par comparaiſon entre toutes les formes poſſibles, celles qui peuvent convenir à une équation propoſée. Il conſidere les racines comme réelles ou imaginaires, poſitives ou négatives, compoſées de quantités égales ou inégales, plus grandes ou plus petites les unes par rapport aux autres; mais cela ne conduit pas immédiatement à en avoir la valeur. Comme ce travail eſt très intéreſſant, je crois que les Géometres me pardonneront d'inſérer ici quelques réflexions qui tendent à démontrer & à développer l'eſprit de la Méthode, que ſon célebre Auteur n'a fait qu'expoſer. Je ſuppoſe qu'on ait devant les yeux l'Ouvrage de M. Fontaine, qui ſe trouve dans le Recueil de ſes Œuvres, & dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1747; & je dis, 1°. Que ſi j'ai une équation du dégré f, dont les racines ſoient miſes ſous les formes que leur donne M. Fontaine, & que ces racines ne contiennent qu'un nombre g, inférieur à f de quantités a, b, c . . . . ., j'aurai pour ce cas un nombre $f-g$ de fonctions de m, n, p . . . . . . égales à zéro. En effet, par la comparaiſon de la propoſée avec le produit de ſes racines, j'aurai un nombre f d'équations pour un nombre g d'indéterminées. Ces fonctions qu'on trouvera différentes pour chaque ſuppoſition différentes de facteurs ſe trouveront

trouveront ſous une forme rationelle par les procédés connus, & les égalant à zéro, on aura des conditions pour chaque ſyſtême de facteurs; car les équations de chaque ſyſtême priſes toutes enſemble, auront toujours lieu dans chaque ſyſtême, & ne pourront avoir lieu dans aucun autre. 2°. Que ſi j'ai un ſyſtême de facteurs qui contienne un certain nombre de a, b, c ....., j'aurai plus grande ou plus petite que zéro, une fonction qui deviendra égale à zéro; lorſque faiſant, par exemple, $b = c$ ou $c = o$, ce ſyſtême de facteurs deviendra un de ceux dont je parle dans l'article ci-deſſus. Il y aura autant de ces fonctions, qu'il y aura de ſuppoſitions poſſibles pour ramener le ſyſtême de facteurs donné à un autre ſyſtême qui contienne une de moins des quantités a, b, c.... & ces fonctions ſeront telles qu'en les ſuppoſant nulles, & y faiſant les ſuppoſitions qui les rendent telles, elles donnent les équations qu'on auroit trouvées par l'article précédent. 3°. Que ſi pour un cas particulier d'un ſyſtême de facteurs, une de ces fonctions eſt plus grande ou plus petite que zéro: elle ſera du même ſigne dans tous les autres cas du même ſyſtême. En effet, ſi cette fonction eſt telle que, faiſant $b = c$ ou $c = o$, elle devienne zéro; elle ſera $A \cdot \overline{b - c}^{\,h}$ ou $A\, c^h$. Or, une telle fonction ſera toujours du même ſigne, puiſqu'on a $b > c$, $c > o$, & que A ne peut changer de ſigne. En effet, ſi A pouvoit changer de ſigne, il pourroit devenir zéro; donc la fonction propoſée égalée à zéro ne ſeroit plus une condition du ſyſtême de facteurs où elle a lieu, ce qui eſt contre l'hypothèſe. 4°. Qu'il faut diſtinguer trois cas où ces ſortes de fonctions peuvent ſervir de conditions pour diſtinguer différens ſyſtêmes de facteurs. D'abord deux ſyſtêmes de facteurs peuvent être rappellés à un même ſyſtême, en faiſant $b=c$. La fonction qui, après cette ſuppoſition ſera égale à zéro, ſera dans un cas $A\cdot\overline{b-c}^{\,h}$, & dans l'autre $A\cdot\overline{c-b}^{\,h}$; cela eſt évident par la forme des facteurs de chaque ſyſtême, & h doit être un nombre impair; ſans quoi un ſyſtême ſeroit l'autre, ce qui eſt contre l'hypothèſe; donc, la même fonction ſera pour un ſyſtême de facteurs > 0 & < 0 pour l'autre. Dans le ſecond cas, deux ſyſtêmes de facteurs ſe peuvent rappeller à un même ſyſtême, en faiſant dans l'un $b=c$, & dans l'autre $c=0$: ce cas a lieu pour la comparaiſon de deux ſyſtêmes, dont l'un contient plus d'imaginaires que l'autres. Il faut donc que la fonction qui eſt pour l'un $A\cdot\overline{b-c}^{\,h}$ devienne pour l'autre nulle, lorſque $c=0$; mais l'un des ſyſtêmes de facteurs devient l'autre, en y mettant $b-c$ pour $c\sqrt{-1}$; donc $A\cdot\overline{b-c}^{\,h}$ doit devenir $A\cdot\overline{c\sqrt{1}}^{\,h}$; donc h doit être pair, puiſque A eſt réel; donc la fonction qui ſera < 0 pour un ſyſtême, ſera < 0 pour le ſyſtême correſpondant. Dans le troiſieme cas, une même ſuppoſition rappelle deux ſyſtêmes de facteurs à deux différens, mais dans leſquels une même fonction eſt égale à zéro; & alors, ou elle eſt de ſigne différent dans les deux premiers ſyſtêmes, ou elle eſt de même ſigne, & les fonctions qui ſont > 0 ou 0 dans le cas où elles deviennent nulles, ne changent pas alors de ſigne: ce cas ſe démontrera comme les précédents.

Il n'y a point de ſyſtême de facteurs pour un dégré quelconque, dont on ne puiſſe trouver les conditions caractériſtiques par cette méthode; & il ne ſera queſtion que d'avoir pour un dégré quelconque, les conditions générales pour chaque ſyſtême où il n'entre qu'une quantité a : car quelques ſoient le nombres des a, b, c...... dans un ſyſtême propoſé, on tirera ces conditions de celles des ſyſtêmes où ce nombre ſera moindre d'une unité, & ainſi de ſuite, juſqu'à celles des ſyſtêmes où il n'y a qu'une quantité a.

Lorſque le nombre des a, b, c..... eſt plus petit que l'expoſant du dégré de l'équation : alors, ſi les a, b, c..... ſont eux-mêmes les racines d'une autre équation d'un dégré inférieur, comme cela arrive néceſſairement lorſqu'il n'y en a que deux, on réſolvera la propoſée en réſolvant cette nouvelle équation d'un dégré inférieur; & dans tout autre cas, on pourra parvenir à une équation de même dégré, mais dont les coefficiens ſeront les racines d'une équation d'un dégré, dont l'expoſant ſoit égal au nombre de fois que les a, b, c..... ſont répétés dans les racines.

ÉCLAIRCISSEMENT

Sur le Calcul Intégral.

UN grand Géometre que je cite ici, non pour lui faire honneur, mais pour m'honorer moi-même, en apprenant au Public qu'il daigne s'occuper de mes Ouvrages & me favoriser même de ses conseils; M. de la Grange m'a fait observer qu'il y a des équations différentielles, dont les intégrales ne se trouvent point dans les Tables que j'ai données pour ces équations, dans la seconde Section de la premiere Partie de mon Ouvrage; d'où il suit que ces Tables que je donne pour générales, sont au moins sujettes à une infinité d'exceptions. L'importance de la matiere exige de moi qu'en convenant franchement de mon tort, je cherche à le réparer. Je me propose de le faire ici; & pour cela, je vais expliquer la nature de ces exceptions qui détruisent la généralité de mes Tables, & les moyens d'y remédier; j'y joindrai quelques Réflexions importantes sur cette matiere qui m'étoient échappées: je donnerai enfin une méthode d'intégrer qui ne supposera point la construction des Tables. Il me semble qu'il sera aisé de conclure de ce que je vais dire, que la défectuosité de mes Tables est un défaut de la méthode; défaut qui est une suite de la nature même du Calcul, en sorte qu'il n'y ait aucune méthode générale possible de Calcul Intégral qui ne soit sujette à des inconvéniens semblables, ou à de plus grands encore; que la maniere d'y suppléer que je propose ici est aussi simple qu'elle peut l'être par les mêmes raisons. Je crois que ceux qui auront lu avec attention toute la premiere Partie de mon Ouvrage & ce que j'y vais ajouter ici, ne trouveront pas cette assertion téméraire, & me dispenseront d'entrer dans le détail des motifs qui m'engagent à penser ainsi.

Les Tables que je donne dans l'Article troisieme, p. 53, contiennent par ordre les différentes formes d'intégrales qui, étant différentiées, produisent les équations différentielles d'une forme donnée : telle est le principe sur lequel je les ai construites, & elles sont générales dans ce sens. Mais si je donne des valeurs particulieres aux coefficiens de ces formules que j'ai supposés généraux, les différentielles qui en résultent peuvent peut-être s'abaisser, sans que les intégrales changent de forme ; & cela arrivera, soit que les coefficiens des termes les plus élevés de ces différentielles s'évanouissent, soit que ces différentielles aient des facteurs. Alors les différentielles d'un dégré donné pourroient avoir pour intégrales ou les intégrales générales pour ce dégré, ou des cas particuliers d'intégrales supérieures où l'abbaissement ait lieu. Il faut donc pour avoir les intégrales de cette derniere classe d'équations, former une Table qui contienne tous ces cas particuliers. Voilà où je m'étois arrêté, & ce dont les observations de M. de la Grange m'ont fait sentir la nécessité.

Quelque particuliere que soit une forme d'intégrale, elle est toujours telle, excepté pour le cas de $ax+by+cp=0$, que dans l'équation différentielle qui y répond, il puisse y avoir cinq coefficiens indéterminés, parcequ'on n'y change en aucune façon la forme de l'intégrale ni de la différentielle, en faisant $x = Az + Bu + Cp$, & $y = A'z + B'u + C'p$; mais il s'en faut de beaucoup qu'aucune des formes d'intégrales que donnent mes Tables, laissent indéterminés tous les coefficiens de la différentielle qui y répond. Cependant, l'équation différentielle où ils sont supposés quelconques, a une intégrale, comme je l'ai démontré dans la premiere Partie, Section premiere. Cette intégrale est donc pour chaque dégré une des formules générales des dégrés supérieurs. Il faut que cette forme contienne au moins autant de coefficients indéterminés, qu'il y en a dans l'équation différentielle; il faut encore qu'elle soit telle que le cas particulier où l'abaissement a lieu, ne le rappelle pas à une forme d'un dégré inférieur, cela seroit contre l'hypothèse, & que les conditions de cet abaissement laissent un nombre de coefficiens indéterminés, égal à celui des coefficiens de la différentielle. La Table des cas où cet abaissement a lieu, donnera les intégrales qui satisfont à ces conditions pour chaque dégré; & ces intégrales ne seront pas fort élevées, par rapport aux dégrés auxquels elles appartiendront; parceque plus on les supposera élevées, plus le nombre des équations entre les coefficiens, surpassera celui des coefficiens qu'on a à déterminer, en supposant que ceux de la différentielle sont quelconques. Cette forme générale étant trouvée, il y aura des cas particuliers qui lui échapperont; les uns appartiendront à des formes moins compliquées, on les aura par ce que j'ai dit; d'autres appartiendront à des formes plus compliquées, j'en parlerai ci-dessous; d'autres enfin n'appartiendront à aucune forme, & ce sont ceux où la différentielle auroit un facteur; car dans ce cas, si ce facteur n'est pas un de ceux par lesquels on peut avoir besoin de multiplier l'équation différentielle, pour qu'elle soit la différentielle exacte de son intégrale, il n'y a aucune équation intégrale qui puisse produire l'équation différentielle, mise sous cette forme. Il est donc indispensable, avant que de chercher à intégrer par le moyen des Tables, de s'assurer par les méthodes ordinaires, que la proposée n'a point de facteurs, & de l'en débarrasser si elle en a.

Ce que je viens de dire des équations à deux variables, est également vrai pour un nombre quelconque de variables, en observant que le nombre des coefficiens qui resteront toujouts indéterminés, sera pour un nombre n de variables, $n \cdot \overline{n+1} - 1$; & qu'au lieu d'une équation différentielle où tous ses coefficiens soient indéterminés, on aura à traiter une équation où ils ne seront liés entr'eux que par les conditions nécessaires pour que ces équations soient possibles.

J'ai déja dit que l'abaissement des équations différentielles avoit lieu de deux manieres. La premiere, lorsque les coefficiens des puissances des variables se trouvent nuls dans un ou plusieurs des rangs supérieurs de l'équation différentielle. Soit, par exemple,

$$\overline{\nu y^2 + \varepsilon p y + \nu p^2} \cdot dx + \overline{\Pi' x^2 + \delta' p x + \nu' p^2} \cdot dy = 0.$$

L'intégrale de cette équation est par les méthodes ordinaires $\frac{\nu}{b-a} \cdot l\,\frac{x+a}{x+b} + \frac{\Pi'}{b'-a'} \cdot l\,\frac{y+a'}{y+b'} + N = 0$, a & b étant les racines de l'équation $\Pi' x^2 + \delta' p x + \nu' p^2 = 0$; & a' & b'

les racines de l'équation $\nu y^2 + \varepsilon p y + \nu p^2 = 0$. Cet exemple m'a été proposé par M. de la Grange. Maintenant, je dis que cette équation intégrale appartient aux formes pour le troisieme dégré; en effet, si on différentie une intégrale semblable, en donnant une forme générale aux fonctions qui y entrent, on aura une différentielle de ce dégré: mais qu'ici elle est du second, parceque ces fonctions sont telles que les coefficiens de tous les termes qui monteroient au troisieme dégré sont égaux à zéro; la même chose aura lieu pour-tout autre exemple. Mais comment cela arrive-t-il? c'est que plusieurs des fonctions qui entrent dans les formes d'intégrales, ont égaux, entr'eux, les coefficiens des rangs supérieurs des puissances de x & y qui y entrent, ce qui fait que les termes supérieurs qu'ils auroient produits dans l'équation différentielle, peuvent disparoître tous entiers. Pour former donc une Table de tous ces cas, je supposerai dans chacune des formules, des Tables construites, comme je l'ai indiqué ci-dessus, que les coefficiens de plusieurs rangs supérieurs sont égaux chacun à chacun dans deux ou plusieurs des fonctions qui y entrent, & cela, selon toutes les combinaisons possibles; je remarquerai celles de ces suppositions qui peuvent faire évanouir un ou plusieurs rangs supérieurs dans les différentielles, sans que les intégrales changent de forme; je les ordonnerai ensuite, comme j'ai ordonné les formules de mes Tables. Cet abaissement ne va pas à l'infini, en ne supposant même dans une intégrale que deux fonctions essentiellement différentes; en sorte que toutes les autres ne different de l'une ou de l'autre que par le dernier terme, ce qui eſt la ſuppoſition la plus ſimple, on verra naître des différentielles de tous les dégrés. J'ajouterai ces Tables, ainſi conſtruites, à celles que j'avois déja, & j'aurai de nouvelles Tables qui contiendront pour chaque dégré d'équations différentielles, tant les formes générales qui y répondent, que les formes qui réſultent des cas particuliers où d'autres formes plus élevées s'abaiſſent à ce dégré par l'évanouiſſement de leurs rangs ſupérieurs.

La ſeconde eſpece d'abaiſſement a lieu, lorſque dans un cas particulier une forme générale eſt telle, que l'équation différentielle qui y répond, puiſſe avoir un facteur d'un ou pluſieurs dégrés. Soit, par exemple, l'équation

$$\overline{xy^2 - x - 2ny} \cdot dx + x\,dy = 0$$

Son intégrale eſt en général

$$l\,\overline{2a-1} \cdot x + \overline{3b-a} \cdot x^2 + \overline{4c-b} \cdot x^3 + \&c.$$

$$- \overline{1 + x + ax^2 + bx^3 + \&c.}\; y -$$

$$l\,\overline{1 - x + ax^2 - bx^3 + y} - \overline{2a-1} \cdot x + \overline{3b-a} \cdot x^2$$

$$- \overline{4c-b} \cdot x^3 + \&c. - 2x + N = 0,$$

faiſant $a = \frac{2 \cdot \overline{1-n}}{2 \cdot \overline{1-2n}}$, $b = \frac{2 \cdot \overline{2-n}}{3 \cdot \overline{2-2n}}\,a$, $c = \frac{2 \cdot \overline{3-n}}{4 \cdot \overline{3-2n}}\,b$, & ainſi de ſuite. Cette intégrale eſt finie toutes les fois que n eſt un nombre entier poſitif; donc dans tous ces cas, cette intégrale eſt ſous cette forme intégrale de l'équation propoſée. Plus n eſt grand, plus ces formes deviennent élevées; & n pouvant être ſuppoſé auſſi grand que l'on veut, ſans que l'équation différentielle change de forme pour cela, il eſt clair que cet abaiſſement peut s'étendre à l'infini. Cet exemple m'a encore été propoſé par M. de la Grange. *Voyez, ſur l'Intégration de l'Equation* $\overline{xy^2 - x - 2ny} \cdot dx + xdy = 0$, *le troiſieme Volume des Mémoires de la Société de Turin.* On peut faire ſur ce cas les mêmes réflexions que ſur celui que je viens de traiter, on verra, en effet, que ſi je rends générale la forme de l'intégrale pour chaque valeur de n, & que je la différentie, j'aurai des différentielles de différens dégrés, mais que toutes ſe rapporteront au troiſieme dans ce cas particulier, parcequ'elles auront des facteurs plus ou moins élevés; en ſorte que l'équation ſous la forme où elle ſe préſente, n'eſt que la vraie équation différentielle, produite par chaque forme & diviſée par un facteur qu'elle ſe trouve avoir accidentellement.

Maintenant pour dreſſer une Table de tous ces cas, il faut, ſans chaque forme d'intégrale des précédentes, chercher les conditions des coefficiens, pour que la différentielle ait un facteur d'un dégré plus ou moins élevé, obſerver les cas où ces conditions ne changent pas l'intégrale de forme, & en former une Table. Il faut remarquer maintenant, 1°. qu'en conſtruiſant cette Table, on parviendra à trouver pour chaque dégré d'équations différentielles, leur forme intégrale générale & indépendante de toute condition entre les coefficiens dont j'ai parlé ci-deſſus. 2°. Que cette Table ne contiendra par elle-même qu'un nombre fini de formes pour le cas où la formule d'intégrale eſt algébrique; mais que pour les autres cas, elle en peut contenir une infinité. Ceci feroit un bien grand inconvénient, & rendroit même prefque inutile tout l'appareil de la méthode, s'il n'y avoit pas moyen d'y remédier; mais d'abord il fera aifé de former une fuite des différentes formes d'intégrales pour différens dégrés, qui, lorfque leurs coefficiens ont certaines conditions, s'abaiffent à un même dégré, & on pourra chercher par les méthodes connues le terme général de cette fuite, & la forme générale de ces conditions. D'ailleurs, 1°. le terme algébrique de chaque formule intégrale fera toujours

$$\frac{a + b\frac{x}{p} + c\frac{y}{p} + d\frac{x^2}{p^2} + e\frac{xy}{p^2} + f\frac{y^2}{p^2} \ldots\ldots}{a' + b'\frac{x}{p} + c'\frac{y}{p} + d'\frac{x^2}{p^2} + e'\frac{xy}{p^2} + f'\frac{y^2}{p^2} \ldots\ldots}$$

ces fuites étant toujours finies. 2°. La fonction tranfcendante fera la fomme de logarithmes de fuites femblables; mais fuppofant ces fuites les plus fimples qu'il eft poffible, & le terme algébrique conftant, il eft clair que plus on prendra de ces logarithmes, plus le dégré de l'équation différentielle qui répond à la forme intégrale fera élevé, quelque fuppofition que l'on faffe; donc le nombre n'en pourra être indéfini pour un dégré donné; donc le nombre des fonctions logarithmiques plus élevées, ne le fera pas non plus. Cela pofé, on aura pour chaque dégré un nombre fini de formes générales & indéfinies: on fuppofera l'équation propofée, multipliée auffi par une fuite indéfinie: on la comparera avec l'équation différentielle que produit la forme générale, & on déterminera, par cette comparaifon, tous les cas où une certaine valeur donnée aux coefficiens de la différentielle & de l'intégrale, arrête ces ſuites à un nombre fini quelconque de termes, & produit l'abaiſſement cherché.

Ce que je viens de dire s'applique également, avec les réflexions convenables, aux cas où il y a un plus grand nombre de variables, où les différences montent à un dégré plus élevé, & même aux équations différentielles d'ordres plus élevés. On ſent, combien des Tables conſtruites ſelon ces principes, ſeroient utiles aux Géometres; puiſqu'aucune équation différentielle n'y échappant, tout Problême, dont l'équation différentielle ſe trouveroit d'une des formes compriſes dans les Tables, ſeroit dès-lors réſolu. Mais ces Tables s'arrêtent néceſſairement à un point quelconque; il faut donc donner une Méthode, d'y ſuppléer dans ces cas, qui puiſſe dès-lors ſervir à ſe paſſer de ces Tables, tant qu'elles reſteront à conſtruire. Soit, pour cela $A\,dx + B\,dy = 0$ une équation différentielle ſans radicaux, il ſuit de mes principes que, ſi je la multiplie par $\dfrac{a + b\dfrac{x}{p} + c\dfrac{y}{p} + d\dfrac{x^2}{p^2} + e\dfrac{xy}{p^2} + f\dfrac{y^2}{p^2} \ldots}{a' + b'\dfrac{x}{p} + c'\dfrac{y}{p} + d'\dfrac{x^2}{p^2} + e'\dfrac{xy}{p^2} + f'\dfrac{y^2}{p^2} \ldots}$, ces ſuites s'arrêtant toujours à un nombre fini de termes, elle deviendra une différentielle exacte: on ſait qu'elle eſt pour ce cas l'équation de condition. On ſuppoſera qu'elle ait lieu, & cette ſuppoſition donnera les valeurs des coefficiens des deux ſuites, & le point où elles doivent s'arrêter. Cette opération faite, on n'aura plus à intégrer qu'une différentielle exacte. Or, ces ſortes d'équations n'étant point ſuſceptibles du ſecond abaiſſement, on ſait de quelles formes l'intégrale eſt ſuſceptible & où elle s'arrête.

Si A & B contenoient une ou pluſieurs fonctions affectées de radicaux, il faudroit que dans les deux ſuites ci-deſſus, ces fonctions fuſſent ſemblablement aux x & y. L'intégrale n'en peut point contenir d'autres, cette remarque eſt très importante pour les quadratures. *Voyez le Mémoire précédent.* Il en ſeroit de même ſi A & B contenoient des fonctions tranſcendantes; cela s'applique auſſi aux équations poſſibles à trois, quatre variables, &c. Si j'ai $A d^2 x + B d^2 y + C = 0$, en ſorte que A, B, C ſoient des fonctions algébriques de x, y, dx, dy, il eſt clair que cette équation, ſi elle eſt poſſible, deviendra une différentielle exacte, en ſe multipliant par une ſuite ſemblable à celle ci-deſſus, en regardant dx & dy comme deux nouvelles variables qui doivent y être homogènes entr'elles; mais on a les équations de condition pour ce cas, & elles ſerviront à trouver les coefficiens de cette ſuite & le point où elle finit. Cette ſuite trouvée, la Remarque II du IV Problême, donnera le moyen de traiter cette équation du ſecond ordre, comme une du premier. Quelle que ſoit la forme d'intégrale, dont ſoit ſuſceptible une différentielle du ſecond ordre, il eſt clair qu'on peut trouver en la multipliant par une fonction algébrique, & intégrant enſuite, chacune des deux différentes équations du premier ordre qui y répondent, & dont M. Fontaine a le premier connu l'exiſtence, la ſuite ſera donc ſuſceptible d'avoir deux valeurs; mais comme il peut arriver que l'intégrale d'une des deux différentielles exactes qui y répondent, ne soit pas sous une forme à y appliquer la Méthode pour avoir l'équation finie; s'il arrive qu'on choisisse celle-là, on n'aura pas travaillé en pure perte pour cela, parceque trouvant l'autre équation du premier ordre, sa comparaison avec la premiere, donnera l'intégrale finie par deux intégrations successives aux différences premieres, de même que si on avoit choisi celle à l'intégration, de laquelle on peut appliquer la Méthode ci-dessus. Ce que je viens de dire du second ordre est également vrai du troisieme, du quatrieme, &c.; en sorte que de quelqu'ordre que soit une équation différentielle, on n'aura jamais à intégrer, en effet, que des équations du premier ordre, dont l'intégrale se trouvera sans difficulté d'après ce que je viens d'établir.

On sent maintenant que pour ne laisser plus rien à desirer sur le Calcul Intégral, il ne me reste plus qu'à donner un moyen d'intégrer les différentielles exactes, affectées de radicaux, c'est-à-dire, de les rappeller aux différentielles rationnelles: soit une équation du premier ordre qui contienne un radical d'une fonction de x & de y, je l'appelle z; & alors la fonction différentielle sera une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z; ou pour dz, on aura mis sa valeur toujours rationelle, & x, y, z, dx, dy. Cela posé, je dis, 1°. que l'intégrale de cette fonction ne pourra pas être plus élevée que celle de la plus haute fonction rationnelle, qu'on peut avoir en mettant à la place de dx sa valeur en dy & dz, & à la place de dy sa valeur en dx & dz;

2°. que soit $Adz + Bdy$ la proposée, & $dz = A'dx + B'dy$. La formule

$$\frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+b'x+c'y+d'z\cdots}dz + \overline{A - \frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+b'x+c'y+d'z\cdots}A'}dx$$

$$+ \overline{B - \frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+b'x+c'y+d'z\cdots}}B'dy$$ doit être une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z. Cela servira à déterminer les coefficiens de la suite qui sera toujours finie, & on n'aura plus alors à intégrer qu'une fonction rationnelle. Cette méthode est, comme on voit, générale pour un nombre quelconque de radicaux.

Les équations aux différentielles partielles sont trop importantes pour que je puisse me refuser à joindre ici le moyen d'y appliquer la Méthode précédente. Soit donc une de ces équations du premier ordre entre z, x & y, je dis que si elle admet une solution complette, & qu'elle ne soit pas réductible à une équation ordinaire du même ordre, elle sera susceptible de la forme.

$$\frac{Adz + Bdy + Cdz}{Mdx + Ndy + Pdz} - \frac{Adx + C\frac{dz}{dx}dx}{Mdx + P\frac{dz}{dx}dx} = 0.$$

Comparant terme à terme, avec la proposée, on déterminera deux des A, B, C, en M, N, P, & on aura une équation entre M, N, P, ou réciproquement, & on déterminera le reste d'après ce que tous ces termes doivent être de la forme $\frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+bx'+cy'+dz'\cdots}$ & que $Adx + Bdy + Cdz$, $Mdx + Ndy + Cdz$ doivent être des différentielles exactes; & alors l'intégrale sera $\int \overline{Adx + Bdy + Cdz} + F\cdot\int\overline{Mdx + Ndy + Pdz} = 0$

ou bien que $Adx + Bdy + Cdz + Q \cdot \overline{Mdx + Ndy + Fdz}$ ſoit une différentielle exacte, Q pouvant contenir une tranſcendante; & alors l'intégrale de cette formule ſera l'intégrale cherchée. Ce dernier cas ne peut ſe diſtinguer à priori du premier, parcequ'il ſe peut rappeller à une équation du ſecond ordre ſans différences partielles. Le Problême ſe ſimplifieroit beaucoup, ſi on ſavoit qu'on pût faire $P = 0$; & les cas où cela eſt permis, peuvent auſſi ſe déterminer à priori.

Cette Méthode s'étend aux cas plus compliqués. J'avertirai ici en paſſant, que dans la formule $F\,\Phi\,x\,y\,z + F'\,\Phi'\,x\,y\,z$ de la page 89, & dans les formules ſemblables, que Φ peut contenir F', pourvu que F' ne ſe trouve point dans dF, & que cette ſuppoſition n'y introduiſe point de nouvelle tranſcendante.

On pourroit auſſi employer pour ces ſortes d'équations, la Méthode ſuivante, qui, ſans être générale, eſt aſſez étendue; ſoit une équation aux différences partielles en z, x & y. Je cherche à l'intégrer, en regardant x ſeul comme variable, & les $\frac{dz}{dy}$, &c. comme des fonctions de x; ſi j'y parviens en général, & qu'il me ſoit poſſible d'éliminer les $\frac{dz}{dy}$ à l'aide d'une équation entre z & y, on a à tirer de l'intégrale générale une valeur ſans dx: il ne ſera plus difficile de réſoudre la propoſée par les Méthodes ordinaires de Calcul Intégral. Tous les cas réſolus par M. de la Grange, ſont compris dans cette Méthode.

La Méthode du Problême III de la ſeconde Partie du Calcul intégral, n'eſt ni aſſez directe, ni aſſez ſimple, & manque

manque de cette analogie qui plaît tant. Voici des moyens d'y suppléer. D'abord, supposant que dans les équations de conditions que donne le Problême II, pour le cas du Problême III, on ait regardé comme nuls les termes multipliés par $V+V'+V''\ldots=0, \delta\cdot V+V'+V''\ldots=0$, &c. on substituera dans ces équations les valeurs des plus hautes différences, tirées de la proposée & de ses différences; & lorsque la proposée sera possible, toutes les équations précédentes se réduiront à une. En second lieu, les mêmes équations étant trouvées par le Problême III, il ne sera pas difficile d'en tirer une suite infinie d'équations semblables, dont la loi sera donnée, & qui contiendront également toutes les différences partielles de $A+A'+A''\ldots$ toujours au premier dégré, je les regarderai chacune comme une variable particuliere, & j'aurai les équations de condition convenable par la formule en suite, qui se trouve à la suite du troisieme Mémoire.

La complication de ces équations est une conséquence nécessaire de la supposition qui a été faite pour représenter les diffences finies, sous la forme générale d'une suite infinie; mais on peut s'en passer, & avoir des équations de condition plus simples. 1°. Soit $V=\delta B$, $dV=d\cdot\delta B$, $\frac{dV}{dx}=d\cdot\frac{\delta B}{dx}$, $\frac{dV}{dp}=d\cdot\frac{\delta B}{dp}$; mais $d\cdot\frac{\delta B}{dx}=\delta\cdot\frac{dB}{dx}$, & $d\cdot\frac{\delta B}{dp}=\delta\cdot\frac{dB}{dp}$ + un terme qu'il faut chercher, ce terme est égal à ce que devient δB, en ne regardant comme variables, que les p que la différentiation fait naître. Or, il est clair qu'appellant B' ce que devient B, en faisant

$x = x + \delta x$ ou $x + p$, $p = p + \delta p$ ou $q \cdot \cdot \cdot \cdot$ & de même pour les autres variables, ce terme ſera la différentielle de B', en ne regardant comme variable que $x + p$, ſubſtitué à la place x, ce terme ſera donc $\frac{dB'}{dx}$; donc ſi la fonction eſt du premier ordre, $d \cdot \frac{\delta B}{dp}$ ſe réduiſant à ce terme, on aura $\frac{dV}{dx} = \delta \cdot \frac{dB}{dx}$, $\frac{dV}{dp} = \frac{dB'}{dx}$; d'où $\frac{dV'}{dx} - \delta \cdot \frac{dV}{dp} = 0$ pour équation de condition; on en aura une ſemblable pour chaque variable. Il eſt aiſé de voir que cette Méthode s'étend à un ordre quelconque. 2°. On pourroit employer auſſi la Méthode d'intégrer par parties qu'emploie M. de la Grange; car intégrant ainſi $\Sigma\, dV$, les termes qui reſtent ſous le ſigne affectés de la caractériſtique d, doivent être nuls. 3°. Soit F une fonction finie, F' ſa ſeconde valeur, $F_{,}$ la valeur inférieure; la différence eſt $F' - F$: y mettant à la place de x, $x - \delta x$, & ainſi pour chaque variable, cette différence deviendra $F - F_{,}$; mais ſi on met à la place de δx, $- \delta x$, & de même pour les autres variables, on aura $F_{,} - F$; donc faiſant ſucceſſivement ces deux ſuppoſitions, lorſque la propoſée eſt une différence exacte, on doit avoir des quantités de ſignes différens. Cela s'applique aux ordres plus élevés *mutatis mutandis*. Les équations de condition pour la poſſibilité des équations ſe tirent immédiatement des deux premieres Méthodes qui conduiſent aux mêmes formules, & ſont ſuſceptibles des mêmes extentions que les Méthodes abſolument ſemblables, que j'ai données ci-devant pour les différences ordinaires. Ces ſortes d'équations de condition, peuvent auſſi ſe tirer de la derniere Méthode.

Lorſqu'on a une équation aux différences finies d'une forme finie, les tranſcendantes de l'intégrale s'y trouveront; ainſi dans ce cas, il ſera toujours facile d'intégrer les équations aux différences infiniment petites où elles ſe réduiſent.

FIN.

ERRATA.

PAGE 12, ligne 16, $y''x''$, mettez y'', x''.

Page 26, ligne 22, $dY + dQ$, mettez $dY' + dQ'$; & $dZ + dR$, mettez $dZ' + dR'$. Ligne 24, dY'', mettez dY'''. Ligne 25, dZ'', mettez dZ'''.

Page 28, ligne 6, *à l'un seulement des facteurs du dénominateur*, au lieu de f'^2, mettez f'.

Page 50, ligne 5, *à compter par le bas*, la valeur de a, lisez la valeur de n.

Page 52, *lig* 2, égale, *lis.* égal. Ligne antépénultieme $1 - px^{p-1} + p - 1 \cdot x^p$, mettez $\overline{1-p} \cdot x^{p-1} + \overline{p-1} \cdot x^p$.

Page 54, *ligne* 21, la somme, *lisez* le produit des puissances.

Page 55, *ligne* 7, ne pouvant, *lisez* ne peuvent. *Ligne* 10, dans, *lisez* par.

Page 56, *ligne* 16, *otez* en.

Page 63, *ligne* 21, avant le second alinéa, *ajoutez*, il ne sera peut-être pas hors de propos d'observer ici, que depuis l'impression de cette Conclusion, de nouvelles Réflexions m'ont conduit à trouver de nouvelles preuves directes & analitiques de mon sentiment sur la Méthode de M. d'Alembert : elles me paroissentétablir démonstrativement, que cette Méthode est suffisante pour résoudre le Problême des trois Corps par Approximation, sous quelque forme qu'il se présente.

Page 66, *ligne* 19, < 0, *mettez* > 0. *Ligne* antépénultieme, ou 0, *mettez* ou < 0.

Page 72, *ligne* antipénultieme, *après* l'infini, *ajoutez* car.

Page 73 *ligne* 18, $+ y$, *mettez* $+$ &c. y; *au bout de la même ligne*, *ajoutez* $+$ &c. *Ligne antipénultieme*, forme intégrale, *lisez* forme l'intégrale.

Page 74, *ligne* 8, on verra, *lisez* on voit. *Ligne* 18, sans chaque forme d'intégrale des précédentes, *lisez* sous chaque forme d'intégrale des Tables précédentes.

Page 77, *ligne* 5, fussent, *lisez* entrassent.

Page 79, ligne 1, Adz, mettez Adx. Ligne 22, $bx' + cy' + dz'$, mettez $b'x + c'y + d'z$.

Page 80, *ligne* 4, *otez* ne. *Ligne* 22 & 23, on a à tirer, *lisez* ou à en tirer.

FIN de l'Errata.

LE MARQUIS DE CONDORCET A Mr. D'ALEMBERT, SUR LE SYSTÊME DU MONDE ET SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

L'Univers, pour qui sauroit l'embrasser d'un seul point de vue, ne seroit, s'il est permis de le dire, qu'un fait unique & une grande vérité.

Discours prélimin. de l'Encyclop.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT.

M. DCC. LXVIII.

Avec Approbation & Permission.

LE MARQUIS DE CONDORCET A M. D'ALEMBERT, SUR LE SYSTÊME DU MONDE ET SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

De foibles Essais sur le Systême du Monde sont bien peu dignes du grand Géometre qui en a discuté avec tant de sagacité & de succès les points les plus importans. Vous avez pourtant daigné, Monsieur, me témoigner quelque curiosité sur ces nouvelles recherches. Je vais donc les soumettre à votre jugement avec la confiance que je dois à votre amitié & à vos lumieres. Je ne me déterminerai à les rendre publiques, qu'autant que vous ne les jugerez pas indignes d'un homme que vous avez bien voulu mettre au rang de vos amis. Ceux qui les liront alors, me pardonneront aisément l'obscurité qui pourra regner dans quelques endroits, s'ils font réflexion que cette Lettre n'a été originairement écrite que pour vous.

Les corps semblent être assujettis dans leurs mouvemens à deux sortes de loix essentiellement différentes : les unes sont des conséquences nécessaires de l'idée que nous avons de la matiere ; les autres paroissent l'effet de la volonté libre d'un Être intelligent qui a voulu que le Monde fût comme il est, plutôt que de toute autre maniere. L'ensemble & le résultat des loix nécessaires forment la méchanique ; & l'on appelle *Systême du Monde*, l'ensemble & le résultat des autres loix, qui ne nous pourroient être toutes connues qu'en connoissant celles de tous les phénomenes. Si ces loix secondaires s'offroient à nous dans l'étude de la nature, aussi constamment & aussi sensiblement que les loix premieres, elles feroient également partie de l'idée de la matiere : on ne pourroit pas plus, par exemple, la concevoir sans gravitation, que la concevoir sans étendue. Mais il n'en est pas ainsi : il faut, pour découvrir les loix secondaires, observer avec soin les phénomenes, & appliquer ensuite le calcul aux observations. Personne n'ignore que la matiere est étendue & résistante ; mais il étoit réservé à Newton de nous apprendre que ses parties s'attiroient réciproquement en raison inverse du quarré des distances. Peut-être que ces loix ne different entre elles que parceque, d'après le rapport actuel entre les choses & nous, il faut plus ou moins de sagacité pour les connoître ; ensorte que, si la loi de la continuité n'étoit point violée dans l'univers, on pourroit regarder ce qu'il est à chaque instant, comme le résultat de ce qui devoit arriver à la matiere arrangée une fois dans un certain ordre, & abandonnée ensuite à elle-même. Une Intelligence qui connoîtroit alors l'état de tous les phénomenes dans un instant donné, les loix auxquelles la matiere est assujettie, & leur effet au bout d'un tems quelconque, auroit une connoissance parfaite du *Systême du Monde*. Cette connoissance est au-dessus de nos forces : mais c'est le but auquel se doivent diriger tous les efforts des Géometres philosophes, & dont ils approcheront toujours de plus en plus, sans pouvoir jamais espérer d'y atteindre.

Lorsque, dans un systême de corps, leur état varie, soit à raison du tems, soit à raison de leur position, de leur figure, &c. on appelle *force* la cause de cette variation. Ce terme obscur en Métaphysique, n'ôte rien à l'évidence & à la clarté des Mathématiques ; parceque, prenant un effet quelconque pour l'unité, & la force correspondante aussi pour l'unité, l'expression de toute autre force n'est plus qu'un rapport, une simple quantité mathématique : & la force s'égale alors à l'effet qu'elle auroit produit, si rien ne s'y étoit opposé. Il paroît au premier coup d'œil, que la connoissance des forces ne nous peut rien apprendre au-delà de celle des loix des phénomenes, & que c'est à leur recherche qu'il faut uniquement s'appliquer. Mais d'abord il y a plusieurs cas où une même force s'exerce dans un grand nombre de phénomenes différens, & où une force très simple suffit pour des phénomenes qui paroissent très compliqués : ensuite l'analogie entre plusieurs phénomenes peut être si forte, qu'il est plus court de supposer la force connue & d'en déduire les loix, que de rechercher immédiatement celles-ci. C'est ainsi que Newton, après avoir trouvé que son attraction rendoit raison des mouvemens des Planetes principales, supposa que la même force agissoit sur les Satellites, & chercha à en déduire une Théorie de leurs mouvemens, qui devoit s'accorder avec les observations. Cette voie étoit beaucoup plus courte que la recherche directe de la loi qu'ils suivoient dans leur cours. On peut donc tirer de la connoissance des forces ces deux avantages également précieux, d'embrasser d'une même vue les causes semblables de phénomenes différens, mais d'un même genre, & d'être conduit à la connoissance de la nature par une route plus commode.

La loi d'une force ou d'un phénomene nous peut être donnée, soit par une formule analytique, soit par une suite d'observations. Cette derniere maniere est même la seule dont nous connoissions immédiatement les choses qui s'offrent à nos sens : la premiere n'a lieu que lorsque nous employons un résultat déja déduit des observations, ou une hypothese indiquée par l'analogie. Je traiterai successivement de l'une & de l'autre, & je ne parlerai plus que d'analyse. Il n'appartient qu'à vous, MONSIEUR, de parler de Métaphysique, d'être utile, & d'être entendu. Peut-être en ai-je déja dit assez pour vous ennuyer.

I. Je commence par examiner ce qui résulte de l'application des principes généraux du Calcul intégral aux équations qu'on a entre les forces, l'espace parcouru, le tems, & la position des corps : mais au lieu que dans l'Écrit intitulé, *Du Problême des trois Corps*, je n'ai eu pour but que de tirer de la nature des équations intégrales un moyen de ſimplifier la méthode de les intégrer, je ne chercherai ici qu'à déterminer la nature des forces qui s'exercent dans un phénomene dont les loix ſont données par des équations différentielles.

Je ſuppoſe qu'un point *C* ſe meuve dans un plan, & que ſa poſition ſoit donnée par une équation entre deux coordonnées x, y, perpendiculaires entre elles. Soit le tems t, la force ſelon $x = P$, la force ſelon $y = Q$; on aura pour ſon mouvement les deux équations $d.\frac{dx}{dt} + Pdt = 0$, $d.\frac{dy}{dt} + Qdt = 0$. La courbe que le point parcourt & ſa vîteſſe à chaque inſtant étant données, on aura P & Q en x, y, ou t, comme on voudra. Ces équations ſeront différentielles, ſi les équations du mouvement du point *C* le ſont auſſi; & comme on peut y ſuppoſer à ſon gré dx, dy, ou dt conſtans, ces équations ſeront toujours poſſibles. Ainſi, quelque courbe qu'un corps décrive & quelque ſoit ſa vîteſſe, on peut le ſuppoſer animé de deux forces perpendiculaires entre elles, & données en t, x, ou y. Si on vouloit avoir P en x & Q en y, cela ſe pourroit également, en cherchant la premiere équation différentielle dans l'hypotheſe de dx conſtant, & la ſeconde dans celle de dy conſtant, & obſervant, après l'intégration, de ſubſtituer la variable dont la différentielle eſt réellement conſtante, aux x & y qu'elle auroit introduites dans les arbitraires. On trouvera de même, 1°. que, quelque ſoit une courbe, on la pourra ſuppoſer décrite par une ſeule force donnée en une ſeule des variables, & dirigée vers un centre; & que si on suppose la même courbe décrite par deux forces perpendiculaires, on aura une équation entre les vîtesses ou entre les tems : 2°. qu'on peut toujours supposer qu'une courbe à double courbure est décrite par un point animé de trois forces perpendiculaires entre elles, données en telle variable qu'on voudra, & dont le mouvement puisse se rapporter à celui de deux points qui, dans des tems égaux, parcourroient deux projections perpendiculaires de cette courbe, pourvu que les deux plans où elles se trouvent, aient pour coordonnée commune, la variable dont la différence est supposée constante.

L'équation différentielle qui donne la force en l'une des coordonnées, est par elle-même du même ordre que celle de la trajectoire, mais elle peut être d'un ou de deux ordres moins élevée. Soit, en effet, la force supposée connue, & donnée en x, par exemple; l'intégration de l'équation différentielle en x & t, donnera deux nouvelles arbitraires : mais comme la vraie intégrale n'en peut contenir plus que l'équation qui donne la force, il y en a deux qui sont nécessairement déterminées : or cette détermination peut tomber ou ne pas tomber sur celles qui entrent dans l'expression de la force. Au reste, cette simplification n'a pas lieu, lorsque, comme dans le Problême des trois Corps, la force est une fonction algébrique de toutes les coordonnées; & dans ce cas, l'expression de la force est nécessairement du même ordre que l'équation de la trajectoire.

Si j'ai un certain nombre de courbes décrites par des points

points animés de deux forces données en t; que l'expression de ces forces contienne un nombre de fonctions transcendantes, les mêmes pour chaque courbe; que l'équation de la courbe où elles entrent nécessairement, n'en contienne pas de nouvelles; on peut en faire évanouir un nombre égal à celui des coordonnées de toutes ces courbes diminué de l'unité, éliminer aussi le tems : d'où il suit que si le nombre n'en est pas plus grand, on aura toutes les forces données par des fonctions algébriques & finies de toutes ces coordonnées. Les expressions des forces étant différentes pour chaque courbe, on peut prendre une formule générale qui les renferme toutes, & qui contienne toutes les coordonnées d'une maniere semblable. On peut déterminer les coefficiens de cette formule, de maniere qu'elle représente la force pour la courbe dont les coordonnées sont x & y; puis y mettant x' & y' pour x & y & réciproquement, les déterminer de nouveau, pour qu'elle représente l'expression de la force pour la courbe dont les coordonnées sont x' & y'; & de même pour toutes les autres : ensorte que pour chaque cas on aura les coefficiens. Prenant ensuite des fonctions de quantités constantes, & différentes pour chaque courbe, on peut y égaler ces coefficiens, & faire ensorte que, les coefficiens de ces fonctions étant invariables, elles deviennent ce que sont ceux de chaque terme dans les expressions différentes des forces, en alternant les quantités constantes, comme on a alterné les coordonnées. J'aurai donc pour les forces une expression générale qui conviendra à toutes les courbes différentes, en alternant seulement les coordonnées & les quantités conſtantes, diſtinctives de chaque courbe. Donc toutes les fois qu'un ſyſtême d'effets coexiſtans ſera tel, que dans l'expreſſion de leurs loix on trouve les mêmes tranſcendantes, on pourra les croire liés entre eux, & les regarder comme l'effet d'une même loi générale de la nature.

Si l'on n'avoit qu'une ſeule courbe & deux tranſcendantes, les forces ſe trouveroient données en x, y, t; & prenant une autre courbe quelconque, décrite, par exemple, d'un mouvement uniforme & en vertu d'une force très ſimple, on pourroit éliminer t. Si donc on connoît la loi d'un phénomene, & qu'exprimée par le tems, elle ne contienne que deux tranſcendantes, on pourra le rapporter à tel phénomene qu'on voudra, pourvu que ſa loi ne contienne pas d'autres tranſcendantes : l'expreſſion des forces dépendra de l'état des deux phénomenes à chaque inſtant, & on pourra les regarder comme l'effet d'une même cauſe.

Ces réflexions que j'aurai dans la ſuite occaſion de vous rappeller, ne ſont d'aucune utilité pour ce qui regarde le mouvement des planetes, mais peuvent guider dans les recherches qui auroient pour but de compléter le *Syſtême du Monde*, dont toutes les autres parties ſont à peine ébauchées. Cette Théorie ſeule, créée & pouſſée fort loin par Newton, a fait après lui de tels progrès, qu'on la croiroit épuiſée, ſi l'homme illuſtre à qui elle doit le plus, n'eût lui-même montré combien il reſtoit encore à faire. L'utilité de ſes découvertes n'a échappé à aucun Géometre, mais celle de ſes doutes n'a frappé que les Géometres philoſophes.

II. Lorſque, la loi d'un phénomene étant donnée par une équation analytique, on cherche les forces qui l'ont pu produire, ou réciproquement, on ſe trouve néceſſairement conduit à l'intégration d'une équation différentielle, excepté dans le cas où l'on peut tirer des équations du mouvement une expreſſion algébrique des forces. Le Calcul intégral eſt l'inſtrument le plus étendu qu'emploient les Sciences mathématiques : il y a long-tems que mes vues ſe ſont preſque uniquement dirigées vers ce grand objet, & je me flatte que vous me permettrez de m'écarter de mon ſujet principal pour vous en entretenir. Vous en avez fait, MONSIEUR, un emploi trop heureux & trop brillant, pour ne pas y prendre quelque intérêt. Rien, d'ailleurs, de ce qui appartient au Calcul intégral n'eſt étranger au *Syſtême du Monde*; & j'aurai ſoin d'indiquer preſque toujours quel uſage on pourroit faire de mes réflexions.

Je commencerai par examiner la Méthode qui conſiſte à ſéparer les variables dans les équations différentielles, à l'aide des ſubſtitutions; j'ajouterai un mot ſur quelques autres manieres d'employer les ſubſtitutions pour le même objet, & je me bornerai à rechercher comment on peut rendre les Méthodes applicables à toutes les équations différentielles.

L'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre entre deux variables x, y, ne peut être que la ſomme d'un nombre indéfini de logarithmes de fonctions algébriques élevées à des puiſſances quelconques, égalée à une fonction algébrique. Si donc on prend z égal à une fonction qui puisse contenir des exposans indéterminés, & u à une fonction algébrique, & qu'on élimine x & y, on parviendra à une équation de la forme $\frac{dz}{z} + du = 0$. Si u étoit fonction d'une seule fonction de x, y, qu'il en fût de même de z, on auroit, par des substitutions plus simples, une autre équation séparée en u & z; & si z étoit composée de deux parties qui fussent aussi dans ce cas, la même chose auroit encore lieu. Il suit de-là que la méthode de séparer les indéterminées par des substitutions est générale pour ce cas: & si on fait $\frac{dz}{z} = A dx + B dy$, cette fonction étant une différentielle exacte, & u égal à une fonction algébrique, & qu'on ait soin d'y faire entrer les radicaux qui se trouvent dans la proposée, on aura, en éliminant, une équation séparée du premier ordre, ou bien quelquefois une équation du second ordre sans z, & qui ne contienne que dz, ddz; & alors on parviendroit à une équation séparée du premier ordre, en supposant que z soit une fonction algébrique. Si l'équation est du second ordre, son intégrale est absolument semblable, en supposant seulement que les fonctions algébriques, outre x, y, contiennent une nouvelle variable r, telle que $\frac{dr}{ar + b} = A dx + B dy$. On pourra donc s'y prendre de la même maniere pour séparer les indéterminées, & en même tems rabaisser l'équation au premier ordre. La même chose aura lieu pour les ordres plus élevés, & on parviendra toujours à réduire & à séparer les équations différentielles par des substitutions toujours du premier ordre: mais cette méthode est plus embarrassante que la méthode générale que j'ai proposée, vu sur-tout qu'au-delà du premier degré, on ne connoît plus les radicaux qui doivent entrer dans les valeurs des nouvelles variables.

On pourroit, pour parer à ce dernier inconvénient, regarder dx, dy, ou du moins $\frac{dy}{dx}$, comme de nouvelles variables, & chercher à séparer, comme pour une équation du premier ordre, entre quatre ou trois variables si l'équation est du second, pour six ou quatre si elle est du troisieme, & ainsi de suite; & il faut alors intégrer après la séparation, remettre de nouveau dans cette intégrale les x, y & leurs différences, séparer de nouveau par une nouvelle substitution; & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à l'équation du premier ordre.

On peut aussi se servir en général de la substitution suivante, de quelque ordre que soit l'équation. Soit $V = 0$: je fais $dx + A dy = 0$, & j'ai A en x & y par une équation d'un ordre moins élevé d'une unité : je fais $dA + A' dx + B' dy = 0$, & j'ai A' & B' en A, x, y, par une équation moins élevée encore d'une unité : je fais $dA' + A'' dA + B'' dx + C'' dy = 0$, & $dB' + A''' dA + B''' dx + C''' dy = 0$; & j'ai A'', B'', C''; A''', B''', C''', en x, y, A, A'; x, y, A, B', par une équation encore moins élevée; & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une équation du premier ordre.

Il y a des équations différentielles, telles qu'on peut tirer de leur intégrale y en x, & réciproquement; d'autres où l'on a seulement l'un ou l'autre : le reste enfin est tel qu'on n'en peut déduire aucune expression de l'une des coordonnées en l'autre. Il est aisé de voir que les deux premieres especes sont constructibles : mais cela ne suit pas si aisément de la forme de la derniere espece ; les réflexions que je viens de faire, suffisent pour le démontrer. En effet, 1°. on peut construire toute équation séparée. Soit $X = Y$. Je fais $z = X$, $z = Y$: j'ai z égale à une fonction rationnelle algébrique de x & de fonctions transcendantes, irrationnelles simples de x ; d'où il suit que j'aurai toujours z par la construction de courbes paraboliques, la rectification du cercle, la quadrature de l'hyperbole, & la construction des surfaces $z' = x'y'$ & $z' = \frac{x'}{y'}$. J'ai de même z en y, & l'équation $Y = X$ est la projection sur le plan des x, y, de deux cylindres dont les équations soient $z = X$ & $z = Y$. 2°. L'équation non séparée qui répond à $Y = X$, & que je suppose entre x'' & y'', est telle qu'on a x en y'', x'', & y en y'', x''; équation constructible comme l'équation $z = X$ ou Y, à l'exception qu'elle a lieu entre trois variables, & qu'elle a besoin, pour être construite, de la construction du lieu d'une équation à quatre variables. Ce lieu est un espace solide qu'on suppose être la somme d'une infinité de surfaces liées entre elles par une certaine loi. Les valeurs de y & x étant ainsi trouvées, on construira l'équation entre x'' & y'', par le moyen du même lieu solide. Il suit de-là que toutes les équations entre deux variables qui ne sont pas absurdes, sont toujours constructibles géométriquement, & représentées par des courbes qu'on peut décrire d'un mouvement continu ; au lieu que celles qui ont un plus grand nombre de variables, ne se peuvent construire qu'en trouvant successivement les différentes courbes qui naissent en déterminant à volonté toutes les variables, hors deux. Au reste, les équations entre deux variables où il entre des transcendantes, & les équations différentielles qu'on a intégrées sans les rappeller à des équations séparées, se peuvent construire immédiatement par la même méthode.

La constructibilité des équations différentielles possibles se tireroit également de cette considération, qu'il n'y a aucune équation entre deux variables contenant un nombre quelconque de transcendantes, qu'on ne puisse construire en prenant un systême de points qui soient animés de forces dépendantes de toutes les coordonnées des courbes qu'ils décrivent, & données algébriquement; & faisant ensorte que la courbe décrite par celui qui a pour coordonnées x & y, soit celle de l'équation donnée, le nombre des points qu'il faut prendre, dépend de l'ordre de la proposée.

Ce que j'ai dit jusqu'ici, MONSIEUR, ne peut gueres intéresser que ceux qui aiment l'analyse pour elle-même, & dont l'esprit se plaît à contempler des vérités, quelque arides & quelque inutiles qu'elles puissent être : mais la réflexion suivante peut être de la plus grande utilité, lorsqu'il est question d'appliquer des calculs abstraits à des cas réels & déterminés. Les équations différentielles qu'on appelle absurdes, n'ont point d'intégrale; mais le problême où on en rencontre de pareilles, est-il nécessairement impossible? Je prends d'abord une équation absurde du premier ordre entre trois variables : il est clair qu'aucune surface courbe ne satisfera au problême, & qu'ainsi, dans ce sens, le problême n'a pas de solution. Mais on peut considérer cette équation comme représentant une courbe à double courbure, dont une des projections reste arbitraire : dans ce sens, le problême est possible, & a même une infinité de solutions. Il faut chercher dans ses conditions un moyen de déterminer la projection arbitraire ; & alors le lieu du problême sera un cylindre dont cette courbe à double courbure sera la base. Si donc on a cherché la figure d'un corps, & qu'on arrive à une telle équation, il ne faudra pas conclure qu'un tel corps ne puisse exister, & que les suppositions qu'on a faites soient fausses. Je prends ensuite une équation absurde d'un ordre plus élevé entre deux variables, & où aucune différentielle ne soit supposée constante. Il peut arriver, ou que l'on ait, par les conditions du problême, une autre équation en x, y & z, dont la différence soit constante ; alors on aura x en z, y en z, & x en y, ensorte que le lieu du problême sera une courbe : ou bien l'équation représentera l'intersection de deux courbes. On aura une autre équation en x, y, qu'il faudra tirer des conditions du problême ; & si l'on cherche la courbe qui termine un corps, & à chaque point de laquelle s'exerce une force, ou qui ait quelque affection semblable, il sera alors terminé par un polygone, & les forces n'affecteront que les points qui appartiennent à ses angles. On pourra faire de semblables raisonnemens pour les autres équations absurdes.

III. On peut exprimer les fonctions transcendantes qui se trouvent dans les intégrales en quantités engendrées par le cercle ; & cette maniere de les exprimer, qui dans vos mains a eu un succès si brillant, m'a conduit à quelques

réflexions

réflexions que je ne puis m'empêcher de croire curieuses & même utiles. Je ne considérerai que les intégrales où l'on a, pour une équation à deux variables, y égale à une fonction de x, parceque c'est le cas le plus simple, & que presque tout ce que j'ai à en dire, s'applique si facilement aux autres cas, qu'il seroit superflu d'en traiter avec quelque étendue.

Soit une équation différentielle entre x & y du premier ordre, de l'intégrale de laquelle on puisse tirer y en x, & que x & y représentent les ordonnées perpendiculaires d'une courbe : je dis que la fonction de x qui est égale à y, n'est proprement susceptible que de trois formes. 1°. Elle peut être algébrique. 2°. Elle peut contenir la somme d'un nombre indéfini d'angles dont le cas soit une fonction algébrique de x, chacun de ces angles étant multiplié par une constante. En effet, la différence d'une pareille fonction est algébrique; une quantité constante, ajoutée à cette somme d'angles, demeure arbitraire. Ce cas répond à celui où la transcendante est une suite de logarithmes. 3°. Elle peut contenir le cosinus d'un angle égal à une fonction algébrique, plus une fonction de la forme ci-dessus, parceque la différence de ce cosinus ne contient pas d'autre transcendante que lui-même, une constante ajoutée à l'angle dont il est le cosinus, reste arbitraire : & ce cas répond à celui d'un produit de fonctions exponentielles & interscendantes; & on peut le diviser, soit, comme j'ai fait, en fonction qui contient le cosinus d'un angle égal à une fonction algébrique, ou en fonction qui ne contient que les cosinus d'angles qui ont un rapport irrationnel avec ceux dont les cosinus sont algébriques : & l'on peut de plus diviser la premiere espece, en supposant qu'elle contienne, & qu'elle ne contienne pas de ces cosinus multiples irrationnels. Cela posé, voyons ce qu'il résulte de cette théorie pour la forme de ces équations, c'est-à-dire, pour le nombre fini ou infini de leurs racines réelles ou imaginaires.

Le cas ou l'intégrale est algébrique, est assez connu; & ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur cette matiere. Dans celui où la fonction transcendante est la somme d'un nombre d'angles indéfini, j'observe, 1°. qu'appellant X, X', X'', &c. les fonctions algébriques de x qui sont cosinus de ces angles, ils deviennent imaginaires toutes les fois que X, X', $X'' > 1$ ou < -1; leur expression est alors une imaginaire simple, de même que celle du sinus : d'où il suit que y peut encore, dans ce cas, être réel; d'abord, lorsque tous ces angles sont imaginaires à la fois, & que le coefficient de leur somme l'est en même tems; enfin, dans la premiere supposition, lorsqu'il n'y a dans y que des puissances paires de cette somme d'angles. Dans le premier cas, il faut, pour que y soit réel, que la constante arbitraire soit imaginaire simple, ou nulle : si le coefficient qui multiplie la somme des angles est une quantité constante, y devient imaginaire, lorsque cette somme est réelle; si elle est une fonction de x, alors, si cette fonction devient réelle en même tems que la somme des angles, & que la constante arbitraire soit nulle encore, on pourra avoir y réel. Dans le second cas, il faut de même que la constante arbitraire soit nulle ou imaginaire simple;

& alors, ſi la ſomme des angles devient réelle, y ne le peut être que lorſque l'arbitraire eſt nulle. 2°. Soient X, X', X'', &c. des imaginaires ſimples : comme lorſque le coſinus d'un angle eſt > 1 ou < -1, ſon ſinus eſt une imaginaire ſimple, & que l'angle dont le coſinus eſt X, eſt égal à l'angle $\frac{\pi}{4}$ moins l'angle dont le ſinus eſt X, & que l'angle dont le ſinus eſt $X\sqrt{-1}$ eſt égal à l'angle dont le coſinus eſt $\sqrt{1+X^2}$, quantité > 1 ou < 1; la ſomme des angles qui entrent dans la valeur de y, eſt préciſément ſemblable à celle qui entroit dans cette valeur, d'après l'hypotheſe précédente; à cela près, qu'il faut y ajouter une fonction conſtante $n\frac{\pi}{4}$, & qu'ainſi la conſtante arbitraire, au lieu d'être nulle ou imaginaire ſimple, doit alors, pour que y ſoit réel, être $-n\frac{\pi}{4}$, ou $-n\frac{\pi}{4}$ plus une imaginaire ſimple. 3°. Soient X, X', X'', &c. des imaginaires compoſées : la ſomme des angles eſt auſſi dans ce cas une imaginaire compoſée, qui peut convenir avec une valeur réelle de y pour un ou pluſieurs points conjugués : & ſi la conſtante arbitraire eſt imaginaire, on n'y pourra point avoir y réel, lorſque la ſomme des angles l'eſt auſſi. Au reſte, il y a pluſieurs autres cas où y peut être réel, mais ſeulement pour quelques points : cela arrive toutes les fois que la ſomme des imaginaires ſe trouve nulle; & il ſeroit ſuperflu d'entrer ici dans un plus grand détail. Comme l'angle dont le coſinus eſt X, ſe trouve être également cet angle plus ou moins un certain nombre de fois la circonférence, on aura pour chaque valeur réelle de X, X', X'', &c. une infinité de valeurs de y, qui ſeront réelles ou imaginaires, ſelon que y ſera donné en x. Si les limites entre leſquelles ces valeurs ſeront imaginaires, ſont finies, alors y pourra être néceſſairement très grand ou très petit : il en eſt de même ſi elles ne s'étendent à l'infini que d'un ſeul côté. Mais ſi le cas où elles ſont réelles eſt renfermé entre des limites finies, alors y pourra n'être ni très petit ni très grand. Comparant maintenant les fonctions tranſcendantes logarithmiques, aux mêmes fonctions exprimées en angles, je trouve, 1°. $A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= X} = \frac{-\mathrm{l}.\overline{X+\sqrt{X^2-1}}}{\sqrt{-1}}$, & $\mathrm{l}.X' = \frac{-A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= \frac{1+X'^2}{2X'}}}{\sqrt{-1}}$; 2°. $A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= X\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{4} - A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= \sqrt{1+X^2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{l}.\overline{X+\sqrt{1+X^2}}}{\sqrt{-1}}$, & $\mathrm{l}.X'\sqrt{-1} = \frac{-A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= \frac{X'^2-1}{2X'}\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} = -\frac{\pi}{4\sqrt{-1}} + \frac{A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= \frac{1+X'^2}{2X'}}}{\sqrt{-1}} = -\frac{\pi}{4\sqrt{-1}} + \mathrm{l}.X'$; 3°. $A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= X + X\sqrt{-1}} = -\frac{\mathrm{l}.\overline{X'+X''\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$ & $\mathrm{l}.\overline{X'+X''\sqrt{-1}} = \mathrm{l}.X''' + A.\,\mathrm{t}.\overline{= X''''}\sqrt{-1}$. D'où, $A.\,\mathrm{coſ}.\overline{= X + X\sqrt{-1}} = A.\,\mathrm{t}.\overline{= X''''} + \mathrm{l}.X''''\sqrt{-1}$. De-là il ſuit que les quantités logarithmiques, ou exprimées en arcs de cercles, qui contiennent des imaginaires, ſont exprimées en quantités réelles de l'une & de l'autre eſpece, multipliée par $\sqrt{-1}$.

Lorſque la tranſcendante eſt égale au coſinus d'un angle égal à une fonction algébrique de x, plus un nombre indéfini d'angles dont les coſinus ſoient algébriques, mais qui ſoient multipliées par des conſtantes irrationnelles; il eſt aiſé de déterminer, par ce que je viens de dire, les cas où cet angle eſt réel, & imaginaire ſimple ou composé. Si l'angle eſt réel, le coſinus le ſera toujours, quelque grand & quelque petit qu'il ſoit. S'il eſt une imaginaire ſimple, le coſinus ſera encore réel, & le ſinus ſera imaginaire ſimple. S'il eſt imaginaire ſimple plus ou moins $m\frac{\pi}{4}$, (m étant un nombre entier) le coſinus ſera imaginaire ſimple, & le ſinus ſera réel; ou réciproquement, ſelon que m eſt un nombre pair ou impair. S'il eſt imaginaire composé, le ſinus & le coſinus ſeront auſſi imaginaires composés. Il ſuit de-là, qu'à l'exception des points conjugués, dont il eſt inutile de développer tous les cas, ſi la conſtante arbitraire qui eſt ajoutée à l'angle, eſt priſe telle que le coſinus ſoit une imaginaire ſimple, alors y peut être réel, s'il n'entre dans ſa valeur que des puiſſances paires du coſinus, ou bien ſi ce coſinus eſt multiplié par une fonction imaginaire : & ſi cette derniere fonction eſt un coefficient conſtant, y, dans les mêmes circonſtances, deviendra une imaginaire, lorſque le coſinus ſera réel; mais il pourra reſter réel, ſi les fonctions qui multiplient le coſinus, deviennent réelles en même tems que lui. Un coſinus n'a qu'une ſeule valeur pour chacune de celles de l'angle; mais dans le cas préſent, l'angle pouvant avoir, lorſqu'il y entre des coſinus irrationnels, une infinité de valeurs, le coſinus en peut avoir auſſi une infinité pour chaque valeur de x:

& il en sera de même de y, quoiqu'il se puisse faire qu'il n'en ait qu'un nombre fini de variables. Comparons maintenant ces expressions en cosinus, avec les expressions exponentielles & interscendantes qui s'y rapportent.

1°. $e^{z} = \text{cos.}\, z\sqrt{-1} + \sqrt{\overline{\text{cos.}\, z\sqrt{-1}}^{2} - 1} = \text{cos.}\, z\sqrt{-1} + \text{sin.}\, z\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$, & $\text{cos.}\, z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$; 2°. $e^{z\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, z + \text{sin.}\, z\sqrt{-1}$,

& $\text{cos.}\, z\sqrt{-1} = \frac{e^{2z} + 1}{2e^{z}}$, $e^{\frac{\pi}{4} + z\sqrt{-1}} = -\text{sin.}\, z + \text{cos.}\, z\sqrt{-1}$, & $\text{cos.}\, \overline{\frac{\pi}{4} + z\sqrt{-1}} = -\text{sin}\, z\sqrt{-1}$,

qu'on a par une des équations ci-dessus; 3°. $e^{z + z'\sqrt{-1}}$, & $\text{cos.}\, z + z'\sqrt{-1}$, seront (à l'aide des équations trouvées ci-dessus pour les fonctions en angles & en logarithmes) données en exponentielles, & en tangentes partie réelles, partie multipliées par $\sqrt{-1}$, qui, par conséquent, ne se trouvera plus dans les fonctions transcendantes. De la comparaison de cette maniere d'exprimer les transcendantes réelles ou imaginaires, on trouvera qu'il se peut faire qu'une fonction transcendante réelle contienne des imaginaires, mais qu'il y a alors une autre fonction transcendante qui lui est égale, & qu'on peut faire ensorte que les imaginaires ne fassent que multiplier les transcendantes, & n'y entrent jamais: d'où il suit qu'il n'y a aucune intégrale qui ne se puisse construire en supposant la quadrature du cercle & celle de l'hyperbole;

enſorte que la ligne droite, la ligne circulaire & l'eſpace hyperbolique ſoient les ſeules quantités géométriques eſſentiellement différentes, toutes les lignes courbes où l'on a y égal à une fonction de x, pouvant s'y rapporter.

Ces deux dernieres remarques ne ſont, MONSIEUR, qu'une conſéquence bien ſimple de votre excellente Théorie des Imaginaires; mais elles ſont abſolument néceſſaires pour la pratique du Calcul intégral, de même que les formules qui les précedent; parceque, ſi dans ce calcul on emploie une méthode ſemblable à celle que j'ai donnée, on ne conſidere qu'une ſeule eſpece de tranſcendantes, ſoit nées dans le cercle, ſoit conſidérées indépendamment du cercle: or, dans ce cas, l'intégrale ſe peut préſenter ſous une forme illuſoire, & dont, ſans ces réductions, il eſt impoſſible de tirer aucun réſultat définitif. On ne doit pas être étonné de voir des fonctions réelles ſe préſenter ſous une forme qui contient des imaginaires, dès qu'on ſait qu'il y a des moyens de les faire diſparoître: mais ce qui peut ſurprendre, c'eſt que des quantités tranſcendantes, telles que les logarithmes ou les exponentielles qui peuvent être regardées comme purement analytiques, ne puiſſent avoir d'expreſſion réelle, que par des quantités dépendantes de la Géométrie, comme les ſinus ou les angles. On trouvera la ſolution de ce paradoxe en conſidérant la maniere dont M. Euler a, dans ſon Introduction, expliqué la génération des quantités tranſcendantes.

Si l'expreſſion de y en x eſt telle, qu'une infinité de valeurs de y réponde à une ſeule valeur de x, ce qui arrive lorſqu'il entre dans cette expreſſion une tranſcendante qui contienne des angles, ou des cosinus d'angles multipliés par un nombre irrationnel ; alors un corps qui la parcourt, peut s'y mouvoir perpétuellement, sans jamais revenir au même endroit & recommencer le même cours : & il aura une équation séculaire, si la courbe n'est pas composée d'une infinité de branches infinies, ou d'ovales conjuguées. Ce dernier cas est le seul où, y ayant une infinité de valeurs, le corps revient au même point. Lorsque l'intégrale ne contient pas de ces fonctions, le corps se meut nécessairement dans une courbe rentrante, ou dans une branche infinie ; & alors il peut parcourir, ou toute la courbe, ou une ovale conjuguée, ou une branche isolée, ou une partie de la branche unique de la courbe.

Si j'ai r en cosinus x, r étant le rayon vecteur d'une trajectoire, & x l'angle parcouru ; il est clair que, si on a une valeur réelle de r pour chaque valeur de x, & qu'on ait en même tems dans l'intégrale, l'angle x ou un cosinus irrationnel, r aura nécessairement une infinité de valeurs réelles en cosinus x ; il y aura une équation séculaire, & le corps s'éloignera du centre à l'infini, si c'est l'angle x qui entre dans l'intégrale. Dans les autres cas, r aura autant de valeurs réelles, que le corps fait de tours avant de parcourir la même courbe pour la seconde fois. Si r ne rétrograde jamais, il sera nécessairement exprimé par une fonction d'une seule valeur de x & de ses cosinus, ensorte qu'un même nombre de valeurs de y réponde à chaque valeur de cosinus x ; & si r est rétrograde, par une fonction d'un nombre impair de valeurs réelles, qui, pour certaines valeurs de x, se peuvent réduire à une ſeule : & ſi l'expreſſion générale de r contenoit d'autres valeurs, elles appartiendroient à d'autres portions de la courbe, qui ne pourroient être décrites par le même mouvement, mais qui ſeroient unies par la loi de continuité ; enſorte qu'en déterminant les coefficiens, on auroit ſucceſſivement toutes les portions iſolées de la même courbe. Quant à l'expreſſion du tems, elle ſera néceſſairement de la même forme que celle de r, parceque les mêmes réflexions s'y appliquent également.

Après avoir ainſi détaillé ce qui regarde le premier ordre, je pourrois paſſer aux ordres ſupérieurs ; mais il eſt trop facile d'y appliquer les principes que je viens d'expoſer, pour que je doive m'y arrêter. J'ajouterai ſeulement que ſi une équation différentielle eſt également une fonction algébrique de x & ſes différences, & de coſinus x & ſes différences, elle ne peut avoir pour intégrale qu'une fonction de l'ordre inférieur, pour rapport à l'un ou à l'autre ; parceque, dans l'une & l'autre hypotheſe, il faut encore une différenciation pour faire évanouir coſinus x, ou x : & comme dx eſt la ſeule fonction du premier ordre qui ſoit dans ce cas, on aura alors, ſi on regarde coſinus x comme une des variables de l'équation, une équation algébrique de l'ordre inférieur, qui contiendra $x + n$, n étant arbitraire. Cette remarque peut être de quelque utilité.

IV. Lorſqu'on ſait qu'on peut avoir y exprimé en une fonction de l'autre variable, & qu'il eſt donné par une équation différentielle, il peut être avantageux, pour trouver y, de connoître une formule indéfinie, à laquelle il ſe puiſſe égaler dans les différens cas.

Je ſuppoſe d'abord, qu'on ſache que la valeur qu'on doit avoir eſt algébrique, & que la variable qui entre dans l'expreſſion de y, eſt un coſinus : alors, ſi cette valeur eſt rationnelle, on a

$$y = \frac{a + b \text{ coſ. } x + c \text{ coſ. } 2x + d \text{ coſ. } 3x + e \text{ coſ. } 4x \ldots}{a' + b' \text{ coſ. } x + c' \text{ coſ. } 2x + d' \text{ coſ. } 3x + e' \text{ coſ. } 4x \ldots}$$

Si elle eſt du ſecond dégré, elle peut contenir une fonction de la forme $\sqrt{\frac{a + b \text{ coſ. } x + c \text{ coſ. } 2x + d \text{ coſ. } 3x \ldots}{a' + b' \text{ coſ. } x + c' \text{ coſ. } 2x + d' \text{ coſ. } 3x \ldots}}$, qu'on peut conſidérer comme deux fonctions entieres, diviſées l'une par l'autre. Maintenant, comme $\text{coſ. } \frac{1}{2} X = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ. } X}{2}}$; ſoit $\sqrt{a + b \text{ coſ. } x + c \text{ coſ. } 2x + d \text{ coſ. } 3x + e \text{ coſ. } 4x + \ldots} = \sqrt{\frac{1 + \text{coſ. } X}{2}}$, on aura $\text{coſ. } X = 2a - 1 + 2b \text{ coſ. } x + 2c \text{ coſ. } 2x + 2d \text{ coſ. } 3x + \ldots$ & $X = \overline{A \text{ coſ.} = 2a - 1 + 2b \text{ coſ. } x + 2c \text{ coſ. } 2x + 2d \text{ coſ. } 3x + \ldots}$ & par conſéquent $\sqrt{a + b \text{ coſ. } x + c \text{ coſ. } 2x + d \text{ coſ. } 3x + \ldots} = \text{coſ. } \frac{1}{2} \overline{A \text{ coſ.} = 2a - 1 + 2b \text{ coſ. } x + 2c \text{ coſ. } 2x + 2d \text{ coſ. } 3x}$ &c. Donc, lorſque la valeur de r ne contient que des radicaux du ſecond dégré, on peut y ſubſtituer les coſinus de la moitié d'angles dont les coſinus ſoient des fonctions rationnelles de coſ. x. Soit en général la formule réduite à ſa plus ſimple expreſſion, & compoſée de deux fonctions entieres ſans diviſeurs communs, & diviſées l'une par l'autre; la forme de chacune de ces fonctions ſera telle, qu'appellant n l'exposant du dégré, & faisant $n = p.q.r.s.$ &c. p, q, r, s, étant des nombres premiers, elles ne puissent contenir qu'un nombre $n - 1$ de fonctions de la forme

$$
\text{cof.}\tfrac{1}{p}A\,\text{cof.} = \left\{\begin{array}{l}
X + a\,\text{cof.}\tfrac{1}{q}A\,\text{cof.} = \left\{\begin{array}{l}
X^{\text{I}} + c\,\text{cof.}\tfrac{1}{r}A\,\text{cof.} = \left\{\begin{array}{l}
X^{\text{III}} + g\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{VII}} + \ldots \\
+ h\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{VIII}} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \\
+ d\,\text{cof.}\tfrac{1}{r}A\,\text{cof.} = \left\{\begin{array}{l}
X^{\text{IV}} + i\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{IX}} + \ldots \\
+ l\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{X}} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \\
\ldots \\
+ b\,\text{cof.}\tfrac{1}{q}A\,\text{cof.} = \left\{\begin{array}{l}
X^{\text{II}} + e\,\text{cof.}\tfrac{1}{r}A\,\text{cof.} = \left\{\begin{array}{l}
X^{\text{V}} + m\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{XI}} + \ldots \\
+ n\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{XII}} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \\
+ f\,\text{cof.}\tfrac{1}{r}A\,\text{cof.} = \left\{\begin{array}{l}
X^{\text{VI}} + o\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{XIII}} + \ldots \\
+ p\,\text{cof.}\tfrac{1}{s}A\,\text{cof.} = X^{\text{XIV}} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

& ainsi de suite, le nombre de ces fonctions ne pouvant être plus grand que $n - 1$, & les X étant des fonctions rationnelles & entieres de fonctions de l'ordre $n - 1$; & les angles deviendront imaginaires, lorsque les racines de l'équation le seront.

Je remarquerai ici, en passant, que, lorsqu'on cherche en général & par la substitution, les racines d'une équation algébrique en y & x de l'ordre n, il faut, au lieu d'un radical de la forme $\sqrt[n]{A}$, faire $n = p.q.r.s.$ &c.

$p, q, r, s,$ désignant des nombres entiers, & prendre des fonctions de la forme

$$\sqrt[p]{\begin{array}{l} A + a\sqrt[q]{\begin{array}{l} B + b\sqrt[r]{\begin{array}{l} C + c\sqrt[s]{D} \\ \quad + c^{\mathrm{I}}\sqrt[s]{D^{\mathrm{I}}} \\ \quad \ldots\ldots \end{array}} \\ \quad + b^{\mathrm{I}}\sqrt[r]{\begin{array}{l} C^{\mathrm{I}} + c^{\mathrm{II}}\sqrt[s]{D^{\mathrm{II}}} \\ \quad + c^{\mathrm{III}}\sqrt[s]{D^{\mathrm{III}}} \\ \quad \ldots\ldots \end{array}} \\ \quad \ldots\ldots \end{array}} \\ \quad + a^{\mathrm{I}}\sqrt[q]{\begin{array}{l} B^{\mathrm{I}} + b^{\mathrm{II}}\sqrt[r]{\begin{array}{l} C^{\mathrm{II}} + c^{\mathrm{IV}}\sqrt[s]{D^{\mathrm{IV}}} \\ \quad + c^{\mathrm{V}}\sqrt[s]{D^{\mathrm{V}}} \\ \quad \ldots\ldots \end{array}} \\ \quad + b^{\mathrm{III}}\sqrt[r]{\begin{array}{l} C^{\mathrm{III}} + c^{\mathrm{VI}}\sqrt[s]{D^{\mathrm{VI}}} \\ \quad + c^{\mathrm{VII}}\sqrt[s]{D^{\mathrm{VII}}} \\ \quad \ldots\ldots \end{array}} \\ \quad \ldots\ldots \end{array}} \\ \quad \ldots\ldots \end{array}}$$

La racine n'en pourra contenir qu'un nombre $n - 1$, ajoutées ensemble, & multipliées par des coefficiens en nombres de l'ordre $n - 1$; & chaque fonction de cette forme ne pourra contenir qu'un nombre égal aussi à $n - 1$ de fonctious différentes sous ses signes radicaux : enfin les A, B, B', C, C', &c. seront des fonctions rationnelles entieres & homogenes entre elles de fonctions où peuvent entrer des racines d'une équation du dégré $n-1$; & si le second terme de l'équation est appellé P, les D seront ici du dégré P^n. Si donc on connoît la forme des racines pour une équation du dégré $n-1$, & qu'on la cherche pour le dégré n, prenant $n=p.q.r.s.$ &c. & le nombre de ces facteurs m, on n'aura à essayer, pour en trouver la forme, qu'un nombre $1.2.3....m$ de formes différentes, en alternant les p, q, r, s, &c. de toutes les manieres possibles.

Lorsqu'on sait que la valeur de y est algébrique, mais qu'on ignore où elle s'arrête, on peut la trouver par la comparaison des coefficiens, en faisant y égal à une fonction rationnelle, plus une du second dégré, plus une du troisieme, &c. divisées par une autre fonction rationnelle, plus une du second dégré, plus une du troisieme, &c. & comme chacune de ces fonctions est indéfinie, & que leur nombre est aussi indéfini, on observera que le nombre des termes soit, pour une fonction du second dégré, le double de ce qu'il est pour une fonction rationnelle, le triple pour une fonction du troisieme, &c. & qu'ensuite ces suites commencent par un terme cos. mx, (m étant un nombre entier). Il arrivera par ce moyen, que, lorsque la suite sera plus élevée qu'elle ne doit l'être, les coefficiens des termes qui se trouvent appartenir aux fonctions d'un dégré trop élevé, seront tels, que cette fonction se trouve vraiment rationnelle. Ainsi on pourra, sans craindre de donner une forme fausse à l'expression de y, supposer que le nombre des termes dans chaque fonction, & le nombre des fonctions, augmentent en même tems; parceque, si cette supposition est fausse, elle se rectifie d'elle-même, & rapproche de la vraie solution, au lieu d'en éloigner.

Il seroit peut-être à desirer, du moins pour la théorie, qu'on pût rappeller ainsi à une seule forme la valeur de y en x, quelque nombre de transcendantes qu'elle puisse contenir. Je vais l'essayer sur le premier ordre; & ce que j'en dirai, s'appliquera sans aucune difficulté aux ordres plus élevés. Soit, 1°. x' un angle; je le suppose divisé en un nombre quelconque de parties m. J'ai $x' = m\,A\,\mathrm{cos}.\frac{x'}{m}$; mais lorsque m est infini, $A\,\mathrm{cos}.\frac{x'}{m} = \sqrt{2 - 2\,\mathrm{cos}.\frac{x'}{m}} = \mathrm{cos}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{cos}.\overline{=3 - 4\,\mathrm{cos}.\frac{x'}{m}}$. Donc $x' = m.\,\mathrm{cos}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{cos}.\overline{= 3 - 4\,\mathrm{cos}.\frac{x'}{m}}$. Et en géneral on aura pour un nombre indéfini d'angles ajoutés ensemble, $m.\,\mathrm{cos}.\frac{1}{2}A\,\mathrm{cos}.\overline{= 3 - 4\,\mathrm{cos}.\frac{x'}{m} + \frac{x''}{m} + \frac{x'''}{m}}$, &c. Soit, 2°. la transcendante, le cosinus d'un angle donné algébriquement en $\mathrm{cos}.\,x$, & égal à X: j'ai $X = m.\frac{X}{m}$; & à cause de $\overline{A\,\mathrm{sin}.} = \frac{X}{m} = \frac{X}{m}$, j'ai $\mathrm{cos}.\,X = \mathrm{cos}.\,m\,A\,\mathrm{sin}. = \frac{X}{m}$. Soit, 3°. la transcendante, un cosinus irrationnel, elle est cosinus $m\,A\,\mathrm{cos}. = X$; & comme en géneral elle peut être, dans ces deux derniers cas, le cosinus d'un angle égal à une fonction algébrique, plus un nombre indéfini d'angles irrationnels, elle est en général $\mathrm{cos}.\,m\,A\,\mathrm{cos}. \overline{= 1 - \frac{X^2}{2m^2}}$.

$\overline{+ n a' A \text{ coſ.} = X'} \ldots m$ étant infini, & n, &c. irrationnel; enſorte que l'expreſſion de ces tranſcendantes eſt uniforme & abſolument ſemblable à la forme d'une fonction algébrique, ſi ce n'eſt que des coëfficiens qui ſont pour celles-ci des nombres entiers & rationnels, deviennent pour celles-là infinis ou irrationnels: & pour mettre les deux fonctions ſous une même forme, il faut prendre a coſ. $b\,A$ coſ. $= a' + b'$ coſ. $\frac{m'x' + m''x'' + m'''x'''}{m}$, &c. Dans le premier cas, $a = \infty$, $b = \frac{1}{2}$, $a' = 3$, $b' = -4$, $m = \infty$, & m' un nombre quelconque qui peut être irrationnel; & dans le ſecond, $a = 1$, $b = 1$, $a' = 0$, $b' = 1$, $m = 1$, $m' = \infty$, & $x' = A \text{ coſ.} = 1 - \frac{X^2}{2\infty^2}$; & m'', m''', &c. ſont des nombres quelconques. Cette maniere de repréſenter ſous une même forme les tranſcendantes qui ont des formes différentes, eſt indépendante de leur expreſſion en coſinus. Soit, en effet, une tranſcendante logarithmique, elle eſt

$$\frac{1}{m}\,\overline{a + b X^{m}}^{\frac{m'}{m}} . X'^{\frac{m''}{m}} . X''^{\frac{m'''}{m}}, \text{ \&c.} - C,\ m = \infty,\ b = 1,$$

$a = 0$, m', m'', m''', &c. peuvent être irrationnelles, & C eſt une conſtante infinie. Si la fonction eſt exponentielle & interſcendante, j'ai $m = 1$, $m' = \infty$, m'', m''', &c. irrationnels, & $a = 1$, $b = \frac{1}{\infty}$. On voit aiſément que les fonctions tranſcendantes des ordres plus élevés ne différant de celles-ci que parcequ'elles contiennent des fonctions tranſcendantes, tandis que les premieres n'en contiennent que d'algébriques, elles ſe trouvent également rappellées par ce moyen à une ſeule forme générale.

On peut tirer de ces réflexions cette utilité, qu'une ſeule expreſſion indéfinie, repréſentant la valeur de y, quelle qu'elle puiſſe être, on peut la ſubſtituer dans l'équation différentielle, & qu'il viendra un point où cette expreſſion s'arrêtera, les expoſans & les coefficiens étant rationnels ou irrationnels, finis, infinis, ou infiniment petits, ſelon la nature de l'intégrale.

Ce que j'ai dit juſqu'ici, ſuppoſe la ſolution des équations déterminées; & comme ce problême n'a pas encore été réſolu juſqu'ici, & que ſa ſolution générale entraîne même des longueurs inévitables, il peut être bon de ſéparer ſes difficultés de celles de l'intégration; & pour cela, ſoit $y = \text{coſ.}\, z$, on aura toujours, ſi l'équation eſt algébrique,

$$
\begin{array}{llll}
a + b\,\text{coſ.}\,x & + c\,\text{coſ.}\,2x & + d\,\text{coſ.}\,3x \ldots\ldots & = 0: \\
+ b^{\mathrm{I}}\,\text{coſ.}\,x & + c^{\mathrm{I}}\,\text{coſ.}\,\overline{x+z} & + d^{\mathrm{I}}\,\text{coſ.}\,\overline{2x+z}\ldots & \\
 & + c^{\mathrm{II}}\,\text{coſ.}\,\overline{x-z} & + d^{\mathrm{II}}\,\text{coſ.}\,\overline{2x-z}\ldots & \\
 & + c^{\mathrm{III}}\,\text{coſ.}\,2z & + d^{\mathrm{III}}\,\text{coſ.}\,\overline{x+2z}\ldots & \\
 & & + d^{\mathrm{IV}}\,\text{coſ.}\,\overline{x-2z}\ldots & \\
 & & + d^{\mathrm{V}}\,\text{coſ.}\,3z\ldots\ldots &
\end{array}
$$

&

&, ſi elle eſt l'intégrale d'une équation du premier ordre,

$$\begin{array}{llll}
a+b\ \mathrm{cos}.\,x & +c\ \mathrm{cos}.\,2x & +d\ \mathrm{cos}.\,3x \ldots\ldots & \\
+b^{\mathrm{I}}\ \mathrm{cos}.\,z & +c^{\mathrm{I}}\ \mathrm{cos}.\,x+z & +d^{\mathrm{I}}\ \mathrm{cos}.\,2x+z \ldots & \\
+b^{\mathrm{II}}\ \mathrm{cos}.\,z^{\mathrm{I}} & +c^{\mathrm{II}}\ \mathrm{cos}.\,x-z & +d^{\mathrm{II}}\ \mathrm{cos}.\,2x-z \ldots & \\
 & +c^{\mathrm{III}}\ \mathrm{cos}.\,x+z^{\mathrm{I}} & +d^{\mathrm{III}}\ \mathrm{cos}.\,2x+z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & +c^{\mathrm{IV}}\ \mathrm{cos}.\,x-z^{\mathrm{I}} & +d^{\mathrm{IV}}\ \mathrm{cos}.\,2x-z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & +c^{\mathrm{V}}\ \mathrm{cos}.\,2z & +d^{\mathrm{V}}\ \mathrm{cos}.\,x+2z \ldots & \\
 & +c^{\mathrm{VI}}\ \mathrm{cos}.\,z+z^{\mathrm{I}} & -d^{\mathrm{VI}}\ \mathrm{cos}.\,x-2z \ldots & \\
 & +c^{\mathrm{VII}}\ \mathrm{cos}.\,z-z^{\mathrm{I}} & +d^{\mathrm{VII}}\ \mathrm{cos}.\,x+z+z \ldots & \\
 & +c^{\mathrm{VIII}}\ \mathrm{cos}.\,2z^{\mathrm{I}} & +d^{\mathrm{VIII}}\ \mathrm{cos}.\,x-z-z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{IX}}\ \mathrm{cos}.\,x+z-z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{X}}\ \mathrm{cos}.\,x-z+z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XI}}\ \mathrm{cos}.\,x+2z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XII}}\ \mathrm{cos}.\,x-2z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XIII}}\ \mathrm{cos}.\,3z \ldots\ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XIV}}\ \mathrm{cos}.\,2z+z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XV}}\ \mathrm{cos}.\,2z-z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XVI}}\ \mathrm{cos}.\,z+2z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XVII}}\ \mathrm{cos}.\,z-2z^{\mathrm{I}} \ldots & \\
 & & +d^{\mathrm{XVIII}}\ \mathrm{cos}.\,3z^{\mathrm{I}} \ldots\ldots & =0;
\end{array}$$

& $\mathrm{cos}.\,z' = a\ \mathrm{cos}.\,b\ A\ \mathrm{cos}. = a' + b'\ \mathrm{cos}.\,\frac{m'x' + m''x''\ldots}{m}$, $\mathrm{cos}.\,x'$, $\mathrm{cos}.\,x''$, &c. étant donnée par une équation comme celle ci-deſſus en $\mathrm{cos}.\,x$ & $\mathrm{cos}.\,z$, & qui eſt algébrique. On aura de plus pour le ſecond $\mathrm{cos}.\,z''$, qui ſera donné en $\mathrm{cos}.\,x$, & $\mathrm{cos}.\,z'$ comme $\mathrm{cos}.\,z'$ eſt ci-deſſus donné en $\mathrm{cos}.\,x$; & l'on aura de même $\mathrm{cos}.\,z'$ en $\mathrm{cos}.\,x$. Prenant une de ces équations, la ſubſtituant dans une équation différentielle du premier ou du second ordre; substituant aussi la valeur de cos. z', cos. z'', & déterminant les coefficiens, on parviendra à avoir l'intégrale de la proposée; & on mettra à la place de fonctions indéterminées qui contiennent ∞, leur expression transcendante. On peut à ces formules en sinus & cosinus, en substituer d'autres purement analytiques en x & y, & à l'aide desquelles on trouvera également, en déterminant les coefficiens, l'intégrale de la proposée, qu'on a supposée indéfinie.

Je n'ai parlé jusqu'ici que des équations d'où l'on peut tirer y égal à une fonction en x ou cos. x; mais le cas où cette séparation est impossible, n'a pas plus de difficulté : en effet, au lieu d'une fonction de x, on n'a qu'à prendre une fonction de x & de y; & au lieu de l'égaler à y, il faut l'égaler à zéro. Il faut, dans ce cas, lorsqu'on veut avoir y en x, se contenter toujours d'approximations, quand on n'emploie pas de méthodes géométriques : mais cette approximation est toujours possible; ce qui distingue ces équations de celles qui sont absurdes. En effet, quelque suite infinie qu'on prenne pour substituer dans l'équation & avoir une valeur approchée, on pourra toujours, en faisant $x = x' + y$, avoir pour chaque coefficient une valeur finie ou infinie, c'est-à-dire, algébrique ou transcendante, mais toujours possible; au lieu que, dans le cas des équations absurdes, on a pour le même coefficient plusieurs valeurs qui ne s'accordent point ensemble, & ne permettent pas même d'avoir une valeur approchée. Si, dans le premier cas, la valeur approchée est algébrique, & qu'on la substitue dans la proposée, on pourra en tirer une équation du même ordre, d'où on puisse tirer y en x; & comme l'équation algébrique peut approcher à volonté de la proposée, à plus forte raison l'expression du même ordre en approchera-t-elle : on peut donc, dans ce cas, traiter ces équations par la même méthode que les autres; & au lieu qu'on parvient à la vraie valeur des premieres, on parviendra à une valeur très approchée de celles-ci. On remarquera encore, qu'il n'y a aucun cas où l'on doive substituer une fonction qui contienne plus de transcendantes; car, ou cette forme seroit illusoire, ou elle conduiroit à une équation nécessairement plus élevée que la proposée.

V. L'intégrale d'une équation différentielle entre deux variables peut, à l'aide d'une substitution fort simple, être toujours représentée par une suite infinie, de la forme $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots$ Cette méthode est donc générale, & voici des réflexions qui pourront jetter quelque jour sur cette théorie, qui peut être utile. Toutes les fois qu'une suite infinie de la forme ci-dessus représente la racine d'une équation algébrique, on a le coefficient d'un terme quelconque égal à une fonction rationnelle & algébrique des termes précédens; ensorte que substituant successivement dans cette expression leurs valeurs données par de semblables fonctions, on aura le coefficient général égal à une équation rationnelle, mais indéfinie, de a & de n, a étant ce que devient y lorsque $x = 0$: a pouvant avoir un nombre quelconque déterminé de valeurs, chaque terme de la ſuite aura une valeur correſpondante à chaque valeur de a; & chaque ſuite qui en naîtra, repréſentera une des racines de l'équation propoſée. Soit m l'expoſant du dégré de l'équation ordonnée par rapport à y, & p le dégré le plus élevé des x dans les coefficiens des puiſſances de y; j'aurai un nombre $pm + p + m - 1$ de coefficiens indéterminé dans l'expreſſion du terme général; & le ſecond terme b de la ſuite pourra être donné par une équation d'un dégré quelconque, plus petit pourtant que celui de la propoſée.

Je ſuppoſe maintenant que la ſuite infinie repréſente la valeur de y, lorſque y eſt donné par une équation différentielle du premier ordre. Soit l'équation différentielle miſe ſous une forme rationnelle & entiere, j'y ſubſtitue, pour y, ſa valeur en ſuite infinie; & cherchant à déterminer les coefficiens, je trouve, 1°. que le premier terme a reſte arbirraire, que le ſecond b eſt donné par les différentes valeurs que peut avoir $\frac{dy}{dx}$ lorſque $x = 0$; 2°. que le terme général eſt encore une fonction rationnelle & indéfinie des termes précédens, mais d'une forme différente, & qu'on peut, par une ſubſtitution ſemblable, le rappeller à une forme rationnelle & indéfinie de a, b, & de n, dans laquelle il y aura autant de coefficiens indéterminés que dans l'équation différentielle, c'eſt-à-dire, $\overline{p+1} \cdot m \cdot \overline{m' + 1} - 1$, m étant l'expoſant du dégré où monte y, & m' de celui où montent les différences. On trouvera de même que, pour le ſecond ordre, a & b reſteront arbitraires. c ſera donné par les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$, lorſque $x = 0$: le terme général ſera fonction de a, b, c, & de n; & il aura un nombre $\overline{p+1}\,.\,m\,.\,\overline{m'+1}\,.\,\overline{m''+1}-1$ de coefficiens à déterminer : & ainſi de ſuite pour les ordres ſupérieurs.

Conſidérant maintenant la fonction d'un nombre indéfini de termes qui exprime le coefficient général, je remarque qu'en mettant ſous cette forme une fonction finie de n, on ne peut en faire évanouir une ſeule tranſcendante; enſorte qu'ici où cette fonction eſt compoſée de termes algébriques & rationnels, elle ne peut être qu'une fonction algébrique & rationnelle de a, b, c, &c. n, e^N, $N^{N'}e^{N^{N'}}$, &c. d'où il ſuit que prenant n pour une variable, a, b, c pour des conſtantes, & (n) pour l'expreſſion du coefficient, on aura entre (n), n, & leurs différences, une équation différentielle ordinaire, qui ſera d'un ordre d'autant plus ou moins élevé, que les fonctions qui entrent dans la valeur indéfinie de (n) le ſeront auſſi plus ou moins. Mais comme il peut y avoir de ces expreſſions indéfinies auxquelles ne répond aucune quantité finie, il faut chercher un moyen de diſtinguer ces cas des autres. Je remarque que ce qui les diſtingue ſpécialement, c'eſt qu'il y a, pour le cas où l'expreſſion peut être finie, une expreſſion de (n), quelle que ſoit n; au lieu que dans le ſecond cas on n'a de valeur de (n), que lorſque n eſt un nombre entier poſitif. Si donc on prend une éqnation aux différences finies en (n), n, &

leurs différences, δn étant égal à l'unité, on aura toujours, dans le premier cas, (n) donné par une de ces équations qui soit possible; & dans le second, par une équation impossible, mais cependant constructible par un nombre de points conjugués, comme je l'expliquerai ci-dessous plus en détail. On pourra donc, en cherchant la somme d'une suite indéfinie en n, chercher une équation de cette nature; & après l'avoir trouvée, on verra s'il y a une valeur finie possible de (n), en cherchant, par les moyens que j'indique ci-dessous, si l'équation aux différences finies est possible ou non.

Faisant maintenant sur une équation finie, mais qui contient des transcendantes que les différenciations peuvent faire évanouir, des opérations semblables à celles que je viens d'indiquer pour les équations différentielles de différens ordres, je trouve une expression essentiellement semblable à celle ci-dessus, & le coefficient de x^n donné en général en une fonction rationnelle & indéfinie des termes précédens. Si donc on vouloit employer cette méthode pour intégrer en général, il faudroit, après avoir réduit sous leur expression, finir, s'il est possible, les deux valeurs du terme général, tirées, l'une de l'équation différentielle, l'autre de son intégrale, les comparer terme à terme, pour déterminer les coefficiens & les exposans des fonctions finies & algébriques de l'intégrale.

On pourroit demander ici si toutes les suites $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ où le coefficient de x^n est une fonction de n, ont une somme finie. Pour cela, je suppose que je prenne la suite indéfinie $a + bx + cx^2 \ldots$

$+ (n) x^n + z$, & que je cherche z en n; j'ai $\delta z = x^{n+1} (n+1)$, lorſque $\delta n = 1$, & que x eſt ſuppoſé conſtant; je fais enſorte que par-là je parvienne à une équation aux différences finies, qui ne contienne plus de termes indéfinis, ſi elle eſt poſſible, quel que ſoit n; & que faiſant $n = \infty$, il ne s'y trouve que de ces quantités qui, ſous une forme infinie, n'expriment que des tranſcendantes finies : alors la ſuite ſera ſommable. Cette même maniere d'employer les différences finies, eſt générale pour le problême des interpolations, la ſommation indéfinie des ſuites en nombres, &c. J'aurois pu remarquer qu'une ſuite ne peut être ſommable lorſque ſon terme général contient des fonctions logarithmiques ou irrationnelles de n, parceque, quoiqu'il ſoit poſſible qu'un nombre déterminé de termes contienne des irrationnalités, cet abaiſſement de l'équation, qui donne le terme général, ne peut être indéfini : mais il n'eſt pas ſûr que toute ſuite qui, dans l'expreſſion de ſon terme général, n'a point de pareille fonction, ſoit pour cela ſommable.

Ces réflexions ſur les méthodes connues d'intégrer, qu'on peut rendre générales, me paroiſſent prouver également qu'il n'y en a point qui, pour certains cas & dans certaines vues, n'aient des avantages particuliers, mais qu'elles ne ſont en général ni plus ſimples ni plus courtes que celles que je propoſe dans l'Eclairciſſement ſur le Calcul intégral; & que toutes n'étant au fond qu'une même méthode, conſidérée ſous différens points de vue, celle-ci a encore l'avantage d'être plus directe.

VI. Je n'ai rien dit, dans mon petit Ouvrage ſur le Calcul intégral, ni de la détermination des conſtantes arbitraires dans les équations ordinaires, ni de la théorie des équations aux différences finies lorſqu'une des différences a une valeur déterminée, ni enfin de la recherche des valeurs particulieres que doivent avoir les fonctions transcendantes qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles. Je vais m'étendre un peu ſur chacun de ces trois objets.

L'équation intégrale d'une équation différentielle du premier ordre eſt $m\,\mathrm{l}.\,A + B + N = 0$, A & B étant des fonctions de x, y, & N une conſtante qui eſt arbitraire : il y aura donc autant d'équations differentes qui réſolvent également la propoſée, que N peut avoir de valeurs ; & il eſt queſtion de déterminer laquelle de ces équations convient à chaque problême particulier. On ſuppoſe ordinairement qu'une valeur b de y réponde à une valeur a de x, & on a $N = -\, m\,\mathrm{l}.\,\overline{A' + B'}$, A' & B' étant les fonctions conſtantes qui naiſſent de la ſuppoſition de $x = a$, & $y = b$; mais $-\, m\,\mathrm{l}.\,\overline{A' + B'}$ eſt ſuſceptible d'une infinité de valeurs lorſque A' n'eſt pas zéro, & par conſéquent N a auſſi une infinité de valeurs, & il y a encore une infinité d'équations qui toutes ſont l'intégrale de la propoſée. La raiſon en eſt, que l'équation $\mathrm{l}.\,A + B + N = 0$, N étant ſuppoſé déterminé, repréſente une infinité d'équations, toutes liées par la loi de continuité ; & que n'ayant point déterminé celle de ces équations où $y = b$ répond à $x = a$, N doit avoir une valeur pour chacune de ces équations où l'on voudra ſuppoſer $x = a$ & $y = b$ en même tems. Il faudra donc, pour déterminer abſolument N, déterminer pour quelle valeur de l. A, $x = a$ & $y = b$ doit avoir lieu; & alors N n'ayant qu'une valeur, on aura l'équation déterminée l. $A + B + N = 0$. Ce que je viens de dire du cas où l'équation l. $A + B + N = 0$, N étant déterminé, repréſente une infinité d'équations, a lieu également lorſque $B + N = 0$ repréſente pluſieurs équations, & il faut faire le même raiſonnement. Dans cette maniere de déterminer N, j'ai cherché une intégrale déterminée de la propoſée, dont toutes les valeurs particulieres fuſſent liées entre elles par la loi de continuité; mais cette ſuppoſition n'eſt pas la ſeule qu'on puiſſe faire, & il y a des problêmes particuliers où cette loi ne doit pas avoir lieu: on peut, par exemple, ſuppoſer que $x = a$ & $y = b$ doivent avoir lieu pour toutes les valeurs de l'équation l. $A + B + N = 0$; & alors N ne ſera point réduit à une ſeule valeur, mais en aura une différente pour chaque valeur particuliere de l'équation, & l'intégrale ſera compoſée d'une infinité de valeurs particulieres, qui ne ſeront pas liées entre elles par la loi de continuité, mais dans chacune deſquelles $y = b$ répondra à $x = a$. Comme N n'entre point dans l'expreſſion de $\frac{dy}{dx}$, cette expreſſion reſte aſſujettie à la loi de continuité, quoiqu'il y ait des ſauts dans la valeur de N: d'où il ſuit que ſi l'équation eſt repréſentée par une courbe, cette intégrale diſcontinue peut avoir la forme d'une courbe continue, c'eſt-à-dire être compoſée de parties de courbes qui ſe touchent. Je ſuppoſe que j'aie y égal à une fonction algébrique fractionnelle de cosinus x plus N, il est clair que mettant $m\Pi + x$ à la place de x, y aura la même valeur si N reste déterminé à une seule valeur. Si donc je veux, pour satisfaire à certaines conditions du problême, que y ait différentes valeurs pour x, $x + \Pi$, $x + 2\Pi$, $x + 3\Pi$, il faudra que N ait aussi plusieurs valeurs pour x, $x + \Pi$, $x + 2\Pi$, $x + 3\Pi$; mais toutes ces valeurs de y ne seront plus liées par la loi de continuité.

Je suppose que j'aie une équation algébrique entre r & cos. x, que r soit le rayon d'une courbe qui est supposé circuler autour d'un pole fixe, & que x soit l'angle parcouru par ce rayon; si je prends pour l'élément de l'aire l'espace compris entre deux rayons qui fassent entre eux l'angle dx, j'ai cet élément égal à $\frac{r^2\,dx}{2}$; & par conséquent appellant cette aire s, j'ai $s = \int \frac{r^2\,dx}{2} + N$. L'intégrale de cette différentielle peut être algébrique, ou bien contenir des angles. Si elle est algébrique, soit pris N tel que $s = 0$ lorsque $x = 0$; on aura encore $s = 0$ lorsque $x = m\Pi$, $2m\Pi$, $3m\Pi$, &c. m étant un nombre entier. Cela ne peut arriver sans que r ou dx devenant négatifs, donnent des aires négatives. Si donc on veut avoir pour toutes les valeurs de x l'expression de l'aire, en supposant toutes les aires positives, il faut que N ne soit pas déterminé, & qu'il soit égal, pour un nombre quelconque de révolutions, à deux fois la somme des aires négatives, prise positivement, plus deux fois la somme des aires négatives, prises jusqu'au point pour lequel on cherche la valeur de N. Cette expreſſion n'eſt point aſſujettie à la loi de continuité. Cependant, ſi je ſuppoſe que d'un point fixe, un point animé d'une vîteſſe proportionnelle à r^2 ſe meuve le long d'un rayon qui tourne en même tems avec une vîteſſe uniforme, & que la courbe ne ſoit qu'une ſeule branche rentrante en elle-même, le point parcourra une ſpirale dont le rayon ſera proportionnel à l'aire, & par conſéquent à l'expreſſion de l'aire dont je viens de parler, quoique cette expreſſion ne ſoit point aſſujettie à la loi de continuité, & que la ſpirale ſoit continue quant à ſa deſcription. Il eſt aiſé d'expliquer cette difficulté, en remarquant que dans ce cas cette ſpirale n'eſt pas une courbe unique, mais une ſuite de courbes différentes qui ſe touchent entre elles, & qui repréſentent les différentes aires pour leſquelles, au lieu de $s = o$, lorſque $x = o$, on a les différentes valeurs qu'on met à la place de N pour chaque révolution, & où les aires négatives ont été priſes poſitivement. Il ſuit de-là qu'il ne ſuffit pas, pour qu'une aire ne puiſſe être exprimée algébriquement, qu'elle doive être repréſentée par une ſpirale dont la deſcription ſoit continue; il faudroit encore que cette ſpirale fût démontrée n'être qu'une ſeule courbe analytique: ce qui me paroît prouver que la démonſtration de Newton ſur la quadrature indéfinie des ovales n'eſt pas ſuffiſante. Vous avez cru, MONSIEUR, que cette matiere n'étoit pas indigne de vous occuper, & j'ai eu le bonheur de me rencontrer avec vous. Cet accord me donne le courage de publier cette réflexion, malgré le nom de Newton:

ſon autorité ceſſe d'en être une, puiſqu'elle eſt combattue par la vôtre.

Si l'intégrale contient des angles, elle ſera de la forme $s = m\,A\,\text{coſ.} = X + n\,A\,\text{coſ} = X' + X'' + N$; X, X', X'' étant des fonctions algébriques de coſ. x. Cette expreſſion renferme deux cas : ou bien ces angles ſont ſous une forme réelle & ils y ont une infinité de valeurs réelles, ou bien ils repréſentent un logarithme qui n'en a qu'une. Ce dernier cas rentre dans celui que je viens de traiter. Quant à l'autre, je fais $m\,A\,\text{coſ.} = \overline{X = m\,x}$

$\overline{+ m\,A\,\text{coſ.} = X\,\text{coſ.}\,x + \sqrt{1 - X^2}}.\,\text{ſin.}\,x$; je mets $m\,A\,\text{coſ.} = X'$ ſous une forme ſemblable ; je prends N tel que x étant zéro, s le ſoit auſſi, les autres angles étant ce qu'ils ſont naturellement, ſans y ajouter aucun multiple de la circonférence ; & cette expreſſion repréſente s, ſans qu'on ſoit obligé de faire aucune ſuppoſition pour un nombre de révolutions quelconque, s'il n'y a pas d'aires négatives qu'on veuille regarder comme poſitives ; car ſi cela avoit lieu, il faudroit s'y prendre comme ci-deſſus. Lorſqu'on ſait que la valeur de l'aire doit, indépendamment de toute ſuppoſition, augmenter continuellement tandis que x augmente, comme il arrive dans le cas d'un ovale ſimple, il eſt clair qu'il n'y a que la premiere hypotheſe qui puiſſe y convenir, & qu'ainſi $s = m\,x + m'\,A\,\text{coſ.} = X''' + m''\,A\,\text{coſ.}\,X'''' \cdot\cdot + X''''' + N$, N étant une conſtante déterminée : une ovale ne peut donc être quarrée indéfiniment, & on ne peut même en avoir l'intégrale pour une révolution, parcequ'elle eſt toujours proportionnelle à Π. Si, au lieu d'être algébrique, la différentielle de s contenoit le coſinus d'un nombre indéfini d'angles qu'une ſeule différenciation fait évanouir, & que le coſinus fût la ſeule tranſcendante qui ſe trouvât dans la valeur de s, on auroit également

$$\text{coſ.}\,\overline{mx + m'A\,\text{coſ.} = X \cdots + X' + N}$$

pour tranſcendante, & l'arbitraire ſera déterminée comme ci-deſſus, en obſervant toujours, ce qui eſt très important, que A coſ. $= X'$ & les autres angles ſemblables n'ont qu'une ſeule valeur pour chaque valeur de coſ. x, mais que x en a une infinité : & il en ſeroit de même ſi ds contenoit une ſuite indéfinie d'angles, & qu'ils entraſſent ſans autres tranſcendantes dans la valeur de s. Si l'on avoit fait $s = 0$ lorſque coſ. $x = 0$, au lieu de $s = 0$ lorſque $x = 0$, on auroit eu le même réſultat que ci-deſſus, à l'aide des principes établis au commencement de cet article. Cette théorie des conſtantes, indépendamment de ſon utilité dans la ſolution des problêmes particuliers, eſt encore utile dans le cas des méthodes d'approximations, comme j'aurai ſoin de le remarquer dans la ſuite de cette Lettre.

Ce que je viens de dire s'applique également au ſecond ordre ; j'obſerverai ſeulement que ſi je ſuppoſe $y = b$ lorſque $x = a$, & $y = b'$ lorſque $x = a'$, j'aurai l. $A + B + N = 0$, & l. $A' + B' + N = 0$; d'où l. $A + B =$ l. $A' + B'$, équation qui doit me ſervir pour déterminer la ſeconde arbitraire N'. Mais ſi N' ſe trouve également dans A & dans B, il peut être impoſſible d'en avoir la valeur en a, b, a', b'. Dans ce cas, ſi l'on ſavoit qu'on eût en même tems $x = a$, $y = b$, & $\frac{dy}{dx} = c$, on auroit N & N' en faiſant ces ſubſtitutions dans les deux intégrales du premier ordre qu'a la propoſée ; c'eſt-à-dire que ſi l'intégrale repréſente une courbe, il faut, au lieu de deux points ſéparés, prendre deux points conſécutifs ; ce qui cependant ne revient pas au même, parceque les deux valeurs conſécutives ſont toujours priſes dans une même branche, au lieu que les deux autres peuvent être priſes dans différentes branches : & par conſéquent cette maniere de déterminer les conſtantes porte avec elle une nouvelle détermination qui ne ſe trouve point dans l'autre, & qu'il faut ſuppléer. Ces réflexions ſont également applicables aux autres ordres.

Si, au lieu de déterminer ainſi les conſtantes en général, on les vouloit déterminer pour un cas particulier & donné, dans lequel on connût pluſieurs valeurs de y, répondant à autant de valeurs de x, on aura différentes équations, d'où on tirera les valeurs particulieres qu'il faut prendre pour les N & les l. A, ſous la forme la plus ſimple & la plus déterminée.

Si l'on avoit enfin une équation entre trois variables, & qu'il fallût déterminer l'arbitraire ou les arbitraires, il faudroit faire en même tems $x = a$, $y = b$, $z = c$, autant de fois qu'il y a d'arbitraires, ou $x = a$, $y = b$, $z = c$, $\frac{dz}{dx} = d$, $\frac{dy}{dx} = e$, pour deux arbitraires ; ou bien, ſi l'on ſait que à $z = c$ répond une équation donnée en x & y, on déterminera les arbitraires par cette condition : mais

mais il y a cette différence, c'eſt qu'on peut faire à volonté les autres ſuppoſitions, & qu'il faut que celle-ci ſoit donnée d'ailleurs, & convienne à la propoſée.

VII. Il n'eſt pas des équations aux différences finies comme des équations aux différences infiniment petites: on ne peut, dans celles-ci, faire d'autres ſuppoſitions que celle d'une différentielle conſtante; & cette ſuppoſition ne change que peu la nature de l'équation, parceque $d\frac{dy}{dx}$, &c. entrent toujours de même dans l'équation après cette ſuppoſition comme indépendamment de la ſuppoſition, & que de plus, dx conſtant ne pouvant entrer dans les coefficiens, l'équation a toujours une forme déterminée. Dans les équations aux différences finies, au contraire, il peut arriver, 1°. que δx ſoit ſuppoſé égal à une quantité finie conſtante, & alors il faut remarquer que l'équation étant aux différences infiniment petites, ſi dx eſt ſuppoſé conſtant, il y a une équation de condition de moins; & que s'il n'y a que deux variables, l'équation eſt toujours poſſible, ce qui vient de ce que $Adx^m = dx^{m-1}$. Adx eſt toujours intégrable, ce qu'on ne peut pas dire d'une fonction rationnelle de x & de δx: & ainſi il faudroit encore une équation de condition. Soit pour cela V, que je ſuppoſe être une différentielle exacte; je trouve qu'il faut pour cela que $\frac{dV'}{dx} - \delta . \frac{dV}{d.\delta x} = 0$, en ne conſidérant dans $\frac{dV}{d.\delta x}$ comme variables, que les δx qui ſont nés de la différenciation de $B = \Sigma V$. Cette équation, qui eſt toujours identique lorſque $\delta x = dx$, eſt ſous une forme indéterminée lorſque δx eſt fini & conſtant, parcequ'on ne peut diſtinguer quelles ſont dans les V les δx qu'il faut y traiter comme variables : d'ailleurs, comme δx peut entrer dans les coefficiens comme fonction conſtante, de même qu'il entre dans la fonction comme différence de x, V ſe trouve avoir une infinité de formes différentes, qui ſe rapportent toutes à la même en faiſant $\delta x = a$. Ne pouvant donc trouver par ce moyen l'équation que je cherche, je ſuppoſe que j'aie une équation $V = 0$, & qu'il ſoit queſtion de ſavoir ſi elle eſt poſſible, je la multiplie par A, & je trouve des équations de condition à l'ordinaire, dont le nombre eſt $n - 1$, celui des variables étant n; & regardant A comme une des variables, & joignant la propoſée aux autres équations, j'ai $n + 1$ variable, & n équation : d'où il me doit reſulter, 1°. que toutes ces équations aient lieu lorſque $V = 0$, ce qui me donne des équations de condition à l'ordinaire ; 2°. que A ait une valeur poſſible, différente de $A = 0$. Or, on a A donné par une équation qui ne contient pas de x ni δx, mais ſeulement une autre variable; or on a l'équation de condition pour ce cas, & il la faut ajouter aux autres. S'il n'y avoit que deux variables, cette équation ſeroit la ſeule, & on en tireroit les mêmes concluſions quant à l'étendue de l'équation intégrale, qu'on tire des autres dans ce cas. Il peut arriver, en ſecond lieu, que δx ſoit ſuppoſé égal à une fonction quelconque de x, ou de x & des variables, ou de x, des variables & de leurs différences. On emploiera dans tous ces cas la même méthode que je viens d'indiquer, & elle donnera également les équations de condition cherchées pour qu'une équation ſoit poſſible, parcequ'on trouvera de même, qu'une des équations ordinaires ne donne aucun résultat. Si, ſuppoſant que multipliant par A, $V=0$, mis ſous une forme telle qu'elle contienne δx, $\delta\delta x$, &c. ſelon les circonſtances, & prenant les équations de condition comme s'il n'y avoit aucune hypotheſe, il arrive que celles qu'on a pour y, z, &c. ne ſoient pas les mêmes pour $V=0$ que pour une autre valeur qu'on auroit de V, en y mettant, pour δx, $\delta\delta x$, &c. leurs valeurs; alors on peut ſe contenter de ces équations, regarder la derniere comme déterminée, & y faire entrer comme variables dans les différenciations partielles, tout ce qui s'y trouve de δx, $\delta\delta x$, &c. Si je cherche maintenant ſi V eſt ou n'eſt pas une différentielle exacte, je fais $\delta z = V$, & je cherche les équations de condition : ſi l'équation $\delta z - V = 0$ admet une ſolution complette, V pourra être une différentielle exacte.

Lorſqu'une équation aux différences finies eſt telle qu'on n'y ait fait aucune hypotheſe pour la valeur de δx, on a pour intégrale celle de l'équation aux différences infiniment petites qui y répond : & cette intégrale ne peut contenir d'autres tranſcendantes que celles qui ſe trouvent dans la propoſée, ſi celle-ci eſt ſous une forme finie; car ſi elle eſt ſous une forme infinie, comme cela arrive ſouvent, elle pourra contenir les tranſcendantes qui conviennent à l'ordre dont ſe trouve être l'équation aux différences évanouiſſantes. Mais ſi l'on a fait une ſuppoſition, & que δx ſoit déterminé à avoir une certaine valeur, alors ſoit X une fonction des variables, qui devienne $X + \delta X$, & qu'y mettant, pour δx, ſa valeur, elle devienne X, $X + a$, $nX + a$, mX^n; alors, pour la premiere supposition, une fonction quelconque de X pourra être éliminée & demeurer arbitraire. Soit, par exemple, $\delta x = -2x$, j'aurai $X = x^2$. En effet, dans cette hypothese, $x^2 + 2x\delta x + \delta x^2 = x^2$; donc toute fonction de x^2 ne sera point changée par la différenciation, & par conséquent l'intégrale sera une fonction algébrique, plus cette fonction de x^2 qui reste arbitraire. Une équation d'un ordre quelconque, mais rationnelle & entiere, entre X & Z, peut être telle que la valeur de Z qu'on en tire, représente la fonction arbitraire de X. Cela posé, il faut prendre garde qu'il ne suffit pas que l'équation en Z & X demeure la même lorsque X devient $X + \delta X$, mais qu'il faut encore que ces deux expressions soient égales, & ne soient pas deux racines différentes de l'équation en Z & X, dont l'une devienne l'autre en faisant $X = X + \delta x$. Ce cas forme une classe à part. Pour les autres, soit, 1°. $X + \delta x = X + a$, on aura e^X dans l'équation finie, & e^{X+a} dans la différentielle; & à cause de $e^{X+a} = e^a . e^X$, on aura e^X dans l'un & dans l'autre : on pourra donc éliminer e^X; donc l'intégrale de l'équation différentielle du premier ordre pourra, dans ce cas, contenir e^X, & l'arbitraire sera le coefficient de e^X. Soit $\delta x = a$, il est clair que $X = x$, on aura e^x pour une transcendante qui peut entrer dans l'intégrale de la proposée. Soit, 2°. $X + \delta x = nx$; soit n un nombre entier ou fractionnaire, on aura également e^X & l. X.

& $e^{m\,\mathrm{l}.X}$. En effet, à cause de $e^{nX} = e^{\overline{X}^n}$, de $\mathrm{l}.\,nX = \mathrm{l}.\,X + \mathrm{l}.\,n$, & de $e^{m.\mathrm{l}.\,nX} = e^{m.\overline{\mathrm{l}.X + \mathrm{l}.n}} = e^{m.\mathrm{l}.n} \cdot e^{m.\mathrm{l}.X}$, on peut faire évanouir également chacune de ces fonctions à l'aide de l'équation finie & de sa différentielle. Soit n irrationnel, on ne pourra avoir que $\mathrm{l}.\,X$ & $e^{m.\mathrm{l}.X}$; & l'arbitraire sera une constante qui multipliera X dans le cas des logarithmes, ou qui lui sera ajoutée dans le cas des exponentielles. Soit $\delta x = x$, on a $X = x$; & e^x, $\mathrm{l}.\,x$, & x^m, m étant irrationnel, seront les transcendantes qui pourront entrer dans la proposée. Soit, 3°. $X + \delta X = nX + a$, on aura, si n est un nombre rationnel, e^X. Soit, 4°. $X + \delta X = mX^n$, on aura $\mathrm{l}.\,X$ & $e^{n'.\mathrm{l}.X}$ lorsque n est rationnel, mais la premiere forme seulement n étant quelconque. J'ai supposé jusqu'ici X algébrique. Soit $X = \mathrm{l}.\,X'$, j'ai pour le premier cas, $\mathrm{l}.\,\overline{X' + \delta X'} = \mathrm{l}.\,X' + a$, ou $\mathrm{l}.\,\frac{X' + \delta X'}{X'} = a$, & repassant aux nombres, $\frac{X' + \delta X'}{X'} = e^a$; d'où $X' + \delta X' = e^a X'$, ce qui revient au second cas. Soit $X = e^{X'}$, j'ai pour ce cas $e^{X' + \delta X'} = e^{X'} + a$; d'où je tire X' égal à une fonction logarithmique, & X algébrique : ce qui revient à la premiere hypothese. Soit, pour le second cas, $X = \mathrm{l}.\,X'$, j'ai $\mathrm{l}.\,X' + \delta X' = n\,\mathrm{l}.\,X'$; d'où $X' + \delta X' = X'^n$, ce qui est le quatrieme cas. Soit $X = e^{X'}$, j'ai $e^{X' + \delta X'} = n e^{X'}$; d'où je tire $X' + \delta X' = X' + a$, ce qui est le premier cas. Soit $X = X'^{n'}$, n' étant irrationnel, j'ai $\overline{X' + \delta X'}^n =$

$n X'^{n'}$, cas qui ſe rapporte au ſecond. Soit, pour le troiſieme cas, $X = \mathrm{l}. X'$, on a $\mathrm{l}. X' + \delta X' = n \mathrm{l}. X' + a$; d'où $\mathrm{l}. \frac{X' + \delta X'}{X'^n} = a$, & $X' + \delta X' = m X'^n$, ce qui eſt le quatrieme cas. Soit auſſi $X = e^{X'}$, on aura $e^{X' + dX'} = n e^{X' + a}$, cas dont j'ai déja parlé. Soit encore $X = X'^m$, on aura $\overline{X' + \delta X'}^m = n X'^m + a$, cas où il faut que m ſoit rationnel. Soit, pour le quatrieme, $X = \mathrm{l}. X'$, j'ai $\mathrm{l}. X' + \delta X' = m. \mathrm{l}. \overline{X'}^n$, ce qui rend X' une exponentielle. Soit $X = e^{X'}$, j'ai $e^{X' + \delta X'} = m e^{n X'}$, ce qui ſe rappelle au ſecond cas. Soit enfin $X = X'^{m'}$, j'ai $\overline{X' + \delta X'}^{m'} = n X'^{m m'}$, ce qui ſe rapporte au quatrieme cas.

Conſidérant maintenant le cas où l'on a une fonction variable qui reſte arbitraire, je ſuppoſe qu'elle ſoit fonction de X; je fais $X = X'^2$, je prends x en X' & les autres variables; & ſubſtituant dans l'équation, j'ai la fonction arbitraire, une fonction de X, & par conſéquent $\delta X = - 2 X'$: mais dans cette hypotheſe, $X' + \delta X' = - X'$, ce qui eſt un cas de l'hypotheſe générale de $X' + \delta X' = n X'$; donc le cas où l'on a une fonction arbitraire, ſe rapporte à cet autre, & réciproquement, parceque de $X' + \delta X' = - X'$, on tire $\delta. X'^2 = 0$.

Soit repris, 1°. $X + \delta X = X + a$, j'ai, faiſant $X' = e^{nX}$, $X' + \delta X' = e^{nX}. e^{na} = X'. e^{na}$: donc, ſi $e^{na} = 1$, j'ai $X' + \delta X' = X'$; & comme $n = 0$ n'eſt pas la ſeule valeur qui convienne à l'équation $e^{na} = 1$,

& qu'il y en a une infinité : on aura auſſi une infinité de valeurs de X', qui rempliront bien la condition propoſée. Donc, au lieu de la tranſcendante e^{mX}, l'intégrale peut contenir l'arbitraire $F. e^{nX}$. 2°. Soit $X + \delta X = mX$, je fais $X' = X^n$, & j'ai $X' + \delta X' = X^n . m^n = X' . m^n = X'$, pourvu que $m^n = 1$; ce qui peut avoir lieu d'une infinité de manieres, ſans que m ou n ſoient zéro. 3°. Soit $X + dX = mX + am$, je fais $X' = e^X$, & j'ai $X' + \delta X' = e^a . X^m$; ce qui ſe rappelle au cas ſuivant. 4°. Soit $X + \delta X = mX^n$, je fais $X' = e^{\overline{\mathrm{l}. X^p}^q}$, & j'ai $X' + \delta X' = e^{\overline{\mathrm{l}. X^p . m^p}^q . n^q}$; ce qui donne $X' + \delta X' = X'$, pourvu que m^p & $n^q = 1$; & pour le cas ci-deſſus $X' + \delta X' = X'$, lorſque $X' = e^{\overline{\mathrm{l}. e^{pX}}^q}$: mais ces deux dernieres formes ſont illuſoires, parcequ'elles ſont les racines d'une équation en X' & X qui en a une infinité ; enſorte que X' en eſt une, & $X' + \delta X'$ une autre ; & la vraie valeur de X', dans ces deux cas, eſt $e^{\overline{\mathrm{l}. X^p}^q + \overline{\mathrm{l}. X^p + a}^q + \overline{\mathrm{l}. X^p + a'}^q}$, &c. ou bien $e^{\overline{\mathrm{l}. e^{pX}}^q + \overline{\mathrm{l}. e^{pX} + a}^q + \overline{\mathrm{l}. e^{pX + a'}}^q}$, &c. & ainſi à l'infini, a, a', &c. étant les conſtantes qu'il faut ajouter à une des valeurs de $\mathrm{l}. X^p$, ou $\mathrm{l}. e^{pX}$, pour avoir toutes les autres. Ces formules ſont connues. On pourroit également, de l'équation $X' + \delta X' = X'$, tirer l'expreſſion des autres équations qui y répondent.

On voit que dans tous ces cas il n'y a qu'une valeur réelle qui rend $X' = o$, ou constant; que toutes les autres sont imaginaires; & qu'ainsi il faut, au lieu de $F. X'$, prendre une fonction arbitraire d'une fonction réelle, composée de X', & qu'on trouvera toujours, dans les cas où elle est possible, par l'article III ci-dessus.

Les équations dont je viens de parler, ne sont pas les seules qui naissent de ces différences hypothétiques : en effet, on peut avoir une équation en y, & ses différences d'ordres quelconques, prises dans différentes hypotheses de valeurs de δx, mais où x & y sont les mêmes pour toutes les hypotheses. Alors on aura les équations de condition, à l'aide des méthodes précédentes, en regardant les différens δy comme différentes variables, & à l'aide de cette remarque, que $\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dz}$ est la même chose que $\frac{dV}{dx}$, lorsque $x = y = z$, la premiere formule étant prise avant, & la seconde après la substitution. Quant à l'intégrale de ces fonctions, elle ne pourra contenir de transcendantes qu'autant qu'il y en aura qui se trouveroient les mêmes dans l'intégrale & dans ses différentielles prises dans les différentes hypotheses.

Le lieu d'une équation aux différences finies entre deux variables, & dont les différences ne sont assujetties à aucune hypothese, est, comme le lieu d'une équation différentielle, une courbe dont l'une des variables est l'abscisse, & dont l'autre est l'ordonnée. Le lieu d'une équation aux différences finies, δx étant donné par une hypothese, est un polygone inscrit dans cette courbe de l'extrémité de chaque côté, duquel on puisse mener des perpendiculaires à l'axe, qui y coupent des portions égales aux différentes valeurs successives de δx. La courbe dans laquelle on peut inscrire ce polygone, est unique après la détermination de quelques points, lorsque l'intégrale ne contient pas de fonction arbitraire; mais autrement, il y en a une infinité. Si l'on ne cherche qu'une solution particuliere du problême, & que l'on ait autant de valeurs successives de y & de x qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation, il sera toujours facile de la construire. En effet, la quantité qu'il faut ajouter à x, est, pour l'ordre n, $n\delta x + \overline{n-1}\,\delta^2 x + \overline{n-2}\,\delta^3 x \ldots + \delta^n x$; & pour y, elle est $n\delta y + \overline{n-1}\,\delta^2 y + \overline{n-2}\,\delta^3 y \ldots + \delta^n y$, où par l'hypothese on a δx, $\delta^2 x$, &c. δy, $\delta^2 y$, &c. excepté $\delta^n x$ & $\delta^n y$; & l'on a $\delta^n x$ & $\delta^n y$ par l'équation proposée & l'hypothese à laquelle les différences sont assujetties : on aura donc successivement toutes les valeurs qu'on voudra de x & de y.

Il paroît qu'on peut conclure de cette construction, que toutes ces équations sont possibles, parcequ'elle s'applique à toutes, & qu'ainsi la recherche des équations de condition est absolument superflue : mais il faut remarquer que ce polygone ainsi construit & indéfiniment continué peut être ou ne pas être inscriptible dans une courbe continue; que c'est là précisément la question; qu'il peut l'être lorsque l'équation a une intégrale, & ne peut pas l'être lorsqu'elle n'en a point. Dans le premier cas, on peut faire passer une courbe donnée analytiquement, par les différens points qu'on trouve par la construction ; & cela est impossible dans le second.

On peut, lorsque l'équation est possible & des ordres supérieurs, la traiter comme une équation du premier ordre, & regarder les différences des ordres inférieurs comme des variables qui peuvent entrer dans l'intégrale : on aura par-là un nombre d'intégrales égal à l'exposant de l'ordre de la proposée, si l'équation admet une intégrale complette, car les différentes transcendantes peuvent ici être traitées comme celles qui entrent dans les équations ordinaires. (*Voyez la Préface.*) J'ajouterai encore, que, soit n l'ordre de l'équation, il y a une équation différentielle de l'ordre n, à laquelle il faut, dans le cas de la fonction arbitraire, ajouter une équation entre trois variables, qui donne la fonction dont la différence est nulle ; ou en général deux équations entre trois variables, dont l'une pourra contenir des différences partielles, desquelles on peut, en les intégrant, tirer l'équation en x & y, qui résout l'équation proposée, & qui est aux différences finies.

VIII. Les intégrales des équations différentielles qui contiennent des différences partielles, peuvent contenir non seulement des arbitraires constantes, mais aussi des fonctions arbitraires de fonctions déterminées des variables, qui contiennent ou ne contiennent pas d'autres fonctions arbitraires semblables, selon l'ordre & la nature de la proposée. J'ai montré, dans mes Ouvrages précédens, la maniere dont les fonctions peuvent entrer dans les intégrales ; & l'on trouvera dans la Préface une maniere de les trouver, générale & abſolument ſemblable à celle que j'y donne pour les équations ordinaires. Cette fonction arbitraire, que je peux déſigner par $F.X$, X étant la fonction déterminée, eſt telle qu'on doit avoir une équation finie, algébrique ou tranſcendante, entre $F.X$ & X; mais il n'eſt pas néceſſaire qu'on ait $F.X$ égal à une fonction de X : en effet, l'arbitraire $F.X$ n'eſt telle que parce-qu'une différenciation donnant $\frac{d.F.X}{dX} \cdot dX$, & l'autre $\frac{d.F.X}{\frac{dX}{dy}dy} \cdot \frac{dX}{dy} dy$, on peut éliminer $F.X$, à cauſe de $\frac{d.F.X}{dX} = \frac{d.F.X}{\frac{dX}{dy}dy}$: or, quelle que ſoit l'équation entre $F.X$ & X, j'ai $d.F.X + A.dX = 0$, & $\frac{d.F.X}{\frac{dX}{dy}dy} \cdot \frac{dX}{dy} dy + A \frac{dX}{dy} dy = 0$; d'où je tire, en éliminant A, $\frac{d.F.X}{\frac{dX}{dy}dy} = \frac{d.F.X}{dX}$, ce qui eſt la même équation que ci-deſſus : donc je puis éliminer également F : donc, &c.

Pour déterminer maintenant les valeurs particulieres qu'il faut donner à ces fonctions arbitraires pour chaque problême particulier, je ſuppoſe que, faiſant $z = a$, on ait une équation donnée entre y & x; cette ſuppoſition ſuffit s'il n'y a qu'une arbitraire; s'il y en a deux, je ſuppoſe de plus que z étant a', on ait une autre équation donnée entre x & y; & ainſi de ſuite pour chaque fonction. Cela poſé, ſoit fait $z = a$; & ayant mis la valeur de y en x dans l'équation intégrale, j'ai $F.X$ donné en x, X ne contenant plus que x : d'où il m'eſt aiſé de tirer la valeur de $F.X$ en X. Je ſuppoſe enſuite que j'aie deux fonctions, l'une de X, l'autre de X', & que X & X' ſoient des fonctions déterminées de x, y, z; je fais $z = a$, & y égal à une fonction de x, j'ai une équation en $F.X$, $F'.X'$, & x, X & X' ne contenant que x; je fais enſuite $z = a'$; je prends la valeur correſpondante de y en x, & j'ai une équation en $F.X''$, $F'.X'''$, & x. Je différencie l'une & l'autre équation, dans la ſuppoſition que $X''' + \delta X''' = X' + \delta X'$, ce qui donne une valeur de δx : j'élimine enſuite F', qui ſe trouve être le même dans les deux équations, & il ne m'en reſte plus qu'une en $F.X^{iv}$, $F.X^{v}$, & x; je la différencie encore dans l'hypotheſe de $X^{iv} + \delta X^{iv} = X^{v} + \delta X^{v}$, qui me donne une valeur de δx : j'ai alors une équation entre $F.X^{vi}$ & x, qui eſt dans le même cas que la précédente. Si l'équation $X^{iv} + \delta X^{iv} = X^{v} + \delta X^{v}$ ne peut avoir lieu, je fais $\delta X^{iv} = X^{v} - X^{iv}$; & prenant la valeur de x en X^{iv}, & la ſubſtituant dans la propoſée, j'ai une équation aux différences finies du premier ordre entre X^{iv} & $F.X^{iv}$, δX^{iv} étant égal à une fonction de X^{iv}. Si l'équation $X''' + \delta X''' = X' + \delta X'$ étoit auſſi impoſſible, je différencierois une des équations, en ſuppoſant $X''' + \delta X''' = X'$; & cela poſé, j'éliminerai F', & j'aurai $F.X^{vi}$, $F.X^{vii}$ dans ma derniere équation, ce qui la rend de la même forme que celle dont je viens de parler.

Si, au lieu de $F.X$, $F'.X'$ ſeulement, j'ai de plus $F''.X''$, $F'''.X'''$, &c. prenant un nombre de conditions convenable, j'aurai par la même méthode une derniere équation en $F.X'^{v}$, $F.X^{v}$, $F.X^{v'}$, $F.X^{v''}$, &c. laquelle pourra être finie par différentes réductions successives, ou du premier ordre entre $F.X^{v'''}$, $F.X'^{x}$, & x, $\delta X^{v'''} = X'^{x} - X^{v'''}$: ou du second ordre entre $F.X^{v'''}$, $F.X'^{x}$, FX^{x}, & x, $\delta X^{v'''} = X'^{x} - X^{v'''}$, $\delta^2 X^{v'''} = X^{x} - 2X'^{x} + X^{v'''}$, lorsque cela est possible; & lorsque cela ne l'est pas, une du premier ordre où $\delta.F$ auroit deux valeurs différentes : ou une du troisieme ordre, &c. &c. Au reste cette réduction est également impossible, soit qu'on ne puisse trouver de valeur convenable de δx, soit qu'en la substituant dans l'équation on la rende identique. Ce que je viens de dire de la maniere d'éliminer les F qui se trouvent dans une équation donnée en nombre quelconque, peut donner également la maniere de réduire à une équation finie, ou moins élevée, les équations différentielles aux différences finies qui en sont susceptibles.

Si j'avois $F.X$ & $F'.X'$, & que X fût $F'.X' + X''$, X'' étant déterminé, & que de plus on eût une équation en $F.X + F'.X'$, & x, & une autre en $F.X + F'.X'$, & x, on auroit également, par une seule opération, une équation en $F'.X'''$, $F'.X'^{v}$, & x; & il en seroit encore de même, si j'avois $F.X$ & $F'.X'$, & que X contînt $F'.X'$ d'une maniere quelconque. Ces principes suffisent pour trouver les équations convenables aux cas les plus compliqués; & il faut en général, comme dans le calcul ordinaire, autant de conditions que de fonctions arbitraires.

J'ai supposé jusqu'ici qu'on avoit y en x, X en x,

x en X, & ainsi de suite : or, si cela n'est pas possible, il faut faire les mêmes opérations que ci-dessus ; mais alors, au lieu d'avoir une équation réduite au nombre de variables qu'elle doit contenir, elle en paroîtra contenir un plus grand nombre, qu'il faudra chercher à éliminer à l'aide de toutes ces équations ; ce qui peut conduire à des formes très compliquées & très embarrassantes, mais pour lesquelles les principes ci-dessus sont suffisans.

Si, au lieu de ces suppositions, j'avois pris une équation entre $F.\Phi$ & $F.\Phi'$, x & y, Φ & Φ' étant fonction de x & y, & que j'eusse supposé que cette équation dût avoir lieu lorsque $z = a$, sans avoir besoin d'autre équation pour déterminer $F.\Phi$; je pourrois faire $\Phi' = \Phi + z$, & j'aurois x & y en Φ & z : cela posé, je différencierois l'équation en faisant tout varier, & ensuite en ne faisant varier que Φ ; ce qui me donneroit deux équations d'où j'éliminerois $F.\Phi + z$; à cause de $\frac{d.F.\Phi + z}{d\Phi} = \frac{d.F.\Phi + z}{d\Phi + dz}$, & à cause de $\frac{d.F.\Phi}{d\Phi} \cdot d\Phi = d.F.\Phi$, je n'aurois plus que $F.\Phi$ & ses différences, & une équation du premier ordre, si z ne s'y trouvoit plus : si z s'y trouvoit encore, alors il faudroit deux équations pour déterminer $F.\Phi$; & on l'auroit immédiatement, si, en éliminant $F.\Phi + z$, on éliminoit aussi z : sinon, on aura deux équations entre $F.\Phi$, $d.F.\Phi$, Φ, $d\Phi$, z, dz ; d'où l'on éliminera z & dz, & il restera une équation différentielle du second ordre.

Si l'on avoit $z = a$, y donné en x, dz en x, y, dx, dy, & $\frac{dx}{dy}$ en x par la seconde condition, & qu'il y eût deux fonctions arbitraires à déterminer ; l'intégrale où se trouveroit une de ces fonctions, la donneroit ; & l'autre intégrale correspondante donneroit l'autre, sans qu'il fût besoin de recourir à aucune nouvelle intégration. Il en sera de même pour un plus grand nombre de fonctions arbitraires : & c'est à de pareilles conditions qu'il faut, dans les problêmes particuliers, chercher à assujettir ces fonctions ; car la détermination n'en peut être plus simple. J'observerai seulement que cette détermination n'a point toute la généralité dont elle est susceptible, ce qui est un avantage dans les cas particuliers, qui, sans cela, en exigent encore de nouvelles, sur-tout lorsque l'équation aux différences finies amene elle-même une fonction arbitraire dans son intégrale, ou même plusieurs ; car alors la détermination en peut être encore embarrassante.

Il ne me reste plus qu'à faire observer que ce que je viens de dire, ne contredit en rien la discontinuité de ces fonctions arbitraires, telle que je l'ai admise dans mon Calcul intégral : elles peuvent en effet, pour différentes valeurs de z, avoir différentes expressions. Dans ce cas, il faudra les déterminer autant de fois que ce changement peut avoir lieu ; & par conséquent, pour que la détermination soit complette, il faut que ces changemens soient eux-mêmes assujettis à l'indéfini à de certaines conditions, ou soient en nombre déterminé. Le premier cas conduit à ces équations aux différences finies impossibles, mais constructibles, dont j'ai parlé dans l'article précédent.

Toutes les équations aux différences partielles ne sont point contenues dans celles dont j'ai parlé, même dans la ſuppoſition d'un nombre de variables ſupérieur à trois. Je vais examiner ici en peu de mots quelques-unes des hypotheſes qui peuvent en faire naître de nouvelles, plutôt pour faire voir la fécondité de mes principes & la maniere de les appliquer, que pour donner une théorie ſuffiſante de ces équations.

Je ſuppoſe d'abord, que j'ai une équation entre x, y & leurs différences, x', y' & leurs différences, & qu'on puiſſe regarder x' & y' comme conſtantes lorſque x & y varient, & réciproquement : cela poſé, ſoit une fonction finie de ces quatre variables, & qu'elle ſoit différenciée d'abord dans l'hypotheſe de x', y' conſtans, & enſuite dans l'hypotheſe de x', y' variables ; il eſt clair que la fonction étant égalée à zéro, les deux différentielles le ſont auſſi ; ce qui donne, à chaque différenciation, le moyen de faire évanouir deux tranſcendantes, ou une fonction arbitraire. Les intégrales des équations différentielles contiendront donc, dans cette hypotheſe, le même nombre de fonctions arbitraires ou tranſcendantes, & des fonctions de même nature, que les équations aux différences partielles du même ordre, dans l'hypotheſe que j'ai conſidérée particuliérement, à l'exception que, dans certains cas, la fonction arbirraire ſera fonction de x', y', ou x, y, au lieu d'être fonction d'une ſeule fonction déterminée. Quant à la détermination des fonctions arbitraires, il n'y a ici rien de particulier à remarquer, ſinon qu'au lieu d'équations données en x & y pour des valeurs particulieres de z, il faut avoir ici des équations

en

en x & y pour des valeurs particulieres de x' & y', ou réciproquement.

Il peut ſe faire qu'on ſache, qu'au lieu de différencier une équation finie, d'abord en ſuppoſant x', y' conſtans, & enſuite en les ſuppoſant variables, on l'a différenciée d'abord dans une de ces hypotheſes une ou pluſieurs fois, & qu'on l'a différenciée enſuite dans la ſeconde. Ce cas rentre dans celui dont je viens de parler; mais il en differe, 1°. en ce qu'il ne contient point de fonctions arbitraires, 2°. en ce qu'on peut le réſoudre en intégrant d'abord dans une de ces hypotheſes, & enſuite dans l'autre; ce qui rend l'intégration plus ſimple. Mais il faut obſerver auſſi, que comme dans l'intégration, par rapport à x, y, x' & y' ſont ſuppoſés conſtans, de même que leurs différences, il en doit entrer une fonction dans chaque arbitraire, fonction qu'on déterminera pour l'hypotheſe d'une équation donnée en x' & y', lorſque x & y ont des valeurs déterminées; & que comme en intégrant enſuite par rapport à x', y', x & y ſont ſuppoſés conſtans, ils doivent également entrer dans les arbitraires, & qu'on déterminera la fonction de x, y, qui par conſéquent doit entrer dans chacune pour l'hypotheſe d'une équation en x & y, lorſque x' & y' ont des valeurs déterminées.

Il ne faut point juger, dans ce cas, de l'ordre de l'équation par celui des différences. Par exemple, on peut, appellant y la fonction finie, avoir $\frac{ddy}{d(x'y')\,d(xy)}$, ſans qu'il s'y trouve ni ddx ou ddy, ni ddx' ou ddy': l'équation eſt cependant du ſecond ordre. Ainſi, pour juger de l'ordre de l'équation, il faut multiplier par deux celui des différences. L'ordre de la proposée ne peut être plus grand, & sera souvent moindre. Dans les questions particulieres qui conduisent à ces équations, on pourroit, si les données du problême le permettoient, prévenir cet inconvénient en changeant l'hypothese, &, au lieu de différencier de la maniere que je viens d'expliquer, prendre des dy & ∂y, ddy, ∂dy, $\partial\partial y$, &c. & de même pour chaque variable, & les supposer ainsi varier de deux manieres indépendantes, mais sans en supposer aucune constante. Il est aisé de voir que ces deux cas rentrent l'un dans l'autre toutes les fois que le premier ne conduit pas à des fonctions arbitraires de deux variables, & non d'une seule fonction déterminée.

Si, au lieu de cette premiere supposition, j'avois pris une équation entre x & y, en supposant que x & y puissent devenir $y + dy$, $y + \partial y$, $x + dx$, $x + \partial x$, & ainsi de suite; & que je suppose que ∂x, indépendant de dx, varie cependant en même tems, ensorte que j'aie des ∂dx, ∂dy, &c. j'aurai des équations auxquelles ce que j'ai dit des équations aux différences partielles à trois variables, s'applique sans difficulté. Mais si je suppose dx constant lorsque je différencie par rapport à ∂x, alors j'ai une équation du même genre que celles dont je viens de traiter, à cela près, qu'une différenciation ne peut pas faire évanouir une fonction quelconque de x & y, parceque ces variables ne sont nulle part supposées constantes.

Je n'en dirai point ici davantage sur cette matiere, que je suis bien loin de croire épuisée, & qui embrasse un nombre d'hypotheſes peut-être indéfini ; c'eſt à vous, MONSIEUR, que les Géometres doivent cette nouvelle branche du Calcul intégral, la plus importante peut-être de toutes, puiſque tous les phénomenes où entrent des fluides ou des corps flexibles, ne peuvent être aſſujettis à une autre analyſe.

On ne connoît les phénomenes de la Nature, qu'autant que nos ſens & nos inſtrumens nous le permettent, les différences qui leur échappent ſont nulles pour nous ; ainſi, dans quelque cas que ce ſoit, dès qu'on cherche à rapporter à des obſervations la loi d'un phénomene, ou la force qui s'y exerce, l'une ou l'autre ne peuvent également être connues qu'à ces différences près : le calcul de ces loix n'eſt donc jamais qu'une approximation. Ainſi, dès qu'il eſt uniquement queſtion de la connoiſſance de la Nature, les méthodes d'approximation les plus ſimples ſont les ſeules qu'on doive employer ; &, pourvu que l'erreur ſoit telle qu'elle ſoit imperceptible à nos inſtrumens, & qu'on ne néglige dans le calcul que de pareilles quantités, il eſt clair que ces méthodes nous donneront tout ce que nous pouvons connoître. On pourroit objecter que, quoique plus ſimples, les méthodes d'approximation peuvent conduire à des réſultats plus compliqués que ceux où conduiroient les méthodes exactes, appliquées aux équations approchées qui naiſſent du problême ; mais cet inconvénient n'eſt qu'apparent, parceque le réſultat de la méthode d'approximation peut, toutes les fois que cela arrive, être rappellé à cette forme plus ſimple, en ne négligeant que les quantités qui doivent l'être. Enfin, s'il étoit queſtion d'un problême où l'équation fût d'une forme qui en admît d'abſurdes, il pourroit arriver que l'équation d'un phénomene réel fût abſurde, & qu'ainſi on ne pût rien tirer de cette équation qu'en cherchant à avoir une ſolution approchée. Les méthodes d'approximation applicables aux équations différentielles, ont le défaut d'être preſque toujours fautives à un certain point : & c'eſt la raiſon pour laquelle il paroît qu'il faudroit ne faire aucune ſuppoſition dans les équations différentielles, & après les avoir intégrées exactement, chercher alors des valeurs approchées & plus ſimples. Je me ſuis occupé juſqu'ici de ce qui en général pouvoit, par le moyen des méthodes exactes, ſervir à la ſolution des problêmes qui dépendent du Calcul intégral : je vais m'occuper maintenant des moyens généraux de ſuppléer à ces méthodes, lorſqu'elles demandent trop de travail ; & je remarquerai ſur-tout ce qui me paroîtra reſter d'incertitude dans chacun de ces moyens.

La premiere méthode d'approximation que je vais conſidérer, eſt tellement ſimple qu'elle ne demande que les connoiſſances les plus élémentaires; & la marche en eſt ſûre : mais elle ne s'applique qu'aux cas où les phénomenes peuvent être obſervés dans leurs plus petites variations ſenſibles. Je ſuppoſe d'abord que j'aie une équation en y, dy, d^2y, d^3y, &c. x & dx, dx étant conſtant : cela poſé, je cherche par l'obſervation quelles ſont les valeurs de y, y', y'', y''', &c. qui ont lieu dans les phénomenes, lorſque $x = a$, a', a'', a''', &c. ces valeurs ne différant entre elles que d'une quantité conſtante, & tellement petite, que ſon quarré ſoit imperceptible avec les inſtrumens les plus parfaits : & pour avoir les valeurs ſuivantes ſans obſervations, je fais dans l'équation $dy = y' - y$, $ddy = y'' - 2y' + y$, $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' + y$, &c. $dx = x' - x$; & j'ai une équation qui doit avoir lieu généralement entre un nombre donné de y conſécutifs, & égal à l'expoſant de l'ordre de l'équation, augmenté de l'unité. J'ai de cette équation la valeur de y''', par exemple, en x, x', y, y', y''; donc j'ai celle de y^{v} ſemblablement en y''', y'', y', x'', x'. Mais j'ai y'' par la précédente, & $x'' = 2x' - x$; donc j'ai y^{v} en y, y', y'', x & x'. J'aurai de même y^{v} & toutes les valeurs ſuivantes de y : ces valeurs ne différeront des vraies que de quantités de l'ordre $\overline{x' - x}^2$, qui, par l'hypotheſe, ſont imperceptibles. Cette méthode entraîneroit cependant trop de longueurs, s'il n'y avoit pas un moyen très ſimple de les éviter. En effet, je ſuppoſe qu'au lieu d'avoir toutes les valeurs de y de x en x', je me contente de les avoir de x en $x + n . \overline{x' - x}$; alors, ſoit l'équation du troiſieme ordre, je calcule juſqu'à ce que j'aie $y^{\prime\mathrm{v},n}$, $y^{\mathrm{v},n+1}$, $y^{\mathrm{v}\prime,n+2}$, $y^{\mathrm{v}\prime,n+3}$. Ces termes une fois trouvés, j'ai, par une ſimple ſubſtitution, $y^{\mathrm{v},2n}$ & les termes ſuivans. Je tire également de ces termes $y^{\prime\mathrm{v},3n}$. Eliminant enſuite y', y'', y''', j'ai $y^{\prime\mathrm{v},3n}$ en y, $y^{''',n}$, $y^{''',2n}$; d'où je tire facilement enſuite les $y^{''',4n}$, $y^{\prime\mathrm{v},5n}$, $y^{'''6n}$, &c. Cette méthode eſt ſuffiſante toutes les fois que x devenant x', y n'augmente que d'une petite quantité dont le quarré ſoit négligeable; ſans cela, on n'a les y qu'à une quantité de l'ordre $x' - x$ près : & si la quantité dont y augmente est fort grande, ou bien que le nombre de fois dont elle augmente d'une quantité finie soit très grand, alors on n'a point une valeur approchée de y. Pour avoir une méthode d'approximation dans ce cas, & la perfectionner dans les autres, on pourroit chercher la fonction qui, la multipliant, la rend une différentielle exacte ; puis, par la remarque qui se trouve dans mon Calcul intégral, page 21, & par la méthode de réduire en suites infinies les différences finies, qui s'y trouve aussi page 72, on auroit une valeur approchée de la différence finie de l'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur de la proposée : & comme il y a un nombre de pareilles expressions égal à l'exposant de l'ordre de la proposée, les connoissant toutes, j'en tirerai une expression sans $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, à laquelle on pourra appliquer la méthode ci-dessus, & qu'on rendra d'autant plus approchée, qu'on prendra plus de termes dans l'expression en suite de la différence finie. La méthode d'approximation que M. Fontaine donne pour les quadratures, est un cas particulier de celle-ci ; & on peut également ici trouver les valeurs approchées par une suite de la forme ordinaire, en supposant $n = \infty$.

Cette méthode d'approximation est infiniment inférieure à la plupart de celles qu'on a employées pour les problêmes de cette espece ; & je ne la mets que parcequ'on en peut tirer deux usages assez importans. Le premier consiste à déterminer les coefficiens constans qui entrent dans une équation différentielle, que l'observation ne peut faire connoître, & qu'on veut avoir indépendamment de l'intégration. Quand la nature du phénomene permettra de connoître des valeurs successives de y, où x croissant d'une quantité très petite, y ne croisse ou ne décroisse que d'une pareille quantité, on aura une valeur très approchée de ces quantités, si, leur nombre étant n, & l'exposant de l'ordre de l'équation m, on a un nombre $n + m$ d'observations. Le second se rapporte aux phénomenes pour lesquels on n'a point d'équations différentielles, mais où l'on connoît seulement la nature & l'ordre que doivent avoir ces équations, par celle des forces qui peuvent l'avoir produit : alors, comme la forme de l'équation différentielle est algébrique, on la mettra sous cette forme générale : on prendra les valeurs des dy, ddy, &c. que donnent les observations, si l'équation est entre deux variables; si elle est aux différences partielles, les valeurs de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, que donnent pareillement les observations : on déterminera les coefficiens ; & augmentant à mesure le nombre des termes, on parviendra à un point, où, quelque observation qu'on prenne, elle ne produira dans l'équation que des changemens qu'on peut négliger. L'équation différentielle, ainsi déterminée, sera l'équation de la proposée; & on pourra, lorsqu'il sera plus commode, la regarder comme une différentielle exacte de l'ordre immédiatement inférieur.

Lorsqu'on connoît à peu près la valeur générale d'une quantité donnée par une équation différentielle, & qu'on veut, de cette équation, en tirer une valeur plus approchée, il faut observer trois conditions : 1°. Que l'équation qu'on aura à intégrer, le ſoit par une méthode particuliere, plus ſimple que la méthode générale d'intégrer : 2°. Que cette valeur approchée le ſoit davantage que la valeur approchée qu'on ſuppoſe connue, & que toute autre valeur approchée ne differe de celle-ci que d'une quantité très petite par rapport à la différence entre les deux premieres valeurs : 3°. Et ceci ſuit de la ſeconde, que l'expreſſion de cette valeur approchée ſoit d'une forme qui convienne à l'équation propoſée, enſorte qu'elle contienne les tranſcendantes qui peuvent s'y trouver & changer la forme de l'équation, & qu'elle n'en contienne point d'autres. C'eſt d'après ces trois conditions que je vais haſarder ici quelques réflexions ſur les différentes méthodes d'approximation dont j'ai ſuivi la marche. Lorſque, dans une équation en x & y, on ſubſtitue à la place de y, ſa valeur approchée, & que la propoſée étant ainſi réduite à une forme intégrable, on en tire la valeur de y; il peut arriver que cette nouvelle valeur ne s'éloigne de la premiere que d'une quantité très petite que j'appelle a, mais s'éloigne auſſi de la vraie d'une valeur b, du même ordre que a, enſorte qu'on ait la valeur approchée qu'à une quantité de l'ordre a près. Dans le même cas, ſi je fais dans la propoſée y égale à ſa valeur plus b, j'ai b donné par une équation du même ordre que la propoſée, & qui peut contenir autant de tranſcendantes : donc a peut n'en pas contenir un pareil nombre de celles qui doivent ſe trouver dans la vraie intégrale, ou en contenir un pareil nombre de celles qui ne s'y doivent pas trouver. Il ſuit de-là que la méthode priſe en elle-même ne peut

conduire

conduire à aucun résultat assuré. Voici maintenant comme je conçois qu'on peut remédier à ces inconvéniens. 1°. L'équation d'où l'on veut tirer la valeur approchée, étant de l'ordre dont est l'équation différentielle algébrique qui donne la vraie valeur, il est toujours possible de faire la substitution, ensorte qu'elle contienne toutes les transcendantes qui doivent entrer dans l'équation pour la valeur qui ne differe de la vraie que d'une quantité de l'ordre a^2 : & comme la substitution se peut faire d'une infinité de façons, & qu'on peut avoir une infinité d'équations de la même forme pour la valeur approchée, il est bon de la supposer toujours de trois termes, le coefficient d'un d'eux étant toujours tout ce qu'on voudra, & un autre étant égal à l'unité : ensuite il faudra s'assurer quelles formes de y peuvent s'accorder avec les phénomenes qu'on suppose connus par les observations, & déterminer le coefficient inconnu d'après cette supposition. Cela fait, il faudra s'assurer, soit par les observations, soit par l'examen de la proposée, si la valeur approchée l'est aux termes de l'ordre a^2 près. Si cela a lieu, alors on peut employer utilement la méthode; & elle donnera des résultats de plus en plus approchés. Il me semble, MONSIEUR, que ces réflexions reviennent exactement à celles dont votre solution du Problême des trois Corps est accompagnée, & qu'elles suffisent pour établir combien il est nécessaire pour cette espece de méthode, de laisser dans une équation du second ordre & de trois termes, un coefficient indéterminé, d'examiner le résultat de la méthode *à posteriori*, de s'assurer *à priori* de ce qu'il doit être, & comment on peut, avec ces précautions, se flatter d'une réussite, incertaine sans cela. Ainsi, la bonté de votre méthode & la légitimité de vos doutes peuvent également se déduire de la nature de cette méthode, & des principes généraux du Calcul intégral. La méthode que M. de la Grange a employée pour l'orbite de Jupiter, est la même quant au fond; mais il trouve *à priori* le moyen de remédier aux inconvéniens. En effet, il cherche quelle est la petite grandeur qu'il faut ajouter à y, & qui est nz, n étant très petit, & z une nouvelle variable: puis cherchant z par approximation, il le trouve aux quantités de l'ordre n près; ce qui donne y aux quantités de l'ordre n^2 près. L'équation différentielle à laquelle ce grand Géometre rappelle l'équation donnée, est susceptible d'intégration par une méthode plus simple que la méthode générale, & convient à tous les cas où l'on cherche la valeur très petite qu'il faut ajouter à une quantité connue à peu près. Je vais vous faire part de mes recherches sur ce sujet; non que je veuille comparer mon travail à celui de notre illustre Ami: cette témérité n'est point dans mon caractere. Mais je crois que le point de vue sous lequel j'ai envisagé cet objet, n'est pas sans intérêt; & j'avoue avec plaisir, que si ce que je vais écrire a quelque mérite, je le dois à M. de la Grange, qui a tiré un parti si avantageux de cette forme générale d'équation. Je la connoissois à la vérité pour celle où l'équation, multipliée par une fonction d'une seule variable, devient intégrable; mais cette idée avoit été absolument infructueuse entre mes mains.

J'examinerai d'abord l'équation en elle-même, & la maniere de l'intégrer ; & je passerai de-là à son usage pour les méthodes d'approximation. L'équation que je considere est $y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,d^2y}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} \cdots\cdots + X = 0$; $a, b, c \cdots X$ étant des fonctions de X. Il est aisé de voir, 1°. que multipliant cette équation par $A\,dx$, elle deviendra une différentielle exacte toutes les fois que $\overline{1 - da + d^2b - d^3c, \&c.}\, A - \overline{a - 2db + 3d^2c, \&c.}\, dA + \overline{b - 3dc, \&c.}\, d^2A \cdots = 0$, & que cette derniere équation, qui est identique, étant toujours possible si l'on en tire A, la formule $Aydx + Aady + Ab\frac{d^2y}{dx} + Ac\frac{d^3y}{dx^2} \cdots + AXdx$ est une différentielle exacte ; 2°. qu'intégrant cette différentielle par partie, elle devient, en prenant $r\frac{d^ny}{dx^n}$, $q\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, $p\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$, pour les derniers termes de l'équation, $Ar\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \overline{Aq - dAr}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \overline{Ap - dAq + d^2Ar}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots + \int AXdx$; formule qui, dans le cas que je considere, est égale à zéro. L'intégrale d'une équation de l'ordre inférieur d'une unité ne peut contenir qu'une transcendante ; donc on a $a'A + b'dA = 0$, a' & b' étant algébriques ; donc $A = e^{a''}b''$, b'' étant aussi algébrique : ce qui se tire aussi immédiatement de la considération de l'équation en A. Or il peut arriver, ou que a'' soit constant ; dans ce cas, on a une valeur algébrique de A, & l'intégrale de la proposée est une fonction algébrique, plus le terme $\int A X d x$, qui peut être l. $X' + X''$, où a'' est algébrique; & alors l'intégrale est multipliée dans tous ses termes par $e^{a''}$, fonction exponentielle, $\int A X d x$ étant aussi $e^{a''}$ multiplié par une fonction algébrique, plus une constante : d'où il suit que l'intégrale est une fonction algébrique $+ \frac{c}{e^{x}}$: ou bien a'' sera n l. $a''' + b'''$, a''' & b''' étant algébriques, & n irrationnel; sans quoi le cas se rapporte au précédent : alors on a de même $e^{a''}$ à tous les termes, & l'intégrale est absolument de la même forme que ci-dessus. Supposant l'intégrale connue, elle sera de la forme de la proposée, & se pourra intégrer de même; mais, quant au terme $\int . A' \int A X d x$, s'il est le produit de deux intégrations successives sur des différentielles algébriques, l'intégration ne donne qu'un logarithme multiplié par lui-même, ou deux logarithmes sous une forme linéaire. Si A' contient une exponentielle, & que $\int A d x$ n'en contienne pas, il y en a une dans l'intégrale, qui peut contenir encore un logarithme; si $\int A d x$ en avoit contenu, il y en auroit eu deux; & si A en avoit eu une sans que A' en eût, il auroit pu y avoir encore une exponentielle & un logarithme : sur quoi il faut remarquer que toute exponentielle affectant tous les termes, peut être supposée ne diviser que l'arbitraire. Continuant les mêmes opérations, il se trouvera autant de fonctions logarithmiques ou exponentielles que d'intégrations, les exponentielles étant toujours simples, ajoutées les unes aux autres

& multipliées par des fonctions algébriques, & les logarithmiques ſimples & élevées à des puiſſances, mais tellement que la puiſſance n d'un logarithme équivaille à n logarithmes différens, & le produit de deux logarithmes à trois fonctions, &c.

L'équation en A peut avoir autant de ſolutions de la forme $a'A + b'dA = 0$, que l'expoſant de l'ordre de l'équation a d'unités; & tirant de chacune une valeur de A, multipliant la propoſée, l'intégrant, on aura un pareil nombre d'intégrales de la propoſée, d'où, en éliminant, on tirera l'intégrale finie de la propoſée; ce qui ſera plus commode que par des intégrations ſucceſſives: mais cela n'eſt poſſible que lorſqu'il n'entre point dans l'intégrale n logarithmes multipliés, parcequ'alors il ne ſe trouve pas le même nombre de A, fonction de x ſeulement, qui rendent la propoſée différentielle exacte. Dans ce cas, il faudra chercher A', A'', ce qui ſe fait ſans l'intégration de la propoſée, & dès que l'on connoît A. Il faut obſerver que cela n'a lieu que lorſque A, A', &c. ſont algébriques, & que $\int A\,dx$, $\int A' \int A\,dx$, ne le ſont pas; parceque, lorſque A', par exemple, eſt une exponentielle multipliée par une fonction algébrique, A peut avoir pour valeur cette même exponentielle multipliée par une autre fonction algébrique. Il ſuit de-là que, pour l'uſage général, il vaut mieux prendre les intégrations ſucceſſives que les diverſes intégrations du même ordre, quoique dans les cas particuliers on puiſſe, ſi l'on veut, rappeller l'une à l'autre, lorſque cela eſt poſſible. De ce que j'ai dit, il ſuit qu'en général on peut avoir $a'A + b'\frac{dA}{dx} = 0$, a' & b' étant algébriques; $a''A' + b''dA' = 0$, a'' & b'' étant auſſi algébriques; & qu'ainſi, prenant pour a' & pour b' des fonctions rationnelles, & faiſant, dans l'équation en A, $c = \frac{a'}{b'}$, & $cA + \frac{dA}{dx} = 0$, on aura une équation en c, d'où l'on tirera c, qui doit être algébrique, ſoit en le faiſant $\frac{a'}{b'}$, a' & b' étant des fonctions de la forme $a_{,} + b_{,}x + c_{,}x^2 + d_{,}x^3 \ldots + p_{,}x^n$, ſuites qui s'arrêtent au bout d'un certain nombre de termes, ſubſtituant dans l'équation en c ces ſuites indéfinies, & déterminant les coefficiens; ou bien en faiſant $c = \mathrm{a} + \mathrm{b}x + \mathrm{c}x^2$, &c. cette ſuite étant infinie & récurrente, enſorte que le terme général s'en trouve déterminé en déterminant les coefficiens en général. Si A ne ſe trouve pas dans l'équation, on fera $dA + c = 0$, on déterminera c comme on auroit déterminé A; & prenant l'intégrale de $c\,dx$, on aura A, qui pourra encore ne contenir qu'une tranſcendante exponentielle. Mais comme dans ce cas la propoſée eſt immédiatement intégrable, on voit, d'après la remarque ci deſſus, qu'il ne faut pas chercher à déterminer les autres A, mais plutôt intégrer, & chercher A'. S'il y avoit des radicaux, on les feroit entrer dans la valeur de c, & on détermineroit également les coefficiens, parceque les intégrales ne peuvent contenir d'autres radicaux que ceux qui ſont dans la propoſée. Si l'on a un nombre n de variables, & un nombre n d'équations de l'ordre m,

& que toutes ces variables & leurs différences ſoient ſous une forme linéaire ; alors, les multipliant chacune par une fonction de x, A, $A_{,}$, $A_{,,}$, &c. les ajoutant enſemble, & ſuppoſant que la ſomme eſt une différentielle exacte, on pourra avoir nm, équations ſemblables, en faiſant $d'A + b'dA = 0$; d'où l'on tirera les intégrales de toutes ces équations par une ſeule intégration : mais cela n'a lieu que lorſqu'il n'y doit pas entrer de logarithmes multipliés. Par conſéquent, ſi l'on ſait d'ailleurs qu'il ne ſe doit pas trouver d'arcs dans les intégrales, on pourra employer cette ſimplification de la méthode générale, dont la premiere idée vous eſt due, & que vous & M. de la Grange avez ſi heureuſement employée dans pluſieurs cas particuliers : il faudra ſeulement obſerver, qu'il peut ſe faire qu'outre la valeur d'un A, on peut être obligé de chercher encore la valeur de $A_{,}$, $A_{,,}$, d'après des équations du premier ordre, quoique naturellement on les ait par une équation finie.

Dans la claſſe d'équations que j'ai à conſidérer, toutes les fois que la ſolution générale eſt telle que $A = e^{X'}X_{,} + e^{X''}X_{,,} + \ldots X'X''$, &c. $X_{,}$, $X_{,,}$, &c. étant algébriques & au nombre de n, on aura pour l'ordre n, n équations $A + c\,dA = 0$; mais cela n'a pas lieu dans les autres cas : & quoique l'équation en A étant généralement réſolue, l'intégrale ait n arbitraire, ce qui ſuffiroit pour réſoudre la propoſée par une ſeule intégration ; cependant, comme A eſt ſuſceptible d'une autre forme que celle que donne la ſolution de $A + c\,dA = 0$, l'équation en A n'eſt guere plus ſimple que-la propoſée, & il faut prendre le parti de chercher l'intégrale par des intégrations ſucceſſives, en cherchant les A', A'', &c. On peut appliquer avec ſuccès la même méthode à un cas fort étendu, celui où une équation donnée devient une intégrale exacte, lorſqu'elle eſt multipliée par une fonction finie. En effet, on a dans ce cas autant d'équations que de variables, & chacune contient un terme $V\frac{dA}{dx}$, $V\frac{dA}{dy}$, $V\frac{dA}{dz}$, &c. Comme elles ſont identiques, multipliant l'une par dx, l'autre par dy, la troiſieme par dz, &c. & les ajoutant, on aura une équation identique où il y aura un terme VdA, de laquelle on cherchera A, qui doit être tel qu'on ait $a'dx + b'dy + c'dz \cdot A + dA = 0$, cette équation étant poſſible. Sur quoi je remarquerai, 1°. que ſuppoſant que l'intégrale immédiatement inférieure devienne une différentielle exacte étant multipliée par une fonction finie, on trouvera toutes ces fonctions, comme ci-deſſus, ſans l'intégration de la propoſée: 2°. que dans ce cas aucune différentielle n'eſt ſuppoſée conſtante; connoiſſant A, A', &c. on n'aura plus beſoin d'intégration que pour l'équation du premier ordre: 3°. qu'on aura un moyen de connoître *à priori* quand cela aura lieu, parcequ'il faut pour cela que les équations en A, A', &c. aient une intégrale finie. Quant aux intégrales de la propoſée, on peut y appliquer, *mutatis mutandis*, les réflexions que je viens de faire ſur la forme d'intégrale que je traite. Ce que j'ai dit ici paroîtroit conduire à trouver la valeur de A en général, lorſque l'équation l'équation eſt du premier ordre & du premier dégré; car alors A eſt fini : mais on a pour deux variables, par exemple,

$$\left.\begin{matrix}\overline{N - dP}\,.p\\ +\overline{N' - dP'}\,.p'\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}A - Pp\\ - P'p'\\ + V\end{matrix}\right\} dA = 0.$$ Mais en général, dans ce cas, $Pp + P'p' = V$, d'où ſeulement $A = 0$; ce qui ne peut ſervir à faire connoître la vraie valeur de A. On ne peut trouver A par une équation ordinaire, que dans la ſuppoſition de A fonction finie, parcequ'autrement, B étant une intégrale de la propoſée, & A le facteur, $AF.B$ en eſt une autre, A' étant auſſi un autre facteur. $A'F.B'$ en eſt encore un, de même que $AF.B + A'F'.B'$, & $\overline{A + A'}\,.F''.\,\overline{B + B'}$, & ainſi de ſuite. A ne peut donc être donné en général que par une équation aux différences partielles, même lorſqu'il eſt ſuppoſé d'un ordre moindre; mais lorſqu'il eſt fini, on peut le trouver par une équation de l'ordre n, qui peut admettre une ſolution complette, ou ſeulement incomplette : & comme dans ce cas, quoique dx ſoit ſuppoſé conſtant, on a toujours A donné en x & y, il eſt clair que cette équation n'eſt jamais néceſſairement poſſible en général. On voit ici la vraie raiſon pour laquelle on ne peut point en général, comme je l'ai dit dans ma Préface, tirer de la connoiſſance de la fonction V, celle de A ou des différences partielles de B, lorſque $AV = dB$, parceque B a néceſſairement une infinité de valeurs, qui ne peuvent être renfermées que dans une équation aux différences partielles.

L'équation dont je viens de développer l'intégration, eſt la forme générale de celle qui donne la valeur approchée de ce qu'il faut ajouter à une inconnue donnée par une équation différentielle, & dont on a d'ailleurs une valeur qui ne differe jamais de la vraie que d'une petite quantité. Soit en effet $V = 0$, V étant une fonction de x, dx, y, dy, d^2y, &c. & que X' ſoit une valeur approchée de y; je fais dans $V = 0$, $y = X' + nz$, n étant très petit, & j'ai, en négligeant les termes affectés de n, une équation de la forme $az + b\frac{dz}{dx} + c\frac{d^2z}{dx^2} \ldots + X = 0$. Je ſuppoſe enſuite que $y = X' + nz + n^2z'$, & faiſant la ſubſtitution en regardant z comme connu, j'aurai une équation de la forme $a'z' + b'\frac{dz'}{dx} + c'\frac{d^2z'}{dx^2} \ldots + X'' = 0$. a', b' c', &c. ſont ſans z, & cette quantité n'entre que dans la fonction X''. Faiſant encore $y = X' + nz + n^2z' + n^3z''$, j'aurai de même $a''z'' + b''\frac{dz''}{dx} + c''\frac{d^2z''}{dx^2} \ldots + X''' = 0$; & les z & z' n'entreront pas dans les a'', b'', c'', &c. mais ſeulement dans X'''. Il ſuit de-là que pour approcher à volonté de la racine de la propoſée, il faut déterminer d'abord les A, A', &c. pour les différentes équations approchées, leſquels A ſe peuvent connoître indépendamment de z; & ces quantités trouvées, on aura les z, z', z'' par les quadratures: & ſi m eſt l'expoſant de l'ordre de l'équation, & p celui du dégré d'approximation qu'on veut choiſir, il faudra chercher mpA, & employer mp quadratures ſuceſſives.

La ſuppoſition de ndz très petit en même tems que nz eſt juſte en général, dans ce ſens que dans cette hypotheſe

$n \frac{dz}{dx}$ ne peut être grand que pendant de petits eſpaces, & ſucceſſivement poſitif & négatif, les valeurs poſitives étant à très peu près égales aux négatives; mais ici, comme l'on eſt ſuppoſé connoître d'avance que $n z$ eſt très petit, elle eſt abſolument ſans inconvénient, ſi ce n'eſt qu'elle ne produiſe un terme multiplié par n^2, qui ſoit homogene à un terme multiplié par n. Dans ce cas, ſoit $d^p z$, $d^q z$, le coefficient de ce terme en z, p' le coefficient dz^p dans le terme multiplié par dz^p & qui eſt de l'ordre n, q' le terme multiplié par dz^q; celui dont il eſt ici queſtion eſt égal à $\frac{dp'}{2\,dx} + \frac{dq'}{2\,dx}$: donc il ne peut être grand que dans la ſuppoſition que la différence d'une fonction très petite devienne finie. Il ne peut donc ſe trouver dans la propoſée de grands termes que dans cette hypotheſe, & alors ils ſont négligeables; c'eſt-à-dire qu'il n'en eſt pas moins vrai alors, qu'en ſuppoſant très petite la quantité dont eſt augmenté X, l'équation du premier dégré qui la donne, ſoit de la forme que je conſidere ici.

Les termes négligés de l'ordre n^2 dans la différentielle ne peuvent-ils point donner dans l'intégrale des termes de l'ordre n? Pour cela je ſuppoſe que je connoiſſe l'intégrale de la propoſée, & que j'y faſſe $y = X' + n z$; il eſt clair qu'en négligeant les termes de l'ordre n^2, j'aurai une équation de la forme $A n z + B = 0$: d'où il ſuit que ſi A & B ſont tels qu'on ait une équation algébrique de la forme ci-deſſus, il n'y a aucune difficulté; & qu'ainſi la queſtion ſe réduit en général à ſavoir ſi, ayant $n z = -\frac{B}{A}$,

nz étant très petit, on peut, quels que ſoient A & B, faire enſorte qu'en ne négligeant que les termes de l'ordre de n^2, $\frac{B}{A}$ ſoit de la forme que donne l'intégration d'une équation de la forme ci-deſſus.

Lorſque $X' = o$, on a $z = o$, & la propoſée eſt exactement réſolue par la ſuppoſition de $y = X$. Si l'on a $a = o$, $b = o$, $c = o$, & ainſi de ſuite; il eſt clair que regardant V comme une fonction finie de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. qui ſoit différenciée dans l'hypotheſe de $\delta y = nz$, $\delta.\frac{dy}{dx} = n\frac{dz}{dx}$, &c. il eſt clair, dis je, que $a = \frac{dV}{dy}$, $b = \frac{dV}{d.\frac{dy}{dx}}$, $c = \frac{dV}{d.\frac{d^2y}{dx^2}}$; & qu'ainſi l'on a, lorſque $a = o$, $b = o$, $c = o$, &c. $dV = \frac{dV}{dx}dx$. Or on a en général, lorſque $V = o$, $Vdx + n'dV = o$, n' étant un coefficient conſtant, ou même une fonction des variables, pourvu que n ne devienne pas ∞ lorſque $V = o$, & que l'on puiſſe intégrer ſans diviſer par V: donc on a ici $V + n'\frac{dV}{dx} = o$, &, ſi le même inconvénient a encore lieu, $V + n'\frac{dV}{dx} + n''\frac{d^2V}{dx^2} = o$, & à l'infini $V + \delta V = o$, V étant différencié en ne ſuppoſant que x variable; & faiſant δx égal à une conſtante, on a une fonction de x, ſi cela eſt néceſſaire.

Si, au lieu d'être nuls, a, b, c, &c. ſont ſeulement très petits par rapport à tous les autres termes, on peut employer la même ſubſtitution pour en avoir des valeurs auxquelles la méthode puiſſe s'appliquer.

Je finirai par une réflexion qui peut être utile ; c'eſt que les termes qui de petits dans la différentielle deviennent grands dans l'intégrale, ſont preſque toujours ceux qui produiſent une tranſcendante, & qui ſont multipliés par une arbitraire, enſorte que c'eſt, pour ainſi dire, de la grandeur de cette arbitraire que dépend ce changement : il ſuit de-là que lorſque X, valeur de y, ne contient point de tranſcendantes exponentielles, on peut, du moins dans bien des cas, ſuppléer, par la détermination des arbitraires, à l'inconvénient qui peut naître de ces termes que l'intégration a fait devenir plus grands.

Il ſuit de la forme qu'a néceſſairement l'intégrale de l'équation différentielle de la forme ci-deſſus, 1°. que la valeur de z ne contient d'angles, ſi X' n'en contient pas, que lorſqu'un A eſt algébrique, & que l'intégrale de cet A multiplié par la fonction en x, ne l'eſt pas ; mais comme il ne peut alors y entrer que des puiſſances entieres & rationnelles, ils ne peuvent être réels ſans que z devienne très grand, ce qui eſt contre l'hypotheſe ; & par conſéquent il n'entre réellement point d'angle dans l'intégrale lorſque z reſte très petit : 2°. que la valeur de z ne contient, dans la même hypotheſe, de coſinus irrationnel que lorſque les A en contiennent ; ce qui donne le moyen de diſtinguer ce cas des autres, indépendamment de l'intégration.

Je vais examiner ici différentes formes de ſuites infinies, pour voir s'il n'y en a pas quelqu'une qui puiſſe, dans tous les cas, donner une valeur approchée de y, quelle que ſoit l'équation différentielle entre y & x. Je conſidere d'abord la ſuite infinie de la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$, &c. Cette ſuite peut toujours repréſenter y, ſi, l'équation étant donnée en y & x', on y a fait $x' = x + g$, g reſtant une conſtante indéterminée. Suppoſant qu'on cherche y depuis $x = a'$ juſqu'à $a = b'$, & que $b' - a'$ ſoit fini, il eſt ſûr que prenant un nombre m de termes, tels que $\frac{b'-a'}{m}$ ſoit très petit, la formule ci-deſſus pourra fournir une valeur approchée de y; & faiſant enſorte, dans l'équation différentielle, que a' ſoit à peu près nul, il eſt clair qu'on peut, tant que x n'eſt pas plus grand que b, avoir une valeur approchée en prenant m termes. Cependant, ſubſtituant pour y ſa valeur en ſuite, & déterminant les coefficiens, on ne trouvera pas toujours cette valeur approchée, mais ſeulement lorſque la ſuite doit réellement devenir convergente, c'eſt-à-dire lorſqu'on pourra prendre g tel que, lorſque x n'eſt pas plus grand que b', les termes des fonctions fractionnaires irrationnelles tranſcendantes, ou entre x, ſoient petits à l'égard du terme conſtant. Cette même forme de y eſt néceſſairement fauſſe lorſque y eſt petit, quel que ſoit x.

Je prends enſuite la forme $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, \&c.}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4, \&c.}$. Cette derniere forme peut quelquefois repréſenter la valeur de y, quel que ſoit x, d'une maniere approchée, même y étant toujours petit; ce qui ne contredit pas ce que j'ai dit ci-deſſus, pages 19 & 24, parce qu'il n'y eſt point queſtion des modifications qui peuvent rendre des valeurs particulieres de coefficiens de la fonction en x. Ainsi, ce que je dis, page 24, n'est vrai en général que lorsque la fonction regardée comme fonction de l'angle x, est sous une forme rationnelle. Il faut, pour que y reste toujours petit, que, par la substitution dans l'équation différentielle, on puisse avoir cette valeur approchée, & conséquemment que la suite soit réellement convergente; encore faut-il de plus, dans le cas de y toujours très petit, s'arrêter à un terme pair, & appellant A la plus grande valeur de y, faire ensorte que $a' + b'x + c'x^2 + px^{2n} \ldots - A' = 0$, n'ait que des racines imaginaires lorsque $A' > A$.

Les deux formes ci-dessus ne représentent par elles-mêmes qu'une seule valeur de y. Pour qu'elles en représentent plusieurs, il faut que a, b, c, d, en aient eux-mêmes plusieurs; mais alors, au lieu que toutes ces valeurs de y sont liées ensemble par la loi de continuité dans la vraie équation, elles ne le sont plus dans l'équation approchée; ce qui fait que la valeur de y se présente sous une forme fausse: & de plus, soit que l'on cherche à déterminer les coefficiens par des observations, soit qu'on les détermine par la substitution de cette valeur de y dans l'équation différentielle, on ne peut en trouver les valeurs qu'en connoissant le nombre qu'on doit avoir; ce qui, dans le cas des observations, sert à déterminer les coefficiens, & dans le cas où l'on prend les équations différentielles, à déterminer les arbitraires.

Laissant donc ces deux formes de suites, qui ne peuvent être d'une grande utilité, je considere cette nouvelle forme, $a + b \cos. x + c \cos. 2x + d \cos. 3x + e \cos. 4x$,

&c. Cette suite, qui représente généralement la valeur de y en x, & qu'on peut rendre plus généralement convergente en prenant la forme

$$a + b \text{ cos. } x + c \text{ cos. } 2x + \ldots \text{ \&c.}$$
$$+ b' \text{ sin. } x + c' \text{ sin. } 2x + \ldots \text{ \&c.}$$

a l'avantage de pouvoir représenter y à peu près, quel que soit x : mais cette suite a l'inconvénient que la substitution dans une équation différentielle ne peut pas toujours servir à en déterminer les coefficiens, même à l'exception de quelques termes en nombre fini.

En effet, il est aisé de voir que, quelque fonction de cosinus x qu'on ait algébrique de transcendante, si l'on peut, par des différenciations successives, la mettre sous la forme dont je viens d'exposer l'intégration, les coefficiens y étant rationnels, on les aura en substituantla suite ci-dessus, à l'exception d'un nombre qui sera àgal à l'exposant de l'ordre de l'équation. Ces termes ne seront eux mêmes donnés en général que par approximation ; & comme par ce que j'ai déterminé ci-dessus on connoît la forme d'intégrales finies qui, pour un ordre indéfini, conviennent à cette forme d'équations, on connoîtra également pour quelles fonctions on peut trouver ainsi les coefficiens de la suite en cos. x. Au reste, la différence qu'il y a entre la détermination des coefficiens de cette forme de suite & celle des coefficiens de la suite $a + bx + cx^2$, &c. consiste principalement en ce qu'en continuant cette derniere suite, on a le coefficient des termes ultérieurs, sans altérer la valeur des termes précédens; ce qui ne se peut pas toujours pour la premiere espece : il faut donc

que

que non ſeulement les coefficiens forment une ſuite convergente, mais auſſi que la ſuite de termes qui donne chaque coefficient, le ſoit auſſi. Mais lorſqu'on cherche une valeur approchée, & qu'on ſuppoſe la ſuite infinie arrêtée à un certain terme, on aura facilement la valeur des coefficiens dans tous les cas. S'il y a pluſieurs valeurs en $\operatorname{coſ.} x$, quoiqu'elle n'en ait qu'une en x; faiſant entrer dans la ſuite un terme $\operatorname{coſ.} n x$, ſi elle a n valeurs, & ſi elle en a une infinité, y faiſant entrer ſoit l'angle x, ſoit un coſinus irrationnel, on pourra parvenir à repréſenter à peu près y, du moins dans le cas que y a par-tout un pareil nombre de valeurs. Soit maintenant que y n'ait point une infinité de valeurs, mais qu'elle en ait deux de moins, excepté lorſque x eſt entre a & b, je chercherai l'expreſſion la plus ſimple d'une fonction de $\operatorname{coſ.} x$, qui ne ſoit réelle que lorſque $x > a$ & $< b$, en obſervant que cette fonction devienne imaginaire lorſque $x = a + n'\Pi$, n' n'étant point un multiple de n. Si y a une infinité de valeurs, je chercherai une fonction de x qui ait la même propriété. Si, au lieu de deux valeurs de y, réelles ſeulement pour certaines valeurs de x, elle en avoit quatre réelles pour les mêmes valeurs, ou deux, quatre, ſix, &c. pour d'autres valeurs, il faudroit toujours de ſemblables fonctions. Ces fonctions trouvées, je les fais entrer dans l'expreſſion de y, comme de nouvelles variables, en ſuppoſant de plus à la ſuite un numérateur & un dénominateur.

Si y eſt le rayon vecteur d'un corps qui circule dans une courbe, il eſt clair qu'on doit avoir y en x, de maniere que y n'ait qu'une ſeule valeur réelle pour chaque valeur de x, à moins que le corps ne rétrograde : il eſt encore clair que, ſi après un certain nombre de révolutions il revient à peu près au même point, on peut ne pas faire entrer x dans la valeur de y : il eſt clair enfin que ſi l'on y fait entrer les coſinus d'un multiple irrationnel de x, on peut le regarder comme coſinus d'un multiple rationnel qui en approche ſi près qu'on voudra ; mais on peut de même regarder comme un coſinus irrationnel, ce même coſinus rationnel qui ſe trouveroit dans la valeur de y. D'où il ſuit que d'une valeur approchée de y, priſe d'une maniere quelconque, on peut difficilement s'aſſurer s'il y a ou non une équation ſéculaire de l'eſpece de celle qui n'exige point que l'angle parcouru entre dans l'équation du rayon vecteur. On voit de plus, que ſi l'on veut conſerver de ces ſinus, on peut les ſuppoſer réduits à un ſeul, & de la forme $\sqrt{n}$; parceque, ſoit m ce nombre égal à $p + q$, q étant très petit, je puis, dans l'équation $a + bq + cq^2 + dq^3 \ldots = 0$, négliger les termes au-deſſus de q^2.

Je ſuppoſe que y repréſente le coſinus de l'angle parcouru ou le rayon vecteur, & que x ſoit le tems, il eſt clair que y doit être une fonction de x, qui n'ait qu'une valeur pour chaque valeur de x : d'où il ſuit que y égalée à une fonction algébrique & rationnelle de x, coſ. x & coſ. nx, repréſentera toujours la vraie valeur de y.

Voici maintenant quelle utilité il me ſemble qu'on peut tirer de ces réflexions.

1°. Je ſuppoſe que j'aie une équation différentielle entre les rayons vecteurs, les angles parcourus & le tems, pour un corps animé de plusieurs forces accélératrices, dont plusieurs aient un rapport fini avec la plus grande : ce cas peut avoir lieu dans la théorie des cometes, s'il s'en trouvoit plusieurs assez voisines l'une de l'autre pour que leur attraction mutuelle balançât celle du Soleil. Alors, comme on n'auroit aucune valeur approchée du rayon vecteur ou de l'angle parcouru, le tems étant supposé donné, on pourroit, dans les équations différentielles que donne la théorie de la gravitation, substituer cette forme générale que j'ai dit pouvoir représenter y en tout tems, & trouver une valeur de y en déterminant les coefficiens. Cette valeur une fois trouvée, on traite cette équation comme une équation différentielle où l'on connoît une valeur approchée.

2°. Puisque j'ai y donné en x, cos. x, cos. $n'x$, y étant ou l'angle parcouru ou le rayon vecteur, & n' pouvant être irrationnel; j'ai, appellant P & Q les deux forces qui peuvent faire parcourir la courbe par un corps avec une vîtesse donnée, P & Q égaux à une fonction algébrique de x, cos. x & cos. $n'x$. Je suppose qu'il existe un autre corps qui se meuve également dans une courbe, & par lequel j'aie y égal à une semblable fonction, il est clair que P, Q, P', Q', seront des fonctions algébriques de y, y', rayons vecteurs, & des cosinus des angles parcourus. Lors donc qu'il se rencontre dans la nature un phénomene dont la loi des forces est inconnue, & qu'on cherche à le rapporter à un autre phénomene dont la loi des forces est aussi inconnue, on peut, s'il est possible de les rappeller à des courbes parcourues par un corps, regarder les forces comme des fonctions algébriques des rayons vecteurs des deux courbes, & des cosinus des angles parcourus : & comme il faut que pour une seule valeur du rayon & de l'angle parcouru les forces n'aient qu'une valeur, on peut supposer cette fonction rationnelle. On voit de-là, quelle doit être, dans toute cette classe de phénomenes, la forme de l'expression approchée des forces; & c'est tout ce qu'on peut connoître. La loi de la gravitation universelle en raison inverse du quarré des distances, satisfait aux loix découvertes par Képler, & aux observations faites sur les Satellites; mais cette loi n'est peut-être que l'expression approchée d'une autre loi, dont la différence avec elle demeurera insensible, & qui par conséquent nous sera toujours inconnue. Qui sait même si après de longs espaces de tems, auprès desquels ce que nous connoissons de durée ne seroit qu'un instant insensible, il n'arrivera pas que l'insuffisance de cette loi se fasse sentir, & qu'il faille alors recourir à une expression plus approchée de la véritable loi ?

3°. Appellant x le tems, on a une équation différentielle algébrique du second ordre entre x & y, soit que y représente le rayon vecteur, soit qu'il représente le cosinus de l'angle parcouru. Donc, toutes les fois qu'on connoît y en x par des observations faites à très peu de distance les unes des autres, on aura cette équation différentielle par la méthode que j'ai indiquée ci-dessus : & on aura également la loi des mêmes phénomenes par une équation semblable.

Comme tous les phénomenes que nous offre la nature ont une loi déterminée, il eſt clair que, pourvu que la loi de continuité ſoit obſervée, les expreſſions ci-deſſus ſerviront dans tous les cas, parceque les valeurs des fonctions arbitraires qui pourroient entrer dans les vraies expreſſions, ſont déterminées pour chaque cas particulier, & liées entre elles, pour les différens cas, par des équations analytiques.

Cette recherche des forces qui s'exercent dans les divers phénomenes, & qu'on peut déduire des obſervations, eſt le ſeul moyen de faire des progrès réels dans la connoiſſance des loix en vertu deſquelles l'Univers eſt à chaque inſtant ce que nous le voyons être. L'attraction en raiſon inverſe du quarré des diſtances, & inhérente à toutes les particules de la matiere ſuppoſée homogene, eſt la ſeule que nous connoiſſions; & elle ſuffit pour expliquer la théorie des mouvemens céleſtes, & des plus petites variations qui naiſſent de la figure des planetes: mais cet accord entre la théorie & les phénomenes ne nous met pas en droit de conclure ni que cette attraction ſuive la même loi dans les petites diſtances, ni qu'elle affecte uniformément les élémens de tous les corps, ni qu'elle ſoit la ſeule qui s'exerce dans la nature. La théorie & les obſervations peuvent réſoudre complettement le premier doute; on peut réſoudre le ſecond pour tous les corps que nous connoiſſons, & le dernier pour tous les phénomenes dont nous pouvons déterminer les loix: mais leur ſolution complette eſt impraticable pour l'eſprit humain; & les Obſervateurs trouveront toujours plus de phénomenes, que les Géometres n'en pourront calculer ou expliquer. Voici quelques regles générales qui peuvent faciliter ce travail, & que je joins ici, parceque, quoique très ſimples, elles peuvent être de quelque utilité, lorſqu'on voudra perfectionner l'ouvrage que Newton a commencé avec tant de ſuccès.

I. Lorſque nous connoiſſons une force qui a lieu dans pluſieurs phénomenes, nous ne devons ſuppoſer qu'elle ait lieu dans d'autres, que lorſqu'aucune fonction des quantités qui entrent dans les premiers, & qui y eſt très petite, ne peut devenir finie dans les autres. Ainſi, en général il faut ſuppoſer la force qui s'exerce dans les phénomenes où l'on veut l'étendre, égale à la valeur de la force priſe dans les autres, plus une fonction des variables, qui, inſenſible dans ceux-ci, devient dans ceux-là une grandeur ſenſible.

II. Si, la maſſe de matiere reſtant la même, un phénomene demeure conſtant tant que la figure des corps & leur poſition reſteront les mêmes, & que les changemens qui arrivent dans ce phénomene ne dépendent que de toutes ces choſes; on peut ſuppoſer qu'une même force anime tous les élémens de cette maſſe de matiere.

III. S'il arrive d'autres changemens que ceux qui réſultent de la figure & de la poſition, il faut ſuppoſer une autre force & des élémens de matiere abſolument hétérogenes & doués de forces différentes; & les phénomenes varieront & à raiſon de la poſition & de la figure des corps, & à raiſon de la combinaiſon des élémens.

Telles ſont, MONSIEUR, les réflexions que j'ai ſoumiſes à votre jugement. Vous permettez qu'elles paroiſſent ſous vos auſpices. Cette marque de votre eſtime & de votre amitié me flatte bien plus que tout l'honneur que je pourrois jamais acquérir dans la carriere où je ſuis entré. J'aurois bien déſiré pouvoir me livrer ici à ma reconnoiſſance, & me conformer à un uſage bien doux à ſuivre lorſqu'il s'agit d'un ami ; mais vous ne me le permettriez pas, & je ſuis obligé de renfermer dans mon cœur des ſentimens qui me ſont communs avec quiconque ſent le prix des vertus & du génie, & qui chez moi ne ſont plus vifs, que parceque j'ai l'avantage de vous connoître mieux.

FIN.